

# **Электроника и электротехника.**

## **Часть 2.**

- §11. Переходные процессы в электрических цепях. 3
- §12. Электрические цепи при несинусоидальных периодических токах.
- §13. Применение спектральных и операторных методов анализа электрических цепей.
- §14. Активные фильтры. Понятие систем с обратной связью.
- §15. Электрическая цепь с распределенными параметрами.
- §16. Модуляция электрических сигналов, основные понятия и типы.

### **Список литературы:**

Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Гардарики, 1999.

Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника: Справочное руководство.

Пейтон А.Дж. Волш В. Аналоговая электроника на операционных усилителях.

## § 10. Переходные процессы в электрических цепях.

### 11.1. Основные понятия и определения

До сих пор все рассматриваемые нами цепи находились в установившихся режимах работы. Мы не рассматривали эффекты воздействия переходных процессов на параметры токов и напряжений в цепи. Каждый раз при включении какого-либо электронного устройства инициируется переходной процесс.

**Переходный процесс** - это переход между режимами работы цепи, отличающимися друг от друга амплитудами, фазами или частотами действующими в цепи ЭДС, или конфигурацией элементов цепи. Физически это является переходом системы от одного энергетического состояния к другому.

Для рассмотрения переходных процессов в электрических цепях нам понадобится введение еще одного элемента цепи. **Ключ (выключатель)** – имеет следующие параметры: сопротивление в открытом состоянии бесконечно, в закрытом сопротивление равно нулю, переход между этими двумя состояниями происходит мгновенно.

Рассмотрим простую электрическую цепь – рис. 11.1. Когда ключ разомкнут (открыт), тока в цепи нет. При замыкании (**коммутации**) ключа начинается переходной процесс, связанный с возникновением тока в цепи.

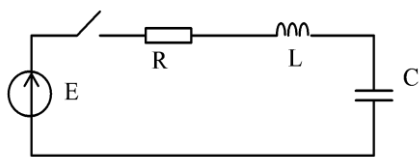


Рис. 11.1.

Для описания работы электрической цепи, после замыкания ключа, с использованием второго правила Кирхгофа можно записать дифференциальное уравнение:

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

Подставляя в это уравнение значение тока через конденсатор:

$$i = C \frac{du_c}{dt}$$

получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно  $u_c$ :

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = e \quad (11.1)$$

В данном случае порядок дифференциального уравнения будет определяется количеством элементов цепи, накапливающих энергию, т.е. реактивных, после выполнения эквивалентных преобразований, сводящих это количество к минимальному.

Расчет переходного процесса – нахождение решения дифференциального уравнения (системы уравнений), позволяющее определить характер изменения токов и напряжений на элементах схемы. В данном курсе будут рассмотрены **классический** и **операторный** (во второй части) методы расчета переходных процессов.

Для моментов времени в цепи приняты следующие обозначения:  $t = 0$  - момент коммутации (момент начала переходного процесса), момент непосредственно перед

коммутацией  $t = 0_-$ , момент времени непосредственно после коммутации  $t = 0_+$ . Значения токов и напряжений для этих моментов будет обозначаться как:  $i(0_-)$ .

## 11.2. Классический метод расчета переходных процессов.

В классическом методе расчета переходных процессов для решения дифференциального уравнения используется метод Эйлера. По этому методу решение уравнения представляет собой сумму **частного решения** исходного неоднородного уравнения и **общего решения** однородного уравнения, получаемого из исходного путем приравнивания его левой части к нулю. Применительно к электротехнике в качестве частного принимают решение, соответствующее искомой переменной в режиме после коммутации, для момента времени  $t = +\infty$ . Эта величина обозначается  $u_{пр}$  (или  $i_{пр}$ ), и называется принужденной составляющей. Для электрической цепи с заданными величинами постоянных или периодических ЭДС (или токов) источников, принужденная составляющая может быть определена путем расчета стационарного режима работы схемы, получившейся после коммутации, любым из рассмотренных ранее методов расчета линейных электрических цепей.

Вторая составляющая общего решения уравнения – решение для уравнения с нулевой правой частью – соответствует режиму, когда принуждающие силы (источники энергии) на цепь непосредственно не воздействуют. Влияние источников проявляется здесь через энергию, запасенную в магнитных полях катушек индуктивности и электрических зарядах конденсаторов. Данный режим работы схемы называют свободным, а величина  $u_{св}$  (или  $i_{пр}$ ) – свободной составляющей решения исходного уравнения. В соответствии со сказанным, решение дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$u = u_{пр} + u_{св}$$

Вид этого соотношения показывает, что в классическом методе расчета переходной процесс рассматривается как наложение двух режимов: принужденного, как бы наступившего непосредственно сразу после момента коммутации, и свободного режима, имеющего место только при прохождении переходного процесса. Здесь необходимо заметить, что метод наложения справедлив только для линейных цепей, следовательно, и классический метод расчета переходных процессов применим только для линейных схем.

Свободная составляющая решения уравнения представляет собой сумму экспонент. Количество и величины показателей экспонент определяются количеством и видом корней характеристического уравнения. Характеристическое уравнение составляется, как известно из курса математического анализа, по имеющемуся дифференциальному уравнению, заменой дифференциалов на параметр  $p$ , возведенный в степень соответствующую порядку дифференциала. Например, для рассматриваемого нами дифференциального уравнения (10.1), характеристическое будет выглядеть так:

$$p^2 LC + pRC + 1 = 0$$

Для расчета переходного процесса в электрической цепи существует еще один метод составления характеристического уравнения. Для этого необходимо записать соотношение для полного сопротивления цепи на переменном синусоидальном токе, выполнить замену  $j\omega = p$  и приравнять полученное соотношение к нулю  $Z(p) = 0$ . Необходимо помнить, что импеданс вычисляется для цепи, полученной после момента коммутации, при этом источники энергии в цепи заменяются своими внутренними сопротивлениями, а полное сопротивление может быть вычислено относительно любой разомкнутой ветви, как и в

методе эквивалентного генератора. Составленное таким образом уравнение для цепи на рис. 11.1 совпадает с полученным выше.

Преимуществом составления характеристического уравнения по методу определения импеданса цепи является то, что здесь нет необходимости составлять само дифференциальное уравнение (или систему уравнений) цепи, т.к. для разветвленных цепей это может оказаться непросто.

Еще необходимо отметить, что линейная цепь охвачена единым переходным процессом, и корни характеристического уравнения, являются общими для всех свободных составляющих токов и всех напряжений элементов цепи. Вид корней характеристического уравнения определяет тип переходного процесса, протекающего в цепи (Таблица 11.1.).

При вещественных корнях характеристического уравнения величина свободной составляющей монотонно затухает, переходный процесс - апериодический. Наличие пары комплексно сопряженных корней обуславливает появление затухающих синусоидальных колебаний - колебательный переходный процесс. Заметим, что поскольку в линейной цепи с течением времени свободная составляющая затухает, вещественные части корней характеристического уравнения должны быть отрицательными, всегда  $\alpha_k < 0$ . Также колебательный процесс связан с обменом энергией в цепи между емкостями и индуктивностями, соответственно появление комплексных корней возможно только в той цепи, которая содержит оба типа реактивных элементов.

Таблица 11.1.

Вид корня	Вид свободной составляющей	Тип процесса
Различные, вещественные корни $p_1, p_2, \dots, p_n$	$\sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$	Апериодический
Пары комплексно сопряженных корней $\alpha_k \pm j\omega_k$	$\sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k)$	Периодический

Основной характеристикой, описывающей переходной процесс, является постоянная времени, определяемая как  $\tau = \frac{1}{p_k}$ , для вещественных корней характеристического уравнения. Для комплексных корней аналогом постоянной времени является коэффициент затухания. Постоянная времени интерпретируется как временной интервал, в течение которого свободная составляющая уменьшится в  $e$  раз по сравнению со своим начальным значением. Несмотря на то, что в реальности переходной процесс бесконечен, на практике считается, что он заканчивается за время эквивалентное  $3 - 5\tau$ .

### 11.3. Начальные условия. Законы коммутации

При поиске решения дифференциального уравнения, составленного для цепи, необходимо определить величины постоянных интегрирования  $A_k$ , количество которых равно порядку дифференциального уравнения. Постоянные интегрирования могут быть найдены из начальных условий, которые принято делить на независимые и зависимые.

К **независимым начальным условиям** относят потокосцепление (ток) для катушки индуктивности и заряд (напряжение) на конденсаторе в момент времени  $t = 0$  (момент коммутации). Независимые начальные условия определяются на основании законов коммутации.

$$i_L(0_+) = i_L(0_-), u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Данная запись означает, что ток в индуктивности и напряжение на конденсаторе не меняются в момент коммутации, говорят не меняются мгновенно.

**Зависимыми начальными условиями** называются значения остальных токов и напряжений, а также производных от искомой функции в момент коммутации, определяемые по независимым начальным условиям при помощи уравнений, составляемых по законам Кирхгофа для момента коммутации. Несмотря на то, что ток индуктивности и напряжения конденсатора не меняются в момент коммутации, производные в общем случае нулю равны не будут. Необходимое число начальных условий равно числу постоянных интегрирования.

### Обоснование законов коммутации

Для последовательной LR цепи по второму правилу Кирхгофа:  $L \frac{di}{dt} + Ri = e$

При конечном значении приращения тока  $\Delta i$  и бесконечно малом приращении времени получим что  $\Delta i / \Delta t \rightarrow \infty$ , и уравнение, записанное выше, не может быть выполнено. Следовательно, приращение тока индуктивности равно нулю.

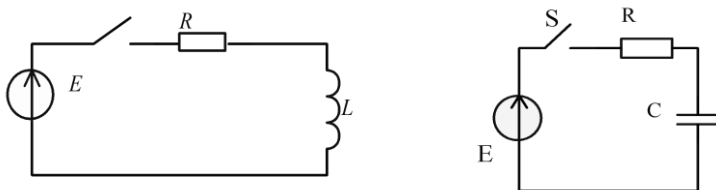


Рис.11.2

Для простейшей RC цепи аналогично запишем:  $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e$

При конечном значении приращения напряжения на конденсаторе и бесконечно малом приращении времени получаем  $\Delta u_C / \Delta t \rightarrow \infty$ , и уравнение, составленное для цепи по второму закону Кирхгофа, не может быть выполнено. Следовательно, приращение напряжения на конденсаторе равно нулю.

Законы коммутации являются следствием законов сохранения магнитного потока и электрического заряда соответственно.

### 11.4. Определение постоянных интегрирования.

Для получения окончательного решения дифференциального уравнения необходимо определить вид и величины постоянных интегрирования ( $A_k$  из формул в таблице 11.1). Рассмотрим метод нахождения постоянных интегрирования, считая известными вид и корни характеристического уравнения.

Для характеристического уравнения первой степени существует один корень, и постоянная интегрирования определяется по значению свободной составляющей в момент коммутации.

$$A = u_{CB}(0_+)$$

Если характеристическое уравнение второй степени, то при двух действительных неравных корнях свободная составляющая имеет вид:

$$u_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Продифференцируем по времени это уравнение:

$$u'_{\text{св}} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$$

Тогда для момента коммутации, используя полученное выше, можно записать:

$$u_{\text{св}}(0_+) = A_1 + A_2$$

$$u'_{\text{св}}(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2$$

Решение этой системы уравнений позволяет найти постоянные интегрирования:

$$A_1 = \frac{u'_{\text{св}}(0_+) - p_2 u_{\text{св}}(0_+)}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = u_{\text{св}}(0_+) - A_1$$

Если же корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными, вида  $\alpha \pm j\omega$ , то будут сопряжены и постоянные интегрирования. Свободная составляющая здесь определяется как:

$$u_{\text{св}} = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \psi)$$

Определение неизвестных  $A$  и  $\psi$  и в этом случае осуществляется по значениям  $u_{\text{св}}(0_+)$  и  $u'_{\text{св}}(0_+)$ . Продифференцируем и составим систему уравнений, решением которой и будут искомые величины:

$$u_{\text{св}}(0_+) = A \sin \psi$$

$$u'_{\text{св}}(0_+) = -A \alpha \sin \psi + A \omega \cos \psi$$

Аналогично, для характеристических уравнений более высоких степеней, чтобы найти постоянные интегрирования, необходимо брать производные более высоких порядков. Количество уравнений, таким образом, будет соответствовать количеству неизвестных.

### 11.5. Методика расчета переходных процессов классическим методом:

1. Записать выражение для искомой величины в виде суммы принужденного и свободного значений. Определение начальных значений. Нахождение принужденной составляющей на основании расчета установившегося режима цепи.
2. Составление характеристического уравнения и определение его корней. Запись выражения свободной составляющей в форме, определяемой типом найденных корней.
3. Определение постоянных интегрирования и запись конечного вида решения.

**Пример. 11.1.** Ключ замыкается в нулевой момент времени, найти ток в цепи.

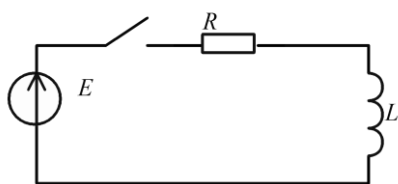


Рис. 11.3.

Решение имеет вид:  $i_L(t) = i_L(\infty) + i_{\text{св}}(t)$

Начальные условия:  $i_L(0) = 0$ . Принужденное значение тока  $i_L(\infty) = E/R$ .

Характеристическое уравнение:  $R + pL = 0$ , откуда  $p = -R/L$ .

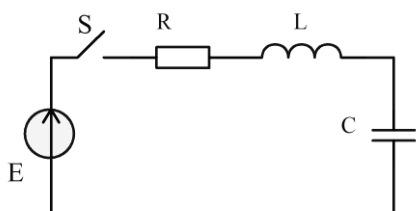
Из начального условия и закона коммутации найдем постоянную интегрирования

$$A = i_L(0) - i_L(\infty) = -E/R$$

Тогда ток в цепи:

$$i_L(t) = E/R - E/R e^{-\frac{R}{L}t}$$

**Пример. 11.2.** Ключ замыкается, решить для тока индуктивности и напряжения конденсатора.  $R=$ ,  $C=$ ,  $L=$



**Пример 11.3.** Определить ток индуктивности при синусоидальной ЭДС  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$ . Ключ размыкается.

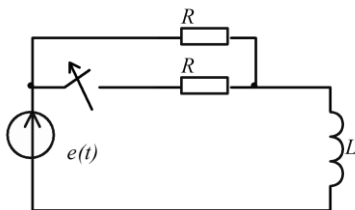


Рис. 11.5

$$i_L(t) = i_L(\infty) + i_{\text{св}}(t) = \frac{E_m e^{j(\varphi - \arctg \frac{\omega L}{R})}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j\omega t} + A e^{pt}$$

Характеристическое уравнение и его корень:  $R + pL = 0$ ,  $p = -R/L$ . Постоянная интегрирования определяется через ток в начальный момент времени:  $i_L(0) = \frac{E_m e^{j(\varphi - \arctg \frac{\omega L}{2R})}}{\sqrt{4R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{E_m e^{j(\varphi - \arctg \frac{\omega L}{R})}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + A$

$$i_L(t) = \frac{E_m e^{j(30^\circ - \arctg \frac{\omega L}{R})}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j\omega t} + \left( \frac{E_m e^{j(30^\circ - \arctg \frac{\omega L}{2R})}}{\sqrt{4R^2 + \omega^2 L^2}} - \frac{E_m e^{j(30^\circ - \arctg \frac{\omega L}{R})}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

## § 12. Электрические цепи при несинусоидальных периодических токах.

В предыдущих разделах мы рассматривали цепи периодических синусоидальных токов. Но при рассмотрении реальных цепей мы обнаружим, что токи и напряжения в них далеки от идеальных. Искажения синусоид вызваны несовершенством генераторов, наличием

нелинейных нагрузок и т.д. Кроме того сигналы в информационных и управляющих цепях изначально далеки от синусоидальных, что вызвано условиями работы этих устройств.

В описании несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях будет использовано понятие гармоник. **Гармоника** – это сигнал синусоидальной формы с частотой, кратной частоте рассматриваемого периодического сигнала. Периодический электрический сигнал любой формы сигнал состоит из суммы гармоник.

### 12.1. Разложение периодических несинусоидальных кривых в ряд Фурье

Из курса математического анализа известно, что любую периодическую функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в тригонометрический ряд (ряд Фурье). Следует сразу отметить, что все функции, рассматриваемые в курсе электротехники, удовлетворяют этим условиям.

При разложении периодическая функция представляется следующим образом:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t)$$

Здесь  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  циклическая частота раскладываемой функции,  $A_0$  среднее значение функции (нулевая гармоника), а амплитуды следующих гармоник соответственно определяются по формулам:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt$$

Соотношение для ряда Фурье можно переписать и в следующем виде:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{A_k}{B_k}$$

Отсюда виден переход к комплексной форме записи выражения для ряда Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega t}, \quad \text{где } C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt$$

Совокупность гармонических составляющих называется **дискретным частотным спектром**.

### 12.2. Свойства разложения в ряд Фурье некоторых функций.



Свойства кривых, описывающих формы несинусоидальных величин, такие как симметрия, позволяют упростить поиск коэффициентов для гармоник рядов Фурье. Например, если кривая симметрична относительно оси абсцисс, т.е. выполняется условие:

$$f(x) = -f\left(x + \frac{T}{2}\right),$$

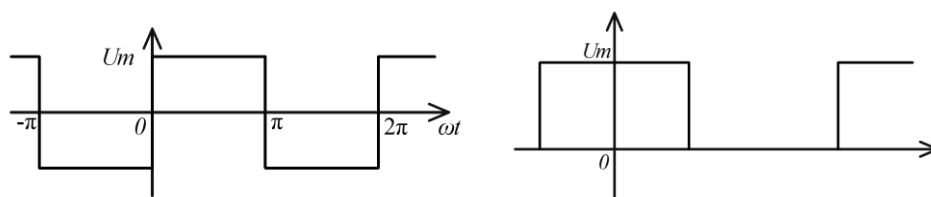
то  $A_0 = 0$ . График такой функции изображен на рис. 12.1а. Кроме того, в разложении будут отсутствовать четные гармоники, коэффициенты при них равны нулю. Если функция симметрична относительно начала координат, т.е. нечетна, условие будет выглядеть так:

$$f(x) = -f(-x),$$

то в разложении будут отсутствовать косинусные составляющие. Для четной функции (рис. 12.1б):

$$f(x) = f(-x),$$

в разложении не будет синусных составляющих. Эти свойства легко доказываются вычислением интегралов в формулах для определения коэффициентов гармоник ряда.



а.

б. Рис. 12.1.

