Pertemuan ke-4

LIMIT

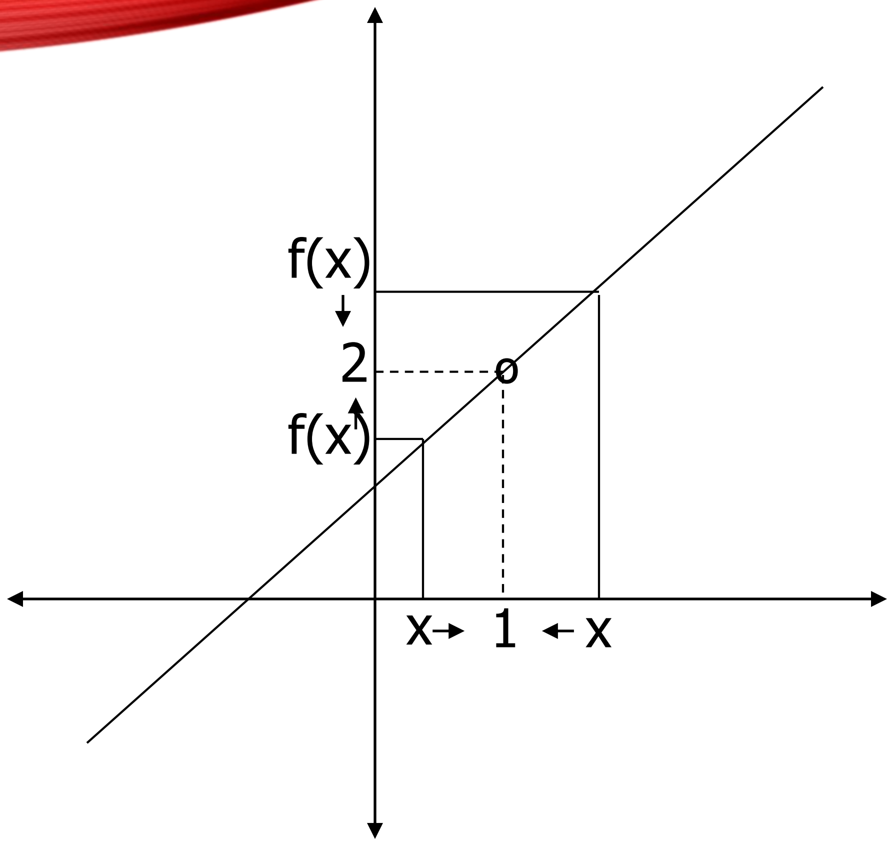
Oleh:
Santi Arum Puspita Lestari, M.Pd
Teknik Informatika
Universitas Buana Perjuangan Karawang

LIMIT FUNGSI DI SATU TITIK

- Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
- Fungsi tersebut tidak terdefinisi di $x = 1$, karena pada titik tersebut $f(x)$ berbentuk $\frac{0}{0}$
- Tetapi masih bisa ditanyakan beberapa nilai $f(x)$ jika x mendekati 1.
- Dengan bantuan kalkulator dapat diperoleh nilai $f(x)$ bila x mendekati 1, seperti pada tabel berikut:

x	0,9	0,99	0,999	0,999	$\rightarrow$ 1 $\leftarrow$	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	1,999	$\rightarrow$? $\leftarrow$	2,0001	2,001	2,01	2,1

SECARA GRAFIK



- Dari grafik di samping terlihat bahwa $f(x)$ mendekati 2 jika x mendekati 1.
- Secara matematis dapat dituliskan

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Definisi:

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat, tetapi berlainan dengan c, maka $f(x)$ dekat ke L.

