МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию № 1

Автор:
Студент гр. 106
Кондрашов Д.С.

Москва, 2024

Оглавление

Глава 1

Алгебра, математический анализ

Задача 1.1. *Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;1)$ и перпендикулярной прямой $y = x + 1$*

Решение Пусть искомая прямая имеет уравнение $y = kx + b$. Запишем условия перпендикулярности и принадлежности точки A:

$$\begin{cases} k \cdot 1 = -1 \\ 1 = k \cdot 2 + b \end{cases}$$

Решая систему получаем $k = -1$ и $b = 3$. Искомая прямая имеет уравнение: $\boxed{y = -x + 3}$ □

Задача 1.2. *Построить графики функций:*

$$a)\ \ y = \cos x - \sin x \quad b)\ \ y = 3\cos(2x + \pi/4) \quad c)\ \ y = 2|x+1| + 3$$

Решение Нарисовать график читатель сможет сам, используя графический калькулятор. Однако тут покажем алгоритм действий, чтобы построить подобные графики:
а) Для начала необходимо воспользоваться тождеством:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \pi/4)$$

Затем с помощью цепочки элементарных преобразований из графика $y = \cos x$ строим искомый график следующим образом:

1. Строим $y = \cos x$

2. Сдвигаем на $\pi/4$ влево по оси x

3. Растягиваем по оси y в $\sqrt{2}$ раз.

b) Строится похожим образом, что и a), однако тут есть уловка. Может показаться, что график получается стягиванием в 2 раза по x и смещением на $\pi/4$ влево, однако это не так. В действительности можно сделать просто эти два действия наоборот, но важно понимать, что сдвиг на самом деле будет на $\pi/8$, а не на $\pi/4$. Это аргументируется следующим образом:

$$3\cos(2x + \pi/4) = 3\cos(2(x + \pi/8))$$

Этот график уже получается растягиванием в 3 раза по y, стягиванием в 2 раза по x и смещением на $\pi/8$.

c) График получается элементарными преобразованиями с $y = |x|$:

1. Строим $y = |x|$

2. Сдвигаем на 1 влево по x

3. Растягиваем в два раза по y

4. Смещаем на 3 вверх по y

□

Задача 1.3. *Найти область определения функции* $y = \log_{x+0.5}(2x^2 - 7x + 6)$

Решение Для решения такой задачи необходимо знать ограничения для логарифма (или другой функции, которая определена не везде). Пусть дана функция

$$y = \log_{f(x)} g(x)$$

Ограничения в таком случае будут следующие:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Используя эту систему находим ограничения для нашей функции:

$$\boxed{D_y = (-0.5, 0.5) \cup (0.5, 1.5) \cup (2, +\infty)}$$

□

Задача 1.4. *Найдите все значения параметра p, при которых корни квадратного трехчлена* $3x^2+6x+p-1$ *различны и удовлетворяют неравенству* $x_1^2 + x_2^2 \leq 5$

Решение Решать будем с помощью формулы Виета. Давайте их сначала выведем, потому что это лучше, чем запоминать.
Пусть квадратный трехчлен раскладывается следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

где x_1 и x_2 – корни. Тогда раскрываем скобки:

$$ax^2 - x \cdot a(x_1 + x_2) + ax_1x_2$$

Откуда получаем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1x_2 = c/a \end{cases}$$

Как же получить $x_1^2 + x_2^2$? Все просто, возводим $x_1 + x_2$ в квадрат и получаем:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$
$$x_1^2 + x_2^2 = b^2/a^2 - 2c/a$$

Подставляя a, b, c из исходного выражения получаем

$$36/9 - 2(p-1)/3 \leq 5$$

Откуда находим p:

$$\boxed{p \geq -0.5}$$

□

Задача 1.5. *Найти наибольшее значение функции* $f(x) = (1 - x^2 - 2x)^3$

Решение Решать будем с помощью производной.

$$f'(x) = 3(1 - x^2 - 2x)^2(-2x - 2)$$

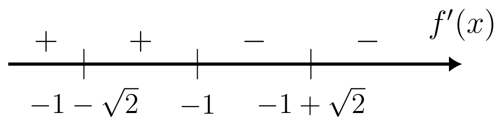
Находить промежутки монотонности функции будем с помощью решений уравнения $f'(x) = 0$ и метода интервалов.
Заметим, что множитель $(1 - x^2 - 2x)^2$ положителен или равен нулю. Для начала упростим $f'(x)$:

$$f'(x) = -6(x^2 + 2x - 1)^2(x + 1)$$

Можно выделить полный квадрат:

