Pertemuan ke-15

APLIKASI INTEGRAL VOLUME BENDA

Oleh:

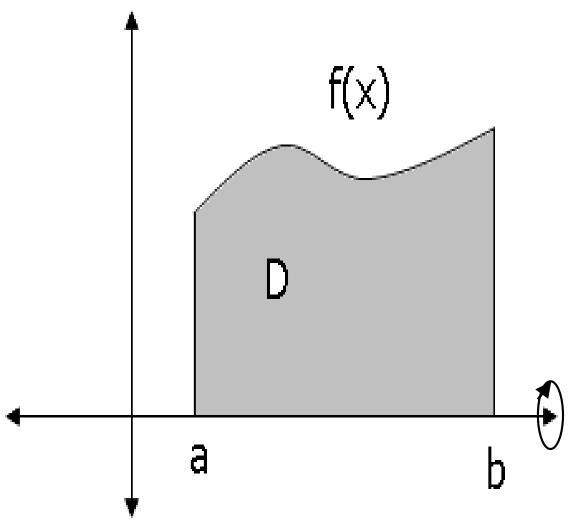
Santi Arum Puspita Lestari, M.Pd

Teknik Informatika

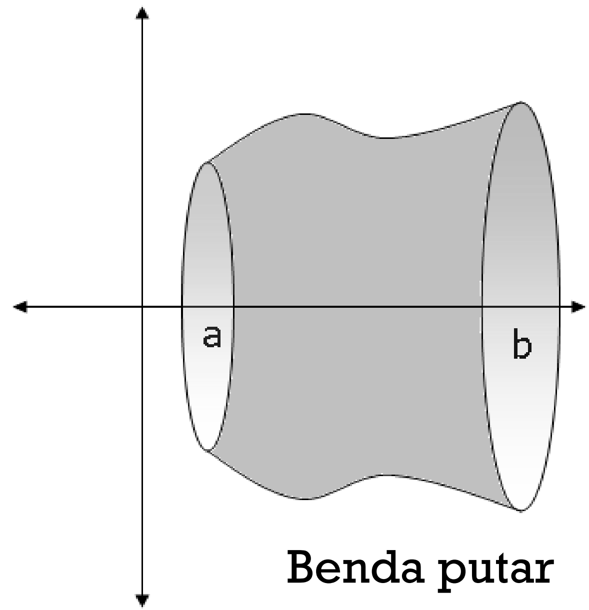
Universias Buana Perjuangan Karawang

METODE CAKRAM

1) Daerah $D = \{(x, y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x)\}$ **diputar terhadap sumbu** x.



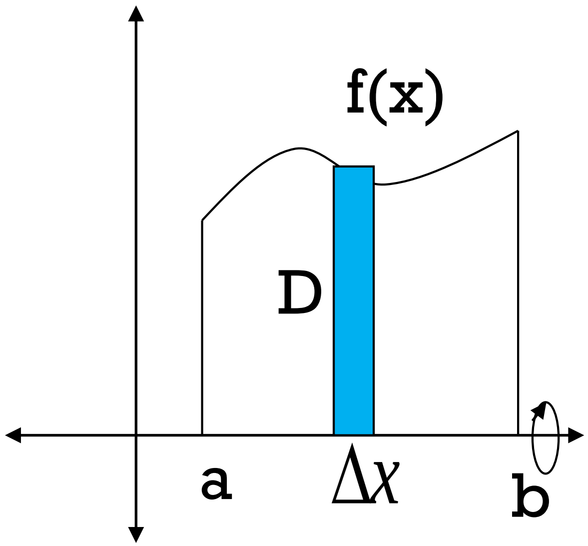
Daerah D

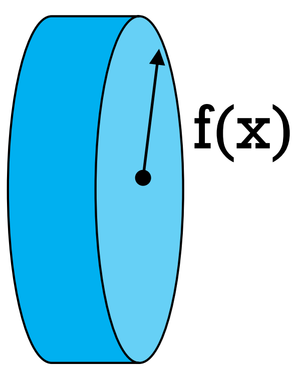


Benda putar

- Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan irisan, hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.

