Metody numeryczne I

Aproksymacja funkcji

Janusz Szwabiński

szwabin@ift.uni.wroc.pl

Aproksymacja funkcji

1. Pojęcia podstawowe
   - zagadnienie aproksymacji
   - funkcje bazowe
   - typowe normy
   - rodzaje aproksymacji
2. Aproksymacja średniokwadratowa
   - wielomianowa
   - trygonometryczna
   - za pomocą funkcji sklejanych
   - aproksymacja funkcji ciągłych

Zagadnienie aproksymacji

$\mathcal{X}$	-	pewna przestrzeń liniowa
$\mathcal{X}_m$	-	m-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni $\mathcal{X}$
$f(x)$	-	funkcja, którą chcemy aproksymować

Definicja Aproksymacja liniowa funkcji $f(x)$ polega na wyznaczeniu takich współczynników $a_0, a_1, \ldots, a_m$ funkcji

$$F(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_m\phi_m(x)$$

gdzie $\phi_0(x), \ldots, \phi_m(x)$ są funkcjami bazowymi podprzestrzeni $\mathcal{X}_{m+1}$, aby funkcja $F(x)$ spełniała pewne warunki, np. minimalizowała normę różnicy $\|f(x) - F(x)\|$

Definicja Aproksymacja wymierna funkcji $f(x)$ polega na znalezieniu takich współczynników $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$ funkcji

$$F(x) = \frac{a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_n\phi_n(x)}{b_0\psi_0(x) + b_1\psi_1(x) + \ldots + b_m\psi_m(x)}$$

gdzie $\phi_i(x)$ i $\psi_j(x)$ ($i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$) są elementami tej samej bazy k wymiarowej podprzestrzeni liniowej ($k = \max(m, n)$), aby funkcja $F(x)$ spełniała pewne warunki, np. minimalizowała normę różnicy $\|f(x) - F(x)\|$

Przykłady funkcji bazowych

- funkcje trygonometryczne

  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin kx, \cos kx$

- jednomiany

  $1, x, x^2, \ldots, x^m$

- wielomiany

  $1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0) \cdots (x - x_m)$

- wielomiany Czebyszewa, Legendre'a

Wybór bazy wpływa na

- dokładność i koszt obliczeń

Typowe normy

- Czebyszewa

$$\|f\| = \sup_{\langle a,b \rangle} |f(x)|$$

- L_2

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

- L_2 z wagą

$$\|f\|_{2,w} = \left(\int_a^b w(x) |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

- „dyskretna”

$$\|f\| = \left(\sum_{i=0}^{n} [f(x_i)]^2 \right)^{1/2}$$

Rodzaje aproksymacji

- średniokwadratowa, kiedy szukamy funkcji $F(x)$ minimalizującej całkę

$$\|f(x) - F(x)\| = \int_a^b w(x)\left[F(x) - f(x)\right]^2 \mathrm{d}x$$

lub sumę

$$\|f(x) - F(x)\| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - f(x_i)]^2$$

$$w(x_i) \geqslant 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, n$$

- jednostajna, kiedy szukamy funkcji $F(x)$ minimalizującej normę

$$\|F(x) - f(x)\| = \sup_{x \in \langle a,b \rangle} |F(x) - f(x)|$$

Twierdzenie Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na skończonym przedziale $\langle a, b\rangle$, to dla każdego ϵ dodatniego można dobrać takie n, że jest możliwe utworzenie wielomianu $P_n(x)$ stopnia n $(n = n(\epsilon))$, który spełnia nierówność

