Решение домашнего задания №1 по курсу «Алгоритмы и структуры данных»

Тетерин Дмитрий

23 сентября 2020 г.

Задача 4.

Пусть M_1 - нерасширяемое (максимальное по включению) паросочетание в G, а M_2 - наибольшее паросочетание в G. Докажите, что $|M_2| \leq 2 \cdot |M_1|$.

Решение. Выберём произвольное ребро α из наибольшего паросочетания M_2.

Понятно, что возможны всего 2 варианта:

1. $\alpha \in M_1$. Всё ок, смежных α рёбер в M_1 нет, т.к. иначе это не паросочетание. Сопоставим α её же в M_1.

2. $\alpha \notin M_1$. В таком случае в $M_1 \leq 2$ смежных с α ребра, выходящих из вершин, инцидентных α. Больше, чем 2, быть не может, т.к. иначе M_1 – не паросочетание.

Таким образом мы сопоставили каждому ребру из наибольшего паросочетания ≤ 2 ребра из произвольного максимального паросочетания. Значит, $|M_2| \leq 2 \cdot |M_1|$.

Задача 3.

Дан ориентированный граф. Найдите в нём (или определите, что так сделать нельзя) некоторое множество циклов, которые попарно не пересекаются, но покрывают всё множество вершин. Цикл из одной вершины не считается циклом (а из двух – считается). Асимптотика: $O(n \cdot m)$. Указание: раздвойте вершины.

Решение. Воспользуемся указанием и "раздвоим" вершины – представим наш граф как неориентированный двудольный, в каждую долю положим все копии вершин.

Вершина первой доли α будет соединяться с вершиной второй доли β, если в исходном ориентированном графе было ребро, начинающееся в α и заканчивающееся в β.

Утверждение 1. *Паросочетание, насыщающее все вершины построенного двудольного графа, задаёт покрытие всех вершин исходного графа множеством циклов, которые попарно не пересекаются.*

Доказательство. Достаточно понять, что нерасширяемое паросочетание в полученном графе задаёт либо путь, либо цикл в исходном графе без пересечения по вершинам. □

Следовательно, алгоритмом Куна на полученном двудольном графе за нужную асимптотику мы либо получим ответ на вопрос задачи, либо поймём, что такого покрытия графа циклами без пересечений не существует.

Задача 2.

Игра в города на графе G определяется следующим образом. Изначально фишка расположена в одной из вершин (назовём её стартовой). Игроки ходят по очереди, на каждом ходу нужно сдвинуть фишку вдоль любого исходящего ребра в вершину, в которой фишка ещё ни разу не была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что первый выигрывает, если и только если стартовая вершина лежит во всех максимальных паросочетаниях.

Решение.

1. Первый выигрывает $\Rightarrow$ стартовая вершина лежит во всех максимальных паросочетаниях.

   Пусть нашлось максимальное паросочетание M, в котором стартовая вершина не лежит. Тогда ребро e, по которому ходит первый, переносит фишку в какую-то вершину, насыщенную M, т.к. иначе M – не максимальное (его можно расширить ребром e). Дальше второй может всегда ходить по инцидентному текущей вершине, на которой стоит фишка, ребру в M, и победа останется за ним, т.к. если в какой-то момент второй игрок не может сделать ход в ребро из M, то мы нашли увеличивающий путь для M, что противоречит его максимальности.

2. Первый выигрывает $\Leftarrow$ стартовая вершина лежит во всех максимальных паросочетаниях.

   Пусть стартовая вершина принадлежит всем максимальным паросочетаниям. Первому игроку предлагается выбрать любое максимальное паросочетиние M и ходить по его рёбрам. У него всегда будет ход, т.к. в противном случае рёбра, по которым будет ходить второй, составят какое-то максимальное паросочетание, которое не включает стартовую вершину. Противоречие.