Prozhefa.com

چارلز دسور
ارنست کوه

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

جلد دوم

ویرایش دوم

ترجمه و تکمیل :

دکتر پرویز جَبّه‌دار مارالانی

استاد ممتاز دانشگاه تهران

Prozhefa.com

فهرست مطالب

Prozhefa.com

فصل ۱۱ تجزیه و تحلیل حلقه و کات‌ست

فصل ۱۲ معادلات حالت

Prozhefa.com

فصل *۱۲ روش اصلاح شدهٔ تحلیل گره

فصل ۱۳ تبدیلهای لاپلاس

Prozhefa.com

Prozhefa.com

فصل ۱۶ قضایای شبکه‌ها

فصل ۱۷ حساسیت‌ها

Prozhefa.com

فصل ۱۷ دوقطبی‌ها

Prozhefa.com

فصل ۱۸ شبکه‌های مقاومتی

فصل ۱۹ انرژی و پسیو بودن

Prozhefa.com

پیوست الف توابع و خطی بودن

پیوست ب ماتریس‌ها و دترمینان‌ها

Prozhefa.com

Prozhefa.com

Prozhefa.com

۹

گراف‌های شبکه و قضیهٔ تلگان

در قسمت اول این کتاب ما با بسیاری از مفاهیم مهم و خواص مدارها آشنا شدیم. برای اینکه کمکی در درک آنها گردد، این مفاهیم را تنها با مدارهای ساده تشریح کردیم. مدارهای نوعی که ما در نظر گرفتیم به استثنای فصل ۷، تنها شامل چند عنصر بودند و به وسیلهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول یا دوم توصیف می‌شدند. در قسمت دوم این کتاب می‌خواهیم برای تجزیه و تحلیل و تعیین خواص یک شبکه، به هر پیچیدگی که باشد، روشهای منظمی را به وجود آوریم. توجه کنید که ما کلمهٔ **شبکه** را که معنی یکسان با مدار (یعنی به هم پیوستنی از اجزاء) دارد، به کار می‌بریم. با وجود این، کلمهٔ "شبکه" معمولاً ایدهٔ پیچیده بودن را دارد (یک شبکه مداری است که اجزای بیشتری داشته باشد). بعضی شبکه‌ها در عمل بسیار پیچیده هستند و ممکن است دارای صدها عنصر باشند.

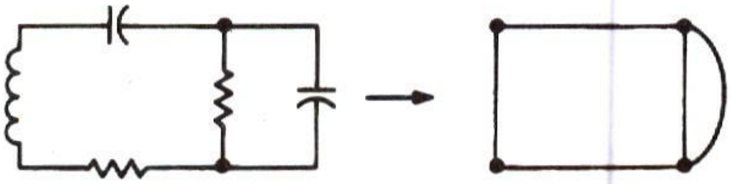
دلیل دیگری برای نیاز ما به توسعهٔ این روشهای منظم آن است که دنیای مهندسی به کلی در اثر کامپیوتر تغییر کرده است. هم اکنون چندین کامپیوتر به بازار عرضه می‌شوند که دو عدد ۸ رقمی را در زمانی کمتر از یک میکروثانیه درهم ضرب می‌کنند. معنی این توانایی برای مهندسان آن است که امروزه تجزیه و تحلیل‌های پیچیده و طراحی‌های مفصلی که مستلزم انجام محاسبات بسیار زیادی، مثلاً 10^6 برابر محاسبات ۱۵ سال پیش می‌باشد، هم امکان‌پذیر بوده و هم اقتصادی است. بنابراین یادگیری روشهای منظم که به کمک آنها بتوان شبکه‌ای با هر نوع پیچیدگی را بررسی کرد حائز اهمیت است.

چنانکه در علوم و مهندسی رایج است مرحلهٔ اول، یک عمل تجرید است. از آن جایی که KCL و KVL هیچ نوع فرضی در مورد ماهیت اجزای یک شبکه در نظر نمی‌گیرند، طبیعی است که برای ساده کردن شبکه به صورت یک گراف، می‌توان اجزای مدار را نادیده گرفت. بخش اول این فصل به توسعهٔ مفهوم یک گراف اختصاص داده شده است. سپس ایده‌های نظریهٔ گرافی برای تشکیل دقیق معادلات KVL و KCL به کار رفته است و پس از آن، برای تشریح قدرت مفهوم نظری یک گراف، قضیهٔ تلگان که به کمک آن چند خاصیت کلی شبکه‌ها به طور فوق‌العاده راحتی ثابت می‌شوند، به دست می‌آید.

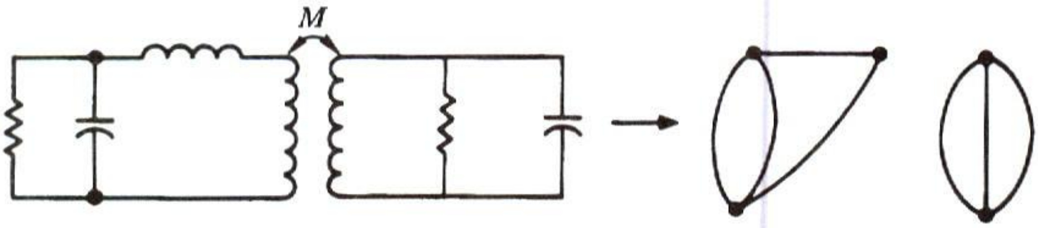
۱- مفهوم یک گراف

یک شبکهٔ فیزیکی مثلاً یک خط انتقال با تأخیر، مرکب از ۸۰ عنصر فشرده یا تکرارکنندهٔ ارتباطاتی را در نظر بگیرید. فرض کنید که ما تنها آن فرکانس‌هایی را در نظر می‌گیریم که ما را مجاز می‌دارند که شبکهٔ فیزیکی را به صورت به هم پیوستن اجزای فشرده یعنی مقاومتها، خازنها، سلف‌ها، سلف‌های تزویج

Prozhefa.com



(الف) شبکهٔ $\mathcal{N}$



(ب) شبکهٔ $\mathcal{N}$

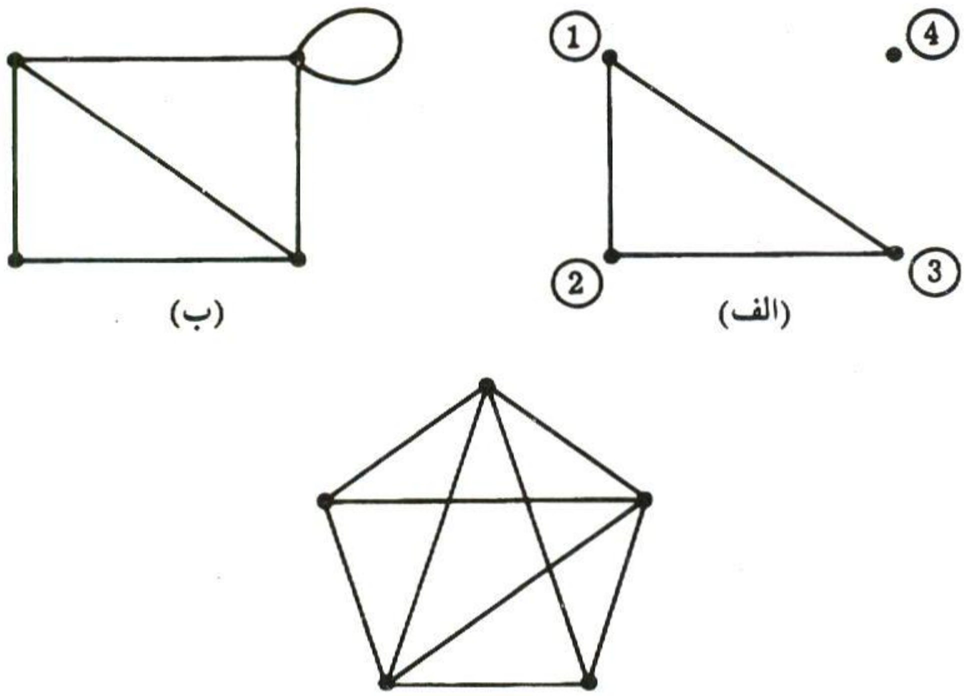
شکل ۱-۱ شبکه‌ها و گراف‌های آنها. (الف) گراف با چهار گره و پنج شاخه.
(ب) گراف با دو جزء مجزا، پنج گره و هفت شاخه.

شده، ترانسفورماتورها، منابع وابسته و نابسته مدل‌سازی کنیم. از این به بعد هر وقت ما از "شبکهٔ $\mathcal{N}$ مورد نظر" صحبت می‌کنیم منظور ما این مدل با پارامترهای فشرده است. دراین فصل شبکهٔ $\mathcal{N}$ ممکن است خطی یا غیرخطی، اکتیو یا پسیو، تغییرپذیر با زمان یا تغییرناپذیر با زمان باشد. ما طرق بیان محدودیت‌هایی را که توسط معادلات KVL و KCL روی ولتاژها و جریانهای شاخه‌ها اعمال می‌شود، بررسی خواهیم کرد. چون قوانین کیرشف به ماهیت اجزای مدار بستگی ندارند طبیعی است که می‌توان از ماهیت این اجزاء صرف‌نظر کرد. برای این منظور هر جزء شبکهٔ $\mathcal{N}$ را با یک **شاخه** (که به صورت یک قطعه خط نمایش داده می‌شود) تعویض می‌کنیم و در دوسر هر شاخه نقطه‌های سیاهی که **گره‌ها** نامیده می‌شوند رسم می‌کنیم (بعضی مؤلفین کلمهٔ "لبه" را به جای شاخه و کلمهٔ "رأس" یا "پیوند" را به جای گره به کار می‌برند). نتیجهٔ این عمل یک گراف می‌باشد. دو مثال در شکل (۱-۱) نشان داده شده است. در شکل (۱-۱ ب) با وجود اینکه دو سلف متقابلاً تزویج شده‌اند، گراف تزویج مغناطیسی M را نمایش نمی‌دهد؛ زیرا که M به ماهیت شاخه‌های $\mathcal{N}$ مربوط بوده و یک خاصیت گراف $\mathcal{N}$ نیست.

به عبارت دقیقتر، منظور از کلمهٔ **گراف** دسته‌ای از گره‌ها به همراه دسته‌ای از شاخه‌ها می‌باشد، به شرط اینکه هر شاخه در هر سرش به یک گره ختم شود.

ملاحظه کنید که تعریف گراف، حالت خاصی را که در آن هیچ شاخه‌ای به یک گره متصل نباشد، مانند آنچه که در شکل (۱-۲ الف) نشان داده شده است، شامل می‌باشد. همچنین توجه کنید که چون هر شاخه در هر سرش به گرهی ختم می‌شود و چون طبق تعریف ما، لازم نیست که این گره‌ها از هم متمایز باشند، یک گراف ممکن است دارای خود حلقه باشد، یعنی، حلقه‌ای که از یک شاخهٔ تنها تشکیل شده باشد (شکل (۱-۲ ب) را ببینید). دراین کتاب ما با چنین گراف‌هایی سرو کار نخواهیم داشت، با این وجود آنها درکارهای مهندسی مانند گراف‌های جریان ظاهر می‌شوند.

Prozhefa.com



(پ)

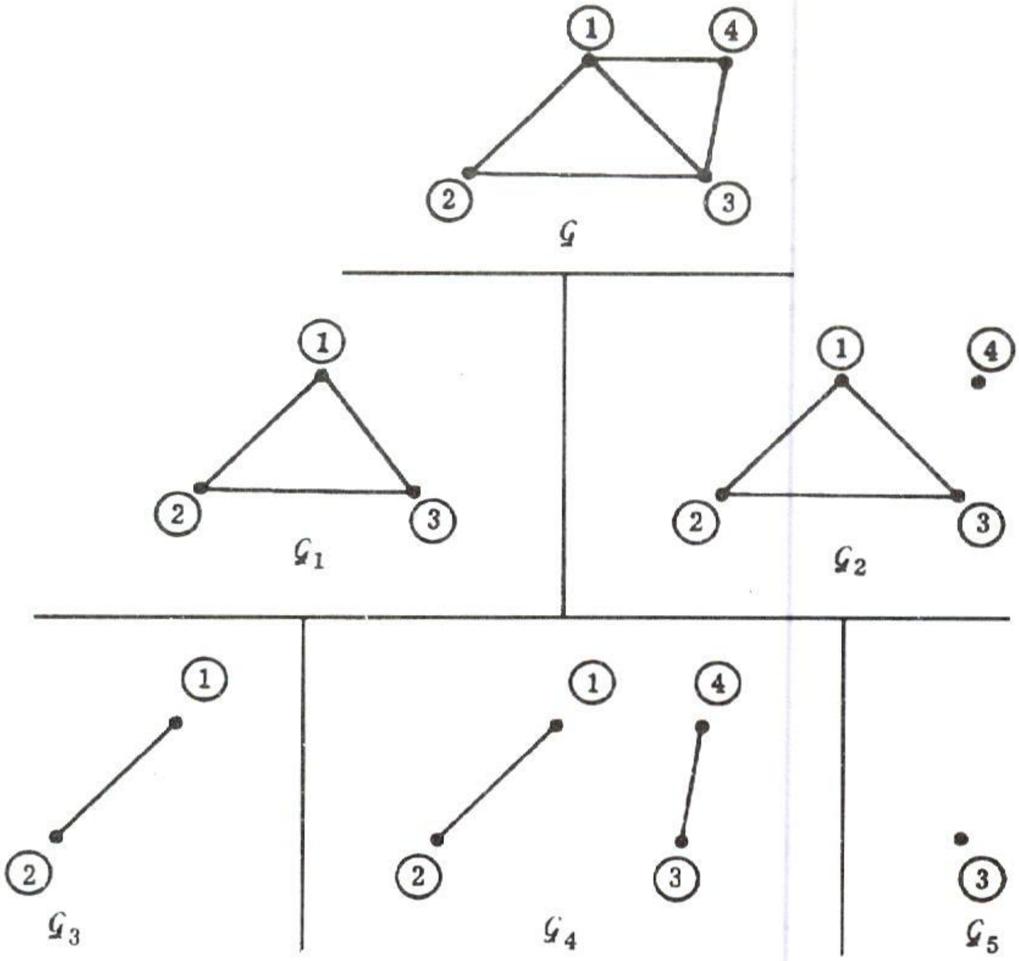
شکل ۱-۲ (الف) گرافی با یک گره مجزا شده؛ (ب) گرافی که شامل یک خودحلقه می‌باشد؛ (پ) یک گراف نسبتاً پیچیده‌تر.

