Аналоговая электроника и техника измерений.

Электрические цепи при несинусоидальных периодических токах.

Преобразование Фурье.
Спектр.

Электрические цепи при несинусоидальных периодических токах

- **Гармоника** – это сигнал синусоидальной формы с частотой, кратной частоте рассматриваемого периодического сигнала.

Периодический электрический сигнал любой формы можно представить в виде суммы гармоник. (Функция должна удовлетворять условиям Дирихле.)

- Тригонометрический ряд Фурье

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k cosk\omega t + B_k sink\omega t)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \cos(k\omega t)dt, \qquad B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \sin(k\omega t)dt$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$$

Свойства разложения Фурье

- Если функция симметрична относительно горизонтальной оси, то $A_0 = 0$.
- Если функция нечетная, то $A_k = 0$.
- Если функция четная, то $B_k = 0$.

Запись ряда можно представить через одну синусоидальную функцию с дополнительным фазовым сдвигом.

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \qquad C_k = \sqrt{A^2{}_k + B^2{}_k}, \qquad \varphi_k = arctg\,\frac{A_k}{B_k}$$

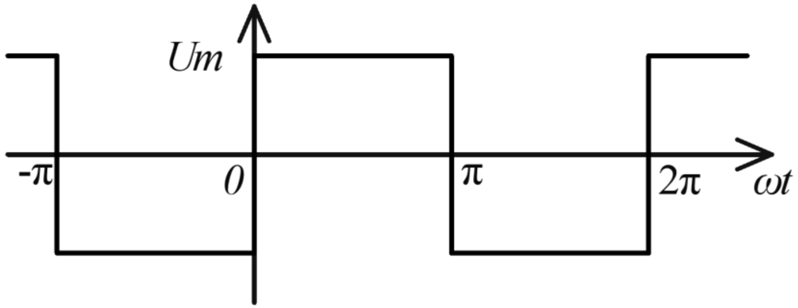
Пример разложения в ряд Фурье

Найти коэффициенты ряда Фурье.

Из рассмотренных выше свойств $A_0 = 0$,

отсутствуют четные гармоники и $A_k = 0$.

Вычислим коэффициенты B_k :



$$B_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} U_m \sin kt\,dt + \int_{-\pi}^{0}(-U_m)\sin kt\,dt\right)$$

$$= \frac{U_m}{\pi k}\left(\cos kt\,|_0^{\pi} - \cos kt\,|_{-\pi}^{0}\right) = \frac{U_m}{\pi k}\left(1-(-1)-(-1)+1\right) = \frac{4U_m}{\pi k}$$

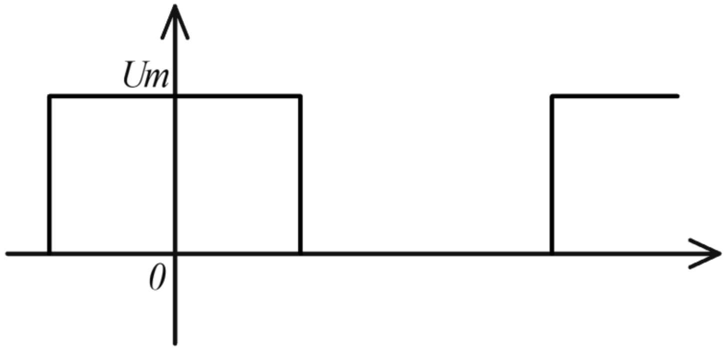
Ответ можно записать следующим образом:

$$u(t) = \frac{4U_m}{\pi}\left(sin\omega t + \frac{1}{3}sin3\omega t + \frac{1}{5}sin5\omega t + \frac{1}{7}sin7\omega t + \cdots\right)$$

Пример разложения Фурье

Найти коэффициенты ряда Фурье последовательности однополярных импульсов при длительности равной половине периода.

Из свойств разложения $B_k = 0$.



