Аналоговая электроника и техника измерений.

Электрические цепи с распределенными параметрами.

Электрические цепи с распределенными параметрами

Цепи, токи и напряжения в которых зависят от точки, в которой произведено измерение, называются **цепями (линиями) с распределенными параметрами, или длинными линиями**.

Токи и напряжения в линии являются функциями не только времени, но и расстояния, этот эффект наблюдается при длинах проводников в электрических цепях сравнимых с длиной волны периодических колебаний. Предположим скорость распространения электромагнитной волны равной скорости света, тогда длина волны при частоте 50 Гц:

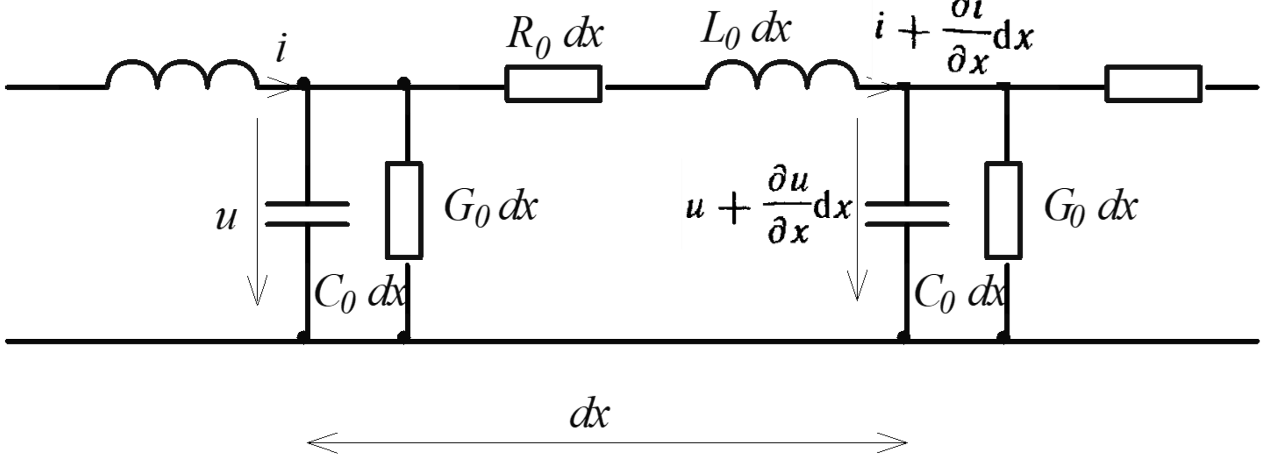
$$\lambda = cT = 3 \cdot 10^{8} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 6000 \text{ км}$$

Электрическую цепь начинают считать цепью с распределенными параметрами при длинах от $0{,}05 - 0{,}1\lambda$. При 50 Гц это 300 км. При частоте 1 ГГц, учитывать свойства цепи как длинной линии необходимо уже при длинах порядка 1 см.

Рассмотрение работы линии проведем при условии наличия в цепи ***синусоидальных форм токов и напряжений***.

Уравнение однородной линии в стационарном режиме.

R_0, L_0, C_0 и G_0 первичные параметры линии



Приращение тока и напряжения на элементе длины выразим через частные производные, запишем соотношения по правилам Кирхгофа

$$-u + iR_0dx + L_0dx\frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx = 0$$

$$i - uG_0dx - C_0dx\frac{\partial u}{\partial t} - i - \frac{\partial i}{\partial x}dx = 0$$

Уравнение однородной линии в стационарном режиме

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = iR_0 + L_0\frac{\partial i}{\partial t} \quad , \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = uG_0 + C_0\frac{\partial u}{\partial t}$$

Учитывая условие синусоидальности токов и напряжений, введем обозначения $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ и $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$, тогда:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0\dot{I} \quad , \qquad -\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0\dot{U}$$

Продифференцируем по расстоянию первое уравнение и подставим в него второе:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = Z_0Y_0\dot{U}$$

Решение уравнения однородной линии в стационарном режиме

Характеристическое уравнение : $p^2 - Z_0 Y_0 = 0$,

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{Z_0 Y_0} = \pm\gamma = \pm(\alpha + j\beta).$$

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x}$$

γ - постоянная распространения, α -коэффициент затухания, β - коэффициент фазы.