فرض کنید که گراف $\mathcal{G}$ را داشته باشیم. در این صورت وقتی گویند که $\mathcal{G}_1$ یک **زیر گراف** $\mathcal{G}$ می‌باشد که خود $\mathcal{G}_1$ یک گراف بوده و هر گره $\mathcal{G}_1$، یک گره $\mathcal{G}$ و هر شاخهٔ $\mathcal{G}_1$، یک شاخهٔ $\mathcal{G}$ باشد. به عبارت دیگر، با داشتن گراف $\mathcal{G}$ می‌توان با حذف بعضی شاخه‌ها و/ یا بعضی گره‌ها، گراف $\mathcal{G}_1$ را به دست آورد. در شکل (۱-۳) $\mathcal{G}_1$، $\mathcal{G}_2$، $\mathcal{G}_3$، $\mathcal{G}_4$ و $\mathcal{G}_5$ زیرگراف‌های $\mathcal{G}$ هستند. توجه کنید که $\mathcal{G}_5$ تنها از یک گره تشکیل می‌شود و **زیر گراف سوده** خوانده می‌شود.

در تمام بحث‌های بعدی، ما جهت‌های قراردادی برای ولتاژهای شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها که **جهت‌های متناظر** خوانده می‌شوند، انتخاب خواهیم کرد. یعنی پیکانی که جهت قراردادی جریان را مشخص می‌کند، همیشه به سوی سری متوجه خواهد شد که آن سر از لحاظ جهت قراردادی ولتاژ با علامت منفی مشخص شده است. ولتاژ و جریان شاخهٔ k ام با v_k و j_k نشان داده خواهد شد چنانکه در شکل (۱-۴) دیده می‌شود[1]. چون در این فصل ما همیشه جهت‌های قراردادی متناظر را به کار می‌بریم پس لازم است تنها پیکانی که جهت قراردادی جریان را مشخص می‌کند معین شود و علامتهای مثبت و منفی جهت قرار دادی ولتاژ حذف گردد.

[1] از این به بعد ما معمولاً حرف j (مانند j_1 ، j_2 ، ... ، j_k) را برای مشخص کردن جریان شاخه به کار خواهیم برد. حرف i معمولاً جریان حلقه‌ها یا جریان مش‌ها را مشخص خواهد کرد.

Prozhefa.com

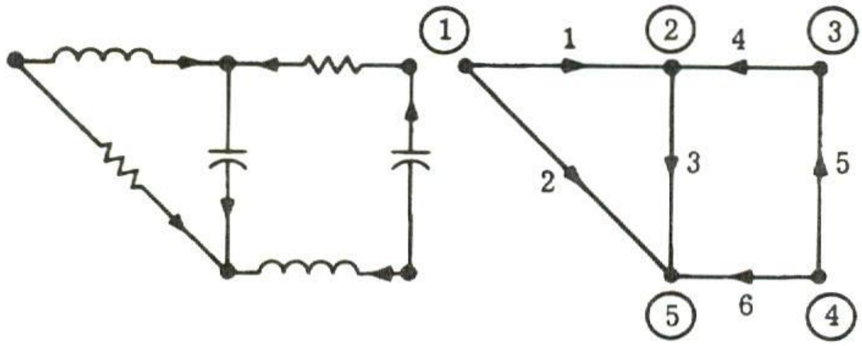


شکل ۱-۳ گراف‌های $\mathcal{G}_1$، $\mathcal{G}_2$، $\mathcal{G}_3$، $\mathcal{G}_4$ و $\mathcal{G}_5$ زیرگراف‌های $\mathcal{G}$ هستند.

برای یک شبکهٔ داده شدهٔ $\mathcal{N}$ با جهت‌های قراردادی مشخص برای هر یک از شاخه‌های آن، عمل تجریدی که در بالا توصیف شد منجر به گرافی می‌شود که شاخه‌های آن دارای جهت‌های قراردادی می‌باشند. چنین گرافی **گراف جهت‌دار** خوانده می‌شود. به عنوان مثال، شکل (۱-۵) شبکه‌ای با جهت‌های قراردادی و گراف جهت‌دار نظیر را نشان می‌دهد. تصور ما از یک گراف جهت‌دار دسته‌ای از گره‌ها توأم با دسته‌ای از شاخه‌های جهت‌دار است که در آن هر شاخه در هر یک از سرهای آن به یک گره ختم می‌شود. به عنوان مثال، می‌توان گره‌ها و شاخه‌های گراف را مطابق شکل (۱-۵) شماره‌گذاری کرد.

شکل ۱-٤ جهت‌های قراردادی متناظر برای یک جزء و برای یک شاخه.

Prozhefa.com



شکل ۱-۵ شبکه و گراف جهت‌دار آن.

در این صورت گوییم شاخهٔ ۴ **متصل به** گره‌های ② و ③ بوده و از گره ③ **خارج** و به گره ② **وارد** می‌شود.

از دیدگاه تحلیلی، می‌توان گراف جهت‌دار شکل (۱-۵) را با مشخص کردن تمام شاخه‌ها و گره‌ها و تعیین اینکه کدام شاخه وارد کدام گره شده و از کدام گره خارج می‌شود، توصیف نمود. این کار با نوشتن یک ماتریس به راحتی انجام می‌گیرد. فرض کنید که گراف جهت‌دار از b شاخه و n_t گره تشکیل شود و همچنین فرض کنید که تمام گره‌ها و تمام شاخه‌های این گراف به طور دلخواهی شماره‌گذاری گردد. **ماتریس تلاقی گره با شاخهٔ $\mathbf{A}_a$** به یک ماتریس مستطیلی با n_t سطر و b ستون گفته می‌شود که جملهٔ $(i \text{ ، } k)$ ام آن یعنی a_{ik} چنین تعریف می‌شود:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ از گره } (i) \text{ خارج شود} \\ -1 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ به گره } (i) \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ با گره } (i) \text{ تلاقی نداشته باشد} \end{cases}$$

چون هر شاخه از یک گره تنها خارج شده و به یک گره تنهای دیگر وارد می‌شود، از این جهت هر ستون ماتریس $\mathbf{A}_a$ فقط شامل یک ۱ + و یک ۱ - بوده و تمام اجزای دیگر آن مساوی صفر است. ماتریس تلاقی گراف شکل (۱-۵) چنین است:

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}}^{b \text{ شاخه}} \\ n_t \text{ گره} \left\{ \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array} \right. & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین برای هر گراف جهت‌دار، شماره‌گذاری شاخه‌ها و گره‌ها و نوشتن ماتریس تلاقی $\mathbf{A}_a$ آن

Prozhefa.com

کار بسیار ساده‌ای است. از طرف دیگر، برای هر ماتریس $n_t \times b$ ، با این خاصیت که هر یک از ستونهای آن دارای یک ۱ + و یک ۱ - تنها و بقیهٔ عناصر صفر باشد، یک گراف جهت‌دار با b شاخه و n_t گره می‌توان متناظر ساخت. ماتریس تلاقی در کارهای کامپیوتری روش استانداردی است که برای توصیف به‌هم پیوستن اجزاء به کار می‌رود.

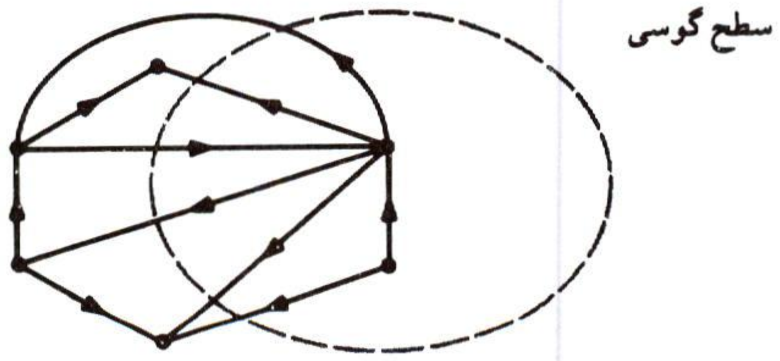
تمرین یک گراف جهت‌دار متناظر با ماتریس تلاقی زیر رسم کنید:

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲ کات‌ست‌ها و قانون جریان کیرشف

برای اینکه بتوان بدون تأمل و به طور منظم KCL را برای هر شبکه بیان نمود، اکنون مفهوم کات‌ست را توسعه می‌دهیم. به طور کلی قانون KCL بیان می‌دارد که مجموع جبری تمام جریانهایی که از یک گره خارج می‌شوند مساوی صفر است. پس به طور حسی، چنانکه گره‌های یک شبکه را به وسیلهٔ یک سطح گوسی بسته[1] به دو دسته تفکیک کنیم به قسمی که دسته‌ای از گره‌ها در داخل سطح فوق و دستهٔ دیگر در خارج آن باشند (شکل (۲-۱) را ببینید)، در این صورت KCL لازم می‌دارد که مجموع جریانهایی که از سطح گوسی خارج می‌شوند، مساوی صفر باشد. در بیشتر موارد، به مجموعهٔ تمام شاخه‌هایی که سطح گوسی را قطع می‌کنند یک کات‌ست گفته خواهد شد.

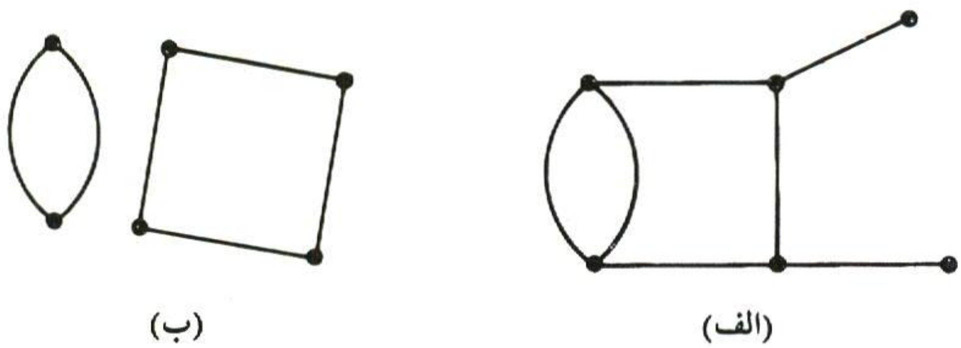
برای اینکه این ایدهٔ حسی را دقیق‌تر سازیم باید گام به گام پیش رفته و بین گراف‌های پیوسته و ناپیوسته تفاوت قائل شویم.



شکل ۲-۱ سطح گوسی که به طور حسی به مفهوم کات‌ست منجر می‌شود.

[1] ما کلمهٔ "گوسی" را به دلیل تشابهی که با سطح بستهٔ به‌کار رفته در قانون گوس وجود دارد به کار می‌بریم. قانون گوس بیان می‌دارد که شار الکتریکی خارج شونده از یک سطح بسته، مساوی باری است که در داخل آن سطح قرار دارد.

Prozhefa.com

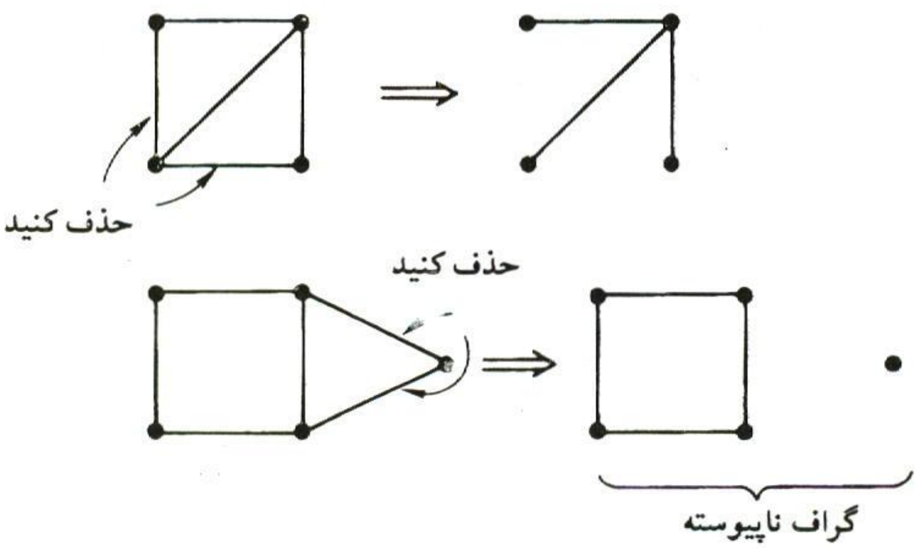


شکل ۲-۲ (الف) گراف پیوسته؛ (ب) گراف ناپیوسته.

اگر میان هر دو گره دلخواه یک گراف، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد (در روی شاخه‌های گراف و بدون در نظر گرفتن جهت شاخه‌ها)، آن گراف را **پیوسته** گویند. به موجب قرارداد، گرافی که از یک گره تنها تشکیل می‌یابد، پیوسته است. گویند یک گراف پیوسته یک جزء جدا[1] از هم‌دارد. در یک گراف ناپیوسته حداکثر تعداد زیر گرافهای پیوسته را نیز **جزءهای جدا از هم** نامند. بنابراین یک گراف ناپیوسته باید حداقل دارای دو جزء جدا از هم باشد. گراف نشان داده شده در شکل (۲-۲ الف) پیوسته بوده در حالی که گراف شکل (۲-۲ ب) ناپیوسته است و دارای دو جزء جدا از هم می‌باشد.

