۱۰
تجزیه و تحلیل گره و مش

این فصل و دو فصل بعد، به روش‌های **کلی** تجزیه و تحلیل شبکه اختصاص داده شده است. مسألهٔ تجزیه و تحلیل شبکه را می‌توان چنین بیان نمود: با معلوم بودن گراف شبکه، مشخصه‌های شاخه‌ها، ورودی (یعنی شکل موج منابع نابسته) و شرایط اولیه، تمام ولتاژهای شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها را محاسبه کنید. دراین سه فصل ما تنها طرز تشکیل معادلات شبکه را در نظر خواهیم گرفت. روش‌های حل این معادلات و خواص جوابهای آنها در فصل‌های ۱۳ تا ۱۶ بررسی خواهند شد.

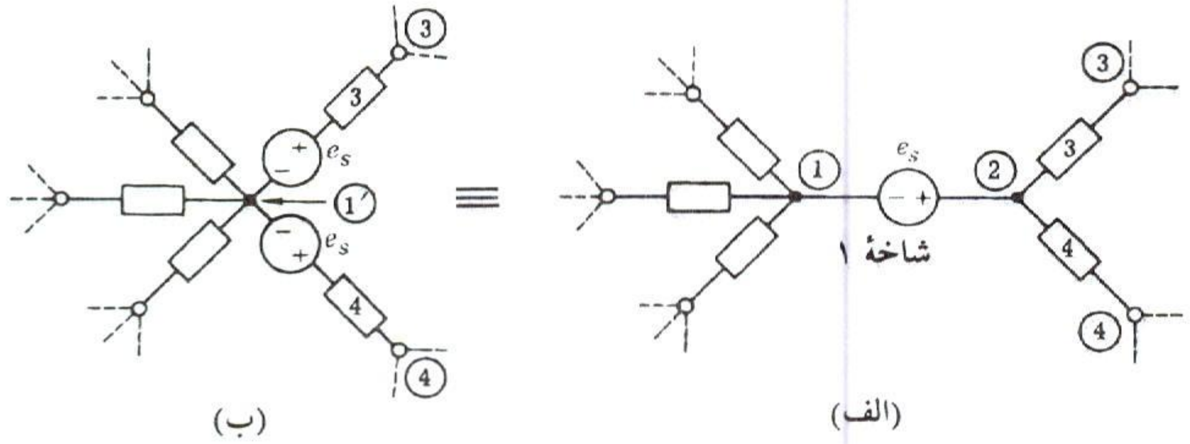
در این فصل، تجزیه و تحلیل گره و مش را به طور منظم بررسی خواهیم نمود. امروزه با توجه به اینکه کامپیوترها تجزیه و تحلیل شبکه‌ها را به طور خودکار انجام می‌دهند، اینگونه بررسی منظم دارای اهمیت خاص می‌باشد. همچنین نتایج این تجزیه و تحلیل‌های منظم، ما را مجاز می‌دارند که روش‌هایی برای توسعهٔ خواص این شبکه‌ها به دست آوریم.

در بخش ۱ تبدیلات منابع را ارائه می‌کنیم که در تمام روش‌های تجزیه و تحلیل بعدی از آن استفاده خواهیم کرد. در بخش ۲ نتایج قوانین کیرشف در زمینهٔ تجزیه و تحلیل گره به دست آمده است. بخش ۳ در مورد تجزیه و تحلیل منظم شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان بحث می‌کند. مبحث دوگانی در بخش ۴ توسعه داده شده است. بالاخره تجزیه و تحلیل مش در بخشهای ۵ و ۶ ارائه شده است. مجدداً یادآور می‌شویم که تنها شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان در نظر گرفته شده‌اند.

۱- تبدیل منابع

در بحث کلی مسألهٔ تجزیه و تحلیل شبکه فرض می‌کنیم که تعداد و محل قرار گرفتن منابع نابسته مادامی که قوانین کیرشف نقض نشوند اختیاری است (یعنی مادامی که منابع ولتاژ نابسته یک حلقه تشکیل ندهند و یا منابع جریان نابسته یک کات‌ست تشکیل ندهند، زیرا در هر یک از این دو حالت شکل موج‌های این منابع باید در یک محدودیت خطی که به ترتیب توسط KVL و KCL اعمال می‌شود صدق کنند).

برای آنکه جدا کردن شاخه‌هایی که تنها شامل منابع هستند از شاخه‌های دیگر لازم نباشد، بهتر است نخست دو تبدیل شبکه را چنان بیابیم که بتوان بدون آنکه در مسأله تأثیری داشته باشند، محل



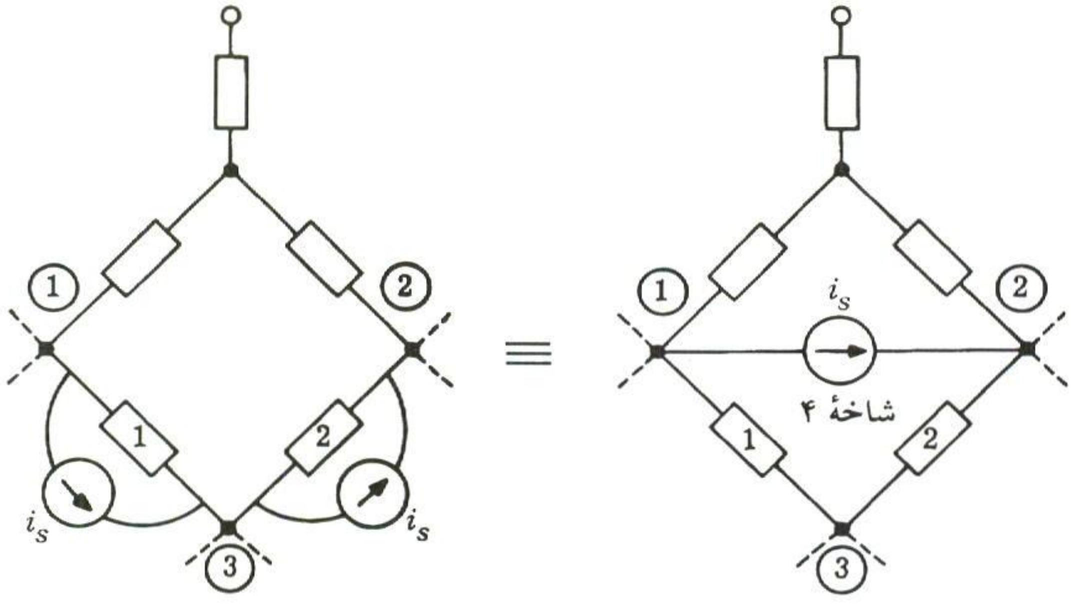
شکل ۱-۱ تبدیل منبع؛ شاخه‌ای که از یک منبع ولتاژ تنها تشکیل می‌شود، حذف شده است.

منابع را در شبکه تغییر داد. این تبدیلات را می‌توان هم برای منابع نابسته و هم برای منابع وابسته به‌کار برد. آنها در شکل‌های (۱-۱) و (۱-۲) تشریح شده‌اند.

شاخهٔ ۱ در شکل (۱-۱ الف) منبع ولتاژ e_s است که میان گره‌های ① و ② وصل شده است. گره ② توسط شاخهٔ ۳ به گره ③ و توسط شاخهٔ ۴ به گره ④ متصل شده است. چنانچه جریان شاخهٔ ۱ مورد توجه ما نباشد، می‌توان مدار شکل (۱-۱ الف) را با مدار معادل آن در شکل (۱-۱ ب) تعویض نمود. در مدار جدید شاخهٔ ۱ حذف شده و یک گره جدید ①′ به وجود آمده است. این گره جدید ①′، از برهم منطبق شدن گره‌های ① و ② در مدار اصلی حاصل شده است. برای معادل شدن این دو مدار، باید دو منبع e_s در شاخهٔ ۳ و شاخهٔ ۴ مدار جدید قرار داده شوند.

نشان دادن اینکه تبدیل فوق جواب مسأله را تغییر نمی‌دهد کاری بسیار آسان است و تنها لازم است که در هر دو شبکه، معادلات KVL برای تمام حلقه‌هایی که شامل شاخهٔ ۳ و همچنین تمام حلقه‌هایی که شامل شاخهٔ ۴ می‌باشند، نوشته شوند. به راحتی بررسی می‌شود که معادلات متناظر برای هر دو شبکه یکسان هستند. همچنین وقتی KCL در گره ①′ اعمال می‌شود، نتیجهٔ حاصل، مساوی مجموع معادلات به دست آمده از به‌کار بردن KCL در گره‌های ① و ② از شبکهٔ داده شده می‌باشد. بنابراین معادلات KCL هر دو شبکه، محدودیت‌های معادلی ایجاد می‌کنند.

شاخهٔ ۴ در شکل (۱-۲ الف) منبع جریان i_s است که میان گره‌های ① و ② وصل شده است. گره‌های ① و ② نیز به ترتیب توسط شاخه‌های ۱ و ۲ به گره ③ وصل شده است. در شکل (۱-۲ ب) مدار معادل نشان داده شده است که در آن منبع جریان شاخهٔ ۴ حذف شده و به‌جای آن دو منبع جریان جدید i_s به طور موازی با شاخه‌های ۱ و ۲ وصل شده‌اند. با نوشتن معادلات KCL برای گره‌های ①، ② و ③ در هر دو شبکه می‌توان ملاحظه کرد که این تبدیل، جواب مسأله را تغییر نمی‌دهد. واضح است که معادلات متناظر یکسان هستند.

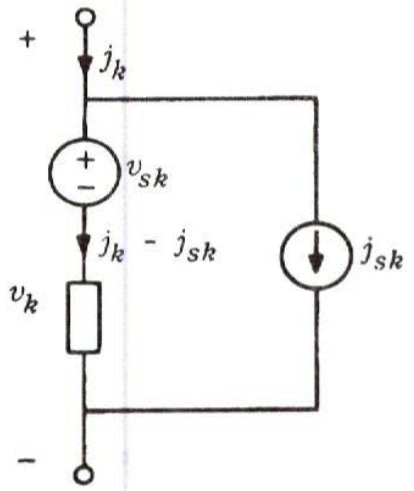


شکل ۱-۲ تبدیل منبع؛ شاخه‌ای که از یک منبع جریان تنها تشکیل می‌شود، حذف شده است.

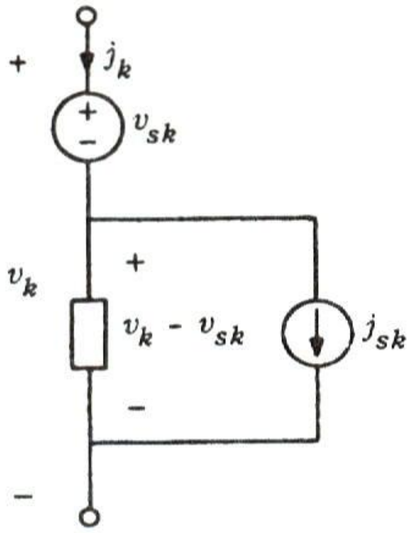
تمرین ۱ نشان دهید که تبدیلات زیر در ولتاژها و جریانهای شاخه‌های یک شبکه به جز عنصری که تغییر روی آن انجام می‌گیرد، تغییری به وجود نمی‌آورند: (۱) چنانچه شاخه‌ای از یک منبع جریان که به طور سری با یک عنصر قرار دارد، تشکیل شود، می‌توان این عنصر را با یک مدار اتصال کوتاه جانشین نمود؛ (۲) چنانچه شاخه‌ای از یک منبع جریان که به طور سری با یک منبع ولتاژ قرار دارد، تشکیل شود، می‌توان منبع ولتاژ را با یک مدار اتصال کوتاه جانشین نمود؛ (۳) چنانچه شاخه‌ای از یک منبع ولتاژ که به طور موازی با یک عنصر قرار دارد، تشکیل شود، می‌توان این عنصر را با یک مدار باز جانشین نمود؛ (۴) چنانچه شاخه‌ای از یک منبع ولتاژ که به طور موازی با یک منبع جریان قرار دارد، تشکیل شود، می‌توان منبع جریان را با یک مدار باز جانشین نمود. (ملاحظه کنید که حالت‌های (۳) و (۴) به ترتیب دوگان حالت‌های (۱) و (۲) هستند.)

در نتیجه، با به کار بردن این تبدیلات می‌توان هر شبکهٔ داده شده‌ای را چنان تغییر داد که در آن هر منبع ولتاژ به طور سری با عنصری که یک منبع نیست و هر منبع جریان به طور موازی با عنصری که یک منبع نیست، وصل شده باشد.

بنابراین، چنین نتیجه می‌شود که بدون از دست دادن تعمیم کلی، می‌توان فرض کرد که برای هر شبکه یک شاخهٔ نوعی مانند شاخهٔ k به صورت نشان داده شده در شکل (۱-۳) می‌باشد که در آن v_{sk} یک منبع ولتاژ و j_{sk} یک منبع جریان و جعبهٔ مستطیلی، عنصری را که منبع نیست نشان می‌دهد. ولتاژ شاخه مانند سابق با v_k و جریان شاخه با j_k مشخص می‌شود. بنابراین توصیف شاخهٔ k شامل در نظر گرفتن اثرات ممکن منابع می‌باشد. بخصوص چنانچه منبع ولتاژی در شاخهٔ k وجود نداشته باشد، $v_{sk} = ۰$ قرار می‌دهیم و به طریق مشابه، اگر منبع جریانی وجود نداشته باشد، $j_{sk} = ۰$ قرار می‌دهیم.



شکل ۱-۳ شاخهٔ k که شامل منابع ولتاژ و جریان می‌باشد.



شکل ۱-٤ شاخهٔ k که شامل منابع ولتاژ و جریان می‌باشد.

تمرین ۲ فرض کنید که در شکل (۱-۳) عنصر غیر منبع، مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با مقاومت R_k باشد. نشان دهید که معادلهٔ شاخه چنین است:

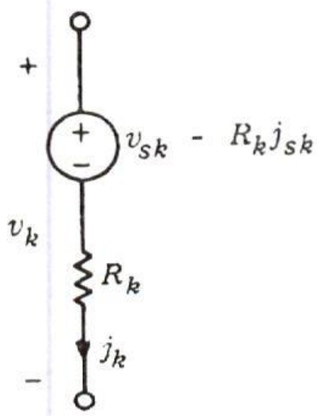
$$v_k = v_{sk} - R_k j_{sk} + R_k j_k \tag{۱-۱}$$

همچنین نشان دهید که این شاخه را می‌توان باز هم ساده‌تر کرد تا به صورت شکل (۱-۵) درآید.

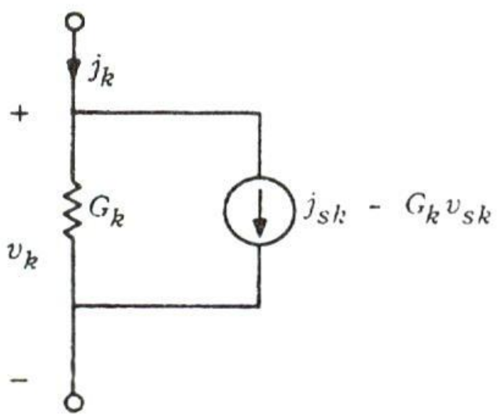
تمرین ۳ فرض کنید که در شکل (۱-۴) عنصر غیر منبع، مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با رسانایی G_k باشد. نشان دهید که معادلهٔ شاخه چنین است:

$$j_k = j_{sk} - G_k v_{sk} + G_k v_k \tag{۲-۱}$$

همچنین نشان دهید که این شاخه را می‌توان بازهم ساده‌تر کرد تا به صورت شکل (۱-۶) درآید.



شکل ۱-۵ یک شاخهٔ مقاومتی با یک منبع ولتاژ معادل.

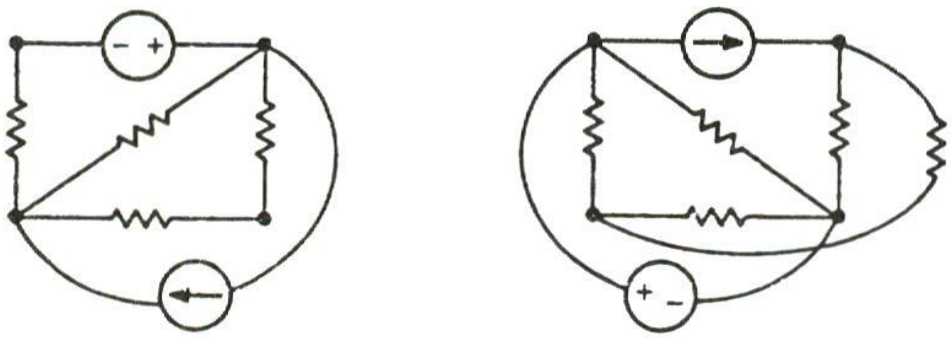


شکل ۱-۶ یک شاخهٔ مقاومتی با یک منبع جریان معادل.

