۱۲
معادلات حالت

وقتی که معادلات دیفرانسیل یک شبکهٔ فشرده به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$$

(که در آنجا $\mathbf{x}$ یک بردار مثلاً با n مؤلفه و $\mathbf{w}$ نشان دهندهٔ دستهٔ ورودی‌ها و t نمایشگر زمان است)، گویند معادلات، **به صورت حالت** بوده و $\mathbf{x}$ نشان دهندهٔ **حالت** شبکه است. برای نوشتن معادلات به صورت فوق، سه دلیل اساسی وجود دارد: (۱) از لحاظ برنامه‌نویسی برای کامپیوترهای آنالوگ و یا دیجیتال، این شکل بسیار مناسب است. (۲) تعمیم تجزیه و تحلیل به شبکه‌های غیرخطی و/ یا تغییرپذیر با زمان، کاملاً راحت است (در حالی که چنین تعمیمی در مورد تجزیه و تحلیل حلقه، مش، کات‌ست یا گره راحت نمی‌باشد). (۳) تعدادی از مفاهیم نظریه‌ای سیستم‌ها، در این شکل، به راحتی قابل به کار بردن در شبکه‌ها می‌باشند.

در بخش ۱ با استفاده از مثالهایی، طرز نوشتن معادلات حالت برای شبکه‌های سادهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، تشریح شده است. در بخش ۲ پاره‌ای از مفاهیم مربوط به حالت، مرور و تعمیم داده شده است. در بخش ۳ شبکه‌های سادهٔ تغییرپذیر با زمان و غیرخطی بررسی شده‌اند. بالاخره در بخش ۴، به منظور نوشتن معادلات حالت برای دستهٔ وسیعی از شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، یک روش عمومی داده شده است.

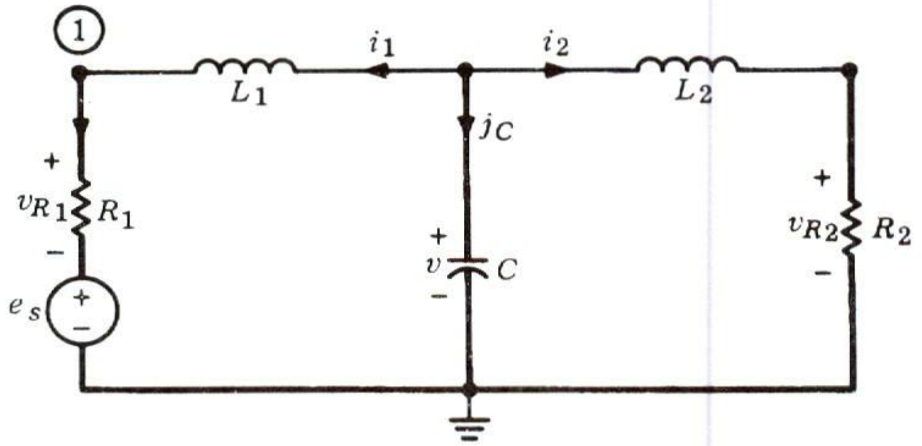
۱- شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۱-۱) را در نظر بگیرید. این شبکه، سه عنصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی دارد: یک خازن C و دو سلف L_1 و L_2 . بنابراین، هر پاسخ این شبکه، ارتباط نزدیکی با ولتاژ v خازن و جریانهای i_1 و i_2 سلف‌ها دارد. چنانچه بخواهیم این متغیرها را برای تجزیه و تحلیل خود به کار بریم و معادلات را به صورت حالت زیر بنویسیم:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) \qquad (۱-۱)$$

می‌توان v ، i_1 و i_2 را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب نمود. یعنی بردار:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v \\ i_1 \end{bmatrix} \qquad (۲-۱)$$



شکل ۱-۱ شبکه‌ای که برای تشریح طرز نوشتن معادلات حالت به کار رفته است؛ شاخه‌های درخت سیاه‌تر رسم شده‌اند.

را به عنوان بردار حالت، انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که در معادلهٔ دیفرانسیل برداری (۱-۱)، مشتق اول بردار حالت، یعنی $\dot{\mathbf{x}}$ برحسب خود $\mathbf{x}$ و ورودی $\mathbf{w}$ ، بیان شده است. توجه کنید که کمیت‌های $C\left(\frac{dv}{dt}\right)$ ، $L_1\left(\frac{di_1}{dt}\right)$ و $L_2\left(\frac{di_2}{dt}\right)$ به ترتیب، جریان داخل خازن و ولتاژ دوسر سلف‌ها می‌باشند. برای محاسبهٔ $C\left(\frac{dv}{dt}\right)$ برحسب متغیرهای حالت و شاید ورودی، باید یک معادلهٔ کات‌ست نوشت؛ به طریق مشابه، برای محاسبهٔ $L_1\left(\frac{di_1}{dt}\right)$ و $L_2\left(\frac{di_2}{dt}\right)$ باید معادلات حلقه نوشته شوند. این مطلب چنین پیشنهاد می‌کند که خازن‌ها باید به شاخه‌های یک درخت و سلف‌ها به لینک‌های آن درخت متعلق باشند. هنگامی که روی این پیشنهاد کاملاً فکر کرده و گامهای آن مرتب گردد، روش کار زیر حاصل می‌شود:

گام ۱ درختی انتخاب کنید که تمام خازن‌ها را دربرداشته و هیچ سلفی را شامل نباشد. چنین درختی در شکل (۱-۱) با سیاه‌تر کردن شاخه‌های درخت، مشخص شده است.

گام ۲ ولتاژهای خازن‌های شاخه‌های درخت و جریانهای سلف‌های لینک‌ها را به عنوان متغیر به کار برید. بدین ترتیب، v ، i_1 و i_2 را در این مثال به کار می‌بریم.

گام ۳ برای هر خازن، یک معادلهٔ کات‌ست اساسی بنویسید. توجه کنید در این معادلات کات‌ست، تمام جریانهای شاخه‌ها باید برحسب متغیرهای انتخاب شده در گام ۲ بیان شوند. برای خازن چنین به دست می‌آوریم:

$$C\frac{dv}{dt} = -i_1 - i_2$$

گام ٤ برای هر سلف، یک معادلهٔ حلقهٔ اساسی بنویسید. توجه کنید که در این معادلات حلقه، تمام ولتاژهای شاخه‌ها (به جز منابع نابسته) باید برحسب متغیرهای انتخاب شده در گام ۲ بیان شوند. برای

سلف اول داریم:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -v_{R_1} - e_s + v$$

و برحسب متغیرهای انتخاب شدهٔ i_1 ، i_2 و v به دست می‌آید:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -R_1 i_1 - e_s + v$$

به طریق مشابه، برای سلف دوم داریم:

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -v_{R_2} + v = -R_2 i_2 + v$$

بدین ترتیب، دستگاه معادلات حالت زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} C\frac{dv}{dt} &= -i_1 - i_2 \\ L_1 \frac{di_1}{dt} &= -R_1 i_1 + v - e_s \\ L_2 \frac{di_2}{dt} &= -R_2 i_2 + v \end{aligned} \tag{۳-۱}$$

چنانچه دستگاه معادلات فوق را به صورت ماتریسی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_s \tag{۴-۱}$$

توجه کنید، معادلات فوق برحسب بردار حالت $\mathbf{x}$ که مؤلفه‌های آن v ، i_1 و i_2 هستند، به صورت زیر می‌باشند:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}w \tag{۵-۱}$$

که در آنجا $\mathbf{A}$ یک ماتریس 3×3 ثابت، $\mathbf{b}$ یک بردار ثابت و $w = e_s$ ورودی اسکالر می‌باشد. $\mathbf{A}$ و $\mathbf{b}$ ، هر دو تنها به عناصر شبکه و گراف آن بستگی دارند. معادلهٔ (۱-۵) شکل خاصی از معادلهٔ حالت کلی (۱-۱) برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشد.

فرض کنید حالت اولیه در لحظهٔ $t = 0$ به وسیلهٔ سه کمیت $v(0)$ ، $i_1(0)$ و $i_2(0)$ مشخص شود؛ یعنی:

$$\mathbf{x}_0 \triangleq \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} v(0) \\ i_1(0) \\ i_2(0) \end{bmatrix} \tag{۶-۱}$$

چنانچه برای تمام $t \geq 0$ شکل موج ورودی $e_s(\cdot)$ داده شده باشد، در این صورت برای هر $t_1 > 0$، حالت شبکه در زمان t_1، به طور یکتا مشخص می‌شود. در واقع، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل چنین به ما می‌آموزد که داشتن شرایط اولیهٔ $v(0)$، $i_1(0)$، $i_2(0)$ و تابع تحریک $e_s(\cdot)$، هر یک از توابع $v(\cdot)$، $i_1(\cdot)$ و $i_2(\cdot)$ را برای تمام $t \geq 0$ به طور یکتایی مشخص می‌کنند. همچنین ملاحظه کنید که هر متغیر شبکه را می‌توان به صورت تابعی از حالت و تحریک ورودی نوشت. مثلاً e_1 ولتاژ گره نسبت به مبنا، چنین بیان می‌شود:

$$e_1(t) = R_1 i_1(t) + e_s(t) \qquad \text{برای تمام } t$$

برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، چنانچه y را به عنوان یک خروجی دلخواه در نظر بگیریم، می‌توان آن را برحسب ترکیب خطی بردار حالت و ورودی w بیان نمود[1]. بنابراین:

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d_0 w \tag{۷-۱}$$

که در آن d_0 یک اسکالر و $\mathbf{c}$ یک بردار ثابت است و هر دوی آنها به توپولوژی شبکه و مقادیر اجزای آن بستگی دارند. بدین ترتیب e_1 را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$e_1 = [0 \quad R_1 \quad 0]\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + (1)e_s$$

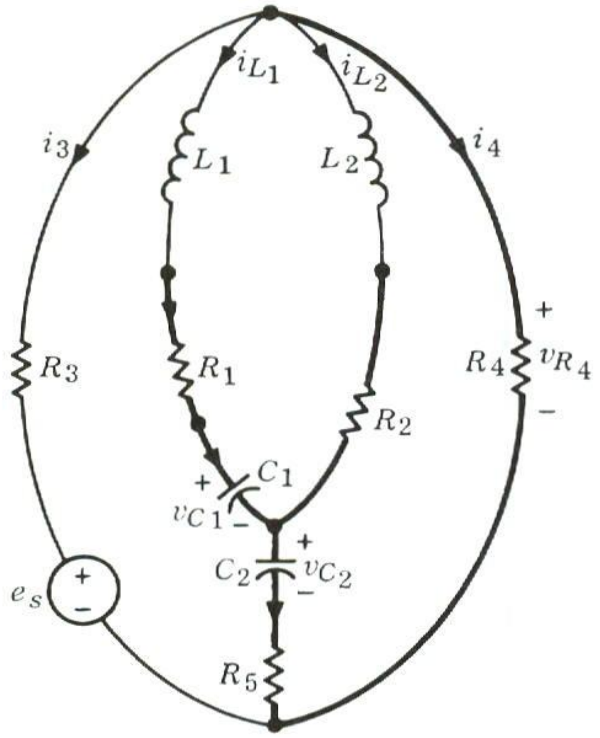
مثال برای تشریح بیشتر این روش، شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۱-۲) را در نظر بگیرید. این شبکه، دارای یک ورودی (منبع ولتاژ e_s)، دو سلف L_1 و L_2 و دو خازن C_1 و C_2 می‌باشد. بنابراین، برای شبکهٔ فوق چهار متغیر حالت i_{L_1}، i_{L_2}، v_{C_1} و v_{C_2} لازم خواهد بود. روش کار چنین است:

گام ۱ درختی را انتخاب می‌کنیم که C_1 و C_2 را دربرداشته و شامل L_1 و L_2 نباشد. فرض کنید R_2 را در درخت فوق منظور کنیم. در نتیجه، اتصال سری منبع ولتاژ e_s و R_2 به صورت لینک، قرار می‌گیرد.

گام ۲ متغیرهای حالت را با جریانهای سلف‌های i_{L_1} و i_{L_2} و ولتاژهای خازن‌های v_{C_1} و v_{C_2} مشخص می‌کنیم.

گام ۳ معادلات کات‌ست را برای کات‌ست‌های اساسی که توسط خازن‌ها تعریف می‌شوند،

[1] در موارد خاصی ممکن است خروجی به مشتقات ورودی w نیز بستگی داشته باشد. این مورد متناظر با سیستم‌های نامناسب می‌باشد (فصل‌های ۵ و ۱۳ را ببینید).



شکل ۱-۲ شبکهٔ به کار رفته در مثال مربوط به طرز نوشتن معادلات حالت.

