Pertemuan ke-11

INTEGRAL (ANTITURUNAN)

Oleh:

Santi Arum Puspita Lestari, M.Pd

Teknik Informatika

Universitas Buana Perjuangan Karawang

INTEGRAL TAK TENTU

- Definisi

Misalkan *F* adalah **antiturunan** *f* pada selang I jika $D_x F(x) = f(x)$ pada I yakni $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I.

(Jika x suatu titik ujung $I, F'(x)$ hanya perlu berupa turunan sepihak.

- Jika *f* suatu turunan dari *F* maka $F'(x) = f(x)$ atau ditulis sebagai $d\big(F(x)\big) = f(x)dx$.
- Sebaliknya, *F* adalah antiturunan dari *f* ($\int$) dituliskan :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

INTEGRAL TAK TENTU

- Notasi untuk integral adalah sebaga berikut:

Jika *n* adalah sembarang bilangan rasional, kecuali −1, maka

$$\int \boldsymbol{x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C}$$

Misalkan $F(x) = x$ sehingga $F'(x) = 1$, maka akan berlaku

$$\int dx = x + C$$

Contoh 1:

- Hitunglah antiturunan dari fungsi $f(x) = x^4$.

<u>Penyelesaian:</u>

$$\int x^4\,dx = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$$

INTEGRAL TAK TENTU

Teorema (Kelinearan $\int \ldots dx$)

Andaikan f dan g mempunyai antiturunan (integral tak tentu) dan andaikan k suatu konstanta, maka:

- $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
- $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Contoh 2:

Hitunglah integral-integral beikut:

1) $\int (x^2 + 5)\ dx$

2) $\int (x - 3)^2\ dx$

3) $\int 2x\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\ dx$

4) $\int (3x^7 - 4x^5 + 5x^3 - 6x)\ dx$

5) $\int \frac{x^4 - \sqrt{x}}{x}\ dx$

Lanjutan Contoh 2:

<u>Penyelesaian</u>:

1) $\int (x^2 + 5)\, dx = \int x^2\, dx + \int 5\, dx$

$$= \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C_1 + 5x + C_2$$

$$= \frac{1}{3} x^3 + 5x + C$$

2) $\int (x-3)^2\ dx = \int (x^2 - 6x + 9)\, dx$

$$= \int x^2\, dx - \int 6x\, dx + \int 9 dx$$

$$= \frac{1}{2+1} x^{2+1} - \frac{6}{1+1} x^{1+1} + 9x + C$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - 3x^2 + 9x + C$$

Lanjutan Contoh 2:

3) $\int 2x\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\,dx = \int (2x^3 - 2)dx$

$$= \frac{2}{4}x^4 - 2x + C$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - 2x + C$$

4) $\int (3x^7 - 4x^5 + 5x^3 - 6x)\ dx$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}x^8 - \frac{4}{6}x^6 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{6}{2}x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}x^8 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 + C$$

Lanjutan Contoh 2:

$$5)\ \int \frac{x^4-\sqrt{x}}{x}\,dx = \int\left(x^{4-1} - x^{\frac{1}{2}-1}\right)dx$$

$$= \int\left(x^3 - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3+1}x^{3+1} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + C$$

INTEGRAL TENTU

Definisi :

Andaikan *f* suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tutup [a, b]. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_1$$

ada, dikatakan *f* adalah **terintegralkan** pada [a, b]. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut **integral tentu** (atau integral Riemann) *f* dari *a* ke *b*, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_1$$

INTEGRAL TENTU

- Secara umum $\int_a^b f(x)\,dx$ menyatakan **luas bertanda** pada daerah yang terkurung diantara kurva $y = f(x)$ dan sumbu x dalam selang [a,b].
- Hal ini berarti bahwa tanda positif dikaitkan untuk luas bagian-bagian yang berada di atas sumbu x dan tanda negatif dikaitkan untuk luas bagian-bagian yang berada di bawah sumbu x.
- Secara simbolik ditulis dengan:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_{atas} - A_{bawah}$$

- a → titik bawah integral (batas bawah pengintegralan)
- b → titik atas integral (batas atas pengintegralan)

TEOREMA DASAR KALKULUS

- Suatu hubungan yang memungkinkan untuk menghitung secara mudah nilai yang sebenarnya dari banyak integral tentu tanpa perlu menggunakan jumlah Riemann dinamakan ***Teorema Dasar Kalkulus.***

TEOREMA

- Andaikan *f* kontinu (karenanya terintegralkan) pada [a,b] dan andaikan *F* sembarang antiturunan dari *f*, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Penulisan bentuk $F(b) - F(a)$ dapat juga dituliskan dengan notasi kurung siku $[F(x)]_a^b$, dengan demikian teoremanya berubah menjadi;

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

Contoh 3:

Hitunglah nilai dari integral-integral berikut:

a) $\int_{1}^{3} x^2 \, dx$

b) $\int_{-1}^{2} (4x - 6x^2) \, dx$

Penyelesaian:

a) $\int_{1}^{3} x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \left(\frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3\right) = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

b) $\int_{-1}^{2} (4x - 6x^2) \, dx = [2x^2 - 2x^3]_{-1}^{2}$

$= [(2 \times 2^2) - (2 \times 2^3)] - [(2 \times (-1)^2) - (2 \times (-1)^3)]$

$= [8 - 16] - [2 + 2]$

$= -12$

Contoh 4:

- Hitunglah $\int_0^4 \sqrt{x^2 + x}(2x + 1)\, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 + x$, maka $du = (2x + 1)dx$

Sehingga;

$$\int \sqrt{x^2 + x}(2x + 1)\, dx = \int u^{1/2}\, du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

Substitusikan batasnya:

$$\int_0^4 \sqrt{x^2 + x}(2x + 1)\, dx = \left[\frac{2}{3}(x^2 + x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}(4^2 + 4)^{\frac{3}{2}}\right] - [0] = \frac{2}{3}(20)^{\frac{3}{2}} = 59{,}63$$

SIFAT-SIFAT INTEGRAL TENTU

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu dalam interval $a \leq x \leq b$, maka berlaku sifat-sifat berikut:

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

TEOREMA

(ATURAN PANGKAT YANG DIGENERALISASIKAN)

- Andaikan *g* suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan *n* suatu bilangan rasional yang bukan −1, maka:

$$\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

Contoh 5:

- Tentukan nilai integral dari $\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\, dx$

Penyelesaian:

Andaikan $g(x) = x^4 + 3x$ maka $g'(x) = 4x^3 + 3$ sehingga

$$\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\, dx = \frac{[g(x)]^{30+1}}{30+1} + C$$

$$= \frac{[x^4 + 3x]^{31}}{31} + C$$

SEKIAN
DAN
TERIMAKASIH