$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_m\,dt = \frac{U_m}{2}$$

Вычислим коэффициенты A_k :

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_m\cos(k\omega t)\,dt = \frac{U_m}{k\pi}\sin(k\omega t)\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2U_m}{k\pi}$$

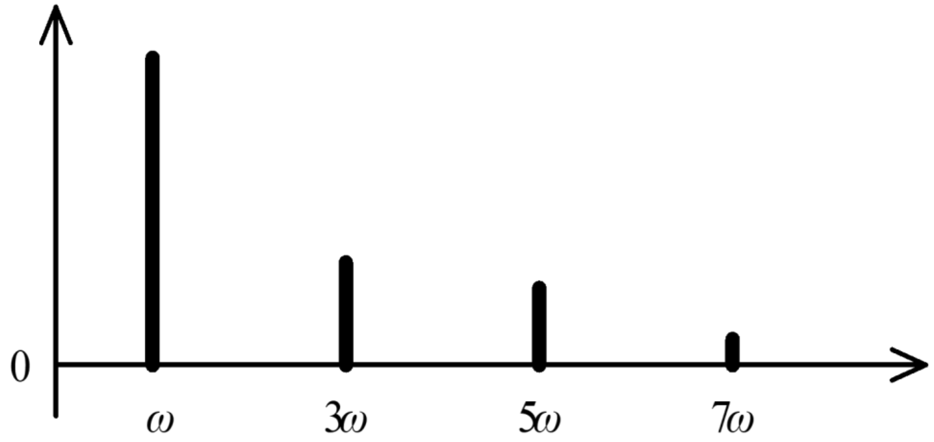
Коэффициенты ряда для четных гармоник равны нулю. Ответ :

$$u(t) = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi}\left(cos\omega t + \frac{1}{3}cos3\omega t + \frac{1}{5}cos5\omega t + \frac{1}{7}cos7\omega t + \cdots\right)$$

Спектральные диаграммы

По коэффициентам ряда Фурье строится графическое изображение зависимости величины амплитуды соответствующей гармоники от частоты.

Дискретная спектральная диаграмма



Среднеквадратичное значение в цепях несинусоидального тока

$$I_{rms}{}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \varphi_k)\right]^2 dt =$$

$$\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T I^2{}_k \sin^2(k\omega t + \varphi_k)\, dt \ + \frac{1}{T}\sum_{\substack{n=0\\ m=0\\ n\neq m}}^{\infty}\int_0^T I_n I_m \sin(n\omega t + \varphi_n)\sin(m\omega t + \varphi_m)\, dt$$

$$= \frac{1}{2T}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T I^2{}_k\, [1 - cos(2k\omega t + \varphi_k)]dt$$

$$+ \ \frac{1}{2T}\sum_{\substack{n=0\\ m=0\\ n\neq m}}^{\infty}\int_0^T I_n I_m[\cos\big((n-m)\omega t + \varphi_n - \varphi_m\big) - cos\big((n+m)\omega t + \varphi_n + \varphi_m\big)]\, dt$$

Мощность в цепях несинусоидального тока

$$I_{rms} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I^2{}_{krms}}$$

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} U_m I_m cos\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} U_{krms} I_{krms} cos\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_{krms} I_{krms} sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$$

$$S = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_{krms}^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_{krms}^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2} \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Анализ цепей с несинусоидальной формой тока.

Данный вид анализа всегда приближенный.

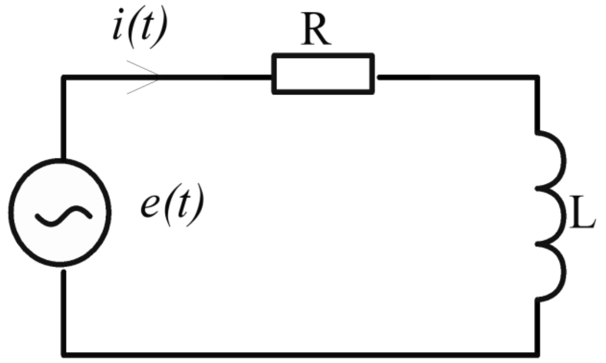
Метод требует предварительное определение количества необходимых для расчета гармоник. Это количество должно быть задано изначально либо определено в согласовании с требуемой точностью расчета.