می‌نویسیم. به خاطر بیاورید که باید تمام جریانها برحسب i_{L_1} ، i_{L_2} ، v_{C_1} و v_{C_2} بیان شوند. بدین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = i_{L_1} \qquad (۱-۸)$$

و:

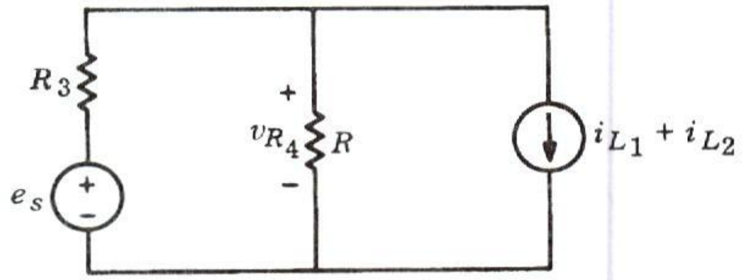
$$C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} = i_{L_1} + i_{L_2} \qquad (۱-۹)$$

گام ٤ معادلات حلقه را برای حلقه‌های اساسی که توسط سلف‌ها تعریف می‌شوند، می‌نویسیم. به خاطر بیاورید که باید تمام ولتاژها برحسب i_{L_1} ، i_{L_2} ، v_{C_1} و v_{C_2} بیان شوند. بدین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} &= -v_{R_1} - v_{C_1} - v_{C_2} - v_{R_5} + v_{R_4} \\ &= -R_1 i_{L_1} - v_{C_1} - v_{C_2} - R_5(i_{L_1} + i_{L_2}) + v_{R_4} \end{aligned} \qquad (۱-۱۰)$$

در این مورد، ملاحظه می‌شود که مثل حالت قبل خوش‌شانس نیستیم، زیرا جملهٔ v_{R_4} موجود در سمت راست معادلهٔ بالا، یکی از متغیرهای حالت نیست.

به منظور بیان v_{R_4} برحسب متغیرهای انتخاب شده، باید مدار نشان داده شده در شکل (۱-۳) را حل کنیم (توجه کنید که در محاسبهٔ v_{R_4} متغیرهای حالت i_{L_1} ، i_{L_2} ، v_{C_1} و v_{C_2} را معلوم در نظر می‌گیریم). بنابراین:



شکل ۱-۳ شبکهٔ کمکی به کار رفته در محاسبهٔ v_{R_4} برحسب متغیرهای انتخاب شده.

$$v_{R_4}\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)-\frac{1}{R_3}e_s=-(i_{L_1}+i_{L_2})$$

یا:

$$v_{R_4}=e_s\frac{R_4}{R_3+R_4}-\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}(i_{L_1}+i_{L_2}) \qquad (۱۱-۱)$$

بدین ترتیب:

$$\frac{di_{L_1}}{dt}=-\frac{v_{C_1}}{L_1}-\frac{v_{C_2}}{L_1}-\frac{(R_1+R)}{L_1}i_{L_1}-\frac{R}{L_1}i_{L_2}+\frac{R_4}{L_1(R_3+R_4)}e_s \qquad (۱۲-۱)$$

که در آن:

$$R\triangleq R_5+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4} \qquad (۱۳-۱)$$

به طریق مشابه:

$$L_2\frac{di_{L_2}}{dt}=-R_2i_{L_2}-v_{C_2}-R_5(i_{L_1}+i_{L_2})+v_{R_4}$$

و پس از حذف v_{R_4}، خواهیم داشت:

$$\frac{di_{L_2}}{dt}=-\frac{v_{C_2}}{L_2}-\frac{R}{L_2}i_{L_1}-\frac{(R_2+R)}{L_2}i_{L_2}+\frac{R_4}{L_2(R_3+R_4)}e_s \qquad (۱۴-۱)$$

بنابراین معادلات حالت، چنین هستند:

$$\begin{bmatrix}\frac{dv_{C_1}}{dt}\\ \frac{dv_{C_2}}{dt}\\ \frac{di_{L_1}}{dt}\\ \frac{di_{L_2}}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2}\\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1+R}{L_1} & -\frac{R}{L_1}\\ 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{R_2+R}{L_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{L_1}\\ \frac{1}{L_2}\end{bmatrix}\frac{R_4}{R_3+R_4}e_s \qquad (۱۵-۱)$$

چنانچه v_{R_4} خروجی باشد، ملاحظه می‌کنیم که می‌توان آن را برحسب حالت و ورودی e_s بیان نمود.

در واقع از (۱-۱۱) نتیجه می‌شود:

$$v_{R_4}(t) = -\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}i_{L_1}(t) - \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}i_{L_2}(t) + \frac{R_4}{R_3+R_4}e_s(t) \qquad \text{برای تمام } t \tag{۱-۱۶}$$

می‌توان رابطهٔ (۱-۱۶) را به شکل استاندارد معادلهٔ (۱-۷)، به صورت زیر نوشت:

$$v_{R_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-R_3R_4}{R_3+R_4} & \frac{-R_3R_4}{R_3+R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \frac{R_4}{R_3+R_4}e_s \tag{۱-۱۷}$$

تبصره در انتخاب جریانهای سلف‌ها و ولتاژهای خازن‌ها به عنوان متغیرهای حالت، تعصب خاصی وجود ندارد. به طریق مشابه، شارهای سلف‌ها و بارهای خازن‌ها را نیز می‌توانستیم انتخاب کنیم. در واقع، در مورد شبکه‌های تغییرپذیر با زمان، چنین انتخابی مزایای روشنی دارد. این وضع، تا اندازه‌ای مشابه وضع موجود در مکانیک ذره‌ای است که در آن‌جا موقعیت و سرعت ذرات و یا موقعیت و مقدار حرکت ذرات را می‌توان به عنوان متغیر، انتخاب نمود.

مثال مثال شکل (۱-۱) را بار دیگر در نظر بگیرید. توجه کنید که:

$$\phi_1(t) = L_1 i_1(t) \quad \text{و} \quad \phi_2(t) = L_2 i_2(t) \tag{۱-۱۸}$$

و:

$$q(t) = Cv(t) \tag{۱-۱۹}$$

با این متغیرها، یعنی q ، ϕ_1 و ϕ_2 معادلهٔ کات‌ست به صورت زیر درمی‌آید:

$$\dot{q} = -\frac{1}{L_1}\phi_1 - \frac{1}{L_2}\phi_2$$

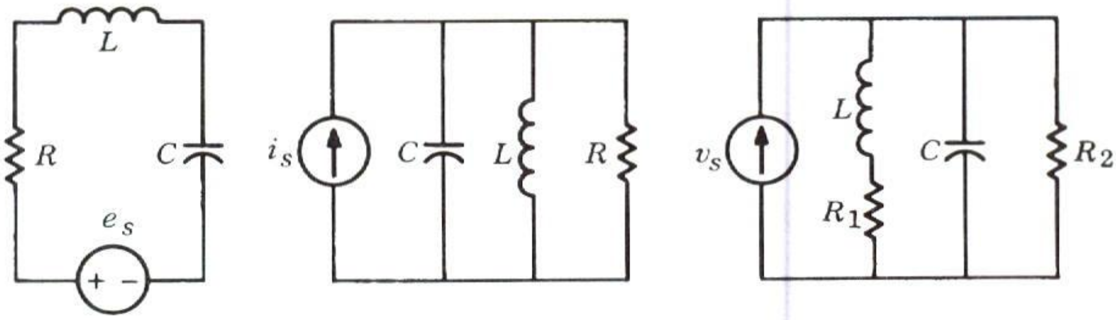
و معادلات حلقه، چنین هستند:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{q}{C} - R_1\frac{\phi_1}{L_1} - e_s$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{q}{C} - R_2\frac{\phi_2}{L_2}$$

و به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e_s \tag{۱-۲۰}$$



شکل ۱-٤ شبکه‌های به‌کار رفته برای تشریح مفهوم حالت.

با توجه به این معادلات حالت، می‌توان گفت که در $t = 0$ حالت به وسیلهٔ بار اولیهٔ $q(0)$ و شارهای اولیهٔ $\phi_1(0)$ و $\phi_2(0)$ مشخص می‌شود. در واقع، با این سه عدد و شکل موج $e_s(\cdot)$ می‌توان از این معادلات دیفرانسیل انتگرال‌گیری کرد و $q(t)$ ، $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ را برای هر $t > 0$ (به طور یکتا) به دست آورد.

تمرین معادلات حالت را برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۱-۴) بنویسید.

الف- جریان‌های سلف‌ها و ولتاژهای خازن‌ها را به عنوان متغیرهای حالت به‌کار برید.

ب- بارهای خازن‌ها و شارهای سلف‌ها را به عنوان متغیرهای حالت به‌کار برید.

۲- مفهوم حالت

در مثالهای پیش، عبارتهایی مانند "حالت اولیه به وسیلهٔ ... مشخص می‌شود" یا "حالت توسط ... بیان می‌شود" را ذکر کردیم. چرا نگفتیم که "حالت، $q(0)$ ، $\phi_1(0)$ و $\phi_2(0)$ می‌باشد"؟ دلیلش این است که هنگامی که دقیق صحبت کنیم، حالت، یک مفهوم مجردی است که ممکن است به طرق گوناگون نشان داده شود. به عنوان تشبیه، عدد ۲ را در نظر بگیرید. این عدد نیز، یک مفهوم مجرد است. هنگامی که دربارهٔ این عدد فکر شود، می‌توان یک محور حقیقی و یک نقطه را که در وسط نقاطی با طولهای ۱ و ۳ قرار دارد، تصور نمود. هنگامی که بخواهیم آن را نمایش دهیم، می‌توان عدد ۲ را نوشت و چنانچه ما، رومی بودیم، علامت II را می‌نوشتیم. کامپیوتر با محاسبات باینری خود لازم می‌دارد که آن را به صورت علامت ۱۰ نشان دهد. گاهی ممکن است آن را به صورت ۱ + ۱ و یا به صورت $(1/41421 ...)^2$ و غیره نشان دهیم. تمام این نمایشها، مفهوم عدد ۲ را در مغز ما به‌وجود می‌آورند.

اکنون ما ایده‌ای را که می‌توان حالت را به طرق گوناگون نمایش داد، درک کردیم. از این به بعد برای اختصار خواهیم نوشت "حالت ... است" و به خاطر خواهیم داشت که منظور از این عبارت همان "حالت به وسیلهٔ ... نمایش داده می‌شود"، می‌باشد.

اکنون می‌خواهیم تعریف دقیق مفهوم حالت را بیان کنیم:

دسته‌ای از داده‌ها را وقتی می‌توان به عنوان **حالت** یک شبکه تلقی کرد که در دو شرط زیر صدق کنند:

۱ـ برای هر زمان دلخواه، مانند t_1 ، حالت در زمان t_1 و شکل موجهای ورودی (که از زمان t_1 به بعد، مشخص می‌شوند)، حالت را در هر زمان دلخواه $t > t_1$ به طور یکتا مشخص می‌کنند.

۲ـ حالت در زمان t و ورودی‌ها در این زمان (گاهی هم پاره‌ای از مشتق‌های آنها) مقدار هر متغیر شبکه را در زمان t به طور یکتا مشخص می‌کنند.

حالت را به عنوان یک بردار تصور کرده، مؤلفه‌های آن را **متغیرهای حالت** می‌نامیم.

در مورد شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، چنانچه معادلات حالت را بتوان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}w(t)$$

در این صورت، بردار $\mathbf{x}$ خاصیت ۱ را خود به خود برآورده می‌کند. به طریق مشابه، به محض این که بتوان خروجی y را به صورت زیر نوشت:

$$y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + d_{\circ}w$$

خاصیت ۲ خود به خود برآورده می‌شود.

مثال ۱ مدار RC موازی را که با یک منبع جریان i_s تحریک می‌شود، (شکل (۲-۱)) در نظر بگیرید. چنانچه ولتاژ v را به عنوان متغیر به کار بریم، خواهیم داشت:

$$C\dot{v}(t) + Gv(t) = i_s(t) \qquad \text{برای } t \geq \circ$$

یا:

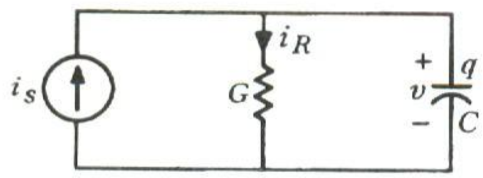
$$\dot{v}(t) = -\frac{G}{C}v(t) + \frac{1}{C}i_s(t) \qquad \text{برای } t \geq \circ$$

و:

$$v(t) = v(\circ)\, e^{-\frac{t}{RC}} + \int_{\circ}^{t} \frac{1}{C} e^{-\frac{(t-t')}{RC}} i_s(t')dt' \qquad \text{برای } t \geq \circ$$

ولتاژ $v(\circ)$ و ورودی $i_s(\cdot)$ برای هر $t > \circ$ ، $v(t)$ را به طور یکتا مشخص می‌کنند. همچنین هر متغیر شبکه، با معلوم بودن $v(t)$ ، به راحتی مشخص می‌شود. بدین ترتیب:

$$i_R(t) = Gv(t) \qquad \text{و} \qquad q(t) = Cv(t)$$



شکل ۲-۱ شبکهٔ به کار رفته در مثال ۱.

