# Podstawy mechaniki kwantowej

Pytania na kolokwium

15 czerwca 2025

## Lista 1

**1. Jaka jest różnica między przestrzenią Hilberta a przestrzenią fizyczną?**

odpowiedź

**2. Czym jest operator liniowy w mechanice kwantowej?**

odpowiedź

**3. Zdefiniuj operator hermitowski.**

odpowiedź

**4. Jakie wielkości fizyczne odpowiadają operatorom hermitowskim?**

odpowiedź

**5. Czym są wartości własne i wektory własne w kontekście pomiarów kwantowych?**

odpowiedź

**6. Jakie jest fizyczne znaczenie iloczynu skalarnego w przestrzeni Hilberta?**

odpowiedź

**7. Wyjaśnij znaczenie normalizacji stanów kwantowych.**

odpowiedź

**8. Co oznacza, że dwa stany kwantowe są ortogonalne?**

odpowiedź

**9. Wyjaśnij pojęcie superpozycji stanów.**

odpowiedź

**10. Jakie są relacje komutacyjne operatorów położenia i pędu?**

odpowiedź

**11. Co oznacza, że dwa operatory komutują?**

odpowiedź

**12. Czym jest pełny układ bazowy w przestrzeni Hilberta?**

odpowiedź

**13. Co to jest operator unitarny?**

Operator liniowy w przestrzeni Hilberta, który zachowuje iloczyn skalarny.

**14. Jak transformacje unitarne zachowują prawdopodobieństwo?**

Transformacja unitarna $U$ spełnia $U^\dagger U = I$, więc zachowuje iloczyn skalarny:

$$\langle\psi|\psi\rangle \xrightarrow{U} \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle.$$

Ponieważ norma wektora stanu (a więc suma wszystkich prawdopodobieństw) pozostaje 1, każda amplituda przejścia $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ również się nie zmienia – stąd prawdopodobieństwa są zachowane.

**15. Wyjaśnij ewolucję czasową za pomocą operatora ewolucji.**

Ewolucja czasowa stanu układu kwantowego $|\psi(t)\rangle$ jest opisywana przez operator ewolucji $U(t_2, t_1)$, który propaguje stan z czasu $t_1$ do $t_2$, zgodnie z zależnością

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle \;=\; U\Big(t + \Delta t,\, t\Big)\,|\psi(t)\rangle.$$

**16. Wyjaśnij pojęcie stanów stacjonarnych.**

Stany stacjonarne to rozwiązania równania Schrödingera, w których funkcja falowa może być rozdzielona na część zależną od współrzędnych przestrzennych oraz część zależną od czasu,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\, f(t)$$

i opisują dozwolone poziomy energetyczne układu.

**17. Czym jest pakiet falowy?**

Pakiet falowy to zbiór fal, który można opisać funkcją falową $\Psi(x, t)$ w postaci całki po różnych pędach:

$$\Psi(x, t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p_x)\, e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)}\, \mathrm{d}p_x,$$

gdzie $\phi(p_x)$ jest funkcją określającą kształt pakietu falowego. Przykładem jest pakiet Gaussowski, dla którego $\phi(p_x)$ ma kształt funkcji Gaussa.

**18. Co oznacza transformacja Fouriera funkcji falowej i jakie ma znaczenie fizyczne?**

Transformacja Fouriera funkcji falowej pozwala na przejście z reprezentacji w przestrzeni położenia $\Psi(x, 0)$ do reprezentacji w przestrzeni pędu $\phi(p_x)$ i odwrotnie, co umożliwia jednoczesne opisanie stanu cząstki zarówno w kategoriach położenia, jak i pędu:

$$\phi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, 0)\, e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x}\, \mathrm{d}x,$$

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p_x)\, e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}\, \mathrm{d}p_x.$$

**19. Wyjaśnij zjawisko tunelowania kwantowego.**

odpowiedź

**20. Wyjaśnij transformację Fouriera między przestrzenią położeń a pędu.**

odpowiedź

**21. Czym są stany swobodne i związane?**

odpowiedź

### 22. Jakie są warunki ciągłości dla funkcji falowej i jej pochodnych?

odpowiedź

### 23. Co to jest operator momentu pędu?

odpowiedź

### 24. Jakie są relacje komutacyjne dla składników momentu pędu?

odpowiedź

### 25. Jakie są wartości własne $L^2$ i $L_z$?

$$L^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm},$$
$$L_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm},$$

gdzie:

- $Y_{lm}(\theta, \phi)$ – sferyczna funkcja harmoniczna,
- $\hbar$ – zredukowana stała Plancka, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$,
- $l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ – główna (orbitalna) liczba kwantowa,
- $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$ – magnetyczna liczba kwantowa.