این دو تمرین مدارهای معادل مفیدی را نشان می‌دهند. در تجزیه و تحلیل گره راحت‌تر است (ولی الزامی نیست) که تمام منابع نابسته به صورت منابع جریان باشند. به طریق مشابه، در تجزیه و تحلیل حلقه یا مش راحت‌تر است (ولی باز هم الزامی نیست) که تمام منابع نابسته به صورت منابع ولتاژ باشند.

از این به بعد، هنگامی که ما با شبکه‌های مقاومتی سروکار داریم، فرض خواهیم کرد که شاخه‌ها همیشه به صورت شکل (۱-۵) یا شکل (۱-۶) می‌باشند، یعنی مقاومتی به طور سری با یک منبع ولتاژ یا مقاومتی به طور موازی با یک منبع جریان. در شبکه‌های کلی ممکن است مقاومت با یک سلف و یا یک خازن تعویض شود.

تمرین ٤ برای مدارهای شکل (۱-۷) تبدیلهای لازم را انجام دهید.



شکل ۱-۷ تمرین‌هایی دربارهٔ تبدیل منابع.

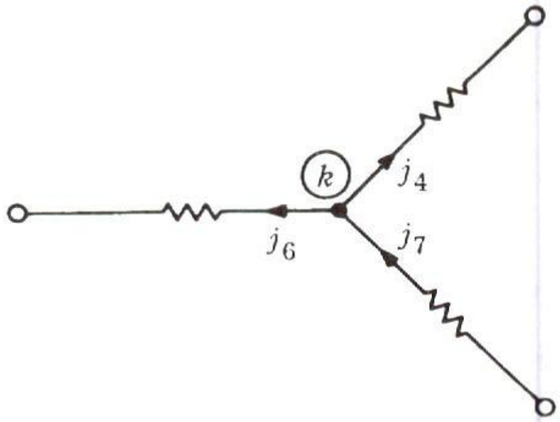
۲- دو مطلب اساسی تجزیه و تحلیل گره

شبکهٔ دلخواه $\mathcal{N}$ را که دارای n_t گره و b شاخه می‌باشد، در نظر بگیرید. در این شبکه، رویهم رفته b ولتاژ شاخه و b جریان شاخه وجود دارد که باید تعیین شوند. می‌توان بدون از دست دادن کلیّت موضوع، فرض نمود که گراف پیوسته است، یعنی تنها دارای یک جزء جداگانه می‌باشد. (چنانچه شبکه از دو جزء جدا از هم تشکیل می‌شد، می‌توانستیم این دو جزء جدا از هم را با به هم پیوستن آنها در یک گره مشترک، به هم وصل کنیم.)

نخست به طور دلخواه، یک گره مبنا انتخاب می‌کنیم. این گره مبنا معمولاً **گره مأخذ** خوانده می‌شود. برای گره مأخذ علامت (n_t) و برای بقیهٔ گره‌ها، علامت‌های ①، ②، ...، (n) را تعیین می‌کنیم که در آن $n \triangleq n_t - 1$.

۲-۱ استنباطهای KCL

اکنون KCL را در گره‌های ①، ②، ...، (n) به کار برده (گره مبنا را حذف می‌کنیم) و شکل معادلات به‌دست آمده را بررسی می‌کنیم. به طور نمونه، چنانکه در گره (k) نشان داده شده در شکل (۲-۱) دیده



شکل ۲-۱ یک گره نمونه برای تشریح KCL.

می‌شود، یک معادلهٔ جبری خطی همگن از جریانهای شاخه‌ها به دست می‌آوریم و بنابراین:

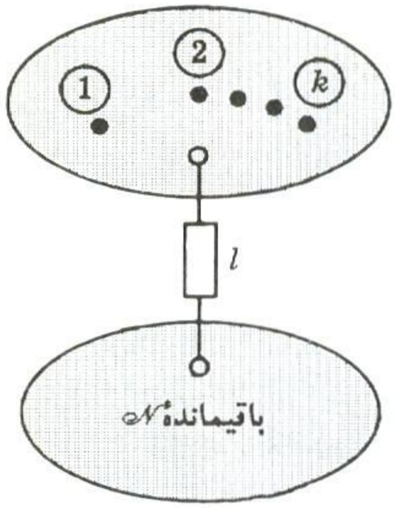
$$j_۴ + j_۶ - j_۷ = ۰$$

بدین ترتیب، یک دستگاه n معادلهٔ جبری خطی از b مجهول $j_۱$ ، $j_۲$ ، … ، j_b داریم. اولین مطلب اساسی تجزیه و تحلیل گره به صورت زیر بیان می‌شود:

n معادلهٔ جبری خطی همگن، برحسب $j_۱$، $j_۲$، … ، j_b که از به کار بردن KCL در هر یک از گره‌ها بجز گره مبنا به دست می‌آیند، یک دسته معادلات نابستهٔ خطی تشکیل می‌دهند.

بررسی این مطلب را با یک مشاهده شروع می‌کنیم. n_t معادلهٔ به دست آمده از نوشتن KCL برای هر یک از n_t گره $\mathcal{N}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathscr{E}_k = ۰$ نشان دهندهٔ معادلهٔ مربوط به گره k برای $k = ۱, ۲, \cdots, n_t$ باشد. برای گره k نشان داده شده در شکل (۲-۱)، معادلهٔ $\mathscr{E}_k = ۰$ منجر به $j_۴ + j_۶ - j_۷ = ۰$ می‌گردد. حال، بیان می‌کنیم که $\sum_{k=۱}^{n_t} \mathscr{E}_k$ به‌طور متحد، مساوی صفر می‌شود. به‌عبارت دیگر، چنانچه تمام n_t معادلهٔ KCL را با هم جمع کنیم (که برحسب جریانهای شاخه‌های $j_۱$، $j_۲$، … ، j_b نوشته می‌شوند)، تمام جملات حذف می‌شوند و این موضوع واضح است. فرض کنید که شاخهٔ ۱ از گره ۲ خارج و به گره ۳ وارد شود. جملهٔ $j_۱$ با علامت مثبت در $\mathscr{E}_۲$ و با علامت منفی در $\mathscr{E}_۳$ ظاهر می‌گردد و چون $j_۱$ در هیچ معادلهٔ دیگری ظاهر نمی‌شود، پس $j_۱$ در مجموع بالا حذف می‌گردد. با در نظر گرفتن اینکه هر شاخهٔ $\mathcal{N}$ باید از یک گره خارج و به گره دیگری وارد شود، تمام جریانهای شاخه‌ها در مجموع بالا حذف خواهند شد و بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که n_t معادلهٔ به دست آمده از نوشتن KCL برای هر یک از گره‌های شبکهٔ $\mathcal{N}$ ، به طور خطی وابسته‌اند.

اکنون ثابت می‌کنیم که n معادلهٔ جبری خطی $\mathscr{E}_۱ = ۰$ ، $\mathscr{E}_۲ = ۰$ ، … ، $\mathscr{E}_n = ۰$ به طور خطی نابسته‌اند. فرض کنید که چنین نباشد، یعنی این n معادله به طور خطی وابسته باشند. این بدان معنی است که پس از بعضی مرتب کردن‌های احتمالی لازم این معادلات، یک ترکیب خطی k معادلهٔ اول $\mathscr{E}_۱$ ، $\mathscr{E}_۲$ ، … ، $\mathscr{E}_k$ $(k \le n)$ با ضرایب متناظر غیرصفر $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ … ، α_k وجود دارد که مجموعشان



شکل ۲-۲ گرافی که برای اثبات نابستهٔ خطی بودن n معادلهٔ KCL به‌کار می‌رود.

به‌طور متحد برابر صفر است. بنابراین:

$$\alpha_1\mathscr{E}_1 + \alpha_2\mathscr{E}_2 + \cdots + \alpha_k\mathscr{E}_k \equiv 0 \qquad (۱-۲)$$

دستهٔ تمام گره‌های ①، ②، ⋯ ، ⓚ متناظر با $\mathscr{E}_1$ ، $\mathscr{E}_2$ ، ⋯ ، $\mathscr{E}_k$ در معادلهٔ (۲-۱) را با هم و دستهٔ تمام گره‌های باقیمانده را مطابق شکل (۲-۲) با هم در نظر بگیرید. باقیماندهٔ $\mathcal{N}$ ، شامل $n_t - k$ گره است و چون $k \le n$ می‌باشد، پس این باقیمانده حداقل دارای یک گره می‌باشد و به علت اینکه $\mathcal{N}$ پیوسته است حداقل شاخه‌ای مانند l وجود دارد که یک گره از دستهٔ اول را به یک گره از دستهٔ دوم وصل می‌کند. در این صورت j_l در یک و تنها یک معادله از معادلات $\mathscr{E}_1$ ، $\mathscr{E}_2$ ، ⋯ ، $\mathscr{E}_k$ ظاهر می‌شود، زیراکه شاخهٔ l تنها به یکی از گره‌های دستهٔ اول متصل است و بنابراین در مجموع زیر نمی‌تواند حذف شود:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathscr{E}_i$$

و به این ترتیب به تناقضی با معادلهٔ (۲-۱) می‌رسیم. این استدلال برای هر ترکیب خطی ممکن برقرار است. بنابراین، فرض اینکه $\mathscr{E}_1$ ، $\mathscr{E}_2$ ، ⋯ ، $\mathscr{E}_k$ به طور خطی وابسته‌اند، صحیح نیست. در نتیجه، این موضوع که معادلات فوق به طور خطی نابسته‌اند اثبات می‌گردد.

بار دیگر دستگاه n معادلهٔ جبری خطی که KCL را برای تمام گره‌های $\mathcal{N}$ به‌جز گره مبنا بیان می‌کند، در نظر بگیرید. اکنون به یقین بیان می‌کنیم که این دستگاه دارای شکل ماتریسی زیر است:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{j} = 0 \qquad \text{(KCL)} \qquad (۲-۲)$$

که در آن $\mathbf{j}$ نشان دهندهٔ بردار جریان شاخه بوده و دارای بُعد b می‌باشد، یعنی:

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} j_۱ \\ j_۲ \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$

و در آن $\mathbf{A} = (a_{ik})$ یک ماتریس $n \times b$ است که چنین تعریف می‌شود:

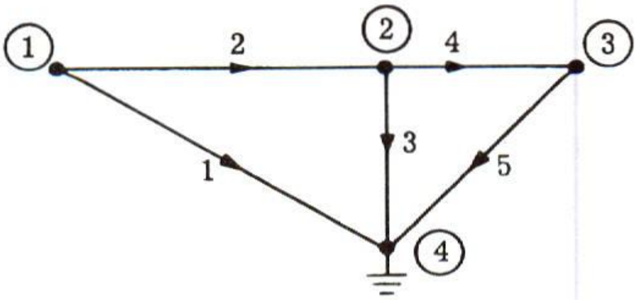
$$a_{ik} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ از گره } ⓘ \text{ خارج شود} \\ -۱ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ به گره } ⓘ \text{ وارد شود} \\ ۰ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ با گرهٔ } ⓘ \text{ تلاقی نداشته باشد} \end{cases} \qquad (۲-۳)$$

و بنابراین $\mathbf{Aj}$ یک بردار n بعدی است. این گفته واضح است، زیرا وقتی ما مؤلفهٔ iام بردار $\mathbf{Aj}$ را برابر صفر می‌نویسیم، صرفاً بیان می‌داریم که مجموع تمام جریانهای شاخه‌هایی که از گره ⓘ خارج می‌شوند، برابر صفر است.

بلافاصله مشاهده می‌شود که قواعد بیان شده به وسیلهٔ معادلهٔ (۲-۳) با قواعد مشخص کنندهٔ عناصر ماتریس تلاقی گره با شاخه $\mathbf{A}_a$، که در فصل قبل تعریف شد، کاملاً یکسان است. تنها اختلاف آنها در این است که $\mathbf{A}_a$ دارای $n_t = n + ۱$ سطر می‌باشد. واضح است که می‌توان ماتریس $\mathbf{A}$ را از حذف سطر متناظر با گره مبنا در ماتریس $\mathbf{A}_a$ به دست آورد و بنابراین، $\mathbf{A}$ **ماتریس تلاقی مختصر شده** نامیده می‌شود.

تبصره این حقیقت که $\mathbf{Aj} = ۰$ دسته‌ای از n معادلهٔ نابستهٔ خطی از متغیرهای $j_۱$، $j_۲$، ...، j_b می‌باشد، لازم می‌دارد که ماتریس $n \times b$، $\mathbf{A}$ دارای رتبهٔ n باشد. چون همواره $b > n$ است، می‌توان این نتیجه را به صورت زیر بیان نمود: ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ $\mathbf{A}$ دارای رتبهٔ کامل می‌باشد.

مثال ۱ گراف شکل (۲-۳) را که شامل چهار گره و پنج شاخه ($n_t = ۴$ و $b = ۵$) می‌باشد، در نظر بگیرید. فرض کنید که گره‌ها و شاخه‌ها را مطابق شکل شماره‌گذاری کنیم و با به‌کار بردن علامت "زمین" مشخص کنیم که گره ④ گره مبنا می‌باشد. بردار جریان شاخه چنین است:



شکل ۲-۳ گراف مثال‌های ۱ و ۲.

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\mathbf{A}$ مطابق معادلهٔ (۲-۳) به دست می‌آید و بنابراین داریم:

$$\begin{array}{rc} & \text{گره} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow (1) \\ \leftarrow (2) \\ \leftarrow (3) \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{شاخه} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \end{array}$$

بنابراین معادلهٔ (۲-۲) بیان می‌دارد که:

$$\mathbf{A}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = 0$$

یا :

$$j_1 + j_2 = 0$$
$$-j_2 + j_3 + j_4 = 0$$
$$-j_4 + j_5 = 0$$

واضح است که این معادلات، همان سه معادلهٔ گره هستند که از اعمال KCL در گره‌های ① ، ② و ③ به دست می‌آیند. در حالت اخیر می‌توان به راحتی دید که این سه معادله به طور خطی نابسته‌اند زیرا هر یک شامل متغیری است که در هیچیک از معادلات دیگر وجود ندارد.

تمرین ۱ تحقیق کنید که ماتریس 3×5، $\mathbf{A}$ بالا دارای رتبهٔ کامل است. (راهنمایی: تنها لازم است که یک زیر ماتریس 3×3 که دترمینان آن صفر نباشد، مشخص کنید.)

تمرین ۲ ماتریس تلاقی $\mathbf{A}_a$ گراف شکل (۲-۳) را تعیین کنید. توجه کنید که ماتریس $\mathbf{A}$ از حذف سطر چهارم ماتریس $\mathbf{A}_a$ به دست می‌آید.

۲-۲ استنباطهای KVL

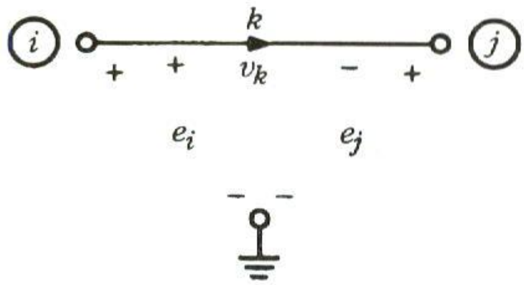
فرض کنید e_1 ، e_2 ، ... ، e_n ولتاژهای گره گره‌های ① ، ② ، ... ، ⓝ که نسبت به گره مبنا سنجیده می‌شوند، باشند. ولتاژهای e_1 ، e_2 ، ... ، e_n **ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا** خوانده می‌شوند. در تجزیه و تحلیل گره، این ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا را به عنوان متغیرها به کار خواهیم برد. KVL تضمین می‌کند که ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا بدون هیچ گونه ابهامی تعریف شوند و چنانچه ولتاژ یک گره دلخواهی را نسبت به گره مبنا با تشکیل جمع جبری ولتاژ شاخه‌هایی که در طول یک مسیر از گره مبنا تا گره مورد نظر قرار دارند، حساب کنیم، KVL تضمین می‌کند که این مجموع به مسیر انتخاب شده بستگی ندارد. در واقع فرض کنید که مسیر اول از گره مبنا به گره ⓚ ، e_k را به عنوان ولتاژ گره نسبت به مبنا و یک مسیر دوم $e'_k \neq e_k$ را به دست دهد. این وضع KVL را نقض می‌کند. برای مشاهدهٔ این مطلب حلقه‌ای را در نظر بگیرید که از مسیر اول و مسیر دوم ذکر شده در بالا تشکیل شود. KVL لازم می‌دارد که مجموع ولتاژهای شاخه‌ها مساوی صفر باشد و بنابراین $e'_k = e_k$.