Для нахождения тока продифференцируем напряжение:

$$-\frac{d(\dot{A}_1 e^{\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x})}{dx} = \gamma \dot{A}_2 e^{-\gamma x} - \gamma \dot{A}_1 e^{\gamma x} = Z_0 \dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_2}{Z_C} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_1}{Z_C} e^{\gamma x}, \qquad Z_C = \frac{Z_0}{\gamma} = \frac{\gamma}{Y_0} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$$

Падающая и отраженная волны

Запишем решение уравнения линии в тригонометрическом виде для наглядности:

$$u(t,x) = A_2 e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x + \varphi_2) + A_1 e^{\alpha x}\sin(\omega t + \beta x + \varphi_1)$$

$$i(t,x) = \frac{A_2}{Z_C} e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x + \varphi_1 - \varphi_Z) - \frac{A_1}{Z_C} e^{\alpha x}\sin(\omega t - \beta x + \varphi_2 - \varphi_Z)$$

Первое слагаемое в выражениях определяется как прямая или падающая волна (распространяющаяся от начала линии к концу), второе как обратная или отраженная (от конца линии, идущая в сторону начала) волна.

Учитывая то, что начальной точкой отраженной волны является конец линии, знак показателя экспоненты определяющей затухание физического смысла не лишен.

Наличие отраженных волн в линии может приводить к искажению и потере передаваемой информации, вопрос о борьбе с этим явлением будет рассмотрен немного позже.

Параметры линии

$$u(t,x) = A_1 e^{\alpha x}\sin(\omega t + \beta x + \varphi_1) + A_2 e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x + \varphi_2)$$

Фаза волны $\omega t - \beta x + \varphi_1$

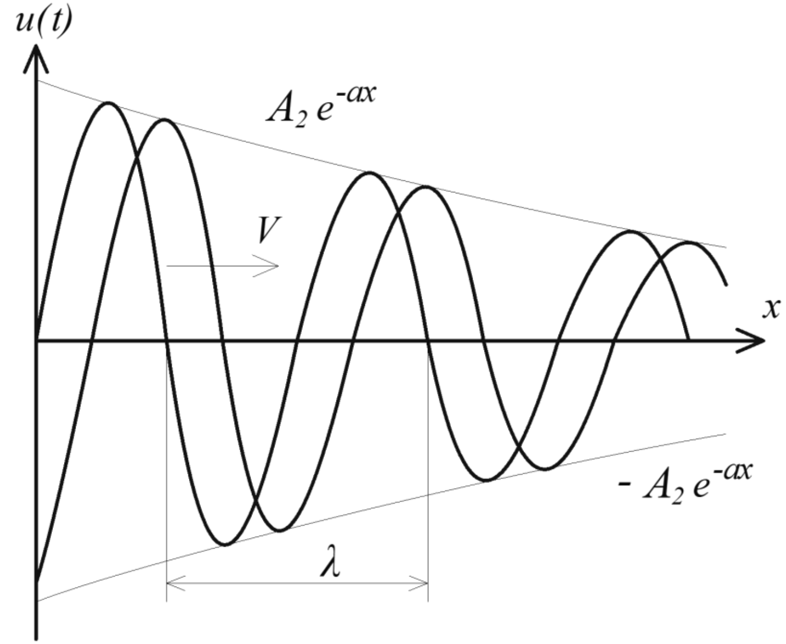
Продифференцируем по времени и приравняем к нулю:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

Длина волны определяется фазовым сдвигом на 2π

$$\omega t - \beta(x+\lambda) + \varphi_1 = \omega t - \beta x + \varphi_1 - 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = vT = \frac{v}{f}$$



Для падающей и отраженной волн выполняется закон Ома: $\dot{I}_{\text{пр}} = \frac{\dot{U}_{\text{пр}}}{Z_C}$, $\dot{I}_{\text{обр}} = \frac{\dot{U}_{\text{обр}}}{Z_C}$

Определение коэффициентов затухания и фазы в линии.