**Пример 12.1.** Найти коэффициенты ряда Фурье для симметричного относительно горизонтальной оси и начала координат меандра (рис. 11.1а)

Из рассмотренных выше свойств  $A_0 = 0$ , отсутствуют четные гармоники и  $A_k = 0$ . Примем  $T = 2\pi$ . Вычислим коэффициенты  $B_k$ :

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} U_m \sin kt dt + \int_{-\pi}^0 (-U_m) \sin kt dt \right) \\ &= \frac{U_m}{\pi k} (\cos kt \Big|_0^{\pi} - \cos kt \Big|_{-\pi}^0) = \frac{U_m}{\pi k} (1 - (-1) - (-1) + 1) = \frac{4U_m}{\pi k} \end{aligned}$$

Ответ можно записать следующим образом:

$$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} (\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + \dots)$$

**Пример 12.2.** Найти коэффициенты ряда Фурье для симметричного относительно вертикальной оси меандра (рис. 11.1б)

Из рассмотренных выше свойств  $B_k = 0$ , найдем значение нулевой гармоники:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_m dt = \frac{U_m}{2}$$

Вычислим коэффициенты  $A_k$  :

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_m \cos(k\omega t) dt = \frac{U_m}{k\pi} \sin(k\omega t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{U_m}{k\pi}$$

Четные гармоники здесь также отсутствуют.

$$u(t) = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \left( \cos\omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right)$$

### 12.3. Мощность в цепях несинусоидального тока.

Если форма тока задана аналитическим выражением, можно точно взять интеграл и определить действующее значение. В общем случае действующее значение определяется по гармоническим составляющим. Для тока  $I(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$ , на основании формулы для вычисления действующего значения тока запишем:

$$\begin{aligned} I_{rms}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \right]^2 dt = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T I_k^2 \sin^2(k\omega t + \varphi_k) dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{\substack{n=0 \\ m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} \int_0^T I_n I_m \sin(n\omega t + \varphi_n) \sin(m\omega t + \varphi_m) dt \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T I_k^2 [1 - \cos(2k\omega t + \varphi_k)] dt \\ &\quad + \frac{1}{2T} \sum_{\substack{n=0 \\ m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} \int_0^T I_n I_m [\cos((n-m)\omega t + \varphi_n - \varphi_m) - \cos((n+m)\omega t + \varphi_n + \varphi_m)] dt \end{aligned}$$

Очевидно, что второе слагаемое равно нулю (интеграл по периоду от тригонометрической функции), тогда:

$$I_{rms}^2 = I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2, \quad I_{rms} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_{krms}^2}$$

Здесь  $I_{km}$  амплитудное, а  $I_{krms}$  действующее значение  $k$ -ой гармоники тока. Пусть

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{ku}), \quad i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{ki})$$

Тогда для активной мощности запишем:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{ku}) \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{ki}) \right] dt$$

Вспоминая то, как мы выводили выражение для действующего значения, запишем для мощности:

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_m I_m \cos \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} U_{krms} I_{krms} \cos \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

Где  $\varphi_k = \varphi_{ku} - \varphi_{ki}$ . Аналогично, для реактивной мощности:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_{krms} I_{krms} \sin \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$$

Тогда полная мощность:

$$S = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_{krms}^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_{krms}^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2} \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Здесь  $T$  мощность искажений, определяемая произведениями гармоник тока и напряжения разного порядка.

#### 12.4. Метод расчета линейных цепей при периодических несинусоидальных токах

Разложение несинусоидальных величин в ряд Фурье позволяет вести расчет цепей отдельно для каждой синусоидальной гармоники. Значения токов и напряжений определяются на основе метода наложения, путем суммирования гармонических составляющих токов и напряжений. Обычно в требованиях к расчету указывается, до какой гармоники производить вычисления, либо указывается необходимая точность результата, что позволяет определить нужное для расчета число гармоник.

#### 12.5. Резонансные явления в цепях несинусоидального тока.

Если ЭДС в электрической цепи не является синусоидальной, то резонансы токов и напряжений могут возникать не только на основной гармонике, но и на высших. Резонанс на  $k$ -гармонике, это такой режим, когда ток  $k$ -гармоники на входе цепи совпадает по фазе с  $k$ -гармоникой ЭДС. При этом фазы токов и ЭДС других гармоник не совпадают. Поиск резонансных частот осуществляется из равенства нулю мнимой части импеданса или комплексной проводимости цепи для  $k$ -гармоники. При резонансе на  $k$ - гармонике ее амплитуда может превысить амплитуду основной гармоники во много раз.

#### Пример 12.3.

Определить величину ЭДС и мощность выделяющуюся на резисторе, если  $R = 10\Omega$ ,  $\omega L = 10\Omega$ , а ток определяется выражением:

$$i(t) = 15\sqrt{2}\sin\omega t + 5\sqrt{2}\sin 3\omega t + 3\sqrt{2}\sin 5\omega t$$

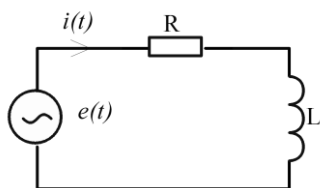


Рис. 12.2

Определим ЭДС как сумму гармоник, полученных умножением гармоник тока на величину импеданса соответствующего этой гармонике:

$$Z(\omega) = 10 + j10, \quad Z(3\omega) = 10 + j30, \quad Z(5\omega) = 10 + j50$$

$$e(t) = 150\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ) + 50\sqrt{10}\sin(3\omega t + \arctg 3) + 30\sqrt{26}\sin(5\omega t + \arctg 5)$$

$$P = (I_1^2 + I_3^2 + I_5^2)R = (225 + 25 + 9)10 = 2590 \text{ Вт}$$

### 12.6. Спектральные диаграммы.

Если по вертикальной оси отложить относительную амплитуду, а по горизонтальной – частоту, то полученная диаграмма покажет частотный состав исследуемого сигнала.

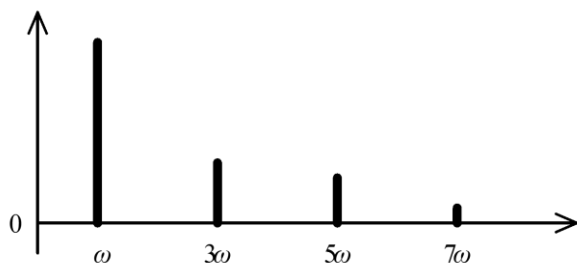


Рис. 12.3. Дискретная спектральная диаграмма для меандра из примера 12.1

### 12.7. Основные параметры периодических величин.

Таблица 12.1.

Максимальная величина (для синуса амплитуда)	$I_m$
Действующее значение	$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$
Среднее значение (постоянная составляющая сигнала)	$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$

Коэффициент амплитуды и формы	$k_a = \frac{I_m}{I_{rms}} \quad k_\phi = \frac{I_{rms}}{I_{cp}}$
Коэффициент гармоник (отношение суммы действующих значений высших гармоник сигнала к действующему значению первой)	$k_r = \frac{\sqrt{\sum_{k=2} I_{krms}^2}}{I_{1rms}}$

Коэффициент нелинейных искажений – величина обратная коэффициенту гармоник, т.е. КНИ (THD – Total Harmonic Distortion) это отношение среднеквадратичного значения тока первой гармоники к корню из суммы квадратов высших. Коэффициент мощности (Power Factor) для несинусоидальных форм токов и напряжений отличен от  $\cos\varphi$  и определяется соотношением:

$$PF = \frac{P_{avr}}{I_{rms} V_{rms}} = \frac{\int_0^T i(t)v(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)dt} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)dt}}$$

## 12.8. Интеграл Фурье.

Для математического вывода соотношения, называемого интегралом Фурье, вспомним запись выражение для ряда Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega t}, \text{ где } C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt$$

Приняв период непостоянным  $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$  и изменяющимся вплоть до бесконечности, получим  $\frac{1}{T} = \frac{d\omega}{2\pi}$ . Введем следующее обозначение:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (12.1)$$

И выполним его подстановку в выражение для ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{jk\omega t} d\omega$$

Преобразуя сумму в интеграл, получим:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Этот интеграл называется формулой обратного преобразования Фурье. Формула (5.1) – формула прямого преобразования (или интеграл Фурье). Преобразование Фурье позволяет производить анализ электрических цепей и сигналов, он расширяет область применения, перейдя от дискретных спектров к непрерывным, и может быть использован в применении к почти периодическим и непериодическим электрическим сигналам.

Методы, использующие при анализе электрических цепей интегралы Фурье, часто называют **спектральными методами**. Функция угловой частоты  $S(j\omega)$  называется частотным спектром функции  $f(t)$ . Спектр характеризует соотношение амплитуд и фаз бесконечного множества бесконечно малых синусоидальных компонент, составляющих в сумме в общем случае непериодический сигнал  $f(t)$ .

Спектры представляют графически, изображая отдельно их действительную и мнимую части:  $S(j\omega) = \text{Re}[F(j\omega)] + j\text{Im}[F(j\omega)]$

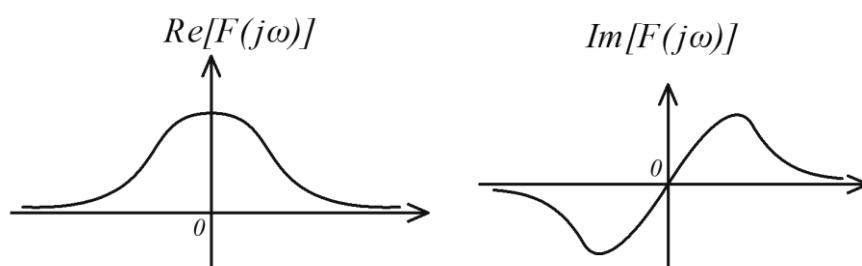


Рис. 6.3.

Отметим следующие особенности спектра непериодической функции:

Спектр непериодической функции времени непрерывен;

Область допустимых значений аргумента спектра  $-\infty \leq \omega \leq +\infty$

Действительная часть спектра – четная функция частоты, мнимая часть спектра – нечетная функция, что позволяет использовать только одну половину спектра  $0 \leq \omega \leq +\infty$ .

## 12.9. Преобразование Лапласа.

Область применения спектрального метода можно увеличить еще, если интеграл Фурье распространить на комплексную плоскость, т.е. если перейти от вещественного переменного  $\omega$  к комплексному переменному  $s = \sigma + j\omega$ . Часто в литературе комплексная переменная обозначается буквой  $p$ , но здесь введено другое обозначение, чтобы не возникало путаницы с объясненным ранее классическим методом расчета переходных процессов.

Пусть функция  $f(t)$  задана для положительных значений аргумента и равна нулю при отрицательных. Умножая, в формуле интеграла Фурье,  $f(t)$  на  $e^{-\sigma t}$ , где  $\sigma = \text{const}$  и  $\sigma > 0$ , получим:

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = F(\sigma + j\omega)$$

подставляя  $s = \sigma + j\omega$ , получим:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Полученное соотношение, преобразующее вещественную функцию  $f(t)$  вещественного переменного  $t$  в функцию  $F(s)$  комплексного переменного  $s$ , называется преобразованием Лапласа. Функцию  $F(s)$  называют изображением функции,  $f(t)$  а саму функцию, при этом  $f(t)$  называют оригиналом. В связи с существованием интеграла только в правой полуплоскости вопрос сходимости определяется наложением ограничения на скорость нарастания  $f(t)$ , оно должно быть меньше, чем у экспоненты. Функции, используемые в электротехнике, этому условию удовлетворяют. Формула обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} F(s)e^{st} ds$$

Для обозначения соответствия изображения и оригинала также используются символы:

$$f(t) \doteq F(s) \quad F(s) = L\{f(t)\}$$

Методы анализа электрических цепей основанных на преобразовании Лапласа называют *операторными методами*, а переменную  $s$  называют оператором.

### 12.10. Некоторые свойства изображений

Изображение суммы функций равно сумме изображений слагаемых:

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n F_k(s)$$

При умножении оригинала на тот же коэффициент умножается изображение:

$$Af(t) \doteq AF(s)$$

### Изображения производной и интеграла:

Выполним преобразование для первой производной функции  $\frac{df(t)}{dt}$ , используя формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-st} df(t) = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) de^{-st} = \\ &= 0 - f(0_+) + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0_+) \end{aligned}$$

Параметр  $0_+$  показывает, что если функция в момент коммутации меняется скачком, это изменение должно быть учтено в расчете. Для второй производной изображение получится:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \div s^2 F(s) - sf(0_+) - f'(0_+)$$

Аналогичным образом найдем изображение для интеграла функции:

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_0^t f(t) dt \right] e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^t f(t) dt \right] d e^{-st} = \frac{F(s)}{s}$$

Рассматривая полученные соотношения, можно обнаружить, что при определенных условиях переменная является оператором. Умножение изображения функции на оператор дает изображение производной функции, а деление – изображение интеграла. Это позволяет преобразовать дифференциальные уравнения в алгебраические уравнения комплексного переменного.

**Теорема смещения (запаздывания).** Если  $f(t) \div F(s)$ , то

Для оригиналов:

$$f(t - \tau) \div e^{-s\tau} F(s)$$

Для

$$F(s - \lambda) \div e^{\lambda t} f(t)$$

изображений

**Теорема подобия (масштаба).** Если  $f(t) \div F(s)$ , то  $f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$

**Теорема о свертке (умножении изображений).**

Если  $f_1(t) \div F_1(s)$  и  $f_2(t) \div F_2(s)$ , то

$$F_1(s)F_2(s) \div \int_0^t f_1(t)f_2(t - \tau)d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(t)d\tau$$

Для нахождения начального и конечного значений оригинала можно использовать предельные соотношения которые также могут служить для оценки правильности полученного изображения.

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Теоремы доказываются напрямую, путем взятия интегралов прямого и обратного преобразований Лапласа. Эти теоремы в дальнейшем понадобятся при решении задач. В таблице 6.2 приведены некоторые часто используемые функции и их изображения, необходимые для решения задач.

Таблица 6.2.

Оригинал $f(t)$		$e^{at}$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$
Изображение $F(s)$	$\frac{A}{s}$	$\frac{1}{s - a}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{s(s + \alpha)}$	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + b)}$



### 12.11. Операторный метод анализа переходных процессов.

При первом рассмотрении вида преобразования Лапласа, сразу обращает внимание на себя нижний предел интегрирования. Формально его расположение объясняется проблемой сходимости интеграла. Но в нашем курсе есть класс процессов начало рассмотрения, которых ограничено нулевым моментом времени. Это переходные процессы. Применим полученные выше знания для нового метода анализа переходных процессов.

### 12.12. Закон Ома в операторной форме

Пусть имеем некоторую ветвь a-b, выделенную из некоторой сложной цепи. Замыкание ключа во внешней цепи приводит к переходному процессу в данном участке цепи, при этом начальные условия для тока в ветви и напряжения на конденсаторе в общем случае ненулевые.



Рис. 6.2.

По второму правилу Кирхгофа для мгновенных значений переменных можно записать:

$$u_{ab} = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) - e(t)$$

Подвергнув это соотношение преобразованию Лапласа и используя рассмотренные выше свойства, получим:

$$U_{ab}(s) = I(s) \left( R + sL + \frac{1}{sC} \right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{s} - E(s)$$

И если выразить ток, получим:

$$I(s) = \frac{U_{ab}(s) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{s} + E(s)}{Z(s)},$$

где  $Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$  - операторное сопротивление рассматриваемого участка цепи.

Соотношение для тока принято называть законом Ома для участка цепи с источником ЭДС в операторной форме. В соответствии с этим законом для имеющейся ветви можно нарисовать операторную схему замещения:

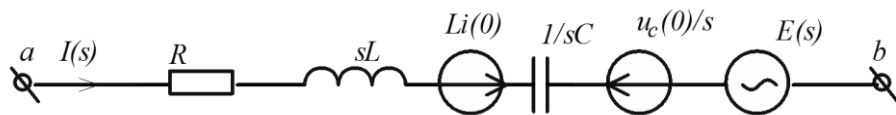


Рис. 6.3.

Для операторных схем замещения можно составлять уравнения с использованием правил Кирхгофа. Полученные операторные соотношения для тока и напряжения при возвращении к оригиналам дадут зависимости от времени.

Следует также обратить внимание, что операторное сопротивление  $Z(s)$  соответствует  $Z(j\omega)$  комплексному сопротивлению ветви в цепи синусоидального тока при замене оператора  $s$  на  $j\omega$ .

### 12.13. Переход от изображения искомой величины к оригиналу.

Переход от изображений к оригиналу может быть произведен несколькими путями:

1. Посредством обратного преобразования Лапласа (на практике применяется редко).
2. По таблицам соответствия между оригиналами и изображениями.
3. С использованием формулы разложения.

Рассмотрим последний пункт. Пусть изображение  $F(s)$  является рациональной дробью, вида  $F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$ , представляемой через полиномы  $F_1(s)$  и  $F_2(s)$ , причем степень  $F_1(s)$  меньше степени  $F_2(s)$ . Тогда можно показать, что если уравнение  $F_2(s) = 0$  имеет  $k$  различных корней, то функция  $F(s)$  может быть представлена в следующем виде:

$$F(s) = \sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{s - s_k}$$

Находя по формуле оригинал функции  $\frac{1}{s - s_k}$ , получим выражение для нахождения по изображению  $F(s)$  оригинала, т.е. функции  $f(t)$ .

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{s - s_k} \doteq \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t}$$

Это выражение, является записью теоремы разложения и позволяет представить искомую функцию  $f(t)$  в виде суммы  $k$  экспоненциальных функций. При этом предполагается, что функция  $f(t)$  тождественно равна нулю при  $t < 0$ .

Для определения коэффициентов  $A_k$  умножим левую и правую части соотношения на  $(s - s_k)$ , где  $s_k$  корни полинома  $F_2(s)$ :

$$\frac{F_1(s)(s - s_k)}{F_2(s)} = (s - s_k) \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \frac{A_m}{s - s_m} + A_k$$

При  $s \rightarrow s_k$  правая часть уравнения равна  $A_k$ , а левая представляет собой неопределенность, типа  $\frac{0}{0}$ . Раскроем эту неопределенность согласно правила Лопиталья:

$$A_k = F_1(s_k) \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{\frac{d}{ds}(s - s_k)}{F'_2(s)} = \frac{F_1(s_k)}{F'_2(s_k)}$$

Таким образом:

$$F(s) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(s_k)}{F'_2(s_k)} \cdot \frac{1}{s - s_k}$$

И для оригиналов получаем:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(s_k)}{F'_2(s_k)} \cdot e^{s_k t}$$

Это соотношение называется **формулой разложения**.

#### 12.14. Последовательность расчета переходных процессов операторным методом

Аналогично классическому методу составим порядок действий при решении задач операторным методом:

1. Определение независимых начальных условий путем расчета режима работы цепи до момента коммутации.
2. Составление операторной схемы замещения. Запись уравнений по правилам Кирхгофа или другим методам расчета линейных цепей в операторной.
3. Решение полученных уравнений относительно изображений искомых величин.
4. Определение оригиналов (с помощью формулы разложения или таблиц соответствия оригиналов и изображений) по найденным изображениям.

#### Пример. 12.3.

Рассмотрим пример решения простой задачи на переходной процесс, рис. 6.4. Ключ замыкается в нулевой момент времени, найти ток в цепи.

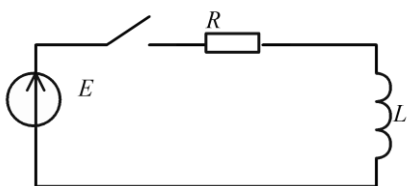


Рис. 6.4.

Начальные условия:  $i_L(0) = 0$ .

Составив операторную схему замещения, запишем по второму правилу Кирхгофа:  $I(s)(R + sL) = \frac{E}{s}$ . Откуда:  $I(s) = \frac{E/L}{s(R/L + s)}$

Воспользовавшись формулой из таблицы 6.2, или формулой разложения, запишем для тока:

$$I(s) \div i_L(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

### § 13. Анализ цепей в установившихся режимах при помощи преобразования Лапласа.

Рассмотренные в предыдущей теме методы анализа могут быть использованы исключительно при синусоидальных формах токов и напряжений в цепи, для других форм необходимо пользоваться спектральным методом. Определим еще одно свойство изображений, которое нам понадобится в дальнейшем.

**Изображение для периодической функции.** Представим изображение в виде суммы каждого периода, затем введем замену  $t = \tau + nT$ . Применяя теорему запаздывания и знания из курса математического анализа, получим

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(\tau + nT)e^{-s(\tau+nT)} d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Здесь  $f(\tau)$  – соотношение, описывающее один период рассматриваемой функции.

