

Pertemuan ke-13

INTEGRAL SUBSTITUSI & INTEGRAL PARSIAL

Oleh:

Santi Arum Puspita Lestari, M.Pd

Teknik Informatika

Universitas Buana Perjuangan Karawang

INTEGRAL SUBSTITUSI

► Teorema

Andaikan g fungsi yang dapat diintegralkan dan andaikan F adalah antiturunan f . Maka, jika $u = g(x)$,

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

► Terdapat dua langkah penting dalam penyelesaian integral substitusi, yaitu:

1. Memilih fungsi $u = g(x)$ yang tepat sehingga $\int f(g(x))g'(x) dx$ dapat diubah menjadi $\int f(u)du$.
2. Menentukan fungsi integral umum $f(u)$ yang bersifat $F'(u) = f(u)$.

Contoh 1:

Tentukan hasil integral $\int 4x (6x^2 - 5)^3 dx$

Penyelesaian:

Misalkan : $u = 6x^2 - 5$

maka $\frac{du}{dx} = 12x$ sehingga $du = 12x dx \rightarrow \frac{1}{3} du = 4x dx$

$$\int 4x (6x^2 - 5)^3 dx = \int u^3 \left(\frac{1}{3} du \right)$$

$$= \frac{1}{3} \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3+1} u^{3+1} + C$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$= \frac{1}{12} u^4 + C$$

$$= \frac{1}{12} (6x^2 - 5)^4 + C$$

Contoh 2:

Hitunglah integral $\int 2x \sqrt{2x^2 - 1} dx$

Penyelesaian:

Misalkan : $u = 2x^2 - 1$

maka, $\frac{du}{dx} = 4x \rightarrow du = 4x dx$ atau $\frac{1}{2} du = 2x dx$

$$\int 2x \sqrt{2x^2 - 1} dx = \int (u)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} du \right) = \frac{1}{2} \int (u)^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (u)^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} (u)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{6} (u)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{u^3} + C = \frac{1}{3} u \sqrt{u} + C$$

$$= \frac{1}{3} (2x^2 - 1) \sqrt{2x^2 - 1} + C$$

Contoh 3:

► Selesaikan integral berikut $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx$

Penyelesaian:

Misalkan : $u = x^2$

$$\text{maka } \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow du = 2x dx \quad \text{atau} \quad \frac{1}{2} du = x dx$$

Ingat bahwa $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx = \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \sec^2 u du$$

$$= \frac{1}{2} \tan u + C$$

$$= \frac{1}{2} \tan(x^2) + C$$

INTEGRAL PARSIAL

- ▶ Jika pengintegralan dengan menggunakan substitusi gagal, dimungkinkan menggunakan substitusi ganda atau **pengintegralan parsial**.
- ▶ Metode pengintegralan parsial ini didasarkan untuk turunan hasil kali dua fungsi,
- ▶ Andaikan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$ serta $y = u \cdot v$ maka turunannya;

$$y = u \cdot v$$

$$y' = uv' + vu'$$

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$dy = u dv + v du$$

Kemudian kita integralkan kedua ruasnya.

INTEGRAL PARSIAL

- ▶ Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan, diperoleh hasil:

$$\int dy = \int (udv + vdu)$$

$$y = \int u dv + \int v du$$

$$uv = \int u dv + \int v du$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

- ▶ Jadi, rumus umum integral parsial (integral tak tentu) adalah

$$\int u dv = uv - \int v du$$

- ▶ Sedangkan rumus integral parsial untuk integral tentu yaitu

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

Contoh 4:

- Tentukan hasil integral $\int x \cos x \, dx$

Penyelesaian:

Andaikan $u = x$ $dv = \cos x \, dx$

maka $du = dx$ $v = \sin x$

Sehingga;

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x}_v - \int \underbrace{\sin x}_v \underbrace{dx}_{du}$$

$$= x \sin x - (-\cos x) + C$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

Contoh 5:

► Carilah nilai $\int_1^2 \ln x \, dx$

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } u = \ln x \rightarrow du = \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

Maka,

$$\int_1^2 \ln x \, dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx$$

$$= 2 \ln 2 - \int_1^2 dx$$

$$= 2 \ln 2 - 1$$

Contoh 6:

- Tentukan hasil integral $\int x^2 \sin x \, dx$

Penyelesaian:

$$\text{Andaikan } u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx$$

$$dv = \sin x \, dx \rightarrow v = -\cos x$$

Sehingga;

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} &= \underbrace{x^2}_u \underbrace{(-\cos x)}_v - \int \underbrace{(-\cos x)}_v \underbrace{2x \, dx}_{du} \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \end{aligned}$$

Pada penintegralan ruas sebelah kanan yaitu $\int x \cos x \, dx$ perlu pengintegralan parsial lagi maka:

Lanjutan contoh 6:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$$

Misal: $u = x \rightarrow du = dx$ dan $dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \sin x$

Maka,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x \, dx) \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x - (-\cos x) + C) \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

- ▶ Soal tersebut merupakan contoh soal untuk integral parsial berulang.
- ▶ Jadi integral parsial bisa digunakan secara berulang kali sesuai dengan kebutuhan soal.

LATIHAN

Hitunglah integral fungsi-fungsi berikut ini.

1) $\int x(x^2 + 1)^4 dx$

2) $\int \frac{dx}{x^2+1}$

3) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

4) $\int x \sin 3x dx$

5) $\int \tan^{-1} x dx$

6) $\int x \sqrt{x+1} dx$

**SEKIAN
DAN
TERIMA KASIH**