METODE CAKRAM





- Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $f(x)$ dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δx dan jari-jari $f(x)$, sehingga;

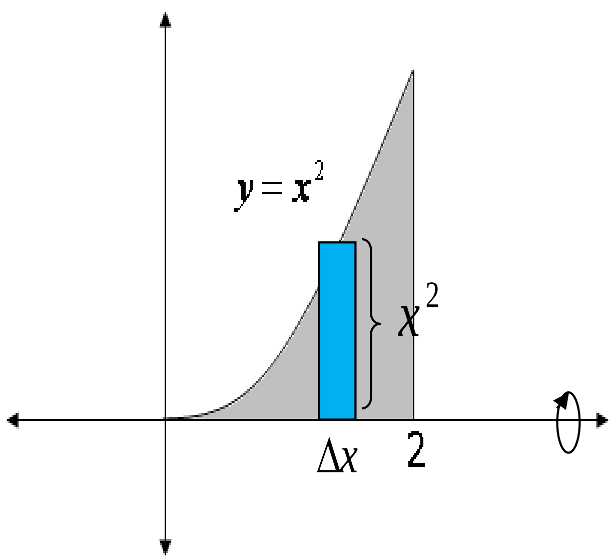
$$\Delta V \approx \pi f^2(x)\Delta x$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

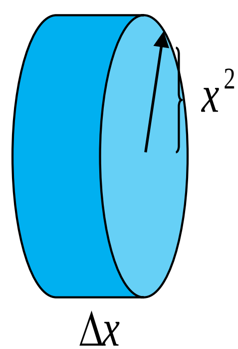
CONTOH 1:

- Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis $x = 2$ diputar terhadap sumbu x.

Penyelesaian:



Jika irisan diputar terhadap sumbu x akan diperoleh cakram dengan jari-jari x^2 dan tebal Δx,



Sehingga;

$$\Delta V \approx \pi (x^2)^2 \Delta x$$
$$= \pi x^4 \Delta x$$

LANJUTAN CONTOH 1:

Volume benda putar:

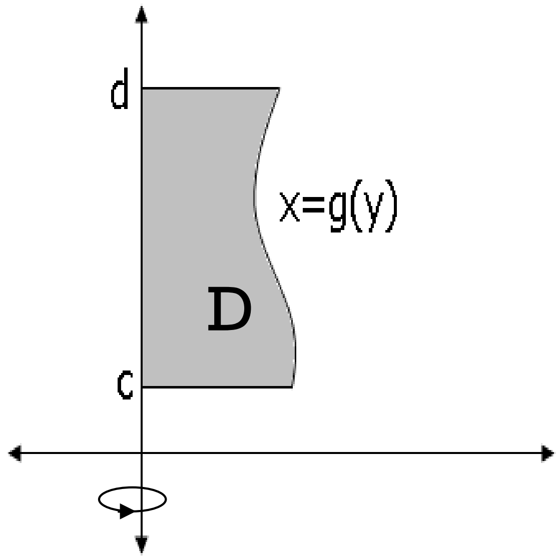
$$V = \pi \int_0^2 x^4\, dx = \pi \left[\frac{1}{5} x^5\right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{1}{5} 2^5\right) - 0\right] = \pi \left(\frac{32}{5}\right)$$