یک روش نسبتاً غیرمستقیم ولی مؤثر برای بیان محدودیت‌های KVL روی ولتاژهای شاخه‌ها، در نوشتن b ولتاژ شاخه برحسب n ولتاژ گره است. چون برای شبکه‌های معمولی $b > n$ است، پس b ولتاژ شاخه را نمی‌توان به طور دلخواه انتخاب کرد و آنها تنها n درجهٔ آزادی دارند. در واقع توجه کنید که ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنای e_1 ، e_2 ، ... ، e_n تا آنجا که KVL مورد نظر است، به‌طور خطی نابسته‌اند و این امر مسلم است، زیرا ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا، حلقه‌ای تشکیل نمی‌دهند. فرض کنید مؤلفه‌های بردار $\mathbf{e}$ به صورت e_1 ، e_2 ، ... ، e_n باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که ولتاژهای شاخه‌ها از روی ولتاژهای گره‌ها توسط معادلهٔ زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e} \qquad (۴-۲)$$

که در آن ماتریس $b \times n$ ، $\mathbf{A}^T$ ترانهادهٔ ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ $\mathbf{A}$ است که در معادلهٔ (۲-۳) تعریف شد.

برای اثبات این مطلب لازم است دو نوع شاخه در نظر گرفته شود، یکی شاخه‌هایی که با گره مبنا تلاقی دارند و دیگری شاخه‌هایی که با آن تلاقی ندارند. برای شاخه‌هایی که با گره مبنا تلاقی دارند ولتاژ شاخه یا مساوی ولتاژ گره نسبت به مبنا یا منفی همین مقدار می‌باشد. برای شاخه‌هایی که با گره مبنا تلاقی ندارند به موجب KVL ، ولتاژ شاخه باید با دو ولتاژ گره نسبت به مبنا حلقه‌ای تشکیل دهد و بنابراین به موجب KVL می‌توان آن را برحسب ترکیب خطی دو ولتاژ گره نسبت به مبنا بیان نمود و در نتیجه در هر دو حالت ولتاژهای شاخه‌ها به ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا به طور خطی وابسته‌اند. برای اثبات اینکه وابستگی فوق در واقع همان معادلهٔ (۲-۴) می‌باشد قرارداد علامت را به تفصیل بررسی می‌کنیم. به خاطر بیاورید که v_k ولتاژ شاخهٔ kام، $k = 1, 2, \cdots, b$ ، e_i ولتاژ گره نسبت به مبنا در گره



شکل ۲-٤ محاسبهٔ ولتاژ شاخهٔ v_k برحسب ولتاژهای گره‌های e_i و e_j ؛ $v_k = e_i - e_j$.

ⓘ ، $i = ۱, ۲, \cdots, n$ می‌باشند. بنابراین اگر شاخهٔ k ، گره i ام را به گره مبنا وصل کند داریم:

$$v_k = \begin{cases} e_i & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ از گره } (i) \text{ خارج شود} \\ -e_i & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ به گره } (i) \text{ وارد شود} \end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر شاخهٔ k از گره ⓘ خارج و به گره ⓙ وارد شود در این صورت چنانچه از شکل (۲-۴) به راحتی دیده می‌شود داریم:

$$v_k = e_i - e_j$$

چون در تمام حالتها v_k را می‌توان برحسب ترکیب خطی ولتاژهای $e_۱$ ، $e_۲$ ، $\cdots$ ، e_n بیان نمود، در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & \cdots & c_{۱n} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & \cdots & c_{۲n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{b۱} & c_{b۲} & \cdots & c_{bn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

که در آن c_{ki} ها مطابق قواعد بالا مساوی ۰، ۱ و یا ۱- می‌باشند. یک تفکر مختصر نشان می‌دهد که:

$$c_{ki} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ از گره } (i) \text{ خارج شود} \\ -۱ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ به گره } (i) \text{ وارد شود} \\ ۰ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ با گره } (i) \text{ تلاقی نداشته باشد} \end{cases} \qquad (۲-۵)$$

مقایسهٔ معادلهٔ (۲-۵) با معادلهٔ (۲-۳) بلافاصله نشان می‌دهد که برای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ و $k = ۱, ۲, \cdots, b$ ، $c_{ki} = a_{ik}$ می‌باشد. بنابر این ماتریس **C** (که عناصر آن c_{ki} ها هستند) در واقع ترانهادهٔ ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ **A** است و بدین ترتیب معادلهٔ (۲-۴) ثابت می‌شود.

مثال ۲ برای مدار شکل (۲-۳) داریم:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

مطابق معادلهٔ (۲-۵) داریم:

$$\mathbf{A}^T = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ ① & ② & ③ \end{array} \text{ گره} \end{array} \begin{array}{l} \text{شاخه} \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \leftarrow 4 \\ \leftarrow 5 \\ \\ \end{array}$$

بنابراین معادلهٔ (۲-۴) بیان می‌دارد که:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

یا :

$$v_1 = e_1$$
$$v_2 = e_1 - e_2$$
$$v_3 = e_2$$
$$v_4 = e_2 - e_3$$
$$v_5 = e_3$$

به راحتی دیده می‌شود که این پنج معادلهٔ اسکالر، همان بیانهای KVL هستند.

خلاصه از معادلات (۲-۲) و (۲-۴) داریم:

$$\mathbf{A}\mathbf{j} = 0 \quad (\text{KCL}) \qquad \text{و} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e} \quad (\text{KVL})$$

این روابط، دو معادلهٔ اساسی تجزیه و تحلیل گره می‌باشند که از گراف شبکه و دو قانون کیرشف به دست آمده‌اند و در نتیجه به ماهیت اجزای شبکه بستگی ندارند. معادلهٔ (۲-۲) قانون KCL را بیان کرده و n معادلهٔ جبری خطی همگن از b جریان شاخهٔ j_1 ، j_2 ، ... ، j_b را شامل می‌شود. معادلهٔ (۲-۴) قانون KVL را بیان کرده و b ولتاژ شاخهٔ v_1 ، v_2 ، ... ، v_b را برحسب n ولتاژ گره نسبت به مبنای e_1 ، e_2 ، ... ، e_n بیان می‌دارد.

واضح است برای اینکه n متغیر شبکهٔ e_1 ، e_2 ، ... ، e_n را به دست آوریم، لازم است که توصیف شاخه‌های شبکه را بدانیم، یعنی b معادلهٔ شاخه که ولتاژهای شاخه‌های $\mathbf{v}$ را به جریانهای شاخه‌های $\mathbf{j}$ ارتباط می‌دهند، داشته باشیم. ماهیت اجزای شبکه تنها در این معادلات شاخه در تجزیه و تحلیل وارد می‌شوند. بنابراین مسألهٔ باقیمانده ترکیب معادلات (۲-۲) و (۲-۴) با معادلات شاخه‌ها و به دست آوردن n معادله از n مجهول e_1 ، e_2 ، ... ، e_n می‌باشد. این عمل مستلزم حذف چند متغیر است. برای شبکه‌های غیرخطی و تغییرپذیر با زمان مسألهٔ حذف معمولاً مشکل است و ما بحث آن را به بعد موکول می‌کنیم. ولی برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان می‌توان معادلات شاخه‌ها را با معادلات (۲-۲) و (۲-۴) ترکیب نموده و عمل حذف را به راحتی انجام داد. بنابراین، ما منحصراً در بخش ۳ شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان را بررسی خواهیم کرد.

۲-۳ نگاه مجدد به قضیهٔ تلگان

به عنوان کاربرد معادلات اساسی (۲-۲) و (۲-۴) می‌خواهیم آنها را برای بیان یک اثبات کوتاه قضیهٔ تلگان به کار بریم. فرض کنید v_1 ، v_2 ، ... ، v_b دسته‌ای از b ولتاژ شاخهٔ انتخاب شدهٔ دلخواه که تمام محدودیت‌های اعمال شده به وسیلهٔ KVL را برمی‌آورند باشند. با استفاده از v_kها می‌توان ولتاژهای گره نسبت به مبنای e_1 ، e_2 ، ... ، e_n را به طور یکتایی تعریف نمود و داریم [از معادلهٔ (۲-۴)]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$$

فرض کنید j_1 ، j_2 ، ... ، j_b دسته‌ای از b جریان شاخهٔ انتخاب شدهٔ دلخواه که تمام محدودیت‌های اعمال شده به وسیلهٔ KCL را برمی‌آورند، باشند. چون برای این جریانها جهت‌های قراردادی متناظر با v_kها را به‌کار می‌بریم، KCL لازم می‌دارد که [از معادلهٔ (۲-۲)]:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{j} = 0$$

اکنون به ترتیب چنین به دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \mathbf{v}^T\mathbf{j}$$
$$= (\mathbf{A}^T\mathbf{e})^T\mathbf{j}$$
$$= \mathbf{e}^T(\mathbf{A}^T)^T\mathbf{j}$$

بنابراین با استفاده از معادلهٔ (۲-۲) داریم:

$$\mathbf{v}^T\mathbf{j} = 0 \qquad (۶-۲)$$

بنابراین، نشان دادیم که $\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$ است و این مطلب نتیجهٔ قضیهٔ تلگان برای شبکهٔ دلخواه می‌باشد.

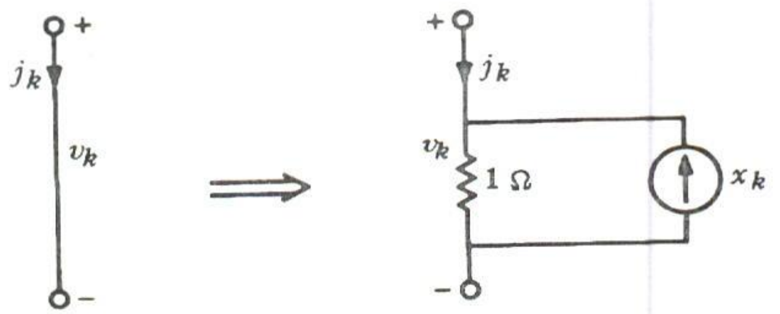
اکنون نتایج دیگری از معادلات (۲-۲)، (۲-۴) و (۲-۶) را به دست می‌آوریم. در یک فضای خطی b ـ بُعدی R^b، مقادیر $\mathbf{j}$ و $\mathbf{v}$ را به عنوان بردار در نظر بگیرید. از (۲-۲) نتیجه می‌شود که دستهٔ تمام بردارهای جریان شاخهٔ $\mathbf{j}$ که در KCL صدق می‌کنند، یک فضای خطی تشکیل می‌دهند. این فضا را $\mathscr{V}_I$ می‌نامیم. (برای تعریف فضای خطی پیوست الف را ببینید.) برای اثبات این مطلب، ملاحظه می‌کنیم که اگر $\mathbf{j}_1$ چنان باشد که $\mathbf{A}\mathbf{j}_1 = 0$ برقرار گردد، در این صورت برای تمام عددهای حقیقی α خواهیم داشت $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{j}_1) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{j}_1 = 0$ و اگر $\mathbf{A}\mathbf{j}_1 = 0$ و $\mathbf{A}\mathbf{j}_2 = 0$ باشند در این صورت $\mathbf{A}\mathbf{j}_1 + \mathbf{A}\mathbf{j}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2) = 0$ خواهد بود.

به طریق مشابه، می‌توان ثابت کرد دستهٔ تمام بردارهای ولتاژ شاخهٔ $\mathbf{v}$ که در KVL صدق می‌کنند یک فضای خطی تشکیل می‌دهند. این فضا را $\mathscr{V}_V$ می‌نامیم.

می‌توان قضیهٔ تلگان را بدین معنی تعبیر نمود که هر بردار از فضای $\mathscr{V}_I$ به هر بردار از فضای $\mathscr{V}_V$ عمود است. به عبارت دیگر، زیر فضاهای $\mathscr{V}_I$ و $\mathscr{V}_V$ زیرفضاهای عمود برهم فضای خطی R^b هستند.

اکنون نشان می‌دهیم که مجموع مستقیم زیرفضاهای عمود برهم $\mathscr{V}_I$ و $\mathscr{V}_V$ خود R^b می‌باشد. به عبارت دیگر، هر برداری مانند $\mathbf{x}$ از فضای R^b را می‌توان به صورت مجموع یک بردار از فضای $\mathscr{V}_V$ مانند $\mathbf{v}$ و یک بردار از فضای $\mathscr{V}_I$ مانند $\mathbf{j}$ - به طور یکتایی نوشت.

برای اثبات این مطلب، گرافی راکه به وسیلهٔ ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ $\mathbf{A}$ مشخص می‌شود، در نظر بگیرید. برای $k = 1, 2, \cdots, b$ شاخهٔ k را با یک مقاومت یک اهمی که به طور موازی با یک منبع جریان x_k آمپری قرار دارد تعویض کنید. (در اینجا $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \cdots x_b]^T$ نمایشگر یک بردار اختیاری در R^b



شکل ۲-۵ شاخهٔ k با یک مقاومت یک اهمی و یک منبع جریان ثابت x_k آمپری عوض می‌شود.

است.) این تعویض در شکل (۲-۵) تشریح شده است. شبکه‌ای را که از این تعویض حاصل می‌شود، $\mathscr{N}$ بنامید. بعداً ثابت خواهیم کرد (تبصرهٔ ۲ بخش ۳-۲) که صرف‌نظر از مقادیر منابع جریان x_1، x_2، ...، x_b، این شبکهٔ مقاومتی $\mathscr{N}$ یک جواب منحصر به فرد دارد. توجه کنید که معادلات شاخه چنین هستند:

$$\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{x}$$

به عبارت دیگر، نشان دادیم که هر بردار $\mathbf{x}$ از R^b را می‌توان به طور یکتایی به صورت مجموع یک بردار در $\mathscr{V}_V$ و یک بردار در $\mathscr{V}_I$ نوشت. از این‌رو، مجموع مستقیم $\mathscr{V}_V$ و $\mathscr{V}_I$ خود R^b می‌باشد.

تبصره زیرفضاهای $\mathscr{V}_I$ و $\mathscr{V}_V$ تنها به گراف بستگی دارند و توسط ماتریس تلاقی به طور کامل مشخص می‌شوند و بنابراین به ماهیت عناصر شاخه‌ها و شکل موج‌های منابع بستگی ندارند.

۳- تجزیه و تحلیل گره در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، تمام عناصر به‌جز منابع نابسته، خطی و تغییرناپذیر با زمان می‌باشند. ما معادلات شاخهٔ مقاومتها، خازنها و سلف‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، سلف‌های تزویج شده، ترانسفورماتورهای ایده‌آل و منابع کنترل شده را به تفصیل ولی به طور جداگانه مطالعه کردیم. مسألهٔ تجزیه و تحلیل گره در حالت کلی، شامل ترکیب این معادلات شاخه با دو معادلهٔ اساسی زیر است:

$$\mathbf{A}\mathbf{j} = 0 \qquad \text{(KCL)} \qquad (۱-۳)$$

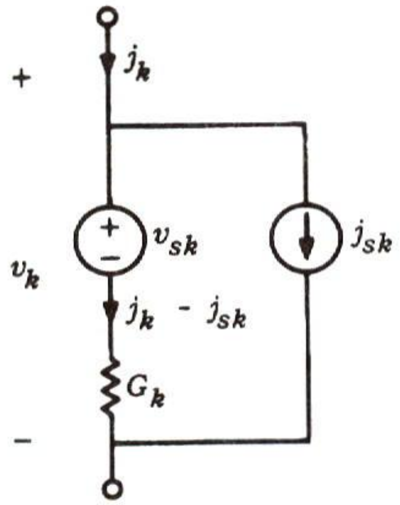
و:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e} \qquad \text{(KVL)} \qquad (۲-۳)$$

در حالت کلی، معادلات به دست آمده، به صورت معادلات دیفرانسیل یا انتگرال دیفرانسیل همزمان و خطی از n متغیر شبکهٔ e_1، e_2، ...، e_n خواهند بود. منظور از این بخش بررسی طرز تشکیل این معادلات و توسعهٔ پاره‌ای از خواص مهم معادلات به دست آمده می‌باشد. برای سادگی، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن تنها مقاومتها و منابع نابسته می‌توانند در شبکه وجود داشته باشند. دراین حالت معادلات به دست آمده، معادلات جبری خطی خواهند بود. سپس با به‌کار بردن فازورها و امپدانس‌ها، تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی شبکه‌ها را در نظر خواهیم گرفت. بالاخره طرز تشکیل معادلات دیفرانسیل و انتگرال دیفرانسیل کلی را در نظر می‌گیریم.

۳-۱ تجزیه و تحلیل شبکه‌های مقاومتی

یک شبکهٔ مقاومتی خطی تغییرناپذیر با زمان با b شاخه و n_t گره و یا یک جزء جداگانه را در نظر



شکل ۳-۱ شاخهٔ kام.