#### 13.1. Передаточная функция.

Как мы уже видели выше, электрическую цепь удобно представлять для анализа и при синтезе в виде взаимосвязанной совокупности отдельных частей – четырехполюсников. В современной литературе используют еще одно название – динамическое звено. Под **динамическим звеном** понимают устройство, имеющее вход и выход, и для которого задано уравнение, связывающее напряжения и токи на входе и выходе. Если это уравнение линейно, то говорят о линейном динамическом звене. По сути динамическое звено – это несимметричный четырехполюсник с заданным направлением передачи сигнала. Уравнение линейного динамического звена имеет следующий общий вид:

$$a_n \frac{d^n U_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 U_{\text{ВЫХ}} = b_m \frac{d^m U_{\text{ВХ}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U_{\text{ВХ}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 U_{\text{ВХ}}$$

где  $a$  и  $b$ - постоянные коэффициенты,  $m \leq n$ . Подвергнем уравнение преобразованию Лапласа, считая начальные условия нулевыми:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) U_{\text{ВЫХ}}(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) U_{\text{ВХ}}(s)$$

Отношение изображений выходного и входного сигналов:

$$\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)} = W(s)$$

Называется **передаточной функцией** динамического звена. Передаточная функция определяется только параметрами цепи и не зависит от входных и выходных токов и напряжений.

Свойства передаточной функции:

1. В физически реализуемых системах всегда  $m \leq n$ .
2. Корни полинома в числителе называются нулями передаточной функции, корни полинома в знаменателе соответственно полюсами передаточной функции.
3. При формальной замене  $s = j\omega$  получается комплексная передаточная функция описывающая одновременно амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики системы (АФЧХ или ЧПФ – частотная передаточная функция).

**ЧПФ – частотная передаточная функция** характеризует поведение динамической системы в установившемся режиме при гармоническом входном воздействии и представляет собой комплексную функцию, модуль которой на каждой данной частоте есть отношение амплитуд выходной и входной гармоник, а аргумент равен фазовому сдвигу всех гармоник относительно входной

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \sqrt{\operatorname{Re}(W)^2 + \operatorname{Im}(W)^2} e^{j \arctg \frac{\operatorname{Im}(W)}{\operatorname{Re}(W)}}$$

**Пример 13.1.** Определить передаточную функцию:

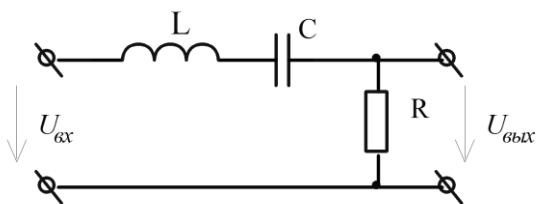


Рис. 138.1.

По второму правилу Кирхгофа запишем уравнение, описывающее цепь:

$$U_{\text{вх}}(t) = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + U_{\text{вых}}(t)$$

Выполним преобразование Лапласа для уравнения, и учтем то, что  $I(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{R}$

$$U_{\text{вх}}(s) = LsI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) + U_{\text{вых}}(s) = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{RCs} U_{\text{вых}}(s)$$

Передаточная функция для звена  $W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{sRC}{s^2LC + sRC + 1}$

Получить уравнение в операторной форме можно и сразу составив схему замещения (закон Ома для участка цепи в операторной форме).

**Пример 13.2.** Определить частотную передаточную функцию для звена из предыдущего примера.

$$W(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{\sqrt{\omega^4 R^4 C^4 + (\omega RC - \omega^3 RLC^2)^2}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \cdot e^{j \arctg \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC}}$$

### 13.2. Последовательное и параллельное соединение динамических звеньев.

При последовательном соединении выходная величина каждого звена, кроме последнего, является входной величиной для следующего звена, результирующая передаточная функция:

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s)$$

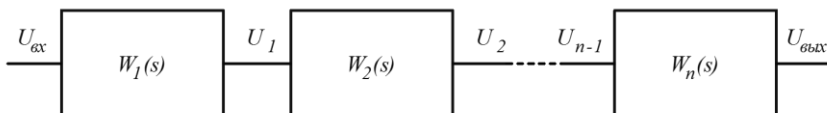
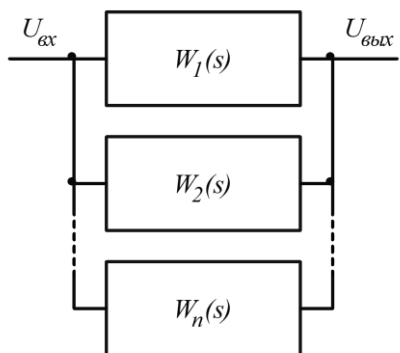


Рис. 8.2



$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s)$$

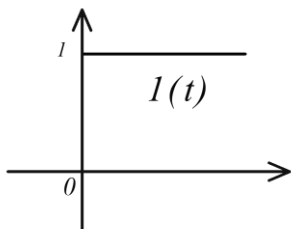
Рис. 13.3

При параллельном соединении все звенья имеют одну входную величину, выходные величины суммируются.

### 13.3. Импульсные функции

Реальные сигналы (переменные и воздействия) обычно представляют с помощью некоторых идеализаций – импульсных функций. Чаще всего используют ступенчатую единичную функцию (функцию Хэвисайта) и дельта-функцию (функцию Дирака), которые описываются следующим образом:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$



$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0; \end{cases}$$

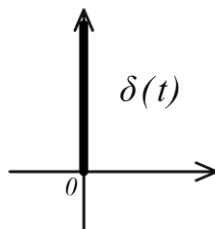


Рис. 8.4.

Для дельта-функции справедливо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Таким образом, дельта-функция представляет собой мгновенный импульс, амплитуда которого равна бесконечности в нулевой момент времени и нулю в другие моменты,

площадь этого импульса постоянна и равна единице. Поэтому  $\delta(t)$  называют единичным импульсом. Любой сигнал можно представить в виде суммы единичных функций. С помощью сложения двух ступенчатых функций можно получить выражение для прямоугольного импульса длительностью  $\tau$

$$u(t) = U1(t) - U1(t - \tau)$$

Изображения по Лапласу для импульсных функций.

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

$$L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

$$L\{1(t - \tau)\} = \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

**Пример 13.3.** Представить меандр через единичные функции и получить изображение по Лапласу.

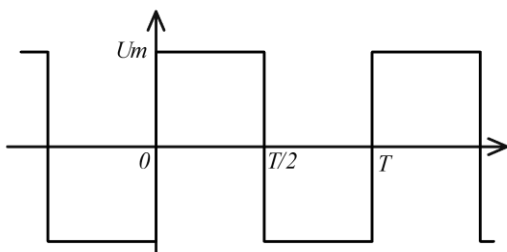


Рис. 13.5.

Запись первого периода функции через единичную функцию:

$$f(\tau) = U_m \left[ 1(\tau) - 2 \cdot 1\left(\tau - \frac{T}{2}\right) + 1(\tau - T) \right]$$

Используя свойства запаздывания и преобразования периодических функций:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = U_m \frac{\frac{1}{s} (1 - 2 \cdot e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT})}{1 - e^{-sT}} = \frac{U_m}{s} \cdot \frac{1 - e^{-s\frac{T}{2}}}{1 + e^{-s\frac{T}{2}}}$$

### 13.4. Временные и переходные характеристики динамического звена

**Временной или импульсной характеристикой** динамического звена называют реакцию звена на  $\delta(t)$ , обозначая ее как  $w(t)$ .

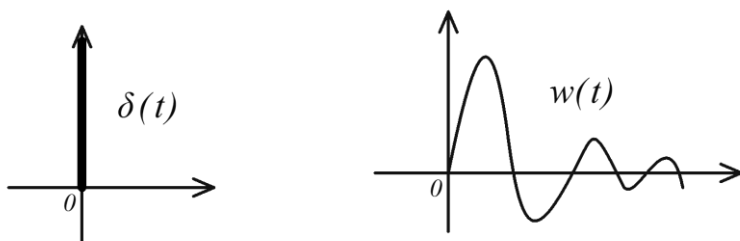


Рис. 13.6

$$L\{w(t)\} = W(s)L\{\delta(t)\} = W(s)$$

Получаем, что передаточная функция звена – это изображение по Лапласу импульсной характеристики динамического звена, т. е. передаточная функция - реакция звена на импульсное воздействие. При помощи импульсной функции звена можно определить его реакцию на произвольное входное воздействие.

**Переходной характеристикой** или переходной функцией динамического звена называют реакцию динамического звена на  $1(t)$ , обозначая ее как  $h(t)$ . Физический смысл:  $h(t)$  - это переходный процесс на выходе при единичном скачке  $1(t)$  на входе.

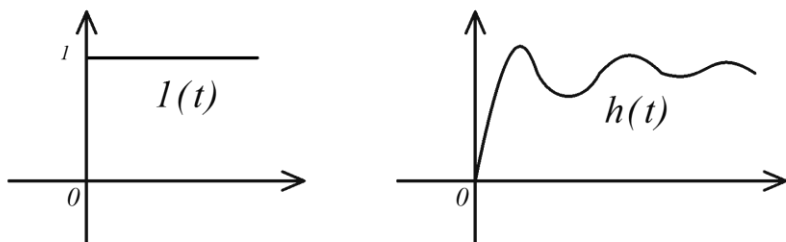


Рис. 13.7

$$L\{h(t)\} = W(s)L\{1(t)\} = W(s)\frac{1}{s}, \quad h(t) = \int_0^t w(t)dt, \quad w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Переходная функция является интегралом по времени от импульсной характеристики. При  $t < 0$  переходная характеристика равна 0, реакция не может появиться раньше, чем воздействие.

Переходная функция  $h(t)$  представляет собой решение неоднородного дифференциального уравнения при  $U_{\text{вх}}(t) = 1(t)$ , нулевых начальных условиях и состоит из двух слагаемых – принужденной ( $U_{\text{вых}}(\infty)$ ) и свободной составляющей, равной сумме экспонент, показатели которых определяются полюсами передаточной функции.

**Пример 13.4.** Определить временную и переходную характеристики для цепи рис. 8.8.

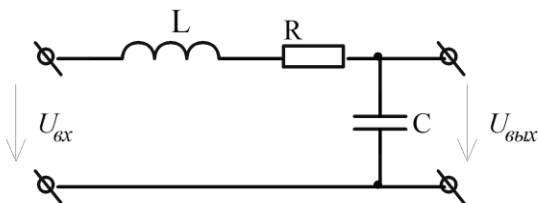


Рис. 13.8.

$$W(s) = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}, \text{ где } s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Воспользуемся данными из таблицы 6.2 для обратного преобразования Лапласа, чтобы получить временную характеристику, а проинтегрировав ее, получим переходную характеристику:



$$w(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \quad h(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right)$$

### Получение выходного сигнала звена.

Связь между входной и выходной величинами устанавливается интегралом Дюамеля (интегралом свертки):

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t U_{\text{ВХ}}(t - \tau) w(\tau) d\tau = \int_0^t U_{\text{ВХ}}(\tau) w(t - \tau) d\tau$$

**Пример 13.5.** Определить выходное напряжение для цепи рис. 8.8 при гармоническом воздействии на вход. Воспользовавшись данными примера 8.4 и интегралом свертки, получим

$$\begin{aligned} U_{\text{ВЫХ}}(t) &= \int_0^t U_m e^{j\omega t} w(t - \tau) d\tau = \frac{U_m}{s_1 - s_2} \int_0^t (e^{j\omega t + s_1(t-\tau)} - e^{j\omega t + s_2(t-\tau)}) d\tau = \\ &= \frac{U_m e^{j\omega t}}{s_1 - s_2} \left( \frac{e^{s_1 t} - 1}{s_1} - \frac{e^{s_2 t} - 1}{s_2} \right) = \frac{U_m e^{j\omega t}}{s_1 s_2} - \frac{U_m e^{j\omega t}}{s_1 - s_2} \left( \frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right) \end{aligned}$$

### 14.1. Понятие минимально фазовых систем.

Линейные системы разделяются на два класса и соответственно называются минимально-фазовыми и неминимально-фазовыми.

**Минимально-фазовой** называется система, которая имеет наименьший возможный сдвиг фазы при любой действительной частоте для данной амплитудной характеристики. Общий вид записи передаточной функции для минимально фазовой системы:

$$W(s) = \frac{(s + b_m)(s + b_{m-1}) \cdots (s + b_1)}{(s + a_n)(s + a_{n-1}) \cdots (s + a_1)}$$

Здесь видно, что цепь является минимально фазовой, если нули и полюса ее передаточной функции лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Для неминимально фазовой системы запишем:

$$W(s) = \frac{(s - b_m)(s + b_{m-1}) \cdots (s + b_1)}{(s + a_n)(s + a_{n-1}) \cdots (s + a_1)}$$

Перепишем это соотношение в следующем виде:

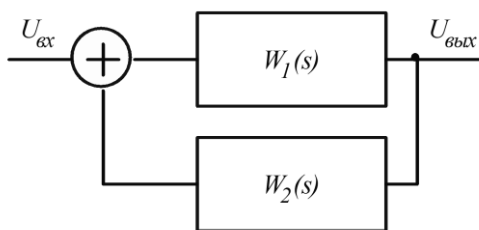
$$W(s) = \frac{(s + b_m)(s + b_{m-1}) \cdots (s + b_1)}{(s + a_n)(s + a_{n-1}) \cdots (s + a_1)} \cdot \frac{(s - b_m)}{(s + b_m)}$$

Из данной записи видно, что к минимально фазовой системе добавлено еще одно звено, со своим фазовым сдвигом, это поясняет термин **неминимально фазовая система**.

Работа систем с обратной связью и критерии устойчивости показаны для минимально фазовых систем, для неминимально фазовых критерии устойчивости выполняться не будут.

### 14.2. Замкнутые системы. Обратная связь.

Составим передаточную функцию для замкнутой системы (системы с обратной связью):



$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}$$

Рис. 14.1.

Обратная связь может быть положительной или отрицательной. Отрицательная обратная связь используется в усилительных устройствах, она линеаризует характеристику, позволяя схеме стабильно работать в широком частотном и температурном диапазонах и т.д. Положительная обратная связь используется в релаксационных схемах, генераторах фильтрах. Рассмотрим простое усилительное звено с обратной связью. При переходе к комплексной передаточной функции (замене  $s = j\omega$ ) получим

$$K_U(j\omega) = \frac{U_0}{U_1} = \frac{W_1(j\omega)}{1 - W_1(j\omega)W_2(j\omega)}$$

Для идеальной цепи с отрицательной обратной связью произведение  $W_1(j\omega)W_2(j\omega)$  всегда будет отрицательным, а сдвиг фазы между входным и выходным сигналами  $180^\circ$ . В реальной электрической цепи всегда присутствуют реактивные элементы, из-за которых формируется дополнительный сдвиг фаз, из-за которого цепь может потерять устойчивость в какой либо области частот. Это произойдет если  $W_1(j\omega)W_2(j\omega) = 1$  в какой либо точке.

### 14.3. Алгебраический критерий устойчивости.

В основе алгебраического лежит критерий устойчивости решений дифференциального уравнения, описывающего исследуемую цепь. Пусть дифференциальное уравнение описывающее систему имеет вид:

$$a_n \frac{d^n U(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 U(t) = 0$$

Решение этого уравнения

$$U(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

Где  $p_i$  корни характеристического уравнения:  $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

Условие устойчивости цепи заключается в том, что после прекращения действия внешних возмущений цепь возвращается в исходное состояние. Для этого необходимо, чтобы возникающие в цепи при нарушении состояния покоя свободные (переходные) токи и напряжения были затухающими. А это, в свою очередь, означает, что корни характеристического уравнения должны быть либо отрицательными действительными либо комплексными с отрицательными действительными частями.

Критерий устойчивости линейных систем: **система устойчива, если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны.** Левая часть характеристического уравнения представляет собой не что иное, как знаменатель передаточной функции цепи, записанной в форме

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Откуда видно, что корни характеристического уравнения являются полюсами передаточной функции. Следовательно, передаточная функция не должна иметь полюсов в правой комплексной полуплоскости.

При высоких степенях характеристического уравнения определение корней является сложной задачей. Здесь поможет критерий Рауса-Гурвица, говорящий, что действительные части корней будут отрицательными при выполнении условий: для уравнения второй степени:  $a_0 > 0, a_1 > 0$ , для уравнения третьей степени:  $a_0 > 0, a_2 > 0, a_1 a_2 -$

$a_0 a_3 > 0$  , для уравнения четвертой степени:  $a_0 > 0, a_3 > 0, a_3 a_2 - a_1 a_4 > 0, a_1(a_3 a_2 - a_1 a_4) - a_3^2 a_0 > 0$

Эти коэффициенты являются определителями матриц из теоремы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_{n-1}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \text{ и т.д.}$$

#### 14.4. Критерий Найквиста.

Если порядок характеристического уравнения высок, или возникают сложности при составлении общего уравнения для цепи – цепь может иметь несколько петель обратных связей, получение корней вызывает проблемы. Для этого случая был составлен критерий устойчивости, использующий частотные характеристики (АФЧХ) разомкнутой системы.

Требование об отсутствии полюсов передаточной функции в правой полуплоскости равнозначно тому что  $W_1(s)W_2(s)$  не может быть равно 1 ни в одной из точек. Это произведение является передаточной функцией разомкнутой петли обратной связи. Для этой функции необходимо построить годограф и по количеству (четное число пересечений) и расположению точек пересечения (не охватывает 1) годографа с действительной осью определить устойчивость системы. В сложных системах трудно построить годограф и определить количество точек пересечения. Для упрощения работы составлен критерий определения устойчивости по АФЧХ:

*если при изменении частоты от 0 до  $\infty$  фаза не достигает значения  $180^\circ$ , цепь устойчива при любом значении модуля коэффициента передачи, либо если модуль коэффициента передачи меньше 1 то цепь устойчива при любом значении фазы.*

Эти утверждения верны только для минимально фазовых цепей.

#### 14.5. Генераторы синусоидального сигнала на операционных усилителях.

Генератор не нуждается во входном сигнале. Условие возникновения генерации (нестабильное состояние схемы) получим из выражения для коэффициента усиления схемы с обратной связью:

$$W_1(j\omega)W_2(j\omega) = 1$$

Это соотношение называется критерий Баркгаузена. Из комплексного соотношения, можно получить два вещественных:

$$|W_1||W_2| = 1, \quad \text{и} \quad \varphi = 0; 2\pi; \dots$$

Эти соотношения называются балансом амплитуд и балансом фаз соответственно. Баланс амплитуд означает, что незатухающие колебания в замкнутом контуре могут существовать только тогда, когда усилитель компенсирует потери в схеме обратной связи. Условие баланса фаз означает, что восполнение энергии в системе производится в такт ее

собственным колебаниям. Это означает что в генераторе могут присутствовать отрицательные и положительные обратные связи одновременно.

