

Аналоговая электроника и техника измерений.

Электрические сигналы.

Аналоговая модуляция электрических сигналов.

Аналитический сигнал.

Электрические сигналы

Электрический сигнал это временная функция одной или нескольких электрических величин, несущая информацию (данные, сообщение) о состоянии какой-либо физической системы или объекта.

Электрические сигналы можно разделить на две основные группы – детерминированные и случайные.

Детерминированный сигнал это такой сигнал, значение которого можно предсказать для любого момента времени (описать некоей функцией).

Случайный сигнал описать невозможно, это помеха мешающая получить информацию.

Сигнал может быть постоянным или **импульсным**, т.е. действующим в определенный интервал времени.

Если функция представляющая сигнал непрерывна, сигнал принято называть **аналоговым**. Сигнал, не удовлетворяющий условию непрерывности – **дискретный**.

Дискретный сигнал это последовательность импульсов. Дискретный сигнал, нормированный по уровню, называется **цифровым сигналом**.

Модуляция и демодуляция.

Модуляция - это процесс преобразования одного или нескольких информационных параметров несущего сигнала в соответствии с мгновенными значениями информационного сигнала. В результате модуляции информационные сигналы переносятся в область более высоких частот.

Использование модуляции позволяет:

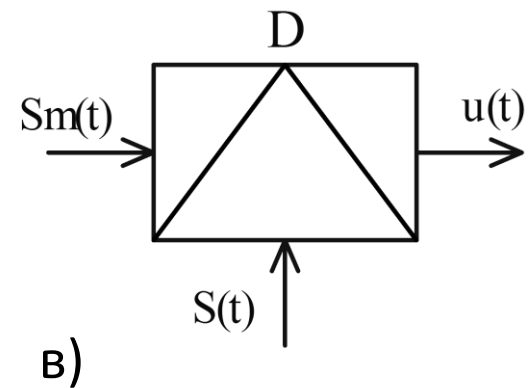
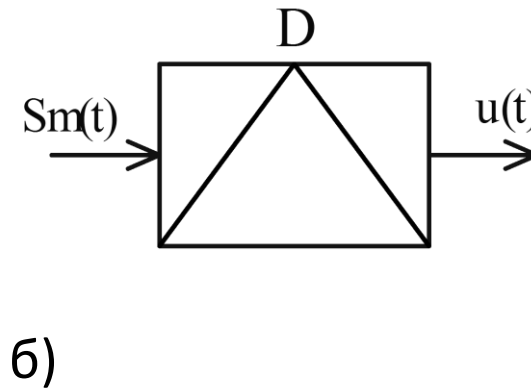
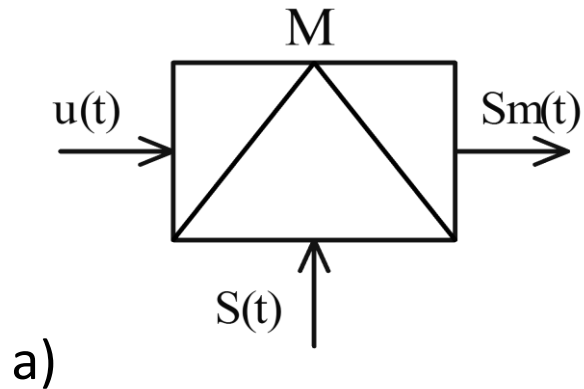
- согласовать параметры сигнала с параметрами линии;
- повысить помехоустойчивость сигналов;
- увеличить дальность передачи сигналов;
- организовать многоканальные системы передачи.

Демодуляция или **детектирование** сигналов – процесс выделения информационной составляющей из модулированного сигнала.

Процесс детектирования может осуществляться при когерентном приеме, когда при выделении данных используется информация о начальной фазе сигнала, и некогерентном приеме модулированного сигнала.

Модуляция электрических сигналов

$u(t)$ — модулирующий, является информационным (его частота обозначается Ω); $s(t)$ — модулируемый (несущий), высокочастотный (его частота обозначается ω_0); $S_m(t)$ — модулированный сигнал, являющийся информационным и высокочастотным.



На рисунках обозначения модулятора (а), некогерентного (б) и когерентного (в) детектора.

Если в качестве несущего сигнала используется:

гармоническое колебание, модуляция называется **аналоговой** или непрерывной;

если периодическая последовательность импульсов, модуляция называется **импульсной**;

если информационный сигнал дискретный, а несущий является гармоническим колебанием, то такую модуляцию принято называть **цифровой манипуляцией**.

Аналоговая модуляция электрических сигналов

В процессе модуляции изменяются информационные параметры несущего колебания, поэтому название вида модуляции зависит от изменяемого параметра этого колебания:

- **амплитудная модуляция (АМ)**, происходит изменение амплитуды несущего колебания;
- **частотная модуляция (ЧМ)**, происходит изменение частоты несущего колебания;
- **фазовая модуляция (ФМ)**, происходит изменение фазы несущего колебания.

В действительности два последних представляют один вид модуляции, называемый угловой модуляцией.

Амплитудная модуляция

Амплитудная модуляция - процесс изменения амплитуды несущего сигнала в соответствии с мгновенными значениями модулирующего (информационного) сигнала.

При воздействии однотонального модулирующего сигнала

$$u(t) = U_m \sin \Omega t$$

на несущее колебание

$$s(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

происходит изменение амплитуды несущего сигнала по закону:

$$U_{am} = U_0 + a_{am} U_m \sin \Omega t$$

$$S_{am} = (U_0 + a_{am} U_m \sin \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi) = U_0 \left(1 + a_{am} \frac{U_m}{U_0} \sin \Omega t\right) \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Амплитудная модуляция

$a_{am} \frac{U_m}{U_0} = m_{am}$ называется **коэффициентом (глубиной) амплитудной модуляции**.

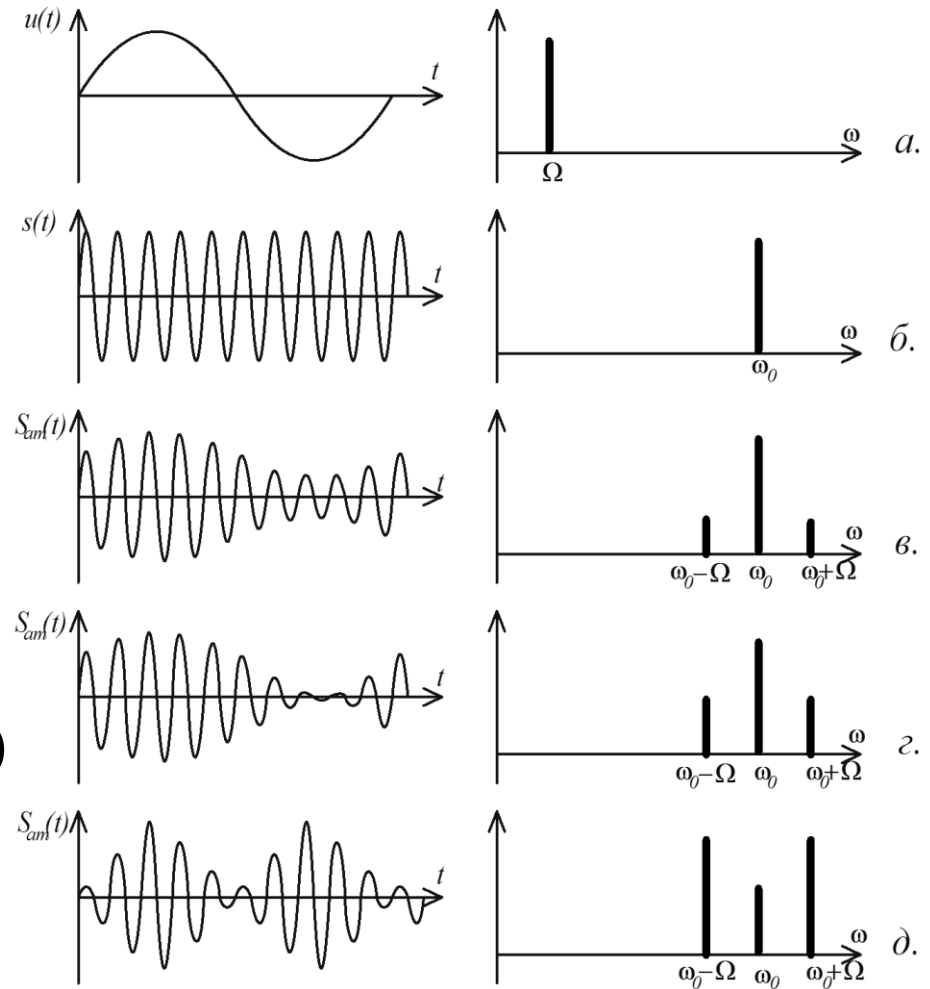
$$S_{am} = U_0(1 + m_{am} \sin \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$S_{am} = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) +$$

$$+ \frac{m_{am} U_0}{2} \sin((\omega_0 - \Omega)t - \varphi) + \frac{m_{am} U_0}{2} \sin((\omega_0 + \Omega)t + \varphi)$$