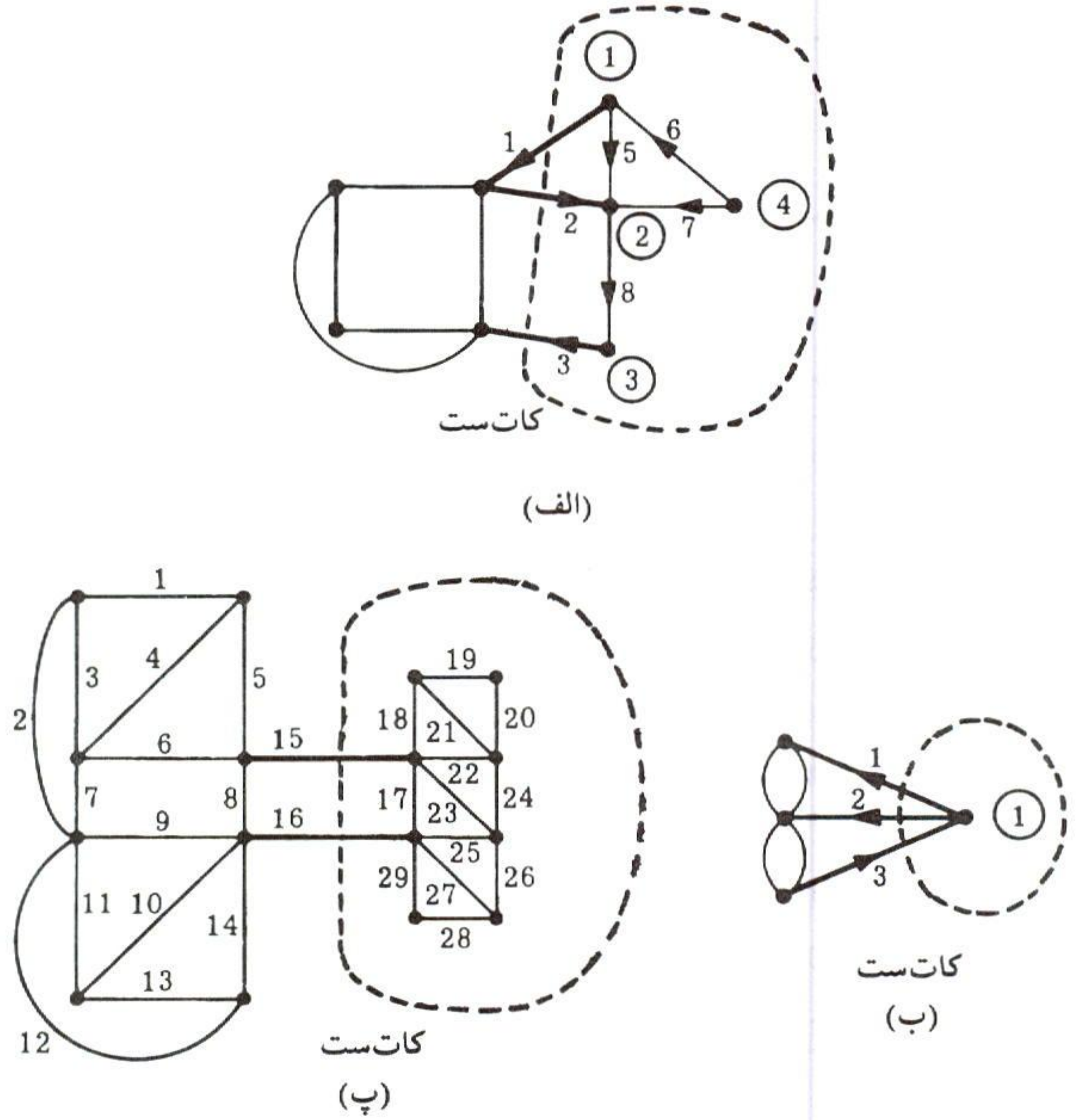
برای توضیح مفهوم یک کات‌ست باید مشخص نمود که منظور از عبارت "حذف یک شاخه" چیست. وقتی می‌گوییم **شاخه‌ای را حذف می‌کنیم** منظور ما این است: قطعه خطی که دو گره را به هم وصل می‌کند حذف کرده و خود گره‌ها را نگه می‌داریم. این‌کار در شکل (۲-۳) تشریح شده است. ایدهٔ یک کات‌ست، به ایدهٔ قطع یک گراف پیوسته به دو جزء جدا از هم با حذف چند شاخهٔ آن مربوط می‌شود.

دسته‌ای از شاخه‌های یک گراف پیوستهٔ $\mathcal{G}$ را **کات‌ست** نامند چنانچه: (۱) حذف تمام شاخه‌های این دسته موجب شود که گراف باقیمانده دارای دو جزء جدا از هم باشد و (۲) حذف تمام شاخه‌های



شکل ۲-۳ تشریح عمل "حذف یک شاخه".

Prozhefa.com



شکل ۲-٤ مثالهایی از کات‌ست‌ها؛ شاخه‌های کات‌ست به وسیلهٔ خطوط کلفت نشان داده شده‌اند.

این دسته به جز یکی از آنها یک گراف پیوسته باقی گذارد. مثالهایی از کات‌ست‌ها در شکل (۲-۴) نشان داده شده است. در این شکل شاخه‌های کات‌ست با خطوط کلفت مشخص شده‌اند و ایدهٔ قطع کردن گراف پیوسته به دو جزء جدا از هم به وسیلهٔ خط‌چینی که تمام شاخه‌های کات‌ست را قطع می‌کند تأکید شده است (این مطلب ایدهٔ سطح گوسی را تداعی می‌کند). در گراف شکل (۲-۴ ب) ملاحظه می‌شود که دسته شاخه‌هایی که به گره ① متصل‌اند یک کات‌ست می‌باشد، زیرا یک گره مجزا شده، یک جزء جدا را تشکیل می‌دهد.

در حالتی که گراف $\mathcal{G}$ دارای s جزء جدا از هم باشد، یک **کات‌ست** به آن دسته از شاخه‌ها گفته می‌شود که (۱) حذف تمام شاخه‌های این دسته باعث شود که گراف باقیمانده دارای $s+1$ جزء جدا از هم باشد و (۲) حذف تمام شاخه‌های این دسته به‌جز یکی از آنها گرافی با s جزء جدا از هم باقی گذارد.

با درک کامل مفهوم کات‌ست، اکنون می‌توان قانون KCL را با تعمیم کلی آن بیان نمود:

Prozhefa.com

قانون جریان کیرشف

> برای هر شبکهٔ فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از کات‌ست‌های آن، مجموع جبری جریان تمام شاخه‌های کات‌ست مساوی صفر است.

برای به کار بردن KCL چنین عمل می‌کنیم: (۱) یک جهت قراردادی برای کات‌ست تعیین می‌کنیم، مثلاً جهت از داخل به خارج آن سطح گوسی که کات‌ست را تعریف می‌کند و (۲) در به دست آوردن مجموع جبری، برای جریان آن شاخه‌هایی که جهت قراردادی آنها موافق جهت کات‌ست باشد علامت مثبت و برای جریان آن شاخه‌هایی که جهت قراردادی آنها مخالف جهت کات‌ست باشد علامت منفی در نظر می‌گیریم.

مثال ۱ برای کات‌ست نشان داده شده در شکل (۲-۴ الف)، KCL بیان می‌دارد که:

$$j_1(t) - j_2(t) + j_3(t) = 0 \qquad \text{برای همهٔ } t$$

مثال ۲ برای کات‌ست نشان داده شده در شکل (۲-۴ ب)، KCL بیان می‌دارد که:

$$j_1(t) + j_2(t) - j_3(t) = 0 \qquad \text{برای همهٔ } t$$

قانون جریان کیرشف به صورتی که در بالا بیان شد یک نتیجهٔ مستقیم قانون گره است که در فصل ۱ بیان گردیده است. در واقع چنانچه ما تمام روابط KCL را که برای تمام گره‌های داخل سطح گوسی بیان می‌شوند با هم جمع کنیم، قانون کات‌ست را به دست می‌آوریم. جریان شاخه‌هایی که دو گره داخل سطح گوسی را به هم وصل می‌کنند همدیگر را حذف می‌کنند! این عمل به سهولت به کمک مثال زیر مشخص می‌گردد.

مثال ۳ کات‌ست شکل (۲-۴ الف) را مجدداً در نظر می‌گیریم. از قوانین گره نتیجه می‌شود:

گره ①: $+j_1 + j_5 - j_6 = 0$

گره ②: $-j_2 - j_5 - j_7 + j_8 = 0$

گره ③: $+j_3 - j_8 = 0$

گره ④: $+j_6 + j_7 = 0$

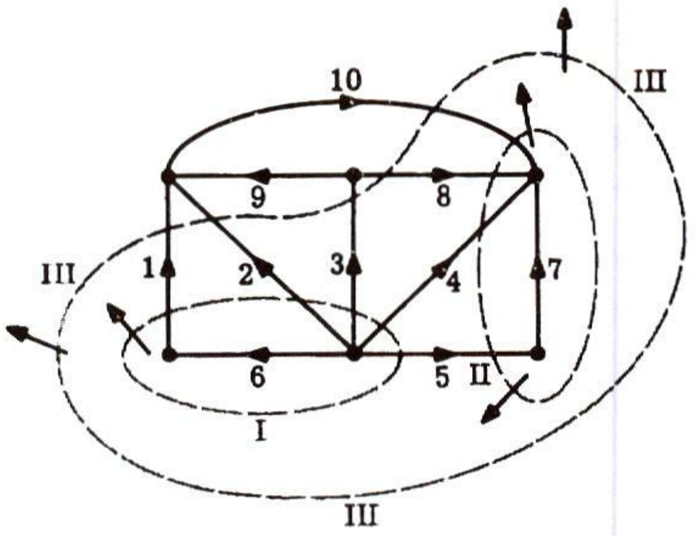
مجموع: $j_1 - j_2 + j_3 = 0$

و این معادله، معادلهٔ کات‌ست می‌باشد.

تبصرهٔ ۱ KCL در مورد هر شبکهٔ فشرده صرف‌نظر از ماهیت اجزای آن به کار می‌رود.

تبصرهٔ ۲ معادلاتی که توسط KCL برحسب جریان شاخه‌ها نوشته می‌شوند به صورت معادلات جبری خطی همگن با ضرایب ثابت حقیقی می‌باشند.

Prozhefa.com



شکل ۲-۵ کات‌ست‌های I ، II و III به معادلات KCL منجر می‌شوند که به‌طور خطی وابسته‌اند.

این بخش را با یک مشاهده پایان می‌دهیم. فرض کنید که قانون کیرشف را به کات‌ست‌های I ، II و III نشان داده شده در شکل (۲-۵) اعمال کنیم. واضح است با جمع معادلات مربوط به کات‌ست‌های I و II ، معادلهٔ مربوط به کات‌ست III را به دست می‌آوریم. این سه معادله به طور خطی وابسته می‌باشند. به عبارت دیگر، معادلهٔ سوم اطلاعات جدیدی که در دو معادلهٔ قبل موجود نبود به ما عرضه نکرد. بنابراین در نظریهٔ عمومی تجزیه و تحلیل شبکه‌ها، ما باید کات‌ست‌ها را به طریقی انتخاب کنیم که هر معادله اطلاعات جدیدی در اختیار ما بگذارد. ما این موضوع را مفصلاً در فصل بعد بررسی خواهیم کرد.

تمرین ۱ با مراجعه به شکل (۲-۴ پ) تعیین کنید کدام یک از مجموعهٔ شاخه‌های زیر، کات‌ست می‌باشند (اگر بعضی از آنها کات‌ست نباشند، دلیل آن را به دقت بیان کنید): {۵ , ۶ , ۸ , ۱۷ , ۲۳ , ۲۴}، {۱ , ۴ , ۶ , ۹ , ۱۰ , ۱۴ , ۱۶}، {۱ , ۲ , ۳}، {۱ , ۴ , ۵ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۴}

تمرین ۲ برای کات‌ست‌های I ، II و III شکل (۲-۵)، KCL را بنویسید.

تمرین ۳ یک گراف متصل به هم $\mathcal{G}$ را در نظر بگیرید. گره‌های آن را به دو مجموعهٔ A و B که با هم ناسازگار بوده (یعنی مجموعهٔ $A \cap B$ تهی است) و روی هم پوشا می‌باشند (یعنی مجموعهٔ $A \cup B$ تمام گره‌های $\mathcal{G}$ را دربردارد) تفکیک کنید. نام آن مجموعه از شاخه‌هایی که یک سر آنها در A بوده و سر دیگرشان در B می‌باشد چیست؟ جواب خود را توجیه کنید.

۳- حلقه‌ها و قانون ولتاژ کیرشف

ما تا به حال در برخورد با مدارهای ساده معنی یک حلقه را به طور حسی به وضوح دریافته‌ایم. برای

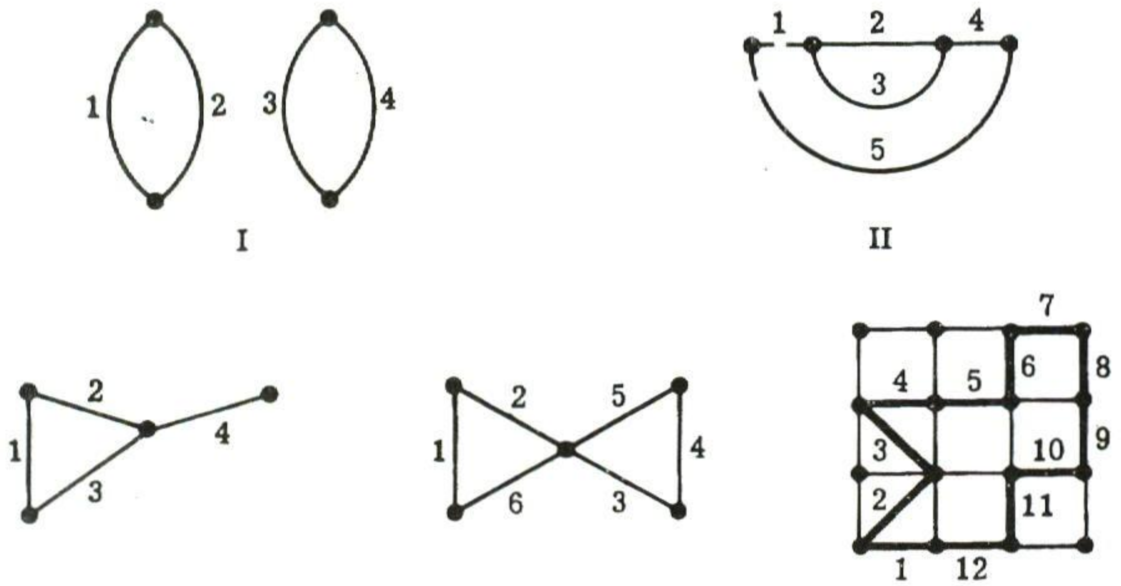
Prozhefa.com

(پ) (ب) (الف)

شکل ۳-۱ شاخه‌های مشخص شده در سه شکل بالا مسیرهای بسته می‌باشند؛ با این وجود تنها حالت (الف) شرایط حلقه بودن را داراست.