### Анализ генератора с ООС и ПОС.

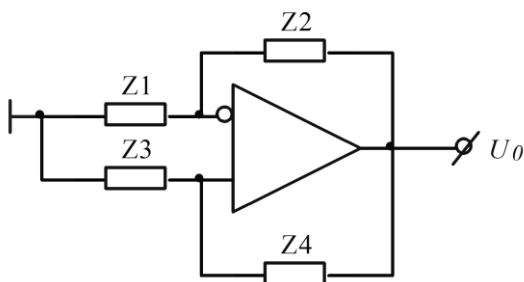


Рис. 14.13.

$$U_0 = U_- \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \quad U_+ = U_0 \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4}$$

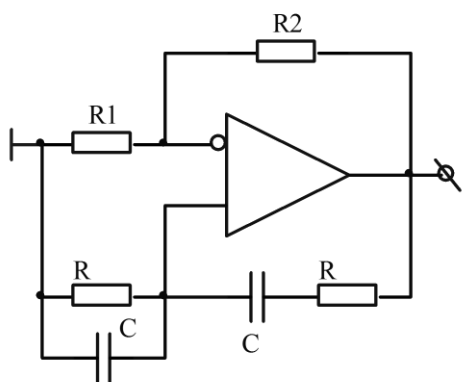
Если разорвать ветвь ПОС (между выходом и  $Z_4$ ), и подать на нее входной сигнал  $U_1$  то:

$$U_0 = U_1 \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4}$$

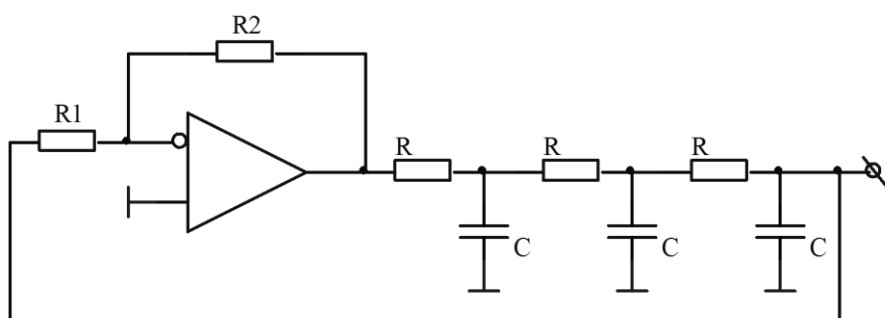
Для схемы генератора на основе **моста Вина** (рис. 11.14а) можно записать частотно-передаточную функцию:

$$W(j\omega) = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{C_2}{C_1} + j(\omega R_3 C_1 - \omega R_4 C_2)}$$

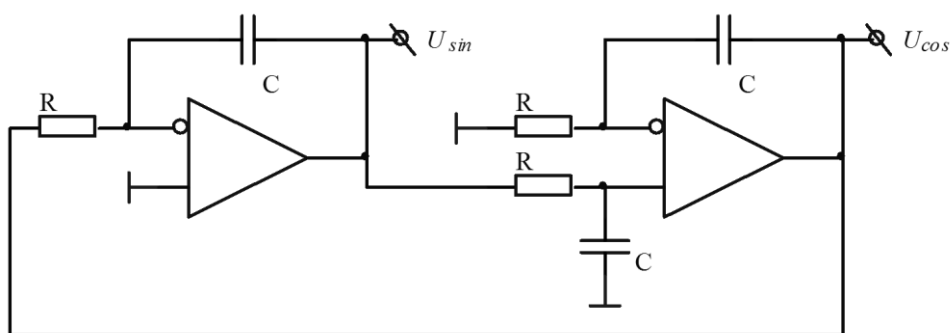
Теперь становятся очевидными некоторые интересные отношения. Конденсатор  $C_1$ , и конденсатор  $C_2$ , должны вносить фазовый сдвиг по  $90^\circ$  каждый, что необходимо для генерации. Следовательно,  $C_1 = C_2 = C$  и  $R_3 = R_4 = R$ , все слагаемые с частотами  $\omega$  в уравнении сократятся, что идеально нейтрализует любое изменение амплитуды с частотой, так как полюса и нули нейтрализуют друг друга. Это приводит к общему коэффициенту ПОС связи  $W_2 = 1/3$ . Усиление А части отрицательной обратной связи должно быть установлено таким, что бы  $|W_1 W_2| = 1$ , что требует  $W_1 = 3$ , частота колебаний определяется как  $\omega = 1/RC$ .



а.



б.



в. Рис. 14.14.

**Генератор на основе фазосдвигающей цепи** (рис. 11.14б), позволяют получить колебания с меньшими искажениями, чем в предыдущей схеме. Для расчета принимается, что фазосдвигающие звенья являются независимыми друг от друга и каждое звено сдвигает фазу на  $60^\circ$ . Это будет при  $\omega = \sqrt{3}/RC$ , тогда  $|W_2| = (1/2)^3$  и  $R2 = 8 \cdot R1$ . Однако реальные параметры генератора будут отличаться от расчета, т.к. предположение об отсутствии влияния звеньев друг на друга в реальности не верно, и коэффициент передачи необходимо увеличивать.

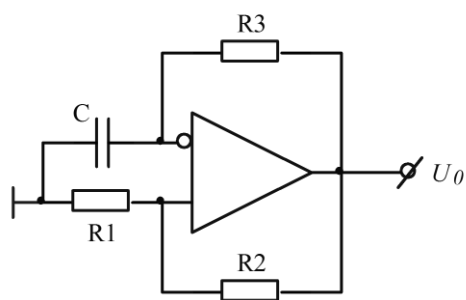
Квадратурный генератор (рис. 11.14в), является другим типом генератора на основе сдвига фаз, но три RC звена настроены так, что каждое звено вносит фазовый сдвиг по  $90^\circ$ . Это обеспечивает на выходе как синусный, так и косинусный сигнал (выходы являются квадратурными, с разностью фаз по  $90^\circ$ ). Идея квадратурного генератора лежит в использовании того факта, что двойное интегрирование синусоиды даёт инвертирование сигнала, то есть происходит сдвиг сигнала по фазе на  $180^\circ$ . Колебания возникают на частоте:  $\omega = 1/RC$ .

$$W(s) = \left(\frac{1}{sRC}\right)^2$$

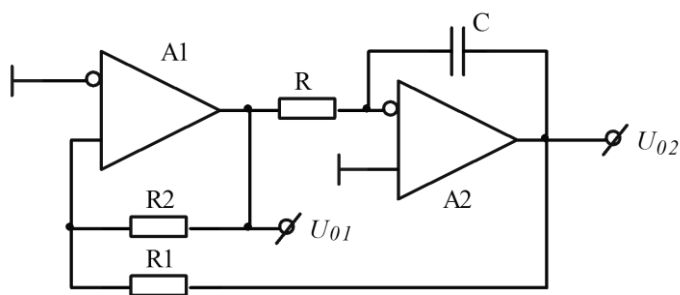
Генератор синусоидального сигнала также можно построить на основе схемы активного фильтра второго и более высоких порядков.

### Релаксационные генераторы.

**Генератор** – это устройство, не имеющее входного сигнала, но производящее на выходе сигналы определенной формы и частоты.



а.



б.

Рис. 14.12.

Релаксационными называют генераторы, у которых усилительный элемент работает в переключательном режиме. К ним относят автоколебательный (рис. 10.12а) и ждущий мультивибраторы, генераторы пилообразных и треугольных колебаний (рис. 10.12б). Принцип работы мультивибратора следующий: когда напряжение на конденсаторе достигает порога срабатывания триггера Шмидта, выходное напряжение ОУ скачком принимает противоположное значение, равное напряжению питания. При этом конденсатор начинает перезаряжаться в противоположном направлении, пока его напряжение не достигнет другого порога срабатывания. Схема переключается в начальное состояние. По этому описанию можно составить дифференциальное уравнение:

$$C \frac{dU_C}{dt} = \pm \frac{U_S - U_C}{R},$$

Решение этого уравнения:  $U_C = U_S - (U_S + U_S \frac{R1}{R1+R2})e^{-t/RC}$

Откуда период колебаний генератора:  $T = 2RC \cdot \ln(1 + \frac{2R1}{R2})$

Для генератора на схеме рис. 10.12б период колебаний равен  $T = 4RC \frac{R1}{R2}$ , при этом на выходе  $U_{01}$  колебания будут прямоугольной формы, а на  $U_{02}$  пилообразной.

### Генератор, управляемый напряжением.

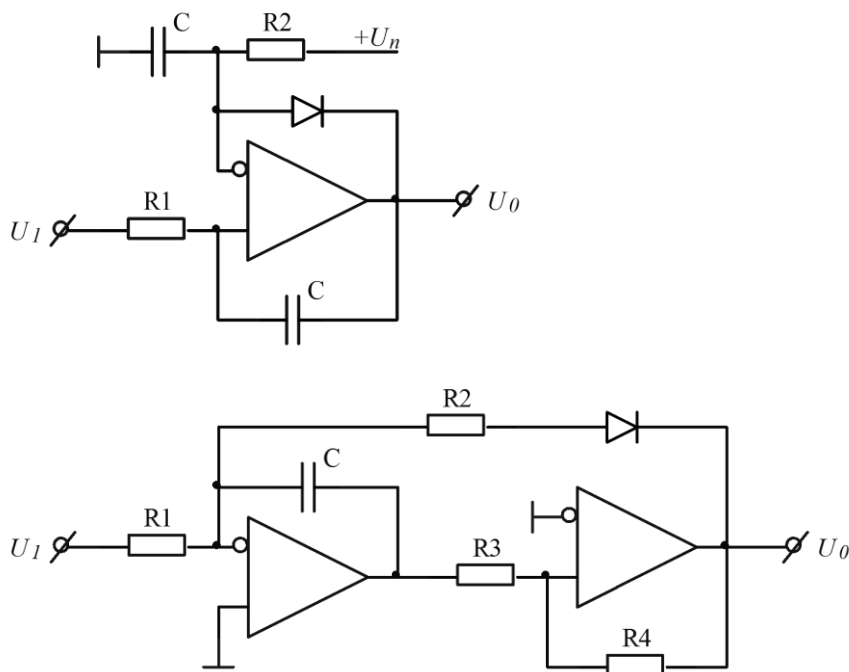


Рис. 14.13.

Простая схема генератора на одном ОУ и более сложная, построенная на двух операционных усилителях. Для второй, если  $R1 \ll R2$ , то частота  $U_0$  достаточно точно пропорциональна  $U_1$ .

Основы теории фильтров

## 14. Активные фильтры.

Основой построения активных фильтров являются операционные усилители. Такие фильтры в полосе пропускания могут иметь коэффициент передачи больше 1. Типы фильтров аналогичны пассивным. Анализ фильтра осуществляется с использованием передаточной и частотно-передаточной функций.

### 11.1. Фильтры 1-го порядка.

**Порядок фильтра** определяет порядок полинома в знаменателе передаточной функции.

ФНЧ

$$W(s) = -K \frac{\omega_p}{s + \omega_p}$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_2 C} \quad K = -\frac{R_2}{R_1}$$

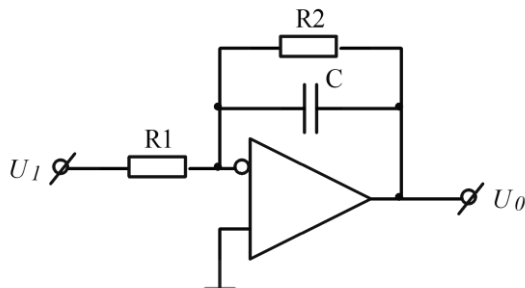


Рис. 11.1



### ФВЧ

$$W(s) = -K \frac{s}{s + \omega_p}$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_1 C} \quad K = -\frac{R_2}{R_1}$$

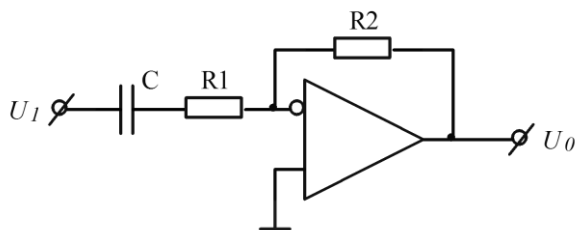


Рис. 11.2

$\omega_p$  – частота полюса,  $K$  – максимальный коэффициент передачи в полосе пропускания.

## 14.2. Фильтры 2-го порядка.

### ФНЧ

$$W(s) = K \frac{\omega_p^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f} s + \omega_p^2}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

$$Q_f = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}} + \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}} - \frac{R_4}{R_3} \sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}}}$$

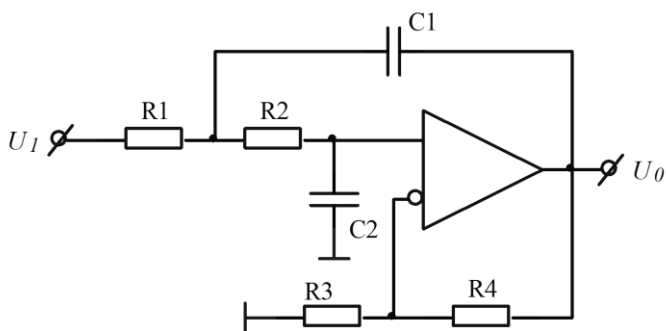


Рис. 11.3

### ФВЧ

$$W(s) = K \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f} s + \omega_p^2}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

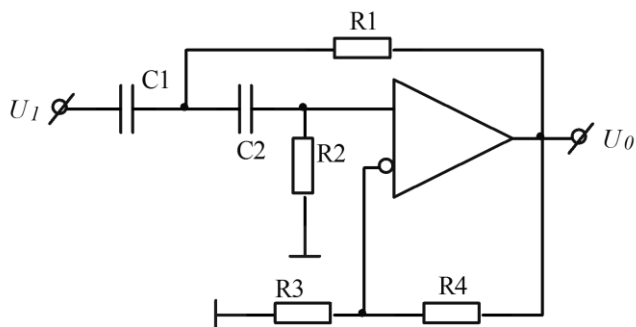


Рис. 11.4

### ПФ

$$W(s) = -K \frac{\frac{\omega_p}{Q_f} s^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f} s + \omega_p^2}$$

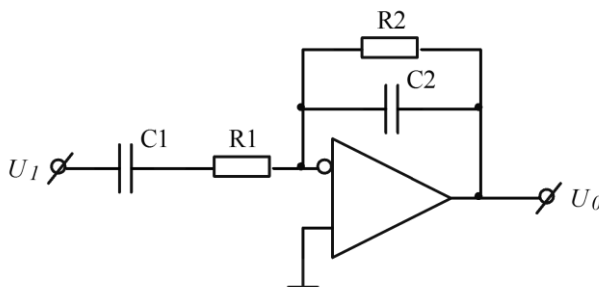


Рис. 11.5

**РФ**

$$W(s) = K \frac{s^2 + \omega_p^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_f} s + \omega_p^2}$$

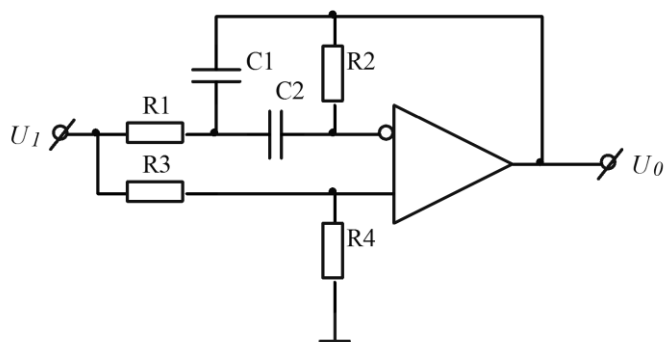


Рис. 11.6

$\omega_p$  – частота полюса,  $K$  – максимальный коэффициент передачи в полосе пропускания,  $Q_f$  – добротность фильтра. ФНЧ и ФВЧ на рис. 11.3 и 11.4 построены по структуре Саллена-Ки.

Построить ЛАФЧХ для этих фильтров можно, пользуясь полученными ранее соотношениями для поворота фазы и крутизны спада ЛАЧХ.

Структура Саллена-Ки становится неустойчивой при порядках фильтров более второго. Существуют и другие типы построения фильтров. Например, фильтры с многопетлевой обратной связью, но и эта топология при увеличении порядка теряет устойчивость – почему, мы увидим позже, при рассмотрении критерия Найквиста. Способ построения фильтров более высоких порядков – последовательное соединение звеньев, первого и второго порядка до получения требуемых характеристик фильтра.

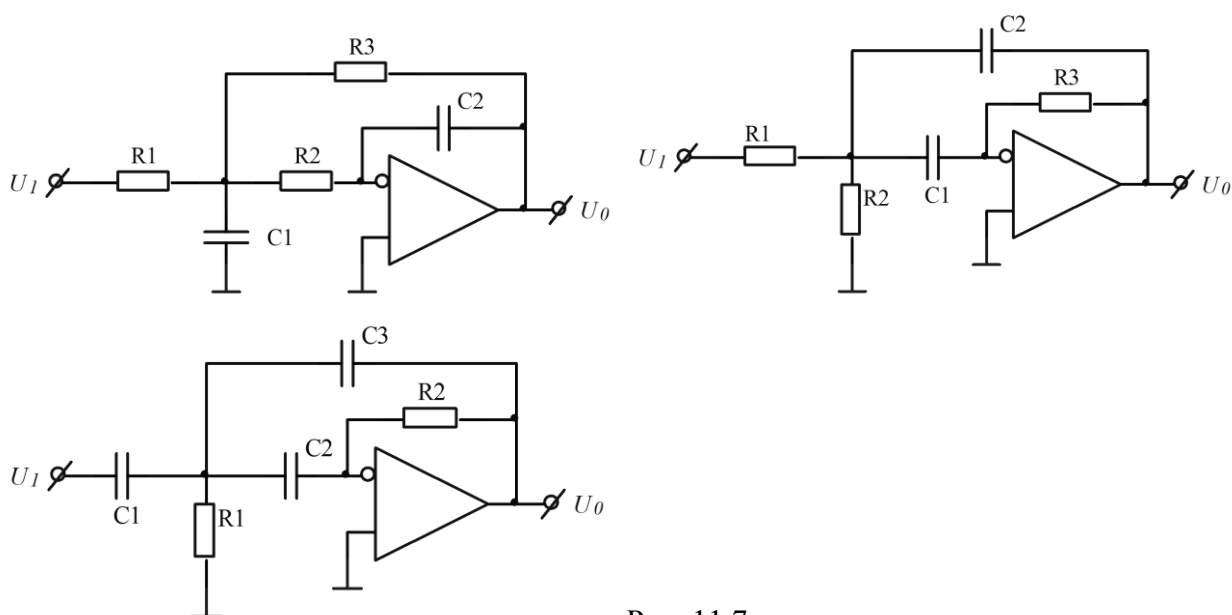


Рис. 11.7

### 14.3. Переход от передаточной функции к схеме.

Переход по стандарту осуществляется проектированием многокаскадной схемы, передаточная функция раскладывается на множители, каждый из которых соответствует своему элементарному звену.

**Пример 3.** Провести синтез электрической цепи по передаточной функции.

$$W(s) = \frac{20000}{s^2 + 200s + 10000}$$

Преобразуем передаточную функцию:

$$W(s) = 2 \cdot \frac{-100}{s + 100} \cdot \frac{-100}{s + 100}$$

Первый множитель - усилительное звено, два последующих ФНЧ первого порядка.

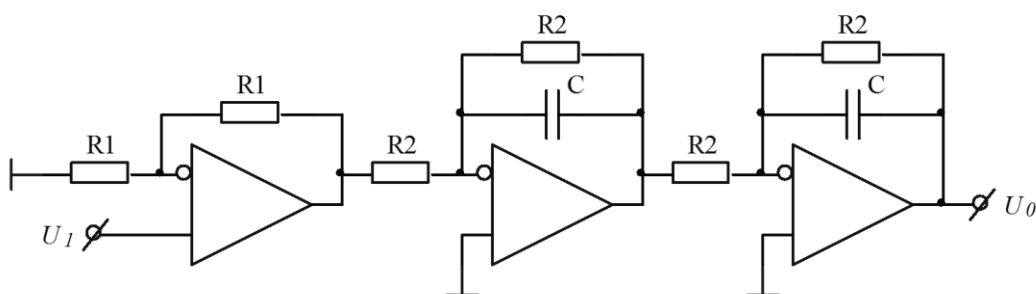


Рис. 11.8.

$$\omega_p = \frac{1}{R_2 C} = 100 \text{ рад/с}$$

Подобную функцию можно реализовать и схемой фильтра второго порядка. В связи с относительной сложностью получения передаточных функций для фильтров второго и более высоких порядков приведем пример решения такой задачи.