Ширина спектра:

$$\Delta\omega_{am} = (\omega_0 + \Omega) - (\omega_0 - \Omega) = 2\Omega$$

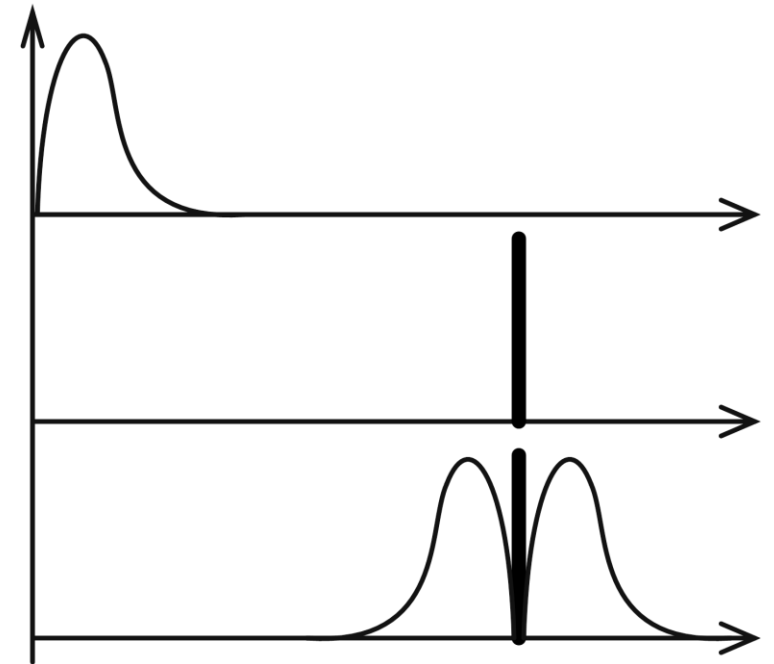


Спектр реального сигнала при амплитудной модуляции.

В случае реального сигнала, содержащего полосу частот, информационный и несущий сигналы умножаются, следовательно общий спектр определяется как свертка (одно из свойств преобразования Фурье) спектра несущего и спектра информационного сигналов.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\nu) u(\omega - \nu) d\nu = \pi U_0 \delta(\omega - \omega_0) + \frac{m_{am} U_0}{2} u(\omega + \omega_0) + \frac{m_{am} U_0}{2} u(\omega - \omega_0)$$

При амплитудной модуляции происходит сдвиг спектра на величину частоты несущего колебания, ширина спектра удваивается по отношению к спектру исходного сигнала.



Балансная и однополосная модуляция

Для однотонового сигнала при $m_{am} \gg 1$:

$$\begin{aligned} S_{am} &= U_0(1 + m_{am} \cos \Omega t) \cos(\omega_0 t) \approx U_0 m_{am} \cos \Omega t \cos(\omega_0 t) \\ &= \frac{U_0 m_{am}}{2} \cdot [\cos(\omega_0 - \Omega)t + \cos(\omega_0 + \Omega)t] \end{aligned}$$

Однополосная модуляция:

$$S_{am} \approx \frac{U_0 m_{am}}{2} \cdot \cos(\omega_0 - \Omega)t$$

Достоинства балансной и однополосной модуляций в экономике мощности передатчика и сужении полосы. Недостатки – более сложные способы модуляции и демодуляции, невозможность полного подавления несущей (необходима для восстановления информации при ОМ).

Спектры при балансной и однополосной модуляции

При балансной модуляции отсутствует полоса несущей частоты, спектр:

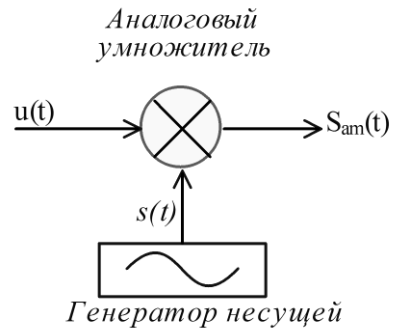
$$S(\omega) = \frac{m_{am} U_0}{2} (\mathbf{u}(\omega + \omega_0) + \mathbf{u}(\omega - \omega_0))$$

А при однополосной модуляции передается только одна из боковых полос:

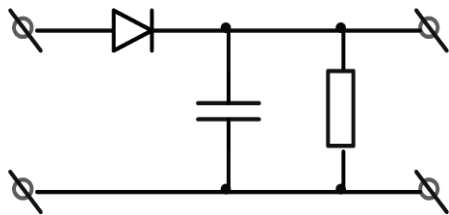
$$S(\omega) = \frac{m_{am} U_0}{2} \mathbf{u}(\omega + \omega_0)$$

Схемы модуляторов.

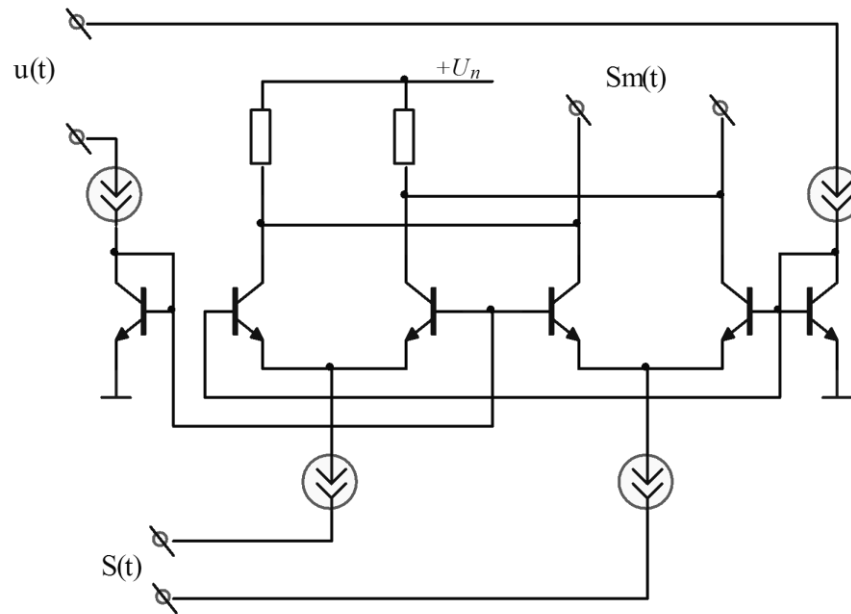
Функциональная схема амплитудного модулятора.



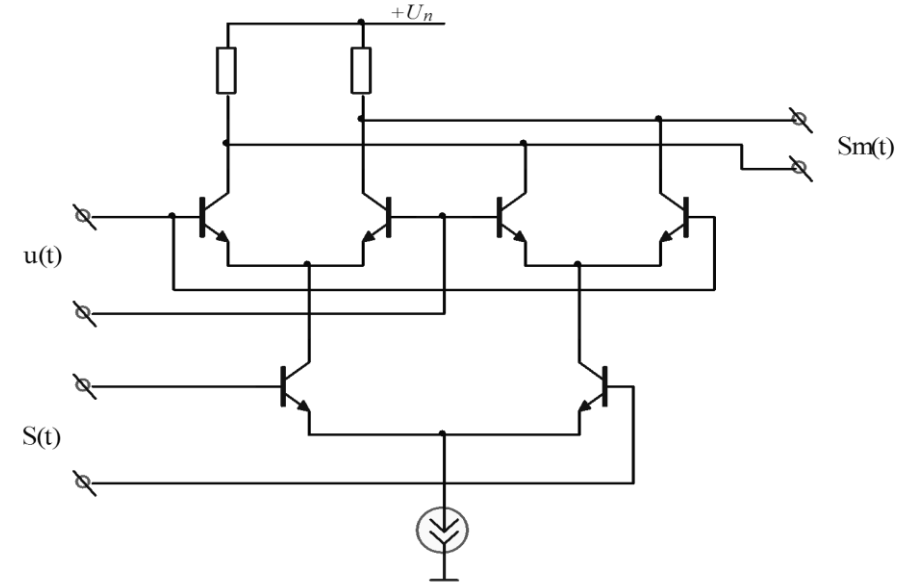
Простейший демодулятор



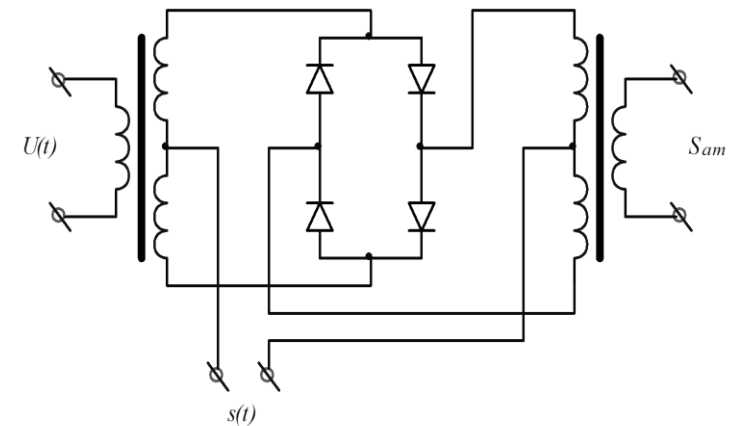
Ячейка Гильберта



Ячейка Джонса



Балансный кольцевой модулятор



Частотная модуляция

Частотная модуляция - процесс изменения частоты несущего сигнала в соответствии с мгновенными значениями модулирующего сигнала.

