

Pertemuan ke-10

APLIKASI TURUNAN MAKSIMUM DAN MINIMUM

Oleh:

Santi Arum Puspita Lestari, M.Pd

Teknik Informatika

Universitas Buana Perjuangan Karawang



NILAI MAKSIMUM & MINIMUM FUNGSI

Masalah penggunaan diferensial pada kehidupan sehari-hari:

- Seorang petani ingin memilih kombinasi tanaman yang dapat menghasilkan keuntungan terbesar.
 - Seorang dokter ingin memilih dosis terkecil suatu obat yang akan menyembuhkan penyakit tertentu.
 - Seorang kepala pabrik akan menekan sekecil mungkin biaya distribusi barangnya.
 - Dll
-
- Masalah-masalah tersebut dapat dirumuskan dengan menggunakan pemaksimuman ataupun peminimuman suatu fungsi pada suatu himpunan.



NILAI MAKSIMUM & MINIMUM FUNGSI

■ Definisi

Andaikan S daerah asal dari f mengandung titik c , maka dapat dikatakan bahwa:

1. $f(c)$ adalah **nilai maksimum** f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S .
2. $f(c)$ adalah **nilai minimum** f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S .
3. $f(c)$ adalah **nilai ekstrim** f pada S jika $f(c)$ adalah nilai maksimum atau nilai minimum.



NILAI MAKSIMUM & MINIMUM FUNGSI

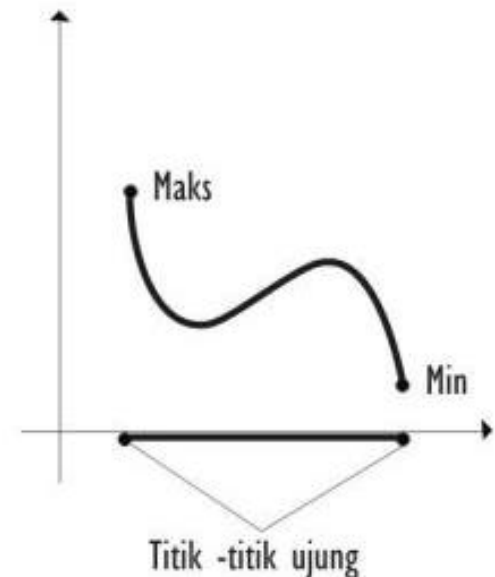
■ TEOREMA KEBERADAAN MAKS-MIN

Jika f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum di sana.

TITIK UJUNG

1. $I = [a, b]$ memuat kedua titik ujungnya.
2. $I = [a, b)$ hanya memuat titik ujung kiri.
3. $I = (a, b)$ tidak memuat sama sekali titik ujung.

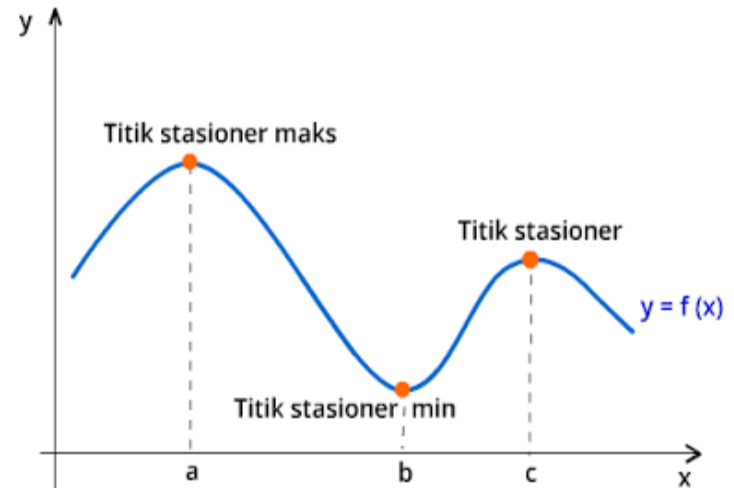
Nilai Ekstrem dari fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup sering kali terjadi pada titik-titik ujung.