بگیرید. یک شاخهٔ نوعی در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. توجه کنید که آن شاخه، شامل منابع نابسته می‌باشد. معادلات شاخه به صورت زیر هستند:

$$v_k = R_k j_k + v_{sk} - R_k j_{sk} \qquad k = ۱, ۲, \cdots, b \qquad \text{(۳-۳ الف)}$$

یا به طور معادل:

$$j_k = G_k v_k + j_{sk} - G_k v_{sk} \qquad k = ۱, ۲, \cdots, b \qquad \text{(۳-۳ ب)}$$

در طرز نمایش ماتریسی از معادلهٔ (۳-۳ ب) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{j} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{j}_s - \mathbf{G}\mathbf{v}_s \qquad \text{(۳-۴)}$$

که در آنجا، $\mathbf{G}$ **ماتریس رسانایی شاخه** خوانده می‌شود و آن، یک ماتریس قطری از مرتبهٔ b است یعنی:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_۱ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_۲ & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & G_b \end{bmatrix}$$

بردارهای $\mathbf{j}_s$ و $\mathbf{v}_s$ بردارهای منبع بوده و دارای بعد b می‌باشند. یعنی:

$$\mathbf{j}_s = \begin{bmatrix} j_{s۱} \\ j_{s۲} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} v_{s۱} \\ v_{s۲} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix}$$

تنها لازم است که معادلات (۳-۱)، (۳-۲) و (۳-۴) را با هم ترکیب کرده تا متغیرهای شاخه را حذف کنیم و یک معادلهٔ برداری برحسب بردار متغیر شبکهٔ $\mathbf{e}$ به دست آوریم. معادلهٔ (۳-۴) را از سمت

چپ در ماتریس $\mathbf{A}$ ضرب کرده و به جای $\mathbf{v}$ مقدار $\mathbf{A}^T\mathbf{e}$ را قرار می‌دهیم و از معادلهٔ (۳-۱) نیز استفاده می‌کنیم تا به دست آوریم:

$$\mathbf{AGA}^T\mathbf{e} + \mathbf{Aj}_s - \mathbf{AGv}_s = 0 \qquad (۳-۵)$$

یا:

$$\mathbf{AGA}^T\mathbf{e} = \mathbf{AGv}_s - \mathbf{Aj}_s \qquad (۳-۶)$$

در معادلهٔ (۳-۶)، $\mathbf{AGA}^T$ یک ماتریس مربعی $n \times n$ است، در حالی که $\mathbf{AGv}_s$ و $-\mathbf{Aj}_s$ بردارهای n بعدی هستند. اکنون طرز نمایش‌های زیر را به کار می‌بریم:

$$\mathbf{Y}_n \triangleq \mathbf{AGA}^T \qquad (۳-۷\ \text{الف})$$

$$\mathbf{i}_s \triangleq \mathbf{AGv}_s - \mathbf{Aj}_s \qquad (۳-۷\ \text{ب})$$

بنابراین معادلهٔ (۳-۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\boxed{\mathbf{Y}_n\mathbf{e} = \mathbf{i}_s} \qquad (۳-۸)$$

معمولاً دسته معادلات (۳-۸) معادلات گره، $\mathbf{Y}_n$ ماتریس ادمیتانس گره[1] و $\mathbf{i}_s$ بردار منبع جریان گره نامیده می‌شوند.

معادلات گره (۳-۸) اهمیت بسیار دارند و شایستهٔ بررسی دقیق می‌باشند. ابتدا توجه کنید که چون خود گراف، ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ $\mathbf{A}$ و رسانایی‌های شاخه‌ها، ماتریس ادمیتانس شاخهٔ $\mathbf{G}$ را مشخص می‌کنند، از این جهت ماتریس ادمیتانس گره $\mathbf{Y}_s$ ماتریس معلومی است و در واقع $\mathbf{Y}_n \triangleq \mathbf{AGA}^T$.

به طریق مشابه، بردارهای $\mathbf{v}_s$ و $\mathbf{j}_s$ که منابع موجود در شاخه‌ها را مشخص می‌کنند، معلوم هستند و بنابراین، بردار منبع جریان گره $\mathbf{i}_s$ نیز طبق رابطهٔ (۳-۷ ب) معلوم می‌گردد. بدین ترتیب معادلهٔ (۳-۸) بردار n مؤلفه‌ای مجهول $\mathbf{e}$ را به ماتریس $n \times n$ معلوم $\mathbf{Y}_n$ و بردار n مؤلفه‌ای معلوم $\mathbf{i}_s$ ارتباط می‌دهد. معادلهٔ برداری (۳-۸) مرکب از یک دستگاه n معادلهٔ جبری خطی برحسب n مجهول ولتاژ گره نسبت به مبنای e_1 ، e_2 ، … ، e_n می‌باشد. پیدا کردن b ولتاژ شاخهٔ $\mathbf{v}$ و b جریان شاخهٔ $\mathbf{j}$ وقتی که $\mathbf{e}$ تعیین گردد، کار بسیار ساده‌ای است. در واقع از (۳-۲) به دست می‌آوریم $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$ و با دانستن $\mathbf{v}$ و با استفاده از معادلهٔ شاخهٔ (۳-۴)، $\mathbf{j}$ را به دست می‌آوریم، یعنی $\mathbf{j} = \mathbf{Gv} + \mathbf{j}_s - \mathbf{Gv}_s$.

---

۱ ما $\mathbf{Y}_n$ را به جای ماتریس رسانایی گره، ماتریس ادمیتانس گره می‌نامیم گرچه با شبکه‌های مقاومتی خالص سر و کار داریم. در تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی دیده خواهد شد که ما عیناً فرمول‌بندی یکسان داریم. از این جهت معرفی کردن واژهٔ بسیار عمومی ادمیتانس خیلی راحت‌تر است.

مثال ۱ مدار شکل (۳-۲) را که در آن مقادیر تمام اجزاء معلوم است، در نظر بگیرید. گراف این مدار همان گرافی است که در شکل (۲-۳) تشریح شد. اکنون جزئیات کامل طرز نوشتن معادلات و حل آنها را برحسب متغیرهای شاخه بیان می‌کنیم.

گام ۱ یک گره مبنا مانند ④ انتخاب کنید و بقیهٔ گره‌ها را با علامت‌های ①، ② و ③ مشخص کنید. ولتاژهای گره‌های ①، ② و ③ را نسبت به گره مبنا به ترتیب e_1، e_2 و e_3 بنامید.

گام ۲ شاخه‌ها را با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شماره‌گذاری کنید و برای هر کدام یک جهت قراردادی تعیین نمایید. G_i رسانایی شاخهٔ شمارهٔ i را نشان می‌دهد.

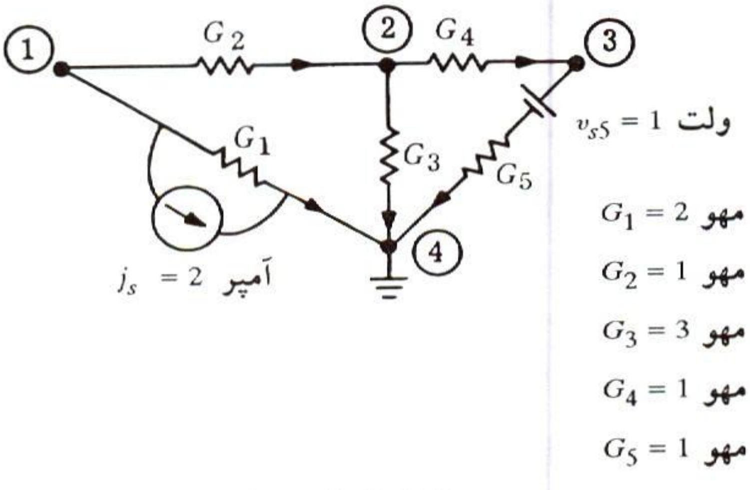
گام ۳ سه معادلهٔ نابستهٔ خطی که KCL را برای گره‌های ①، ② و ③ بیان می‌کنند، بنویسید و بنابراین:

$$\mathbf{A}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۳-۹)$$

توجه کنید که ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ **A** با ماتریس مثال ۱ بخش ۲-۱ یکسان است.

گام ٤ با به کار بردن KVL ولتاژ شاخهٔ v_k را برحسب ولتاژهای گره e_i بیان کنید و بنابراین:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \qquad (۳-۱۰)$$



شکل ۳-۲ شبکهٔ مثال ۱.

گام ۵ معادلات شاخه‌ها را به صورت زیر بنویسید:

$$\mathbf{j} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{j}_s - \mathbf{G}\mathbf{v}_s \qquad \text{(۳-۱۱ الف)}$$

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(۳-۱۱ ب)}$$

به عنوان مثال، معادلهٔ اسکالر پنجم رابطهٔ (۳-۱۱ ب) چنین بیان می‌دارد:

$$j_5 = v_5 - 1$$

گام ۶ در معادلهٔ (۳-۱۱) به جای $\mathbf{v}$ عبارت مربوط را از رابطهٔ (۳-۱۰) قرار دهید و نتیجه را از سمت چپ در ماتریس $\mathbf{A}$ ضرب کنید. مطابق رابطهٔ (۳-۹) نتیجهٔ حاصل از سمت چپ مساوی صفر است. پس از دوباره مرتب کردن جملات، می‌توان جواب را به صورت زیر درآورد:

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{e} = \mathbf{i}_s \qquad \text{(۳-۱۲ الف)}$$

که در آن:

$$\mathbf{Y}_n \triangleq \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(۳-۱۲ ب)}$$

و:

$$\mathbf{i}_s \triangleq \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{v}_s - \mathbf{A}\mathbf{j}_s = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(۳-۱۲ پ)}$$

بنابراین معادلهٔ گره چنین است:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(۳-۱۲ ت)}$$

گام ۷ معادلهٔ (۳-۱۲ ت) را نسبت به e حل می‌کنیم. حل عددی چنین معادلاتی برای $n > ۵$ با روش حذفی گوس انجام می‌گیرد. به طور کلی می‌توان جواب را برحسب ماتریس معکوس $\mathbf{Y}_n^{-1}$ بیان کرد. بدین ترتیب:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y}_n^{-1}\mathbf{i}_s = \frac{۱}{۲۵}\begin{bmatrix} ۹ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۱۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲۵}\begin{bmatrix} -۱۷ \\ -۱ \\ ۱۲ \end{bmatrix} \qquad (۱۳-۳)$$

هنگامی که ولتاژهای گره e تعیین شدند، ولتاژهای شاخه‌های v از معادلهٔ (۳-۱۰) به طریق زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e} = \frac{۱}{۲۵}\begin{bmatrix} -۱۷ \\ -۱۶ \\ -۱ \\ -۱۳ \\ ۱۲ \end{bmatrix} \qquad (۱۴-۳)$$

گام بعدی، به دست آوردن جریانهای شاخه‌های j با به کار بردن v و با استفاده از معادلهٔ (۳-۱۱) می‌باشد، در این صورت داریم:

$$\mathbf{j} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{j}_s - \mathbf{G}\mathbf{v}_s = \frac{۱}{۲۵}\begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۱۶ \\ -۳ \\ -۱۳ \\ -۱۳ \end{bmatrix} \qquad (۱۵-۳)$$

در اینجا تجزیه و تحلیل شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۳-۲) تکمیل می‌شود، یعنی تمام ولتاژها و جریانهای شاخه‌ها تعیین شده‌اند.

۳-۲ نوشتن معادلات گره به‌طور نظری

روش گام به گامی که به تفصیل در بالا گفته شد، به دو دلیل اهمیت زیاد دارد. اول اینکه روش فوق مطالب مختلفی را که باید برای تجزیه و تحلیل شبکه به کار روند، به طور کاملاً روشنی عرضه می‌کند، دوم اینکه روش فوق جنبهٔ کلی دارد، بدین معنی که در تمام حالتها کار می‌کند و در نتیجه برای محاسبات کامپیوتری بسیار مناسب می‌باشد.

در مورد شبکه‌هایی که تنها از مقاومتها و منابع نابسته تشکیل می‌شوند، (به ویژه، اجزای تزویج شده‌ای مانند منابع وابسته ندارند) می‌توان معادلات گره‌ها را به طور نظری نوشت. فرض کنید عنصر (i, k) ام ماتریس ادمیتانس گره $\mathbf{Y}_n$ را y_{ik} بنامیم. در این صورت، وقتی معادلهٔ برداری

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{e} = \mathbf{i}_s \tag{۳-۱۶ الف}$$

را به صورت اسکالر بنویسیم، به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ \vdots \\ i_{sn} \end{bmatrix} \tag{۳-۱۶ ب}$$

بیانهای زیر را می‌توان به راحتی در مثالهای ساده تحقیق و آنها را برای شبکه‌های بدون عناصر تزویج شده ثابت کرد.

۱- y_{ii} مساوی مجموع رسانایی‌های تمام شاخه‌های متصل به گره i می‌باشد؛ y_{ii} را ***سلف ادمیتانس گره*** i گویند.

۲- y_{ik} مساوی منفی مجموع رسانایی‌های تمام شاخه‌هایی است که گره i را به گره k متصل می‌کند؛ y_{ik} را ***ادمیتانس متقابل میان گره*** i ***و گره*** k نامند.

۳- چنانچه تمام منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل کنیم، در این صورت i_{sk} مساوی مجموع جبری جریانهای تمام منابعی است که وارد گره k می‌شوند؛ به آن منابع جریانی که جهت قراردادی آنها به گره k وارد می‌شود، علامت مثبت و به تمام بقیه، علامت منفی داده می‌شود.

تمرین بیانهای ۱ و ۲ بالا را ثابت کنید. راهنمایی: $\mathbf{Y}_s = \mathbf{AGA}^T$ و در نتیجه:

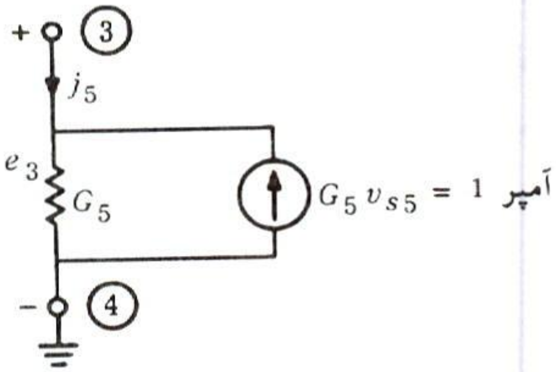
$$y_{ii} = \sum_{j=1}^{b} a_{ij} G_j a_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (a_{ij})^2 G_j$$

و:

$$y_{ik} = \sum_{j=1}^{b} a_{ij} G_j a_{kj}$$

توجه کنید که $(a_{ij})^2$ تنها می‌تواند مساوی صفر یا یک گردد. به طریق مشابه، $a_{ij}\, a_{kj}$ تنها می‌تواند مساوی صفر یا منفی یک گردد.

ادامهٔ مثال ۱ شبکهٔ شکل (۳-۲) را مجدداً در نظر بگیرید. می‌خواهیم جریان هر شاخه را برحسب ولتاژهای گره‌ها به‌طور نظری بنویسیم. بدین ترتیب داریم:



شکل ۳-۳ شاخهٔ ۵ (شکل ۳-۲) برحسب منبع جریان.

$$j_1 = G_1 e_1 + 2$$
$$j_2 = G_2(e_1 - e_2)$$
$$j_3 = G_3 e_2$$
$$j_4 = G_4(e_2 - e_3)$$
$$j_5 = G_5(e_3 - 1)$$

در معادلهٔ آخر، برای شاخهٔ ۵ مطابق شکل (۳-۳) منبع جریان معادل را به کار بردیم. با جایگذاری عبارتهای بالا در معادلات گره‌ها، چنین به دست می‌آید:

$$(G_1 + G_2)e_1 - G_2 e_2 = -2$$
$$-G_2 e_1 + (G_2 + G_3 + G_4)e_2 - G_4 e_3 = 0$$
$$-G_4 e_2 + (G_4 + G_5)e_3 = G_5$$

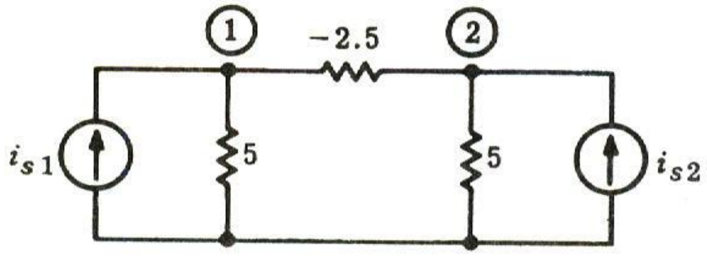
می‌توان به سهولت به طور نظری، ملاحظه کرد که بیانهای ۱، ۲ و ۳ در حالت اخیر برقرارند. چنانچه مقادیر عددی G_k ها را جایگزین می‌کردیم، جواب به دست آمده با جواب (۳-۱۲ ت) مطابقت داشت.

تبصرهٔ ۱ برای شبکه‌هایی که از مقاومتها و منابع نابسته تشکیل می‌شوند، ماتریس ادمیتانس گره $\mathbf{Y}_n = (y_{ik})$ در معادلهٔ (۳-۸) یک ماتریس متقارن است، یعنی برای $i, k = 1, 2, \cdots, n$ داریم: $y_{ik} = y_{ki}$.