LIMIT KIRI DAN LIMIT KANAN

X→ C

- Jika x menuju c dari arah kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari c) maka limit dinamakan limit kiri;

$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

C ← X

- Jika x menuju c dari arah kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari c) maka limit dinamakan limit kanan;

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

Hubungan antara limit dengan limit sepihak (kiri/kanan)

✓ $\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

✓ Jika $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ maka $\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada

CONTOH 1 :

1. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 3} 4x - 3$
2. Jika diketahui $f(x) = \begin{cases} x + 3, \ \text{untuk } x \leq 1 \\ -x + 1, \ \text{untuk } x > 1 \end{cases}$

   hitunglah $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ dan $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

<u>Penyelesaian:</u>

1. $\lim_{x \to 3} 4x - 3 = (4.3) - 3 = 12 - 3 = 9$
2. Untuk $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

   $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 3) = 1 + 3 = 4$$

   Untuk $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

   $$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x + 1) = -1 + 1 = 0$$

MENENTUKAN NILAI LIMIT

- Ada beberapa cara untuk menentukan limit, yaitu:

1. Metode **Substitusi** : mensubstitusikan nilai x pada limit fungsi.
2. Metode **Faktorisasi** : penyelesaian limit dengan cara memfaktorkan persamaan fungsi sehingga mempermudah dalam menentukan nilai limit fungsi.
3. Metode **Perkalian Sekawan** : metode ini digunakan jika limit pecahan terdapat bentuk akar.

CONTOH 2:

- Tentukan nilai dari limit berikut:

1. $\lim\limits_{x \to 3} 2x + 4$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$
3. $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

<u>Penyelesaian:</u>

1. $\lim\limits_{x \to 3} 2x + 4 = 2 \times 3 + 4 = 6 + 4 = 10$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x + 1)$

$$= 3 + 1 = 4$$

LANJUTAN CONTOH 2:

3. $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim\limits_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$$

$$= \lim_{x \to 9} \sqrt{x} + 3$$

$$= \sqrt{9} + 3$$

$$= 6$$

TEOREMA LIMIT UTAMA

Andaikan *n* bilangan bulat positif, k konstanta dan f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c, maka:

1. $\lim_{x \to c} k = k$
2. $\lim_{x \to c} x = c$
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
4. $\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
5. $\lim_{x \to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

TEOREMA LIMIT UTAMA

6. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, dimana $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$
7. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$
8. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, dimana $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ apabila n genap

CONTOH 3:

Jika diketahui $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ dan $g(x) = 5 - 3x$

Tentukan:

a. $\lim_{x \to 2} 3f(x)$ b. $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ c. $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{g(x)}$

<u>Penyelesaian:</u>

$$
\begin{aligned}
a.\quad \lim_{x \to 2} 3f(x) &= \lim_{x \to 2} 3(x^3 + 2x^2 - 1) \\
&= 3 \cdot \lim_{x \to 2}(x^3 + 2x^2 - 1) \\
&= 3 \cdot \left(\lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2} 2x^2 - \lim_{x \to 2} 1\right) \\
&= 3 \cdot (2^3 + 2 \cdot (2)^2 - 1) \\
&= 3 \cdot 15 \\
&= 45
\end{aligned}
$$

LANJUTAN CONTOH 3:

b. $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{2^3+2(2)^2-1}{5-3(2)} = \frac{8+8-1}{5-6} = -15$

c. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{g(x)} &= \lim_{x\to 2} \sqrt[3]{5-3x}\\ &= \sqrt[3]{5-3(2)}\\ &= \sqrt[3]{-1}\\ &= -1\end{aligned}$$

CONTOH 4:

- Carilah $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ jika diketahui fungsi

$$f(x) = 2x + 3$$

<u>Penyelesaian:</u>

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2(x+h)+3)-f(2x+3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h+3)-(2x+3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+3-2x-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2$$

$$= 2$$

LIMIT TAK HINGGA

- Misalkan $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, maka $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \cdots$

i. $+\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah atas

ii. $-\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah bawah

iii. $+\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah bawah

iv. $-\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah atas

Catatan:

- $g(x) \to 0$ dari arah atas maksudnya $g(x)$ menuju 0 dari nilai $g(x)$ positif.
- $g(x) \to 0$ dari arah bawah maksudnya $g(x)$ menuju 0 dari nilai $g(x)$ negatif.