بیان روش منظم کنونی، به مفهوم دقیق یک حلقه نیاز داریم. وقتی به طور غیر دقیق صحبت شود منظور از یک حلقه یک مسیر بسته است. با این وجود، این بیان غیردقیق روشن نمی‌کند که آیا دسته شاخه‌های مشخص شده درگراف شکل (۳-۱) تشکیل حلقه می‌دهند یا نه. به عبارت دیگر، آیا مجاز است که یک مسیر بسته مانند شکل (۳-۱ ب) بیش از یک بار از گرهی بگذرد یا اینکه آیا شاخه‌های آویزان مانند شکل (۳-۱ پ) مجاز می‌باشد؟ برای ساده کردن اکثر مطالب مورد بحث فصلهای بعدی ما مفهوم یک حلقه را چنین بیان خواهیم کرد: یک زیرگراف $\mathcal{L}$ از گراف $\mathcal{G}$ را **حلقه** گویند اگر: (۱) زیرگراف $\mathcal{L}$ متصل به هم باشد و (۲) به هر گره از $\mathcal{L}$ دقیقاً دو شاخه متصل باشد. شکل (۳-۲) تعریف یک حلقه را تشریح می‌کند.

اکنون ما در موقعیتی هستیم که قانون KVL را با تعمیم بیشتری که دراین کتاب به آن نیاز خواهیم داشت بیان کنیم:



I II III IV V

شکل ۳-۲ تشریح تعریف یک حلقه. حالت I خاصیت (۱) را نقض می‌کند؛ حالت‌های II، III و IV خاصیت (۲) را نقض می‌کنند؛ حالت V یک حلقه می‌باشد.

Prozhefa.com

قانون ولتاژ کیرشف

برای هر شبکهٔ فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از حلقه‌های آن، مجموع جبری ولتاژ تمام شاخه‌هایی که در یک حلقه قرار دارند، مساوی صفر است.

برای به کار بردن KVL در هر حلقه چنین عمل می‌کنیم: (۱) یک جهت قراردادی برای حلقه تعیین می‌کنیم و (۲) در تشکیل جمع جبری ولتاژ شاخه‌ها چنانچه جهت قراردادی شاخه با جهت قراردادی حلقه مطابقت داشته باشد ولتاژ شاخه را با علامت مثبت و اگر مطابقت نداشته باشد آن را با علامت منفی مشخص می‌کنیم.

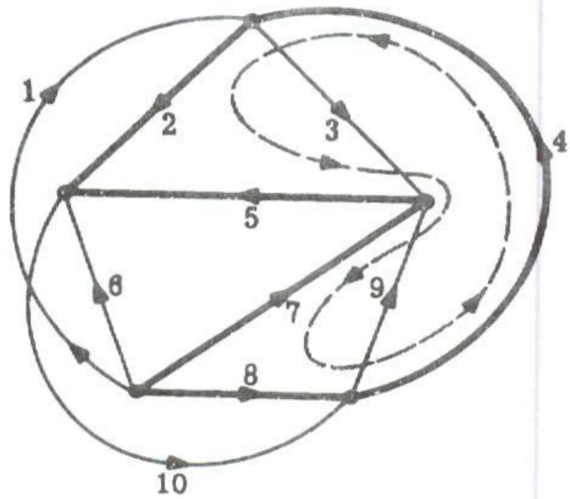
مثال حلقهٔ مشخص شده در گراف شکل (۳-۳) را در نظر بگیرید. برای جهت قراردادی مشخص شده با خط چین داریم:

$$+v_4(t)+v_2(t)-v_5(t)-v_7(t)+v_8(t)=0 \qquad \text{برای همهٔ } t$$

تبصرهٔ ۱ KVL در مورد هر شبکهٔ فشرده صرف‌نظر از ماهیت اجزای آن به کار می‌رود.

تبصرهٔ ۲ معادلاتی که توسط KVL برحسب ولتاژ شاخه‌ها نوشته می‌شوند به صورت معادلات جبری خطی همگن با ضرایب ثابت حقیقی هستند.

تمرین KVL را برای حلقه‌های {۵, ۹, ۱۰}، {۵, ۶, ۷}، {۶, ۸, ۱۰} و {۷, ۸, ۹} به کار ببرید. آیا معادلات به دست آمده به طور خطی نابسته‌اند؟

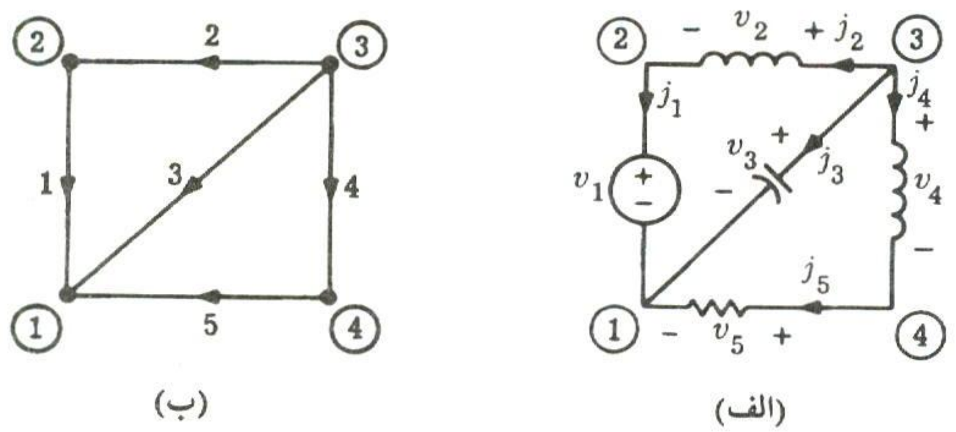


شکل ۳-۳ تشریح برای معادلهٔ یک حلقه؛ جهت قراردادی حلقه با خط‌چین مشخص شده است.

۴- قضیهٔ تلگان

در این بخش ما اولین قضیهٔ مربوط به شبکهٔ کلی، یعنی قضیهٔ تلگان را معرفی می‌کنیم. این قضیه بسیار

Prozhefa.com



شکل ٤-۱ شبکه و گراف جهت‌دار آن (پیکان‌ها جهت قراردادی جریانها را نشان می‌دهند).

کلی است و برای هر شبکهٔ فشرده که شامل هر تعداد اجزای خطی یا غیرخطی، پسیو یا اکتیو، تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان باشد، معتبر می‌باشد. این کلیت ناشی از این حقیقت است که قضیهٔ تلگان، تنها به دو قانون کیرشف بستگی دارد.

شبکهٔ فشردهٔ دلخواهی را در نظر بگیرید و برای ولتاژ شاخهٔ v_k و جریان شاخهٔ j_k جهت‌های قراردادی متناظر انتخاب کنید[1]. [بدین ترتیب $v_k(t)j_k(t)$ توانی است که در زمان t به وسیلهٔ شبکه به شاخهٔ k تحویل داده می‌شود.] سپس، از ماهیت شاخه‌ها صرف‌نظر کنید. به عبارت دیگر، شبکه را به عنوان گراف جهت‌دار $\mathcal{G}$ تصور کنید، مثلاً مانند آنچه که در شکل (۴-۱) نشان داده شده است. قضیهٔ تلگان بیان می‌دارد که: $\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$. تنها شرطی که لازم است روی ولتاژهای شاخهٔ v_k اعمال شود، آن است که آنها تمام محدودیت‌هایی که توسط KVL لازم می‌گردد، برآورند. به طریق مشابه، جریان‌های شاخهٔ j_k نیز باید در تمام محدودیت‌هایی که توسط KCL لازم می‌گردد، صدق کنند. باید توجه داشت که ماهیت اجزاء و یا در حقیقت وجود یا عدم وجود اجزایی که این j_kها و v_k ها را به عنوان جریانهای شاخه‌ها و ولتاژهای شاخه‌ها دارا باشند، مطلقاً ربطی به درستی قضیهٔ تلگان ندارد. قدرت این قضیه روی این حقیقت قرار دارد که v_k ها و j_kها اختیاری هستند و تنها باید محدودیت‌های کیرشف را برآورند.

قضیه شبکهٔ فشردهٔ دلخواهی را در نظر بگیرید که گراف $\mathcal{G}$ آن دارای b شاخه و n_t گره باشد. فرض کنید برای هر شاخهٔ این گراف، ولتاژ شاخهٔ v_k و جریان شاخهٔ j_k برای $k = 1, 2, \cdots, b$ به طور دلخواهی تعیین شوند. همچنین فرض کنید که آنها نسبت به جهت‌های قراردادی متناظری که به طور دلخواه انتخاب شده‌اند، سنجیده شوند. چنانچه ولتاژهای شاخه‌های v_1 ، v_2 ، ... ، v_b تمام

---

[1] فرض مربوط به جهت‌های قراردادی متناظر، در اینجا برای راحتی تعبیرهای بعدی در نظر گرفته شده است و لازمهٔ اثبات قضیه نمی‌باشد. اثبات قضیه تنها لازم می‌دارد که v_k ها و j_kها محدودیت‌های کیرشف را برآورند.

Prozhefa.com

محدودیت‌هایی راکه به وسیلهٔ KVL اعمال می‌شود، برآورند و چنانچه جریانهای شاخه‌های j_1، j_2، ...، j_b نیز تمام محدودیت‌هایی که به وسیلهٔ KCL اعمال می‌شود، برآورند، دراین صورت:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0} \qquad (۴-۱)$$

مثال فرض کنید ولتاژهای شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها در شکل (۴-۱) به طور دلخواهی چنان انتخاب شوند که برای تمام حلقه‌ها و گره‌ها تنها در قوانین کیرشف صدق کنند. به عنوان مثال، فرض کنید داشته باشیم:

$$v_1 = 2 \qquad v_2 = -1 \qquad v_3 = 1 \qquad v_4 = 4 \qquad v_5 = -3$$
$$j_1 = 1 \qquad j_2 = 1 \qquad j_3 = -3 \qquad j_4 = 2 \qquad j_5 = 2$$

با مراجعه به شکل (۴-۱) ملاحظه می‌شود که KVL برآورده می‌شود، زیرا داریم:

$$v_1 + v_2 = v_3 = v_4 + v_5$$

و KCL نیز برآورده می‌شود زیرا داریم:

$$j_1 = j_2 \qquad j_4 = j_5 \qquad j_1 + j_3 + j_5 = 0$$

برای ملاحظهٔ درستی قضیهٔ تلگان، محاسبهٔ زیر را انجام می‌دهیم:

$$\sum_{k=1}^{5} v_k j_k = 2 - 1 - 3 + 8 - 6 = 0$$

تبصره درک این موضوع که ولتاژهای شاخه‌های v_1، v_2، ...، v_b تنها تحت محدودیت‌های KVL به‌طور دلخواه انتخاب شدند و به طریق مشابه، جریانهای شاخه‌های j_1، j_2، ...، j_b نیز تحت محدودیت‌های KCL به‌طور دلخواه انتخاب شدند، حائز نهایت اهمیت است.

به عنوان مثال، فرض کنید $\hat{v}_1$، $\hat{v}_2$، ...، $\hat{v}_b$ و $\hat{j}_1$؛ $\hat{j}_2$، ...، $\hat{j}_b$ دستهٔ دیگری از ولتاژهای شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها باشند که به طور دلخواه انتخاب شده و در همان محدودیت‌های KVL و همان محدودیت‌های KCL صدق کنند. در این صورت می‌توان معادلهٔ (۴-۱) را به $\hat{v}_k$ ها و $\hat{j}_k$ها اعمال نمود و به دست آورد:

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k \hat{j}_k = 0 \qquad (۴-۲)$$

با این وجود می‌توان همین عمل را روی v_kها و $\hat{j}_k$ها انجام داد و به دست آورد:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k = 0$$

Prozhefa.com

همچنین روی $\hat{v}_k$ها و j_kها انجام داد و به دست آورد:

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = 0$$

اثبات قضیهٔ تلگان برای سادگی فرض می‌کنیم که گراف $\mathcal{G}$ متصل به هم بوده و شاخه‌های موازی نداشته باشد، یعنی بین هر دو گره آن تنها یک شاخه وجود داشته باشد. می‌توان اثبات را به‌راحتی برای حالت کلی تعمیم داد[1]. ابتدا یک گره دلخواه را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم و آن را با علامت گره ① مشخص می‌کنیم. بنابراین $e_1 = 0$. فرض‌کنید e_α و e_β به‌ترتیب ولتاژهای گره αام و گره βام نسبت به گره مبنا باشند. توجه به این مطلب حائز اهمیت است که وقتی ولتاژهای شاخه‌ها $(v_1, v_2, \cdots, v_b)$ انتخاب شدند دراین صورت با استفاده از KVL ولتاژهای گره‌های e_1 ، ... ، e_α ، ... ، e_β ، ... به طور یکتا مشخص می‌گردند. فرض کنید که شاخهٔ k گره ⓐ را به گره ⓑ مطابق شکل (۴-۲) وصل کند و فرض کنید جریان شاخهٔ k راکه ازگره ⓐ به گره ⓑ جاری می‌شود با $j_{\alpha\beta}$ نشان دهیم. در این صورت:

$$v_k j_k = (e_\alpha - e_\beta) j_{\alpha\beta}$$

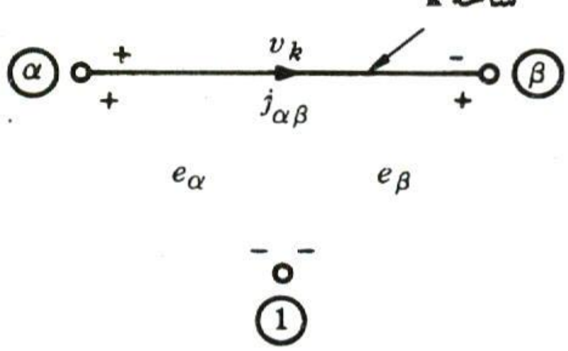
واضح است که $v_k j_k$ را نیز می‌توان برحسب $j_{\beta\alpha}$ ، یعنی جریان ازگره ⓑ به گره ⓐ به‌صورت زیر نوشت:

$$v_k j_k = (e_\beta - e_\alpha) j_{\beta\alpha} \qquad (۴-۳)$$

از جمع دو معادلهٔ بالا به دست می‌آوریم:

$$v_k j_k = \frac{1}{2}\left[(e_\alpha - e_\beta) j_{\alpha\beta} + (e_\beta - e_\alpha) j_{\beta\alpha}\right] \qquad (۴-۴)$$

اکنون اگر سمت چپ معادلهٔ (۴-۴) را برای تمام شاخه‌های موجود در گراف جمع کنیم به دست



شکل ٤-۲ یک شاخهٔ دلخواه، شاخهٔ k گره ⓐ را به گره ⓑ وصل می‌کند. جریان شاخهٔ j_k نیز به صورت $j_{\alpha\beta}$ یا $-j_{\beta\alpha}$ مشخص شده است.