### 26. Jaki jest związek między funkcjami $Y_{lm}$ a momentem pędu?

Funkcje $Y_{lm}(\theta, \phi)$ to sferyczne funkcje harmoniczne. Są funkcjami własnymi operatorów momentu pędu. Funkcje $Y_{lm}$ opisują część kątową funkcji falowej w układach sferycznie symetrycznych, np. w atomie wodoru.

### 27. Co to jest obrót w przestrzeni i jak działa na funkcje falowe?

Obrót w przestrzeni to transformacja układu współrzędnych (lub funkcji) polegająca na obróceniu obiektów względem punktu (zwykle początku układu współrzędnych) o pewien kąt wokół wybranej osi. Stan układu opisuje funkcja falowa $\psi(\vec{r})$. Obrót przestrzeni wpływa na sposób, w jaki ta funkcja jest rozłożona w przestrzeni.

### 28. Co to jest moment własny (spin)?

Moment własny, czyli **spin**, to wewnętrzna, kwantowa forma momentu pędu cząstki. Spin jest cechą wrodzoną cząstki i nie wynika z jej ruchu w przestrzeni. Opisywany jest operatorem $\vec{S}$. Na przykład cząstka w eksperymencie Sterna-Gerlacha ma spin $s = 1$, więc może przyjmować trzy stany spinu: $m_s = -1, 0, +1$.

### 29. Jakie są wartości dozwolone dla spinu cząstki?

Spin cząstki, może przyjmować wartości:

$$s \in \left\{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \dots\right\}.$$

### 30. Czym są macierze Pauliego?

Macierze Pauliego to zestaw trzech specjalnych macierzy $2 \times 2$, oznaczanych zwyczajowo jako $\sigma_x$, $\sigma_y$ oraz $\sigma_z$. Stanowią one podstawę do opisu operatorów spinu dla cząstek o spinie $\frac{1}{2}$. Mają postać:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pozwalają na opis stanów spinu i ich transformacji, m.in. w eksperymentach Stern-Gerlacha czy przy analizie obrotów kwantowych.

### 31. Zdefiniuj operator spinowy $S$.

odpowiedź

### 32. Co to jest doświadczenie Stern-Gerlacha i co pokazuje?

odpowiedź

### 33. Co to znaczy, że spin nie ma klasycznego odpowiednika?

odpowiedź

### 34. Jakie są stany własne atomu wodoru?

odpowiedź

**35. Jakie są liczby kwantowe w atomie wodoru?**

odpowiedź

**36. Wyjaśnij degenerację poziomów energetycznych w atomie wodoru.**

odpowiedź

**37. Na czym polega zakaz Pauliego?**

odpowiedź

**38. Czym jest symetria permutacji fermionów i bozonów?**

odpowiedź

**39. Czym jest model Bohra?**

odpowiedź

**40. Czym jest energia jonizacji?**

odpowiedź

**41. Czym jest efekt fotoelektryczny?**

odpowiedź

## Lista 2

**42. Na czym polega katastrofa ultrafioletowa?**

odpowiedź

**43. Jakie są eksperymentalne dowody tego, że światło istnieje, się emituje oraz jest absorbowane porcjami (kwantami)?**

odpowiedź

**44. Przedyskutuj zjawisko interferencji fal**

odpowiedź

**45. Czym są pakiety falowe? Problem normalizacji, przekształcenia pomiędzy przestrzenią położenia oraz przestrzenią pędu.**

odpowiedź

**46. Stany kwantowe, operatory oraz równanie Schrödingera w interpretacji Feynmana**

odpowiedź

**47. Twierdzenie Ehrenfesta**

odpowiedź

**48. Obserwable, równanie Schrödingera, zależne oraz niezależne od czasu, własne stany, własne energie**

odpowiedź

**49. Proste zagadnienia: swobodna cząstka**

odpowiedź

**50. Proste zagadnienia: potencjał w kształcie schodków, bariery, studni kwadratowej**

odpowiedź

**51. Proste zagadnienia: oscylator harmoniczny**

odpowiedź

**52. Formalizm mechaniki kwantowej, postulaty**

odpowiedź

## 53. Klasy i własności operatorów. Komutatory

W mechanice kwantowej operatory reprezentują obserwowalne wielkości fizyczne, takie jak pozycja czy pęd. Operatory działają na przestrzeni stanów (np. w przestrzeni Hilberta) i mogą mieć różne własności: być hermitowskie (samosprzężone), jednostkowe czy projekcyjne. Hermitowskie operatory odpowiadają mierzalnym wartościom rzeczywistym.

Klasa operatorów określa ich charakter (np. ograniczone, nieograniczone). Ważnym pojęciem są komutatory operatorów

$$[A, B] = AB - BA.$$

Jeśli

$$[A, B] = 0,$$

to operatory się komutują, co oznacza, że można jednocześnie mierzyć odpowiadające im wielkości z pełną precyzją. Niezerowy komutator wskazuje na fundamentalne ograniczenia pomiarowe, jak w przypadku zasady nieoznaczoności Heisenberga.