Постоянная распространения в общем случае:

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$
$$\alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(C_0 R_0 + L_0 G_0)$$

Система уравнений:

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 \ , \qquad 2\alpha\beta = \omega(R_0 C_0 + L_0 G_0)$$

Выразим коэффициенты затухания и фазы:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{\left({R_0}^2 + \omega^2 {L_0}^2\right)\left({G_0}^2 + \omega^2 {C_0}^2\right)}\right)}$$
$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{\left({R_0}^2 + \omega^2 {L_0}^2\right)\left({G_0}^2 + \omega^2 {C_0}^2\right)}\right)}$$

Определение постоянных интегрирования. Линия конечной длины.

Если известны ток и напряжение в начале линии (при *x=0*):

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 \quad , \qquad \dot{I}_1 = \frac{\dot{A}_2}{Z_C} - \frac{\dot{A}_1}{Z_C}$$

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C) \quad , \qquad \dot{A}_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C)$$

Тогда решение уравнения линии:

$$\dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C)e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C)e^{-\gamma x} = \dot{U}_1 ch\gamma x - \dot{I}_1 Z_C sh\gamma x$$

$$\dot{I} = \frac{1}{2Z_C}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2Z_C}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C)e^{\gamma x} = \dot{I}_1 ch\gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_C} sh\gamma x$$

Если $\dot{I}_{\text{н}}$ $\dot{U}_{\text{н}}$ ток и напряжение нагрузки (конец линии), l - длина отрезка линии, $y = l - x$.

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{н}} ch\gamma(l - y) + \dot{I}_{\text{н}} Z_C sh\gamma(l - y)$$

$$\dot{I} = -\frac{\dot{U}_{\text{н}}}{Z_C} sh\gamma(l - y) + \dot{I}_{\text{н}} ch\gamma(l - y)$$

Линия бесконечной длины. Согласование линии.

В случае бесконечно длинной линии слагаемое содержащее $e^{\gamma x}$, не имеет смысла (конца нет, значит не будет отражения), следовательно $\mathrm{A}_1 = 0$ и решение примет вид:

$$\dot{U} = \dot{A}_2 e^{-\gamma x} \quad , \qquad \dot{I} = \frac{\dot{A}_2}{Z_C} e^{-\gamma x}$$

Для бесконечной линии сопротивление в любой ее точке : $\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_C$. Если разрезать бесконечную линию и нагрузить на сопротивление равное характеристическому, то со стороны начала линии изменений не будет заметно, отраженной волны не появится.

Если мощность, полученная от источника равна: $P_1 = \dot{U}_1\, \dot{I}_1 \cdot cos\varphi$

то в конце линии, длиной l : $P_{\text{н}} = \dot{U}_{\text{н}}\, \dot{I}_{\text{н}} \cdot cos\varphi = \dot{U}_1 e^{-\alpha l}\, \dot{I}_1 e^{-\alpha l} \cdot cos\varphi = P_1 e^{-2\alpha l}$

КПД и затухание в линии: $\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P_1} = e^{-2\alpha l}$, $\alpha l = \frac{1}{2} ln \frac{P_{\text{н}}}{P_1}$

Коэффициент отражения и режим работы линии

Коэффициент отражения по напряжению:

$$K_u = \frac{\dot{A}_1 e^{\gamma l}}{\dot{A}_2 e^{-\gamma l}} = \frac{Z_H - Z_C}{Z_H + Z_C}$$

Коэффициент отражения по току: $K_i = -K_u$

При согласованной нагрузке $|K_u| = 0$ отражения отсутствуют, линия работает в **режиме бегущей волны.** Мощность, переносимая волной, **полностью выделяется в нагрузке**.

При холостом ходе или коротком замыкании на выходе линии $|K_u| = 1$ линия работает в **режиме стоячей волны**, волна полностью отражается от конца линии. В таком случае вся мощность возвращается в генератор. Стоячей волна называется потому, что координаты минимумов и максимумов этой волны неизменны относительно начала или конца линии.