При воздействии однотонального модулирующего сигнала на несущий происходит изменение частоты несущего сигнала по закону:

$$\omega_{\text{ЧМ}} = \omega_0 + a_{\text{ЧМ}} U_m \sin \Omega t$$

$$a_{\text{ЧМ}} U_m = \Delta \omega_m$$

$\Delta \omega_m$ называется девиацией частоты. **Девиация частоты** показывает наибольшее отклонение частоты модулированного сигнала от частоты несущего.

Частота колебаний определяется через изменение фазы:

$$\omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + \frac{d\psi(t)}{dt}$$

Частотная модуляция

Чтобы определить $\psi(t)$, необходимо проинтегрировать $\omega_{\text{ЧМ}}(t)$

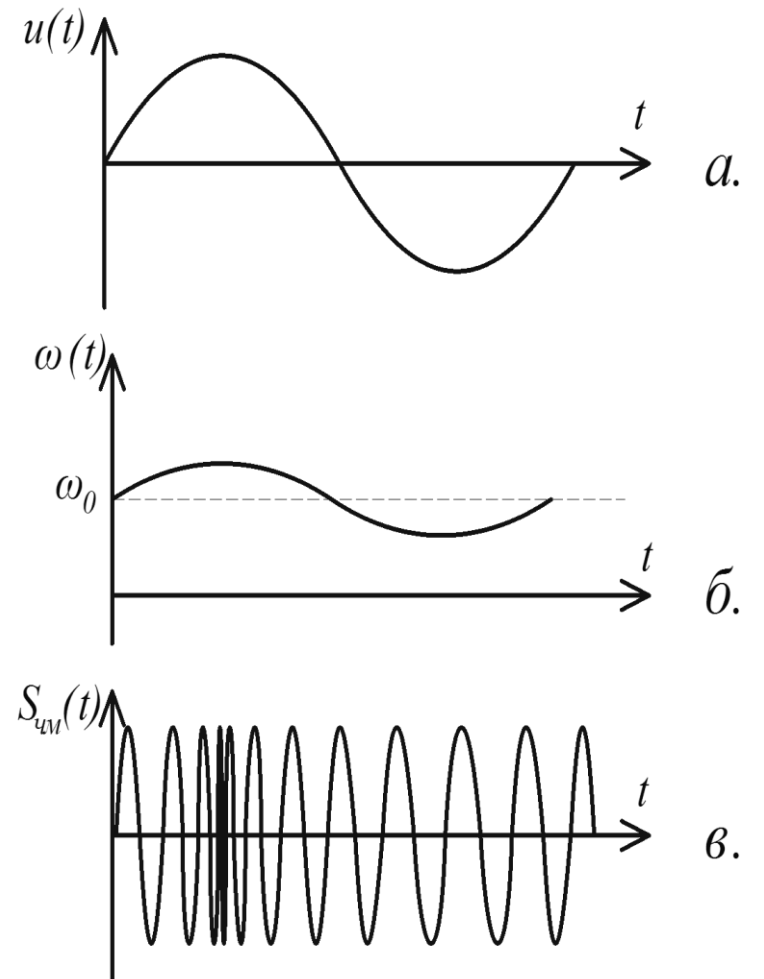
$$\psi(t) = \int_0^t \omega_{\text{ЧМ}}(t) dt = \omega_0 t - \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \cos \Omega t + \varphi_0$$

φ_0 — является начальной фазой несущего сигнала.

$$M_{\text{ЧМ}} = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega}$$

называется **индексом частотной модуляции**. Частотно-модулированный сигнал:

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = U_0 \sin(\omega_0 t - M_{\text{ЧМ}} \cos \Omega t + \varphi_0)$$



Частотная модуляция

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = U_0 J_0(M_{\text{ЧМ}}) \sin \omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} U_0 J_k(M_{\text{ЧМ}}) \sin(\omega_0 + k\Omega)t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k U_0 J_k(M_{\text{ЧМ}}) \sin(\omega_0 - k\Omega)t$$

При $M_{\text{ЧМ}} = 2$ коэффициенты:

$$J_0 = 0,21;$$

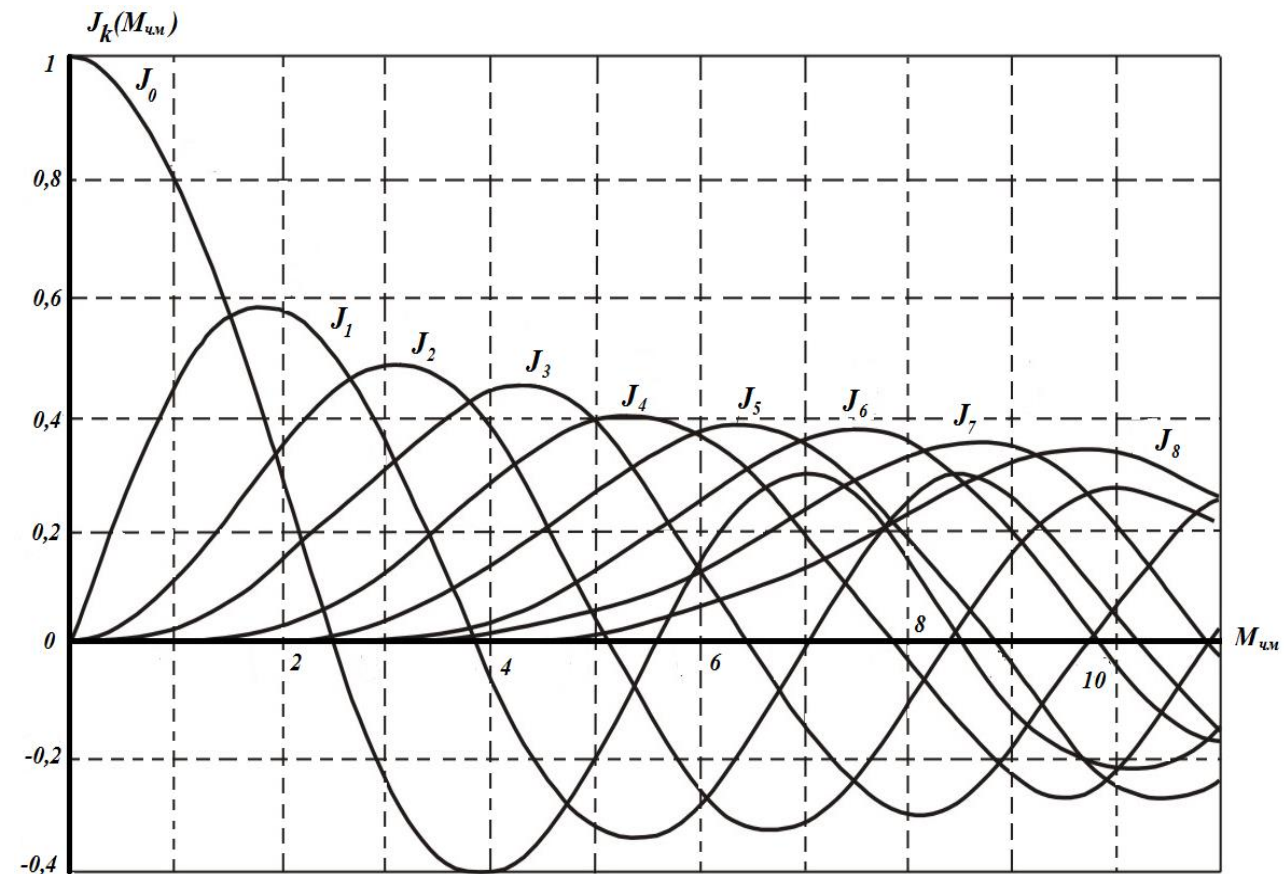
$$J_1 = 0,58;$$

$$J_2 = 0,36;$$

$$J_3 = 0,12;$$

$$J_4 = 0,02.$$

Амплитуды гармонических составляющих определяет $J_k(M_{\text{ЧМ}})$, при $k > M_{\text{ЧМ}}$ гармоники считаются малыми и в расчетах часто не учитываются.