در واقع چون $\mathbf{Y}_n \triangleq \mathbf{AGA}^T$ در این صورت: $\mathbf{Y}_n{}^T = (\mathbf{AGA}^T)^T = \mathbf{AG}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{AGA}^T = \mathbf{Y}_n$. ما در مرحلهٔ آخر از رابطهٔ $\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$ استفاده کردیم، زیرا ماتریس رسانایی شاخهٔ $\mathbf{G}$ یک شبکهٔ مقاومتی بدون عناصر تزویج شده، یک ماتریس متقارن است.

تبصرهٔ ۲ چنانچه تمام رسانایی‌های یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان مثبت باشند، به راحتی می‌توان نشان داد که $\det(\mathbf{Y}_n) > 0$ است[1]. بنابراین، قاعدهٔ کرامر تضمین می‌کند که معادلهٔ (۳-۱۶)،

[1] بخش ۲-۴ از پیوست ب را ببینید.



شکل ۳-٤ یک شبکهٔ مقاومتی با یک رسانایی منفی.
رسانایی‌ها برحسب مهو داده شده‌اند.

برای هر مقدار $\mathbf{i}_s$ ، جواب منحصر به فردی داشته باشد. درستی رابطهٔ $\det(\mathbf{Y}_n) > 0$ را نیز می‌توان از رابطهٔ $\mathbf{Y}_n = \mathbf{AGA}^T$ نتیجه گرفت که در آن $\mathbf{G}$ یک ماتریس $b \times b$ با عناصر مثبت و $\mathbf{A}$ یک ماتریس $n \times b$ از رتبهٔ n می‌باشد. توجه کنید، فرض اینکه تمام رسانایی‌ها مثبت باشند، بسیار اساسی است. به عنوان مثال، مدار شکل (۳-۴) را که در آن یکی از رسانایی‌ها منفی است، در نظر بگیرید. ماتریس ادمیتانس گره، یک ماتریس ویژه است (یعنی دترمینان آن مساوی صفر است). در واقع معادلات گره چنین می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} ۲/۵ & ۲/۵ \\ ۲/۵ & ۲/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{bmatrix}$$

و اگر به عنوان مثال $i_{s1} = i_{s2} = ۵$ باشد، در این صورت $e_1 = ۱ - \alpha$ و $e_2 = ۱ + \alpha$ ، صرف‌نظر از مقداری که α انتخاب می‌کند، جوابهای آن هستند! بدین ترتیب این مدار تعداد بی‌نهایت جواب دارد!

تمرین فرض کنید تمام عناصر گراف شکل (۲-۳) دارای رسانایی‌های ۵ مهو بوده و منبع جریان یک آمپری از گره ① وارد و از گره ② خارج می‌شود. معادلات گره را به طور نظری بنویسید.

۳-۴ تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی

اکنون یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان شامل مقاومتها، سلف‌ها، خازنها و منابع نابسته را در نظر بگیرید. معمولاً این چنین شبکه‌ها را شبکه‌های RLC گویند. فرض کنید که ما تنها به تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی علاقه‌مند هستیم و به علاوه تمام منابع نابسته از نوع سینوسی با فرکانس زاویه‌ای یکسان ω بوده و جریانها و ولتاژهای شاخه‌ها به حالت دایمی رسیده باشند. در نتیجه، برای نوشتن معادلات شاخه و قوانین کیرشف از فازورهای ولتاژ و جریان و امپدانس و ادمیتانس استفاده خواهیم کرد. مجدداً فرض می‌کنیم که هر شاخه علاوه بر عنصر غیر منبع خود، یک منبع ولتاژ و یک منبع جریان را نیز شامل باشد.

بدین‌ترتیب، یک شاخهٔ نوعی، دارای ادمیتانسی مانند Y_k (در شاخهٔ k ام) است و بسته به اینکه

شاخهٔ kام یک مقاومت، یک خازن یا یک سلف باشد ادمیتانس Y_k به ترتیب به یکی از صورتهای G_k ، $j\omega C_k$ ، یا $\frac{1}{j\omega L_k}$ درمی‌آید. معادلهٔ شاخه چنین است:

$$J_k = Y_k V_k + J_{sk} - Y_k V_{sk} \qquad k = 1, 2, \cdots, b \tag{۳-۱۷}$$

که در آن، J_k و V_k به ترتیب فازور جریان و فازور ولتاژ شاخهٔ kام بوده و J_{sk} و V_{sk} نمایشگر فازور منبع جریان و فازور منبع ولتاژ شاخهٔ kام می‌باشند. معادلهٔ (۳-۱۷) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y}_b\mathbf{V} + \mathbf{J}_s - \mathbf{Y}_b\mathbf{V}_s \tag{۳-۱۸}$$

ماتریس $\mathbf{Y}_b$ را **ماتریس ادمیتانس شاخه** و بردارهای $\mathbf{J}$ و $\mathbf{V}$ را به ترتیب بردار فازور جریان شاخه و بردار فازور ولتاژ شاخه می‌گویند. تجزیه و تحلیل مدار درست مانند حالت شبکه‌های مقاومتی بخش قبل است. معادلهٔ گره به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{Y}_n\mathbf{E} = \mathbf{I}_s \tag{۳-۱۹}$$

که در آن فازور $\mathbf{E}$ نشان دهندهٔ بردار ولتاژ گره نسبت به مبنا و فازور $\mathbf{I}_s$ نمایشگر بردار منبع جریان و $\mathbf{Y}_n$ ماتریس ادمیتانس گره می‌باشند. می‌توان $\mathbf{Y}_n$ را برحسب $\mathbf{A}$ و $\mathbf{Y}_b$ چنین بیان کرد:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}_b\mathbf{A}^T \tag{۳-۲۰ الف}$$

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{A}\mathbf{Y}_b\mathbf{V}_s - \mathbf{A}\mathbf{J}_s \tag{۳-۲۰ ب}$$

تبصره تجزیه و تحلیل حالت دایمی یک شبکهٔ RLC راکه توسط منابع سینوسی با فرکانس یکسان تحریک می‌شود از یک طرف، و تجزیه و تحلیل یک شبکهٔ مقاومتی را از طرف دیگر در نظر بگیرید. تجزیه و تحلیل گره در هر دو مورد به یک دسته از معادلات جبری خطی از ولتاژهای گره‌ها منجر می‌شود. در مورد حالت دایمی سینوسی، مجهولات، فازورهای ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا بوده و ضرایب معادلات، عددهای مختلطی هستند که به فرکانس بستگی دارند. بالاخره توجه کنید که ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا از روی فازورهای مربوطه به طریق زیر به دست می‌آیند:

$$e_k(t) = \mathrm{Re}(E_k e^{j\omega t}) \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

در مورد شبکهٔ مقاومتی، ضرایب معادلات، اعداد حقیقی بوده و جوابهای آن مستقیماً ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا را به دست می‌دهد.

چنانچه ما تنها شبکه‌های بدون عناصر تزویج شده داشته باشیم، روش نظری بخش قبل کافی خواهد بود. اکنون می‌خواهیم مثالی در نظر بگیریم که هم دارای منابع وابسته و هم دارای اندوکتانس‌های متقابل باشد. در این مورد به روشنی دیده خواهد شد که روش نظری فوق کافی نیست و بنابراین، ارزش روش منظم ما نمایان می‌گردد. پس از بررسی مثال زیر، روش کلی را نیز به طور خلاصه شرح خواهیم داد.

مثال شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان شکل (۳-۵) را در نظر بگیرید. منبع جریان نابسته، سینوسی بوده و با فازور I نمایش داده می‌شود و شکل موج آن به‌صورت $|I|\cos(\omega t + \measuredangle I)$ می‌باشد. فرض می‌کنیم که شبکه در حالت دایمی سینوسی است و بنابراین، تمام شکل موجها به صورت فازورهای $\mathbf{V}, \mathbf{E}, \mathbf{J}$ و غیره نشان داده می‌شوند. به وجود دو منبع وابسته در شبکه توجه کنید. سه سلف $L_۳$ ، $L_۴$ و $L_۵$ بطور مغناطیسی تزویج شده و ماتریس اندوکتانس آنها چنین است:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & \frac{۵}{۳} & -\frac{۴}{۳} \\ ۱ & -\frac{۴}{۳} & \frac{۵}{۳} \end{bmatrix}$$

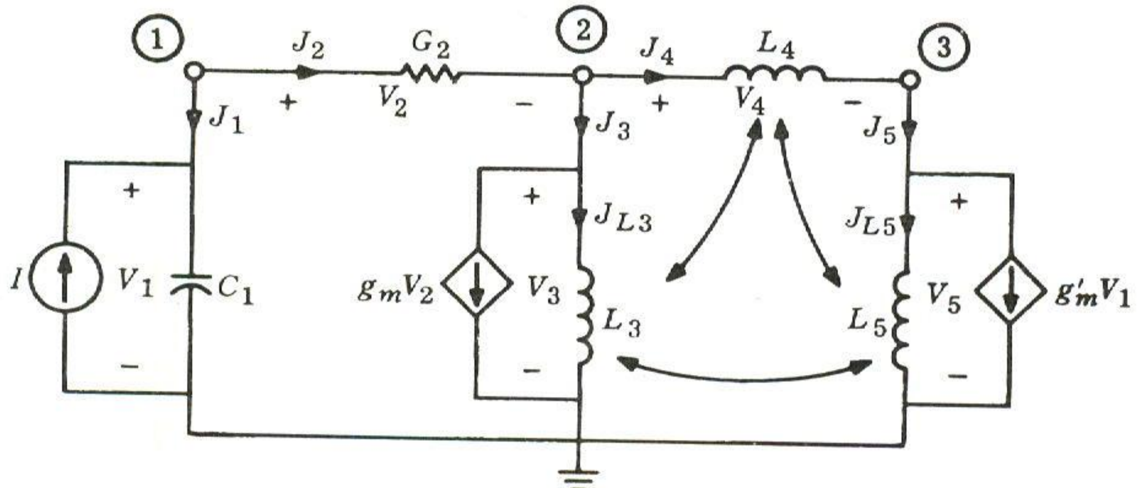
برای بیان قوانین کیرشف، نخست ماتریس تلاقی گره $\mathbf{A}$ مورد نیاز است. به طور نظری داریم:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۳-۲۱}$$

سپس معادلات شاخه‌ها مورد نیاز است. آنها را به صورت فازوری می‌نویسیم. بنابراین:

$$J_۱ = j\omega C_۱ V_۱ - I$$
$$J_۲ = G_۲ V_۲ \tag{۳-۲۲ الف}$$

نوشتن $J_۳$ ، $J_۴$ و $J_۵$ برحسب V_k ها به آن سادگی نیست. ماتریس اندوکتانس، تنها در واقع رابطهٔ میان $V_۳$ ، $V_۴$ و $V_۵$ و جریانهای سلف‌های $J_{L۳}$ ، $J_۴$ و $J_{L۵}$ را تعیین می‌کند (برای تعریف $J_{L۳}$ و $J_{L۵}$ شکل (۳-۵) را ببینید). بنابراین:



شکل ۳-۵ مثالی از تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی وقتی که تزویج مغناطیسی متقابل و منابع وابسته در مدار وجود دارند.

$$\mathbf{V}' = j\omega \mathbf{L}\, \mathbf{J}_L$$

و یا:

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{L3} \\ J_4 \\ J_{L5} \end{bmatrix}$$

واضح است به منظورهایی که ما در نظر داریم، لازم است که جریانها برحسب تابعی از ولتاژها بیان شوند. بنابراین، ماتریس اندوکتانس را معکوس نموده و عبارتی به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{J}_L = \frac{1}{j\omega}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{V}'$$

یا:

$$\begin{bmatrix} J_{L3} \\ J_4 \\ J_{L5} \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

با به دست آوردن این روابط و با توجه به $J_3 = J_{L3} + g_m V_2$ و $J_5 = J_{L5} + g'_m V_1$ می‌توان سه معادلهٔ شاخهٔ آخری را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} J_3 &= g_m V_2 + \frac{3}{j\omega} V_3 + \frac{1}{j\omega} V_4 - \frac{1}{j\omega} V_5 \\ J_4 &= \frac{1}{j\omega} V_3 + \frac{2}{j\omega} V_4 + \frac{1}{j\omega} V_5 \\ J_5 &= g'_m V_1 - \frac{1}{j\omega} V_3 + \frac{1}{j\omega} V_4 + \frac{2}{j\omega} V_5 \end{aligned} \qquad (\text{۳-۲۲ ب})$$

معادلات شاخهٔ (۳-۲۲ الف) و (۳-۲۲ ب) یک دستگاه پنج معادله‌ای مانند معادلهٔ (۳-۱۸) به صورت زیر تشکیل می‌دهند:

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y}_b\mathbf{V} + \mathbf{J}_s \qquad (\text{۳-۲۳})$$

توجه کنید که عناصر ماتریس $\mathbf{Y}_b$، اعداد مختلط بوده و این ماتریس دیگری قطری نمی‌باشد (به علت تزویج متقابل و منابع وابسته) و همچنین متقارن نیز نیست (به علت منابع وابسته). اکنون ماتریس میتانس گره $\mathbf{Y}_n \triangleq \mathbf{A}\mathbf{Y}_b\mathbf{A}^T$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_m & \frac{3}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & -\frac{1}{j\omega} \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} \\ g'_m & 0 & -\frac{1}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} j\omega C_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 + g_m & \frac{4}{j\omega} & \frac{3}{j\omega} & 0 \\ g'_m & 0 & \frac{-2}{j\omega} & \frac{-1}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} j\omega C_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{j\omega} & \frac{-3}{j\omega} \\ g'_m & \frac{-3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_n$$

از معادلات (۳-۱۹) و (۳-۲۰ ب) دیده می‌شود که جملهٔ سمت راست معادلهٔ گره، برابر $-\mathbf{AJ}_s$ می‌باشد، چون که $\mathbf{V}_s$ متحد با صفر است. به راحتی معلوم می‌شود که $-\mathbf{AJ}_s$ برداری است که مؤلفهٔ اول آن I می‌باشد (بقیهٔ مؤلفه‌هایش صفر هستند). بنابراین معادلهٔ گره چنین است:

$$\begin{bmatrix} j\omega C_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{j\omega} & \frac{-3}{j\omega} \\ g'_m & \frac{-3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۴)$$

پس از جایگذاری مقادیر عددی، می‌توان این سه معادله را برحسب فازورهای E_1، E_2 و E_3 حل نمود و به ترتیب $\mathbf{V}$ را از رابطهٔ:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^T\mathbf{E}$$

و $\mathbf{J}$ را از معادلهٔ (۳-۲۳) به دست آورد.

روش منظم این مثال ارزش روش منظم را به طور روشن نمایان می‌سازد. واضح است سعی در نوشتن معادلهٔ (۳-۲۴) به طور نظری مخاطره‌آمیز است.

باشند)، هر دو ماتریس $\mathbf{Y}_b(j\omega)$ و $\mathbf{Y}_n(j\omega)$ ماتریس‌های متقارن می‌باشند.

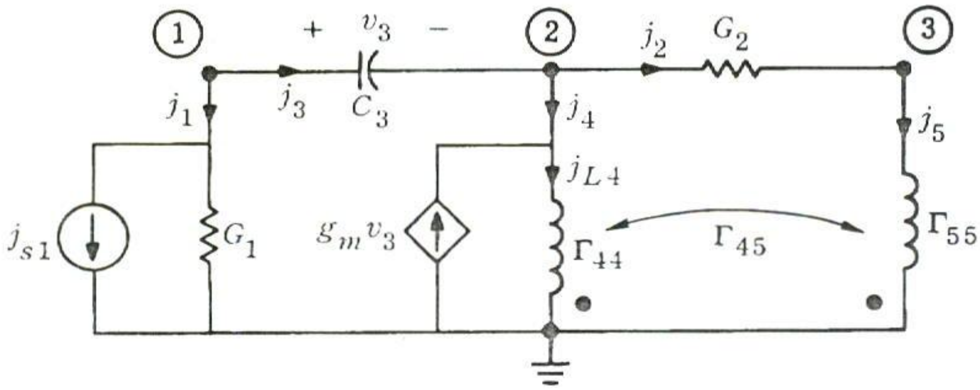
۳-٤ معادلات انتگرال دیفرانسیل

در حالت کلی، تجزیه و تحلیل گره در شبکه‌های خطی به یک دسته از معادلات انتگرال دیفرانسیل هم زمان منجر می‌شود. یعنی معادلاتی که توابع مجهولی مانند e_1 ، e_2 ، ... و پاره‌ای از مشتقهای آنها مانند $\dot{e}_1$ ، $\dot{e}_2$ ، ... و برخی از انتگرال‌های آنها مانند $\int_0^t e_1(t')\,dt'$ ، $\int_0^t e_2(t')\,dt'$ ، ... را شامل می‌شوند. برای به دست آوردن معادلات انتگرال دیفرانسیل گره در هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، یک روش منظم ارائه خواهیم کرد. چنانچه بخواهیم پاسخ کامل یک شبکهٔ داده شده‌ای را به یک ورودی و حالت اولیهٔ معلوم محاسبه کنیم، این معادلات لازم خواهند بود. روش کار کاملاً کلیّت دارد ولی برای اینکه دچار پیچیدگی طرز نمایش نشویم، آن را از طریق یک مثال ارائه خواهیم نمود.