$$|f(x) - P_n(x)| < \epsilon$$

na całym przedziale $\langle a, b\rangle$

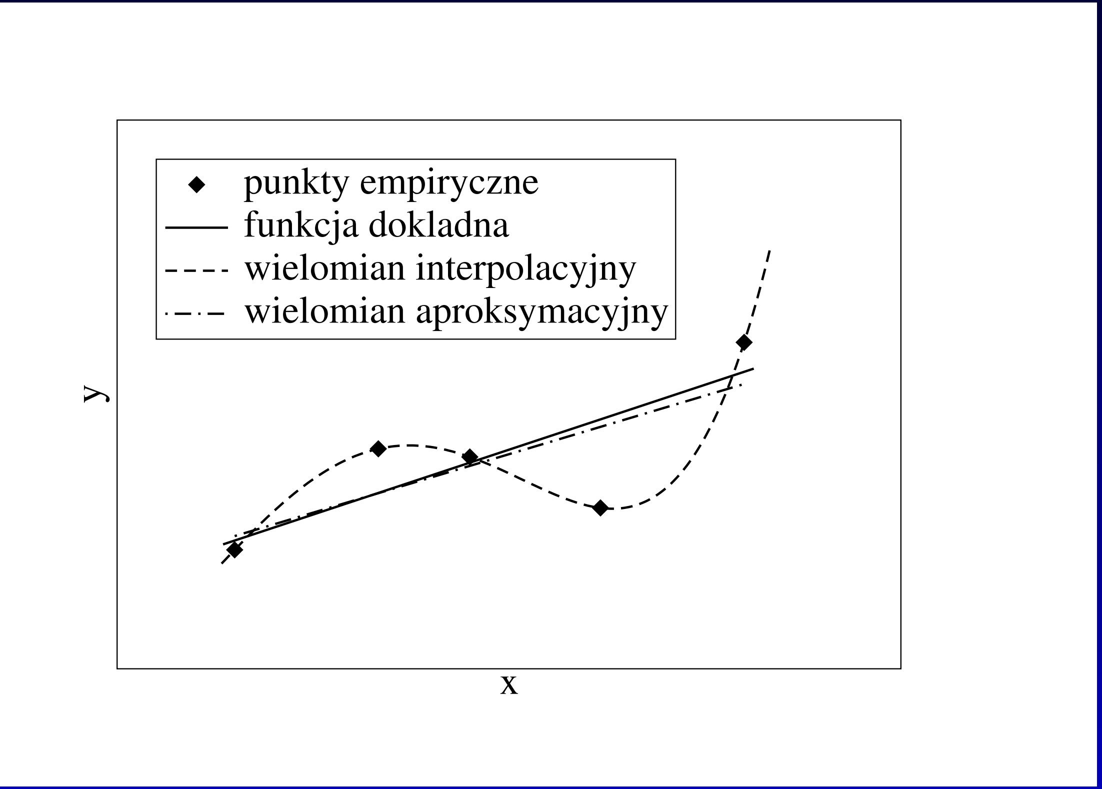
Twierdzenie Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na $\mathbf{R}$ i okresowa o okresie 2π, to dla każdego ϵ dodatniego istnieje wielomian trygonometryczny

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n = n(\epsilon)$$

spełniający dla wszystkich x nierówność

$$|f(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

Aproksymacja średniokwadratowa



Szukamy wielomianu uogólnionego

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i(x)$$

takiego, że suma

$$\|F(x) - f(x)\| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[F(x_i) - f(x_i)\right]^2$$

osiąga minimum

$$H(a_0,\ldots,a_m)=\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\left[f(x_j)-\sum_{i=0}^{m} a_i\phi_i(x_j)\right]^2=\sum_{j=0}^{n} w(x_j)R_j^n$$

Układ normalny ($k=0,1,\ldots,m$)

$$\frac{\partial H}{\partial a_k}=-2\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\left[f(x_j)-\sum_{i=0}^{m} a_i\phi_i(x_j)\right]\phi_k(x_j)=0$$

$\phi_j(x)$ tworzą bazę

$\Rightarrow$ wyznacznik różny od zera

$\Rightarrow$ rozwiązanie układu minimalizuje sumę $\|F(x)-f(x)\|$

Aproksymacja wielomianowa

Niech $\phi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \ldots, m$ oraz $w(x) \equiv 1$

$\Rightarrow$ układ normalny ma postać

$$\sum_{j=0}^{n} \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i x_j^i \right] x_j^k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

Stąd

$$\sum_{i=0}^{m} a_i g_{ik} = \rho_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k}, \quad \rho_k = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) x_j^k$$

Jeśli punkty $x_0, \ldots, x_n$ są różne oraz

- $m \leqslant n$

  $\Rightarrow$ wyznacznik układu jest różny od zera

  $\Rightarrow$ układ ma jednoznaczne rozwiązanie

- $m = n$

  $\Rightarrow$ $F(x)$ pokrywa się z wielomianem interpolacyjnym

  $\Rightarrow$ $H = 0$

Uwaga

- dla $m \geqslant 6$ układ normalny aproksymacji wielomianowej jest źle uwarunkowany

  $\Rightarrow$ aproksymację z jednomianami jako funkcjami bazowymi stosujemy tylko dla małych m

  $\Rightarrow$ dla dużych m lepiej stosować jako bazę wielomiany ortogonalne

Aproksymacja trygonometryczna

$f(x)$ jest określona na dyskretnym zbiorze punktów

$$x_i = \frac{\pi i}{L}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2L - 1$$

Mamy

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \sin m x_i \sin k x_i = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ L, & m = k \neq 0 \\ 0, & m = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \cos mx_i \cos kx_i = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ L, & m = k \neq 0 \\ 2L, & m = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \cos mx_i \sin kx_i = 0$$