بنابراین، ولتاژ v دوسر خازن، شرایط حالت نامیده شدن مدار RC را برمی‌آورد.

تمرین تحقیق کنید که بار q خازن نیز شرایط حالت نامیده شدن مدار RC را برمی‌آورد.

مثال ۲ مثال بخش قبل را در نظر بگیرید. با مراجعه به معادلهٔ (۱-۱۵)، ملاحظه می‌شود که دستهٔ داده‌های $\{v_{C_1}(t), v_{C_2}(t), i_{L_1}(t), i_{L_2}(t)\}$ در زمان t ، شرایط حالت نامیده شدن شبکه را برمی‌آورد. همچنین توجه کنید که اگر q_1 و q_2 نشان دهندهٔ بارهای خازن‌ها و ϕ_1 و ϕ_2 نشان دهندهٔ شارهای سلف‌ها باشند، در این صورت، دستهٔ داده‌های $\{q_1(t), q_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t)\}$ در زمان t نیز، شرایط حالت نامیده شدن شبکه را برمی‌آورد. همچنان که برای نمایش عدد ۲، تعداد بی‌نهایت راه وجود دارد، برای مشخص ساختن حالت این شبکه نیز، درست بی‌نهایت راه وجود دارد. به عنوان مثال:

$$\{q_1(t) + q_2(t), q_1(t) - q_2(t), \phi_1(t), \phi_1(t) + 2\phi_2(t)\}$$

نیز حالت این شبکه را مشخص می‌کند.

توجه به این نکته حائز اهمیت است که تحت شرایط بسیار کلی، حالت یک شبکهٔ دلخواه[1]، به وسیلهٔ ولتاژهای تمام خازن‌ها (یا بارها) و جریانهای تمام سلف‌ها (یا شارها) مشخص می‌شود. منظور از یک شبکهٔ دلخواه، یک به هم پیوستن اختیاری از عناصری است که نوع آنها در فصلهای ۲ و ۸ توصیف شد.

گاهی اوقات علاوه بر بارها و شارها، بعضی از اطلاعات دیگر نیز برای مشخص کردن حالت لازم است. به عنوان مثال، چنانچه کلیدی در شبکه وجود داشته باشد، وضعیت این کلید باید مشخص باشد. چنانچه سلف‌هایی با هسته‌های مغناطیسی وجود داشته باشند که پس‌ماند قابل ملاحظه‌ای را نشان دهند (مثلاً مانند حافظه‌های کامپیوتر)، در این صورت باید وضع هستهٔ مغناطیسی مشخص گردد (به عنوان مثال، شکل (۴-۴) فصل ۲ را ببینید).

مفهوم حالت، یک مفهوم بسیار اصلی و اساسی است که در نظریه‌های جدید کنترل سیستم‌ها و ماشین‌های ترتیبی نیز پیدا می‌شود. طرز تشکیل معادلات حرکت به روش هَمیلتونی در مکانیک کلاسیک، روشی را برای نوشتن معادلات حالت در سیستم دینامیکی مورد نظر، به‌وجود می‌آورد. پشت این مفهوم حالت، ایدهٔ اساسی زیر در تمام رشته‌های فوق وجود دارد:

با دانستن حالت یک سیستم در زمان t_0 و تمام ورودی‌ها (که برای زمان t_0 به بعد مشخص می‌شوند)، رفتار سیستم برای تمام $t > t_0$ کاملاً تعیین می‌گردد.

[1] این حقیقت را در فصل ۱۳ برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان ثابت خواهیم کرد.

۳- شبکه‌های غیرخطی و تغییرپذیر با زمان

در حال حاضر، در تمام تجزیه و تحلیل‌های شبکه‌های غیرخطی و تغییرپذیر با زمان، عملاً معادلات حالت را به‌کار می‌برند. چنان که خواهیم دید، در مورد شبکه‌های خطی تغییرپذیر با زمان، معادلات فوق، تغییر کوچکی لازم دارند. در مورد شبکه‌های غیرخطی، راحت‌ترین راه محاسبات، معادلات حالت می‌باشد.

در این بخش، به کمک چند مثال نشان خواهیم داد که برای شبکه‌های غیرخطی و تغییرپذیر با زمان، چگونه معادلات حالت را می‌نویسیم.

۳-۱ شبکه‌های خطی تغییرپذیر با زمان

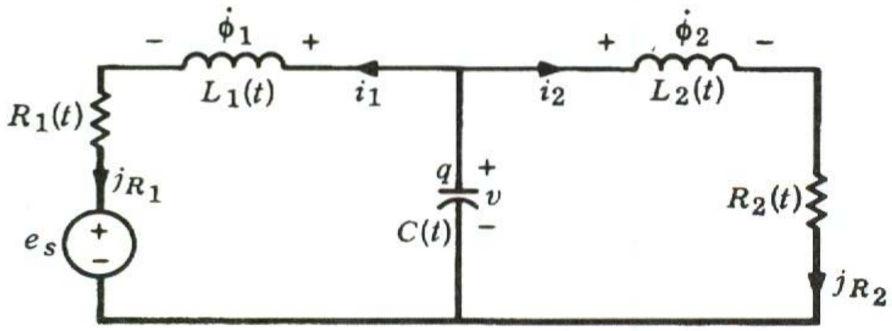
مثال ۱ اکنون شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۳-۱) را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که تمام عناصر (به جز منبع ولتاژ) خطی و تغییرپذیر با زمان بوده و مشخصه‌های آنها به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
v_{R_1}(t) &= R_1(t)j_{R_1}(t)\\
\phi_1(t) &= L_1(t)i_1(t)\\
q(t) &= C(t)v(t) \qquad (۳-۱)\\
\phi_2(t) &= L_2(t)i_2(t)\\
v_{R_2}(t) &= R_2(t)j_{R_2}(t)
\end{aligned}
$$

برای نوشتن معادلات شبکهٔ شکل (۳-۱)، همان درخت سابق را انتخاب می‌کنیم. کمیت‌های q ، ϕ_1 و ϕ_2 را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب نموده و برای خازن شاخه درخت $C(t)$ ، یک معادلهٔ کات‌ست اساسی می‌نویسیم (به خاطر بیاورید که باید تمام کمیت‌ها برحسب متغیرهای انتخاب شدهٔ q ، ϕ_1 و ϕ_2 بیان گردند). نتیجهٔ حاصل چنین است:

$$
\begin{aligned}
\dot{q}(t) &= -i_1(t) - i_2(t)\\
&= -\frac{\phi_1(t)}{L_1(t)} - \frac{\phi_2(t)}{L_2(t)} \qquad (۳-۲)
\end{aligned}
$$

سپس معادلات حلقهٔ اساسی را برای هر یک از سلف‌ها، به شرح زیر می‌نویسیم:



شکل ۳-۱ شبکهٔ خطی تغییرپذیر با زمان به کار رفته در مثال ۱.

$$\dot{\phi}_1(t) = v_C(t) - R_1(t) j_{R_1}(t) - e_s(t) = \frac{q(t)}{C(t)} - \frac{R_1(t)}{L_1(t)}\phi_1(t) - e_s(t) \tag{۳-۳}$$

و:

$$\dot{\phi}_2(t) = v_C(t) - R_2(t) j_{R_2}(t) = \frac{q(t)}{C(t)} - \frac{R_2(t)}{L_2(t)}\phi_2(t) \tag{۴-۳}$$

بنابراین، به صورت ماتریسی، چنین به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{\phi}_1(t) \\ \dot{\phi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_1(t)} & -\frac{1}{L_2(t)} \\ \frac{1}{C(t)} & -\frac{R_1(t)}{L_1(t)} & 0 \\ \frac{1}{C(t)} & 0 & -\frac{R_2(t)}{L_2(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e_s(t) \tag{۵-۳}$$

تبصره تنها اختلاف میان معادلات (۳-۵) (که مربوط به حالت خطی تغییرپذیر با زمان است) و معادلات (۱-۲۰)، در این است که مقادیر اجزای L_1 ، L_2 ، C ، R_1 و R_2 به جای این که ثابت باشند، توابع معلومی از زمان هستند و به جز این اختلاف، معادلات از هر لحاظ کاملاً یکسان هستند. این حقیقت در حالت کلی، صحیح بوده و نتیجه‌ای از به کار بردن بارها و شارها به عنوان متغیرهای حالت می‌باشد.

در مورد شبکه‌های خطی تغییرپذیر با زمان، برای به کار بردن بارها و شارها به عنوان متغیرهای حالت، دو دلیل عمده وجود دارد: (۱) اگر می‌خواستیم جریانهای سلف‌ها و ولتاژهای خازن‌ها را به عنوان متغیرهای حالت به کار بریم، مشتق‌های $\dot{L}(t)$ و $\dot{C}(t)$ نیز در تجزیه و تحلیل ظاهر می‌شدند. (۲) مادامی که جریان یک خازن شامل توابع ضربه نباشد، بار خازن تابع پیوسته‌ای از زمان خواهد بود [یعنی شکل موج $q(0)$ نسبت به t هیچگونه جهشی نخواهد داشت]. توجه کنید که حتی اگر $C(t)$ از مقدار ثابتی به مقدار ثابت دیگری بجهد، این گفته درست خواهد بود. به علت این که $q(0)$ پیوسته بوده و برای تمام t رابطهٔ $q(t) = C(t)v(t)$ برقرار است. پس هر موقع $C(0)$ جهشی داشته باشد، شکل موج $v(0)$ نیز جهشی نشان خواهد داد. واضح است که حل معادلات نسبت به $q(0)$ که تابع پیوسته‌ای می‌باشد، بسیار ساده‌تر است.

تمرین ۱ فرض کنید در شبکهٔ خطی نشان داده شده در شکل (۱-۴)، تمام R ها ، C ها و L ها تغییرپذیر با زمان باشند. با در نظر گرفتن بارها و شارها به عنوان متغیرهای حالت، معادلات حالت آنها را بنویسید.

تمرین ۲ برای مدار خطی تغییرپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۳-۱)، ولتاژ خازن و جریانهای

سلف‌ها را به عنوان متغیرهای حالت به کار برده و نشان دهید که معادلات حالت به صورت زیر می‌باشند (در اینجا به منظور سادگی نمایش، وابستگی صریح نسبت به t را حذف کرده‌ایم و در واقع، این وابستگی باید در هر متغیری ظاهر گردد):

$$\begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}}{C} & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1+\dot{L}_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2+\dot{L}_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_s$$

این معادلهٔ ماتریسی را با معادلهٔ (۱-۴) مقایسه کنید. [راهنمایی: چون $L_1(t)$ و $C(t)$ به زمان بستگی دارند، $v_{L_1}(t) = \frac{d}{dt}[L_1(t)i_1(t)]$ و غیره.]

۳-۲ شبکه‌های غیرخطی

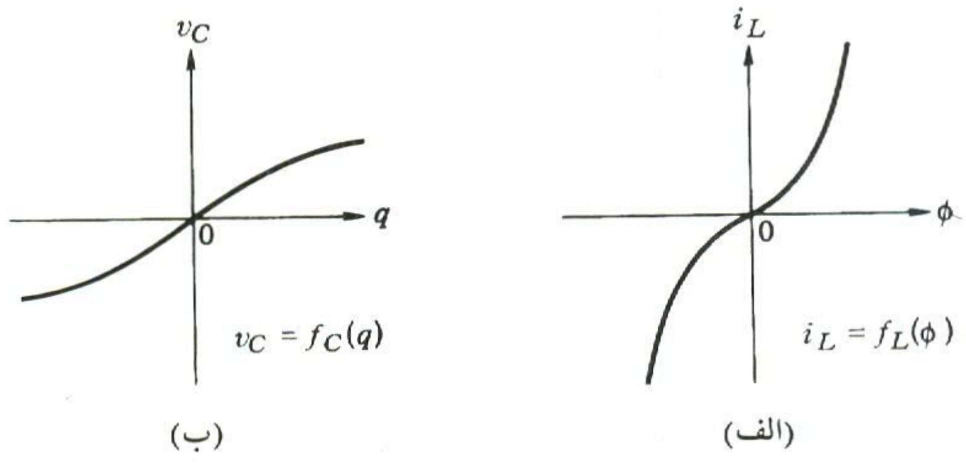
در اینجا می‌خواهیم معادلات حالت دو شبکهٔ غیرخطی را بنویسیم. برای سادگی، فرض خواهیم کرد که این شبکه‌ها، تغییرناپذیر با زمان هستند. از فصل ۲ به خاطر بیاورید که سلف غیرخطی، به وسیلهٔ مشخصهٔ خود در صفحهٔ ϕi_L ، توصیف می‌شود (شکل (۳-۲ الف)). به علت این که می‌خواهیم ϕ را به عنوان متغیر به کار بریم، فرض می‌کنیم که این مشخصه به صورت تابع f_L و به شرح زیر توصیف می‌گردد:

$$i_L = f_L(\phi)$$

به طریق مشابه، یک خازن غیرخطی به وسیلهٔ مشخصهٔ خود در صفحهٔ qv_C توصیف می‌شود (شکل (۳-۲ ب)). فرض می‌کنیم که این مشخصه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v_C = f_C(q)$$

در مورد مقاومتها، بعضی مواقع راحت‌تر است که ولتاژ به صورت تابعی از جریان بیان شود و در برخی



شکل ۳-۲ مشخصه‌های نوعی اجزای غیرخطی.