В остальных случаях режим работы называется **режимом смешаных волн**. В этих случаях часть мощности выделяется в нагрузке, часть возвращается в генератор.

Частный случай. Линия без потерь.

В случае $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ потери активной мощности в линии отсутствуют. Для такой линии:

$$\alpha = 0 \quad , \qquad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0} \quad , \qquad \gamma = j\beta = j\frac{\omega}{v} = j\frac{2\pi}{\lambda} \; , \qquad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Для линии конечной длины, можно записать: $\gamma l = j\frac{2\pi l}{\lambda}$. Уравнения длинной линии преобразуются в уравнения, записанные с использованием тригонометрических функций от вещественного аргумента:

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{н}} cos\frac{2\pi}{\lambda}(l - x) + j\dot{I}_{\text{н}} Z_C sin\frac{2\pi}{\lambda}(l - x)$$

$$\dot{I} = j\frac{\dot{U}_{\text{н}}}{Z_C} sin\frac{2\pi}{\lambda}(l - x) + \dot{I}_{\text{н}} cos\frac{2\pi}{\lambda}(l - x)$$

при $\frac{\mathrm{R_0}}{\omega \mathrm{L_0}} \ll 1$, $\frac{\mathrm{G_0}}{\omega \mathrm{C_0}} \ll 1$ линию приближенно можно считать линией без потерь.

Частный случай. Линия без искажений.

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = (\alpha + j\beta) \qquad\qquad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{C_0 Z_c}$$

Для отсутствия искажений необходимо обеспечить $\alpha = const$, и $v = const$. При этом сигналы всего спектра частот будут распространяться одинаково и относительная форма импульсов не будет искажена (затухание только уменьшит амплитуды). Отсюда вытекает что $Z_c = const$, следовательно, характеристическое сопротивление не зависит от частоты.

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}\left(\frac{R_0/L_0 + j\omega}{G_0/C_0 + j\omega}\right)}$$

Видно что Z_c будет вещественной константой при $R_0/L_0 = G_0/C_0$.

Линия без искажений.

Для линии без искажений фазовая скорость

$$v = \frac{1}{C_0 Z_c} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

и затухание

$$\alpha = G_0 Z_c = \sqrt{R_0 G_0} = \frac{R_0}{Z_c}$$

Для реальных линий $R_0/L_0 \gg G_0/C_0$. Поэтому для придания реальным линиям свойств линий без искажения искусственно увеличивают их индуктивность. В качестве примера можно примести кабель компьютерного монитора, на котором одеты ферритовые трубки для увеличения индуктивности.

Искажения, как и наличие отраженных волн, являются причиной искажений и потери информации при передаче.

Входное сопротивление линии. Согласование разных типов линий.

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 ch\gamma l + \dot{I}_2 Z_C sh\gamma l}{\frac{\dot{U}_2}{Z_C} sh\gamma l + \dot{I}_2 ch\gamma l} = Z_C \frac{Z_{\text{н}} ch\gamma l + Z_C sh\gamma l}{Z_{\text{н}} sh\gamma l + Z_C ch\gamma l} = Z_C \frac{Z_{\text{н}} + Z_C th\gamma l}{Z_C + Z_{\text{н}} th\gamma l}$$