$$= \frac{32}{5}\pi$$

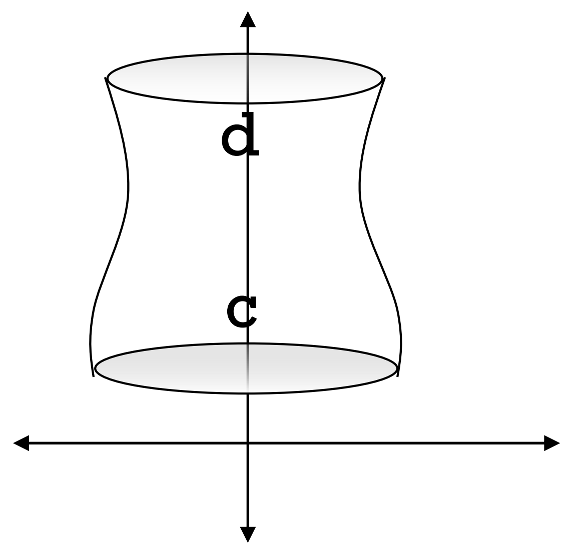
Jadi, volume benda putar nya adalah $\frac{32}{5}\pi$ satuan volume.

METODE CAKRAM

2) Daerah $D = \{(x,y)|c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq g(y)\}$ **diputar terhadap sumbu y**.



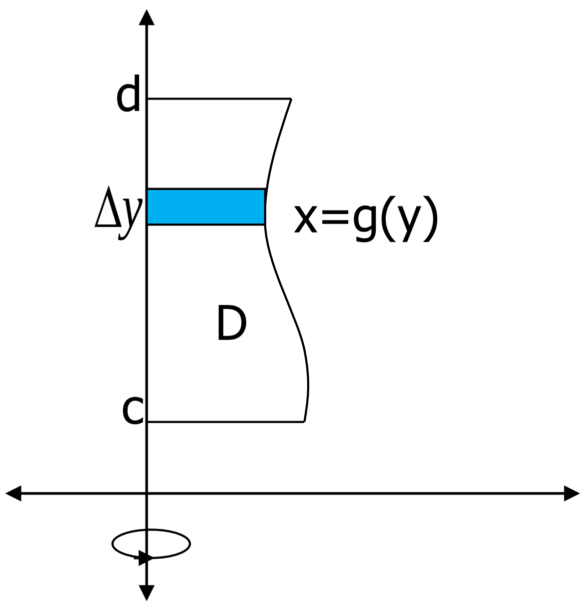
Daerah D

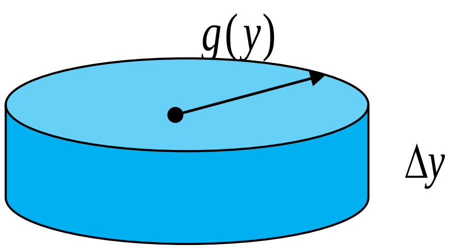


Benda putar

- Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.

METODE CAKRAM





- Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $g(y)$ dan alas Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δy dan jari-jari $g(y)$.
- Sehingga;

