

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΜΕΡΟΣ 1

Θα αναπτύξετε μία γρήγορη υλοποίηση του Διακριτού Μετασχηματισμού Συνημιτόνου (Discrete Cosine Transform, DCT) χρησιμοποιώντας το Matlab ή το Octave.

Ο μονοδιάστατος DCT, $F(u)$ μίας ακολουθίας $f(x)$, $x = 0, \dots, N - 1$ δίνεται από την εξίσωση

$$F(u) = w(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos\left[\frac{(2x+1)\pi u}{2N}\right], \quad (1)$$

όπου

$$w(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{αν } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (2)$$

και $u = 0, \dots, N - 1$.

Είναι δυνατόν να υπολογιστεί ο $F(u)$, ο DCT της ακολουθίας $f(x)$ μέσω του $G(u)$, του DFT της ακολουθίας $g(x)$, όπου

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq N - 1 \\ f(2N - 1 - x), & N \leq x \leq 2N - 1 \end{cases} \quad (3)$$

Ο DFT της $g(x)$ είναι

$$G(u) = \sum_{x=0}^{2N-1} g(x) W_{2N}^{xu}, \quad (4)$$

όπου $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$ και $u = 0, \dots, 2N - 1$.

Οι $f(x)$ και $F(u)$ έχουν μήκος N ενώ οι $g(x)$ και $G(u)$ έχουν μήκος $2N$. Υπάρχει όμως ο Fast Fourier Transform (FFT), που είναι μία γρήγορη υλοποίηση του DFT. Άρα, υπολογίζοντας το $G(u)$ και σχετίζοντάς το με το $F(u)$, μπορούμε να μειώσουμε σημαντικά την υπολογιστική πολυπλοκότητα της υλοποίησης, σε σύγκριση με υλοποίηση χρησιμοποιώντας τον ορισμό του DCT.

Πρέπει να κάνετε τα εξής:

1. Βρείτε αναλυτικά τη σχέση μεταξύ $G(u)$ και $F(u)$. Δώστε όλες τις λεπτομέρειες της μαθηματικής απόδειξης.
2. Γράψτε μία συνάρτηση `mydct.m` η οποία για μία ακολουθία εισόδου $f(x)$ υπολογίζει τη $g(x)$, μετα υπολογίζει το $G(u)$ με τη συνάρτηση `fft.m` του Matlab ή του Octave, και τέλος υπολογίζει το $F(u)$, τον DCT της $f(x)$ από το $G(u)$.

3. Γράψτε μία συνάρτηση `mydct2.m`, η οποία υπολογίζει τον διδιάστατο DCT ενός διδιάστατου πίνακα $f(x, y)$. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `mydct.m` σε συνδυασμό με row-column decomposition. Αυτό σημαίνει ότι ο διδιάστατος DCT υπολογίζεται σε δύο βήματα. Πρώτα, κάθε γραμμή του πίνακα $f(x, y)$ θεωρείται ως ένα μονοδιάστατο σήμα και λαμβάνεται ο μονοδιάστατος DCT κάθε γραμμής. Έπειτα, κάθε στήλη του αποτελέσματος θεωρείται ως μονοδιάστατο σήμα και λαμβάνεται ο μονοδιάστατος DCT κάθε στήλης.
4. Δημιουργήστε έναν οποιοδήποτε πίνακα μεγέθους 8×8 και υπολογίστε τον DCT χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `mydct2.m` και την ενσωματωμένη συνάρτηση `dct2.m`. Δείξτε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Κατά την υλοποίηση, προσέξτε ότι στις παραπάνω εξισώσεις οι δείκτες ξεκινούν από το 0, ενώ στο Matlab και στο Octave ξεκινούν από το 1.

ΜΕΡΟΣ 2

Σε αυτό το μέρος θα δείξουμε ότι ο DCT συγκεντρώνει την ενέργεια μίας εικόνας σε μικρό αριθμό συντελεστών.

1. Φορτώστε την εικόνα *Cameraman* χρησιμοποιώντας την εντολή: `f=imread('cameraman.tif');`. Μπορείτε να δείτε την εικόνα στην οθόνη χρησιμοποιώντας διάφορες συναρτήσεις όπως: `imagesc(f);`. Θα χρειαστεί επίσης να δώσετε την εντολή `colormap(gray);`.
2. Πάρτε τον DCT $F(u, v)$ της εικόνας χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `dct2.m`.
3. Δώστε τιμή μηδέν στους συντελεστές με $|F(u, v)| < 5$ και πάρτε τον αντίστροφο DCT χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `idct2.m`. Μετατρέψτε την εικόνα σε `uint8`. Εκτυπώστε την εικόνα που δημιουργήθηκε. Υπολογίστε το PSNR. Πόσοι συντελεστές μηδενίστηκαν;
4. Επαναλάβετε το παραπάνω βήμα για $|F(u, v)| < 10$ και $|F(u, v)| < 20$.

ΜΕΡΟΣ 3

Θα επαναλάβουμε το Μέρος 2, αλλά αυτή τη φορά θα χωρίσουμε την εικόνα σε μπλοκ μεγέθους 8×8 , όπως γίνεται στο JPEG.

1. Φορτώστε την εικόνα *Cameraman*.
2. Χωρίστε την εικόνα σε μπλοκ μεγέθους 8×8 .
3. Πάρτε τον DCT για κάθε μπλοκ 8×8 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `dct2.m`.

4. Δώστε τιμή μηδέν στους συντελεστές με $|F(u, v)| < 5$ και πάρτε τον αντίστροφο DCT για κάθε μπλοκ 8×8 χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `idct2.m`. Μετατρέψτε την εικόνα σε `uint8`. Εκτυπώστε την εικόνα που δημιουργήθηκε. Υπολογίστε το PSNR. Πόσοι συντελεστές μηδενίστηκαν (για ολόκληρη την εικόνα);
5. Επαναλάβετε το παραπάνω βήμα για $|F(u, v)| < 10$ και $|F(u, v)| < 20$.

Τι παρατηρείτε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Μέρους 2 και του Μέρους 3; Είναι καλύτερα να πάρουμε τον DCT σε ολόκληρη την εικόνα ή να τη χωρίσουμε σε μπλοκ 8×8 ;

Η προθεσμία για την παράδοση της άσκησης είναι στις 9 Νοεμβρίου 2021. Θα παραδώσετε τέσσερα αρχεία κώδικα και ένα αρχείο `pdf` που περιέχει τη μαθηματική απόδειξη, τις εικόνες και τα αποτελέσματα που ζητούνται. Η παράδοση θα γίνει με χρήση `turnin` και την εντολή: `turnin assignment1@mye025 mydct.m mydct2.m meros2.m meros3.m results.pdf`. Ανεβάστε τα αρχεία μεμονωμένα όπως παραπάνω, μην τα συμπίεσετε με `zip` ή `rar`.

Ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να παραδώσει τον δικό του κώδικα. Θα χρησιμοποιηθεί εργαλείο εντοπισμού αντιγραφής στον κώδικα και υποβολές που παρουσιάζουν αδικαιολόγητες ομοιότητες μεταξύ τους θα μηδενίζονται.