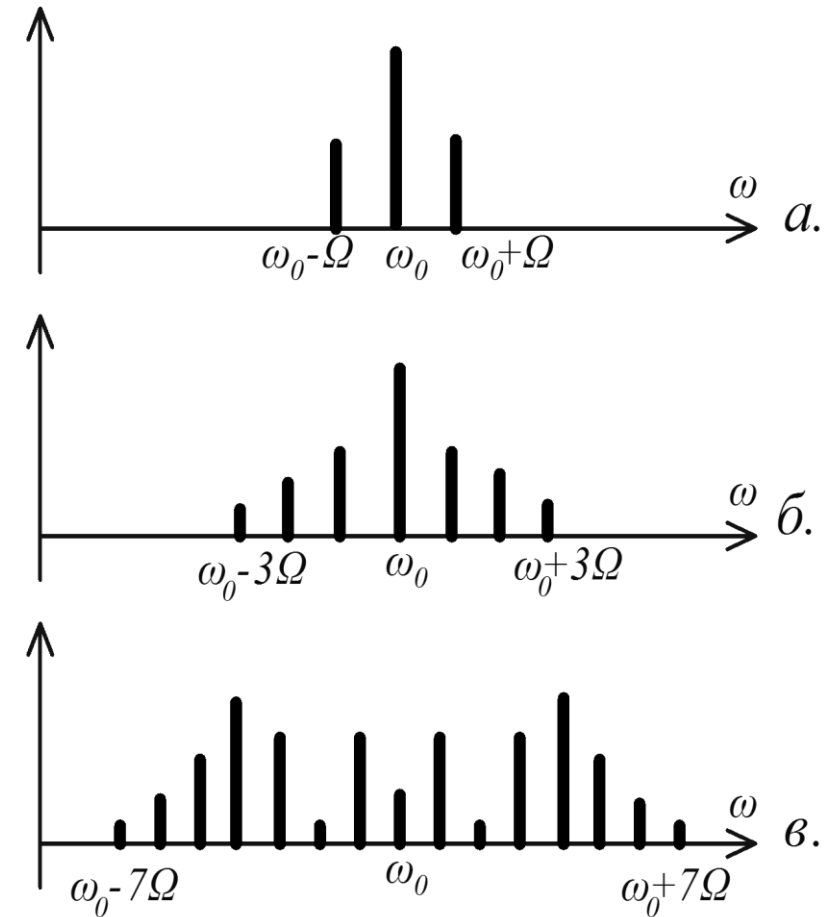
Спектр при частотной модуляции

Ширина спектра при однотономном информационном сигнале:

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ}} \approx 2(1 + M_{\text{ЧМ}})\Omega$$

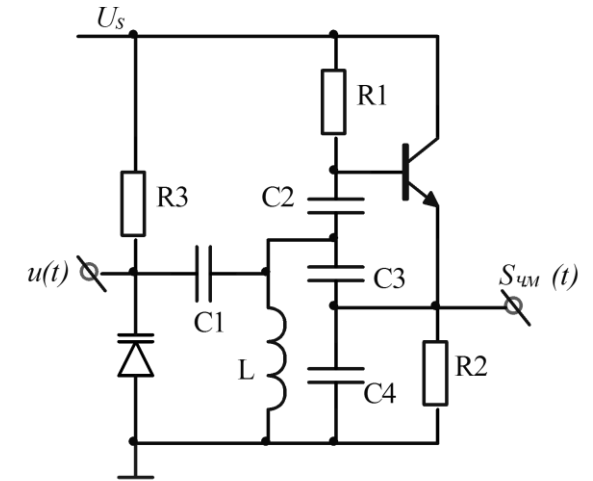
При больших $M_{\text{ЧМ}}$ ширина спектра слабо зависит от частоты информационного сигнала.

Вид спектра ЧМ сигнала при однотономном гармоническом модулирующем сигнале и при различных индексах $M_{\text{ЧМ}}$: при $M_{\text{ЧМ}} = 0,5$ (а), при $M_{\text{ЧМ}} = 1$ (б), при $M_{\text{ЧМ}} = 5$ (в).

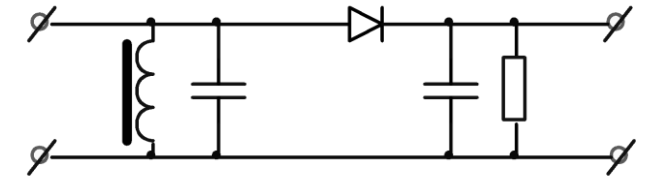


Схемы модулятора и демодулятора ЧМ сигнала.

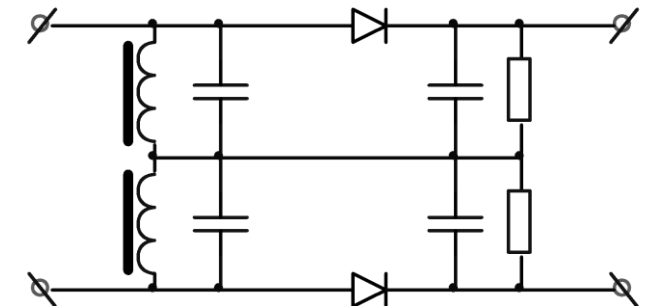
Модулятор ЧМ сигнала на базе резонансного усилителя. Модуляция осуществляется за счет изменения емкости перехода варикапа.



Простейший демодулятор ЧМ сигнала: ЧМ сигнал преобразуется в АМ с помощью колебательного контура расстроенного относительно несущей частоты.



Балансная схема детектора ЧМ сигнала позволяет уменьшить искажения при приеме. Контурны должны быть взаимно симметрично расстроены относительно несущей частоты на величину девиации частоты.



Фазовая модуляция

Фазовая модуляция - процесс изменения фазы несущего сигнала в соответствии с мгновенными значениями модулирующего сигнала.

Изменение мгновенной фазы несущего сигнала:

$$\psi_{\text{фм}}(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + a_{\text{фм}} U_m \sin \Omega t$$

Где $a_{\text{фм}}$ — коэффициент фазовой модуляции.

$$S_{\text{фм}}(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + a_{\text{фм}} U_m \sin \Omega t + \varphi_0)$$

Произведение $a_{\text{фм}} U_m = M_{\text{фм}}$ называется **индексом фазовой модуляции** или **девиацией фазы**.

$$\omega_{\text{фм}}(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + a_{\text{фм}} U_m \Omega \cos \Omega t$$

$a_{\text{фм}} U_m \Omega = M_{\text{фм}} \Omega = \Delta\omega_m$ - девиация частоты фазовой модуляции

Фазовая модуляция

При разложении ФМ сигнала на гармонические составляющие получится такой же ряд, как и при частотной модуляции, коэффициенты J_k определяются индексом фазовой модуляции $M_{\text{фм}}$.

Ширина спектра ФМ сигнала при однтонном информационном сигнале:

$$\Delta\omega_{\text{фм}} \approx 2(1 + M_{\text{фм}})\Omega$$

Вид спектра аналогичен тому, что был показан для частотной модуляции.

Сходство процессов при частотной и фазовой модуляции, показывает что по сути мы имеем дело с разными сторонами одного и того же процесса. Этот процесс принято называть угловой модуляцией.

Ширина спектра при угловой модуляции.

При угловой модуляции (для частотной модуляции: $\varphi(t) = M_{\text{чм}} \int u(t)dt$, для фазовой $\varphi(t) = M_{\text{фм}} u(t)$):

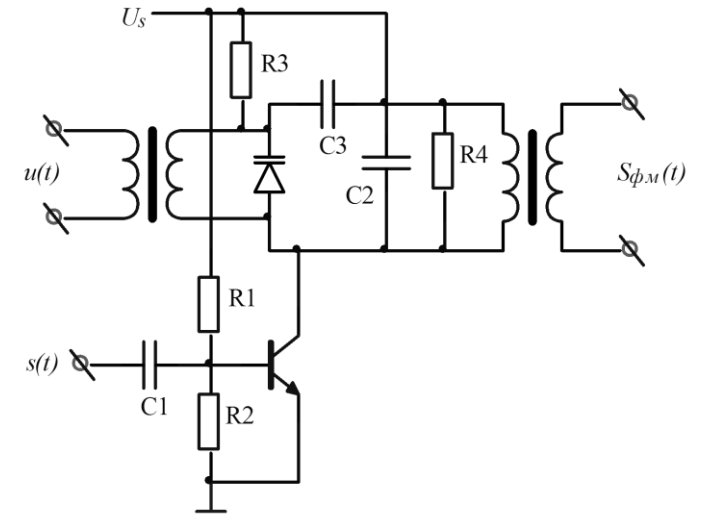
$$s(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0) = \text{Re}[U_0 e^{j(\varphi(t) + \varphi_0)} e^{j\omega_0 t}]$$

Спектр определить затруднительно, но из свойств преобразования Фурье (теорема сдвига) понятно, что спектр модулированного колебания будет сдвинут в область несущей частоты. Практически ширина спектра оценивается через энергию. При больших индексах модуляции $M_{\text{чм}} \gg 1$ и $M_{\text{фм}} \gg 1$

$$\Delta\omega_{\text{чм}} \approx 2M_{\text{чм}}\Omega = 2\Delta\omega_m \quad \omega_{\text{фм}} \approx 2M_{\text{фм}}\Omega = 2\Delta\omega_m$$

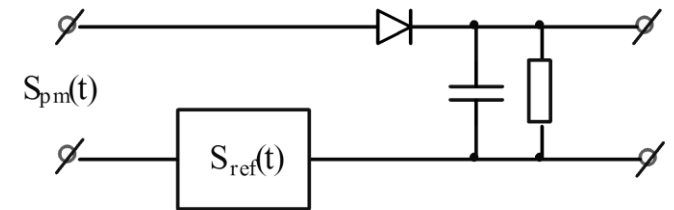
Схемы модулятора и демодулятора ФМ сигнала.