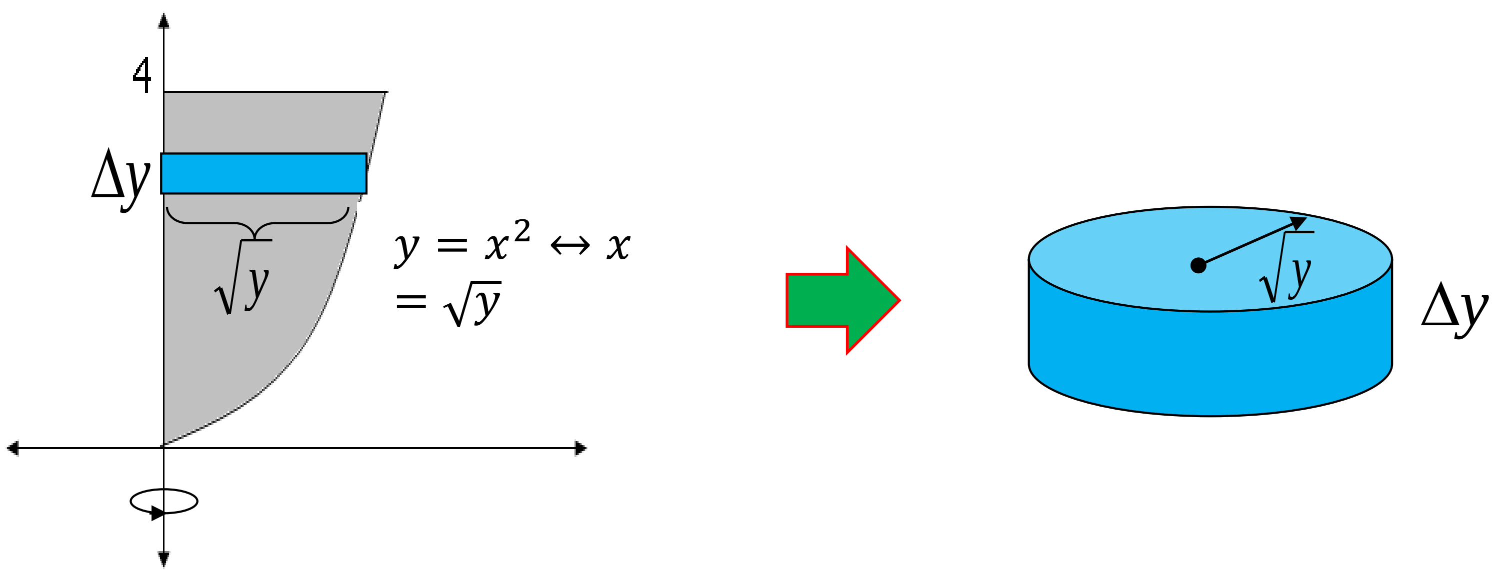
$$\Delta V \approx \pi g^2(y)\Delta y$$

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\, dy$$

CONTOH 2:

- Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ garis y = 4, dan sumbu y diputar terhadap sumbu y.

<u>Penyelesaian:</u>



LANJUTAN CONTOH 2:

- Jika irisan dengan tinggi $\sqrt{y}$ dan tebal Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh cakram dengan jari-jari $\sqrt{y}$ dan tebal Δy.
- Sehingga;

$$\Delta V = \pi(\sqrt{y})^2 \Delta y = \pi y \Delta y$$

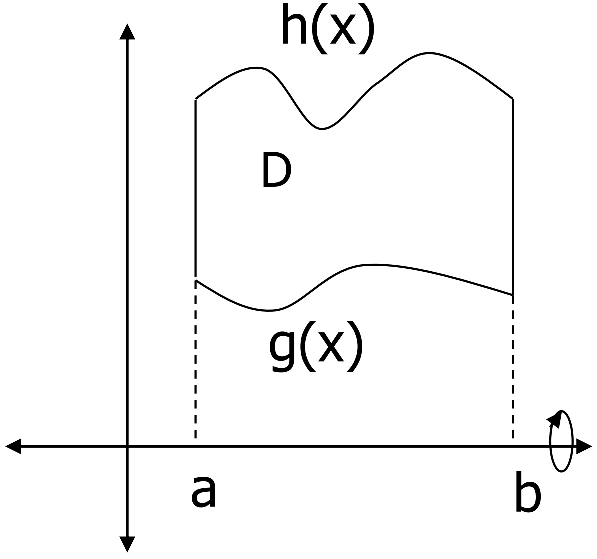
Volume benda putar:

$$V = \pi \int_0^4 y\, dy = \left[\frac{\pi}{2} y^2\right]_0^4 = \left(\frac{\pi}{2} 4^2\right) - 0 = \frac{\pi}{2} 16 = 8\pi$$