$$f'(x) = -6((x + 1)^2 - 2)^2(x + 1)$$

$$f'(x) = -6(x+1+\sqrt{2})^2(x+1-\sqrt{2})^2(x+1)$$



Очевидно максимум будет в точке -1 (однако стоит это все-таки аргументировать). Нас просят найти значение функции в точке максимума, поэтому придется посчитать. Подставляя получим:

$$\boxed{\max f(x) = f(-1) = (1-1+2)^3 = 8}$$

□

Задача 1.6. *Решить неравенство:*

$$\frac{x^2+|x|-12}{x-3} \geq 2x$$

Решение Решать такие неравенства можно разными способами. Иногда от модуля можно полностью избавиться, сделав замену, однако в данном случае это невозможно. Всегда можно раскрыть модуль по определению. Тогда получится два неравенства.

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ \left[\begin{array}{ll} x^2+x-12 \geq 2x^2-6x, & x \geq 0 \\ x^2-x-12 \geq 2x^2-6x, & x < 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Решая систему получим ответ:

$$\boxed{(-\infty, 3) \cup (3, 4]}$$

□

Задача 1.7. *Решите уравнение:* $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$

Решение К сожалению такие уравнения решаются подбором. Надо хорошо знать схему Горнера и уметь быстро (и желательно без ошибок) считать. Иногда есть некоторые хитрости, которые можно использовать в свою пользу. Часто в таких задачах первый корень находится очень просто, обычно это ± 1. Хорошо бы знать симметричные и иные типы уравнений, которые решаются своими способами.

В данном случае схема Горнера и решение квадратного уравнения дают решения:

$$\boxed{x \in \{1, 2, \tfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}\}}$$

$\square$

Задача 1.8. *Является ли функция* $y = \cos^3 x - 5\sin x + x^2$ *четной или нечетной.*

Решение Для решения необходимо понимать, что происходит с четностью/нечетностью функции, когда мы берем от нее другую функцию. Для этого необходимо уметь пользоваться теоремами:

Легко проверить, что композиция четных функций четна, композиция нечетных – нечетна. Также легко проверить, что четная от нечетной – нечетна, нечетная от четной – четна. Это нам дает все инструменты для решения подобных задач.

Куб косинуса – четен, синус – нечетен, x^2 – четен. Сумма таких функций есть функция $\boxed{\text{общего вида}}$ $\square$

Задача 1.9. *Найти период функции* $y = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$

Решение Давайте для начала вспомним формулы перехода от произведения к сумме. А точнее вспомним как их вывести:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Отсюда можно найти:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

Подставим в исходную функцию:

$$y = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos(-x)) - \frac{1}{2}(\cos(-x) - \cos 3x)$$

Пользуясь четностью косинуса приходим к упрощенному виду:

$$y = \cos 3x$$

Отсюда период, очевидно, $\boxed{T = 2\pi/3}$ $\square$

Задача 1.10. *Найти точки разрыва функции и определить их вид. Найти асимптоты графика:*

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x^2+2x-3)}$$

Решение Для начала разложим знаменатель на множители:

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+3)(x-1)}$$

Тут к сожалению все точки разрыва скучные, поэтому давайте немного усложним задачу: пусть наша функция имеет вид

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)(x+1)}$$

Для того, чтобы определить тип точек разрыва, необходимо посчитать пределы функции вокруг них. Если пределы слева-справа равны и конечны, или оба конечны (но не обязательно равны), то это точка разрыва первого рода (в случае равенства пределов такой разрыв называют устранимым). Если же предел хотя бы с одной стороны бесконечен, то разрыв второго рода. Давайте считать.

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \frac{1}{12} \qquad \lim_{x\to -1+0} f(x) = \frac{1}{12}$$

Видим, что пределы слева и справа равны и конечны, значит разрыв устранимый (1 рода). Проделываем то же самое с другими точками:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3+0} f(x) = +\infty$$

Как видим, точки 2 и 3 – точки разрыва второго рода.
Теперь найдем асимптоты. Асимптоты бывают наклонные и вертикальные. Наклонные – прямые, заданные уравнением $y = kx + b$ (в частном случае $k = 0$ асимптота называется горизонтальной). Вертикальные – прямые $x = c$, где $c \in \mathbb{R}$ – некоторая константа.
Две вертикальные асимптоты $\boxed{x = 2}$ и $\boxed{x = 3}$ мы уже нашли, давайте проанализируем на наклонные.
Коэффициент k находится по формуле:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

k, вообще говоря, существует только когда предел в $+\infty$ равен пределу в $-\infty$. b находится по формуле:

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx)$$

b тоже существует, если пределы равны.
Используя эти формулы находим:

$$k = 0, \qquad b = 0$$

Тогда прямая $\boxed{y = 0}$ – горизонтальная асимптота. □

Задача 1.11. *Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

Решение Мы уже решали похожую задачу 1.5 (она даже немного сложнее). Поэтому здесь приведем только вычисление производной и ответ:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\boxed{f(x) \text{ убывает на } [-2, 0]}$$

$$\boxed{f(x) \text{ возрастает на } (-\infty, -2];\ \ [0, +\infty)}$$

$$\boxed{x = -2 \text{ – точка максимума, } x = 0 \text{ – точка минимума}}$$

Хочется обратить внимание на то, что ответ, где вместо точки с запятой стоит знак $\cup$ – неправильный. В этом можно убедиться построив график функции и применив определение возрастания функции на этом множестве. Конкретнее, оно говорит, что для *любого* $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)$. Если на множестве $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$ мы возьмем $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$, то $x_1 < x_2$, но $f(-2) = 2 > 0 = f(0)$ □

Задача 1.12. *Исследовать на монотонность* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$

Решение Задача идентична 1.11, поэтому решение приведено не будет.

Задача 1.13. *Найти критические точки, исследовать на монотонность* $y = x + \cos x$

Решение Тут уже задача поинтереснее, давайте также найдем асимптоты графика функции. Для начала найдем производную:

$$f'(x) = 1 - \sin x$$

Производная определена везде, поэтому ищем критические точки, решая уравнение $f'(x) = 0$. Оно равносильно

$$\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Критических точек – бесконечное множество. С промежутками монотонности уже интереснее, так как $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, поэтому можно сказать, что $\boxed{f(x) \text{ возрастает на всем } \mathbb{R}}$.
Теперь разберемся с асимптотами:
$\boxed{\text{Вертикальных нет}}$, так как нет точек разрыва. Наклонные ищем по уже известным формулам:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)$$

В силу ограниченности косинуса предел равен 1.

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (x + \cos x - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \cos x$$

Видим, что предела нет. Значит $\boxed{\text{наклонных асимптот тоже нет}}$. □

Задача 1.14. *На кривой $y = 2x^2 - x + 15$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y = -3x + 1$*

Решение Задача опять на применение производной. Ловушка заключается в том, что касательная может совпасть, это тоже надо бы проверить. Для начала найдем производную:

$$f'(x) = 4x - 1$$

Уравнение касательной в точке $x = x_0$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0)$$

Условие параллельности:

$$f'(x_0) = 4x_0 - 1 = -3 \Rightarrow x_0 = -1/2 \to f(x)$$

$$f(x_0) = f(-1/2) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 15 = 16$$

Подставляем в уравнение касательной

$$y = -3\left(x + \frac{1}{2}\right) + 16 \quad y = -3x + \frac{29}{2}$$

Она очевидно не совпала с $y = -3x + 1$, значит точка касания, которую нас просили найти:

$$\boxed{(-1/2; 16)}$$

$\square$

Задача 1.15. *Найдите сумму координат точки пересечения касательной, проведенной к графику функции* $f(x) = 2x^2 - 9x - 4$ *в его точке с абсциссой, равной 3, с осью ординат.*

Решение Условие достаточно запутанное, давайте разберемся, что от нас требуют: нам надо провести касательную к графику $f(x)$ в точке $x_0 = 3$, пересечь это касательную с осью ординат и найти сумму координат этой точки. Раз пересечение с осью ординат, то $x = 0$, значит сумма координат равна y (высоте над x).
Найдем производную:

$$f'(x) = 4x - 9$$

Уравнение касательной в $x = x_0 = 3$

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

$$y = 3(x - 3) - 13, \quad y = 3x - 22$$

Пересечение с осью ординат найдем подстановкой $x = 0$. Получаем $\boxed{\text{-22}}$

$\square$

Глава 2

Геометрия

Решать мы будем только задачи, требующие аналитических выкладок, либо задачи на векторы.

Задача 2.1. *В ДСК найти вектор, ортогональный плоскости (ABC), площадь △ABC, если A(1,2,1), B(0,3,-1), C(4,1,2)*

Решение Начнем с вектора, ортогонального ABC. Найти его можно с помощью векторного произведения, которое по определению перпендикулярно обоим векторам из него. Для этого найдем координаты векторов AB, AC:

$$AB(-1, 1, -2), \quad AC(3, -1, 1)$$

На самом деле нам хватит и двух векторов, что хорошо.