Модулятор ФМ сигнала на базе резонансного усилителя.
Модуляция осуществляется за счет изменения емкости р-п перехода варикапа.

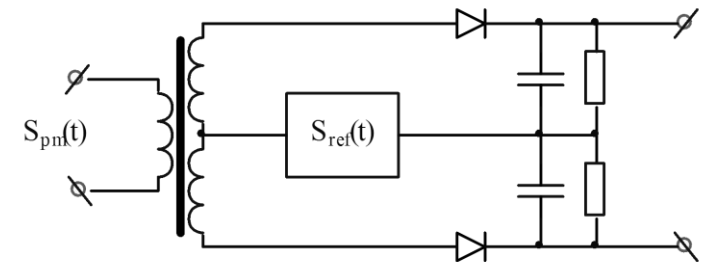


Простейший фазовый демодулятор:

Напряжение диода определяется приложенной разностью фаз опорного и входного сигналов.

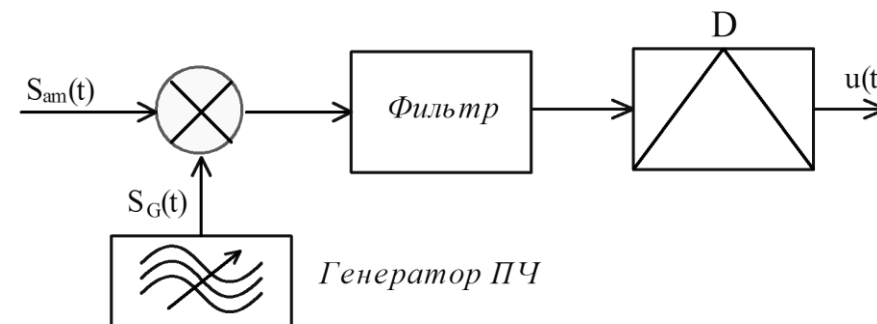


Балансный детектор позволяет без искажений принимать сигналы с подавленной несущей (балансная фазовая модуляция).



Гетеродин.

Принцип работы гетеродина можно просто описать математически (для амплитудной модуляции однотоновальным гармоническим сигналом):



$$S_{am}(t) \cdot S_G(t) = (1 + M_{am} \sin \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \cdot \sin(\omega_g t + \varphi_2) =$$

$$(1 + M_{am} \sin \Omega t) \left(\sin \left((\omega_0 - \omega_g) t + \varphi_1 - \varphi_2 \right) + \sin \left((\omega_0 + \omega_g) t + \varphi_1 + \varphi_2 \right) \right)$$

Второе слагаемое легко убрать с помощью ФНЧ, а полезный сигнал выделяется детектором.

Синхронный детектор.

Принцип работы синхронного детектора повторяет гетеродин, только в этом случае частота дополнительного генератора должна быть равна несущей частоте сигнала:

$$\begin{aligned} S_{am}(t) \cdot S_G(t) &= (1 + M_{am} \sin \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_2) = \\ &= (1 + M_{am} \sin \Omega t)(\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Для угловой (частотной или фазовой) модуляции аналогично:

$$S_{pm}(t) \cdot S_G(t) = \left(\sin(M_{pm} \cos \Omega t + \varphi_{1-2}) + \sin(2\omega_0 t + M_{pm} \cos \Omega t + \varphi_{1+2}) \right)$$

Выходной сигнал получается при применении квадратурных методов детектирования. Для работы синхронного детектора необходимо выравнивание частот передатчика и детектора.

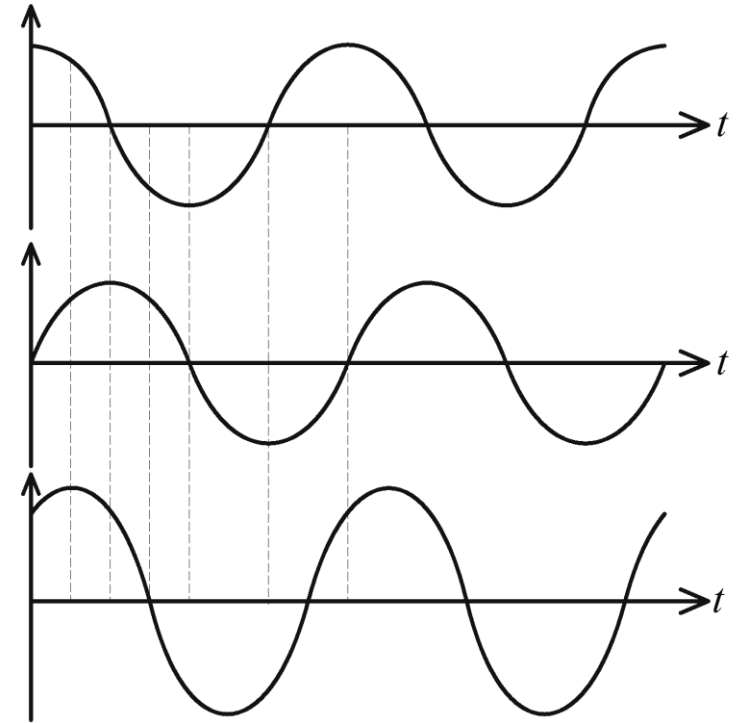
Квадратурные сигналы.

Термин **квадратурные сигналы** относятся к двум синусоидам, которые имеют одинаковую частоту и сдвиг по фазе 90° . Сумма этих сигналов дает синусоиду со сдвигом 45° (при равенстве амплитуд).

$$S_{am}(t) = \sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t + 90^\circ) = \sqrt{2} \sin(\omega_0 t + 45^\circ)$$

При отличии амплитуд квадратурных сигналов, фаза будет меняться от 0 до 90° . Это означает, что при амплитудной модуляции квадратурных сигналов, будет происходить изменение фазы суммарного сигнала, т.е. его фазовая модуляция.

При плавном изменении амплитуд и соответственно фазы, квадратурная модуляция будет аналоговой.



Квадратурная модуляция.

Перепишем выражение модулированного сигнала через квадратурные:

$$\begin{aligned} s(t) &= u(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = u(t) \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi(t)) - u(t) \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi(t)) \\ &= u_c(t) \cos(\omega_0 t) - u_s(t) \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$s_{\text{кафм}}(t) = \sqrt{u_c^2(t) + u_s^2(t)} \cdot \cos\left\{\omega_0 t - \arctg \frac{u_s(t)}{u_c(t)}\right\}$$

Спектр при квадратурной модуляции:

$$S(\omega) = \frac{m_{am}}{2} (\mathbf{u}_c(\omega + \omega_0) + \mathbf{u}_c(\omega - \omega_0) - j\mathbf{u}_s(\omega + \omega_0) + j\mathbf{u}_s(\omega - \omega_0))$$

Квадратурный модулятор.

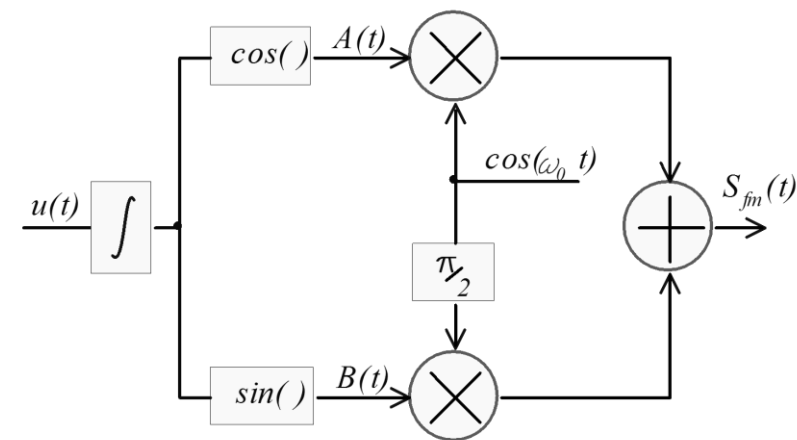
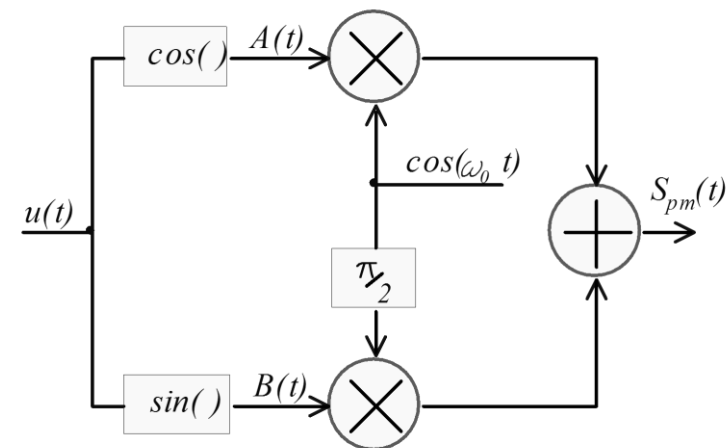
Принцип работы:

$$A(t) = \cos(u(t))$$

$$B(t) = \sin(u(t))$$

$$S_{pm}(t) = \cos(\omega_0 t) \cos(u(t)) - \sin(\omega_0 t) \sin(u(t))$$

$$S_{fm}(t) = \cos\left(\omega_0 t + \int \varphi(t) dt\right)$$



Аналитический сигнал.