[1] اگر شاخه‌های موازی وجود داشته باشد، آنها را با یک شاخهٔ تنهاکه جریان آن برابر مجموع جریان آن شاخه‌ها باشد عوض کنید. اگر چند جزء جدا از هم وجود داشته باشد، اثبات قضیه نشان می‌دهد که معادلهٔ (۴-۱) برای هر یک از اجزای آن صادق است. بنابراین وقتی که مجموع فوق روی تمام شاخه‌های گراف گرفته می‌شود قضیه باز هم برقرار است.

Prozhefa.com

می‌آوریم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k$$

جمع متناظر آن برای سمت راست معادلهٔ (۴-۴) چنین است:

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n_t}\sum_{\beta=1}^{n_t}(e_\alpha - e_\beta) j_{\alpha\beta}$$

که در آنجا جمع دوگانهٔ فوق شامل اندیس‌های α و β می‌باشد و تمام گره‌های گراف در نظر گرفته می‌شوند. این مجموع به معادلهٔ زیر منجر می‌گردد:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n_t}\sum_{\beta=1}^{n_t}(e_\alpha - e_\beta) j_{\alpha\beta} \qquad (۵-۴)$$

توجه کنید که اگر شاخه‌ای وجود نداشته باشد که گره α را به گره β وصل کند در این صورت قرار می‌دهیم: $j_{\alpha\beta} = j_{\beta\alpha} = 0$. اکنون که درستی رابطهٔ (۴-۵) برقرار شد، سمت راست آن را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n_t} e_\alpha\Big(\sum_{\beta=1}^{n_t} j_{\alpha\beta}\Big) - \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n_t} e_\beta\Big(\sum_{\alpha=1}^{n_t} j_{\alpha\beta}\Big)$$

برای هر α معین، عبارت $\sum_{\beta=1}^{n_t} j_{\alpha\beta}$ ، مجموع جریانهای تمام شاخه‌هایی است که گره α را ترک می‌کنند.

برای هر β معین، عبارت $\sum_{\alpha=1}^{n_t} j_{\alpha\beta}$ ، مجموع جریانهای تمام شاخه‌هایی است که به گره β وارد می‌شوند.

با استفاده از KCL هر یک از این مجموعها مساوی صفر است و بنابراین داریم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

بدین ترتیب، نشان دادیم که برای هر دسته از ولتاژهای داده شدهٔ شاخه‌ها که تنها در شرایط KVL صدق کنند و برای هر دسته از جریانهای داده شدهٔ شاخه‌ها که تنها در شرایط KCL صدق کنند، مجموع حاصلضرب $v_k j_k$ برابر صفر است. اثبات قضیه در اینجا تکمیل می‌گردد.

تمرین ۱ فرض کنید از گره مبنا شروع نموده و یک مسیر معینی را تا گره α طی می‌کنیم و برای پتانسیل این گره مقدار e_α را به دست می‌آوریم (با جمع ولتاژهای شاخه‌های مناسب). نشان دهید که اگر مسیر دیگری را طی کرده و پتانسیل $e'_\alpha \neq e_\alpha$ را به دست بیاوریم، در این صورت ولتاژهای شاخه‌های این دو مسیر، KVL را نقض می‌نمود.

Prozhefa.com

تمرین ۲ شبکهٔ دلخواهی را که به وسیلهٔ منابعی با هر تعداد و از هر نوع تحریک می‌شود در نظر بگیرید. فرض کنید که $v_1(t), v_2(t), \cdots, v_b(t)$ و $j_1(t), j_2(t), \cdots, j_b(t)$ ولتاژها و جریانهای شاخه‌های آن در لحظهٔ t باشند. چنانچه t_a و t_b لحظات انتخاب شدهٔ دلخواهی از زمان باشند، در مورد عبارت زیر چه می‌توانید بگویید؟

$$\sum_{k=1}^{b} v_k(t_a)\, j_k(t_b)$$

۵ - کاربردها

۵-۱ بقای انرژی

با در نظر گرفتن یک شبکهٔ دلخواه و با استفاده از طرز نمایش قضیهٔ تلگان داریم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k(t)\, j_k(t) = 0 \qquad \text{برای همهٔ } t$$

چون $v_k(t)\,j_k(t)$ توانی است که شبکه در لحظهٔ t به شاخهٔ k تحویل می‌دهد، می‌توان قضیه را چنین تعبیر نمود: مجموع توان تحویل داده شده به شاخه‌های شبکه در هر لحظهٔ t برابر صفر است. فرض کنید که شبکه، چند منبع نابسته داشته باشد. با جدا کردن این منابع از شاخه‌های دیگر در تشکیل مجموع فوق، نتیجه می‌گیریم که مجموع توانی که توسط منابع نابسته به شبکه تحویل داده می‌شود، مساوی مجموع توانی است که توسط تمام شاخه‌های دیگر شبکه جذب می‌شود. این مطلب از دیدگاه فلسفی بدین معنی است که KVL و KCL تا آنجا که مدارهای فشرده مورد توجه است، اصل بقای انرژی را لازم می‌دارند.

اکنون به طور خلاصه تا آنجا که شبکه‌های RLC خطی تغییرناپذیر با زمان مورد توجه هستند به تعبیر این اصل بقای انرژی می‌پردازیم. توانی که منابع تحویل می‌دهند برابر با شدت جذب انرژی در شبکه است. انرژی یا در مقاومتها با شدت $R_k j_k^2(t)$ برای مقاومت k ام تلف می‌شود و یا به صورت انرژی مغناطیسی در سلف‌ها $\left[\frac{1}{2} L_k j_k^2(t)\right]$ و یا به صورت انرژی الکتریکی در خازنها $\left[\frac{1}{2} C_k v_k^2(t)\right]$ ذخیره می‌شود. در مواقعی که اجزاء، تغییرپذیر با زمان باشند (مانند موتورها و مولدهای الکتریکی یا آمپلی فایرهای پارامتری)، بحث مطالب فوق بسیار پیچیده بوده و در فصل ۱۹ انجام خواهد گرفت.

تبصره قضیهٔ تلگان دارای پاره‌ای نتایج شگفت‌آور می‌باشد. به عنوان مثال دو شبکهٔ فشردهٔ دلخواهی را در نظر بگیرید که تنها محدودیت آنها این باشد که گراف یکسان داشته باشند. فرض کنید در هر یک از این شبکه‌ها جهت قراردادی یکسانی انتخاب کرده و شاخه‌ها را به طرز مشابهی شماره‌گذاری کنیم. (ممکن است شبکه‌ها غیرخطی و تغییرپذیر با زمان بوده و شامل منابع وابسته و همچنین منابع نابسته

Prozhefa.com

باشند.) فرض کنید v_k و j_k ولتاژها و جریانهای شاخه‌های شبکهٔ اول و $\hat{v}_k$ و $\hat{j}_k$ ولتاژها و جریانهای شاخه‌های شبکهٔ دوم باشند. چون v_k و $\hat{v}_k$ ها در دسته محدودیت‌های یکسان KVL و همچنین j_k و $\hat{j}_k$ها در دسته محدودیت‌های یکسان KCL صدق می‌کنند، بنابراین قضیهٔ تلگان روابط زیر را تضمین می‌کند:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k \hat{j}_k = 0$$

و:

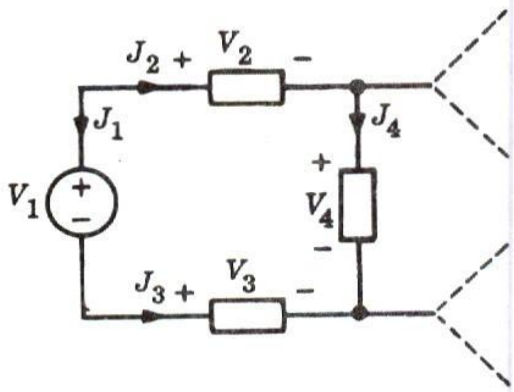
$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k = 0$$

توجه کنید با وجود اینکه دو عبارت اول بیانهای اصل بقای انرژی هستند، دو عبارت آخر هیچ تعبیر انرژی ندارند، زیرا آنها ولتاژهای یک شبکه و جریانهای شبکهٔ دیگر را شامل می‌شوند.

۵-۲ بقای توان مختلط

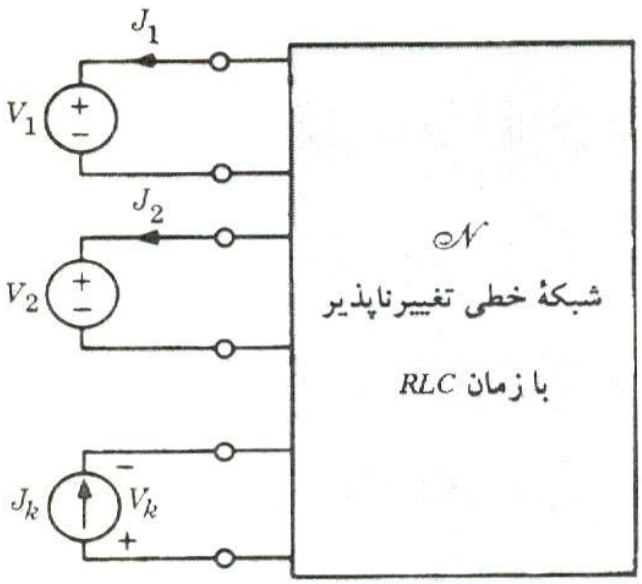
یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید و برای سادگی فرض کنید که این شبکه، مطابق شکل (۵-۱)، تنها دارای یک منبع سینوسی در شاخهٔ ۱ بوده و در حالت دایمی سینوسی باشد. برای هر شاخه (هنوز جهت‌های قراردادی متناظر به کار می‌رود)، ولتاژ شاخهٔ v_k را با فازور V_k و جریان شاخهٔ j_k را با فازور J_k نشان می‌دهیم. واضح است که V_1 ، V_2 ، … ، V_b و J_1 ، J_2 ، … ، J_b در تمام محدودیت‌هایی که به وسیلهٔ KVL و KCL اعمال می‌شود، صدق می‌کنند. همچنین مزدوج‌های $\bar{J}_1$ ، $\bar{J}_2$ ، … ، $\bar{J}_b$ نیز در تمام محدودیت‌های KCL صدق می‌کنند. بنابراین با استفاده از قضیهٔ تلگان داریم:

$$\sum_{k=1}^{b} \frac{1}{2} V_k \bar{J}_k = 0 \qquad (۵-۱)$$



شکل ۵-۱ شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان در حالت دایمی سینوسی؛ V_k و J_k فازورهایی می‌باشند که ولتاژها و جریانهای سینوسی را نشان می‌دهند.

Prozhefa.com



شکل ۵-۲ قضیهٔ بقای توان مختلط.

چون V_1 ولتاژ منبع و J_1 جریان متناظری است که نسبت به جهت قراردادی متناظر سنجیده می‌شود، پس $\frac{1}{2}V_1\bar{J}_1$ توان مختلطی است که توسط بقیهٔ شبکه به شاخهٔ ۱ تحویل داده می‌شود و بنابراین $-\frac{1}{2}V_1\bar{J}_1$ توان مختلطی است که منبع به بقیهٔ شبکه تحویل می‌دهد. معادلهٔ (۵-۱) را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-\frac{1}{2}V_1\bar{J}_1 = \sum_{k=2}^{b} \frac{1}{2}V_k\bar{J}_k$$

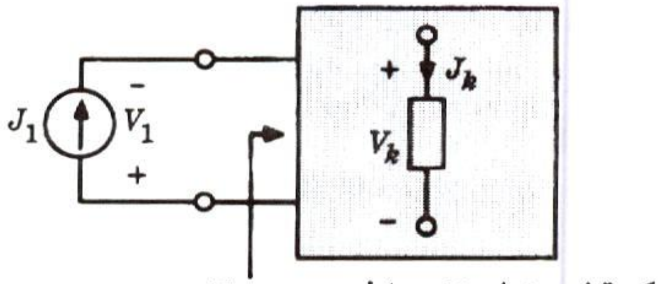
واضح است که رابطهٔ بالا را می‌توان برای شبکه‌هایی که بیش از یک منبع دارند، تعمیم داد. بنابراین ما قضیهٔ بقای توان مختلط را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان را که در حالت دایمی سینوسی بوده و توسط چندین منبع نابسته با فرکانس یکسان تحریک می‌شود، در نظر بگیرید (شکل (۵-۲) را ببینید). فرض کنید تمام منابع نابسته را مطابق شکل بیرون آورده و بقیهٔ شبکه را با $\mathscr{N}$ نمایش دهیم. در این صورت مجموع توان مختلطی که به وسیلهٔ هر یک از منابع نابسته به شبکهٔ $\mathscr{N}$ تحویل داده می‌شود مساوی مجموع توان مختلطی است که به وسیلهٔ بقیهٔ شاخه‌های دیگر شبکهٔ $\mathscr{N}$ دریافت می‌شود.

۵-۳ جزء حقیقی و فاز امپدانس‌های نقطهٔ تحریک

قضیهٔ بقای توان مختلط را می‌توان برای به دست آوردن بسیاری از خواص مهم امپدانس‌های نقطهٔ تحریک به کار برد. با مراجعه به شکل (۵-۳) می‌خواهیم امپدانس نقطهٔ تحریک Z_{in} شبکهٔ یک قطبی خطی و تغییرناپذیر با زمان $\mathscr{N}$ راکه تنها شامل مقاومتها، سلف‌ها و خازنها و/ یا ترانسفورماتورها

Prozhefa.com



شکل ۵-۳ خواص امپدانس نقطهٔ تحریک $Z_{in}(j\omega)$.

