Pertemuan ke-14

APLIKASI INTEGRAL LUAS SUATU DAERAH

Oleh:

Santi Arum Puspita Lestari, M.Pd

Teknik Informatika

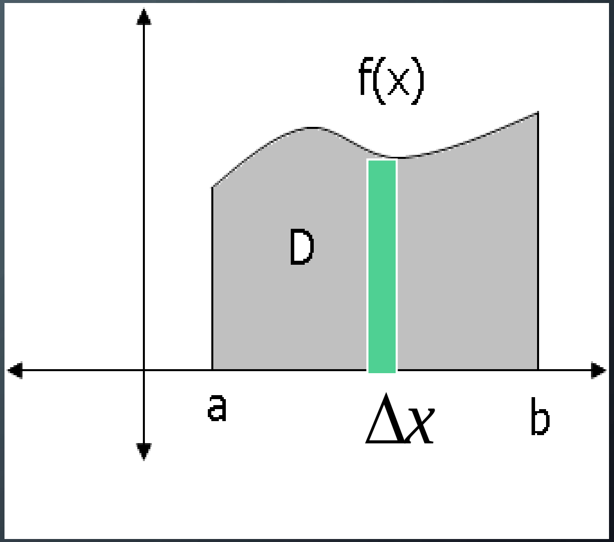
Universitas Buana Perjuangan Karawang

LUAS SUATU DAERAH

- Andaikan daerah $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$
- Berapakah luas daerah D ?

1. Iris daerah D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi $f(x)$ dan alas/lebar Δx

$$\Delta A \approx f(x)\Delta x$$



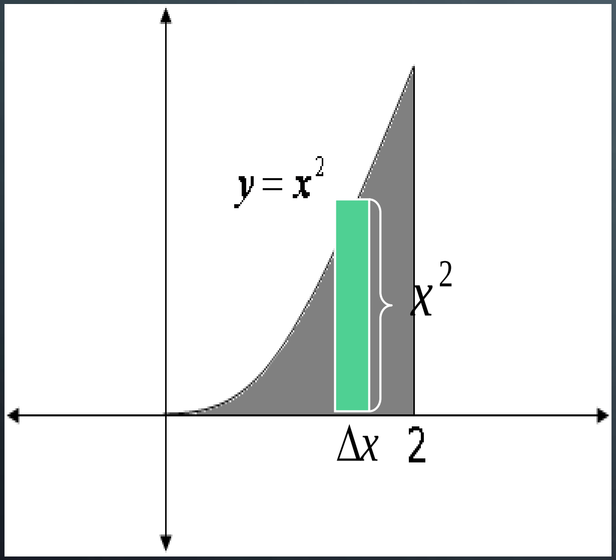
2. Luas daerah D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang.
   Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$Luas\ D = A = \int_a^b f(x)\,dx$$

CONTOH 1:

- Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x, dan $x = 2$.

<u>Penyelesaian:</u>



Luas irisan : $\Delta A \approx x^2 \Delta x$

maka luas daerah:

$$A = \int_0^2 x^2 \, dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \left(\frac{1}{3}2^3\right) - \left(\frac{1}{3}0^3\right)$$

$$= \frac{8}{3}$$

Jadi, luas daerah adalah $\frac{8}{3}$ satuan luas.

CONTOH 2:

- Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

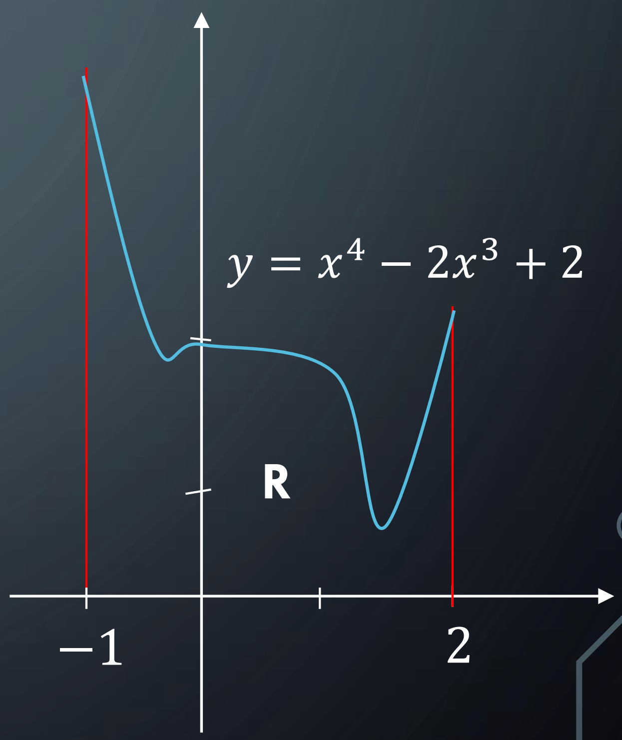
<u>Penyelesaian:</u>

$$A(R) = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(\frac{-1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right)$$

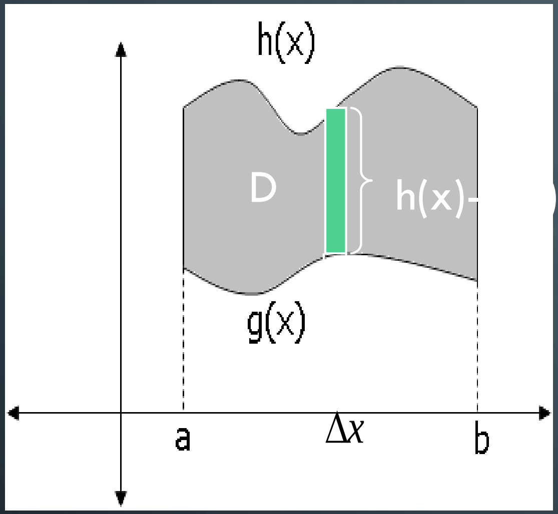
$$= \frac{51}{10}$$



Jadi, luas daerah R adalah $\frac{51}{10}$ satuan luas

LUAS SUATU DAERAH

- Andaikan daerah $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$
- Berapakah luas daerah D ?



Luas daeah D:

1. Iris D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi $h(x) - g(x)$ dan alas/lebar Δx

$$\Delta A \approx (h(x) - g(x))\Delta x$$

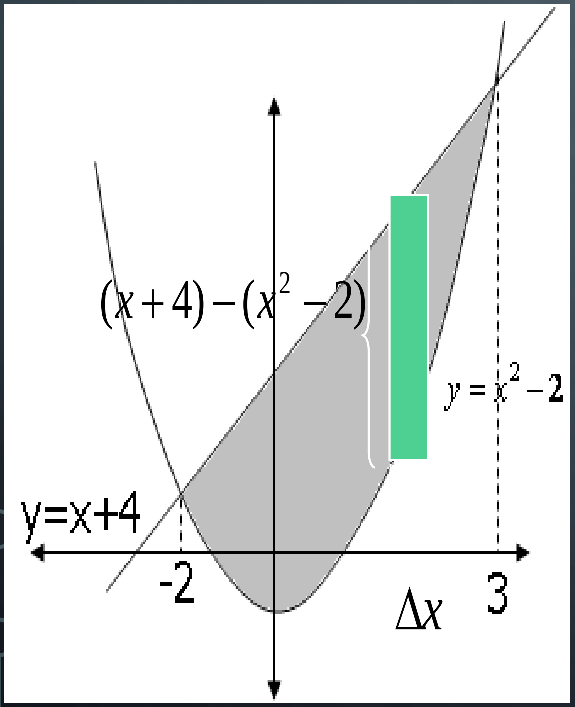
2. Luas D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang.
   Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$Luas\ D = A = \int_a^b (h(x) - g(x))\, dx$$

CONTOH 3:

- Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x + 4$ dan parabola $y = x^2 - 2$.