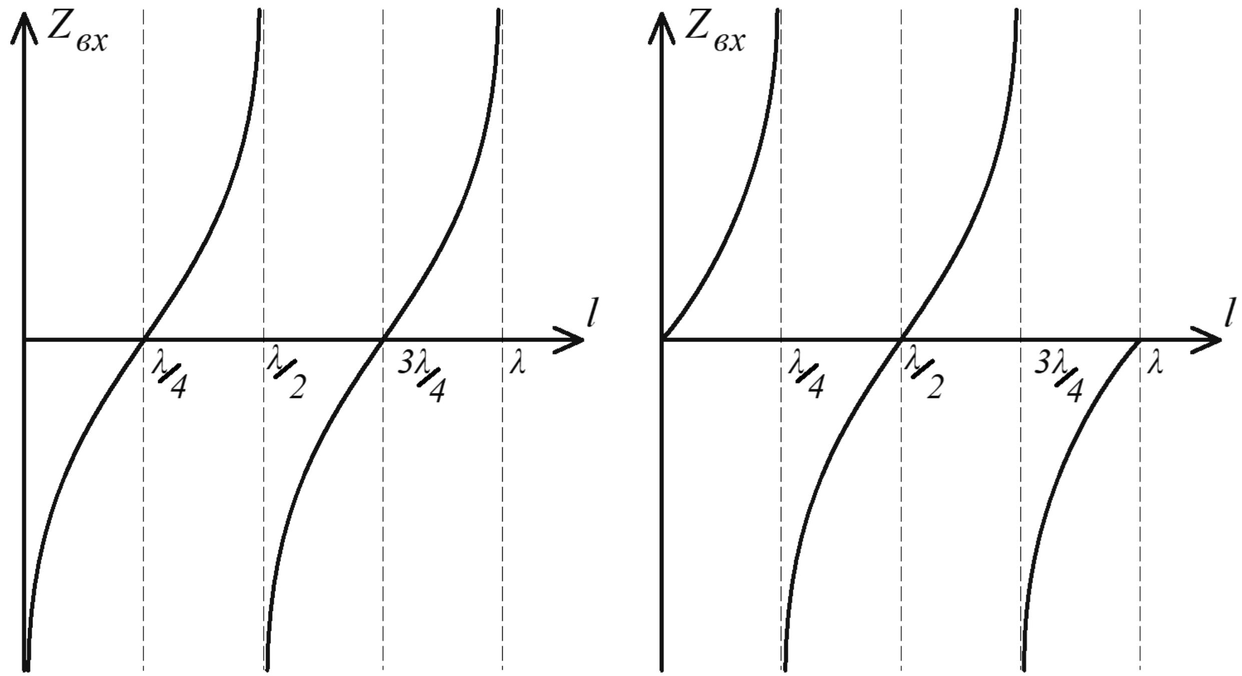
Зависимость входного сопротивления от длины имеет колебательный характер. При определенных длинах линии ее входное сопротивление может быть вещественным - такие длины линии называются резонансными. Отрезки линии резонансных длин используют для согласования разных типов линий.

Для линии без потерь:

$$Z_{\text{вх}} = Z_C \frac{Z_{\text{н}} + jZ_C tg\frac{2\pi}{\lambda} l}{Z_C + jZ_{\text{н}} tg\frac{2\pi}{\lambda} l}$$

Для режимов хх и кз, когда мощность, передаваемая в нагрузку, равна нулю:

$$Z_{\text{вх хх}} = -jZ_C ctg\frac{2\pi}{\lambda} l, \qquad Z_{\text{вх кз}} = jZ_C tg\frac{2\pi}{\lambda} l$$



Согласование системы передачи.

Для наилучших режимов работы необходимо полное согласование всех элементов системы передачи сигналов (или энергии).

Генератор (источник сигнала) необходимо согласовать с линией передачи, которая в свою очередь должна быть согласована с приемником сигнала (нагрузкой). В противном случае многочисленные отражения как от конца линии (нагрузки), так и от начала (генератора) приведут к серьезным проблемам при восстановлении информации из сигнала, вплоть до ее полной потери.

Информацию о волновом сопротивлении элементов системы (кабели, усилители, антенны и т.д.) можно найти в паспортных данных на оборудование, либо определить с помощью специальных измерителей.

Переходные процессы в длинной линии.

Для линии ранее были получены уравнения

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = iR_0 + L_0\frac{\partial i}{\partial t} \quad , \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = uG_0 + C_0\frac{\partial u}{\partial t}$$

Упростим задачу предположив, что линия является линией без потерь

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0\frac{\partial i}{\partial t} \quad , \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = C_0\frac{\partial u}{\partial t}$$

Продифференцируем левое уравнение по расстоянию, а правое по времени и подставим друг в друга

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \quad , \qquad \text{здесь} \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Переходные процессы в длинной линии.

Решение уравнений также представляет собой сумму прямой и обратной волн.