می‌باشد، در نظر بگیریم. فرض کنید که شبکهٔ $\mathcal{N}$ به وسیلهٔ یک منبع جریان سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω، تحریک می‌شود و منبع جریان با فازور J_1 و ولتاژی که در جهت قراردادی متناظر منبع سنجیده می‌شود با فازور V_1 نشان داده شود. واضح است که:

$$V_1 = -J_1 Z_{in}(j\omega)$$

فرض کنید شاخه‌های درون $\mathcal{N}$ از ۲ تا b شماره‌گذاری شده و برای $k = 2, 3, \cdots, b$ فازور جریانهای شاخه‌ها با J_k و امپدانس‌های شاخه‌ها با Z_k مشخص گردیده‌اند. فرض کنید P توان مختلطی باشد که منبع به یک قطبی تحویل می‌دهد. با استفاده از قضیهٔ تلگان به دست می‌آوریم:

$$P = -\frac{1}{2} V_1 \bar{J}_1 = \frac{1}{2} Z_{in}(j\omega) |J_1|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{b} V_k \bar{J}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{b} Z_k(j\omega) |J_k|^2 \qquad (۵-۲)$$

چنانچه جزء حقیقی معادلهٔ (۵-۲) در نظر گرفته شود، P_{av} یعنی توان متوسطی که منبع به $\mathcal{N}$ تحویل می‌دهد به دست می‌آید و داریم:

$$P_{av} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}[Z_{in}(j\omega)] |J_1|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{b} \mathrm{Re}[Z_k(j\omega)] |J_k|^2$$

توجه کنید که همهٔ این امپدانس‌ها در فرکانس زاویه‌ای یکسان ω که همان فرکانس زاویه‌ای منبع می‌باشد، محاسبه می‌شوند. حال می‌خواهیم استنباطهای معادلهٔ (۵-۲) را برای حالت‌های زیر بررسی کنیم.

حالت ۱ حالتی که شبکه‌های مقاومتی از شاخه‌هایی که همه، مقاومتهای مثبت داشته باشند، ساخته شود: در این صورت همهٔ Z_k ها در معادلهٔ (۵-۲) عددهای حقیقی مثبت هستند و در نتیجه Z_{in} یعنی مقاومت ورودی یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد. در این حالت Z_{in} به فرکانس زاویه‌ای ω بستگی ندارد و بنابراین امپدانس ورودی یک شبکهٔ مقاومتی که از مقاومتهای مثبت ساخته شده باشد، یک مقاومت مثبت می‌باشد.

Prozhefa.com

حالت ۲ حالتی که شبکه‌های RL از شاخه‌هایی ساخته شوند که همه یا دارای مقاومتهای مثبت یا اندوکتانس‌های مثبت باشند: در این صورت Z_k یا یک عدد حقیقی مثبت و یا یک عدد انگاری خالص به صورت $j\omega L_k$ می‌باشد که در آن $\omega > ۰$ و $L_k > ۰$ است. بدین ترتیب از معادلهٔ (۵-۲) داریم:

$$\mathrm{Re}[\mathrm{Z_{in}}(j\omega)] \geq ۰ \quad \text{و} \quad \mathrm{Im}[\mathrm{Z_{in}}(j\omega)] \geq ۰ \qquad \omega \geq ۰ \text{ برای همهٔ }$$

و یا به طور معادل:

$$۰ \leq \measuredangle\, \mathrm{Z_{in}}(j\omega) \leq ۹۰^\circ \qquad \omega \geq ۰ \text{ برای همهٔ }$$

بدین ترتیب نشان دادیم که در هر فرکانس زاویه‌ای مثبت ω ، امپدانس نقطهٔ تحریک یک مدار RL خطی تغییرناپذیر با زمان که از مقاومتهای مثبت و اندوکتانس‌های مثبت ساخته شده باشد، دارای زاویهٔ فازی بین ۰ و ۹۰° است.

حالت ۳ حالتی که شبکه‌های RC از شاخه‌هایی ساخته می‌شوند که همه یا دارای مقاومتهای مثبت و یا ظرفیت‌های مثبت باشند: یک استدلال مشابه نشان می‌دهد که در هر فرکانس زاویه‌ای مثبت ω ، امپدانس نقطهٔ تحریک یک مدار RC خطی تغییرناپذیر با زمان که از مقاومتهای مثبت و ظرفیت‌های مثبت ساخته شده باشد، دارای زاویهٔ فازی بین ۰ و -۹۰° است.

حالت ٤ حالتی که شبکه‌های بی‌اتلاف از خازنها و سلفها (شامل سلفهای تزویج شده) و/ یا ترانسفورماتورهای ایده‌آل، ساخته شده باشد: در بخش ۲ فصل ۸ بیان کردیم که سلفهای تزویج شده را می‌توان با سلفهای تزویج نشده و یک ترانسفورماتور ایده‌آل جانشین نمود. بنابراین در داخل یک قطبی $\mathscr{N}$ می‌توان فرض نمود که تمام شاخه‌ها اندوکتانس‌های مثبت، ظرفیت‌های مثبت یا سیم‌پیچ‌های ترانسفورماتور ایده‌آل می‌باشند. چون ترانسفورماتورهای ایده‌آل انرژی تلف نکرده و هیچ انرژی ذخیره نمی‌کنند، پس مجموع $\sum_k V_k \bar{J}_k$ روی تمام شاخه‌هایی که ترانسفورماتور ایده‌آل دارند برابر صفر است؛ بنابراین ترانسفورماتورهای ایده‌آل، چیزی به مجموع نشان داده شده در معادلهٔ (۵-۲) اضافه نمی‌کنند. جمله‌های دیگر یا به صورت $j\omega L_k |J_k|^۲$ و یا $\left(\frac{۱}{j\omega C_k}\right)|J_k|^۲$ می‌باشند که در هر دو حالت انگاری خالص می‌باشند و بنابراین:

$$\mathrm{Re}[\mathrm{Z_{in}}(j\omega)] = ۰ \qquad \omega \text{ برای همهٔ } \tag{۵-۳}$$

یا به طور معادل:

$$\measuredangle\, \mathrm{Z_{in}}(j\omega) = \pm ۹۰^\circ \qquad \omega \text{ برای همهٔ }$$

از این‌رو به این نتیجه می‌رسیم که در هر فرکانس زاویه‌ای ω ، امپدانس نقطهٔ تحریک یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان که از سلفها (تزویج شده یا تزویج نشده)، خازنها و ترانسفورماتورهای ایده‌آل ساخته شده باشد، انگاری خالص است؛ یعنی دارای زاویهٔ فازی برابر -۹۰° یا $+۹۰^\circ$ می‌باشد.

حالت ۵ حالتی که شبکه‌های RLC با ترانسفورماتورهای ایده‌آل، شامل شاخه‌هایی باشند که

Prozhefa.com

همه، مقاومتهای مثبت یا اندوکتانس‌های مثبت، ظرفیت‌های مثبت و/ یا سیم‌پیچ ترانسفورماتورهای ایده‌آل باشند: مانند حالت ۴، ترانسفورماتورهای ایده‌آل چیزی به مجموع نشان داده شده در معادلهٔ (۵-۲) اضافه نمی‌کنند. جملات دیگر به صورت: $R_k|J_k|^2$ ، $j\omega L_k|J_k|^2$ یا $\left(\frac{1}{j\omega C_k}\right)|J_k|^2$ می‌باشند. بنابراین هر جملهٔ $Z_k|J_k|^2$ یک عدد مثبت یا یک عدد انگاری است. از این‌رو Z_{in} عدد مختلطی است که جزء حقیقی آن بزرگتر یا مساوی صفر بوده و جزء انگاری آن ممکن است علامت مثبت یا منفی داشته باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که در هر فرکانس زاویه‌ای ω ، امپدانس نقطهٔ تحریک یک شبکهٔ RLC خطی تغییرناپذیر با زمان (که ممکن است شامل ترانسفورماتورهای ایده‌آل نیز باشد)، دارای جزء حقیقی نامنفی است. و یا به طور معادل دارای زاویهٔ فاز بین -90° و $+90^\circ$ می‌باشد. یعنی:

$$\mathrm{Re}[Z_{in}(j\omega)] \geq 0 \qquad \text{برای همهٔ } \omega \qquad (۵-۴)$$

یا به طور معادل:

$$-90^\circ \leq \measuredangle Z_{in}(j\omega) \leq 90^\circ \qquad \text{برای همهٔ } \omega$$

۵-۴ امپدانس نقطهٔ تحریک، توان تلف شده و انرژی ذخیره شده

شبکهٔ RLC خطی تغییرناپذیر با زمان را که توسط یک منبع جریان سینوسی تنها تحریک می‌شود، مجدداً در نظر می‌گیریم (شکل (۵-۳) را ببینید). باز هم فرض می‌کنیم که شبکه در حالت دایمی سینوسی باشد. توان مختلطی را که منبع به شبکه تحویل می‌دهد با به کار بردن طرز نمایش قبلی می‌توان به صورت زیر نوشت (معادلهٔ (۵-۲) را ببینید):

$$P = \frac{1}{2} Z_{in}(j\omega)|J_1|^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{b} Z_m(j\omega)|J_m|^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i R_i|J_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_k j\omega L_k|J_k|^2 + \frac{1}{2}\sum_l \frac{1}{j\omega C_l}|J_l|^2$$

که در آن، جملات متناظر با مقاومتها، سلف‌ها و خازنها را به صورت مجموعهای جداگانه نوشته‌ایم. با نمایش جزء‌های حقیقی و انگاری P ، به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{1}{2}\sum_i R_i|J_i|^2 + 2j\omega\left(\sum_k \frac{1}{4}L_k|J_k|^2 - \sum_l \frac{1}{4}\frac{1}{\omega^2 C_l}|J_l|^2\right) \qquad (۵-۵)$$

قبلاً دیده‌ایم که در حالت دایمی سینوسی، متوسط $R_i j_i^2(t)$ (در طول یک پریود) چنین است:

$$\frac{1}{2}R_i|J_i|^2$$

به طریق مشابه، متوسط $\frac{1}{2}L_k j_k^2(t)$ چنین است:

$$\frac{1}{4}L_k|J_k|^2$$

Prozhefa.com

و متوسط $\frac{1}{2} C_l v_l^2(t)$ چنین است:

$$\frac{1}{4} C_l |V_l|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{\omega^2 C_l} |J_l|^2$$

بنابراین، جملهٔ اول معادلهٔ (۵-۵) توان متوسط تلف شده در $\mathscr{N}$ بوده (که با P_{av} نشان داده می‌شود) و دو جملهٔ داخل پرانتز به ترتیب انرژی مغناطیسی متوسط ذخیره شدهٔ $\mathscr{E}_M$ و انرژی الکتریکی متوسط ذخیره شدهٔ $\mathscr{E}_E$ می‌باشد. بنابراین، معادلهٔ (۵-۵) را می‌توان چنین نوشت:

$$Z_{in}(j\omega) = \frac{2P_{av} + 4j\omega(\mathscr{E}_M - \mathscr{E}_E)}{|J_1|^2} \tag{۵-۶}$$

باید تأکید نمود که: (۱) $|J_1|$ حداکثر دامنهٔ جریان سینوسی ورودی می‌باشد، (۲) P_{av} ، $\mathscr{E}_M$ و $\mathscr{E}_E$ به ترتیب توان متوسط تلف شده، انرژی مغناطیسی متوسط ذخیره شده و انرژی الکتریکی متوسط ذخیره شده می‌باشند و (۳) این سه مقدار متوسط به وسیلهٔ متوسط‌گیری در طول یک پریود آن حرکت سینوسی، حاصل شده‌اند. بنابراین ما نتیجهٔ زیر را برقرار کردیم.

قضیه یک شبکهٔ RLC خطی تغییرناپذیر با زمان که به وسیلهٔ یک منبع جریان سینوسی با دامنهٔ حداکثر یک آمپری تحریک می‌شود، داده شده است و با فرض اینکه شبکه در حالت دایمی سینوسی باشد، امپدانس نقطهٔ تحریکی که توسط منبع دیده می‌شود دارای یک جزء حقیقی است که مساوی دو برابر توان متوسط تلف شده می‌باشد و دارای یک جزء انگاری است که مساوی 4ω برابر تفاضل میان متوسط انرژی مغناطیسی ذخیره شده و متوسط انرژی الکتریکی ذخیره شده می‌باشد.

تمرین ۱ معادلهٔ بیان کنندهٔ بقای توان مختلط را برای شبکهٔ شکل (۴-۱):

الف ـ برحسب فازورهای ولتاژ شاخه و فازورهای جریان شاخه بنویسید.

ب ـ برحسب امپدانس‌های شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها بنویسید.

تمرین ۲ حالت ۳ از بخش ۵-۳ را به تفصیل ثابت کنید.

تمرین ۳ مدارهای تغییرناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید: RL سری، RC موازی، LC سری، LC موازی، RLC سری و RLC موازی. در هر حالت، فرکانسی را (اگر وجود داشته باشد) که در آن $\measuredangle Z(j\omega)$ برابر °۰ ، °۴۵، °۴۵ - و °۹۰ باشد، پیدا کنید.

تمرین ٤ یک شبکهٔ RLC در حالت دایمی سینوسی بوده و به وسیلهٔ یک منبع تنها که جریان $j_1(t) = 7\cos(377t - 30°)$ آمپر را تحویل می‌دهد تحریک می‌شود. با فرض اینکه توان متوسط تلف شده در مقاومتها ۱۰ وات باشد، در فرکانس ۶۰Hz دربارهٔ امپدانسی که توسط منبع دیده می‌شود، چه می‌توانید بگویید؟

تمرین ۵ نشان دهید که هر شبکهٔ دوسر که از به هم پیوستن هر تعداد از اجزای دوسر پسیو حاصل شده باشد، پسیو است.