<u>Penyelesaian:</u>



Titik potong antara garis dan parabola:

$x + 4 = x^2 - 2$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x - 3)(x + 2) = 0$

$x = -2$ dan $x = 3$

Luas irisan:

$\Delta A = \big((x + 4) - (x^2 - 2)\big)\Delta x$

LANJUTAN CONTOH 3:

- Sehingga luas daerah:

$$A = \int_{-2}^{3} \left((x+4) - (x^2 - 2)\right) dx$$

$$A = \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{3}$$

$$A = \left(-\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 18\right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 12\right)$$

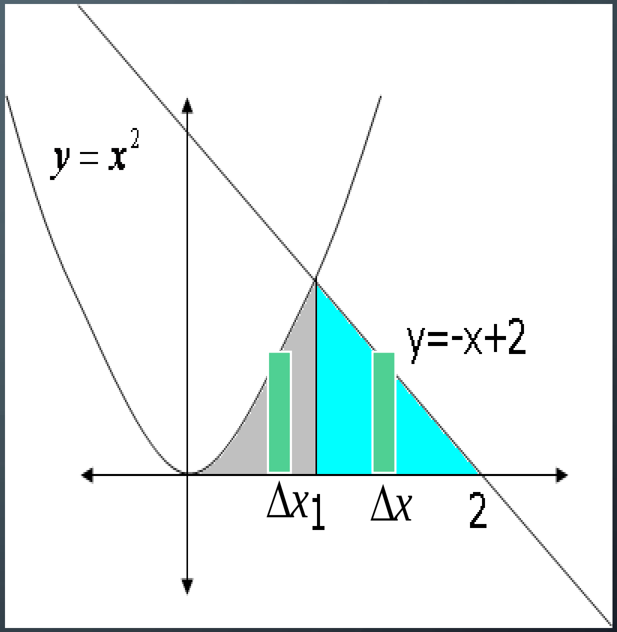
$$A = \frac{125}{6}$$

Jadi, luas daerahnya adalah $\frac{125}{6}$ satuan luas.

Catatan:
Jika irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak disebelah atas dikurangi kurva yang berada disebelah bawah. Jika batas atas dan bawah irisan berubah untuk sembarang irisan di D maka daerah D harus dibagi dua atau lebih

CONTOH 4:

- Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x, $y = x^2$ dan $y = -x + 2$.



<u>Penyelesaian:</u>

Titik potong

$x^2 = -x + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2, \qquad x = 1$

Jika dibuat irisan tegak, maka daerah harus dibagi menjadi dua bagian,

Luas irisan I : $\Delta A_1 \approx x^2 \Delta x$ dan Luas irisan II : $\Delta A_2 \approx (-x+2)\Delta x$

LANJUTAN CONTOH 4

- **Luas daerah I**

$$A_1 = \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

- **Luas daerah II**

$$A_2 = \int_1^2 (-x + 2)\, dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^2$$

$$A_2 = \left(-\frac{4}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{1}{2}$$

- Sehingga luas daerah : $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

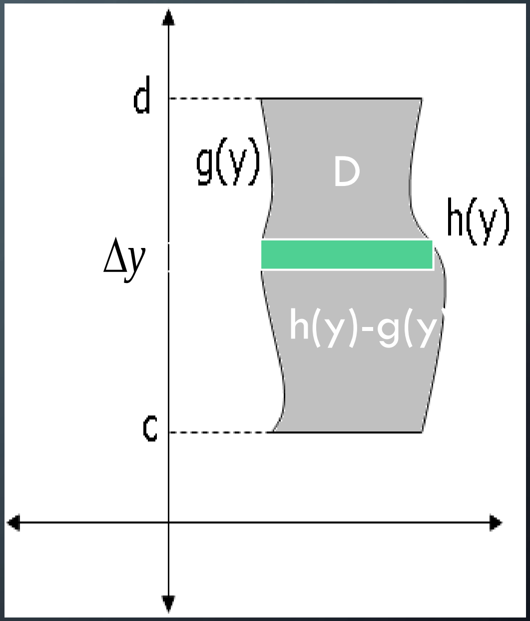
LUAS SUATU DAERAH

- Andaikan daerah $D = \{(x, y) |\ c \le y \le d, g(y) \le x \le h(y)\}$
- Berapakah luas daerah D?