Szukamy funkcji aproksymującej postaci

$$y_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j sinjx)\,, \quad n < L$$

Żądanie minimalizacji sumy

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \left[f(x_i) - y_n(x_i)\right]^2$$

prowadzi do

$$
\begin{aligned}
a_j &= \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)\cos jx_i = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)\cos\frac{\pi i j}{L} \\
b_j &= \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)\sin jx_i = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)\sin\frac{\pi i j}{L}
\end{aligned}
$$

$$
(j = 1, 2, \ldots, n)
$$

Aproksymacja za pomocą funkcji sklejanych

Funkcja jest określona na dyskretnym zbiorze punktów

$$x_i, \;\; i = 0, 1, \ldots, n_1, \;\; n_1 > n + 3$$

Funkcji aproksymacyjnej szukamy w postaci

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \phi_i^3(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

$$\phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) & \\ +3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) & \\ +3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & \text{dla} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Niech

$$I = \sum_{k=0}^{n_1} \left[f(x_k) - \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \phi_i^3(x_k) \right]^2$$

Warunek

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0, \quad i = -1, 0, 1, \ldots, n+1$$

prowadzi do

$$\sum_{i=-1}^{n+1} b_{ij} c_i = \sum_{k=0}^{n_1} f(x_k) \phi_j^3(x_k), \quad j = -1, 0, \ldots, n+1$$

$$b_{ij} = \sum_{k=0}^{n_1} \phi_i^3(x_k) \phi_j^3(x_k)$$

Aproksymacja średniokwadratowa funkcji ciągłych

Szukamy funkcji aproksymującej postaci

$$P(x) = a_0\phi_0(x) + \ldots a_n\phi_n(x)$$

gdzie $\phi_j(x)$ to elementy bazy pewnej podprzestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem

Niech

$$H_n = \int_a^b \mathrm{d}x\,[P(x) - f(x)]^2 = \int_a^b \mathrm{d}x \left[\sum_{i=0}^{n} a_i\phi_i(x) - f(x)\right]^2$$

Minimum H_n będzie minimalizowało normę

$$\|P(x) - f(x)\|$$

W tym celu rozwiązujemy układ

$$\frac{\partial H_n}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

względem współczynników a_i

Przykład Funkcję $f(x) = \sin x$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$ aproksymujemy wielomianem

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Układ równań ma postać

$$\begin{aligned}
a_0 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x + a_1 \int_0^{\pi/2} x \mathrm{d}x + a_2 \int_0^{\pi/2} x^2 \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x \\
a_0 \int_0^{\pi/2} x \mathrm{d}x + a_1 \int_0^{\pi/2} x^2 \mathrm{d}x + a_2 \int_0^{\pi/2} x^3 \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} x \sin x \mathrm{d}x \\
a_0 \int_0^{\pi/2} x^2 \mathrm{d}x + a_1 \int_0^{\pi/2} x^3 \mathrm{d}x + a_2 \int_0^{\pi/2} x^4 \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}a_0 + \frac{\pi^2}{8}a_1 + \frac{\pi^3}{24}a_2 &= 1 \\
\frac{\pi^2}{8}a_0 + \frac{\pi^3}{24}a_1 + \frac{\pi^4}{64}a_2 &= 1 \\
\frac{\pi^3}{24}a_0 + \frac{\pi^4}{64}a_1 + \frac{\pi^5}{160}a_2 &= -2
\end{aligned}$$

Stąd

$$P(x) \simeq 0,134 + 0,59x + 0,05x^2$$

Średni błąd aproksymacji

$$M^2 = (b-a)^{-1} H_n(a_0, a_1, a_2) \simeq 0,00797$$

Przykład Funkcję $f(x) = \sin x$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$ aproksymujemy posługując się wielomianami Legendre'a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1 \right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wprowadzamy zmienną

$$t = \frac{4}{\pi} x - 1$$

Aproksymować będziemy funkcję

$$\hat{f}(t) = \sin \frac{\pi(t+1)}{4}$$

wielomianem

$$W(t) = a_0 P_0(t) + a_1 P_1(t) + a_2 P_2(t)$$

Współczynniki wynoszą

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \sin\frac{\pi}{4}(t+1) = \frac{2}{\pi} \\
a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t t \sin\frac{\pi}{4}(t+1) = \frac{24}{\pi^2} - \frac{6}{\pi} \\
a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) \sin\frac{\pi}{4}(t+1) = -\frac{480}{\pi^3} + \frac{120}{\pi^2} + \frac{10}{\pi}
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
W(t) \simeq 0,6366197 + 0,5218492x - 0,1390961x^2
$$

$$
M^2 \simeq 0,0000704
$$