مثال کمیت‌های زیر داده شده‌اند: (۱) شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۳-۶)؛ (۲) مقادیر اجزای G_1 ، G_2 ، G_3 و g_m و ماتریس اندوکتانس معکوس $\begin{bmatrix} \Gamma_{44} & \Gamma_{45} \\ \Gamma_{45} & \Gamma_{55} \end{bmatrix}$ (توجه کنید که این ماتریس متناظر با جهت‌های قراردادی j_{L4} و j_5 در شکل (۳-۶) می‌باشد)؛ (۳) شکل موج ورودی j_{s1} برای $t \geq 0$ و (۴) مقادیر اولیهٔ ولتاژ اولیهٔ خازن $v_3(0)$ و جریان اولیهٔ سلف‌ها $j_{L4}(0)$ و $j_5(0)$. ترتیب کار ما همان روش به کار رفته در حالت دایمی سینوسی خواهد بود.

گام ۱ تبدیل منابع را (در صورت لزوم) طبق آنچه که در بخش ۱ گفته شد انجام دهید.

گام ۲ محدودیت‌های قوانین کیرشف را به صورت زیر بنویسید:



شکل ۳-۶ شبکه‌ای که معادلات انتگرال دیفرانسیل گره برای آن به دست آمده است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{KCL}) \qquad (۳-۲۶)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \qquad (\text{KVL}) \qquad (۳-۲۷)$$

توجه کنید که j_kها، v_k ها و e_i ها توابع زمانی بوده و فازور نمی‌باشند. برای ساده شدن طرز نمایش، کمیت‌های j_1 ، j_2 ، ... ، e_1 ، e_2 ، ... و غیره را به جای کمیت‌های $j_1(t)$ ، $j_2(t)$ ، ... و غیره نوشته‌ایم.

گام ۳ معادلات شاخه‌ها را بنویسید (یعنی جریانهای شاخه‌ها را برحسب ولتاژهای شاخه‌ها بیان کنید). بنابراین:

$$j_1 = G_1 v_1 + j_{s1}$$
$$j_2 = G_2 v_2$$
$$j_3 = G_3 \dot{v}_3$$

توجه کنید که j_{L4} جریان اندوکتانس چهارم بوده و بنابراین $j_4 = j_{L4} - g_m v_3$ است، معادلهٔ شاخه‌های سلف‌ها را چنین به دست می‌آوریم:

$$j_4 = -g_m v_3 + \Gamma_{44}\int_0^t v_4(t')\,dt' + \Gamma_{45}\int_0^t v_5(t')\,dt' + j_{L4}(0)$$

$$j_5 = \Gamma_{45}\int_0^t v_4(t')\,dt' + \Gamma_{55}\int_0^t v_5(t')\,dt' + j_5(0)$$

به منظور نشان دادن اپراتور مشتق‌گیری نسبت به زمان، به کار بردن طرز نمایش D راحت‌تر است. به عنوان مثال:

$$Dv_3 = \dot{v}_3 = \frac{dv_3}{dt}$$

همچنین طرز نمایش D^{-1} برای نشان دادن انتگرال معین، $\int_0^t$ ، راحت‌تر است. به عنوان مثال:

$$\frac{1}{D} v_4 = \int_0^t v_4(t')\,dt'$$

با بکار بردن این طرز نمایش‌ها می‌توان معادلات شاخه را به شکل ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_m & \Gamma_{44} D^{-1} & \Gamma_{45} D^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{45} D^{-1} & \Gamma_{55} D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ j_{L4}(0) \\ j_5(0) \end{bmatrix} \tag{۲۸-۳}$$

توجه کنید چنانچه D را با $j\omega$ عوض می‌کردیم، به درستی همان ماتریسی که در حالت دایمی سینوسی داشتیم به دست می‌آوردیم. همچنین به اثر حالت اولیه، یعنی جمله‌های $j_{L4}(0)$ و $j_5(0)$ در سمت راست معادله توجه کنید. در آنچه که بعداً خواهد آمد هیچگونه عملیات جبری میان کمیت‌هایی که علامت D دارند انجام نخواهیم داد، بلکه آنها را تنها در ثابت‌هایی ضرب یا تقسیم خواهیم کرد[1].

گام ٤ از دستگاه معادلات (۳-۲۶)، (۳-۲۷) و (۳-۲۸)، v_k ها و j_k ها را حذف کنید. توجه نمایید که این معادلات به ترتیب به صورتهای زیر می‌باشند:

$$\mathbf{A}\mathbf{j} = 0 \tag{۲۹-۳}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e} \tag{۳۰-۳}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{Y}_b(D)\mathbf{v} + \mathbf{j}_s \tag{۳۱-۳}$$

نتیجهٔ این عمل حذف به صورت آشنای زیر می‌باشد:

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_b(D)\mathbf{A}^T\mathbf{e} = -\mathbf{A}\mathbf{j}_s \tag{۳۲-۳}$$

یا:

$$\mathbf{Y}_n(D)\mathbf{e} = \mathbf{i}_s$$

---

۱ در نظر گرفتن D و D^{-1} به عنوان علامت‌های جبری مشابه با عددهای حقیقی یا مختلط مجاز نیست. می‌توان D و D^{-1} را با عددهای حقیقی (ثابت‌ها) جمع یا در آنها ضرب نمود ولی رابطهٔ $DD^{-1} \neq D^{-1}D$ نیز برقرار است. در حقیقت هنگامی که اپراتور اول را به تابعی مانند f اعمال می‌کنیم داریم:

$$DD^{-1}f = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = f(t)$$

که در آنجا قضیهٔ اساسی آنالیز در مرحلهٔ آخر به کار رفته است. اکنون ترتیب زیر را در نظر بگیرید.

$$D^{-1}Df = \int_0^t f'(\tau)d\tau = f(\tau)\Big|_0^t = f(t) - f(0)$$

از طرف دیگر، با D و توانهای صحیح و مثبت D می‌توان طبق قواعد معمولی جبر رفتار نمود. در واقع برای هر دو عدد صحیح و مثبت m و n داریم:

$$D^m D^n = D^{m+n}$$

و برای هر چهار عدد حقیقی یا مختلط α_1 ، α_2 ، β_1 و β_2 داریم:

$$(\alpha_1 D^n + \beta_1)(\alpha_2 D^m + \beta_2) = \alpha_1\alpha_2 D^{m+n} + \alpha_1\beta_2 D^n + \alpha_2\beta_1 D^m + \beta_1\beta_2$$

اکنون اپراتور ماتریس ادمیتانس گره را به عنوان مثال محاسبه می‌کنیم. بنابراین:

$$\mathbf{Y}_n(D) \triangleq \mathbf{A}\mathbf{Y}_b(D)\mathbf{A}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_m & \Gamma_{44} D^{-1} & \Gamma_{45} D^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{45} D^{-1} & \Gamma_{55} D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_1 + C_3 D & -C_3 D & 0 \\ -C_3 D - g_m & G_2 + C_3 D + g_m + \Gamma_{44} D^{-1} & -G_2 + \Gamma_{45} D^{-1} \\ 0 & -G_2 + \Gamma_{45} D^{-1} & G_2 + \Gamma_{55} D^{-1} \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب، تجزیه و تحلیل گره برای مثال فوق، معادلهٔ انتگرال دیفرانسیل زیر را به دست می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} G_1 + C_3 D & -C_3 D & 0 \\ -C_3 D - g_m & G_2 + C_3 D + g_m + \Gamma_{44} D^{-1} & -G_2 + \Gamma_{45} D^{-1} \\ 0 & -G_2 + \Gamma_{45} D^{-1} & G_2 + \Gamma_{55} D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{s1} \\ -j_{L4}(0) \\ -j_5(0) \end{bmatrix}$$

(۳۳-۳)

شرایط اولیهٔ لازم به سهولت به دست می‌آیند. با نوشتن قانون کات‌ست برای شاخه‌های ۱، ۴ و ۵ داریم:

$$e_1(0) = \frac{1}{G_1}[-j_{s1}(0) - j_{L4}(0) + g_m v_3(0) - j_5(0)] \qquad (۳۴\text{-}۳)$$

که در آن تمام جملات داخل کروشه معلوم هستند. بالاخره:

$$e_2(0) = e_1(0) - v_3(0) \qquad (۳۵\text{-}۳)$$

و:

$$e_3(0) = e_2(0) - \frac{j_5(0)}{G_2} \qquad (۳۶\text{-}۳)$$

تبصرهٔ ۱ به‌جز شرایط اولیه، نوشتن معادلات گره به صورت معادلهٔ انتگرال دیفرانسیل با آنچه که در مورد تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی به کار رفت، ارتباط نزدیک دارد. به راحتی دیده می‌شود که اگر در $\mathbf{Y}_n(D)$ به جای D مقدار $j\omega$ قرار داده شود، ماتریس ادمیتانس گره $\mathbf{Y}_n(j\omega)$ ، در مورد تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی به دست می‌آید.

تبصرهٔ ۲ گرچه معادلات (۳-۳۳) با اسم دشوار معادلات انتگرال دیفرانسیل متناظر می‌باشند، در حقیقت آنها متفاوت از معادلات دیفرانسیل نیستند. این تنها یک طرز نمایش است! برای اثبات این

موضوع، متغیرهای جدیدی مانند $\phi_۲$ و $\phi_۳$ را که توسط روابط زیر تعریف می‌شوند، در نظر بگیرید:

$$\phi_۲(t) \triangleq \int_۰^t e_۲(t')dt' \qquad \phi_۳(t) \triangleq \int_۰^t e_۳(t')dt' \qquad (۳۷-۳)$$

واضح است که:

$$De_۲ = D^۲\phi_۲ \qquad e_۲ = D\phi_۲ \qquad D^{-۱}e_۲ = \phi_۲$$

دستگاه معادلات (۳-۳۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} G_۱ + C_۲D & -C_۲D^۲ & ۰ \\ -C_۲D - g_m & C_۲D^۲ + (G_۲ + g_m)D + \Gamma_{۴۴} & -G_۲D + \Gamma_{۴۵} \\ ۰ & -G_۲D + \Gamma_{۴۵} & G_۲D + \Gamma_{۵۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ \phi_۲ \\ \phi_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{s۱} \\ -j_{L۴}(۰) \\ -j_۵(۰) \end{bmatrix}$$

و شرایط اولیه چنین هستند:

$e_۱(۰)$ به وسیلهٔ (۳-۳۴) داده می‌شود

$\phi_۲(۰) = ۰$ (۳-۳۷) را ببینید $\qquad \dot\phi_۲(۰) = e_۲(۰)$ به وسیلهٔ (۳-۳۵) داده می‌شود

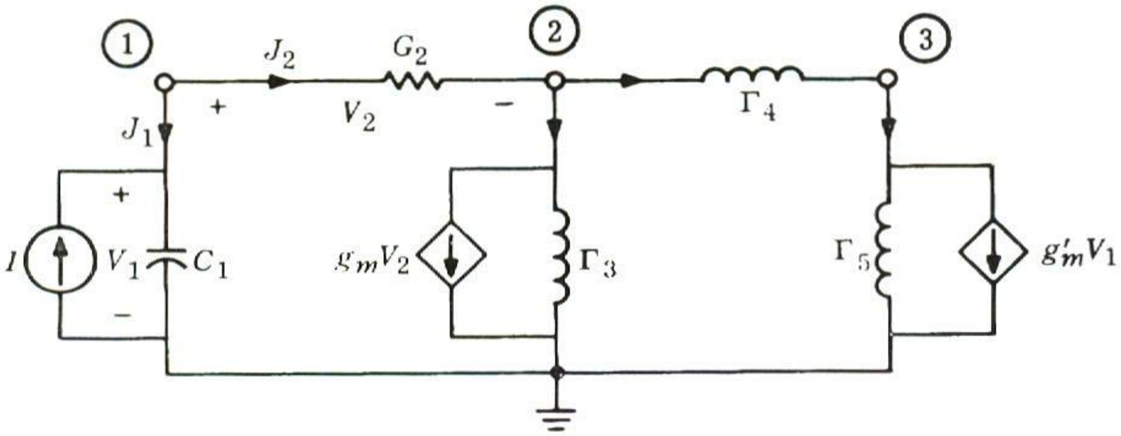
$\phi_۳(۰) = ۰$ (۳-۳۷) را ببینید $\qquad \dot\phi_۳(۰) = e_۳(۰)$ به‌وسیلهٔ (۳-۳۶) داده می‌شود

۳-۵ روش میان‌بر

هنگامی که مدار مورد مطالعه، تنها شامل چند منبع وابسته باشد، می‌توان با به کار بردن ایدهٔ زیر، معادلات را به طور نظری نوشت: منابع وابسته را به عنوان منابع نابسته در نظر می‌گیریم و تنها در مرحلهٔ آخر، منابع را برحسب متغیرهای مناسب بیان می‌کنیم.

مثال ۱ فرض کنید که بخواهیم معادلات حالت دایمی سینوسی شبکهٔ شکل (۳-۷) را بنویسیم:

گام ۱ منابع وابسته را با منابع نابسته عوض کنید و آنها را $J_{s۳}$ و $J_{s۵}$ بنامید.



شکل ۳-۷ شبکهٔ شامل منابع وابسته.

گام ۲ معادلات را به طور نظری به صورت زیر بنویسید:

$$\begin{bmatrix} G_۲ + j\omega C_۱ & -G_۲ & ۰ \\ -G_۲ & G_۲ + \dfrac{\Gamma_۳ + \Gamma_۴}{j\omega} & -\dfrac{\Gamma_۴}{j\omega} \\ ۰ & -\dfrac{\Gamma_۴}{j\omega} & \dfrac{\Gamma_۴ + \Gamma_۵}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_۱ \\ E_۲ \\ E_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -J_{s۳} \\ -J_{s۵} \end{bmatrix}$$

گام ۳ شکل موج‌های منابع وابسته را برحسب متغیرهای مناسب، به صورت زیر بیان کنید:

$$J_{s۳} = g_m V_۲ = g_m(E_۱ - E_۲)$$

و:

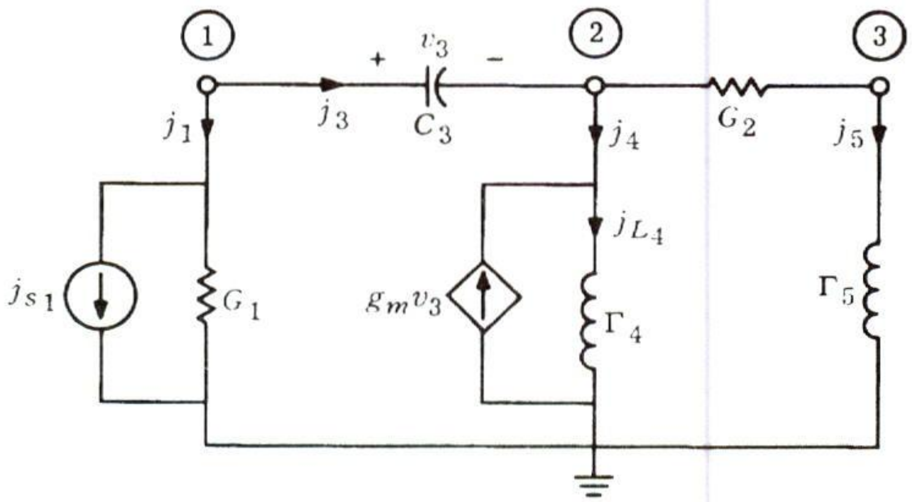
$$J_{s۵} = g'_m V_۱ = g'_m E_۱$$

گام ٤ این جملات را در بالا جایگزین کرده و آنها را دوباره مرتب کنید تا به دست آید:

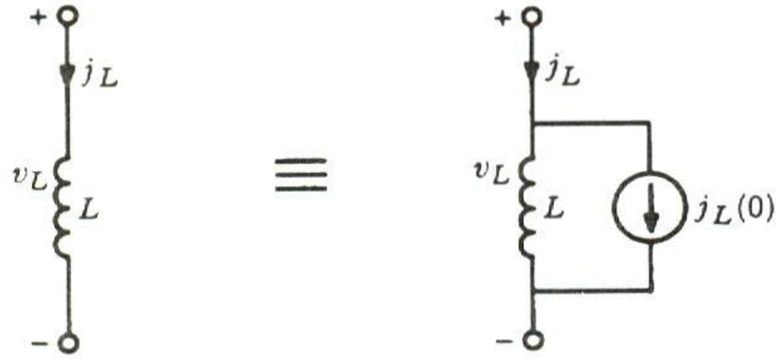
$$\begin{bmatrix} G_۲ + j\omega C_۱ & -G_۲ & ۰ \\ g_m - G_۲ & G_۲ - g_m + \dfrac{\Gamma_۳ + \Gamma_۴}{j\omega} & -\dfrac{\Gamma_۴}{j\omega} \\ g'_m & -\dfrac{\Gamma_۴}{j\omega} & \dfrac{\Gamma_۴ + \Gamma_۵}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_۱ \\ E_۲ \\ E_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مثال ۲ فرض کنید که بخواهیم معادلات انتگرال دیفرانسیل شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۳-۶) را با فرض $\Gamma_{۴۵} = ۰$ بنویسیم. این شبکه در شکل (۳-۸) مجدداً رسم شده است.