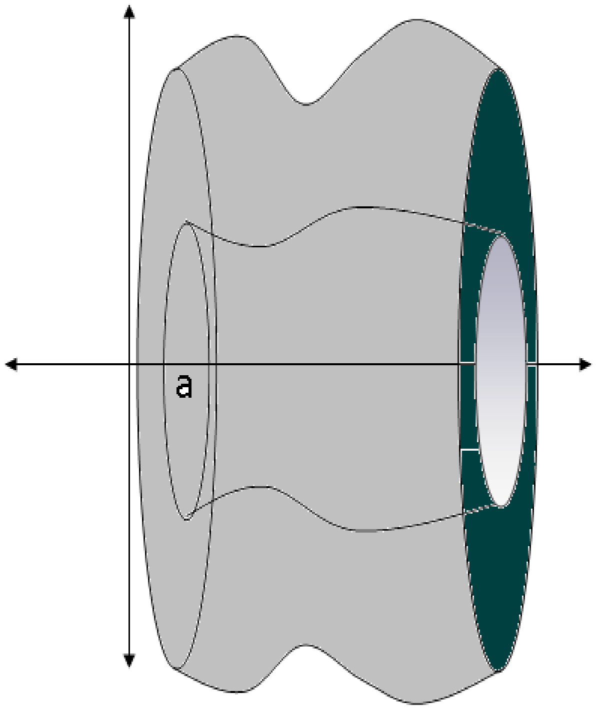
Jadi, volume benda tersebut adalah 8π satuan volume.

METODE CINCIN

- Daerah $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ **diputar terhadap sumbu x.**

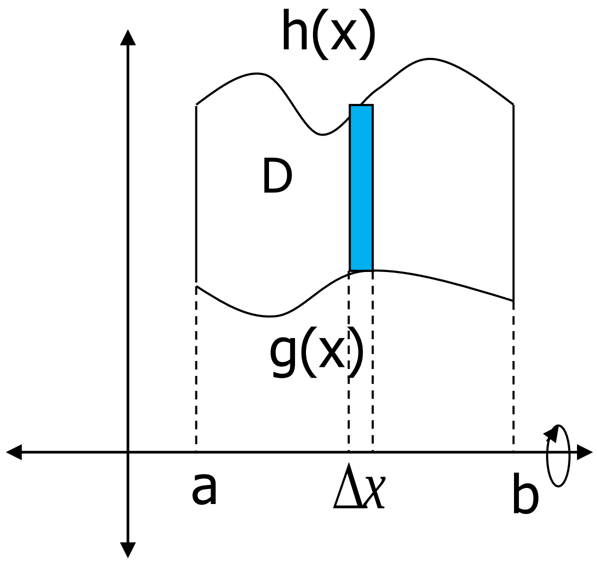


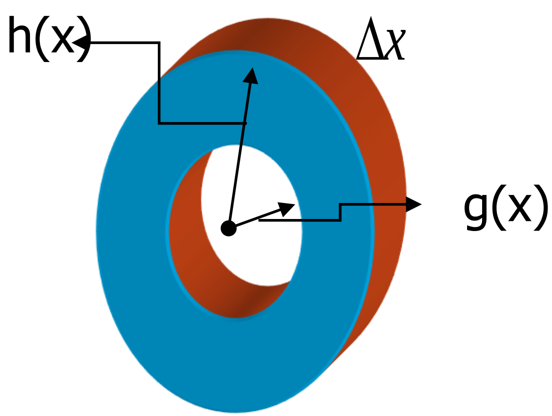
Daerah D



Benda putar

METODE CINCIN





- Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $h(x) - g(x)$ dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cincin dengan tebal Δx dan jari-jari luar $h(x)$ dan jari-jari dalam $g(x)$.
- Sehingga;

$$\Delta V \approx \pi(h^2(x) - g^2(x))\Delta x$$

$$V = \pi \int_a^b (h^2(x) - g^2(x))\, dx$$

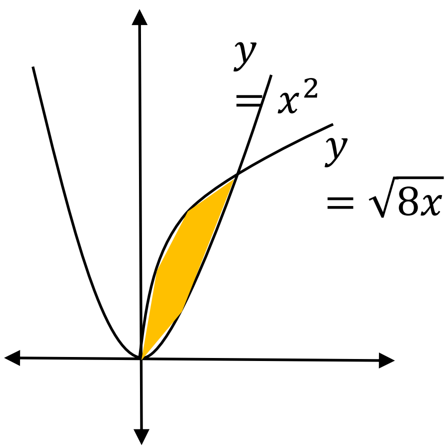
CONTOH 3:

Tentukan volume benda pejal yang dibentuk dengan memutar mengelilingi sumbu x, daerah yang dibatasi oleh parabola-parabola $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$.

Penyelesaian:

Diketahui : $y = x^2$

$y^2 = 8x \rightarrow y = \sqrt{8x}$



Titik potong

$x^2 = \sqrt{8x}$

$x^2 - \sqrt{8x} = 0$

dikuadratkan

$x^4 - 8x = 0$

$x(x^3 - 8) = 0$

$x = 0$ dan $x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8} = 2$

LANJUTAN CONTOH 3:

- Sehingga volume benda ;

$$V = \pi \int_0^2 \left(\left(\sqrt{8x}\right)^2 - (x^2)^2 \right) dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (8x - x^4)\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{8}{2} x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2$$

$$V = \pi \left[\left(4 \cdot 2^2 - \frac{1}{5} \cdot 2^5 \right) - 0 \right]$$

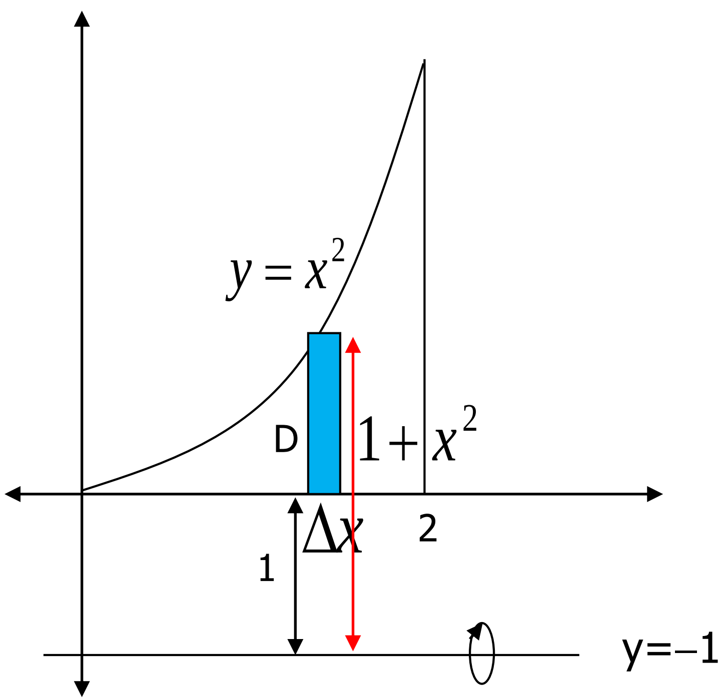
$$V = \pi \left(16 - \frac{32}{5} \right)$$

$$V = \frac{48}{5} \pi$$

Jadi, volume benda tersebut adalah $\frac{48}{5}\pi$ satuan volume

CONTOH 4:

- Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis $x = 2$ diputar terhadap garis $y = -1$.