Найти координаты вектора, перпендикулярного плоскости (его еще называют нормалью к плоскости) можно вычислив определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1-2) - \vec{j}(-1+6) + \vec{k}(1-3) = \boxed{\text{(-1,-5,-2)}}$$

Если мы найдем модуль этого вектора, то он по определению равен площади *параллелограмма*, построенного на этих векторах. Площадь △ABC будет равна половине этого модуля.

$$S\triangle ABC = \frac{1}{2}|[AB, AC]| = \frac{1}{2}\sqrt{1+25+4} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

□

Задача 2.2. *Представить вектор $\vec{d}(-1, 1, 5)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}(3, 0, 2)$, $\vec{b}(-3, 2, 4)$, $\vec{c}(1, 1, 1)$.*

Решение Линейной комбинацией векторов называется сумма

$$\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{3}$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ – некоторый скаляр. Пользуясь свойствами координат при умножении на скаляр и суммировании получим, что координаты вектора $\vec{d}$ – $d_x,\ d_y,\ d_z$ выражаются через координаты исходных векторов следующим образом:

$$\begin{cases} d_x = \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x \\ d_y = \alpha_1 a_y + \alpha_2 b_y + \alpha_3 c_y \\ d_z = \alpha_1 a_z + \alpha_2 b_z + \alpha_3 c_z \end{cases}$$

Решив эту систему из 3 уравнений с 3 неизвестными $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ получим:

$$\boxed{\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1}$$

$\square$

Задача 2.3. *Выяснить, являются ли 2 вектора $\vec{a}_1(-1,-2,5)$ и $\vec{a}_2(2,-3,1)$ линейно зависимыми. Будут ли линейно зависимы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$, если $\vec{a}_3(1,0,6)$*

Решение Тут нужно вспомнить критерий коллинеарности векторов, очевидно, что $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, а значит линейно независимы.

Теперь надо вспомнить когда система из трех векторов является линейно зависимой. Это так в случае, когда векторы компланарны. Значит нужно использовать критерий компланарности. Найдем определитель (ориентированный объем параллелепипеда, построенного на этих векторах)

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 2 + 0 - (-15 - 24 + 0) = 55 \neq 0$$

Векторы некомпланарны, а значит $\boxed{\text{линейно независимы}}$ $\square$

Задача 2.4. *Лежат ли точки A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(1,2,3) в одной плоскости.*

Решение Достаточно проверить компланарность векторов AB, AC, AD. Если они компланарны, то и все точки лежат в одной плоскости. Для этого запишем координаты каждого из этих векторов и, аналогично предыдущему, посчитаем определитель.

$$AB(-1,-1,6), \quad AC(-2,0,2), \quad AD(0,0,4)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) = -8 \neq 0$$

Векторы некомпланарны, значит $\boxed{\text{точки не лежат в одной плоскости}}$ □

Задача 2.5. *Даны 4 точки A(1,1,-2), B(2,3,7), C(0,4,7), D(-1,2,-2). Докажите, что четырёхугольник ABCD - прямоугольник.*

Решение Найдем векторы, которые задают все 4 стороны.

$$AB(1,2,9), \quad BC(-2,1,0), \quad CD(-1,-2,-9), \quad DA(2,-1,0)$$

Достаточно будет показать, что скалярное произведение векторов, задающих соседние стороны, равно нулю. Посчитаем:

$$\begin{aligned} (AB,BC) &= & -2+2+0 &= 0 \\ (BC,CD) &= & 2-2+0 &= 0 \\ (CD,DA) &= & -2+2+0 &= 0 \\ (DA,AB) &= & 2-2+0 &= 0 \end{aligned}$$

□

Глава 3

Тригонометрия

Задача 3.1. *Вычислить* $\sin(0.5 \arccos(1/9))$

Решение Обозначим

$$\alpha = \arccos(1/9)$$

Нам нужно найти $\sin 0.5\alpha$, а мы знаем, что $\cos\alpha = 1/9$. Для начала надо вспомнить формулу половинного угла. Вытащим мы ее из формул понижения степени

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

Откуда

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$$

□

Задача 3.2. *Решить уравнение*

$$\sin 2x \cos(x + \pi/3) + \sin(x + \pi/3) \cos 2x = \sqrt{3}/2$$

Решение Можно просто раскрыть синус и косинус суммы, однако лучше заметить, что перед нами знакомая формула – синус суммы. Тогда вся левая часть сворачивается

$$\sin(3x + \pi/3) = \sqrt{3}/2$$

Решая относительно $3x + \pi/3$ получаем

$$\left[\begin{array}{ll} 3x + \pi/3 = \pi/3 + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ 3x + \pi/3 = 2\pi/3 + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 2\pi n/3, & n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi/9 + 2\pi k/3, & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$\square$