گام ۱ باید توجه داشت که معادلات شاخه‌های سلف‌ها، جریانهای اولیه را نیز شامل می‌شوند (شکل ۳-۹ را ببینید)، بنابراین:



شکل ۳-۸ شبکهٔ تجزیه و تحلیل شده در مثال ۲.



سلف L با جریان اولیهٔ $j_L(۰)$ سلف L بدون جریان اولیه

شکل ۳-۹ معادل‌های مفید هنگام نوشتن معادلات به طور نظری.

$$j_L(t) = \Gamma \int_{۰}^{t} v_L(t')dt' + j_L(۰)$$

در نتیجه، می‌توان هر سلفی با جریان اولیهٔ $j_L(۰)$ را توسط یک سلف بدون جریان اولیه که به طـور موازی با منبع جریان ثابت $j_L(۰)$ قرار دارد، تعویض نمود. پس از تعویض منبع وابستهٔ $g_m v_۳$ با یک منبع نابستهٔ $j_{s۴}$ ، شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۳-۱۰) به دست می‌آید.

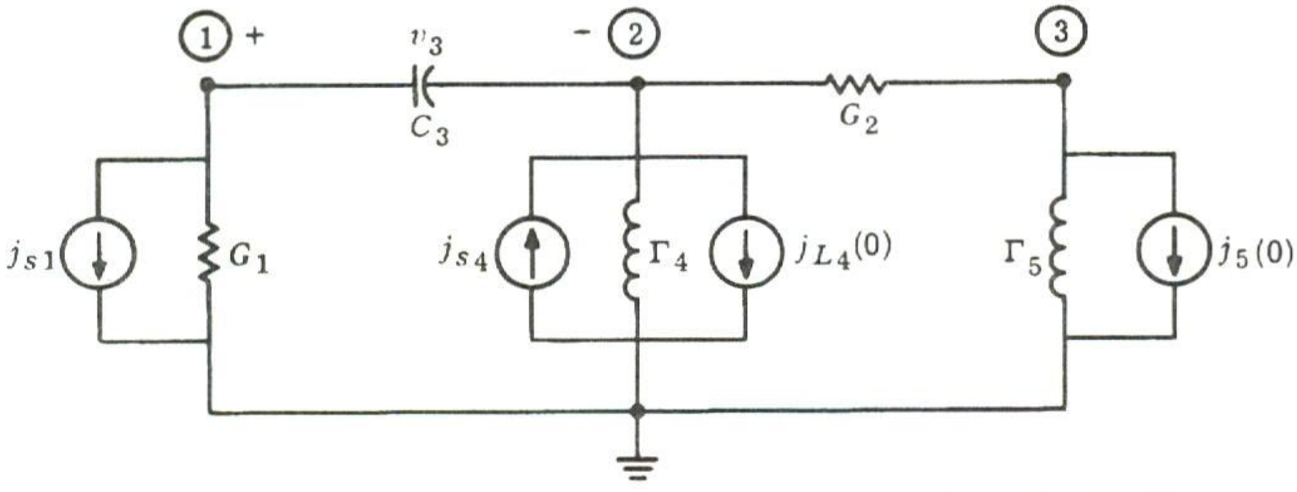
گام ۲ به طور نظری معادلات چنین هستند:

$$\begin{bmatrix} G_۱ + C_۳D & -C_۳D & ۰ \\ -C_۳D & G_۲ + \Gamma_۴D^{-۱} + C_۳D & -G_۲ \\ ۰ & -G_۲ & G_۲ + \Gamma_۵D^{-۱} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ e_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{s۱} \\ j_{s۴} - j_{L۴}(۰) \\ -j_۵(۰) \end{bmatrix}$$

گام ۳ شکل موج منبع وابسته را برحسب متغیرهای مناسب به صورت زیر بیان کنید:

$$j_{s۴} = g_m v_۳ = g_m(e_۱ - e_۲)$$

گام ٤ این جملات را در بالا جایگزین کرده و آنها را دوباره مرتب کنید تا به دست آید:



شکل ۳-۱۰ شبکهٔ شکل (۳-۸) که در آن جریانهای اولیه با منابع جریان ثابت تعویض شده‌اند.

$$\begin{bmatrix} G_1 + C_3 D & -C_3 D & 0 \\ -g_m - C_3 D & g_m + G_2 + \Gamma_4 D^{-1} + C_3 D & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 + \Gamma_5 D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{s1} \\ -j_{L4}(0) \\ -j_5(0) \end{bmatrix}$$

به طور خلاصه در بسیاری از موارد، نوشتن معادلات به طور نظری راحت‌تر است. دانستن اینکه روش منظم بخش (۳-۱) و (۳-۳) همواره قابل اجرا است، حائز اهمیت بوده و بنابراین موقعی که مشکوک باشیم، می‌تواند به عنوان آزمایش به کار رود.

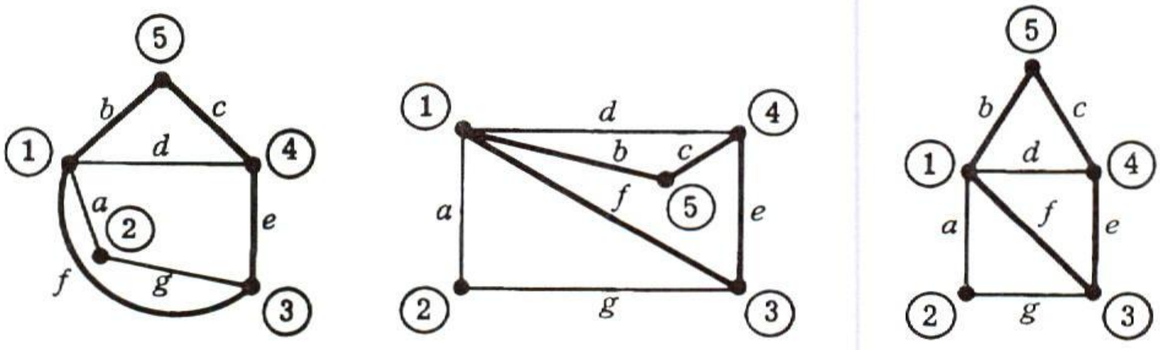
٤- دوگانی

می‌خواهیم در این بخش مفهوم دوگانی را که مکرراً در بقیهٔ این فصل و فصل ۱۱ به کار خواهد رفت، توسعه دهیم.

٤-۱ گراف‌های مسطح، مش‌ها، مش‌های بیرونی

به موجب تعریفی که برای یک گراف انتخاب نمودیم، یعنی دسته‌ای از گره‌ها و دسته‌ای از شاخه‌ها که هر کدام در یک انتها به گره‌ای ختم می‌شود، واضح است که هر گراف داده شده را می‌توان به چند طریق مختلف رسم نمود. به عنوان مثال، سه گراف نشان داده شده در شکل (۴-۱) نمایشهای یک گراف هستند. در واقع آنها ماتریس تلاقی یکسان دارند. به طریق مشابه، یک حلقه مفهومی دارد که به طرز ترسیم گراف بستگی ندارد. به عنوان مثال، شاخه‌های f ، b ، c و e در سه گراف نشان داده شده در شکل (۴-۱) یک حلقه تشکیل می‌دهند.

چنانچه واژهٔ مش را به طور حسی به کار بریم، حلقهٔ $bcef$ در شکل (۴-۱ ب) را یک مش نامیده ولی در شکلهای (۴-۱ الف) یا (۴-۱ پ) چنین نخواهد بود. بدین ترتیب لازم است گراف‌هایی که به طرز خاصی رسم شده‌اند، در نظر گرفته شوند. هنگامی که بخواهیم یک گراف $\mathcal{G}$ را که توسط ما به



(پ) (ب) (الف)

شکل ٤-۱ شکلهای (الف)، (ب) و (پ) گراف یکسانی را به صورت سه گراف که از لحاظ توپولوژیکی متفاوت‌اند، نشان می‌دهد.

(ب) (الف)

شکل ٤-٢ (الف) گراف مسطح؛ (ب) گراف نامسطح.

طرز خاصی رسم شده است در نظر بگیریم، آن را **گراف توپولوژیکی** $\mathcal{G}$ خواهیم نامید. مثلاً سه گراف نشان داده شده در شکل (۴-۱) را می‌توان به عنوان گراف یکسان و یا سه گراف توپولوژیکی متفاوت در نظر گرفت.

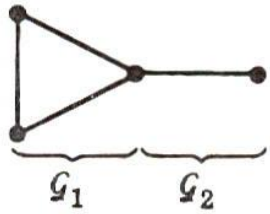
گراف $\mathcal{G}$ را **مسطح** گویند، چنانچه بتوان آن را روی یک صفحه چنان رسم نمود که هیچ دو شاخهٔ آن همدیگر را در نقطه‌ای که یک گره نباشد، قطع نکنند. گراف شکل (۴-۲ الف) یک گراف مسطح بوده، گراف شکل (۴-۲ ب) مسطح نمی‌باشد.

گراف توپولوژیکی مسطح $\mathcal{G}$ را در نظر بگیرید. هر حلقهٔ این گراف را که شاخه‌ای در درون آن نباشد، **مش** می‌نامیم. به عنوان مثال، در گراف توپولوژیکی نشان داده شده در شکل (۴-۱ الف) حلقهٔ $fbce$ یک مش نیست و درگراف توپولوژیکی نشان داده شده در شکل (۴-۱ ب)، حلقهٔ $fbce$ یک مش می‌باشد. در حلقهٔ $fbce$ شکل (۴-۱ پ) هیچ شاخه‌ای در قسمت بیرونی وجود ندارد و این حلقه، **مش بیرونی** گراف توپولوژیکی نامیده می‌شود.

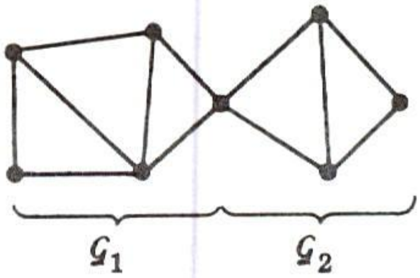
چنانچه گراف مسطح را به عنوان توری موی سر فرض کرده و چنین تصور کنید که آن توری روی یک کرهٔ شفافی از بلور انداخته شده است، در این صورت هنگامی که در مرکز کره قرار گرفته و بیرون را بنگرید ملاحظه خواهید کرد که اختلاف قابل ملاحظه‌ای میان یک مش و مش بیرونی وجود ندارد.

اکنون نوعی از شبکه‌ها را نشان می‌دهیم که گراف‌های آنها خواص معینی را که منجر به ساده کردن تجزیه و تحلیل می‌گردند، دارا می‌باشند. سه گراف نشان داده شده در شکل (۴-۳ الف) تا (۴-۳ پ) را در نظر بگیرید. هر یک از این گراف‌ها دارای این خاصیت هستند که می‌توان آنها را به دو زیر گراف ناسوده[۱] $\mathcal{G}_1$ و $\mathcal{G}_2$ که تنها در یک گره به همدیگر متصل می‌باشند، تفکیک نمود. گراف‌هایی که دارای این خاصیت باشند **گراف‌های لولادار** نامیده می‌شوند. گرافی که لولادار نباشد، گراف بی‌لولا (یا بعضی مواقع گراف غیرقابل تفکیک) خوانده می‌شود. بدین ترتیب، **یک گراف بی‌لولا** دارای این خاصیت است که هر وقت به دو زیر گراف ناسوده متصل بهم $\mathcal{G}_1$ و $\mathcal{G}_2$ تفکیک شود، این زیر گراف‌ها حداقل دارای دو

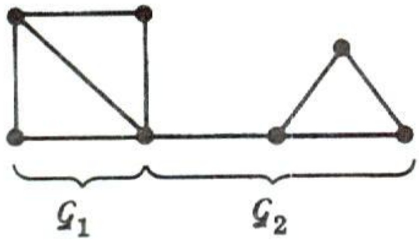
[۱] منظور از یک گراف ناسوده گرافی است که از یک گره تنها تشکیل نشده باشد.



(الف)



(ب)



(پ)

گراف بی‌لولا

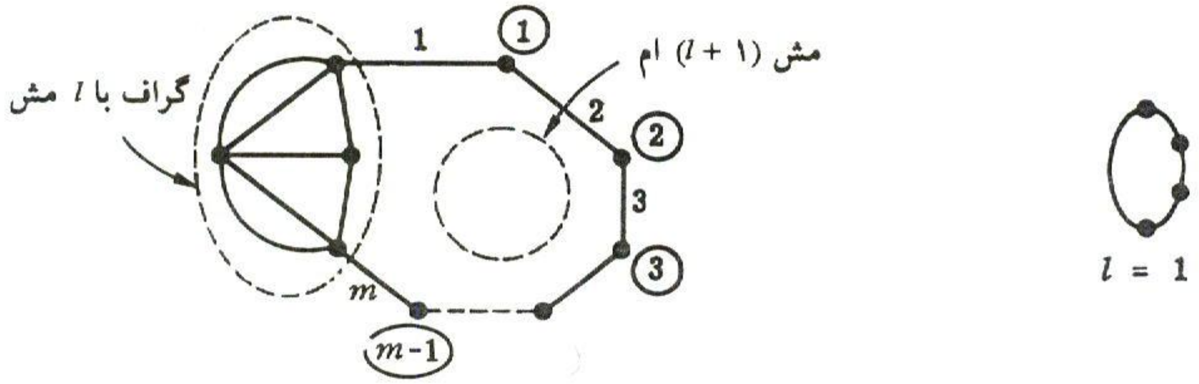
(ت)

شکل ٤-۳ مثالهایی از گراف‌های لولادار، (الف)، (ب) و (پ) و یک گراف بی‌لولا، (ت).

گره مشترک می‌باشند. تعیین اینکه گرافی لولادار یا بی‌لولا است به طور نظری به راحتی انجام می‌گیرد (برای مثالهای مربوطه شکل‌های (۴-۳) را ببینید).

از دیدگاه تجزیه و تحلیل شبکه‌ها، چنانچه شبکه‌ای گراف لولادار داشته و میان عناصر $\mathcal{G}_1$ و $\mathcal{G}_2$ آن هیچ تزویجی (به وسیلهٔ اندوکتانس‌های متقابل یا منابع وابسته) وجود نداشته باشد، در این صورت تجزیه و تحلیل شبکه، به تجزیه و تحلیل دو زیر شبکهٔ نابسته، یعنی شبکه‌هایی که با گراف‌های $\mathcal{G}_1$ و $\mathcal{G}_2$ متناظر هستند، منجر می‌گردد. از آنجایی که $\mathcal{G}_1$ و $\mathcal{G}_2$ به وسیلهٔ یک گره به همدیگر متصل‌اند، KCL لازم می‌دارد که در هر لحظه از زمان، مقدار جریانی که از $\mathcal{G}_1$ به $\mathcal{G}_2$ جاری می‌شود، برابر صفر گردد و بنابراین، هیچ‌گونه مبادلهٔ جریان میان این دو زیر شبکه وجود ندارد. همچنین این حقیقت که دو زیر شبکهٔ فوق یک گره مشترک دارند هیچ محدودیتی روی ولتاژ شاخه‌ها اعمال نمی‌کند.

شمارش مش‌ها می‌توان به راحتی ملاحظه کرد که در یک گراف مسطح بی‌لولای متصل به هم، تعداد مش‌ها مساوی $b - n_t + 1$ است که در آن b تعداد شاخه‌ها و n_t تعداد گره‌ها است. اثبات این مطلب را می‌توان با استفاده از روش استقرای ریاضی بیان نمود. فرض کنید تعداد مش‌ها برابر l باشد؛ بنابراین می‌خواهیم نشان دهیم که:



(ب) (الف)

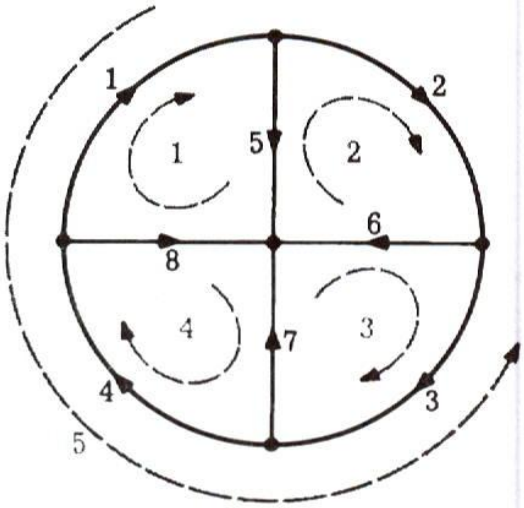
شکل ٤-٤ نشان دادن اثبات $l = b - n_t + 1$.

$$\boxed{l = b - n_t + 1} \tag{۴-۱}$$

گراف شکل (۴-۴ الف) را که در آن $l = 1$ است در نظر بگیرید. در اینجا واضح است که معادلهٔ (۴-۱) صحیح است. اکنون گرافی را با l مش در نظر گرفته و فرض کنید که معادلهٔ (۴-۱) صحیح است. حال می‌خواهیم نشان دهیم که اگر گراف را چنان تغییر دهیم که دارای $l + 1$ مش باشد، معادلهٔ (۴-۱) باز هم صحیح خواهد بود. می‌توان تعداد مش‌ها را با افزودن یک شاخه میان دو گره موجود و یا با افزودن m شاخه به طور سری که توسط $m - 1$ گره جدید به گراف موجود وصل می‌شوند، مطابق شکل (۴-۴ ب) اضافه نمود. برای گراف جدید با $l + 1$ مش، معادلهٔ (۴-۱) هنوز برقرار است زیرا با افزودن m شاخه و $m - 1$ گره، تنها یک مش اضافه شده است. بنابراین به موجب روش استقراء، معادلهٔ (۴-۱) در حالت کلی برقرار است.