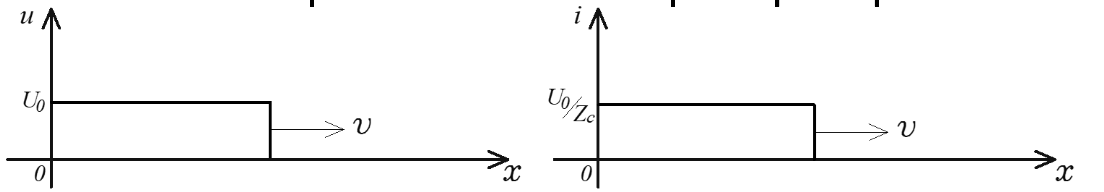
$$u(t,x) = u_{\text{пр}} + u_{\text{обр}}\ , \qquad i(t,x) = \frac{u_{\text{пр}}}{Z_c} - \frac{u_{\text{обр}}}{Z_c} = i_{\text{пр}} - i_{\text{обр}}$$

Переходный процесс в линии – наложение дополнительных новых волн вызванных измененным режимом работы на волны режима существовавшего до начала изменения.

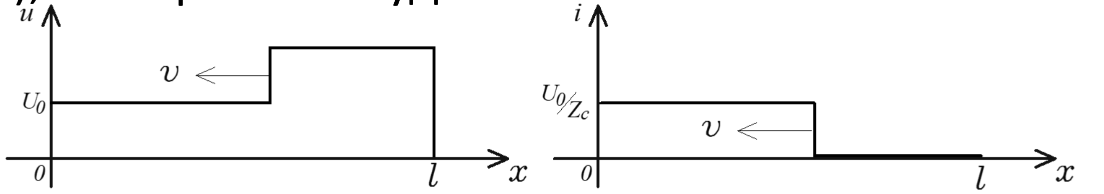
В качестве примера рассмотрим отрезок линии без нагрузки, с распространением по нему прямоугольной волны (подача ступеньки).

Подключение источника постоянного напряжения к линии.

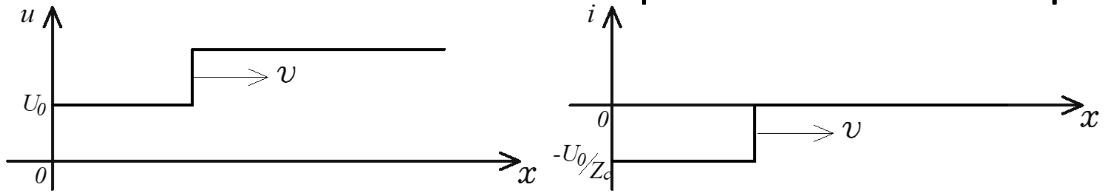
В начальный момент времени волны напряжения и тока распространяются от начала линии к концу со скоростью v.



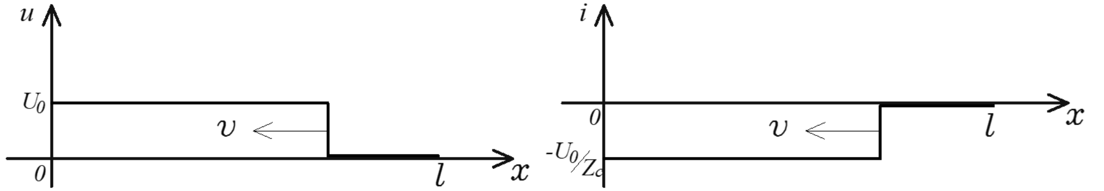
По достижении конца линии волна полностью отражается (потерь нет, нагрузки нет), ток в конце равен нулю (режим холостого хода), а напряжение удваивается.



При возвращении к началу линии возникают волны напряжения и тока отрицательной полярности.



После отражения от конца волны вернутся к началу линии где ток и напряжение станут равными нулю.



Подключение источника постоянного напряжения к линии.

Время прохождения волны по отрезку линии:

$$\tau = \frac{l}{v}$$

Длительность периода переходного процесса в линии - 4τ.

При изменении условий задачи на короткое замыкание конца линии переходный процесс будет протекать аналогично, только удваиваться будет ток в линии а не напряжение.