Jika irisan diputar terhadap garis $y = 1$
Akan diperoleh suatu cincin dengan
jari-jari dalam 1 dan
jari-jari luar $1 + x^2$
Sehingga;

$$\Delta V = \pi\left((x^2+1)^2 - 1^2\right)\Delta x$$
$$= \pi(x^4 + 2x^2 + 1 - 1)\Delta x$$
$$= \pi(x^4 + 2x^2)\Delta x$$

LANJUTAN CONTOH 4:

- Jadi, volume benda putar:

$$V = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2)\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$

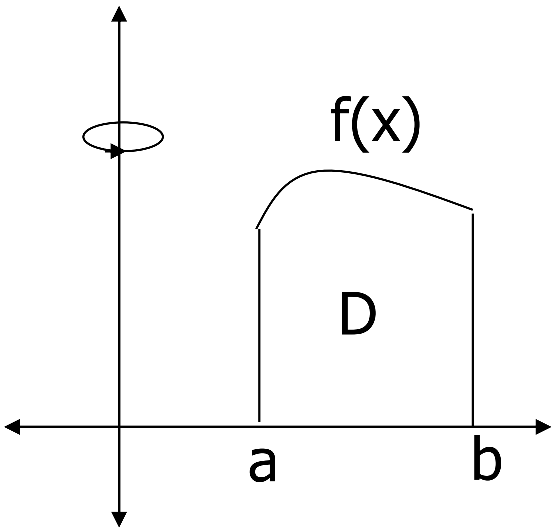
$$V = \pi \left[\left(\frac{1}{5}2^5 + \frac{2}{3}2^3\right) - 0\right]$$

$$V = \pi \left(\frac{186}{15}\right) = \frac{186}{15}\pi$$

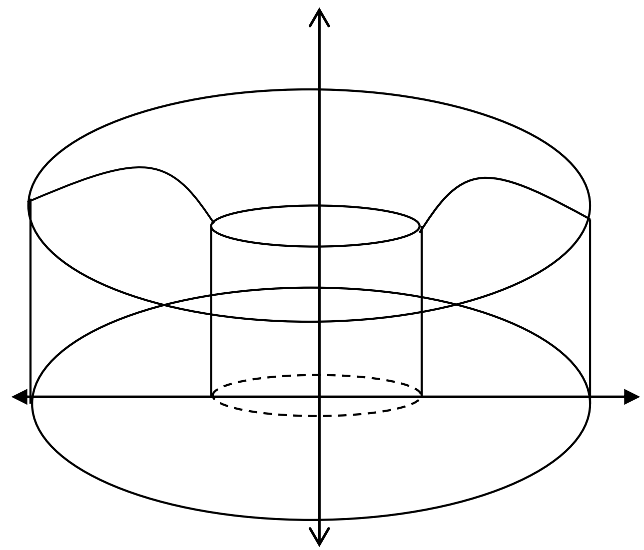
Jadi, Volume benda tersebut adalah $\frac{186}{15}\pi$ satuan luas

METODE KULIT TABUNG

- Daerah $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ **diputar terhadap sumbu x.**