موارد دیگر، بیان جریان به صورت تابعی از ولتاژ، راحت‌تر می‌باشد. البته این امر به توپولوژی شبکه بستگی دارد.

مثال ۱ فرض کنید تمام اجزای شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۳-۳)، غیرخطی هستند. توصیف هر جزء در روی شکل بیان شده است. ما عیناً همان روش حالت قبل را به کار می‌بریم.

گام ۱ درختی انتخاب کنید که تمام خازن‌ها را دربرداشته و هیچ سلفی را شامل نباشد. این درخت با خطوط سیاه‌تر در شکل مشخص شده است.

گام ۲ شارها و بارها را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب کنید. متغیرهای حالت انتخاب شده در مورد اخیر q ، ϕ_1 و ϕ_2 هستند.

گام ۳ یک معادلهٔ کات‌ست اساسی برای هر خازن بنویسید. در هر معادلهٔ کات‌ست، تمام جریانهای شاخه‌ها باید برحسب متغیرهای حالت انتخاب شده بیان شوند. بدین ترتیب:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -i_1 - i_2 \\ &= -f_{L_1}(\phi_1) - f_{L_2}(\phi_2)\end{aligned}$$

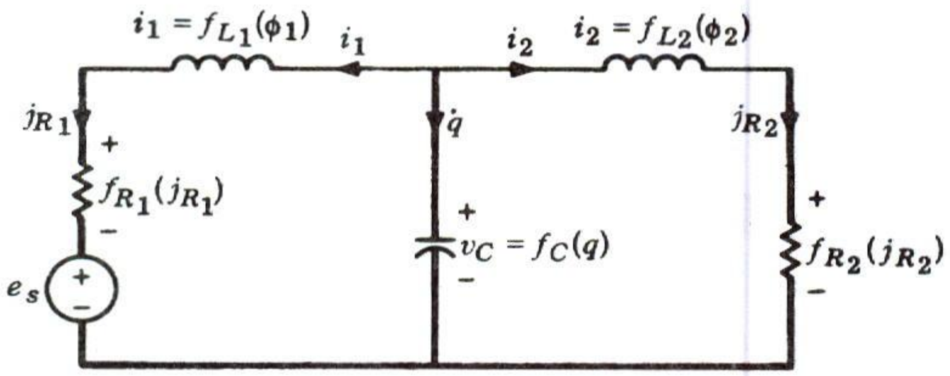
گام ٤ یک معادلهٔ حلقهٔ اساسی برای هر سلف بنویسید. در هر معادلهٔ حلقه، تمام ولتاژهای شاخه‌ها باید برحسب متغیرهای حالت انتخاب شده بیان شوند. بدین ترتیب، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= v_C - v_{R_1} - e_s \\ &= f_C(q) - f_{R_1}(f_{L_1}(\phi_1)) - e_s\end{aligned}$$

و:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_2 &= v_C - v_{R_2} \\ &= f_C(q) - f_{R_2}(f_{L_2}(\phi_2))\end{aligned}$$

بدین ترتیب، چنانچه وابستگی زمانی متغیرها را نشان دهیم، معادلات حالت به صورت زیر خواهند بود:



شکل ۳-۳ در مثال ۱، معادلات حالت این شبکهٔ غیرخطی را به دست می‌آوریم. شاخه‌های درخت سیاه‌تر رسم شده‌اند.

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= -f_{L_1}(\phi_1(t)) - f_{L_2}(\phi_2(t))\\ \dot{\phi}_1(t) &= f_C(q(t)) - f_{R_1}(f_{L_1}(\phi_1(t))) - e_s(t)\\ \dot{\phi}_2(t) &= f_C(q(t)) - f_{R_2}(f_{L_2}(\phi_2(t)))\end{aligned} \qquad (۳-۶)$$

ملاحظهٔ نکتهٔ زیر، بسیار اساسی است: چنانچه ما مشخصه‌های اجزاء [یعنی توابع $f_{L_1}(\cdot)$ ، $f_{L_2}(\cdot)$ ، ...] و حالت در زمان t [یعنی سه عدد $q(t)$ ، $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$] و ورودی در زمان t [یعنی ولتاژ $e_s(t)$] را بدانیم، در این صورت، معادلهٔ (۳-۶) نشان می‌دهد که شدت تغییرات متغیرهای حالت، یعنی $\dot{q}(t)$ ، $\dot{\phi}_1(t)$ و $\dot{\phi}_2(t)$ را چگونه محاسبه کنیم. در حقیقت، مرحلهٔ اساسی انتگرال‌گیری عددی معادلات دیفرانسیل (۳-۶)، همین محاسبه می‌باشد.

برای نشان دادن این که در بعضی موارد ممکن است ورودی در آرگومان مشخصهٔ یک شاخه ظاهر شود، مثال دیگری را بررسی می‌کنیم.

مثال ۲ شبکهٔ غیرخطی نشان داده شده در شکل (۳-۴) را در نظر بگیرید. مشخصه‌های اجزاء، در روی شکل نشان داده شده‌اند. بعداً خواهیم دید که راحت‌تر است چنین فرض شود که مشخصهٔ مقاومت اول، به صورت:

$$j_{R_1} = f_{R_1}(v_{R_1})$$

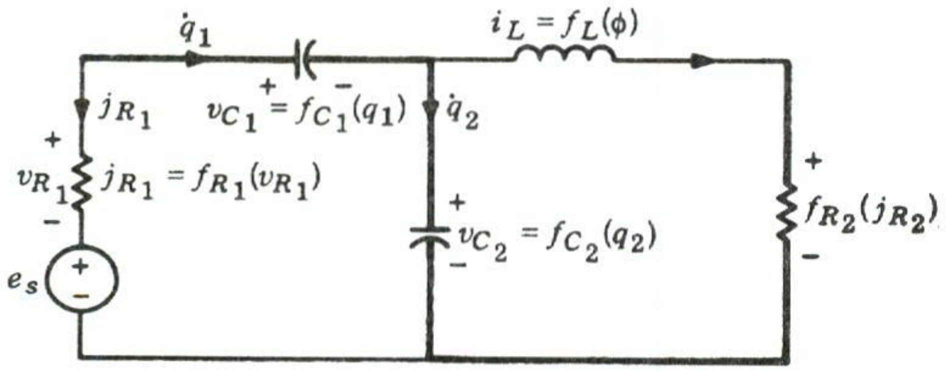
و مشخصهٔ مقاومت دوم، به صورت:

$$v_{R_2} = f_{R_2}(j_{R_2})$$

توصیف شوند. گامهای ۱ و ۲ بدیهی هستند. در واقع تنها یک درخت ممکن وجود دارد و متغیرهای حالت به صورت q_1 ، q_2 و ϕ انتخاب می‌شوند.

گام ۳ معادلات کات‌ست را برای هر خازن می‌نویسیم. برای خازن اول داریم:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= -j_{R_1} = -f_{R_1}(v_{R_1})\\ &= -f_{R_1}(v_{C_1} + v_{C_2} - e_s)\\ &= -f_{R_1}[f_{C_1}(q_1) + f_{C_2}(q_2) - e_s]\end{aligned}$$



شکل ۳-٤ در مثال ۲، معادلات حالت این شبکهٔ غیرخطی را به دست می‌آوریم؛

و برای خازن دوم داریم:

$$\begin{aligned}\dot{q}_2 &= \dot{q}_1 - i_L \\ &= -f_{R_1}[f_{C_1}(q_1) + f_{C_2}(q_2) - e_s] - f_L(\phi)\end{aligned}$$

گام ٤ معادلات حلقهٔ اساسی را به شرح زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= v_{C_2} - v_{R_2} \\ &= f_{C_2}(q_2) - f_{R_2}(f_L(\phi))\end{aligned}$$

بدین ترتیب، معادلات حالت به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= -f_{R_1}[f_{C_1}(q_1(t)) + f_{C_2}(q_2(t)) - e_s(t)] \\ \dot{q}_2(t) &= -f_{R_1}[f_{C_1}(q_1(t)) + f_{C_2}(q_2(t)) - e_s(t)] - f_L(\phi(t)) \\ \dot{\phi}(t) &= f_{C_2}(q_2(t)) - f_{R_2}[f_L(\phi(t))]\end{aligned}$$

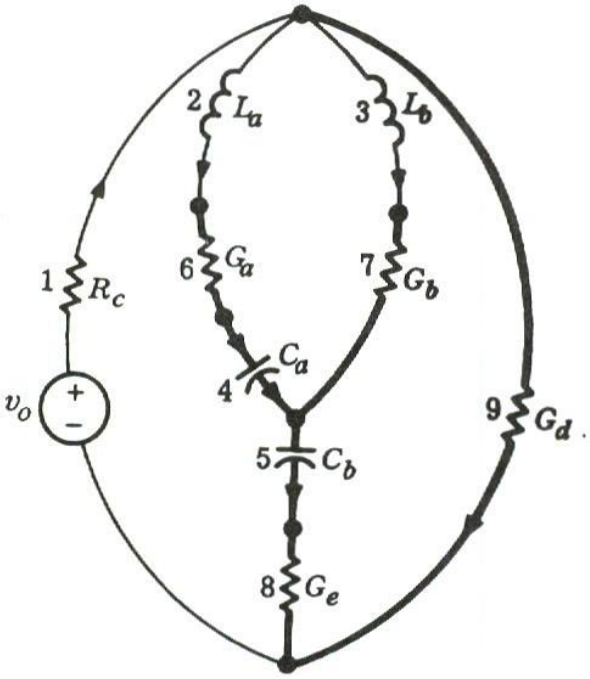
نکتهٔ اساسی بیان شده در مثال ۱ در اینجا نیز به کار می‌رود. چنانچه ما مشخصه‌های اجزاء [یعنی توابع $f_{R_1}(\cdot)$ ، $f_{L_1}(\cdot)$ ، $f_{C_1}(\cdot)$، ...] و حالت در زمان t [یعنی سه عدد $q_1(t)$ ، $q_2(t)$ و $\phi(t)$] و ورودی در زمان t [یعنی ولتاژ $e_s(t)$] را بدانیم، در این صورت، این معادلات نشان می‌دهند که شدت تغییرات متغیرهای حالت، یعنی $\dot{q}_1(t)$، $\dot{q}_2(t)$ و $\dot{\phi}(t)$ را چگونه محاسبه کنیم. تجسم حالت به عنوان نقطه‌ای در فضای سه بعدی با مختصات q_1 ، q_2 و ϕ معمولاً متداول است. این فضا را **فضای حالت** نامند. بدین ترتیب، حالت در زمان t و ورودی در زمان t ، **سرعت حالت** در زمان t در فضای حالت را مشخص می‌کنند. مسیری که از حرکت حالت در فضای حالت پیموده می‌شود، **مسیر حالت** خوانده می‌شود. در مورد فضای حالت دوبعدی، مسیر حالت به راحتی نمایش داده می‌شود (به عنوان مثال، شکل (۴-۴) از فصل ۵ را ببینید).

٤- معادلات حالت برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

در این بخش، یک روش منظم جهت نوشتن معادلات حالت شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان را بررسی می‌کنیم. برای سهولت، ما خود را به مواردی که حلقه‌ای تنها از خازن‌ها و یا کات‌ستی تنها از سلف‌ها وجود نداشته باشد، محدود می‌کنیم. خواننده برای حالت کلی باید به نوشته‌های دیگر[1] مراجعه نماید.

شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان را که گراف آن متصل به هم می‌باشد، در نظر بگیرید. اجزای آن شامل مقاومتها، سلف‌ها، خازن‌ها و منابع نابسته است. چنانکه گفته شد، فرض براین است که خازن‌ها

[1] مقالهٔ نوشته شده توسط E. S. Kuh و R. A. Rohrer دربارهٔ روش متغیرهای حالت در تجزیه و تحلیل شبکه‌ها که در صفحات ۶۸۶-۶۷۲ شمارهٔ ۵۳ (۱۹۶۵) مجلهٔ *Proc. IEEE* چاپ شده است (فهرست سایر مقالات در آنجا آمده است).



شکل ۴-۱ شاخه‌های سیاه‌تر، یک درخت مناسب برای شبکه تشکیل می‌دهند.