Luas daerah D:

1. Iris daerah D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi $h(y) - g(y)$ dan alas/lebar Δy

$$\Delta A \approx (h(y) - g(y))\Delta y$$



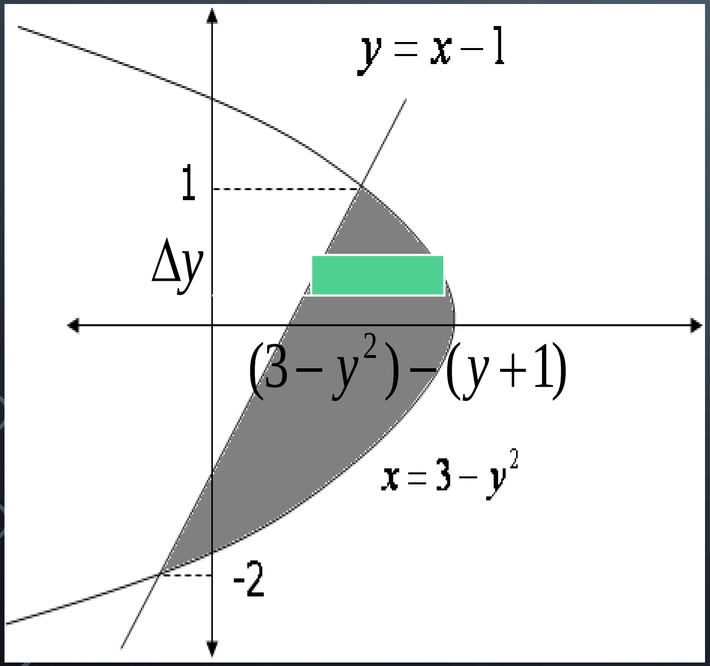
2. Luas D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang, dengan limit:

$$Luas\ D = A = \int_c^d (h(y) - g(y))\, dy$$

CONTOH 5:

- Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $x = 3 - y^2$ dan $y = x - 1$

<u>Penyelesaian:</u>



Titik potong antara garis dan parabola

$$y + 1 = 3 - y^2$$
$$y^2 + y - 2 = 0$$
$$(y + 2)(y - 1) = 0$$
$$y = -2, \qquad y = 1$$

Maka luas irisan menjadi

$$\Delta A = \big((3 - y^2) - (y + 1)\big)\Delta y$$

LANJUTAN CONTOH 5:

- Luas daerah:

$$A = \int_{-2}^{1} \big((3 - y^2) - (y + 1)\big) dy$$

$$A = \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\, dy$$

$$A = \left[-\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\right]_{-2}^{1}$$

$$A = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right)$$

$$A = \frac{9}{2}$$

Jadi, luas daerah adalah $\frac{9}{2}$ satuan luas.

Catatan:

Jika irisan sejajar dengan sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak disebelah kanan dikurangi kurva yang berada disebelah kiri.

Jika batas kanan dan kiri irisan berubah untuk sembarang irisan di D maka daerah D harus dibagi dua atau lebih

LATIHAN

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh:

1) $y = \frac{x^2}{3} - 4$, sumbu x, $x = -2$, dan $x = 3$.

2) $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, ruas sumbu x antara $x = -1$ dan $x = 2$ dan oleh garis $x = 2$.

3) $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$.

4) $y^2 = 4x$ dan $4x - 3y = 4$

SEKIAN
DAN
TERIMA KASIH