## 54. Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Zasada nieoznaczoności Heisenberga wyraża fundamentalne ograniczenie precyzji, z jaką można jednocześnie znać wartości pewnych par wielkości fizycznych, np. położenia $\hat{x}$ i pędu $\hat{p}$. Formalnie wyraża się to nierównością

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

gdzie $\Delta x$ i $\Delta p$ to odchylenia standardowe pomiarów operatorów położenia i pędu, a $\hbar$ to zredukowana stała Plancka.

Ta zasada wynika z faktu, że operatory położenia i pędu nie komutują, tzn.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

co implikuje, że nie istnieje wspólny zbiór własnych wektorów obu operatorów, a więc nie można jednocześnie przypisać im dokładnych wartości.

## 55. Operator momentu pędu, uogólniony operator momentu pędu, operator spinu: własne funkcje i wartości

Operator momentu pędu $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ opisuje moment pędu orbitalnego cząstki. Składowe operatora spełniają następujące relacje komutacyjne:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k,$$

gdzie $\epsilon_{ijk}$ to symbol Levi-Civity, a $i, j, k \in \{x, y, z\}$.

Operator kwadrat momentu pędu $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ oraz składowa $\hat{L}_z$ mają wspólny układ własnych funkcji $|l, m\rangle$, dla których zachodzą własności:

$$\hat{L}^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle, \quad \hat{L}_z|l, m\rangle = \hbar m|l, m\rangle,$$

gdzie $l = 0, 1, 2, \ldots$, a $m = -l, -l+1, \ldots, l$.

Uogólniony operator momentu pędu $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ łączy moment pędu orbitalny $\hat{\mathbf{L}}$ oraz spin $\hat{\mathbf{S}}$.

Operator spinu $\hat{\mathbf{S}}$ opisuje wewnętrzny moment pędu cząstek, niezwiązany z ruchem orbitalnym. Składowe spinu również spełniają relacje komutacyjne analogiczne do momentu pędu:

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_k.$$

Dla spinu $s$ (np. $s = \frac{1}{2}$ dla elektronu), własne wartości operatorów $\hat{S}^2$ i $\hat{S}_z$ są:

$$\hat{S}^2|s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s, m_s\rangle, \quad \hat{S}_z|s, m_s\rangle = \hbar m_s|s, m_s\rangle,$$

gdzie $m_s = -s, -s+1, \ldots, s$.

Własne funkcje momentu pędu i spinu tworzą bazę przestrzeni stanów kwantowych, na której można opisywać stan cząstki z uwzględnieniem zarówno ruchu orbitalnego, jak i spinu.

### 56. Atom wodoru: stany własne oraz energie własne

Atom wodoru opisuje równanie Schrödingera z potencjałem Coulomba:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

gdzie $m$ to masa elektronu, $e$ ładunek elementarny, a $r$ odległość elektronu od jądra.

Stany własne $|n, l, m\rangle$ są jednocześnie własnymi funkcjami operatorów:

$$\hat{H}|n, l, m\rangle = E_n|n, l, m\rangle,$$

$$\hat{L}^2|n, l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|n, l, m\rangle,$$

$$\hat{L}_z|n, l, m\rangle = \hbar m|n, l, m\rangle,$$

gdzie liczby kwantowe przyjmują wartości

$$n = 1, 2, 3, \ldots, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \quad m = -l, -l+1, \ldots, l.$$

Energia własna jest określona wzorem:

$$E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13.6\,\mathrm{eV}}{n^2}.$$

Energia zależy wyłącznie od głównej liczby kwantowej $n$, co prowadzi do degeneracji poziomów energetycznych względem liczb $l$ i $m$.

### 57. Własności funkcji falowych bozonów oraz fermionów

W mechanice kwantowej funkcje falowe bozonów i fermionów różnią się symetrią względem zamiany dwóch identycznych cząstek:

- **Bozony** mają symetryczne funkcje falowe, tzn. przy zamianie cząstek

$$\Psi(\ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_j, \ldots) = +\Psi(\ldots, \mathbf{r}_j, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots).$$

- **Fermiony** mają antysymetryczne funkcje falowe, tzn.

$$\Psi(\ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_j, \ldots) = -\Psi(\ldots, \mathbf{r}_j, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots).$$

Antysymetria funkcji falowej fermionów prowadzi do zasady Pauliego wykluczania, która zabrania zajmowania tego samego stanu kwantowego przez dwie identyczne fermiony.

Symetria funkcji falowej bozonów pozwala na zajmowanie tego samego stanu kwantowego przez wiele cząstek, co jest podstawą efektów takich jak kondensacja Bosego-Einsteina.