

МФТИ, ФИВТ, ИВТ  
Разработка и анализ алгоритмов, весна 2020  
Домашнее задание №4

1. (2 балла) К массиву чисел длины  $n$  поступают запросы трёх типов: а) выполнить присваивание на отрезке (то есть  $a_l := val, \dots, a_r := val$ ); б) выполнить увеличение на отрезке (то есть  $a_l$  увеличить на  $x, \dots, a_r$  увеличить на  $x$ ); в) сообщить сумму на подотрезке. Ответ на запрос за  $O(\log n)$ .
- 2°. (1 балл) Покажите, как с помощью sparse table находить не только минимум на отрезке, но и позицию, где он достигается (то есть найти индекс  $j$  такой, что  $a_j$  – минимум на отрезке  $[l, r]$ ).
3. (2 балла) К массиву  $a_1, a_2, \dots, a_n$  поступает  $q$  запросов двух видов: а) по  $l, r, b, d$  нужно прибавить арифметическую прогрессию с начальным значением  $b$  и шагом  $d$  к отрезку  $[l, r]$  массива, иными словами, увеличить  $a_l$  на  $b$ ,  $a_{l+1}$  – на  $b + d, \dots, a_r$  – на  $b + d(r - l)$ ; б) по  $l$  и  $r$  вывести  $a_l + a_{l+1} + \dots + a_r$ . Обработайте запросы за  $O(n + q \log n)$ .
4. (3 балла) К массиву  $a_1, a_2, \dots, a_n$  поступает  $q$  запросов четырёх видов: а) по числам  $pos$  и  $x$  выполнить присваивание  $a[pos] := x$ ; б) по числам  $l$  и  $r$  вывести  $\sum_{l \leq i \leq r} a_i$ ; в) по числам  $l$  и  $r$  вывести  $\sum_{l \leq i < j \leq r} a_i \cdot a_j$ ; г) по числам  $l$  и  $r$  вывести  $\sum_{l \leq i < j < k \leq r} a_i \cdot a_j \cdot a_k$ . Обработайте запросы за  $O(n + q \log n)$ .
5. (1 балл) Предложите структуру данных, которая бы поддерживала массив чисел и позволяла бы: а) добавлять элемент в конец массива за  $O(\log n)$ , где  $n$  – текущий размер массива; б) узнавать минимальное значение на подотрезке за  $O(1)$ .
- 6°. (2 балла) Пусть строка  $s$  состоит из символов  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Обозначим через  $s^k$  её  $k$ -й суффикс, то есть  $s^k = s_k s_{k+1} \dots s_n$ . Пусть дана перестановка  $\pi$ , такая что  $s^{\pi(1)} < s^{\pi(2)} < \dots < s^{\pi(n)}$ , где строки сравниваются лексикографически. Далее, если  $a$  и  $b$  – две строки, определим  $lcp(a, b)$  как длину наибольшего общего префикса строк  $a$  и  $b$ . Пусть известны величины  $k_i = lcp(s^{\pi(i)}, s^{\pi(i+1)})$  для всех  $1 \leq i \leq n - 1$ . Пусть, наконец, дано  $q$  запросов вида  $l, r$ . В ответ на такой запрос нужно сообщить  $lcp(s^l, s^r)$ . Обработайте все запросы за  $O(n \log n + q)$ .
7. (2 балла) На плоскости заданы  $n$  прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Определите суммарную площадь регионов, покрытых **нечётным** числом прямоугольников за  $O(n \log n)$ .
8. (2 балла) Дан массив чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Поступает  $q$  запросов одного из двух видов: а) увеличить число в некоторой точке (то есть по  $pos$  и  $x \geq 0$  нужно увеличить  $a_{pos}$  на  $x$ ); б) сообщить максимум на префиксе. Используйте только прямое дерево Фенвика. Обработайте все запросы за  $O((n + q) \log n)$ .
9. (2 балла) К массиву  $a_1, a_2, \dots, a_n$  целых чисел от 0 до  $2^{10} - 1$  поступают запросы двух видов: а) xor-равно на отрезке (то есть выполнить  $a_l := a_l \oplus x, \dots, a_r := a_r \oplus x$ ); б) сообщить **and** на отрезке (то есть  $a_l \wedge a_{l+1} \wedge \dots \wedge a_r$ ). Обработайте все запросы за  $O(n + q \log n)$ .