NILAI MAKSIMUM & MINIMUM FUNGSI

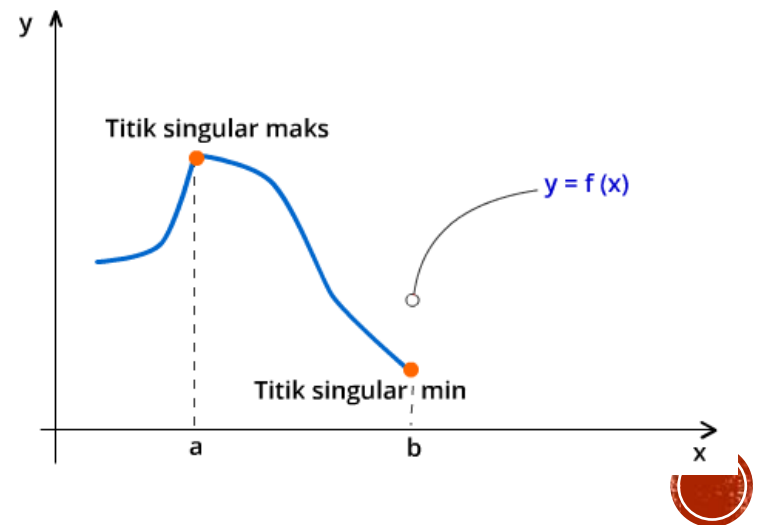
TITIK STASIONER

- Jika c adalah sebuah titik tempat $f'(c) = 0$, maka c dinamakan **titik stasioner**.
- Nilai-nilai ekstrem sering terjadi pada titik stasioner.



TITIK SINGULAR

- ❖ Jika c adalah titik dalam I di mana f' tidak ada maka c dinamakan **titik singular**.
- ❖ Titik c merupakan titik di mana grafik f bersedut tajam, garis singgung tegak atau berupa loncatan.



NILAI MAKSIMUM & MINIMUM FUNGSI

- Sebuah fungsi $y = f(x)$ kontinu dalam selang $a \leq x \leq b$.
- Nilai ekstrim fungsi tersebut diperoleh untuk $y' = 0$, dan akan diperoleh nilai x_i sebagai absis dari titik ekstrim dan dengan mensubstitusikan absis tersebut akan diperoleh ordinat titik ekstrim y_i .
- Misal koordinat titik ekstrim $y = f(x)$ adalah $P_i(x_i, y_i)$ maka untuk $x = x_i$ menjadi:
 1. $y'' = \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_i} > 0$, berarti titik P_i sebagai titik ekstrim minimum.
 2. $y'' = \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_i} < 0$, berarti titik P_i sebagai titik ekstrim maksimum.
 3. $y'' = \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_i} = 0$, berarti bukan minimum dan maksimum.



CONTOH 1:

Diketahui sebuah fungsi $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, tentukanlah:

- Nilai maksimum/minimum fungsi
- Interval fungsi naik dan turun.

Penyelesaian:

- Menentukan titik-titik ekstrim fungsi

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$

$$y' = 0$$

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad \text{dibagi 6}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = 1 \text{ dan } x = -2$$



LANJUTAN CONTOH 1:

- Menentukan nilai maks / min

Nilai maks/min diperoleh pada y'' (turunan kedua) sehingga

$$y' = 6x^2 + 6x - 12$$

$$y'' = 12x + 6$$

Substitusikan titik ekstrim pada y''

- Untuk $x = 1$

$$y'' = 12 \cdot (1) + 6 = 18$$

Karena $y'' = 18 > 0$, maka fungsi memiliki nilai minimum.

- Untuk $x = -2$

$$y'' = 12 \cdot (-2) + 6 = -18$$

Karena $y'' = -18 < 0$, maka fungsi memiliki nilai maksimum.



LANJUTAN CONTOH 1:

- Jadi, $x = 1$ adalah pembuat fungsi menjadi minimum dan $x = -2$ adalah pembuat fungsi menjadi maksimum.
- Besar nilai maks/min fungsi diperoleh dengan mensubstitusikan titik esktrim pada fungsi awal.
- $x = 1 \rightarrow y_{min} = 2 \cdot (1)^3 + 3 \cdot (1)^2 - 12 \cdot (1) + 1 = -6$
Nilai minimum fungsi adalah -6 .
- $x = -2 \rightarrow y_{maks} = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 1 = 21$
Nilai maksimum fungsi adalah 21 .