Далее анализ выполняется символическим методом для каждой из гармоник отдельно и конечный результат определяется согласно принципу наложения – например, ток как сумма токов каждой из гармоник.

Пример.

Определить величину ЭДС и мощность выделяющуюся на резисторе, если $R = 10\Omega$, $\omega L = 10\Omega$, а ток определяется выражением:

$$i(t) = 10\sqrt{2}sin\omega t + 5\sqrt{2}sin3\omega t + \sqrt{2}sin5\omega t$$



Величина импеданса для каждой гармоники:

$$Z(\omega) = 10 + j10 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ}, \qquad Z(3\omega) = 10 + j30 = 10\sqrt{10}e^{jarctg3},$$

$$Z(5\omega) = 10 + j50 = 10\sqrt{26}e^{jarctg5}$$

Пример.

Определим ЭДС как сумму гармоник, полученных умножением гармоник тока на величину импеданса соответствующего этой гармонике:

$$e(t) = 200sin(\omega t + 45°) + 100\sqrt{5}sin(3\omega t + arctg3) + 20\sqrt{13}sin(5\omega t + arctg5)$$

Определим мощность как сумму квадратов действующих значений тока (амплитудные деленные на $\sqrt{2}$), умноженных на величину сопротивления.

$$P = \left({I_1}^2 + {I_3}^2 + {I_5}^2\right)R = (100 + 25 + 1)10 = 1260\ \text{Вт}$$

Комплексная форма ряда Фурье

Комплексная форма ряда Фурье выводится из общей через формулу Эйлера:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega t}$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t}\, dt$$

Примем период рассматриваемой функции непостоянным и меняющимся вплоть до бесконечности:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{d\omega}{2\pi}$$

Преобразование Фурье

Подставим соотношение для периода в формулу для коэффициента гармоники:

$$\dot{C}_k = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

И в общую формулу для комплексной формы ряда, преобразовав сумму в интеграл:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{jk\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} \, d\omega$$

Введем обозначение

$$\mathrm{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Преобразование Фурье

Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Это формула обратного преобразования Фурье. Формула для $S(j\omega)$ - прямое преобразование.

$S(j\omega)$ - называется *спектром сигнала.* **Спектр** – представление сигнала как бесконечной суммы ***элементарных гармоник*** с бесконечно малой разницей по частоте. Физический смысл отрицательных частот – по формуле обратного преобразования видно, что комбинация экспонент с мнимой степенью дает синусоидальные гармоники.

Свойства преобразования Фурье.

Если

$$\mathcal{F}[s(t)] = S(j\omega)$$

Свойство линейности

$$\mathcal{F}[As(t)] = AS(j\omega)$$

Теорема масштаба

$$\mathcal{F}[s(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)$$

Теорема смещения

$$\mathcal{F}[s(t-\tau)] = e^{-s\tau} S(j\omega)$$

Свойства преобразования Фурье.

Преобразование производной

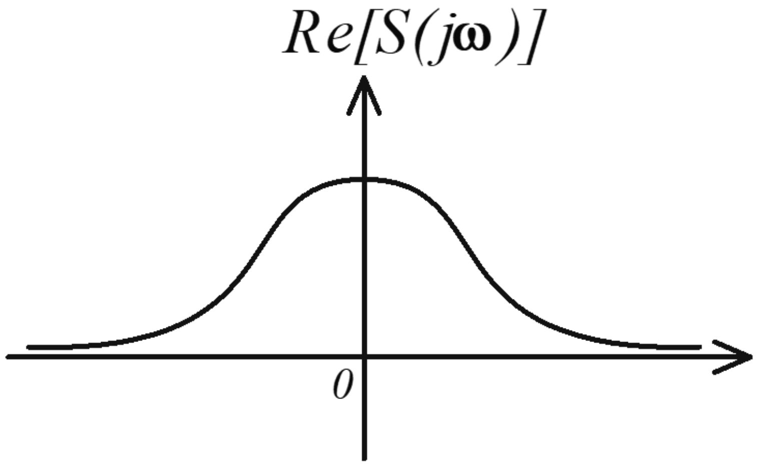
$$\mathcal{F}\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = j\omega S(j\omega)$$