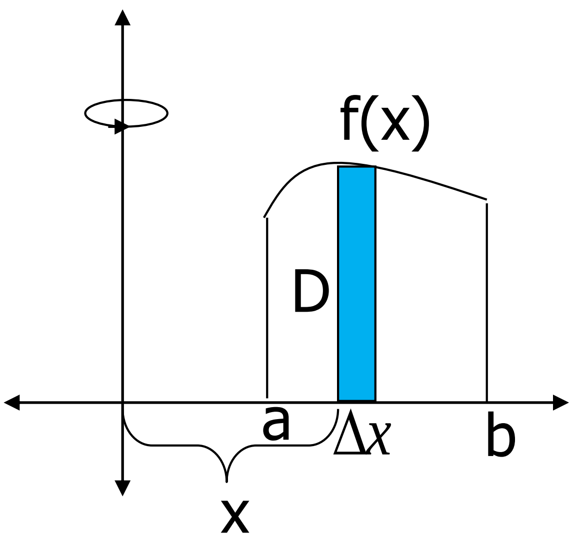


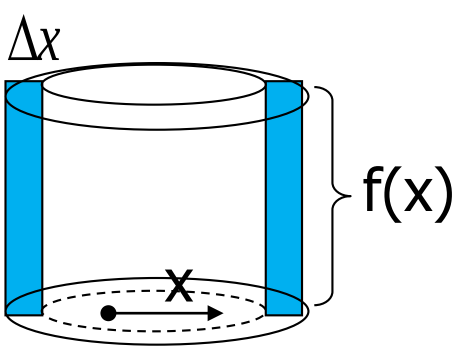
Daerah D



Benda putar

METODE KULIT TABUNG





- Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $f(x)$ dan alas Δx serta berjarak x dari sumbu y diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu kulit tabung dengan tinggi $f(x)$, jari-jari x, dan tebal Δx.
- Sehingga;

$$\Delta V \approx 2\pi x f(x) \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

CONTOH 5:

- Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sumbu x, $x = 1$, dan $x = 4$, diputar mengelilingi sumbu y. Tentukan volume benda yang terbentuk.

<u>Penyelesaian:</u>

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}$$

$$V = 2\pi \int_1^4 \left(x \cdot x^{-1/2}\right) dx$$

$$V = 2\pi \int_1^4 \left(x^{1/2}\right) dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_1^4$$

$$V = 2\pi \left[\left(\frac{2}{3}(4)^{3/2}\right) - \left(\frac{2}{3}(1)^{3/2}\right)\right]$$

$$V = 2\pi \left[\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right]$$

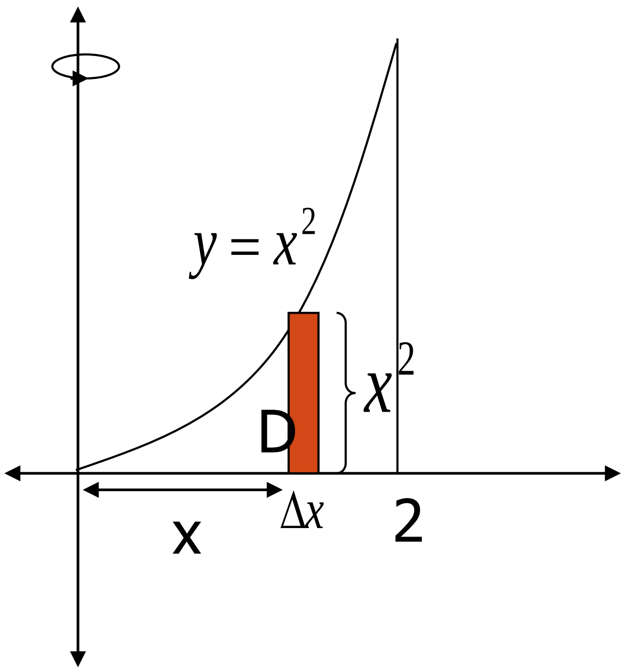
$$V = 2\pi \left(\frac{14}{3}\right)$$

$$V = \frac{28}{3}\pi$$

Jadi, volume benda yang terbentuk $= \frac{28}{3}\pi$ satuan volume

CONTOH 6:

- Tentukan volume benda putar yang trejadi jika daerah D yang dibatasu oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis $x = 2$ diputar terhadap sumbu y.



Jika irisan dengan tinggi x^2, tebal Δx dan berjarak x dari sumbu y diputar terhadap sumbu y akan diperoleh kulit tabung dengan tinggi x^2, tebal Δx dan jari-jari x

Sehingga;

$$\Delta V = 2\pi x x^2$$
$$= 2\pi x^3 \Delta x$$

LANJUTAN CONTOH 6:

- Jadi, volume benda putar:

$$V = 2\pi \int_0^2 x^3\,dx$$

$$V = \left[\frac{\pi}{2}x^4\right]_0^2$$

$$V = \left(\frac{\pi}{2}2^4\right) - 0$$

$$V = \frac{\pi}{2}16$$

$$V = 8\pi$$

Jadi, volume banda tersebut adalah 8π satuan volume

SEKIAN

DAN

TERIMA KASIH