حلقه‌ای تشکیل نداده و سلف‌ها هم کات‌ستی به وجود نمی‌آورند. اولین مرحلهٔ تجزیه و تحلیل، انتخاب یک درخت است. لیکن برای راحتی، آنچه را که درخت مناسب گفته می‌شود، انتخاب خواهیم نمود. **درختی را درخت مناسب** گویند که تمام خازن‌های شبکه را شامل بوده و هیچ کدام از سلف‌ها را دربر نداشته باشد. برای شبکه‌هایی که حلقه‌ای تنها از خازن‌ها و یا کات‌ستی تنها از سلف‌ها نداشته باشند، همواره می‌توان یک درخت مناسب پیدا کرد. اکنون خازن‌ها را در نظر بگیرید. از آنجایی که خازن‌ها حلقه‌ای تشکیل نمی‌دهند، پس به روشنی می‌توان همهٔ آنها را به عنوان شاخه‌های درخت در نظر گرفت. چون سلف‌ها هم کات‌ستی به وجود نمی‌آورند، پس چنانچه از گره‌ای شروع کنیم، می‌توان بدون عبور از سلفی به هر گره دیگر گراف رسید و بدین‌ترتیب، به روشنی می‌توان همهٔ سلف‌ها را به عنوان لینک‌ها در نظر گرفت. هنگامی که تمام خازن‌ها را به عنوان شاخه‌های درخت انتخاب می‌کنیم، برای تکمیل درخت، معمولاً لازم است که چند تا از مقاومتها را هم اضافه کنیم. برای روشن شدن این روش، مثالی خواهیم آورد. یک انتخاب ممکن برای یک درخت مناسب، در شکل (۴-۱) نشان داده شده است. این درخت، شامل دو خازن (با ظرفیت‌های C_a و C_b) و چهار مقاومت (با رسانایی‌های G_a، G_b، G_d و G_e) می‌باشد. سه لینک باقیمانده، شامل سلف‌های L_a و L_b و اتصال سری R_c و v_o است (که به عنوان یک شاخهٔ تنها در نظر گرفته می‌شود).

در حالت کلی، راحت‌تر است که شاخه‌ها را به چهار زیر دسته به اسامی لینک‌های مقاومتی، لینک‌های سلفی، شاخه درختهای خازنی و شاخه درختهای مقاومتی تفکیک نمود. معادلات KVL برای حلقه‌های ... $\mathbf{Bv} = 0$ ...

$$\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{1}_l & \mathbf{F} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_R \\ \mathbf{v}_L \\ \hdashline \mathbf{v}_C \\ \mathbf{v}_G \end{bmatrix} = 0 \qquad (۱-۴)$$

هستند که در آنجا $\mathbf{v}_R$ ، $\mathbf{v}_L$ ، $\mathbf{v}_C$ و $\mathbf{v}_G$ زیر بردارهایی می باشند که به ترتیب، نمایش دهندهٔ ولتاژهای لینک‌های مقاومتی، لینک‌های سلفی، شاخه درختهای خازنی و شاخه درختهای مقاومتی هستند. ماتریس $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{1}_l & \mathbf{F} \end{array}\right]$ ، ماتریس حلقهٔ اساسی متناظر با درخت نشان داده شده در شکل (۴-۱) است. در این مسأله، شاخه‌ها را مطابق ترتیب تفکیک در معادلهٔ (۴-۱)، شماره‌گذاری می‌کنیم؛ یعنی، ابتدا لینک‌های مقاومتی و سپس لینک‌های سلفی و پس از آن شاخه درختهای خازنی و در آخر شاخه درختهای مقاومتی را مطابق شکل (۴-۱)، (با در نظر گرفتن جهت‌ها) شماره‌گذاری می‌کنیم. معادلهٔ (۴-۱) چنین نوشته می‌شود:

$$\left[\begin{array}{ccc:cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_R \\ \mathbf{v}_L \\ \hdashline \mathbf{v}_C \\ \mathbf{v}_G \end{bmatrix} = 0$$

که در آنجا:

$$\mathbf{v}_R = v_{R_c} - v_o \text{ ،} \qquad \mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} v_{L_a} \\ v_{L_b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_C = \begin{bmatrix} v_{C_a} \\ v_{C_b} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_G = \begin{bmatrix} v_{R_a} \\ v_{R_b} \\ v_{R_e} \\ v_{R_d} \end{bmatrix}$$

معادلات KCL برای کات‌ست‌های اساسی، به صورت $\mathbf{Qj} = 0$ یا:

$$\left[\begin{array}{c:c} -\mathbf{F}^T & \mathbf{1}_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{j}_R \\ \mathbf{j}_L \\ \hdashline \mathbf{j}_C \\ \mathbf{j}_G \end{bmatrix} = 0 \qquad (۲-۴)$$

می‌باشند که در آنجا $\mathbf{j}_R$ ، $\mathbf{j}_L$ ، $\mathbf{j}_C$ و $\mathbf{j}_G$ ، زیر بردارهایی هستند که به ترتیب، نمایش دهندهٔ جریانهای لینک‌های مقاومتی، لینک‌های سلفی، شاخه درختهای خازنی و شاخه درختهای مقاومتی می‌باشند. در مثال اخیر داریم:

$$\mathbf{j}_R = j_{R_c} \qquad \mathbf{j}_L = \begin{bmatrix} j_{L_a} \\ j_{L_b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_C = \begin{bmatrix} j_{C_a} \\ j_{C_b} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{j}_G = \begin{bmatrix} j_{R_a} \\ j_{R_b} \\ j_{R_e} \\ j_{R_d} \end{bmatrix}$$

اکنون باید معادلات شاخه‌ها را معرفی کنیم. برای راحتی، فرض می‌شود تمام منابع نابسته‌ای که روی لینک‌ها قرار دارند، منابع ولتاژ بوده و تمام منابع نابسته‌ای که روی شاخه درختها قرار دارند، منابع جریان باشند. واضح است که چنین فرضی هیچگونه محدودیتی روی روش فوق اعمال نمی‌کند. چون که به راحتی می‌توان منابع ولتاژ نابسته را به منابع جریان یا بالعکس، تبدیل نمود. معادلات شاخه‌ها را با طرز نمایشهای جدیدی که در زیر تعریف می‌گردند، به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{R}_R\mathbf{j}_R + \mathbf{e}_R \tag{۴-۳ الف}$$

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{j}_L + \mathbf{e}_L \tag{۴-۳ ب}$$

$$\mathbf{j}_C = \mathbf{C}\frac{d}{dt}\mathbf{v}_C + \mathbf{i}_C \tag{۴-۳ پ}$$

$$\mathbf{j}_G = \mathbf{G}_G\mathbf{v}_G + \mathbf{i}_G \tag{۴-۳ ت}$$

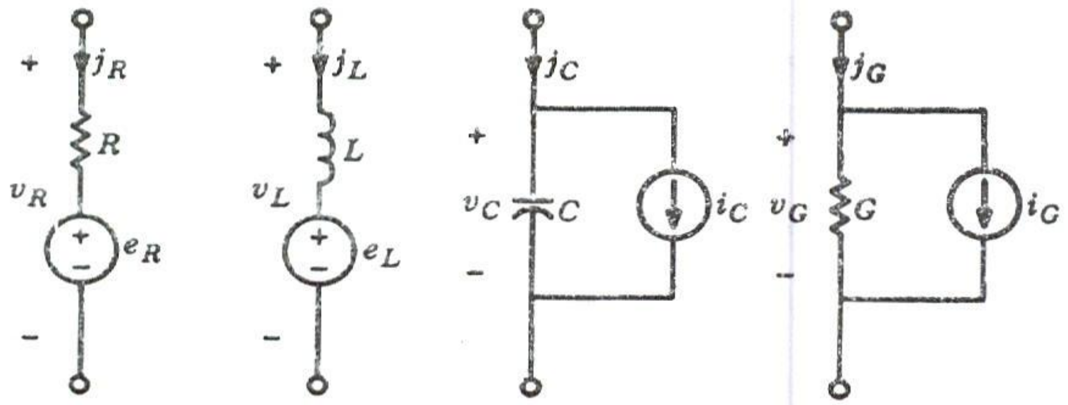
ماتریس‌های $\mathbf{R}_R$ ، $\mathbf{L}$ ، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{G}_G$ همگی ماتریس‌های پارامتری شاخه‌ها هستند که به ترتیب نشان دهندهٔ ماتریس مقاومتی لینک‌ها، ماتریس اندوکتانس لینک‌ها، ماتریس ظرفیتی شاخه درختها و ماتریس رسانایی شاخه درختهای شبکه می‌باشند. بردارهای $\mathbf{e}_R$ ، $\mathbf{e}_L$ ، $\mathbf{i}_C$ و $\mathbf{i}_G$، منابع نابسته را نشان می‌دهند. جهت‌های قراردادی به کار رفته در نوشتن معادلات (۴-۳)، در شکل (۴-۲) نشان داده شده است. به عنوان مثال، در شکل (۴-۱) داریم:

$$\mathbf{R}_R = R_c \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & L_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ 0 & C_b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_G = \begin{bmatrix} G_a & & & 0 \\ & G_b & & \\ & & G_e & \\ 0 & & & G_d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_R = -v_0 \qquad \mathbf{e}_L = \mathbf{i}_C = \mathbf{i}_G = 0$$

واضح است که مسألهٔ بعدی، ترکیب سه دسته از معادلات فوق، یعنی معادلات KVL در (۴-۱)، معادلات KCL در (۴-۲) و معادلات شاخه در (۴-۳)، می‌باشد. تمام متغیرهایی که جزء متغیرهای حالت یا منابع نیستند، باید حذف شوند.



مقاومت لینک سلف خازن مقاومت شاخه درخت

شکل ٤-۲ شاخه‌های نوعی با منابع نابسته

معادلات (۴-۱) و (۴-۲) را می‌توان دوباره به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_R \\ \mathbf{v}_L \end{bmatrix} = -\mathbf{F}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_C \\ \mathbf{v}_G \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{RC} & \mathbf{F}_{RG} \\ \mathbf{F}_{LC} & \mathbf{F}_{LG} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_C \\ \mathbf{v}_G \end{bmatrix} \quad \text{(۴-۴ الف)}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_C \\ \mathbf{j}_G \end{bmatrix} = \mathbf{F}^T\begin{bmatrix} \mathbf{j}_R \\ \mathbf{j}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{RC}{}^T & \mathbf{F}_{LC}{}^T \\ \mathbf{F}_{RG}{}^T & \mathbf{F}_{LG}{}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{j}_R \\ \mathbf{j}_L \end{bmatrix} \quad \text{(۴-۴ ب)}$$

که در آنجا برای سهولت، ماتریس $\mathbf{F}$ به زیر ماتریس‌هایی تفکیک شده است. از ترکیب معادلات (۴-۳) و (۴-۴) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{R}_R\mathbf{j}_R = -\mathbf{F}_{RC}\mathbf{v}_C - \mathbf{F}_{RG}\mathbf{v}_G - \mathbf{e}_R \quad \text{(۴-۵ الف)}$$

$$\mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{j}_L = -\mathbf{F}_{LC}\mathbf{v}_C - \mathbf{F}_{LG}\mathbf{v}_G - \mathbf{e}_L \quad \text{(۴-۵ ب)}$$

$$\mathbf{C}\frac{d}{dt}\mathbf{v}_C = \mathbf{F}_{RC}{}^T\mathbf{j}_R + \mathbf{F}_{LC}{}^T\mathbf{j}_L - \mathbf{i}_C \quad \text{(۴-۵ پ)}$$

$$\mathbf{G}_G\mathbf{v}_G = \mathbf{F}_{RG}{}^T\mathbf{j}_R + \mathbf{F}_{LG}{}^T\mathbf{j}_L - \mathbf{i}_G \quad \text{(۴-۵ ت)}$$

توجه کنید، در معادلات (۴-۵)، تنها متغیرهایی که جزء متغیرهای حالت یا منابع نیستند، متغیرهای $\mathbf{j}_R$ و $\mathbf{v}_G$ می‌باشند. می‌توان آنها را حذف کرده، نمایش معادلات حالت را به صورت زیر به دست آورد (اثبات این مطلب کاملاً سر راست بوده و در نتیجه، حذف شده است):

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_C \\ \mathbf{j}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -\mathcal{Y} & \mathcal{H} \\ -\mathcal{H}^T & -\mathcal{Z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_C \\ \mathbf{j}_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1}\mathcal{B}\begin{bmatrix} \mathbf{i}_C \\ \mathbf{i}_G \\ \mathbf{e}_R \\ \mathbf{e}_L \end{bmatrix} \quad \text{(۴-۶)}$$