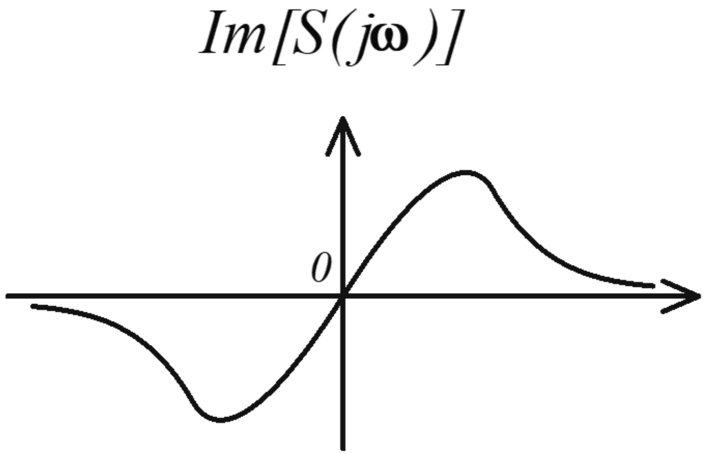
Преобразование интеграла

$$\mathcal{F}\left[\int_0^t s(t)dt\right] = \frac{1}{j\omega}S(j\omega) + \mathrm{A}\delta(\omega)$$

Представление спектра.

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)(\cos\omega t - j\sin\omega t)dt = Re[S(j\omega)] - jIm[S(j\omega)]$$





Спектр четного сигнала – действительный, спектр нечетного полностью мнимый. Спектр - комплексная функция частоты. Спектр сопряженно симметричен относительно нуля:

$$S(-j\omega) = S^*(j\omega)$$

Амплитудный и фазовый спектры

$$S(j\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} \cdot e^{jarctg\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Модуль спектра (амплитудный спектр) – амплитуды гармоник, а **фаза** (фазовый спектр) – начальные фазы гармоник. Амплитудный спектр четная функция, а фазовый нечетная.

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))d\omega +$$

$$+j\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))d\omega$$

Сигнал может быть задан с помощью своего амплитудного и фазового спектра, либо с помощью вещественной и мнимой частей спектра сигнала.

Связь действительной и мнимой частей спектра

При положительном сигнале ($s(t) \neq 0$ при $t \geq 0$, $s(t) = 0$ при $t < 0$) запишем для $t \geq 0$:

$$s(t) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty Re[S(\omega)]\cos\omega t\,d\omega + \int_0^\infty Im[S(\omega)]\sin\omega t\,d\omega\right]$$

для $t < 0$:

$$0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty Re[S(\omega)]\cos\omega t\,d\omega - \int_0^\infty Im[S(\omega)]\sin\omega t\,d\omega\right]$$

Из этих соотношений:

$$s(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Re[S(\omega)]\cos\omega t\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Im[S(\omega)]\sin\omega t\,d\omega$$

Вещественная и мнимая часть спектра взаимосвязаны между собой, т. е. нельзя задать независимо амплитудный и фазовый спектр, или вещественную и мнимую часть спектра.

Свойства спектра

Если смотреть строго, то амплитуды определяются как $\frac{A(\omega)d\omega}{2\pi}$, поэтому правильнее говорить о $A(\omega)$ и $S(j\omega)$ как о спектральных плотностях.

Размерность спектра равна размерности площади сигнала:

$$[S(\omega)] = \frac{s(t)}{\omega} = s(t) \cdot t$$

Начальное значение спектра (значение на нулевой частоте) равно площади сигнала:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, dt = S_f$$

Спектр произведения сигналов.