**Пример 4.** Получить передаточную функцию для ФНЧ второго порядка.

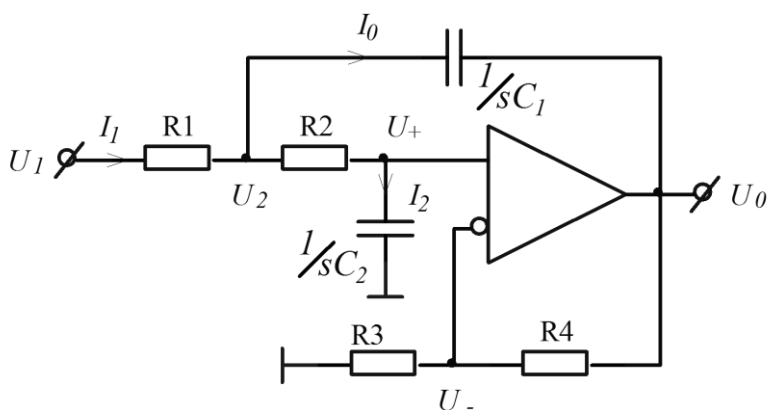


Рис. 11.9.

Представим цепь в операторном виде. Расставим токи ветвей и напряжения в узловых точках и запишем операторные токи и величину напряжения в узле:

$$U_+(s) = U_-(s) = U_0(s) \frac{R_3}{R_3 + R_4} \quad I_2(s) = sC_2 U_+(s) = sC_2 U_0(s) \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

$$U_2(s) = U_+(s) + I_2(s)R_2 = U_0(s) \frac{R_3}{R_3 + R_4} (1 + sR_2C_2)$$

$$I_1(s) = \frac{U_1(s) - U_2(s)}{R_1} = \frac{U_1(s)}{R_1} - U_0(s) \frac{R_3}{R_1(R_3 + R_4)} (1 + sR_2C_2)$$

$$I_0(s) = sC_1(U_2(s) - U_0(s)) = sC_1U_0(s) \left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} (1 + sR_2C_2) - 1 \right)$$

Используя первое правило Кирхгофа, получим соотношение для передаточной функции:

$$W(s) = \frac{U_0(s)}{U_1(s)} = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1}{1 + sR_2C_2 + sR_1C_2 + sR_1C_1 \left( (1 + sR_2C_2) - 1 - \frac{R_4}{R_3} \right)}$$

Приводя функцию к нормальному виду получим:

$$W(s) = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} - \frac{R_4}{R_3} \frac{1}{R_2C_2} \right) + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}$$

Значения коэффициента передачи, частоты среза и добротности можно получить из этой формулы.

#### 14.4. Фильтры высоких порядков

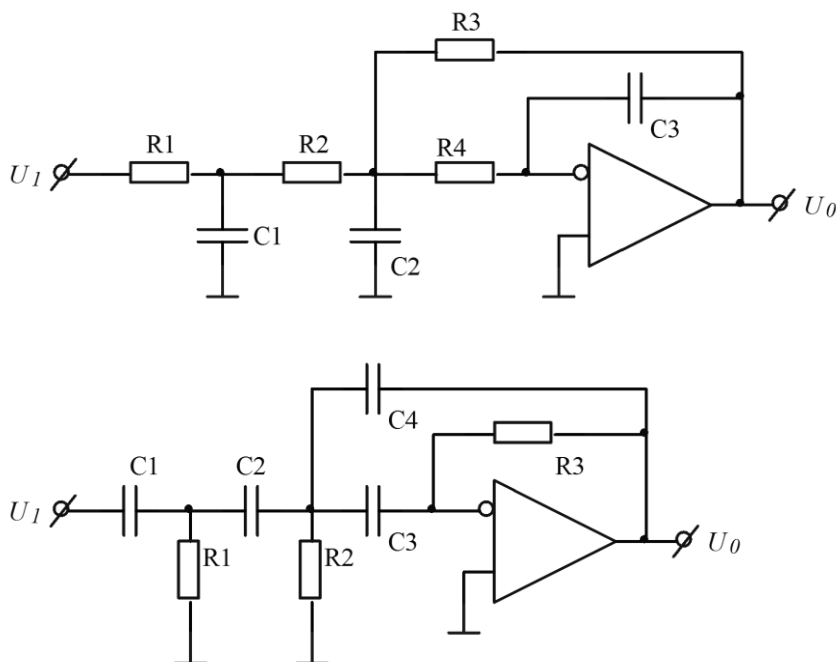


Рис. 11.10. ФНЧ третьего порядка и ФВЧ третьего порядка соответственно.

Фильтры высоких порядков обладают лучшим качеством фильтрации – более крутым спадом характеристики и большим коэффициентом подавления в полосе задерживания. Если

обратить внимание на принципиальную схему, то видно, что фильтр построен из двух частей – RC цепь на входе и фильтр второго порядка на ОУ далее.

### Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя.

До этого момента мы рассматривали фильтры на основе их электрических схем, часто задача бывает обратной - необходимо построить фильтр по заданным величинам частот среза и коэффициентам передачи в полосе пропускания и полосе подавления (по заданной АЧХ). Существуют соотношения, позволяющие определить порядок фильтра необходимый для получения заданной АЧХ.

Наиболее часто употребляемыми фильтрами такого типа являются фильтры основанные на полиномах Баттерворта, Чебышева и Бесселя. Общий вид передаточной функции для этих фильтров примерно одинаков, например для ФНЧ:

$$W(s) = \frac{G}{Q(s)}$$

Где  $Q(s)$  – полином требуемого типа. Степень этого полинома определяет порядок фильтра. Коэффициенты полинома для каждого типа фильтров различаются, из-за чего эти фильтры различаются по наклону и поведению АЧХ в полосах пропускания и задерживания. Фильтр Баттерворта отличается максимальной гладкостью характеристики в полосе пропускания, фильтр Чебышева крутизной спада характеристики на частоте среза, а фильтр Бесселя одинаковым фазовым сдвигом в полосе пропускания.

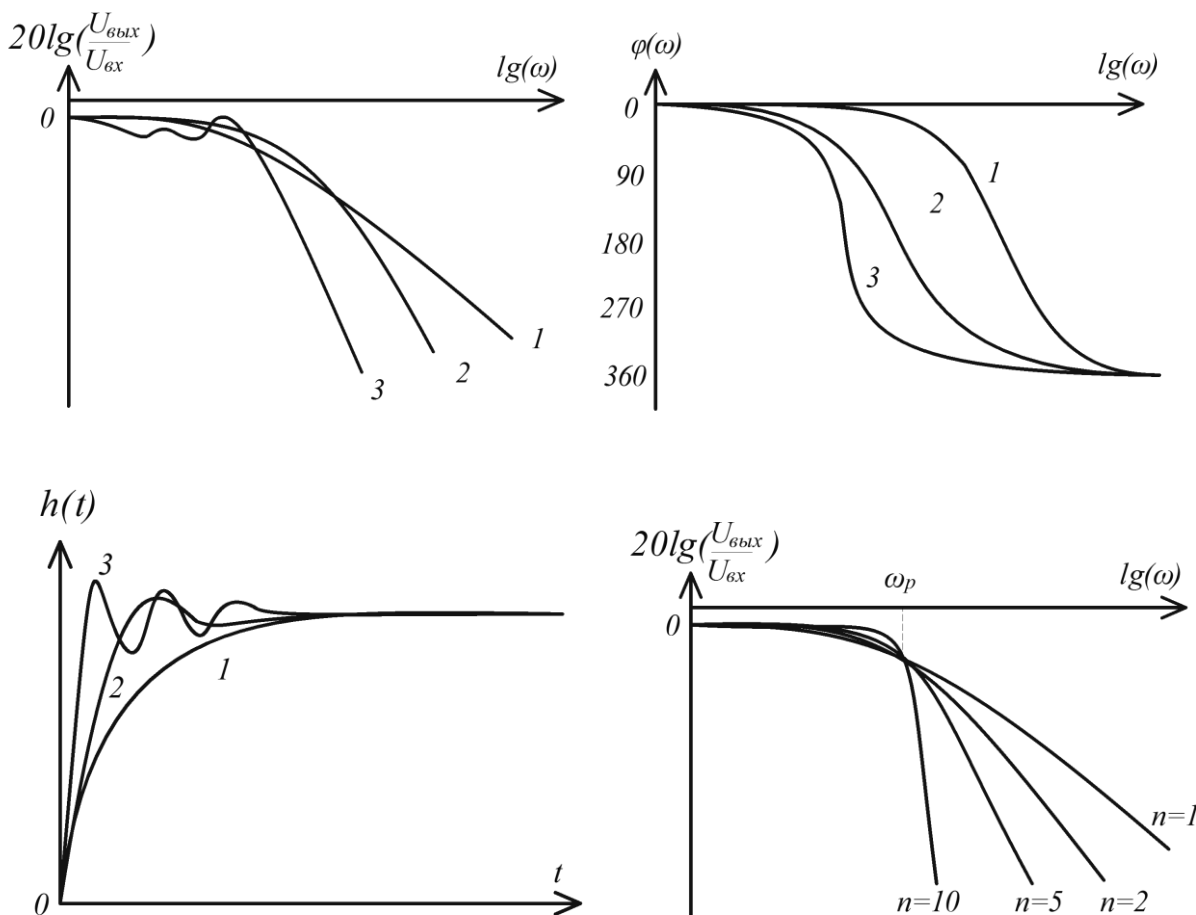


Рис.11.11. АЧХ, ФЧХ и переходная характеристика фильтров четвертого порядка, а также вид АЧХ фильтра Баттерворта в зависимости от порядка. 1 - фильтр Бесселя, 2 - фильтр Баттерворта, 3 - фильтр Чебышева.

Передаточную характеристика фильтра определяют по таблице. В таблице 11.3 даны передаточные функции для фильтров первого, второго и третьего порядков. Функции даны в нормированном виде, т.е. коэффициент передачи в полосе пропускания равен 1, а частота среза 1рад/сек. Для перехода в последствии к реальным значениям потребуются операции преобразования частот и масштабирования. Пересчет частоты осуществляется с помощью замены  $S = \frac{s}{\omega_p}$ , где  $\omega_p$  - требуемая частота.

Таблица 11.3.

Нормированные передаточные характеристики для фильтров			
Баттерворта	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{(s^2 + s\sqrt{2} + 1)}$	$\frac{1}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$
Чебышева <sup>(1)</sup>	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{0,5}{(s^2 + s\sqrt{2} + 1)}$	$\frac{0,25}{(s + 0,298)(s^2 + 0,298s + 0,839)}$
Бесселя	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{3}{(s^2 + 3s + 3)}$	$\frac{15}{(s + 2,322)(s^2 + 3,678s + 6,459)}$

<sup>(1)</sup> Для этого типа фильтра Чебышева пульсации в полосе пропускания 3дБ

Следует заметить, что в соответствии со сказанным выше строить фильтры высоких порядков приходится с помощью звеньев первого и второго порядка, поэтому для нормированной по частоте передаточной функции ФНЧ в общем виде можно записать:

$$W(s) = \frac{K}{\prod_i (1 + \frac{1}{Q_i} s + s^2)}$$

Здесь  $Q_i$  – добротность звена второго порядка. Для перехода от ФНЧ к ФВЧ следует произвести замену в формуле  $s \rightarrow \frac{1}{s}$ , а полосовой и режекторный фильтр высоких порядков - это комбинация ФНЧ и ФВЧ. Подобный подход позволит построить фильтр нужного порядка и типа. Топология электрической схемы от типа фильтра не зависит.

## § 13. Электрическая цепь с распределенными параметрами.

### 13.1. Основные понятия.

В предыдущих темах рассматривались электрические цепи, геометрические параметры которых не влияли на работу цепи. Электрические и магнитные поля в таких цепях считаются сосредоточенными внутри конденсаторов и катушек индуктивности и не оказывают влияние на другие элементы (кроме случая индуктивно-связанных элементов, которые также не влияют на другие, не связанные). В реальности часто приходится иметь дело с другим типом цепей: цепей с равномерно или неравномерно распределенными по расстоянию параметрами. Такими параметрами являются сопротивление и проводимость, что приводит, например, к выделению мощности потерь вдоль линии связи, а не в конкретном элементе цепи, также емкость и индуктивность распределены по длине линии, а не сосредоточены в определенных точках.

В результате токи и напряжения в цепи зависят от точки, в которой произведено измерение. Т.е. токи и напряжения являются функциями не только времени, но и расстояния. Такие цепи (линии) называются **цепями (линиями) с распределенными параметрами, или длинными линиями**.

Для оценки, является ли исследуемая цепь длинной линией, принимается следующее условие – если длина волны электромагнитного колебания, распространяющегося в линии, превосходит длину цепи не более чем в десять раз (примерно), то такая цепь считается длинной линией (цепью с распределенными параметрами).

Линия характеризуется первичными параметрами – бесконечно малый элемент длины имеет сопротивление, индуктивность, емкость и проводимость. Эквивалентная схема показана на рис. 13.1. Для проведения описания процессов в линии введем условие однородности линии, т.е. неизменности ее первичных параметров в зависимости от расстояния. Неоднородную линию можно представить в виде соединения нескольких однородных участков. Рассмотрение работы линии проведем при условии наличия в цепи **синусоидальных токов и напряжений**.

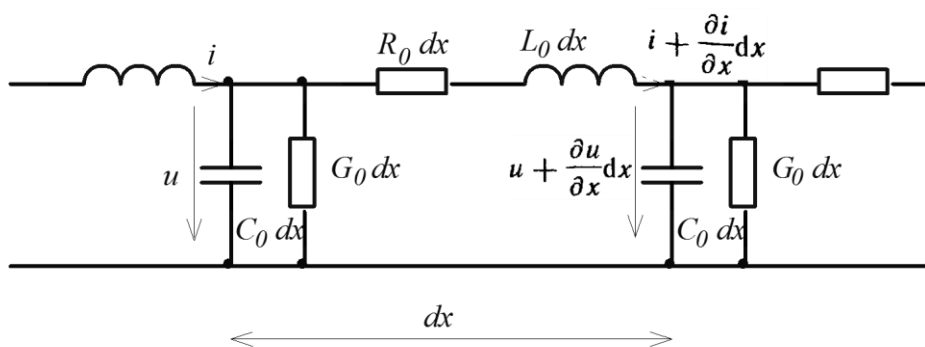


Рис. 13.1.

### 13.2. Уравнение однородной линии в стационарном режиме.

Пусть  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $C_0$  и  $G_0$  первичные параметры линии. Приращение тока и напряжения в цепи можно записать через частные производные, как  $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$  и  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$  соответственно. По

второму правилу Кирхгофа для замкнутого контура на рис. 13.1, а затем и по первому правилу можно записать:

$$-u + iR_0 dx + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0$$

$$i - uG_0 dx - C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t} - i - \frac{\partial i}{\partial x} dx = 0$$

Выполнив простые преобразования для обоих выражений, получим:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = iR_0 + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad , \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = uG_0 + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Учитывая условие синусоидальности токов и напряжений и используя символический метод, запишем, приняв, что  $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$  и  $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$ :

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0 \dot{I} \quad , \quad -\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0 \dot{U}$$

Продифференцируем по расстоянию первое уравнение и подставим в него второе:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U}$$

Это уравнение называется уравнением длинной линии (ранее было принято название **телеграфное уравнение**). Для тока уравнение будет выглядеть аналогично. Из предыдущего материала известно, что решение таких уравнений представляется в виде суммы экспонент:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x}$$

Характеристическое уравнение записывается, как:  $p^2 - Z_0 Y_0 = 0$ , и его корни соответственно равны  $p_{1,2} = \pm \sqrt{Z_0 Y_0} = \pm \gamma = \pm(\alpha + j\beta)$ . Величины называются соответственно:  $\gamma$  - постоянная распространения,  $\alpha$  - коэффициент затухания,  $\beta$  - коэффициент фазы. Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  будут далее определены с использованием краевых условий, т.е. значений тока и напряжения на входе или выходе линии. Чтобы определить вид выражения для тока, продифференцируем напряжение и подставим его в исходное уравнение:

$$-\frac{d(\dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x})}{dx} = \gamma \dot{A}_2 e^{-\gamma x} - \gamma \dot{A}_1 e^{\gamma x} = Z_0 \dot{I}$$

Введем обозначение волнового сопротивления:  $Z_C = \frac{Z_0}{\gamma} = \frac{\gamma}{Y_0} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$ , тогда для тока:

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_2}{Z_C} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_1}{Z_C} e^{\gamma x}$$



Волновое сопротивление и постоянная распространения называются **вторичными параметрами** линии. Вторичные параметры определяют свойства линии как устройства для передачи энергии или информации.

Для наглядности перейдем от символической к тригонометрической форме записи решения уравнения длинной линии:

$$u(t, x) = A_1 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \varphi_1) + A_2 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi_2)$$

Второе слагаемое в этой сумме интерпретируется как **прямая** (или **падающая**) волна, первое **обратная** (или **отраженная**) волна, т.е. волна отраженная нагрузкой. Процессы, происходящие в линии, являются суммой прямой и отраженной волн.

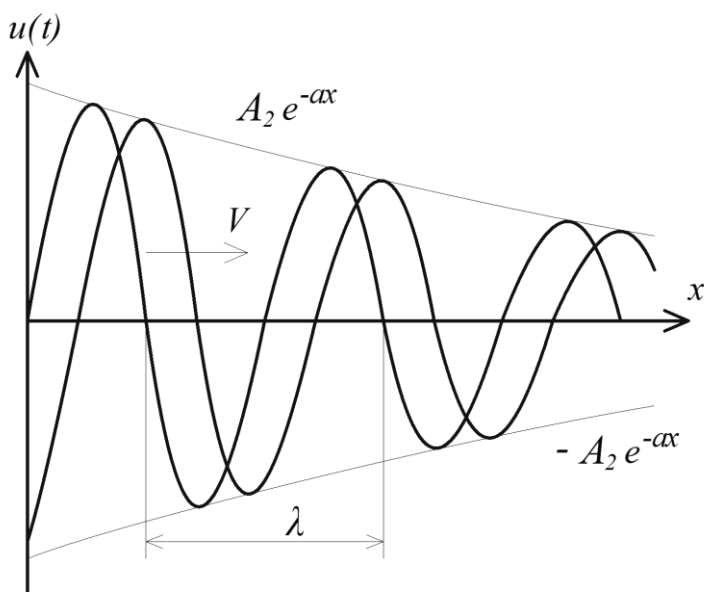


Рис. 13.2.

Величина  $\omega t - \beta x + \varphi_1$  называется **фазой волны**. Если продифференцировать фазу по времени и приравнять полученное соотношение к нулю, то полученная величина

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

называется фазовой скоростью волны в линии, т.е. перемещаясь вдоль линии с этой скоростью, мы всегда будем наблюдать одну и ту же фазу сигнала. Если учесть, что длина волны определяется фазовым сдвигом на  $2\pi$ , то

$$\omega t - \beta(x + \lambda) + \varphi_1 = \omega t - \beta x + \varphi_1 - 2\pi$$

Откуда длина волны определяется как:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = vT = \frac{v}{f}$$

Используя введенные выше понятия прямой и обратной волн, распределение напряжения вдоль линии в любой момент времени можно описать как результат наложения двух волн -

прямой и обратной, перемещающихся вдоль линии с одинаковой фазовой скоростью, но в противоположных направлениях:

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{пр}} + \dot{U}_{\text{обр}}$$

Представление напряжения в линии в виде суммы прямой и обратной волн означает, что положительные направления напряжения для обеих волн совпадают от начала линии к концу. Аналогично для тока:

$$\dot{I} = \dot{I}_{\text{пр}} - \dot{I}_{\text{обр}}$$

здесь видно, что положительные направления прямой и обратной волн тока в линии различны - положительное направление падающей волны совпадает с положительным направлением тока от начала к концу линии, а положительное направление отраженной волны току противоположно.