Запишем сигнал в виде суммы обратного преобразования спектров отдельно для областей положительных и отрицательных частот:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \mathbf{S}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{S}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Аналитическим сигналом назовем удвоенную часть для **положительной** области:

$$z_s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{S}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = s(t) + j\tilde{s}(t)$$

Соответственно удвоенное первое слагаемое спектра, для отрицательных частот дает комплексно сопряженный сигнал. Сделаем замену $\omega = -\vartheta$, тогда:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \mathbf{S}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = -\frac{1}{\pi} \int_{\infty}^0 \mathbf{S}(-j\vartheta) e^{-j\vartheta t} d\vartheta = s(t) - j\tilde{s}(t) = z_s^*(t)$$

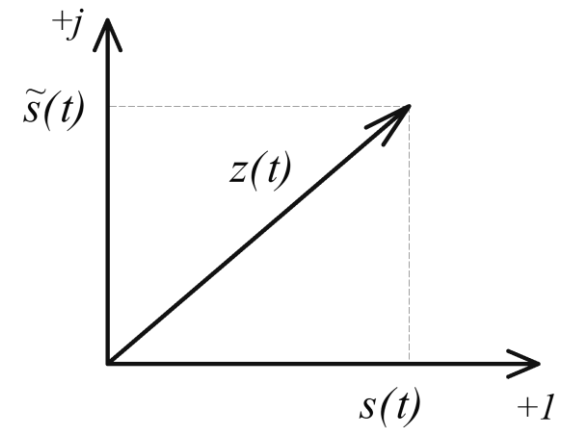
Аналитический сигнал.

$$s(t) = z_s(t) + z_s^*(t)$$

Проекция аналитического сигнала на действительную ось – исходный сигнал, на мнимую – **аналитически сопряженный сигнал** или ортогональное (квадратурное) дополнение сигнала.

Модуль и фаза для z_s :

$$z_s(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)} \cdot e^{j \arctg \frac{\tilde{s}(t)}{s(t)}}$$



Аналитический сигнал – комплексная функция действительной переменной.
Аналитический сигнал всегда дифференцируемый и интегрируемый.

Ортогональное дополнение.

Условие ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \tilde{s}(t) dt = 0 \quad \text{при} \quad s(t), \tilde{s}(t) \neq 0$$

Аналитическое дополнение получаем используя преобразование Гильберта:

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad \text{короткая форма записи} \quad \tilde{s}(t) = H_b(s(t))$$

Интеграл преобразования это свертка сигнала и оператора Гильберта. Оператор Гильберта – дробно-рациональное выражение:

$$h_b^*(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Оператор Гильберта - импульсная характеристика фильтра Гильберта.

Свойства преобразования.

Линейность:

$$H_b(As_1(t) + Bs_2(t)) = A\tilde{s}_1(t) + B\tilde{s}_2(t)$$

Сдвиг по времени:

$$H_b(s_1(t - \tau)) = \tilde{s}_1(t - \tau)$$

Подобие (масштабирование):

$$H_b(s_1(at)) = \tilde{s}_1(at)$$

Произведение (свертка) сигналов:

$$H_b(s_1(t)s_2(t)) = \tilde{s}_1(t)s_2(t) = s_1(t)\tilde{s}_2(t)$$

Энергетическая эквивалентность:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{s}(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (s(t))^2 dt$$

Фильтр Гильберта.

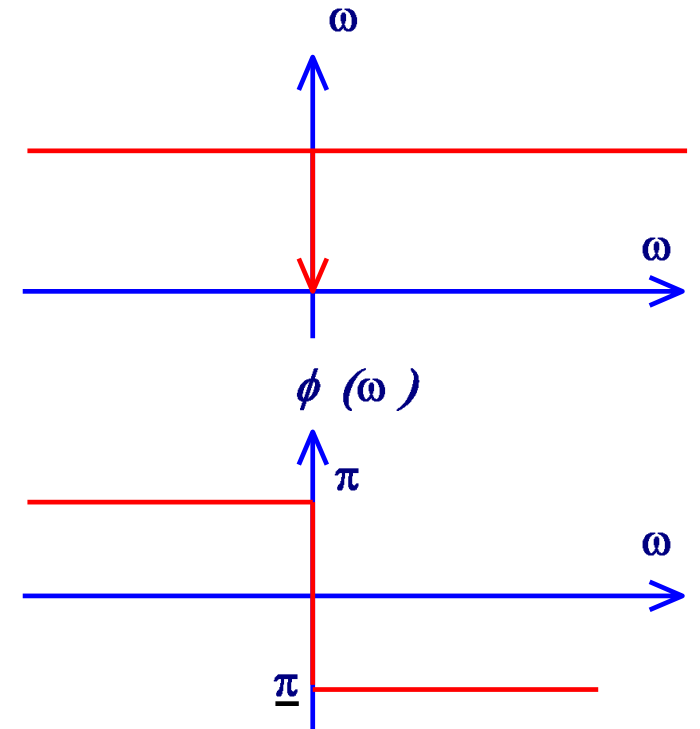
Определим спектральную передаточную характеристику фильтра Гильберта:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_b^*(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\pi t} dt - j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = -j \operatorname{sign}(\omega)$$

$$-j \operatorname{sign}(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ j, & \omega < 0; \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \omega > 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ e^{j\frac{\pi}{2}}, & \omega < 0; \end{cases}$$

Для спектра ортогонального дополнения:

$$S^*(\omega) = H(\omega)S(\omega)$$



Обратное преобразование.

Обратное преобразование является вторым последовательным преобразованием Гильберта. Результат обратного преобразования Гильберта получим с использованием понятий фильтра Гильберта и спектров:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{s}(\tau)}{t - \tau} d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \tilde{\mathbf{S}}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) H(\omega) \mathbf{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathbf{S}(\omega)) \cdot e^{j\omega t} d\omega = -s(t)\end{aligned}$$

Т.е. результат равен начальному сигналу взятому с обратным знаком.

Спектр аналитического сигнала.

Аналитический сигнал:

$$z_s(t) = s(t) + j\tilde{s}(t)$$

Спектр аналитического сигнала, используя понятие фильтра Гильберта:

$$\mathbf{Z}(\omega) = \mathbf{S}(\omega) + j\tilde{\mathbf{S}}(\omega) = \mathbf{S}(\omega) + j(-j\text{sign}(\omega))\mathbf{S}(\omega) = (1 + \text{sign}(\omega))\mathbf{S}(\omega)$$

$$\mathbf{Z}(\omega) = \begin{cases} 2 \cdot \mathbf{S}(j\omega), & \omega > 0; \\ 0, & \omega \leq 0; \end{cases}$$

Спектр отличен от нуля только в области положительных частот.

Вид спектра ортогонального дополнения сигнала.

Преобразование Гильберта через спектры:

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \mathbf{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \text{Im} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \right]$$

Здесь заметим следующее, пусть сигналу $s(t)$ соответствует спектр:

$$\mathbf{S}(\omega) = \text{Re}[\mathbf{S}(\omega)] + j\text{Im}[\mathbf{S}(\omega)] = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

при этом действительная часть четная, а мнимая - нечетная функции. При нахождении спектра ортогонального дополнения:

$$\tilde{\mathbf{S}}(\omega) = -j\text{sign}(\omega)\text{Re}[\mathbf{S}(\omega)] + \text{sign}(\omega)\text{Im}[\mathbf{S}(\omega)] = A(\omega)e^{j(\varphi(\omega)+\varphi_{hb}(\omega))}$$

Отсюда видно, что при преобразовании Гильберта действительная, четная часть спектра исходного сигнала преобразуется в нечетную мнимую, т.е. *косинусные гармоники сигнала, которым соответствует реальная часть спектра сигнала, превращаются в синусные гармоники. Для мнимой части спектра аналогично - синусные гармоники спектра сигнала превращаются в косинусные гармоники.*

Получение ортогонального дополнения сигнала.