CONTOH 5:

- $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1}$

$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2 > 0$, $g(x) = x - 1$ akan menuju 0 dari arah bawah karena $x \to 1$ dari kiri berarti x lebih kecil dari 1, akibatnya $x - 1$ akan bernilai negatif.

Sehingga $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$

- $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2 > 0$, $g(x) = x^2 - 1$ akan menuju 0 dari arah atas karena $x \to -1$ dari kiri berarti x lebih kecil dari –1, tapi bilangan negatif yang lebih kecil dari –1 jika dikuadratkan lebih besar dari 1 sehingga $x^2 - 1$ bernilai positif.

Sehingga $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$

LIMIT DI TAK HINGGA

- Misalkan $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dengan daerah asalnya $D_f = \{x | x \in R, x \neq 0\}$.
- Nilai $f(x)$ untuk nilai x yang semakin besar dapat dilihat pada tabel berikut:

x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	1	–1	1
2	0,25	–2	0,25
5	0,04	–5	0,04
10	0,01	–10	0,01
100	0,0001	–100	0,0001
…	…	…	…
∞	0	–∞	0

LIMIT DI TAK HINGGA

- Berdasarkan tabel sebelumnya, terlihat bahwa apabila nilai x semakin besar maka nilai fungsi $f(x)$ akan mendekati 0.
- Sehingga dapat ditunjukkan bahwa;

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Atau

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

CONTOH 6:

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+5x}{6x^3+7x^2-8x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3}+\frac{7x^2}{x^3}-\frac{8x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{5}{x^2}}{6+\frac{7}{x}-\frac{8}{x^2}}=\frac{3-0+0}{6+0-0}=\frac{1}{2}$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2-10x}{3x^4+5x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^4}+\frac{4x^2}{x^4}-\frac{10x}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{5x^2}{x^4}+\frac{x}{x^4}}=\frac{0+0-0}{3+0+0}=0$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\frac{2-0+0}{0-0+0}=\frac{2}{0}=\infty$$

SIFAT LIMIT TAK HINGGA

- Jika derajat $f(x) =$ derajat $g(x)$, maka;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{koefisien pangkat derajat tertinggi dari } f(x)}{\text{koefisien pangkat derajat tertinggi dari } g(x)}$$

- Jika derajat $f(x) >$ derajat $g(x)$ dan koefisien pangkat tertinggi $f(x)$ bernilai positif, maka

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

- Jika derajat $f(x) >$ derajat $g(x)$ dan koefisien pangkat tertinggi $f(x)$ bernilai negatif , maka

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

- Jika derajat $f(x) <$ derajat $g(x)$, maka;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

CONTOH 7 :

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+6x+2} - \sqrt{x^2-4x+1} \cdot \frac{(\sqrt{x^2+6x+2}+\sqrt{x^2-4x+1})}{(\sqrt{x^2+6x+2}+\sqrt{x^2-4x+1})} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2+6x+2)-(x^2-4x+1)}{\sqrt{x^2+6x+2}+\sqrt{x^2-4x+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{10x+1}{\sqrt{x^2+6x+2}+\sqrt{x^2-4x+1}}\text{, karena}$$

pangkat tertinggi pembilang = 1

Dan pangkat tertinggi penyebut = 1 karena $\sqrt{x^2} = x$, maka:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{10+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{10}{2} = 5$$

CONTOH 8:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{2x^2+3x+1}\,.\,\frac{(\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{2x^2+3x+1})}{(\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{2x^2+3x+1})}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x-1)-(2x^2+3x+1)}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{2x^2+3x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-x-2}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{2x^2+3x+1}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+\sqrt{\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

LATIHAN

Tentukan nilai dari limit berikut:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-4}{x^2+1}$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3x^2-5x-12}{x^2-9}$
4. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x^2-7x+5}{10-4x+3x^2}$
6. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+3x} - x + 2$

SEKIAN DAN TERIMA KASIH