کمیت‌های به کار رفته در نمایش فوق، به شرح زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathfrak{Y} \triangleq \mathbf{F}_{RC}{}^{T}\mathfrak{R}^{-1}\mathbf{F}_{RC} \tag{۴-۷ الف}$$

$$\mathfrak{Z} \triangleq \mathbf{F}_{LG}\mathfrak{G}^{-1}\mathbf{F}_{LG}{}^{T} \tag{۴-۷ ب}$$

$$\mathfrak{H} \triangleq \mathbf{F}_{LC}{}^{T} - \mathbf{F}_{RC}{}^{T}\mathfrak{R}^{-1}\mathbf{F}_{RG}\mathbf{R}_{G}\mathbf{F}_{LG}{}^{T} \tag{۴-۷ پ}$$

$$\mathfrak{R} \triangleq \mathbf{R}_{R} + \mathbf{F}_{RG}\mathbf{R}_{G}\mathbf{F}_{RG}{}^{T} \qquad \mathbf{R}_{G} = \mathbf{G}_{G}{}^{-1} \tag{۴-۷ ت}$$

$$\mathfrak{G} \triangleq G_{G} + \mathbf{F}_{RG}{}^{T}\mathbf{G}_{R}\mathbf{F}_{RG} \qquad \mathbf{G}_{R} = \mathbf{R}_{R}{}^{-1} \tag{۴-۷ ث}$$

$$\mathfrak{B} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{F}_{RC}{}^{T}\mathfrak{R}^{-1}\mathbf{F}_{RG}\mathbf{R}_{G} & \mathbf{F}_{RC}{}^{T}\mathfrak{R}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{F}_{LG}\mathfrak{G}^{-1} & -\mathbf{F}_{LG}\mathfrak{G}^{-1}\mathbf{F}_{RG}{}^{T}\mathbf{G}_{R} & 1 \end{bmatrix} \tag{۴-۷ ج}$$

در مثال بالا داریم:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{RC} & \mathbf{F}_{RG} \\ \mathbf{F}_{LC} & \mathbf{F}_{LG} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\mathfrak{R} = R_c + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_a & & & 0 \\ & G_b & & \\ & & G_e & \\ 0 & & & G_d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_c + R_d$$

$$\mathfrak{G} = \begin{bmatrix} G_a & & & 0 \\ & G_b & & \\ & & G_e & \\ 0 & & & G_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{R_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_a & & & 0 \\ & G_b & & \\ & & G_e & \\ 0 & & & G_d + G_c \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{Y} = 0$$

$$\mathfrak{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_a & & & 0 \\ & G_b & & \\ & & G_e & \\ 0 & & & G_d + G_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_a + R_e + \dfrac{R_c R_d}{R_c + R_d} & R_e + \dfrac{R_c R_d}{R_c + R_d} \\ R_e + \dfrac{R_c R_d}{R_c + R_d} & R_b + R_e + \dfrac{R_c R_d}{R_c + R_d} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

چون:

$$\mathbf{e}_L = \mathbf{i}_C = \mathbf{i}_G = 0 \qquad \mathbf{e}_R = -v_o \qquad \mathbf{F}_{RC} = 0$$

پس برای کمیت‌هایی که شامل ورودی هستند، تنها لازم است که $\mathbf{F}_{LG}\,\mathcal{G}^{-1}\mathbf{F}_{RG}{}^T\mathbf{G}_1\mathbf{e}_R$ - محاسبه گردد که به نتیجهٔ زیر، منجر می‌گردد:

$$-\mathcal{B}\begin{bmatrix} \mathbf{i}_C \\ \mathbf{i}_G \\ \mathbf{e}_R \\ \mathbf{e}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{R_d}{R_c + R_d} \\ \dfrac{R_d}{R_c + R_d} \end{bmatrix} v_o$$

این نتیجه، با آنچه که قبلاً به دست آمده بود، مطابقت دارد.

برای شبکه‌هایی که اجزای تزویج شده دارند، بعضی مواقع می‌توان معادلات حالت را طبق روشی که در این بخش گفته شد، نوشت. به عنوان مثال، چنانچه سلف‌های تزویج شده داشته باشیم، ماتریس اندوکتانس، متقارن و غیر قطری می‌گردد. برای شبکه‌هایی که منابع وابسته و ترانسفورماتورهای ایده‌آل داشته باشند، ماتریس مقاومتی لینکی و ماتریس رسانایی شاخه درختی، غیر قطری می‌شوند. در این قبیل موارد، به دست آوردن نمایش صورت بستهٔ معادلات حالت، نسبتاً پیچیده است. از طرف دیگر، در بیشتر حالتهای عملی، روش حسی که در ابتدا آن را ارائه کردیم، بسیار خوب کار می‌کند.

خلاصه

■ دسته‌ای از داده‌ها را وقتی می‌توان به عنوان حالت یک شبکه تلقی کرد که در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- برای هر زمان دلخواه t_1، حالت در زمان t_1 و ورودی‌ها از t_1 به بعد، حالت را در هر زمان $t > t_1$ به طور یکتا تعیین کنند.

۲- برای هر زمان دلخواه t، حالت در زمان t و ورودی‌ها در این زمان (و گاهی بعضی از مشتق‌های ورودی‌ها)، هر متغیر شبکه را در زمان t به طور یکتا تعیین کنند.

مؤلفه‌های حالت را **متغیرهای حالت** نامند.

■ برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، معادلات حالت (برای یک ورودی تنهای w) به صورت:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}w$$

و معادلهٔ خروجی، (برای یک خروجی تنهای y) به صورت:

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d_\circ w$$

می‌باشند. در بعضی از موارد، ممکن است در معادلهٔ حالت و/ یا معادلهٔ خروجی، مشتق‌های ورودی نیز ظاهر شوند.

■ معمولاً متغیرهای حالت، جریانهای سلف‌ها و ولتاژهای خازن‌ها هستند. برای شبکه‌های غیرخطی و تغییرپذیر با زمان، در بیشتر مواقع، به کار بردن شار سلف‌ها و بار خازن‌ها به عنوان متغیرهای حالت، ترجیح داده می‌شود.

■ یک روش منظم که در تعداد زیادی از شبکه‌های RLC کار می‌کند، به شرح زیر است: (۱) درختی انتخاب کنید که تمام خازن‌ها را شامل بوده و هیچ یک از سلف‌ها را دربر نداشته باشد. (۲) شارها و بارها را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب کنید. (۳) یک معادلهٔ کات‌ست اساسی برای هر یک از خازن‌ها بنویسید (در هر یک از این معادلات، تمام جریان‌های شاخه‌ها را برحسب متغیرهای حالت انتخاب شده، بیان کنید). (۴) یک معادلهٔ حلقهٔ اساسی برای هر یک از سلف‌ها بنویسید (در هر یک از این معادلات، تمام ولتاژهای شاخه‌ها را برحسب متغیرهای حالت انتخاب شده، بیان کنید). معادلات حالت، به صورت زیر درمی‌آیند:

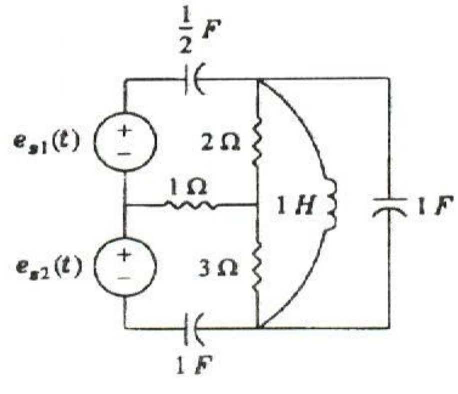
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), w(t), t\big)$$

و هر متغیر شبکهٔ y را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

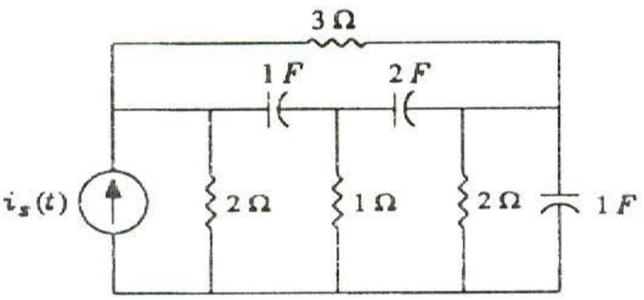
$$y(t) = g\big(\mathbf{x}(t), w(t), \dot{w}(t), \cdots, t\big)$$

مسائل

۱- معادلات حالت را برای مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۱) بنویسید. جریان گذرنده از مقاومت یک اهمی را برحسب متغیرهای حالت و ورودی‌ها بیان کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱)

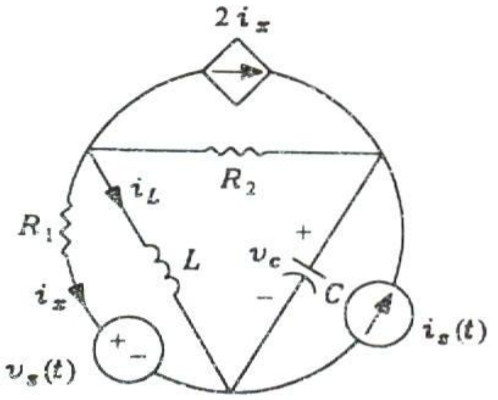


شکل (مسألهٔ ۱۲-۲)

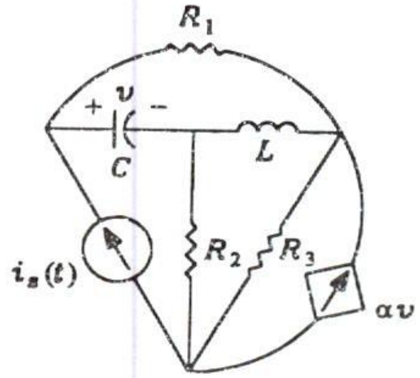
۲ـ الف ـ معادلات حالت را برای مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۲) بنویسید.

ب ـ اگر منبع جریان $i_s(t)$ به منبع ولتاژ $e_s(t)$ تبدیل شود معادلات حالت به چه صورت درمی‌آیند؟

۳ـ معادلات حالت مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۳) را بنویسید. جریان گذرنده از مقاومت $R_۲$ را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.



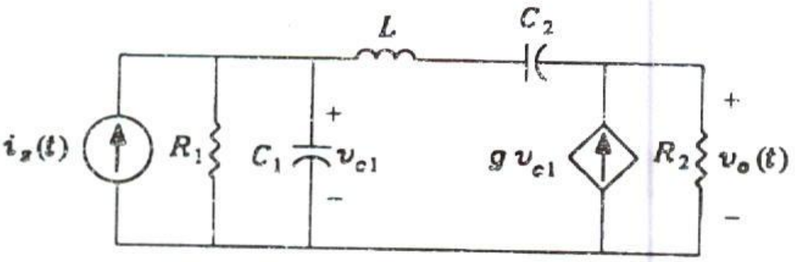
شکل (مسألهٔ ۱۲-٤)



شکل (مسألهٔ ۱۲-۳)

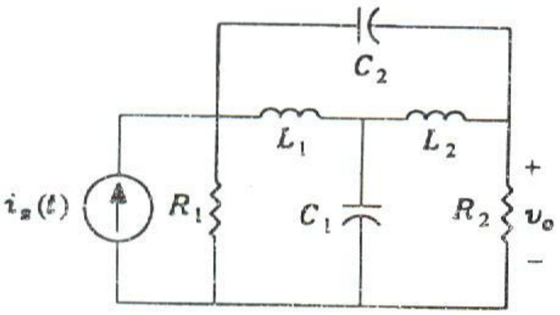
٤ـ معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۲-۴) را بنویسید و خروجی i_x را برحسب متغیرهای حالت بیان کنید.