Найдем ортогональное дополнение для сигнала $s(t) = \cos\omega_0 t$, напрямую используя преобразование Гильберта (сделаем замену $x = \tau - t$):

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega_0 \tau}{\tau - t} d\tau = -\frac{1}{\pi} \cos\omega_0 t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega_0 x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \sin\omega_0 t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega_0 x}{x} dx \\ &= \sin\omega_0 t\end{aligned}$$

Запишем аналитический сигнал:

$$z_s(t) = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

Если $s(t) = \sin\omega_0 t$ то $\tilde{s}(t) = -\cos\omega_0 t$

Получение ортогонального дополнения сигнала.

Найдем ортогональное дополнение для сигнала $s(t) = \cos \omega_0 t$, используя спектр сигнала и спектр фильтра Гильберта:

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \mathbf{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j \operatorname{sign}(\omega) \left(\frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \right) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2j} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) \right) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \sin \omega_0 t\end{aligned}$$

Узкополосный сигнал.

Узкополосный сигнал (полосовой) – сигнал занимающий узкую полосу частот и его амплитуда и фаза меняются медленно относительно его опорной частоты (здесь ω_0 - опорная частота):

$$s(t) = u(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

Условия медленного изменения: $\frac{du(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\omega_0 u(t)} \ll 1, \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\omega_0} \ll 1$

Узкополосный сигнал одно из описаний модулированного сигнала. Используя свойство ортогонального дополнения:

$$H_b[u(t)\cos(\omega_0 t)] \approx u(t)\sin(\omega_0 t)$$

Тогда для узкополосного сигнала можно приблизительно считать:

$$H_b[u(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))] \approx u(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))$$

$$z_s(t) \approx u(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + ju(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t)) = u(t)e^{j\omega_0 t}e^{j\varphi(t)}$$

Спектр узкополосного сигнала.

Спектр узкополосного колебания

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{e^{j\varphi_0}}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right) \\ &= \frac{e^{j\varphi_0}}{2} (U(\omega - \omega_0) + U(\omega + \omega_0)) \end{aligned}$$

Спектр определяется как удвоенный спектр информационного сигнала расположенный симметрично относительно несущей частоты.

Комплексная огибающая.

Аналитический вид узкополосного сигнала:

$$z_s(t) = u(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + ju(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t)) = u(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t}$$

Комплексная огибающая сигнала:

$$z_m(t) = u(t)e^{j\varphi(t)} = u(t)\cos(\varphi(t)) + ju(t)\sin(\varphi(t)) = a(t) + jb(t)$$

$$u(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}, \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right|,$$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{a(t)b'(t) - a'(t)b(t)}{a^2(t) + b^2(t)}$$

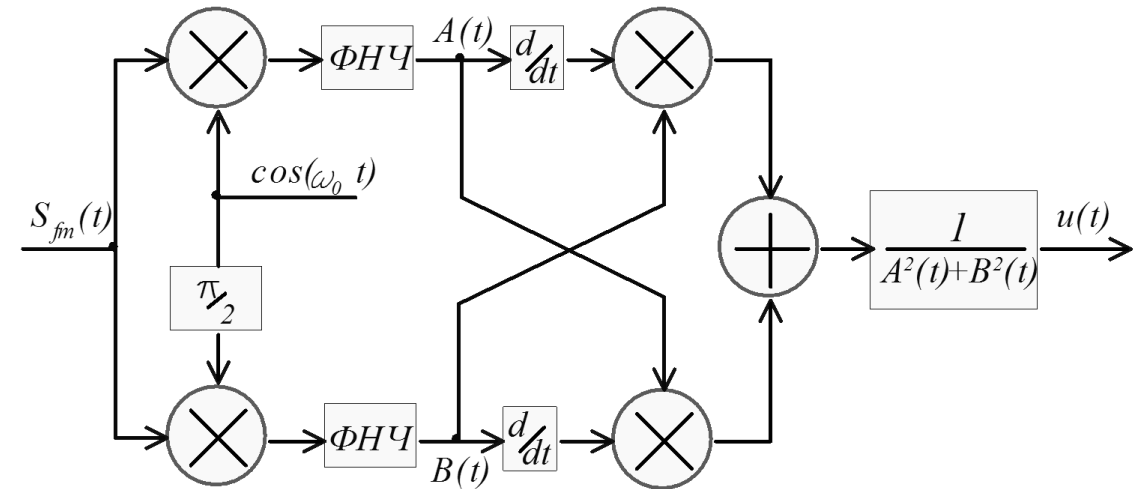
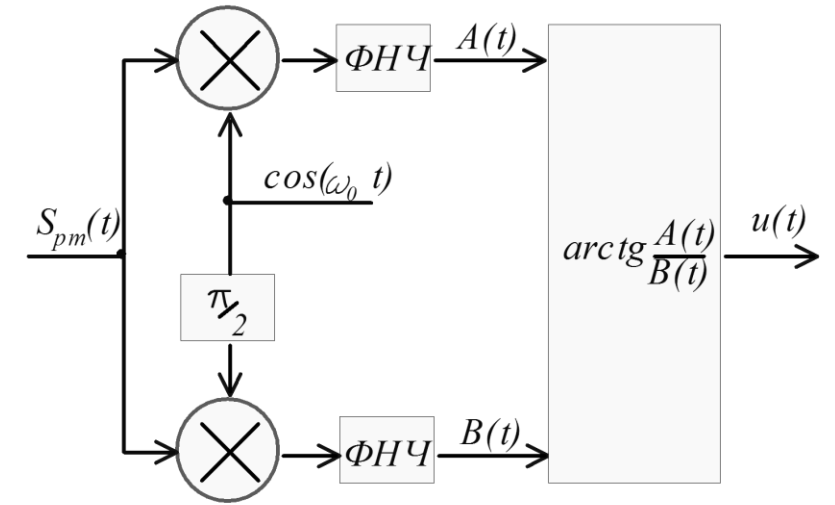
Полученные выражения определяют огибающую в виде линии, касательной к точкам максимума исходной функции, мгновенную фазу сигнала и мгновенную частоту сигнала. Комплексная огибающая содержит всю информацию о сигнале кроме несущей частоты.

Квадратурный детектор.

Соотношения выведенные для комплексной огибающей позволяют понять как должен выглядеть квадратурный демодулятор:

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right|$$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{a(t)b'(t) - a'(t)b(t)}{a^2(t) + b^2(t)}$$



Спектр комплексной огибающей.

Спектр комплексной огибающей сигнала:

$$\mathbf{Z}_m(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_m(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \qquad z_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Z}_m(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Спектр сигнала через спектр огибающей:

$$\mathbf{S}(\omega) = \frac{1}{2} \mathbf{Z}_m(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \mathbf{Z}_m^*(\omega + \omega_0)$$

Здесь \mathbf{Z}_m^* комплексно сопряженный спектр огибающей.

Амплитудная модуляция.

Уравнение модулированного сигнала при амплитудной модуляции:

$$s(t) = (U_0 + m_{am} \sin \Omega t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Ортогональное дополнение:

$$\tilde{s}(t) = (U_0 + m_{am} \sin \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Аналитический сигнал:

$$z_s(t) = (U_0 + m_{am} \sin \Omega t) \cos(\omega_0 t + \varphi) + j(U_0 + m_{am} \sin \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Огибающая:

$$z_m(t) = U_0 + m_{am} \sin \Omega t$$

Балансная модуляция

Уравнение модулированного сигнала при балансной модуляции:

$$s(t) = U_0 m_{am} \sin \Omega t \cos(\omega_0 t)$$

Ортогональное дополнение:

$$\tilde{s}(t) = U_0 m_{am} \sin \Omega t \sin(\omega_0 t)$$

Аналитический сигнал:

$$z_s(t) = U_0 m_{am} \sin \Omega t \cos(\omega_0 t) + jU_0 m_{am} \sin \Omega t \sin(\omega_0 t)$$

Огибающая:

$$z_m(t) = U_0 m_{am} |\sin \Omega t|$$

ФАПЧ.

ФАПЧ (система фазовой автоподстройки частоты, PLL) - многофункциональная система, используется для частотной модуляции и демодуляции, частотной фильтрации (в том числе, фильтрации модулирующей функции частоты), умножения и преобразования частоты, выделения опорного колебания для синхронного детектирования и др.

ФАПЧ является следящей системой автоматического регулирования, частота настройки которой определяется частотой управляющего сигнала, а сигналом рассогласования является разность фаз управляющего сигнала и сигнала обратной связи.

В состав ФАПЧ входят следующие устройства:

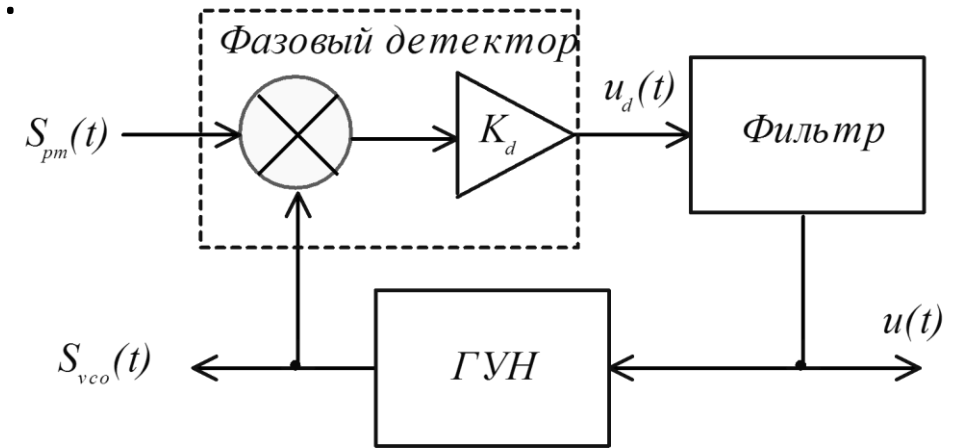
1. Фазовый детектор (правильнее назвать **детектор разности фаз**).
2. Фильтр (нижних частот).
3. Генератор управляемый напряжением.