Prozhefa.com

خلاصه

- شبکه‌های مورد مطالعه، از به هم پیوستن مدل‌های اجزای فیزیکی تشکیل می‌شوند. این مدل‌ها شامل مقاومتها، خازنها، سلف‌ها، سلف‌های تزویج شده، ترانسفورماتورهای ایده‌آل و منابع نابسته و وابسته می‌باشند. با تعیین جهت‌های قراردادی متناظر برای ولتاژ شاخه‌ها و جریان شاخه‌ها و صرف‌نظر کردن از ماهیت اجزای آن، یک گراف جهت‌دار $\mathcal{G}$ به‌دست می‌آوریم. هنگامی که شاخه‌ها و گره‌های $\mathcal{G}$ شماره‌گذاری شوند، تناظری یک به یک میان گراف $\mathcal{G}$ و ماتریس تلاقی $\mathbf{A}_a$ آن وجود دارد. ماتریس $n_t \times b$ ، $\mathbf{A}_a$ چنان است که بسته به اینکه شاخهٔ k از گره i خارج شده یا به آن گره وارد شود a_{ik} مساوی ۱ + یا ۱ - است و چنانچه شاخهٔ k با گره i تلاقی نداشته باشد، $a_{ik} = 0$ می‌باشد.
- منظور از **کات‌ست** یک گراف پیوسته، دسته‌ای از شاخه‌هاست به قسمی که: (۱) حذف تمام شاخه‌های این دسته، موجب شود که گراف باقیمانده دارای دو جزء جدا از هم باشد و (۲) حذف تمام شاخه‌های این دسته به‌جز یکی از آنها، یک گراف پیوسته باقی گذارد.
- به موجب KCL ، برای هر شبکهٔ فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از کات‌ست‌های آن، مجموع جبری جریانهای تمام شاخه‌های کات‌ست، مساوی صفر است.
- در یک گراف داده شدهٔ $\mathcal{G}$ ، $\mathfrak{L}$ را حلقه گویند اگر: (۱) $\mathfrak{L}$ یک زیرگراف متصل به هم $\mathcal{G}$ باشد و (۲) به هر گره از $\mathfrak{L}$ دقیقاً دو شاخه از $\mathfrak{L}$ متصل شده باشد.
- به موجب KVL ، برای هر شبکهٔ فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از حلقه‌های آن، مجموع جبری ولتاژهای تمام شاخه‌هایی که در یک حلقه قرار دارند، مساوی صفر است.
- هر دو قانون کیرشف بدون در نظر گرفتن ماهیت اجزای یک شبکه برقرارند و هنگامی که برحسب جریانهای شاخه‌ها (KCL) یا ولتاژهای شاخه‌ها (KVL) بیان گردند، معادلات جبری خطی با ضرایب ثابت حقیقی به وجود می‌آورند.
- قضیهٔ تلگان در هر شبکهٔ فشرده به کار می‌رود. با داشتن گراف جهت‌دار آن، چنانچه برای شاخه‌های آن ولتاژهای شاخه‌های دلخواه v_1 ، v_2 ، ⋯ ، v_b را که تنها در محدودیت KVL صدق می‌کنند و جریانهای شاخه‌های j_1 ، j_2 ، ⋯ ، j_b را که تنها در محدودیت‌های KCL صدق می‌کنند، تعیین کنیم، در این صورت:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

- با استفاده از این قضیه ثابت کردیم که:

$$Z_{in}(j\omega) = \frac{2P_{av} + 4j\omega(\mathscr{E}_M - \mathscr{E}_E)}{|J_1|^2}$$

که در آنجا $|J_1|$ جریان ورودی "حداکثر" است، و تمام مقادیر متوسط، در طول یک پریود از حرکت دایمی سینوسی در فرکانس ω ، حساب شده‌اند.

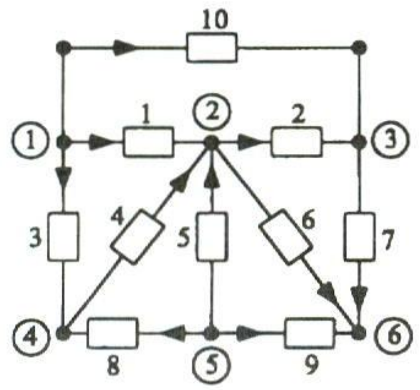
Prozhefa.com

مسائل

۱- **الف** - در مدار شکل (مسألهٔ ۹-۱) گراف جهت‌دار را رسم کرده، ماتریس تلاقی گره با شاخهٔ $\mathbf{A}_a$ را بنویسید.

ب - کات‌ست‌هایی که شاخهٔ ۴ را در بردارند مشخص کنید.

پ - کات‌ست‌هایی که شاخه‌های ۳ و ۷ را در بردارند مشخص کنید.



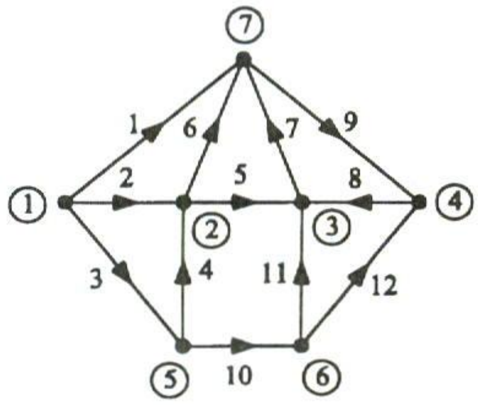
شکل (مسألهٔ ۹-۱)

۲- در گراف شکل (مسألهٔ ۹-۲)،

الف - تمام کات‌ست‌هایی را که شامل شاخهٔ ۳ هستند مشخص کرده و معادلهٔ آنها را بنویسید.

ب - تمام کات‌ست‌هایی را که با حلقهٔ ① ⑤ ⑥ ④ ⑦ ① شاخهٔ مشترکی نداشته باشند، مشخص کنید.

پ - چند جریان شاخهٔ مستقل از هم وجود دارد؟ یک دسته از این جریانها را مشخص کنید.



شکل (مسألهٔ ۹-۲)

چند ولتاژ شاخهٔ مستقل از هم وجود دارد؟ یک دسته از این ولتاژها را مشخص کنید.

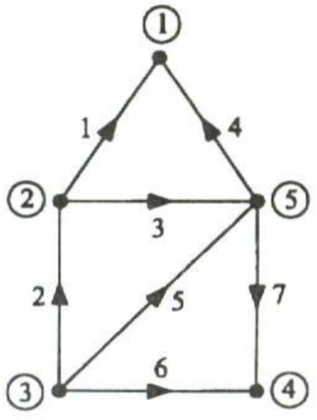
۳- برای گراف نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۹-۳)،

الف - ماتریس تلاقی گره با شاخه را بنویسید.

ب - با قرار دادن گره ③ به عنوان گره زمین، معادلات KVL را به صورت $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$ بنویسید.

پ - تمام کات‌ست‌هایی را مشخص کنید که قبلاً در $\mathbf{A}_a$ ظاهر نشده‌اند.

ت - بزرگترین زیرمجموعه‌ای از آنها را انتخاب کنید که به معادلات نابستهٔ خطی KCL منجر شوند.



شکل (مسألهٔ ۹-۳)

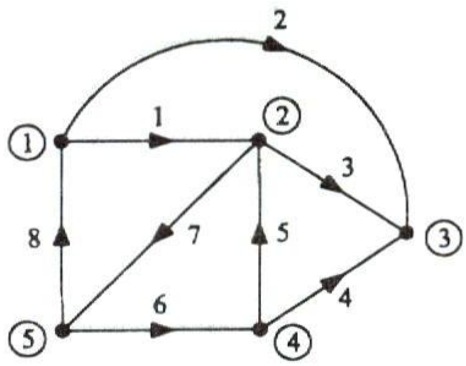
٤- **الف** - معادلات جریان زیر برای گراف شکل (مسألهٔ ۹-۴) نوشته شده‌اند. آیا برای توصیف جریانهای این گراف، این معادلات کافی هستند؟ توضیح دهید.

Prozhefa.com

$$i_1 + i_2 - i_8 = 0$$
$$i_8 - i_7 + i_6 = 0$$
$$i_4 + i_5 - i_6 = 0$$
$$i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

ب ـ اگر معادلات دیگری به صورت زیر بنویسیم جواب قسمت (الف) چیست؟

$$i_1 + i_2 - i_7 + i_6 = 0$$
$$i_2 + i_3 - i_5 + i_6 = 0$$
$$i_1 - i_7 + i_5 - i_3 = 0$$
$$i_8 - i_7 + i_5 + i_4 = 0$$



شکل (مسألهٔ ۹-٤)

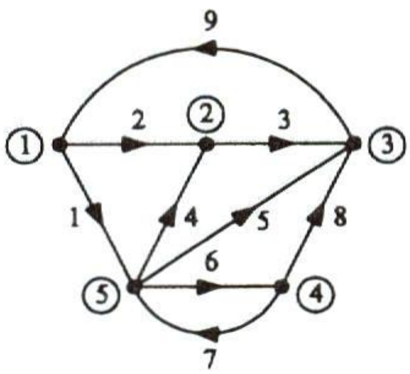
۵- برای گراف شکل (مسألهٔ ۹-۵)،

الف ـ ماتریس تلاقی گره با شاخه را بنویسید.

ب ـ گره ⑤ را به عنوان گره مبنا انتخاب کنید و ماتریس تلاقی مختصر شده را بنویسید.

پ ـ با به کار بردن ماتریس تلاقی مختصر شده، یک دسته معادلات KCL و KVL مستقل از هم بنویسید.

ت ـ چهار کات‌ست که شاخه‌های آنها به یک گره تنها وصل نباشند و مستقل از هم باشند انتخاب کنید. استقلال خطی آنها را نشان دهید.



شکل (مسألهٔ ۹-۵)

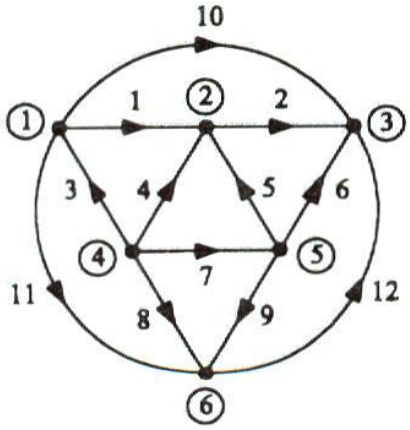
۶- در گراف نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۹-۶)،

الف ـ نشان دهید که هر یک از دسته شاخه‌های زیر یک کات‌ست می‌باشند:

{۱ , ۲ , ۴ , ۵}، {۱ , ۲ , ۴ , ۶ , ۷ , ۹}، {۱, ۲, ۳, ۶, ۸, ۹}، {۲, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱}، {۸, ۹, ۱۱, ۱۲}

ب ـ معادلات KCL هر کات‌ست را بنویسید و هر یک از آنها را برحسب ترکیبی خطی از معادلات گره مناسب بیان کنید.

پ ـ ثابت کنید این کات‌ست‌ها نسبت به هم مستقل خطی هستند.



شکل (مسألهٔ ۹-۶)

۷- در گراف نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۹-۶)،

الف ـ نشان دهید که هر یک از دسته شاخه‌های زیر یک حلقه هستند:

Prozhefa.com

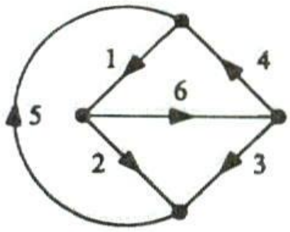
{۱,۳,۵,۷}، {۲,۳,۵,۷,۱۰}، {۴,۵,۷}، {۳,۶,۷,۱۰}، {۳,۷,۹,۱۰,۱۲}، {۳,۸,۱۰,۱۲}، {۱۰,۱۱,۱۲}.

ب ـ ثابت کنید این حلقه‌ها نسبت به هم مستقل خطی هستند.

۸ـ نشان دهید که دسته معادلات:

$$v_1 + v_6 + v_3 + v_5 = 0$$
$$v_1 + v_2 - v_3 + v_4 = 0$$
$$v_2 + v_5 - v_4 - v_6 = 0$$

معادلات حلقهٔ مستقل از هم گراف نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۹-۸) است و هر معادلهٔ حلقهٔ دیگر از ترکیب خطی این معادلات قابل به‌دست آوردن است.



شکل (مسألهٔ ۹-۸)

۹ـ ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ گره با شاخهٔ یک گراف به صورت زیر داده شده است:

$$\begin{array}{c} \text{گره} \downarrow \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{شاخه} \rightarrow \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

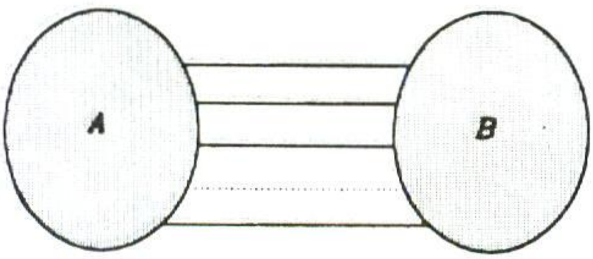
الف ـ گراف مربوط را رسم کنید.

ب ـ از دسته شاخه‌های داده شدهٔ زیر کدام یک کات‌ست تشکیل می‌دهند: {۱,۳,۴,۷,۵}، {۱,۳,۴,۷}، {۱,۴,۶,۷}، {۴,۵,۶,۳,۸}، {۲,۴,۵,۸}، {۱,۳,۵,۶}.

پ ـ معادلات KCL مربوط به کات‌ست‌ها را بنویسید و آنها را برحسب ترکیبی خطی از معادلات گره مناسب بیان کنید.

۱۰ـ گرافی با ماتریس تلاقی $\mathbf{A}_a$ توصیف شده است. آیا می‌توان از روی ماتریس تلاقی در مورد پیوستگی گراف یا ناپیوستگی آن مطلبی بیان کرد؟ مطلب مورد توجه را بیان کنید و با یک مثال آن را نشان دهید.

۱۱ـ گره‌های یک گراف را به دو دستهٔ A و B تقسیم کرده و کلیهٔ شاخه‌هایی که مجموعهٔ گره‌های A و B را به هم وصل می‌کنند مطابق شکل (مسألهٔ ۹-۱۱) در نظر می‌گیریم. تحت چه شرایطی این شاخه‌ها یک کات‌ست تشکیل می‌دهند؟



شکل (مسألهٔ ۹-۱۱)

۱۲ـ الف ـ اگر ولتاژهای v_k در محدودیت‌های KVL صدق کرده و قضیهٔ تلگان صادق باشد

Prozhefa.com

($\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$)، نشان دهید که جریانهای j_k نیز در محدودیت‌های KCL صدق می‌کنند.

ب ـ اگر جریانهای j_k در محدودیت‌های KCL صدق کرده و قضیهٔ تلگان صادق باشد، نشان دهید که ولتاژهای v_k نیز در محدودیت‌های KVL صدق می‌کنند.

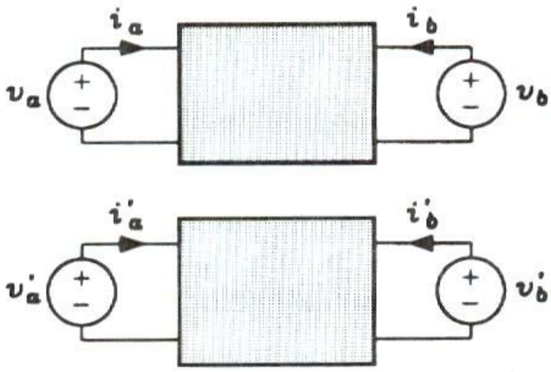
۱۳ـ فرض کنید دسته متغیرهای ولتاژ شاخهٔ $v_1(t), v_2(t), \cdots, v_b(t)$ کلیهٔ محدودیت‌های KVL و دسته متغیرهای جریان شاخهٔ $j_1(t), j_2(t), \cdots, j_b(t)$ کلیهٔ محدودیت‌های KCL را برآورده سازند. نشان دهید که روابط زیر همواره برقرار است:

$$\sum_{k=1}^{b} \frac{d}{dt} v_k(t_1) \cdot j_k(t_2) = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{b} v_k(t_1) \cdot \frac{d}{dt} j_k(t_2) = 0$$

۱۴ـ الف ـ فرض کنید N یک دو قطبی باشد که از به هم پیوستن تعداد دلخواهی مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده باشد. دو آزمایش زیر را در نظر بگیرید.