Рассмотрим еще одно свойство преобразования Фурье – спектр произведения. Пусть

$$s(t)\ =\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad\qquad g(t)\ =\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Тогда спектр произведения $s(t)g(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}s(t)g(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}s(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\theta)e^{j\theta t}d\theta\right]e^{-j\omega t}dt$$

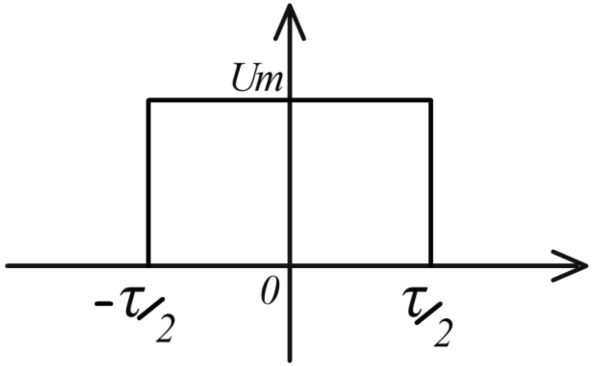
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\theta)\left[\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j(\omega-\theta)t}dt\right]d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\theta)S(\omega-\theta)d\theta$$

Спектр произведения определяется через свертку спектров с коэффициентом $\frac{1}{2\pi}$.

Спектр одиночного прямоугольного импульса

Математическое выражение и графическое изображение одиночного прямоугольного импульса:

$$f(t) = \begin{cases} U_m\,, & -{}^{\tau}/_{2} \le t \le {}^{\tau}/_{2}\,, \\ 0\,, & t < -{}^{\tau}/_{2}, t > {}^{\tau}/_{2}\;; \end{cases}$$

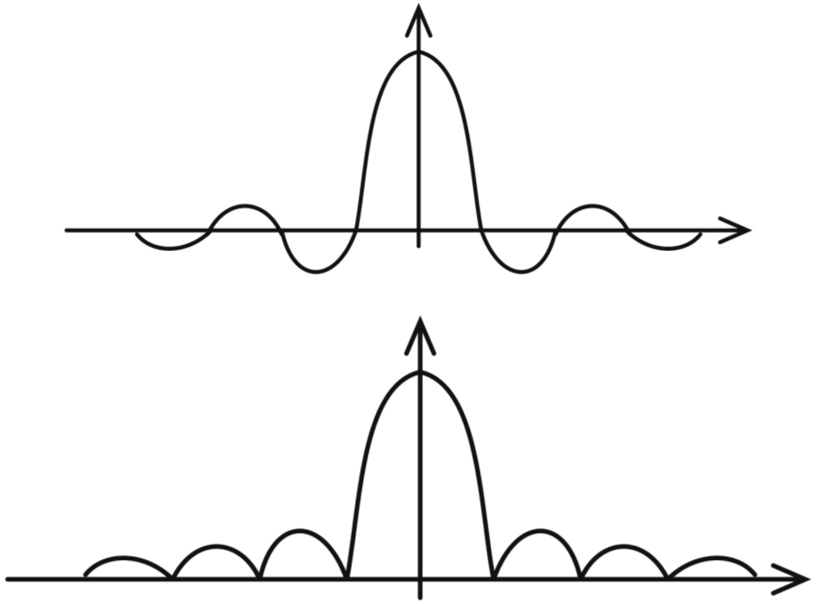


Спектр импульса:

$$\mathrm{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-{}^{\tau}/_{2}}^{{}^{\tau}/_{2}} U_m e^{-j\omega t}dt = U_m\tau\frac{\sin {}^{\omega\tau}/_{2}}{{}^{\omega\tau}/_{2}}$$

Спектр одиночного прямоугольного импульса

Амплитудный спектр:



$$A(\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \left| \sin\frac{\omega\tau}{2} \right|$$

Нули спектра:

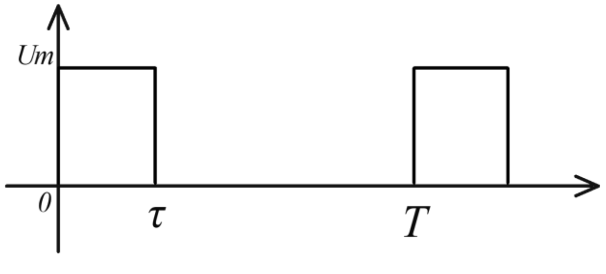
$$\omega = \pm\frac{2\pi}{\tau}k \ , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Начальное значение спектра (при замене на малых углах $\sin\frac{\omega\tau}{2} \to \frac{\omega\tau}{2}$):

$$A(0) = U_m\tau$$

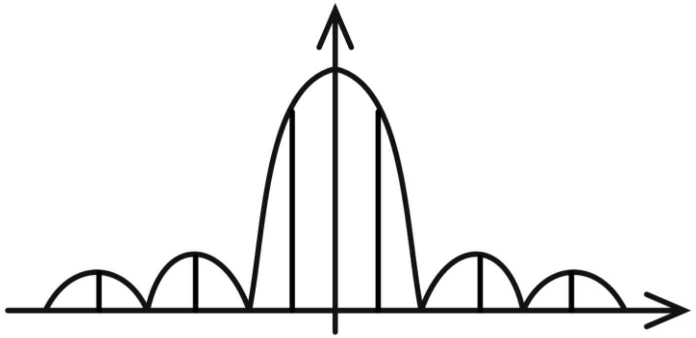
Связь дискретных и непрерывных спектров

Спектр одиночного импульса:



$$S(j\omega) = \int_0^\tau f(t)e^{-j\omega t}dt$$

формирование периодической последовательности приводит к равномерной дискретизации непрерывного спектра одиночного импульса с интервалом частот $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Тогда:

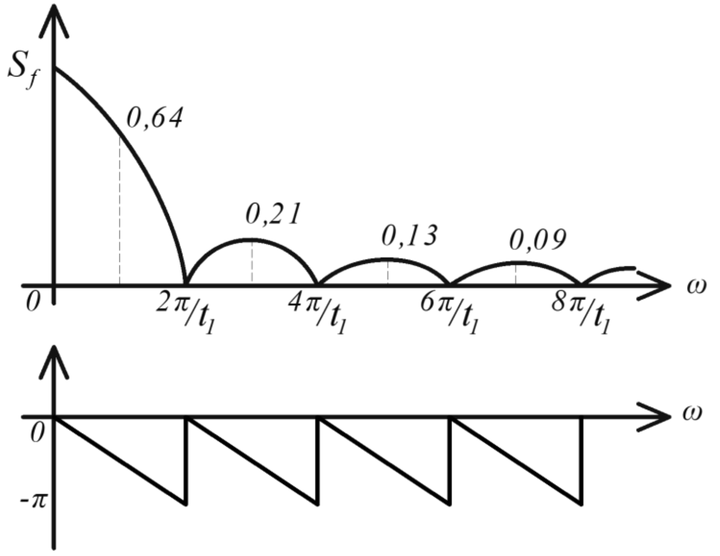


$$\dot{C}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{\omega_0}{2\pi}S(k\omega_0)$$

Непрерывный спектр одиночного импульса является огибающей периодической последовательности этих импульсов. Через амплитудный и фазовый спектры:

$$\dot{C}_k = \frac{\omega_0}{2\pi}A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}|_{\omega=k\omega_0}$$

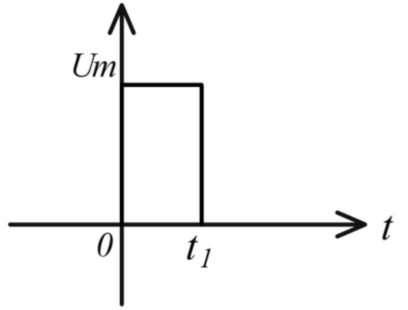
Ширина спектра.



Ширина спектра сигнала очень важный параметр, определяющий характеристики линий связи, взаимодействие сигналов и т.д. Существует несколько критериев определения ширины спектра.

Грубый критерий – по первому нулю, для предыдущего примера ширина спектра: $\Delta\omega = \frac{2\pi}{t_1}$.