Для прямых и обратных волн напряжения и тока выполняется закон Ома:

$$\dot{I}_{\text{пр}} = \frac{\dot{U}_{\text{пр}}}{Z_c}, \quad \dot{I}_{\text{обр}} = \frac{\dot{U}_{\text{обр}}}{Z_c}$$

Определение коэффициентов затухания и фазы через первичные параметры линии:

$$\alpha + j\beta = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

$$\alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(C_0 R_0 + L_0 G_0)$$

Получаем систему из двух уравнений:

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0$$

$$2\alpha\beta = \omega(R_0 C_0 + L_0 G_0)$$

Откуда

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)})}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)})}$$

### 13.3. Определение постоянных интегрирования.

Определение постоянных интегрирования  $\dot{A}_1$  и  $\dot{A}_2$  необходимо для окончательной записи решения телеграфного уравнения. Предположим, что нам известны величины тока и

напряжения в начале линии. Из формул тока и напряжения для начальной точки линии ( $x=0$ ), принимая,  $\dot{I}_1 \dot{U}_1$  как ток и напряжение в начале линии, запишем:

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_1 + \dot{A}_2, \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{A}_1}{Z_C} - \frac{\dot{A}_2}{Z_C}$$

Откуда  $\dot{A}_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C)$  и  $\dot{A}_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C)$ . Подставляя значения постоянных интегрирования в формулу общего решения и используя понятия гиперболических функций, получим:

$$\dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C)e^{\gamma x} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z_C \operatorname{sh} \gamma x$$

$$\dot{I} = \frac{1}{2Z_C}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_C)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2Z_C}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_C)e^{\gamma x} = \frac{\dot{U}_1}{Z_C} \operatorname{ch} \gamma x + \dot{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x$$

Эти соотношения позволяют определить ток и напряжение в любой точке линии по известным значениям в начале линии. Однако часто в практических задачах заданы ток и напряжение в конце линии (ток и напряжение нагрузки). Обозначим  $\dot{I}_H \dot{U}_H$  ток и напряжение нагрузки соответственно,  $l$  - длина линии. Запишем соотношения для тока и напряжения в линии:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma(l-x')} + \dot{A}_2 e^{\gamma(l-x')}, \quad \dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{Z_C} e^{-\gamma(l-x')} - \frac{\dot{A}_2}{Z_C} e^{\gamma(l-x')}$$

где  $x' = l - x$ . Введем обозначение  $\dot{B}_1 = \dot{A}_1 e^{-\gamma l}$  и  $\dot{B}_2 = \dot{A}_2 e^{\gamma l}$ , тогда при  $x = l$ :

$$\dot{B}_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_H + \dot{I}_H Z_C), \quad \dot{B}_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_H - \dot{I}_H Z_C)$$

И подставив, получим:

$$\dot{U} = \dot{U}_H \operatorname{ch} \gamma(l-x) + \dot{I}_H Z_C \operatorname{sh} \gamma(l-x)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_H}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma(l-x) + \dot{I}_H \operatorname{ch} \gamma(l-x)$$

Эти соотношения, позволяющие определить ток и напряжение в любой точке линии по их значениям в конце, называются уравнениями линии конечной длины. Если принять, что  $x = 0$ , и обозначить входные параметры индексом 1, а ток и напряжение нагрузки индексом 2, эти соотношения будут выглядеть как уравнения четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_C \operatorname{sh} \gamma l$$

$$i_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_C} sh\gamma l + i_2 ch\gamma l$$

Это означает, что к длинным линиям могут быть применены элементы теории четырехполюсников, схемы замещения и опыты короткого замыкания и холостого хода для определения параметров этих схем.

Для конечной линии вводится понятие коэффициента отражения. Коэффициент по напряжению:

$$K_u = \frac{\dot{A}_1 e^{-\gamma l}}{\dot{A}_2 e^{\gamma l}} = \frac{Z_H - Z_C}{Z_H + Z_C}$$

Коэффициент отражения по току:  $K_i = -K_u$

В общем случае коэффициент отражения является комплексной величиной и определяет степень согласования линии с нагрузкой.

При согласованной нагрузке  $|K_u| = 0$  отражения отсутствуют, линия работает в **режиме бегущей волны**. Мощность, переносимая волной, полностью выделяется в нагрузку. При холостом ходе или коротком замыкании на выходе линии  $|K_u| = 1$  линия работает в **режиме стоячей волны**, волна полностью отражается от конца линии. В таком случае вся мощность возвращается в генератор. В остальных случаях режим работы называется **режимом смешанных волн**. В этих случаях часть мощности выделяется в нагрузку, а остальная возвращается в генератор.

Из сказанного видно, что в переносе мощности участвуют только бегущие волны, стоячие волны мощность не переносят. Для пояснения степени согласованности линии с нагрузкой вводятся коэффициенты бегущей и стоячей волны. Существуют такие поперечные сечения линии, в которых падающая и отраженная волны складываются в фазе, напряжение в этих сечениях равно сумме амплитуд падающей и отраженной волн:

$$\dot{U}_{\max} = |\dot{A}_1| + |\dot{A}_2|$$

Кроме того, существуют такие поперечные сечения линии, в которых падающая и отраженная волны складываются в противофазе. При этом напряжение достигает минимума:

$$\dot{U}_{\min} = |\dot{A}_1| - |\dot{A}_2|$$

Коэффициенты бегущей и стоячей волны определяются через отношение этих напряжений:

$$k_{\text{бв}} = \frac{\dot{U}_{\min}}{\dot{U}_{\max}} = \frac{|\dot{A}_1| - |\dot{A}_2|}{|\dot{A}_1| + |\dot{A}_2|}, \text{ и } k_{\text{св}} = \frac{1}{k_{\text{бв}}}$$

По своему определению коэффициенты должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$0 \leq k_{\text{бв}} \leq 1, \quad 1 \leq k_{\text{св}} \leq \infty$$

Наиболее часто используется понятие коэффициента стоячей волны, так как современные измерительные приборы (панорамные измерители  $k_{св}$ ) на индикаторных устройствах отображают изменение именно этой величины в определенной полосе частот.

### 13.4. Линия бесконечной длины. Согласование линии.

Для решения в случае бесконечно длинной линии слагаемое содержащее  $e^{\gamma x}$ , не имеет смысла, следовательно  $A_2 = 0$  (отражение отсутствует, линия бесконечна и волна никогда не доберется до конца) и решение примет вид:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} \quad , \quad \dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{Z_C} e^{-\gamma x}$$

Из этих соотношений видно, что для бесконечно длинной линии сопротивление в любой ее точке постоянно и равно волновому сопротивлению:  $\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_C$

Отсюда следует, что если такую линию рассечь в любой точке и нагрузить полученный конечный отрезок на сопротивление, равное волновому сопротивлению линии, то режим работы этого отрезка не изменится. Т. е. уравнения, описывающее работу линии бесконечной длины, можно распространить на линию конечной длины, нагруженную на сопротивление, равное волновому. Такой режим работы линии называется **согласованным**, а линия называется **линией с согласованной нагрузкой**. Этот режим работы является критически важным для сетей передачи информации в связи с отсутствием отраженных волн, обуславливающих помехи. Вспоминая сказанное выше, можем заметить, что этот режим работы линии называется **режимом бегущей волны**. Согласованная нагрузка полностью поглощает мощность падающей волны, достигшей конца линии. Эта мощность называется натуральной. В связи с тем, что сопротивление в любом сечении линии равно волновому, угол сдвига между напряжением и током неизменен. Тогда, если мощность, полученная от источника равна:

$$P_1 = \dot{U}_1 \dot{I}_1 \cdot \cos\varphi$$

то в конце линии, длиной  $l$  :

$$P_H = \dot{U}_H \dot{I}_H \cdot \cos\varphi = \dot{U}_1 e^{-\alpha l} \dot{I}_1 e^{-\alpha l} \cdot \cos\varphi = P_1 e^{-2\alpha l}$$

Отсюда можно определить КПД и затухание в линии:  $\eta = \frac{P_H}{P_1} = e^{-2\alpha l} \quad , \quad \alpha l = \frac{1}{2} \ln \frac{P_H}{P_1}$

### 13.5. Линия без потерь и линия без искажений.

Одной из основных задач линии является передача информации. При этом возникают вопросы о качестве принятой на выходе информации (отсутствии искажений) и расстоянии, на которую ее можно передать. Для линии передачи энергии наиболее важным параметром являются потери.

В случае  $R_0 = 0$  и  $G_0 = 0$  потери активной мощности в линии отсутствуют. Для такой линии:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0} \quad , \quad \gamma = j\beta = j\frac{\omega}{v} = j\frac{2\pi}{\lambda}$$

откуда для линии конечной длины, можно записать:  $\gamma l = j\frac{2\pi l}{\lambda}$  . Для гиперболических функций от комплексного аргумента  $\alpha + j\beta$  :

$$ch(\alpha + j\beta) = ch\alpha \cdot \cos\beta + j \cdot sh\alpha \cdot \sin\beta$$

$$sh(\alpha + j\beta) = sh\alpha \cdot \cos\beta + j \cdot ch\alpha \cdot \sin\beta$$

И в случае линии без потерь ( $\alpha = 0$ ) получим следующие соотношения:

$$ch\gamma(l-x) = \cos\frac{2\pi}{\lambda}(l-x) \quad , \quad sh\gamma(l-x) = j\sin\frac{2\pi}{\lambda}(l-x)$$

Уравнения длинной линии преобразуются в уравнения, записанные с использованием круговых тригонометрических функций от вещественного аргумента:

$$\dot{U} = \dot{U}_H \cos\frac{2\pi}{\lambda}(l-x) + j\dot{I}_H Z_C \sin\frac{2\pi}{\lambda}(l-x)$$

$$\dot{I} = j\frac{\dot{U}_H}{Z_C} \sin\frac{2\pi}{\lambda}(l-x) + \dot{I}_H \cos\frac{2\pi}{\lambda}(l-x)$$

Формально линий без потерь не существует, это идеальная модель, однако при соблюдении условий  $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$  ,  $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$ , что вполне может быть выполнено на практике, линия считается линией без потерь и для расчета могут быть использованы полученные выше уравнения.

Линия без потерь является частным случаем линии без искажений. Однако искажения могут отсутствовать и в линии с потерями. Условие передачи сигналов без искажения вытекает из выражений для постоянной распространения и фазовой скорости

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = (\alpha + j\beta) \quad \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{C_0 Z_C}$$

Для отсутствия искажений необходимо обеспечить  $\alpha = const$  , и  $v = const$  . Отсюда вытекает что  $Z_C = const$  , следовательно, характеристическое сопротивление не зависит от частоты.

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0} \left( \frac{R_0/L_0 + j\omega}{G_0/C_0 + j\omega} \right)}$$

Видно что  $Z_c$  будет вещественной константой при  $R_0/L_0 = G_0/C_0$ . Такая линия называется линией без искажений. Для линии без искажений фазовая скорость  $v = \frac{1}{C_0 Z_c} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$  и затухание  $\alpha = G_0 Z_c = \sqrt{R_0 G_0} = \frac{R_0}{Z_c}$ .

Следует заметить, что для реальных линий (воздушных, кабельных)  $R_0/L_0 \gg G_0/C_0$ . Поэтому для придания реальным линиям свойств линий без искажения искусственно увеличивают их индуктивность путем включения через одинаковые интервалы специальных катушек индуктивности, а в случае кабельных линий – также за счет обвивания их жил ферромагнитной лентой. На сигнальных кабелях устанавливают специальные ферритовые трубки (пример - кабель монитора компьютера).

### 13.6. Входное сопротивление и трансформирующие свойства линии.

Входным сопротивлением длинной линии (цепи с распределенными параметрами) называют сопротивление, подключение которого к генератору не изменит его режим работы. Для линии с нагрузкой  $Z_H$ , используя форму записи уравнений длинной линии как четырехполюсника, получим:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{sh} \gamma l}{\frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l} = Z_c \frac{Z_H \operatorname{ch} \gamma l + Z_c \operatorname{sh} \gamma l}{Z_H \operatorname{sh} \gamma l + Z_c \operatorname{ch} \gamma l} = Z_c \frac{Z_H + Z_c \operatorname{th} \gamma l}{Z_c + Z_H \operatorname{th} \gamma l}$$

Это соотношение показывает, что входное сопротивление в общем случае зависит от электрических параметров линии, ее длины и нагрузки. При этом зависимость сопротивления от длины носит явно выраженный колебательный характер. Этот характер обусловлен влиянием отраженной волны. При согласованной нагрузке отраженная волна отсутствует, и входное сопротивление линии будет равно волновому. При определенных длинах линии ее входное сопротивление может оказаться вещественным, такие длины линии соответственно называются резонансными. Резонансные явления наиболее ярко наблюдаются при отсутствии потерь, поэтому, для линии без потерь, запишем:

$$Z_{\text{вх}} = Z_c \frac{Z_H + j Z_c \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l}{Z_c + j Z_H \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l}$$

И для режимов холостого хода и короткого замыкания, когда мощность, передаваемая в нагрузку равна нулю, получим:

$$Z_{\text{вх хх}} = -j Z_c \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} l, \quad Z_{\text{вх кз}} = j Z_c \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l$$

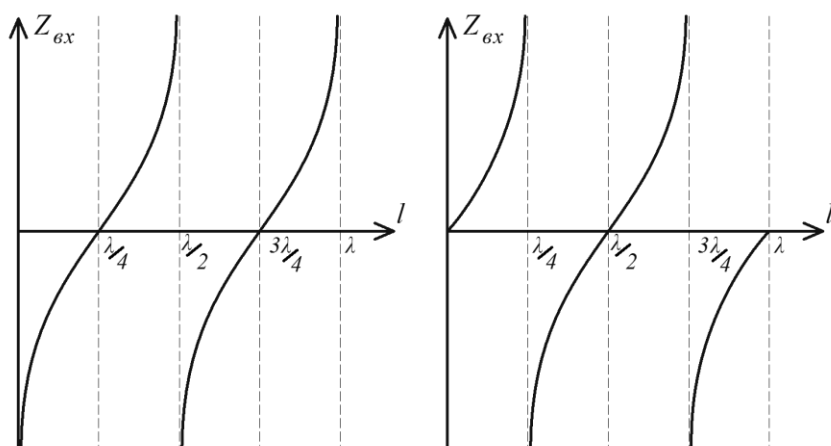


Рис. 13.3.

Рассмотрение характера изменений входного сопротивления от длины, для случая холостого хода, показывает, что при  $0 \leq l \leq \lambda/4$  оно имеет емкостной характер, при  $\lambda/4 \leq l \leq \lambda/2$  индуктивный характер, в точке  $\lambda/4$  наблюдается резонанс напряжений, а в точке  $\lambda/2$  резонанс токов (рис. 13.3.а). Для случая короткого замыкания отрезка линии картина качественно не изменится, но сдвинется на четверть волны (рис. 13.3б).

Таким образом, изменяя длину линии, можно имитировать индуктивное или емкостное сопротивление любой величины. На этом эффекте построен принцип действия устройств для согласования соединения линий, согласования линии и нагрузки, называемых четвертьволновыми и полуволновыми трансформаторами.

### 13.7. Переходные процессы в длинной линии.

Для линии ранее были получены уравнения

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = iR_0 + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = uG_0 + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Упростим задачу предположив, что линия является линией без потерь:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Продифференцируем левое уравнение по расстоянию, а правое по времени и подставим друг в друга

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0, \quad \text{здесь } v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Решение уравнений также представляет собой сумму прямой и обратной волн.

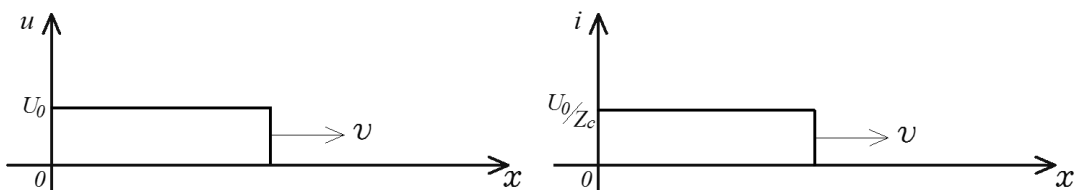
$$u(t, x) = u_{\text{пр}} + u_{\text{обр}}, \quad i(t, x) = \frac{u_{\text{пр}}}{Z_c} - \frac{u_{\text{обр}}}{Z_c} = i_{\text{пр}} - i_{\text{обр}}$$

Переходный процесс в линии – наложение новых волн вызванных измененным режимом работы на волны существовавшего до начала изменения.

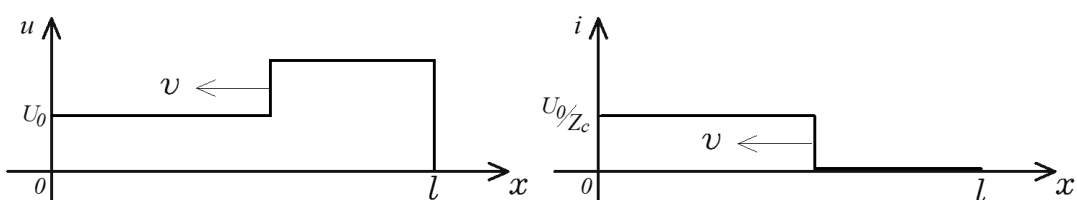


В качестве примера рассмотрим отрезок линии без нагрузки, с распространением прямоугольной волны (подключение источника ЭДС).

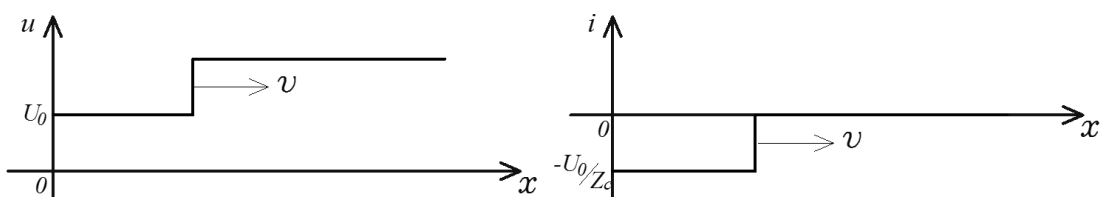
В начальный момент времени волна распространяется от начала линии со скоростью  $v$ .



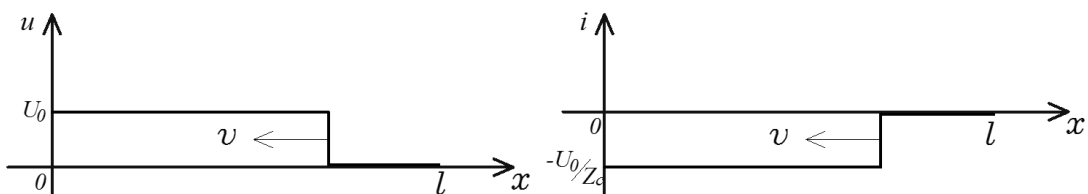
По достижении конца линии волна полностью отражается, ток в конце равен нулю, а напряжение удваивается.



При возвращении к началу линии, где источник поддерживает начальную величину напряжения, возникает волна напряжения отрицательной полярности.



После отражения от конца волны вернутся к началу линии где ток и напряжение станут равными нулю.



Время прохождения волны по линии:

$$\tau = \frac{l}{v}$$

Длительность периода переходного процесса в линии -  $4\tau$ .

При изменении условий задачи на короткое замыкание конца линии переходный процесс будет протекать аналогично, только удваиваться будет ток в линии.