LANJUTAN CONTOH 1:

- Interval fungsi naik jika $f'(x) > 0$

$$x^2 + x - 2 > 0$$

$$(x - 1)(x + 2) > 0$$

$$x = 1 \text{ dan } x = -2$$

$$x > 1 \text{ dan } x < -2$$

Jadi, fungsi akan naik pada interval $x < -2$ dan $x > 1$

- Interval fungsi turun jika $f'(x) < 0$

$$x^2 + x - 2 < 0$$

$$(x - 1)(x + 2) < 0$$

$$x = 1 \text{ dan } x = -2$$

$$-2 < x < 1$$

Jadi, fungsi akan turun pada interval $-2 < x < 1$



CONTOH 2:

- Suatu perusahaan menghasilkan x produk dengan biaya sebesar $(9000 + 1000x + 10x^2)$ rupiah. Jika semua hasil produk perusahaan tersebut habis dijual dengan harga Rp5.000,00 untuk satu produknya. Tentukan besar laba maksimum yang diperoleh perusahaan tersebut.

Penyelesaian:

$$\text{Biaya produksi} = 9000 + 1000x + 10x^2$$

$$\text{Harga jual} = 5000x$$

$$\begin{aligned}\text{Sehingga laba} &= f(x) = \text{harga jual} - \text{biaya produksi} \\ &= 5000x - (9000 + 1000x + 10x^2) \\ &= -10x^2 + 4000x - 9000\end{aligned}$$



LANJUTAN CONTOH 2:

- Laba maksimum diperoleh jika $f'(x) = 0$, maka

$$f(x) = -10x^2 + 4000x - 9000$$

$$f'(x) = -20x + 4000 = 0$$

$$x = \frac{-4000}{-20}$$

$x = 200$ sehingga jumlah produk terjual sebanyak 200.

Untuk $x = 200$ produk diperoleh laba maksimum:

$$f(x)_{maks} = -10 \cdot (200)^2 + 4000 \cdot (200) - 9000$$

$$f(x)_{maks} = -400000 + 800000 - 9000$$

$$f(x)_{maks} = 391000$$

Jadi, laba maksimum yang diperoleh perusahaan

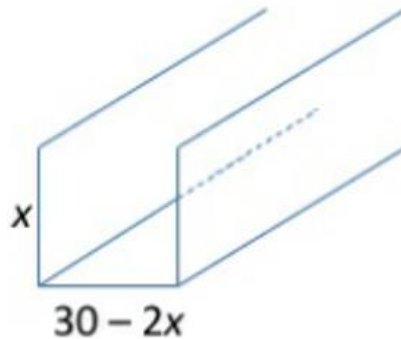
Rp391.000,00



CONTOH 3:

- Suatu pelat yang lebarnya 50 cm akan dibuat talang air dengan melipat kedua sisinya sama Panjang. Agar talang air itu dialiri asir sebanyak-banyaknya, tentukan ukuran penampang terak talang tersebut.

Penyelesaian:



Misalkan x = Panjang sisi yang dapat dilipat

Maka ukuran penampang talang tersebut:

$$\text{Panjang} = 30 - 2x$$

$$\text{Lebar} = x$$



LANJUTAN CONTOH 3

- Agar talang dapat dialiri air sebanyak-banyaknya maka luas talang harus maksimal.
- Dengan $p = 30 - 2x$ dan $l = x$ diperoleh luas $= (30 - 2x)x$
- Jadi model matematika untuk luas penampang talang:

$$A = 30x - 2x^2$$

$$A = -2x^2 + 30x$$

$$A'(x) = -4x + 30$$

$$A''(x) = -4$$

Titik kritis : $A'(x) = 0$

$$-4x + 30 = 0$$

$$x = \frac{-30}{-4} = 7,5$$



LANJUTAN CONTOH 3

maka $A''(x) = -4$

$$A''(7,5) = -4 \text{ hasilnya } < 0$$

Berarti tercapai nilai maksimum.

- Jadi agar luas penampang talang itu maksimum maka ukurannya:

$$\text{Panjang} = 30 - 2(7,5) = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Lebar} = 7,5 \text{ cm}$$



KECEPATAN DAN PERCEPATAN

- Turunan bisa diaplikasikan untuk menghitung kecepatan dan percepatan suatu benda.
- Terdapat perbedaan teknik antara istilah kecepatan (*velocity*) dan laju (*speed*).
- Kecepatan mempunyai tanda yang dihubungkan, mungkin positif atau negatif.
- Sedangkan, laju merupakan nilai mutlak kecepatan.
- Laju perubahan kecepatan terhadap waktu disebut percepatan.