آزمایش ۱: دو منبع ولتاژ v_a و v_b را به دو قطب N اعمال کرده و جریانهای قطب i_a و i_b را اندازه می‌گیریم.

آزمایش ۲: دو منبع ولتاژ v'_a و v'_b را به دو قطب N اعمال کرده و جریانهای قطب i'_a و i'_b را اندازه می‌گیریم.



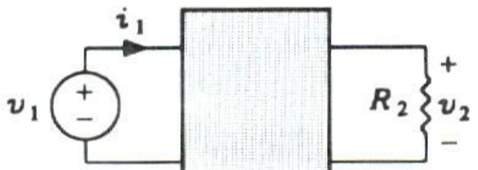
شکل (مسألهٔ ۹-۱٤)

ثابت کنید این دو دسته اندازه‌گیری‌ها به صورت زیر به هم مربوط هستند:

$$v_a i'_a + v_b i'_b = v'_a i_a + v'_b i_b$$

ب ـ اگر $v_b = v'_a = 0$ و $v_a = v'_b$ باشد، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۱۵ـ در شکل (مسألهٔ ۹-۱۵) شبکهٔ N از تعدادی مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. به‌ازای دو مقدار R_2 اندازه‌گیری‌های زیر به دست آمده است. مقدار $\hat{v}_2$ را حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۹-۱۵)

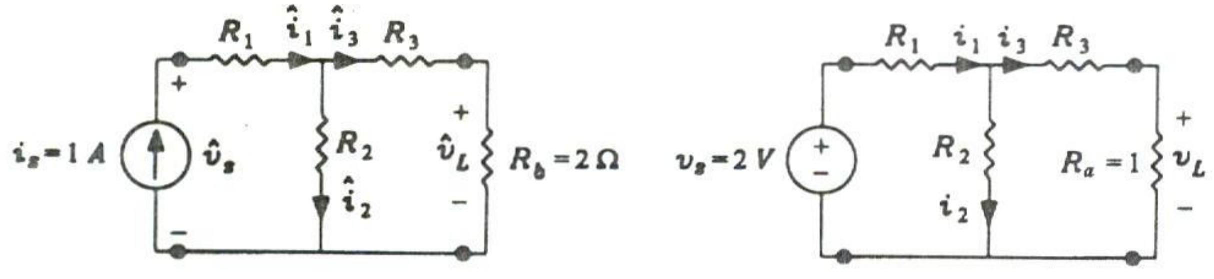
$\hat{R}_2 = 8\,\Omega$	$R_2 = 5\,\Omega$
$\hat{v}_1 = 7\,V$	$v_1 = 4\,V$
$\hat{i}_1 = 3\,A$	$i_1 = 2\,A$
$\hat{v}_2 = ?\,V$	$v_2 = 3\,V$

Prozhefa.com

۱۶- فرض کنید در مدارهای شکل (مسألهٔ ۹-۱۶) v_k و i_k ولتاژ شاخه و جریان شاخهٔ مدار شکل (الف) و $\hat{v}_k$ و $\hat{i}_k$ ولتاژ شاخه و جریان شاخهٔ مدار شکل (ب) باشند. اندازه‌گیری‌های زیر به‌دست آمده است:

$$i_1 = 1A \quad , \quad v_L = 2V \quad , \quad \hat{v}_2 = 3V$$

به فرض اینکه مقاومتهای مجهول R_1 ، R_2 و R_3 مقاومتهای خطی باشند، با استفاده از قضیهٔ تلگان $\hat{v}_L$ را تعیین کنید.



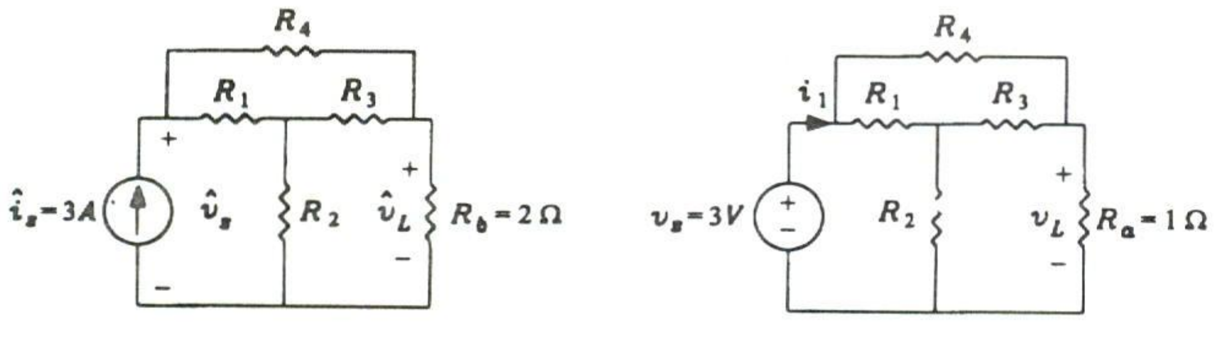
(ب) (الف)

شکل (مسألهٔ ۹-۱۶)

۱۷- در مدارهای شکل (مسألهٔ ۹-۱۷) v_k و i_k ولتاژ و جریان شاخهٔ kام مدار شکل (الف) و $\hat{v}_k$ و $\hat{i}_k$ ولتاژ و جریان شاخهٔ kام مدار شکل (ب) هستند. اندازه‌گیری‌های زیر به دست آمده است:

$$i_1 = 2A \quad , \quad v_L = 2V \quad , \quad \hat{v}_s = 3V$$

با استفاده از قضیهٔ تلگان $\hat{v}_L$ را به دست آورید.



(ب) (الف)

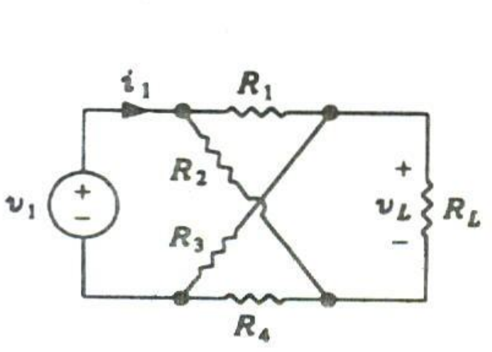
شکل (مسألهٔ ۹-۱۷)

۱۸- در مدار نشان داده در شکل (مسألهٔ ۹-۱۸) دو دسته اندازه‌گیری به شرح زیر انجام گرفته است:

برای $R_L = 2\,\Omega$: $v_1 = 8V$ ، $i_1 = -2A$ و $v_L = 2V$

برای $R_L = 4\,\Omega$: $\hat{v}_1 = 12V$ و $\hat{i}_1 = -2{,}4A$

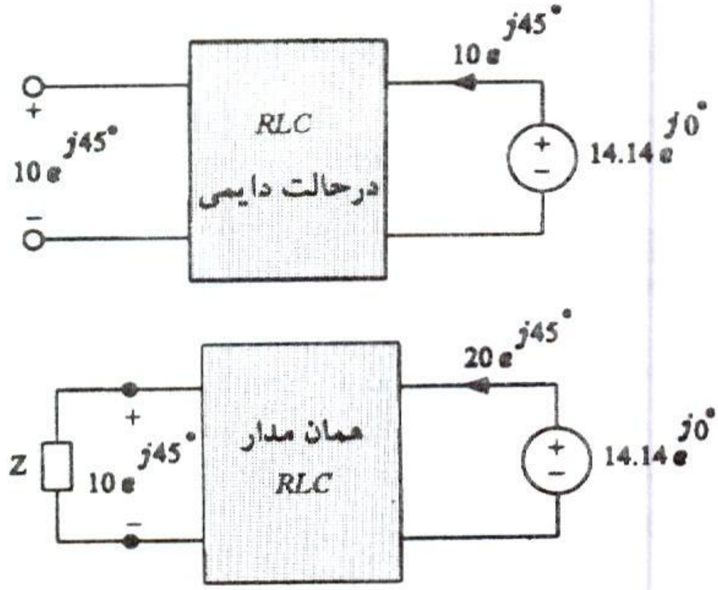
با فرض اینکه R_1 ، R_2 ، R_3 و R_4 مقاومتهای خطی هستند، مقدار $\hat{v}_L$ را به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۹-۱۸)

Prozhefa.com

۱۹- دو آزمایش در مورد یک مدار RLC در حالت دایمی مطابق شکل (مسألهٔ ۹-۱۹) انجام شده است. $Z(j\omega)$ را در فرکانس آزمایش به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۹-۱۹)

۲۰- در مدار شکل (مسألهٔ ۹-۲۰) وقتی که $v_1(t) = \frac{۵}{\sqrt{۲}}\cos\omega t$ و $v_2(t) = ۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$i_1(t) = \cos(\omega t + ۱۸{,}۴°)$$

$$i_2(t) = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos(\omega t - ۲۶{,}۶°)$$

شکل (مسألهٔ ۹-۲۰)

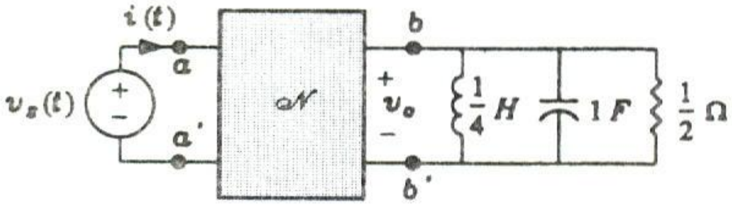
اکنون اگر $v_1(t) = ۵\cos(\omega t - ۹۰°)$ و $v_2(t) = ۵\cos\omega t$ ، جریانهای $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را به دست آورید. (از هر راهی که می‌خواهید حل کنید و هر قضیه‌ای که بتوانید استفاده کنید.)

۲۱- مدارهای N و N_1 از عناصر R ، L و C تشکیل یافته و دو آزمایش مطابق شکل (مسألهٔ ۹-۲۱) انجام می‌گیرد. نتایج آزمایش‌ها در حالت دایمی سینوسی عبارتند از:

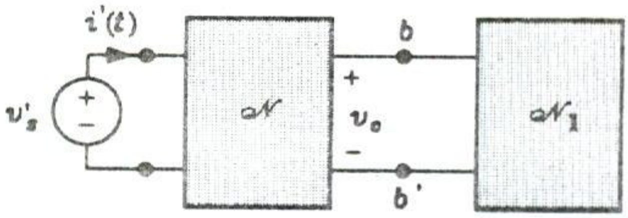
شکل (الف)	شکل (ب)
$v_s(t) = ۲\cos ۲t$	$v'_s(t) = ۲\cos ۲t$
$i(t) = \frac{۱}{۲}\cos(۲t - ۶۰°)$	$i'(t) = \cos ۲t$
$v_o(t) = \frac{۱}{۲}\cos(۲t - ۲۰°)$	$v'_o(t) = \cos(۲t - ۴۰°)$

با توجه به نتایج این آزمایش، یک قطبی N_1 از چه عناصری می‌تواند ساخته شود؟ این عناصر را تعیین کنید.

Prozhefa.com



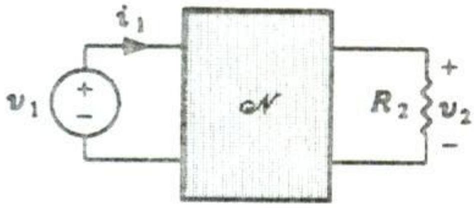
(الف)



(ب)

شکل (مسألهٔ ۹-۲۱)

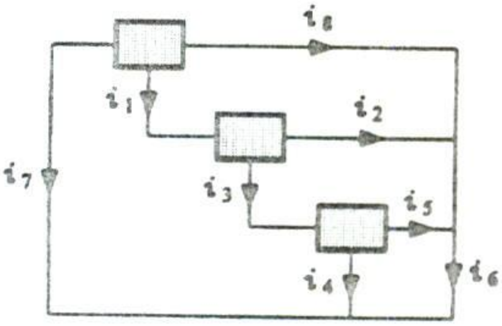
۲۲- شبکهٔ N دادە شده در شکل (مسألهٔ ۹-۲۲) از تعداد b مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. اندازه‌گیری‌های ولتاژ و جریان برای سه مقدار مختلف $R_۲$ انجام گرفته و نتایج در جدول زیر نشان داده شده است. کمیت‌های x، y و z مشخص شده در جدول را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۹-۲۲)

شمارهٔ آزمایش	$v_۱$	$i_۱$	$v_۲$	$R_۲$
۱	۴	۲	x	۱
۲	۷	y	۳	۳
۳	z	۴	۵	۵

۲۳- مدار شکل (مسألهٔ ۹-۲۳) از به هم پیوستن سه عنصر سه سر تشکیل یافته است. جریانهای سرهای این عناصر سه سر در شکل مشخص شده است.



شکل (مسألهٔ ۹-۲۳)

الف - گراف نشان دهندهٔ این مدار را رسم کنید. معادلات گره را هم در این مدار و هم در گراف آن بنویسید.

ب - آیا این گراف روابط ولتاژ شاخه‌ها را هم به خوبی نشان می‌دهد؟

پ - برای $i_۵ = ۱A$، $i_۶ = ۲A$، $i_۷ = ۳A$ و $i_۸ = ۴A$ جریانهای شاخه‌های دیگر راتعیین‌کنید.

Prozhefa.com

۲۴- اگر درجهٔ یک گره از یک گراف G برابر تعداد شاخه‌های وصل شده به آن گره تعریف شود نشان دهید که در هر گراف پایاندار G تعداد گره‌های با درجهٔ فرد همواره زوج است.

۲۵- نشان دهید که رتبهٔ ماتریس تلاقی گره با شاخهٔ $\mathbf{A}_a$ برابر $n = n_t - 1$ است (n_t تعداد کل گره‌ها است) و اگر هر سطر ماتریس $\mathbf{A}_a$ حذف شود، رتبهٔ ماتریس باقیمانده برابر $n = n_t - 1$ است. اگر دو سطر از ماتریس $\mathbf{A}_a$ حذف شود رتبهٔ ماتریس باقیمانده چگونه خواهد بود؟