## §14. Модуляция электрических сигналов, основные понятия и типы.

В данном параграфе рассмотрим понятия сигнала в приложении к нашему предмету.

### 14.1. Общие определения.

**Электрический сигнал** это временная функция одной или нескольких электрических величин, несущая информацию (данные, сообщение) о состоянии какой-либо физической системы или объекта.

Сигналы можно разделить на детерминированные и случайные. **Детерминированный сигнал** это такой сигнал, значение которого можно предсказать для любого момента времени. **Случайный сигнал** это помеха мешающая получить информацию. Сигнал может быть постоянным или **импульсным**, т.е. действующим в определенный интервал времени.

Если функция представляющая сигнал непрерывна, сигнал принято называть **аналоговым**. Сигнал, не удовлетворяющий условию непрерывности – **дискретный**. Дискретный сигнал это последовательность импульсов. Дискретный сигнал, нормированный по уровню, называется **цифровым сигналом**. Цифровой сигнал это электрическое отображение двоичной записи данных. Переход между аналоговым и цифровым сигналами осуществляется с помощью специальных устройств АЦП и ЦАП.

Сигнал, несущий информацию, часто является низкочастотным (например, речь), и прямая передача по линиям связи такого сигнала часто невозможна. Решение было найдено через использование модуляции сигнала.

### 14.2. Общие сведения о модуляции

**Модуляция** - это процесс преобразования одного или нескольких информационных параметров несущего сигнала в соответствии с мгновенными значениями информационного сигнала. В результате модуляции информационные сигналы переносятся в область более высоких частот.

Использование модуляции позволяет:

- согласовать параметры сигнала с параметрами линии;
- повысить помехоустойчивость сигналов;
- увеличить дальность передачи сигналов;
- организовать многоканальные системы передачи.

Условное графическое обозначение модулятора и его сигналы:

$u(t)$  — модулирующий, является информационным (его частота обозначается  $\Omega$ );  $s(t)$  — модулируемый (несущий), является высокочастотным (его частота обозначается  $\omega_0$ );  $S_m(t)$  — модулированный сигнал, является информационным и высокочастотным.

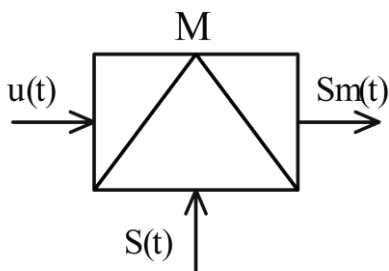


Рис. 14.1 - Условное обозначение модулятора

В качестве несущего сигнала может использоваться:

- гармоническое колебание, при этом модуляция называется **аналоговой** или непрерывной;
- периодическая последовательность импульсов, модуляция называется **импульсной**;

В процессе модуляции изменяются информационные параметры несущего колебания, поэтому название вида модуляции зависит от изменяемого параметра этого колебания:

- **амплитудная модуляция (АМ)**, происходит изменение амплитуды несущего колебания;
- **частотная модуляция (ЧМ)**, происходит изменение частоты несущего колебания;
- **фазовая модуляция (ФМ)**, происходит изменение фазы несущего колебания.

### 14.3. Амплитудная модуляция

**Амплитудная модуляция** - процесс изменения амплитуды несущего сигнала в соответствии с мгновенными значениями модулирующего (информационного) сигнала.

Рассмотрим математическую модель амплитудно-модулированного (АМ) сигнала при гармоническом модулирующем сигнале. При воздействии модулирующего сигнала

$$u(t) = U_m \sin \Omega t$$

на несущее колебание  $s(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$  происходит изменение амплитуды несущего сигнала по закону:

$$U_{am} = U_0 + a_{am} U_m \sin \Omega t$$

где  $a_{am}$  — коэффициент пропорциональности амплитудной модуляции. Подставим амплитуду в формулу для несущего колебания:

$$\begin{aligned} S_{am} &= (U_0 + a_{am} U_m \sin \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ &= U_0 \left(1 + a_{am} \frac{U_m}{U_0} \sin \Omega t\right) \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

Отношение  $a_{am} \frac{U_m}{U_0} = m_{am}$  называется **коэффициентом амплитудной модуляции**. С

учетом  $m_{am}$  математическая модель АМ сигнала при гармоническом модулирующем сигнале будет иметь вид:

$$S_{am} = U_0(1 + m_{am} \sin \Omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Рассмотрим спектр АМ сигнала для гармонического модулирующего сигнала. Для этого раскроем скобки математической модели модулированного сигнала, воспользуемся известными тригонометрическими преобразованиями, и представим сигнал в виде суммы гармонических составляющих:

$$S_{am} = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{m_{am} U_0}{2} \sin((\omega_0 - \Omega)t - \varphi) - \frac{m_{am} U_0}{2} \sin((\omega_0 + \Omega)t + \varphi)$$

Как видно из выражения в спектре АМ сигнала присутствует три составляющих: составляющая несущего сигнала и две составляющих на комбинационных частотах. Причем составляющая на частоте  $\omega_0 - \Omega$  называется нижней, а на частоте  $\omega_0 + \Omega$  — верхней боковой составляющей.

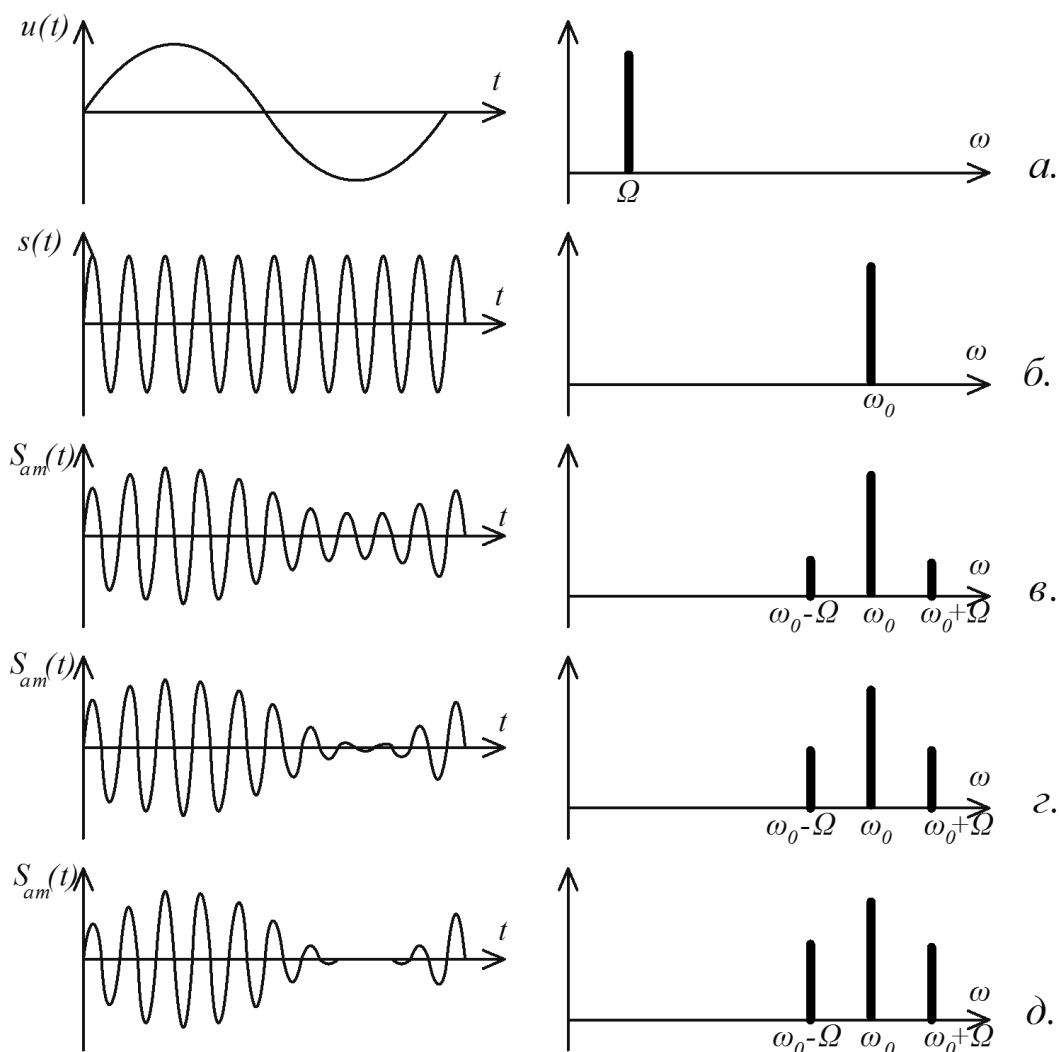


Рис 14.2 - Временные и спектральные диаграммы модулирующего (а), несущего или модулированного при  $m_{am}=0$  (б) и амплитудно-модулированных сигналов при  $m_{am}=0,5$  (в),  $m_{am}=1$  (г) и  $m_{am}>1$  (д)

Ширина спектра для данного сигнала будет определяться:

$$\Delta\omega_{am} = (\omega_0 + \Omega) - (\omega_0 - \Omega) = 2\Omega$$

На Рис. 14.2 приведены временные и спектральные диаграммы АМ сигналов при различных индексах  $m_{am}$ . Как видно при  $m_{am}=0$  модуляция отсутствует, сигнал представляет собой немодулированную несущую, соответственно и спектр этого сигнала имеет только составляющую несущего сигнала (Рис. 14.2б). При индексе модуляции  $m_{am}=1$  происходит глубокая модуляция, в спектре АМ сигнала амплитуды боковых составляющих равны половине амплитуды составляющей несущего сигнала (Рис. 14.2г). Данный вариант является оптимальным, т. к. энергия в большей степени приходится на информационные составляющие. На практике добиться коэффициента равного единице тяжело, к нему стараются приблизиться  $0 < m_{am} < 1$  (Рис. 13.2в). При  $m_{am} > 1$  происходит перемодуляция, что, как отмечалось выше, приводит к искажению огибающей АМ сигнала, в спектре такого сигнала амплитуды боковых составляющих превышают половину амплитуды составляющей несущего сигнала (Рис. 14.2д).

В случае реального сигнала, содержащего полосу частот, спектр сигнала определяется через преобразование Фурье.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(v) u(\omega - v) dv$$

$$S(\omega) = \pi U_0 \delta(\omega - \omega_0) + \frac{m_{am} U_0}{2} u(\omega + \omega_0) + \frac{m_{am} U_0}{2} u(\omega - \omega_0)$$

Здесь  $u(\omega)$  спектр информационного сигнала.

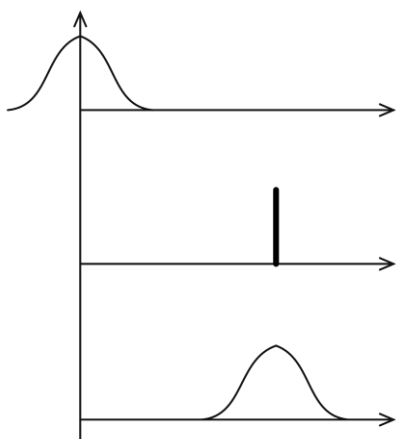


Рис. 14.

Основными достоинствами амплитудной модуляции являются узкая ширина спектра АМ сигнала и простота получения модулированных сигналов. Недостатками этого типа модуляции являются низкая помехоустойчивость (т. к. при воздействии помехи на сигнал искажается его форма — огибающая, которая и содержит передаваемое сообщение) и неэффективное использование мощности передатчика (т. к. наибольшая часть энергии модулированного сигнала содержится в составляющей несущего сигнала, а на информационные боковые полосы приходится не более 25%).

Амплитудная модуляция применяется:

- в системах телевизионного вещания (для передачи телевизионных сигналов);
- в системах звукового радиовещания и радиосвязи на длинных и средних волнах;

#### 14.4. Частотная модуляция

**Частотная модуляция** - процесс изменения частоты несущего сигнала в соответствии с мгновенными значениями модулирующего сигнала.

Рассмотрим математическую модель **частотно-модулированного** (ЧМ) сигнала при гармоническом модулирующем сигнале. При воздействии модулирующего сигнала  $u(t) = U_m \sin \Omega t$  на несущее колебание  $s(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$  происходит изменение частоты несущего сигнала по закону:

$$\omega_{\text{ЧМ}} = \omega_0 + a_{\text{ЧМ}} U_m \sin \Omega t$$

Где  $a_{\text{ЧМ}}$  — коэффициент пропорциональности частотной модуляции. Поскольку значение  $a_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t$  может изменяться в диапазоне от -1 до 1, то наибольшее отклонение частоты ЧМ сигнала от частоты несущего сигнала составляет

$$\Delta \omega_m = a_{\text{ЧМ}} U_m$$

Величина  $\Delta \omega_m$  называется девиацией частоты. **Девиация частоты** показывает наибольшее отклонение частоты модулированного сигнала от частоты несущего сигнала.

Значение фазы  $\psi$  непосредственно подставить в  $s(t)$  нельзя, т. к. аргумент синуса  $\omega t + \varphi$  является мгновенной фазой сигнала которая связана с частотой выражением

$$\omega_{\text{ЧМ}}(t) = d\psi(t)/dt$$

Отсюда следует что, чтобы определить  $\psi(t)$ , необходимо проинтегрировать  $\omega_{\text{ЧМ}}(t)$

$$\psi(t) = \int_0^t \omega_{\text{ЧМ}}(t) dt = \omega_0 t - \frac{\Delta \omega_m}{\Omega} \cos \Omega t + \varphi$$

Причем в выражении  $\varphi$  является начальной фазой несущего сигнала. Отношение

$$M_{\text{ЧМ}} = \frac{\Delta \omega_m}{\Omega}$$

называется **индексом частотной модуляции**. Математическая модель ЧМ сигнала при гармоническом модулирующем сигнале будет иметь вид:

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = U_0 \sin(\omega_0 t - M_{\text{ЧМ}} \cos \Omega t + \varphi)$$

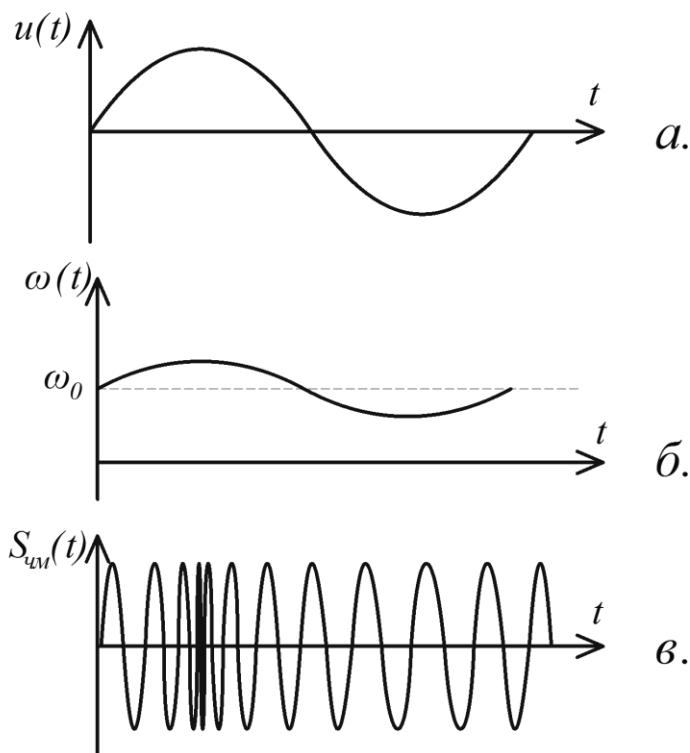


Рис. 14.3.

Временные диаграммы, поясняющие процесс формирования частотно-модулированного сигнала, приведены на рисунке 14.3. На диаграмме а. представлен модулирующий сигнал, на б. представлена диаграмма показывающая закон изменения частоты ЧМ сигнала. На диаграмме в. представлен частотно-модулированный сигнал, соответствующий заданному модулирующему сигналу. Как видно из диаграммы любое изменение амплитуды модулирующего сигнала вызывает пропорциональное изменение частоты несущего сигнала.

Для построения спектра ЧМ сигнала необходимо разложить его математическую модель на гармонические составляющие. В результате разложения получим

$$S_{\text{чм}}(t) = U_0 J_0(M_{\text{чм}}) \sin \omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} U_0 J_k(M_{\text{чм}}) \sin(\omega_0 + k\Omega)t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k U_0 J_k(M_{\text{чм}}) \sin(\omega_0 - k\Omega)t$$

Где  $J_k(M_{\text{чм}})$  — коэффициенты пропорциональности. Коэффициенты определяются по функциям Бесселя и зависят от индекса частотной модуляции. На рис. 14.4 представлен график, содержащий восемь функций Бесселя. Для определения амплитуд составляющих спектра ЧМ сигнала необходимо определить значение функций Бесселя для заданного индекса. Причем, как видно из рисунка, различные функции имеют начало в различных значениях  $M_{\text{чм}}$ , а следовательно, количество составляющих в спектре будет определяться  $M_{\text{чм}}$  (с увеличением индекса увеличивается и количество составляющих спектра). Например, необходимо определить коэффициенты при  $M_{\text{чм}} = 2$ . По графику видно, что при заданном индексе можно определить коэффициенты для пяти функций ( $J_0, J_1, J_2, J_3, J_4$ )

Их значение при заданном индексе будет равно:  $J_0=0,21$ ;  $J_1=0,58$ ;  $J_2=0,36$ ;  $J_3=0,12$ ;  $J_4=0,02$ . Все остальные функции начинаются после значения  $M_{\text{ЧМ}} = 2$  и равны, соответственно, нулю. Для приведенного примера количество составляющих в спектре ЧМ сигнала будет равно 9: одна составляющая несущего сигнала ( $U_0 J_0$ ) и по четыре составляющих в каждой боковой полосе ( $U_0 J_1$ ;  $U_0 J_2$ ;  $U_0 J_3$ ;  $U_0 J_4$ ).

Еще одной важной особенностью спектра ЧМ сигнала является то, что можно добиться отсутствия составляющей несущего сигнала или сделать ее амплитуду значительно меньше амплитуд информационных составляющих без дополнительных технических усложнений модулятора. Для этого необходимо подобрать такой индекс модуляции  $M_{\text{ЧМ}}$ , при котором  $J_0(M_{\text{ЧМ}})$  будет равно нулю (в месте пересечения функции  $J_0$  с осью  $M_{\text{ЧМ}}$ ), например  $M_{\text{ЧМ}} = 2,4$ .