۵ـ معادلات حالت مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۵) را به صورت ماتریسی بنویسید و ولتاژ خروجی v_o را به صورت ترکیب خطی متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۵)

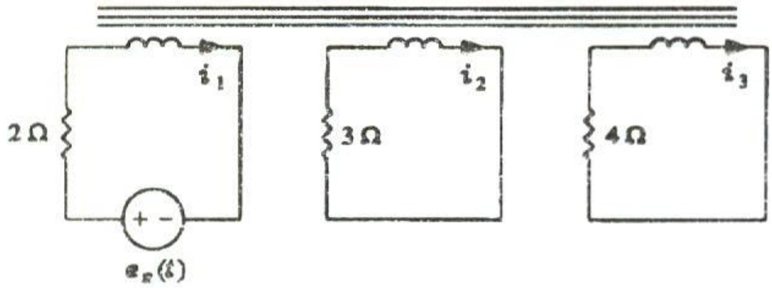
۶ـ معادلات حالت را در مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۶) بنویسید (با استفاده از روش منظم). ولتاژ خروجی v_o را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۶)

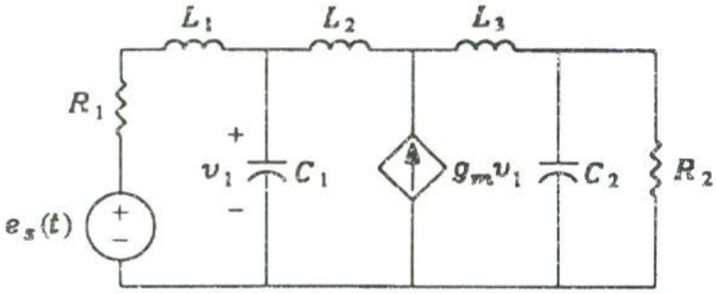
۷- معادلات حالت را برای مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۷) بنویسید و آن را به صورت ماتریسی درآورید.

$$L=\begin{pmatrix} ۲ & -۲ & ۳ \\ -۲ & ۳ & -۳ \\ ۳ & -۳ & ۵ \end{pmatrix}$$



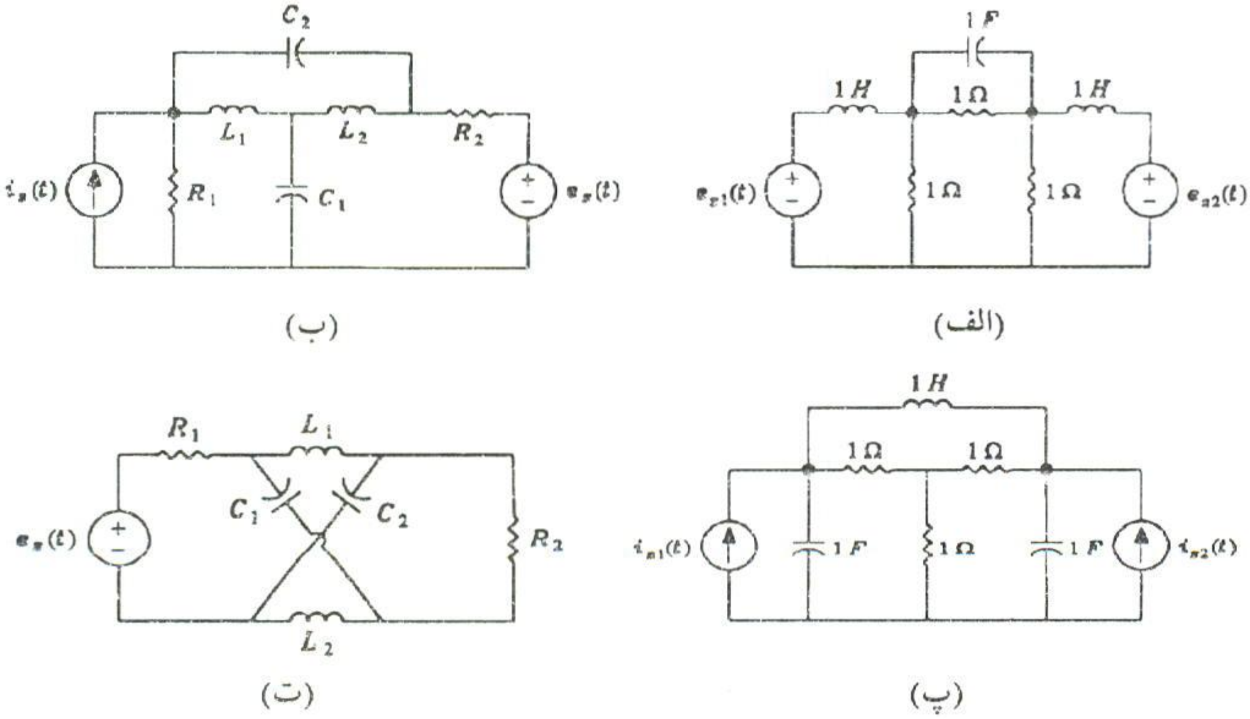
شکل (مسألهٔ ۱۲-۷)

۸- معادلات حالت را برای مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۸) بنویسید و ولتاژ دوسر منبع جریان وابسته را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.

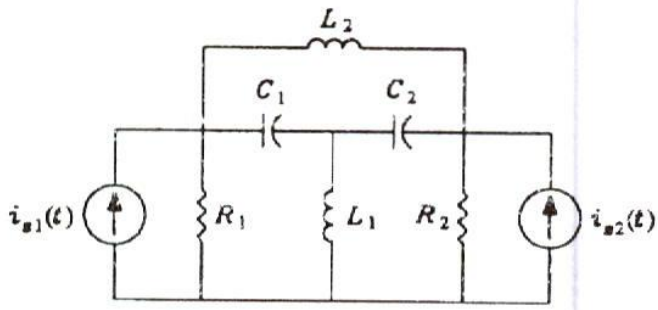


شکل (مسألهٔ ۱۲-۸)

۹- معادلات حالت مدارهای نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۲-۹) را بنویسید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۹)

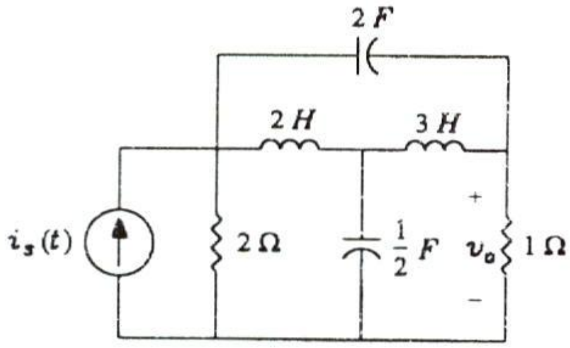


(ث)

(ادامه) شکل (مسألهٔ ۱۲-۹)

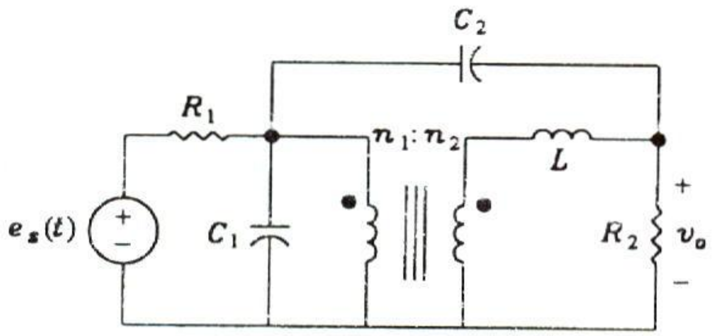
۱۰- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۰) معادلات حالت را بنویسید و ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.

اگر خازن $\frac{1}{2}$ فارادی با منبع جریان وابستهٔ $2v_c(t)$ جایگزین شود، که در آن $v_c(t)$ ولتاژ دوسر خازن ۲ فارادی است، بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۰)

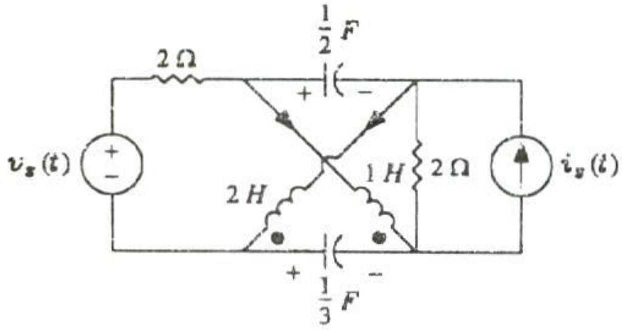
۱۱- معادلات حالت مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۱) را بنویسید و ولتاژ خروجی v_o را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۱)

۱۲- الف - معادلات حالت را برای مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۲) نوشته و آن را به صورت ماتریسی درآورید. اگر خروجی مدار، ولتاژ دوسر منبع جریان $i_s(t)$ باشد، آن را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.

ب - اگر تزویج $M = \frac{1}{2}H$ بین دو سلف وجود داشته باشد، معادلات حالت به چه صورت درمی‌آیند؟

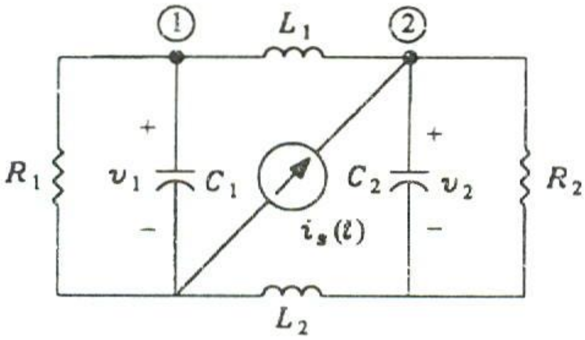


شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۲)

۱۳- الف ـ معادلات حالت را برای مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۳) بنویسید.

ب ـ اگر منبع جریان نابستهٔ $i_s(t)$ به منبع جریان وابستهٔ $g_m v_1$ تبدیل شود، معادلات حالت به چه صورت درمی‌آیند؟

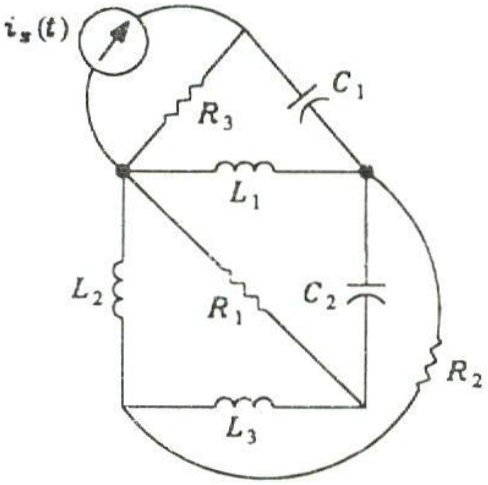
پ ـ اگر خازن C_2 میان گره‌های ① و ② وصل شود، معادلات حالت به چه صورت درمی‌آیند؟



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۳)

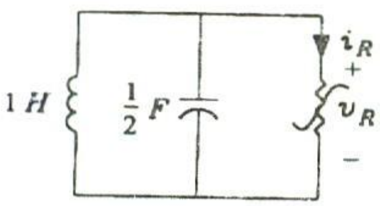
۱۴- الف ـ معادلات حالت را برای مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۴) بنویسید.

ب ـ اگر تزویجی میان سلف‌های L_1 و L_2 با ضریب تزویج k وجود داشته باشد، معادلات حالت را بنویسید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱٤)

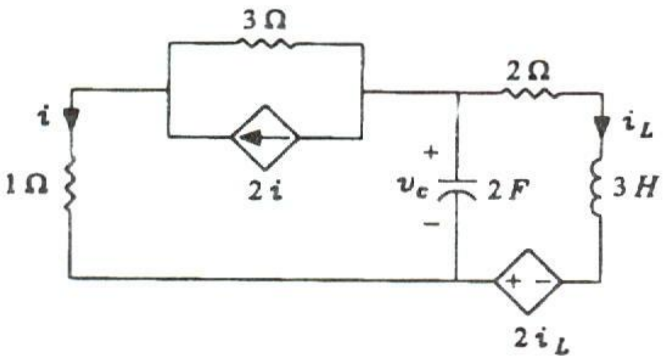
۱۵- در مدار غیرخطی شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۵) و با شروع از حالت اولیهٔ $I_0 = 2$ و $V_0 = 1$ و انتخاب $\Delta t = 0.2$ ثانیه، مسیر فضای حالت را به طور تقریبی رسم کنید. $i = -2v_R + v_R^3$ شکل کلی مسیر را تعیین و اثر شرایط اولیه را در شکل کلی بررسی کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۵)

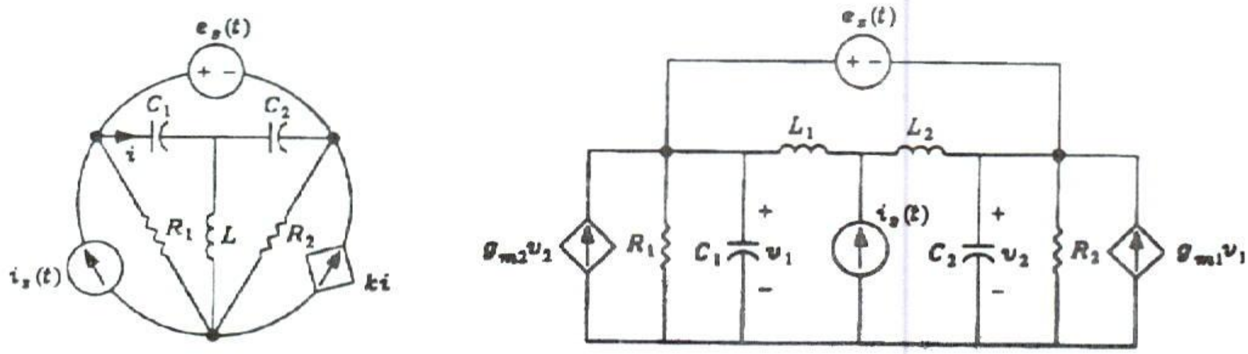
Prozhefa.com

۱۶- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۶) ولتاژ اولیهٔ خازن و جریان اولیهٔ سلف مخالف صفر می‌باشند. معادلات حالت مدار را بنویسید و مسیر حالت را ترسیم نمایید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۶)

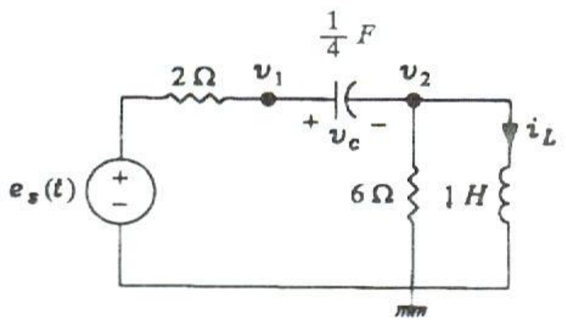
۱۷- معادلات حالت را برای مدارهای شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۷) بنویسید. آنها را به شکل ماتریسی درآورید و جریان گذرنده از منبع ولتاژ $e_s(t)$ در هر دو مدار را برحسب متغیرهای حالت بیان کنید. آیا می‌توانید معادلات حالت را طوری بنویسید که مشتق ورودی‌ها در آنها ظاهر نشود؟



شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۷)

۱۸- **الف- معادلات حالت مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۸) را برحسب متغیرهای حالت v_C و i_L بنویسید.**

ب- اگر ولتاژهای گره‌های v_1 و v_2 را متغیرهای حالت انتخاب کنیم، معادلات حالت را بدون استفاده از بند الف بنویسید.