Turunan pertama \rightarrow kecepatan (v).

Turunan kedua \rightarrow percepatan (a).



CONTOH 4:

- Sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya s memenuhi $s = 2t^2 - 12t + 8$, dengan s diukur dalam centimeter dan t dalam detik ($t \geq 0$). Tentukan kecepatan benda apabila $t = 1$ dan $t = 6$. Kapan kecepatannya 0 ? Serta berapa percepatan benda tersebut ?

Penyelesaian:

$$s = 2t^2 - 12t + 8$$

$$\text{Maka kecepatan } v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 - 12t + 8) = 4t - 12$$

Jadi,

$$v(1) = 4(1) - 12 = -8 \text{ cm/detik}$$

$$v(6) = 4(6) - 12 = 12 \text{ cm/detik}$$



LANJUTAN CONTOH 4:

Kecepatan akan 0 jika $v = 0$;

$$v = 0$$

$$4t - 12 = 0$$

$$4t = 12$$

$$t = \frac{12}{4}$$

$$t = 3 ,$$

Jadi, kecepatan benda akan nol saat detik ketiga.

Percepatan benda tersebut;

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{ds}{dt} (2t^2 - 12t + 8) = \frac{d}{dt} (4t - 12) = 4$$

Jadi, percepatan benda tersebut adalah 4 cm/detik.



PENAKSIRAN GALAT (ERROR)

- Permasalahan yang sering dijumpai pada ilmu pengetahuan adalah terjadinya galat (error).
- Seorang peneliti mengukur variabel x yang bernilai x_0 dengan galat yang mungkin berukuran $\pm\Delta x$.
- Nilai x_0 kemudian digunakan menghitung nilai y_0 untuk y yang tergantung pada x .
- Nilai y_0 untuk terpengaruh oleh galat dalam y , tetapi seberapa buruk ?
- Prosedur baku untuk menaksir galat bisa menggunakan diferensial.



CONTOH 5:

- Rusuk kubus diukur sebagai 11,4 cm dengan galat yang mungkin $\pm 0,05$ cm. hitunglah volume kubus dan berikan taksiran untuk galat dalam nilai ini.

Penyelesaian:

Volume kubus dengan rusuknya x adalah $V = x^3$

Jadi, $dV = 3x^2 dx$

Jika $x = 11,4$ dan $dx = 0,05$ maka;

$$V = (11,4)^3 \approx 1.482$$

$$\text{dan } dV = 3(11,4)^2(0,05) \approx 19$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa volume kubus adalah $1.482 \pm 19 \text{ cm}^3$



LATIHAN

1. Carilah luas persegi panjang terbesar yang dapat diletakkan di dalam setengah lingkaran berjari-jari r
2. Sebuah kotak dengan bidang alas persegi (bujur sangkar) akan dibuat agar dapat menampung 16 liter benda cair. Jika biaya pembuatan per satuan luas dari bidang alas dan atas dari kotak dua kali biaya pembuatan bidang sisi tegaknya, berapakah ukuran kotak yang biaya pembuatannya paling murah.
3. Sebuah peluru ditembakkan tegak lurus ke atas dari permukaan tanah dan pada saat t detik ($t \geq 0$) tingginya adalah $f(t) = 60t - 5t^2$ meter di atas permukaan tanah
 - a. Tentukan kecepatan peluru setelah ditembakkan 2 detik dan 9 detik.
 - b. Tentukan saat peluru mencapai titik tertinggi beserta panjang lintasannya.
 - c. Tentukan saat peluru mencapai tanah kembali, kecepatan, dan percepatannya pada saat itu.
4. Kota A terletak 3 km dari garis pantai yang lurus dan kota B terletak 4 km dari titik di pantai yang terdekat dari A . Pemerintah daerah setempat akan memasang kabel telepon dari A ke B . Jika besar biaya pemasangan kabel setiap kilometer melewati jalan laut dua kali besar biaya pemasangan kabel lewat darat. Tentukan letak titik di pantai agar biaya pemasangan kabel telepon dari A ke B semurah mungkin.



**SEKIAN
DAN
TERIMA KASIH**

**TERIMA KASIH
DAN
SEKIAN**