«Десятипроцентный» критерий (амплитуда спектра менее $0{,}1 \cdot A(0)$) ширина спектра: $\Delta\omega \approx \frac{6\pi}{t_1}$.



Разница между этими значениями почти в 3 раза.

Важное замечание – ***ширина спектра обратно пропорциональна длительности импульса***. Т.е. если импульс уменьшить в 2 раза по длительности, ширина спектра в 2 раза возрастет (можно подтвердить используя теорему подобия).

Энергетический критерий ширины спектра.

Если определить энергию сигнала как ($f^2(t) = U^2(t)/R$ при $R = 1\Omega$):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt$$

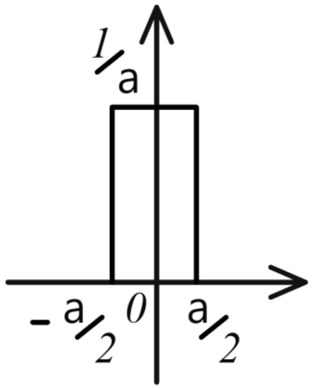
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)S(-j\omega)d\omega$$

Формула Релея (характеризует распределение энергии по спектру сигнала)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)d\omega$$

Определяет энергетический критерий для ширины спектра (например ширина по 90% энергии сигнала).

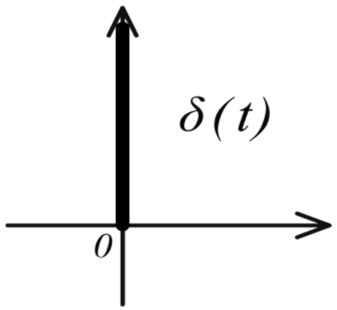
Импульсные функции Дирака и Хевисайта.



Функция Дирака:

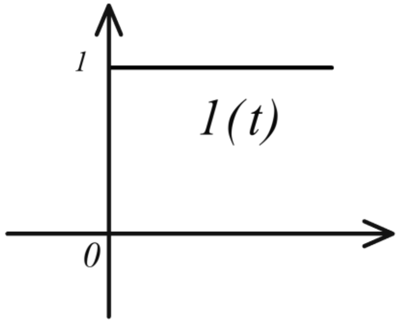
$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, t = 0, \\ 0, t \neq 0; \end{cases}$$

Функция определяется как симметричный относительно вертикальной оси прямоугольный импульс шириной α и высотой $^{1}/_{\alpha}$, при $\alpha \to 0$. Площадь импульса всегда равна 1.



Функция Хэвисайта (единичная ступенчатая функция):

$$1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0; \end{cases}$$

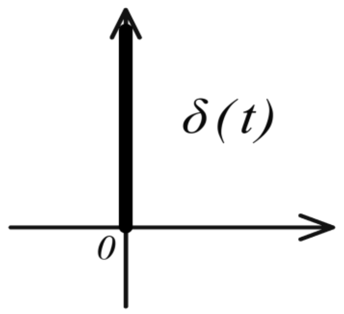


Связь между импульсными функциями:

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$$

Функция Дирака.

Функция Дирака: $$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, t = 0, \\ 0, t \neq 0; \end{cases}$$



Спектр функции Дирака:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) sin\omega t dt = 1$$

Из свойства четности дельта функции мнимая часть равна нулю. Спектр дельта функции равен 1. Ширина спектра бесконечна, энергия сигнала бесконечна. Сигнал с формой дельта-функции физически нереализуем.

Спектр ступенчатой функции

Функция $1(t)$ не является абсолютно интегрируемой, определим спектр как:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = \frac{1}{\sigma + j\omega}$$

$$S(j\omega) = \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma + j\omega} = \lim_{\sigma\to 0}\frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} - \lim_{\sigma\to 0}\frac{j\omega}{\sigma^2 + \omega^2} = Re[F(j\omega)] + jIm[F(j\omega)]$$

Действительная часть дельта-функция в частотной области. Коэффициент для дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\sigma})^2}d\frac{\omega}{\sigma} = arctg\frac{\omega}{\sigma}|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

Тогда искомый спектр:

$$S(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$