Ширина спектра зависит от  $M_{\text{ЧМ}}$  (рис. 14.5). Как видно из рисунка, при  $M_{\text{ЧМ}} = 0,5$ , ширина спектра ЧМ сигнала соответствует ширине спектра АМ сигнала и в этом случае частотная модуляция является узкополосной, при увеличении  $M_{\text{ЧМ}}$  ширина спектра увеличивается, и модуляция в этом случае является широкополосной. Для ЧМ сигнала ширина спектра определяется соотношением

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ}} = 2(1 + M_{\text{ЧМ}})\omega_0$$

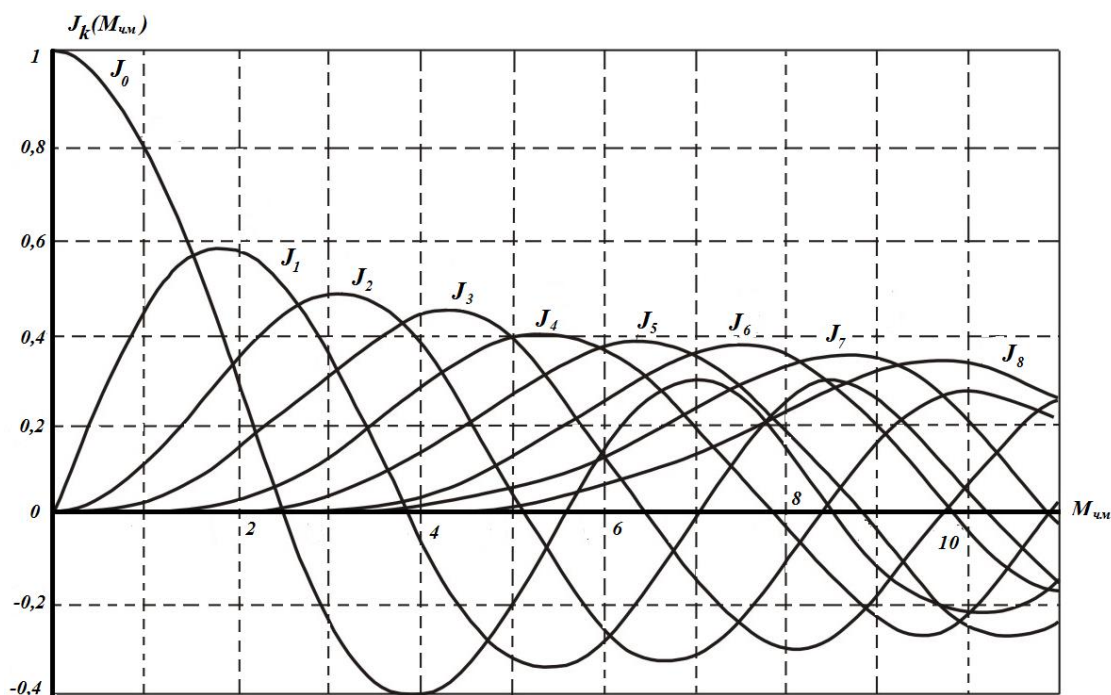


Рис. 14.4



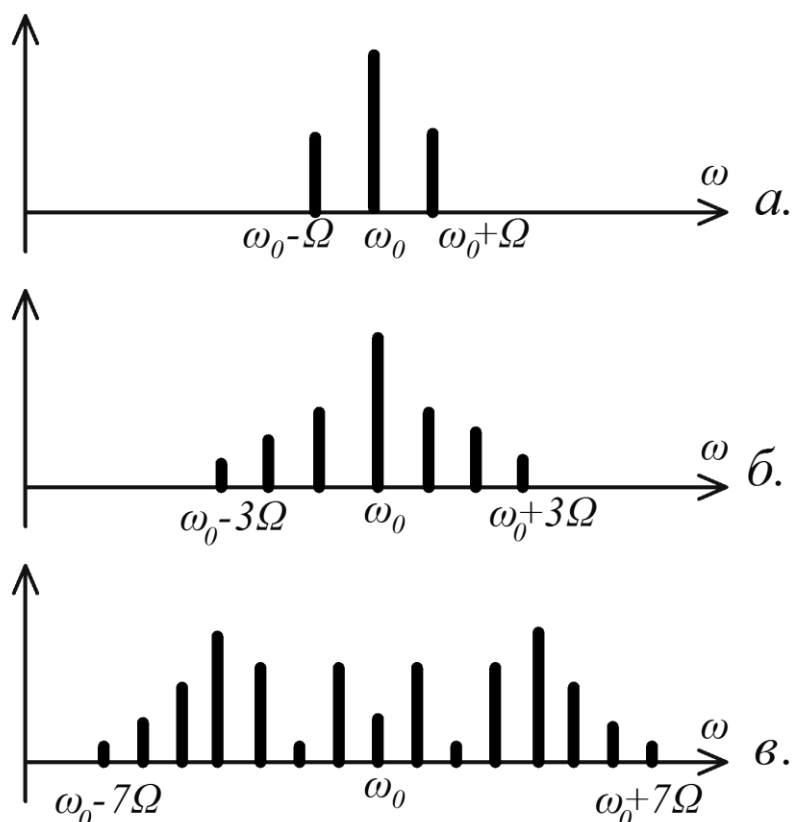


Рис. 14.5 Спектры ЧМ сигнала при гармоническом модулирующем сигнале и при различных индексах  $M_{\text{ЧМ}}$ : при  $M_{\text{ЧМ}} = 0,5$  (а), при  $M_{\text{ЧМ}} = 1$  (б), при  $M_{\text{ЧМ}} = 5$  (в).

**Достоинством** частотной модуляции являются:

- высокая помехоустойчивость;
- эффективное использование мощности передатчика;
- сравнительная простота получения модулированных сигналов.

Основным **недостатком** данной модуляции является большая ширина спектра модулированного сигнала.

Частотная модуляция используется:

- в системах телевизионного вещания (для передачи сигналов звукового сопровождения);
- системах спутникового теле- и радиовещания;
- системах высококачественного стереофонического вещания (FM диапазон);
- радиорелейных линиях (РРЛ);
- сотовой телефонной связи.

## 14.5. Фазовая модуляция

**Фазовая модуляция** - процесс изменения фазы несущего сигнала в соответствии с мгновенными значениями модулирующего сигнала.

Рассмотрим математическую модель *фазо-модулированного* (ФМ) сигнала при гармоническом модулирующем сигнале. При воздействии модулирующего сигнала  $u(t) = U_m \sin \Omega t$  на несущее колебание  $s(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$  происходит изменение мгновенной фазы несущего сигнала по закону:

$$\psi_{\text{фм}}(t) = \omega_0 t + \varphi + a_{\text{фм}} U_m \sin \Omega t$$

Где  $a_{\text{фм}}$  — коэффициент фазовой модуляции. Подставляя  $\psi_{\text{фм}}(t)$  в  $s(t)$ , получаем математическую модель ФМ сигнала при гармоническом модулирующем сигнале:

$$S_{\text{фм}}(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + a_{\text{фм}} U_m \sin \Omega t + \varphi)$$

Произведение  $a_{\text{фм}} U_m = M_{\text{фм}}$  называется *индексом фазовой модуляции* или *девиацией фазы*.

Поскольку изменение фазы вызывает изменение частоты, то определяем закон изменения частоты ФМ сигнала:

$$\omega_{\text{фм}}(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + a_{\text{фм}} U_m \Omega \cos \Omega t$$

Произведение  $a_{\text{фм}} U_m \Omega = \Delta\omega_{\text{фм}}$  является девиацией частоты фазовой модуляции. Сравнивая девиацию частоты при частотной и фазовой модуляциях, можно сделать вывод, что и при ЧМ и при ФМ девиация частоты зависит от коэффициента пропорциональности и амплитуды модулирующего сигнала, но при ФМ девиация частоты также зависит и от частоты модулирующего сигнала.

При разложении математической модели ФМ сигнала на гармонические составляющие получится такой же ряд, как и при частотной модуляции, с той лишь разницей, что коэффициенты  $J_k$  будут зависеть от индекса фазовой модуляции  $M_{\text{фм}}$ . Определятся эти коэффициенты будут аналогично, как и при частотной модуляции по функциям Бесселя. Поскольку спектр ФМ сигнала строится аналогично спектру ЧМ сигнала, то для него характерны те же выводы, что и для ЧМ. Ширина спектра ФМ сигнала определяется выражением:

$$\Delta\omega_{\text{фм}} = 2(1 + M_{\text{фм}})\Omega$$

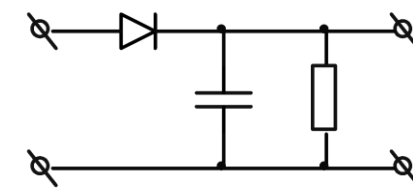
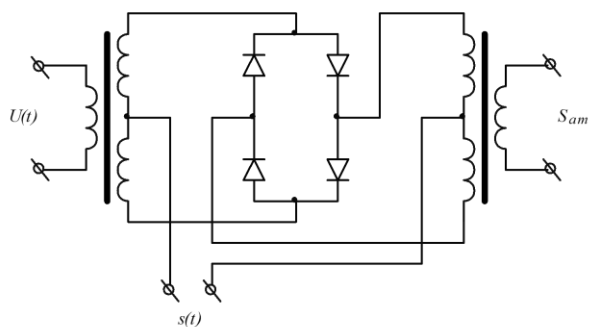
Достоинствами фазовой модуляции являются:

- высокая помехоустойчивость;
- эффективное использование мощности передатчика.

недостатками фазовой модуляции являются:

- большая ширина спектра;
- сравнительная трудность получения модулированных сигналов и их детектирование

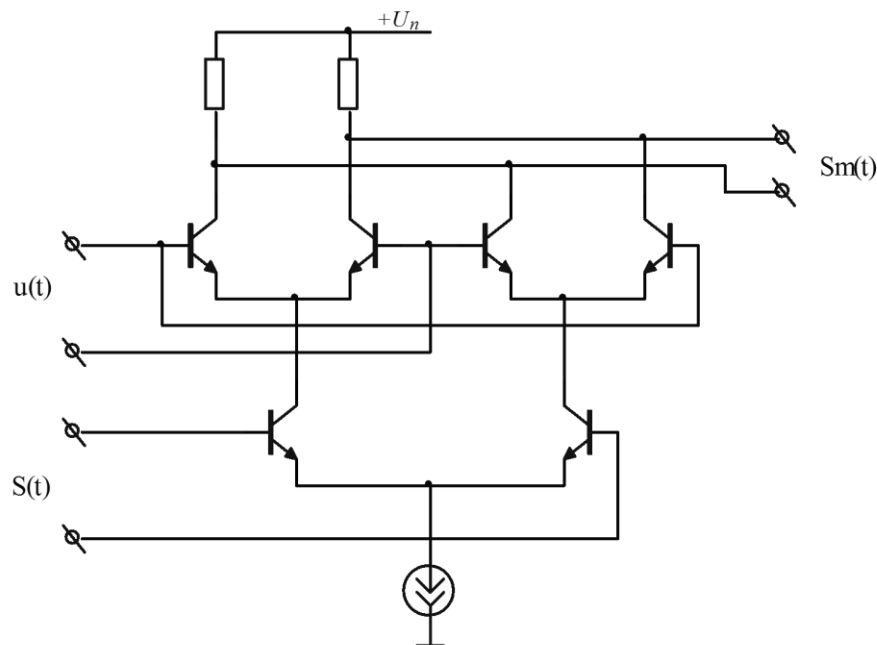
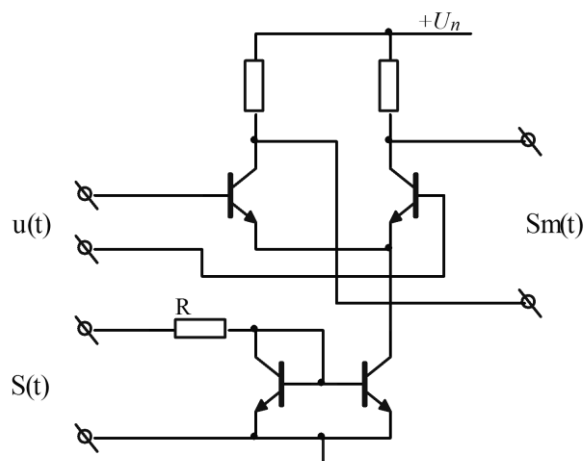
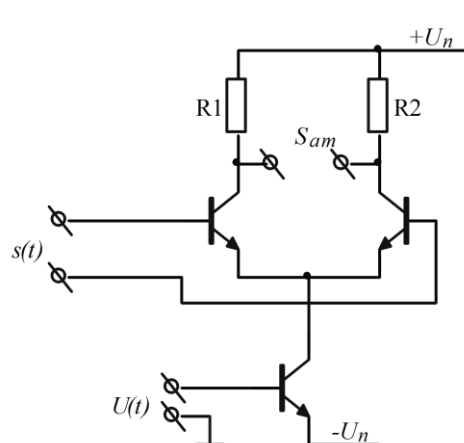
#### 14.6. Схемы модуляторов и демодуляторов электрических сигналов.



Простейший АМ демодулятор (синхронный детектор).

Кольцевой балансный модулятор.

Простейшие схемы аналоговых умножителей.



Ячейка Гильберта

## 14.7. Импульсная модуляция

**Импульсная модуляция** — это модуляция, при которой в качестве несущего сигнала используется периодическая последовательность импульсов, а в качестве модулирующего может использоваться аналоговый или дискретный сигнал.

Различают четыре основных вида импульсной модуляции:

- **амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)**; изменение амплитуды импульсов сигнала;
- **фазо-импульсная модуляция (ФИМ)**, изменение фазы импульсов несущего сигнала;
- **частотно-импульсная модуляция (ЧИМ)**, изменение частоты импульсов несущего сигнала;
- **широотно-импульсная модуляция (ШИМ)**, изменение длительности импульсов сигнала.

Два последних вида модуляции широко используются в преобразователях электрической энергии.

Поскольку при импульсной модуляции переносчиком сообщения является периодическая последовательность импульсов, то спектр импульсно-модулированных сигналов является дискретным и содержит множество спектральных составляющих. Этот спектр представляет собой спектр периодической последовательности импульсов в котором возле каждой гармонической составляющей несущего сигнала находятся составляющие модулирующего сигнала. Структура боковых полос возле каждой составляющей несущего сигнала зависит от вида модуляции.

Спектр сигнала импульсной модуляции при однтонном информационном сигнале:

$$S_{am} = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin((k\omega_0 + \Omega)t + \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin((k\omega_0 - \Omega)t + \varphi)$$

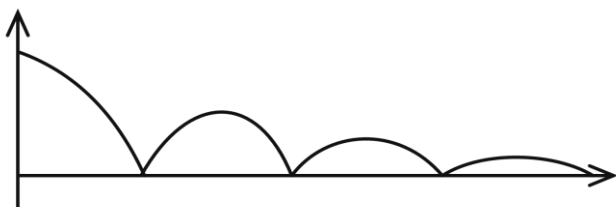


Рис.14.8.

Важной особенностью спектра импульсно-модулированных сигналов является то, что ширина спектра модулированного сигнала, кроме ШИМ, не зависит от модулирующего сигнала. Она полностью определяется длительностью импульса несущего сигнала. Поскольку при ШИМ длительность импульса изменяется и зависит от модулирующего сигнала, то при этом виде модуляции и ширина спектра также зависит от модулирующего сигнала.

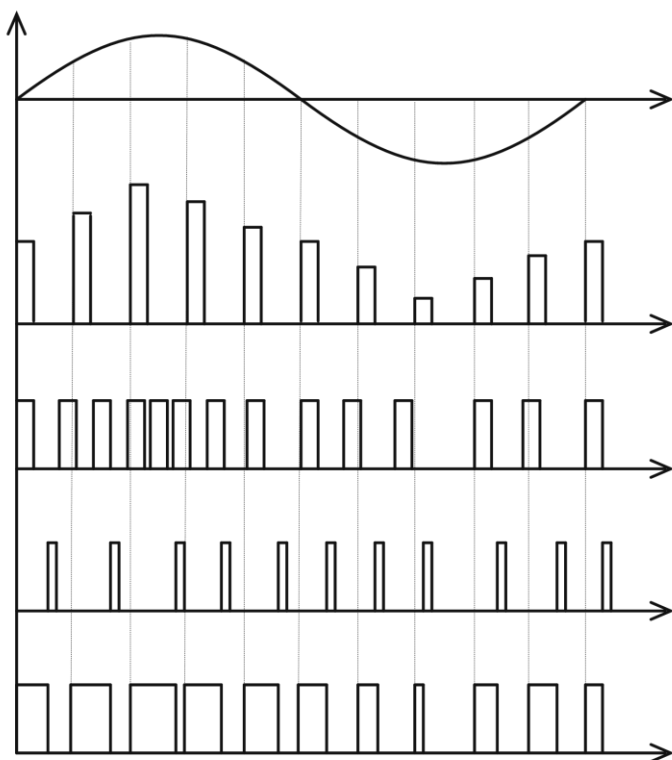


Рис. 14.9.

Частота следования импульсов несущего сигнала, требуемая для передачи информации, может быть определена по теореме В. А. Котельникова как  $f_0 = 2f_{max}$ . При этом  $f_{max}$  это верхняя частота спектра модулирующего сигнала.

Передача импульсно модулированных сигналов по высокочастотным линиям связи невозможна, т. к. спектр этих сигналов содержит низкочастотные составляющие. Поэтому для передачи осуществляют повторную модуляцию. Это модуляция, при которой в качестве модулирующего сигнала используют импульсно-модулированный сигнал, а в качестве несущего, гармоническое колебание. При повторной модуляции спектр импульсно-модулированного сигнала переносится в область несущей частоты. Для повторной модуляции может использоваться любой из видов аналоговой модуляции: АМ, ЧМ, ФМ. Полученная модуляция обозначается двумя аббревиатурами: первая указывает на вид импульсной модуляции а вторая — на вид аналоговой модуляции, например АИМ-АМ или ШИМ-ФМ и т. д.

#### 14.8. Цифровая модуляция (манипуляция)

**Цифровая модуляция (манипуляция)** — это модуляция, при которой в качестве несущего сигнала используется гармонический сигнал, а в качестве модулирующего цифровой (двоичная последовательность). Т.е. при цифровой манипуляции параметры несущего сигнала меняются скачкообразно при переходе информационного сигнала от низкого логического уровня к высокому и обратно.

Как и другие виды манипуляцию делят на основные типы:

- Амплитудная манипуляция (АМн);

- **частотная манипуляция (ЧМн);**
- **фазовая манипуляция (ФМн).**

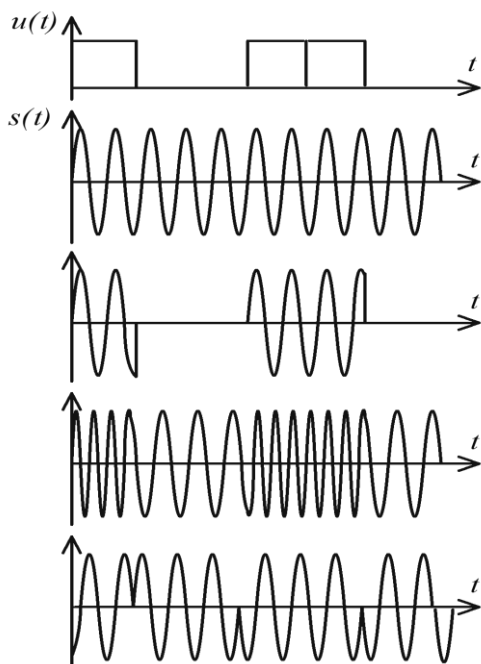


Рис. 14.10

На рис. 14.10 показаны простейшие примеры манипуляции – амплитуда, частота и фаза меняются скачком, на фронте информационного сигнала. Манипуляция используется для передачи информации по линиям связи. Для повышения плотности передачи, используют следующие методы: использование при амплитудной модуляции большего числа уровней амплитуды сигнала (т.е. за одинаковый интервал времени передается информация соответствующая не одному биту, а например, трем битам – восемь уровней изменения амплитуды), большего количества частот или положений фазового угла. Еще повысить плотность передачи позволяет одновременное использование нескольких видов манипуляции. Такой вид манипуляции называется квадратурной – например, квадратурная амплитудно-фазовая манипуляция позволяет получить плотность передачи в 64 раза большую чем на рис. 14.10 (8 уровней изменения амплитуды и фазовые сдвиги с шагом  $45^\circ$ ).

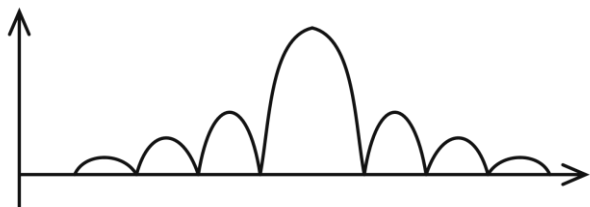


Рис. 14.11. Спектр амплитудной манипуляции (АМн)