Принцип работы ФАПЧ.

Пусть входной сигнал и сигнал ГУН записаны как:

$$S_{pm}(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_s(t)),$$

$$S_{vco}(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_{vco}(t))$$



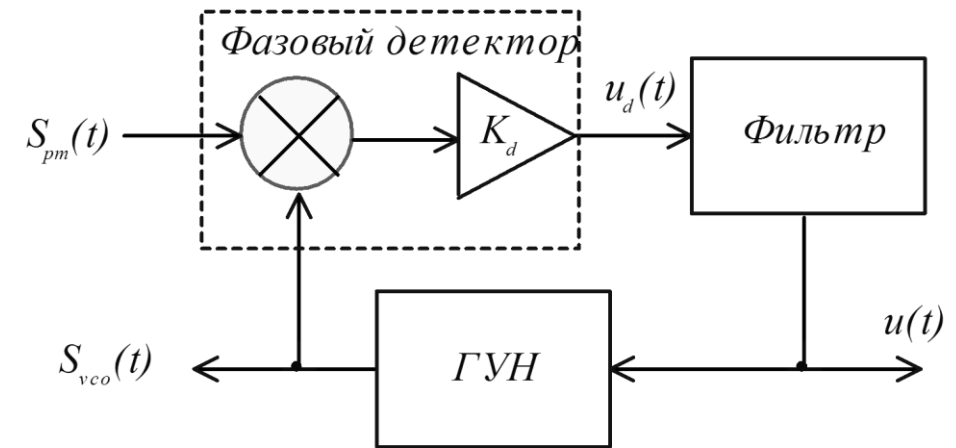
Тогда на выходе фазового детектора:

$$\begin{aligned} u_d(t) &= K_d \sin(\omega_0 t + \varphi_s(t)) \sin(\omega_0 t + \varphi_{vco}(t)) = \\ &= \frac{K_d}{2} \sin(2\omega_0 t + \varphi_s(t) + \varphi_{vco}(t)) + \frac{K_d}{2} \sin(\varphi_s(t) - \varphi_{vco}(t)) \end{aligned}$$

Структура и работа ФАПЧ.

И после ФНЧ (убирает высокочастотную составляющую):

$$u(t) = \frac{K_d}{2} \sin(\varphi_s(t) - \varphi_{vco}(t))$$



При неравенстве частот входного сигнала и ГУН:

$$u(t) = \frac{K_d}{2} \sin(\omega_s t - \omega_{vco} t + \varphi_s(t) - \varphi_{vco}(t)) = \frac{K_d}{2} \sin(\Delta\omega t + \Delta\varphi(t))$$

Передаточная функция контура ФАПЧ.

Учитывая что ГУН интегрирует сигнал ошибки, запишем передаточную функцию замкнутой системы:

$$W(s) = \frac{K_d \cdot W_{filter}(s) \cdot K_{vco}/s}{1 + K_d \cdot W_{filter}(s) \cdot K_{vco}/s} = \frac{K_d K_{vco} W_{filter}(s)}{s + K_d K_{vco} W_{filter}(s)}$$

Представив фильтр как пропорционально интегрирующее звено - $W_{filter}(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$, получим:

$$W(s) = \frac{sK_dK_{vco}K_p + K_dK_{vco}K_i}{s^2 + sK_dK_{vco}K_p + K_dK_{vco}K_i} = \frac{s\frac{\omega_p}{Q} + \omega_p^2}{s^2 + s\frac{\omega_p}{Q} + \omega_p^2}$$

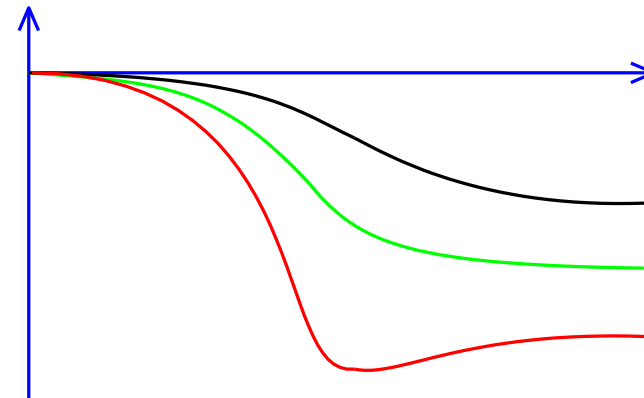
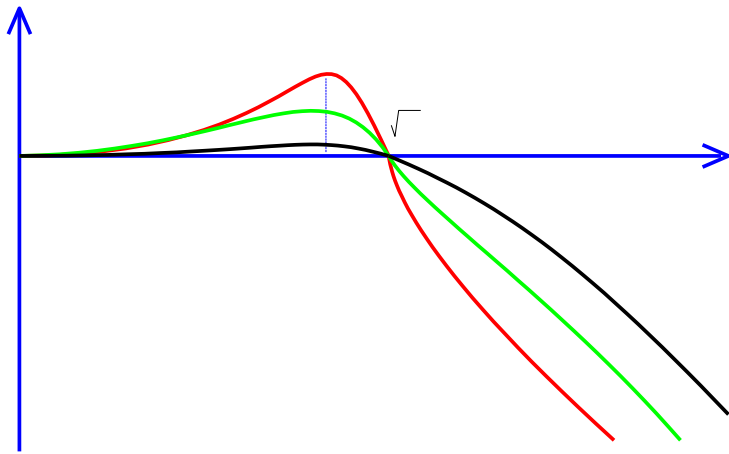
$$\omega_p^2 = K_dK_{vco}K_i, \quad \frac{\omega_p}{Q} = K_dK_{vco}K_p \quad Q = \frac{1}{K_p} \sqrt{\frac{K_i}{K_dK_{vco}}}$$

ФАПЧ – фильтр второго порядка (фильтрующее звено петли – первого порядка)

Частотные характеристики ФАПЧ

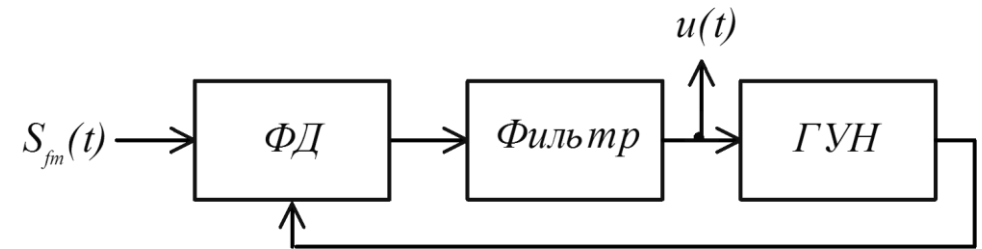
Частотно передаточная функция ФАПЧ:

$$W(j\omega) = \frac{\omega_p^2 + j\omega \frac{\omega_p}{Q}}{\omega_p^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_p}{Q}} = \sqrt{\frac{\omega_p^4 + \omega^2 \frac{\omega_p^2}{Q^2}}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\omega_p^2}{Q^2}}} \cdot e^{-j \arctg \frac{\omega^3 \frac{\omega_p}{Q}}{\omega_p^2(\omega_p^2 - \omega^2) + \omega^2 \frac{\omega_p^2}{Q^2}}}$$

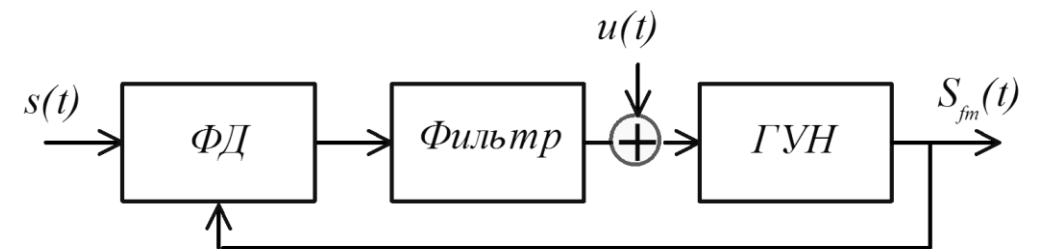


Применение ФАПЧ

Демодулятор ЧМ и ФМ сигналов



Модулятор ЧМ и ФМ сигналов



Умножитель частоты