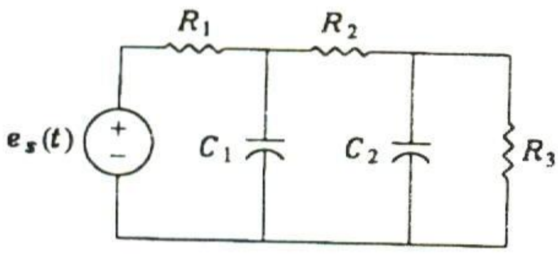


شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۸)

پ- از نتیجهٔ بند الف استفاده کرده و بند ب را بار دیگر جواب دهید.

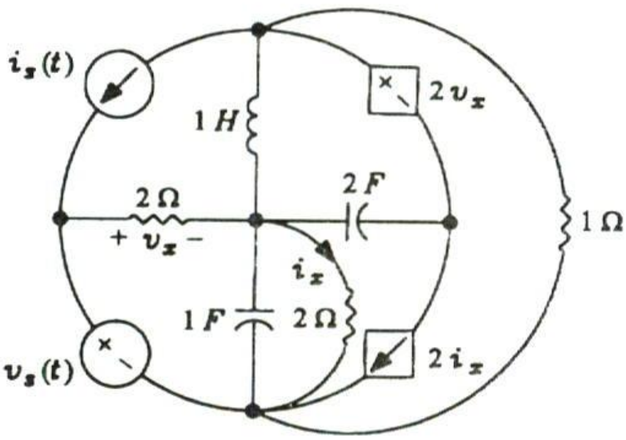
ت- آیا انتخاب متغیرهای حالت ولتاژ خازن و جریان سلف، مزیتی بر انتخاب متغیرهای حالت ولتاژهای گره دارد؟ توضیح دهید.

۱۹- می‌دانیم مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۹) از مرتبهٔ دوم است و می‌توان به سادگی با دو معادلهٔ حالت برحسب ولتاژهای خازن‌ها، آن را توصیف کرد. فرض کنید می‌خواهیم معادلات حالت این مدار را برحسب جریانهای مش‌های آن بنویسیم. این معادلات را بنویسید و توضیح مناسبی در مورد این که مدار مرتبهٔ دوم را با سه معادلهٔ حالت بیان می‌کنیم، ارائه دهید.



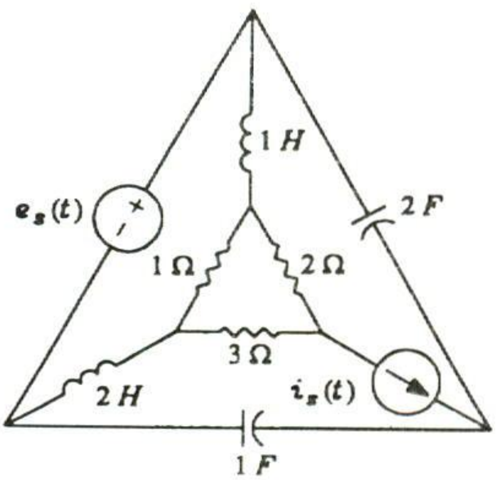
شکل (مسألهٔ ۱۲-۱۹)

۲۰- معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۰) را بنویسید و بردار خروجی $\begin{pmatrix} i_x \\ v_x \end{pmatrix}$ را برحسب ترکیب خطی متغیرهای حالت و ورودی‌ها بنویسید.

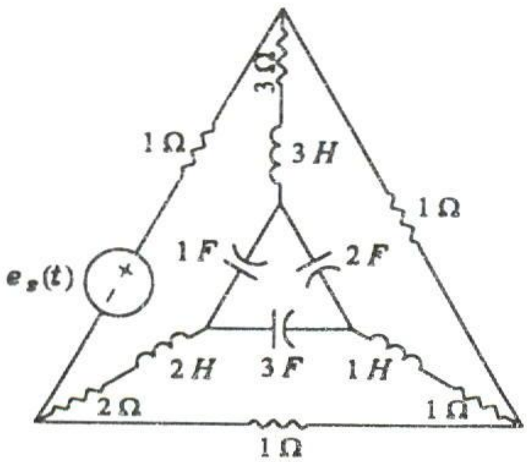


شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۰)

۲۱- معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۱) را بنویسید و آن را به صورت ماتریسی درآورید.
جریان گذرنده از منبع ولتاژ $e_s(t)$ را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۲)



شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۱)

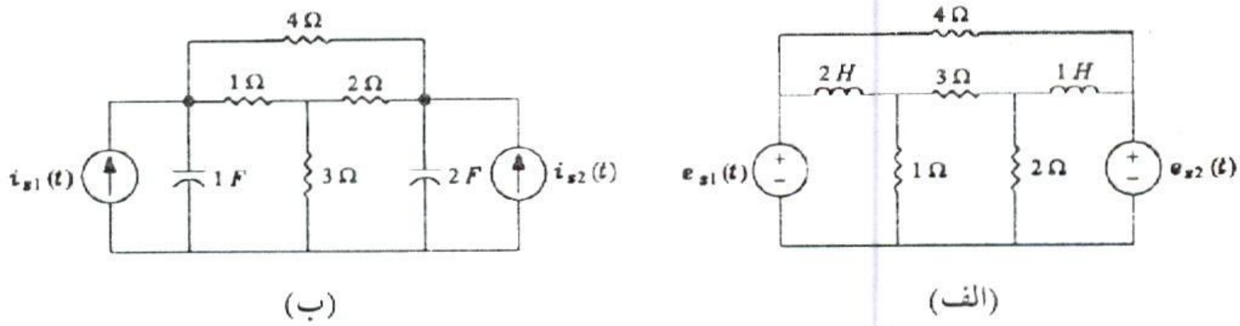
۲۲- الف ـ معادلات حالت مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۲) را بنویسید و جریان گذرنده از منبع ولتاژ $e_s(t)$ را برحسب متغیرهای حالت بیان کنید. سعی کنید مشتق ورودی در معادلات حالت ظاهر نشود.

ب ـ اکنون فرض کنید منبع جریان $i_s(t)$ با یک سلف $2H$ جایگزین شود. بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

پ ـ اکنون فرض کنید منبع ولتاژ $e_s(t)$ با خازنی با ظرفیت $2F$ جایگزین شود. بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

ت ـ فرض کنید حالتهای ب و پ با هم اتفاق بیفتند. بار دیگر معادلات حالت مدار را بنویسید.

۲۳- معادلات حالت مدارهای نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۳) را با روش منظم بنویسید و به شکل ماتریسی درآورید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۳)

۲٤- الف ـ فرض کنید در مدارهای مسألهٔ ۲۳، مقاومت ۴ اهمی با خازنی با ظرفیت ۲ فاراد جایگزین شود. بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

ب ـ فرض کنید در مدارهای مسألهٔ ۲۳، مقاومت ۴ اهمی با سلفی با اندوکتانس ۲ هانری جایگزین شود. بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

پ ـ فرض کنید در مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۳ الف) تزویج $M = 1\,H$ میان دو سلف برقرار باشد. بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.

۲۵- ثابت کنید اگر $\mathbf{x}$ بردار حالت و w ورودی و y یک خروجی دلخواه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان باشند، می‌توان همواره y را به صورت زیر نوشت:

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d_0 w$$

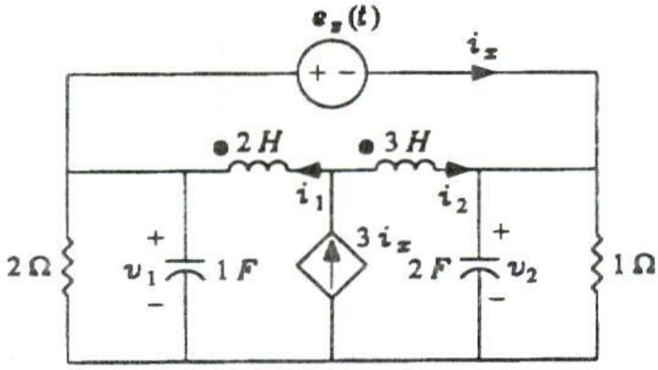
۲۶- معادلهٔ دیفرانسیل توصیف کنندهٔ یک مدار به صورت زیر است:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 3y = \frac{d^2w}{dt^2} + 3\frac{dw}{dt} + 2w(t)$$

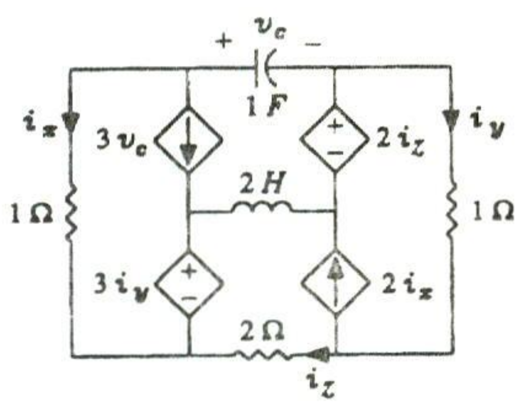
معادلات حالت این مدار را چنان بنویسید که مشتق ورودی در معادلات آن ظاهر نشود.

۲۷- الف - معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۷) را بنویسید و جریان گذرنده از منبع ولتاژ را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.

ب - اگر تزویج $M = 1\,H$ میان سلف‌ها وجود داشته باشد، بار دیگر معادلات حالت را بنویسید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۷)



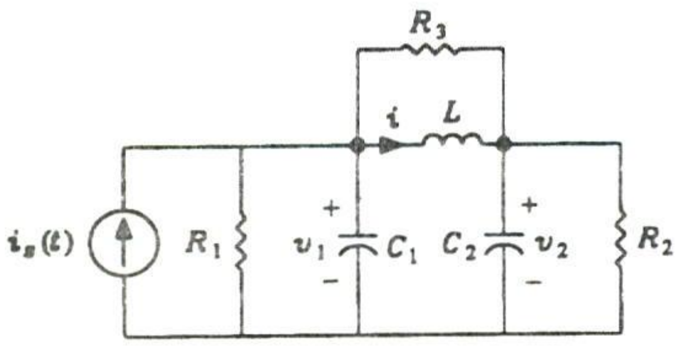
شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۸)

۲۸- معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۸) را بنویسید و جریان خروجی i_x را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بیان کنید.

۲۹- الف - در مدار شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۹) تمام عناصر خطی و تغییرناپذیر با زمان هستند. معادلات حالت را بنویسید.

ب - اکنون فرض کنید تمام عناصر خطی ولی تغییرپذیر با زمان باشند. معادلات حالت را بار دیگر بنویسید.

پ - اکنون فرض کنید تمام عناصر غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان با مشخصه‌های زیر باشند:
$v_1 = f_1(q_1)$، $v_2 = f_2(q_2)$، $i = f_3(\phi)$، $i_{R_3} = g_3(v_{R_3})$، $i_{R_2} = g_2(v_{R_2})$ و $i_{R_1} = g_1(v_{R_1})$.
معادلات حالت را بار دیگر بنویسید.

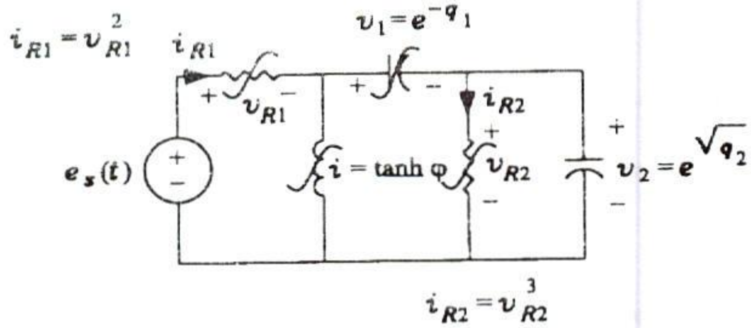


شکل (مسألهٔ ۱۲-۲۹)

۳۰- معادلات حالت مدار غیرخطی نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۲-۳۰) را بنویسید.

الف - متغیرهای حالت را بار خازن‌ها و شار سلف انتخاب کنید.

ب - متغیرهای حالت را ولتاژ خازنها و جریان گذرنده از سلف انتخاب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۲-۳۰)