ماتریس M_a یک خاصیت اساسی گراف مسطح بی‌لولای متصل به هم آن است که، اگر مش بیرونی را نیز شامل کنیم، هر شاخهٔ گراف درست متعلق به دو مش می‌باشد. یک چنین گرافی با جهت‌های شاخهٔ مشخص شده را در نظر بگیرید. جهت‌های قراردادی زیر را طبق قرارداد برای مش‌ها تعیین خواهیم کرد: جهت عقربه‌های ساعت برای هر مش درونی و جهت خلاف عقربه‌های ساعت برای مش بیرونی. این عمل در گراف شکل (۴-۵) نشان داده شده است. بدین ترتیب، گراف مسطح جهت‌دار $\mathcal{G}$ را که بی‌لولا و متصل به هم می‌باشد، می‌توان با یک ماتریس M_a به طور تحلیلی توصیف نمود. فرض کنید گراف $\mathcal{G}$ دارای b شاخه و $l + 1$ مش باشد (مش بیرونی نیز شامل می‌شود)، در این صورت ماتریس M_a به صورت یک ماتریس مستطیلی با $l + 1$ سطر و b ستون تعریف می‌گردد که عنصر (i, k) ام آن m_{ik} به صورت زیر می‌باشد:

$$m_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آنها برهم منطبق باشند} \\ -1 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آنها برهم منطبق نباشند} \\ 0 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ به مش } i \text{ متعلق نباشد} \end{cases}$$



شکل ٤-۵ یک گراف مسطح جهت‌دار با هشت شاخه و پنج مش (با در نظر گرفتن مش بیرونی).

برای گراف نشان داده‌شده در شکل (۴-۵)، $b=8$ و $l + 1 = 5$ است و ماتریس $\mathbf{M}_a$ چنین است:

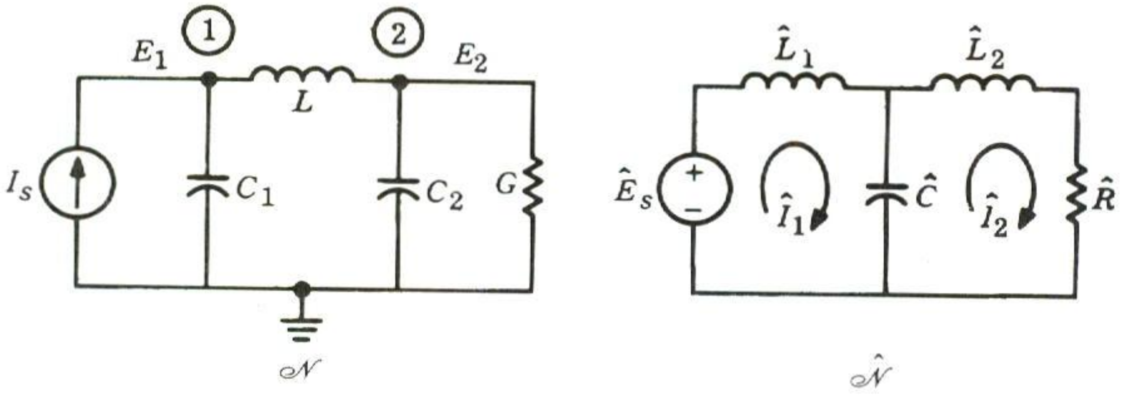
$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}}^{\text{شاخه‌ها}} \\
\text{مش‌ها}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\right. &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ملاحظه می‌کنیم که ماتریس $\mathbf{M}_a$ یک خاصیت مشترک با ماتریس تلاقی $\mathbf{A}_a$ دارد؛ یعنی، تمام عناصر هر ستون آن صفر است به جز یک ۱ + و یک ۱ - . در زیربخش بعدی، مفهوم گراف‌های دوگان ارائه خواهد شد و در نتیجه روابط میان این ماتریس‌ها را می‌توان بیشتر کشف نمود.

٤-۲ گراف‌های دوگان

پیش از بیان یک مفهوم دقیق از طرز تشکیل گراف‌ها و شبکه‌های دوگان، مثالی در نظر می‌گیریم. با توجه به پاره‌ای از ترکیبات این مثال، بعضی انگیزه‌ها را برای طرز تشکیل مفاهیم بعدی فراهم خواهیم نمود.

مثال ۱ شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۴-۶) را در نظر بگیرید. برای سهولت، فرض کنید که منابع سینوسی بوده و فرکانس آنها یکسان است و به علاوه شبکه‌ها در حالت



شکل ۴-۶ دو شبکه به کار رفته برای تشریح دوگانی. اگر $C_1 = \hat{L}_1$, $C_2 = \hat{L}_2$, $L = \hat{C}$, $I_s = \hat{E}_s$, $G = \hat{R}$ باشند در این صورت آنها را شبکه‌های دوگان نامند.

دایمی سینوسی قرار دارند. در شبکهٔ اول مثلاً $\mathcal{N}$ ، دو ولتاژ سینوسی گره نسبت به مبنا را با فازورهای E_1 و E_2 نشان می‌دهیم. معادلات گره زیر به طور نظری به دست می‌آیند:

$$\left(j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L}\right)E_1 - \frac{1}{j\omega L}E_2 = I_s \qquad \text{(۴-۲ الف)}$$

$$-\frac{1}{j\omega L}E_1 + \left(j\omega C_2 + G + \frac{1}{j\omega L}\right)E_2 = 0 \qquad \text{(۴-۲ ب)}$$

توجه کنید که I_s فازوری است که جریان سینوسی منبع را نشان می‌دهد.

شبکهٔ دوم $\hat{\mathcal{N}}$ دارای دو مش می‌باشد. جریانهای سینوسی این دو مش را با فازورهای $\hat{I}_1$ و $\hat{I}_2$ نشان می‌دهیم. معادلات مش زیر مجدداً به طور نظری به دست می‌آیند:

$$\left(j\omega\hat{L}_1 + \frac{1}{j\omega\hat{C}}\right)\hat{I}_1 - \left(\frac{1}{j\omega\hat{C}}\right)\hat{I}_2 = \hat{E}_s \qquad \text{(۴-۳ الف)}$$

$$-\left(\frac{1}{j\omega\hat{C}}\right)\hat{I}_1 + \left(j\omega\hat{L}_2 + \hat{R} + \frac{1}{j\omega\hat{C}}\right)\hat{I}_2 = 0 \qquad \text{(۴-۳ ب)}$$

چنانچه مقادیر اجزای این دو مدار به صورت زیر به هم مربوط بوده،

$$C_1 = \hat{L}_1 \qquad L = \hat{C} \qquad C_2 = \hat{L}_2 \qquad G = \hat{R}$$

و منابع فازور یکسان داشته باشند،

$$I_s = \hat{E}_s$$

در این صورت معادلات (۴-۲) و (۴-۳) همانند هستند. بنابراین چنانچه یکی از شبکه‌ها را حل کرده باشیم، شبکهٔ دیگر را نیز حل نموده‌ایم. این دو شبکه مثالی از یک جفت شبکهٔ دوگان هستند و بعضی روابط جالب میان آنها وجود دارد. شبکهٔ $\mathcal{N}$ دارای دو گره و یک گره مبنا بوده و شبکهٔ $\hat{\mathcal{N}}$ دارای دو مش و یک مش بیرونی است. هر دو شبکه پنج شاخه دارند. هر شاخه‌ای که میان دو گره از $\mathcal{N}$ قرار دارد (مثلاً سلفی که گره ۱ و گره ۲ را به هم وصل می‌کند) با شاخه‌ای از $\hat{\mathcal{N}}$ مطابق است که بین مش‌های متناظر مشترک می‌باشد (خازن مشترک در مش‌های ۱ و ۲). منبع جریان I_s و خازن C_1 در شبکهٔ $\mathcal{N}$

موازی هستند و منبع ولتاژ $\hat{E}_s$ و سلف $\hat{L}_1$ در شبکهٔ $\hat{\mathscr{N}}$ به طور سری قرار دارند و الی آخر. توجه کنید که ارتباط میان $\mathscr{N}$ و $\hat{\mathscr{N}}$، هم مفاهیم نظریه‌ای گراف‌ها (مش‌ها و گره‌ها) و هم ماهیت اجزای آنها (منابع، سلف‌ها، خازنها و غیره) را شامل می‌شود. بدین دلیل باید در دو مرحله عمل نمود، یکی در نظر گرفتن گراف‌های دوگان و دیگری تعریف شبکه‌های دوگان.

اکنون برای بیان مفهوم گراف‌های دوگان آماده هستیم. مجدداً با گراف توپولوژیکی $\mathcal{G}$ که مسطح، بی‌لولا و متصل به هم فرض می‌شود[1]، شروع می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{G}$ دارای $n_t = n + 1$ گره، b شاخه و در نتیجه $l = b - n$ مش باشد (مش بیرونی را به حساب نیاوردیم). گراف توپولوژیکی مسطح $\hat{\mathcal{G}}$ را **گراف دوگان** یک گراف توپولوژیکی $\mathcal{G}$ نامند اگر:

۱- میان مش‌های $\mathcal{G}$ (با در نظر گرفتن مش بیرونی) و گره‌های $\hat{\mathcal{G}}$ یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۲- میان مش‌های $\hat{\mathcal{G}}$ (با در نظر گرفتن مش بیرونی) و گره‌های $\mathcal{G}$ یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۳- میان شاخه‌های دو گراف یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد به قسمی که هر گاه دو مش یک گراف، دارای شاخهٔ مشترکی باشند، گره‌های متناظر این دو مش در گراف دیگر، شاخهٔ متناظری خواهند داشت که آنها را به هم وصل می‌کند.

برای مشخص کردن تمام عبارتهایی که به یک گراف دوگان مربوط می‌شوند، علامت ^ را به کار خواهیم برد.

از این تعریف چنین برمی‌آید که $\hat{\mathcal{G}}$ دارای b شاخه، $l + 1$ گره، n مش و یک مش بیرونی است. می‌توان به راحتی ملاحظه کرد که اگر $\hat{\mathcal{G}}$ گراف دوگان $\mathcal{G}$ باشد در این صورت $\mathcal{G}$ نیز گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ خواهد بود. به عبارت دیگر، دوگانی، رابطه‌ای متقارن میان گراف‌های توپولوژیکی مسطح، بی‌لولا و متصل به هم می‌باشد.

الگوریتم با داشتن گراف توپولوژیکی مسطح، بی‌لولا و متصل به هم $\mathcal{G}$، گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ را به ترتیب زیر می‌سازیم:

۱- برای هر یک از مش‌های $\mathcal{G}$ با حساب آوردن مش بیرونی، یک گره از $\hat{\mathcal{G}}$ متناظر می‌سازیم. بدین ترتیب گره ① را با مش ۱ متناظر ساخته و گره ① را در درون مش ۱ رسم می‌کنیم. در مورد هر یک از گره‌های ②، ③، ...، همچنین گره $(l+1)$ که متناظر با مش بیرونی است، عمل مشابهی انجام می‌دهیم.

---

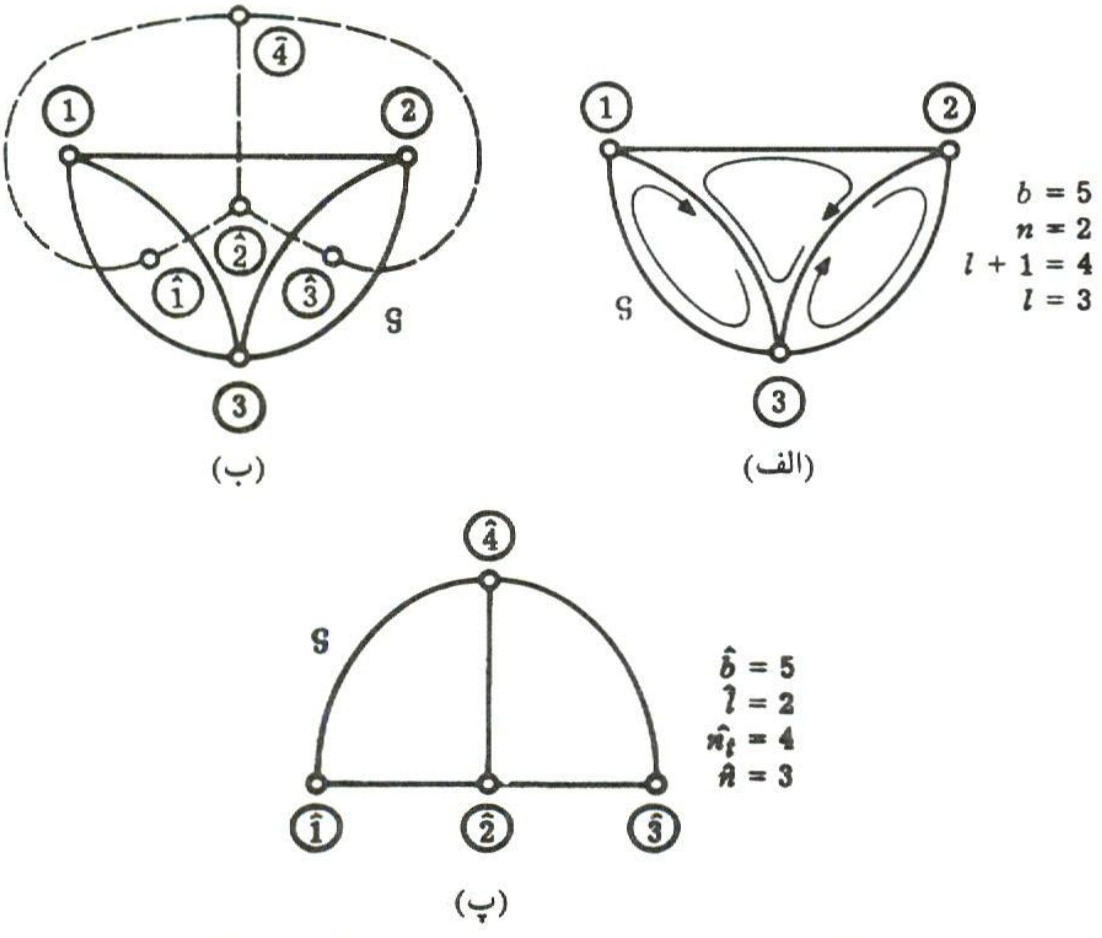
[1] مفهوم گراف‌های دوگان را می‌توان برای یک گراف مسطح متصل به هم دلخواه بیان نمود. با این وجود برای سادگی، حالت گراف‌های لولادار را حذف می‌کنیم.

۲- برای هر شاخه، مانند k از $\mathcal{G}$ ، که میان مش‌های i و j مشترک است، یک شاخهٔ k از $\hat{\mathcal{G}}$ را که به گره‌های $\hat{i}$ و $\hat{j}$ متصل است متناظر می‌سازیم.

به این ترتیب ساختمان گراف به دست آمده $\hat{\mathcal{G}}$ یک دوگان گراف $\mathcal{G}$ می‌باشد.

مثال ۲ گراف مسطح معلومی در شکل (۴-۷ الف) نشان داده شده است. در این گراف، بدون در نظر گرفتن مش بیرونی، سه مش وجود دارد. گره‌های $\hat{1}$، $\hat{2}$ و $\hat{3}$ را مطابق شکل (۴-۷ ب) در درون هر یک از مش‌ها قرار می‌دهیم. گره $\hat{4}$ را در بیرون گراف $\mathcal{G}$ قرار می‌دهیم زیرا گره $\hat{4}$ با مش بیرونی متناظر خواهد بود. برای تکمیل گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ ، هرگاه دو مش $\mathcal{G}$ دارای یک شاخهٔ مشترک باشند دو گره متناظر آن دو مش را با شاخه‌ای به هم وصل می‌کنیم. خطوط خط‌چین شده شکل (۴-۷ ب) نشان دهندهٔ شاخه‌های گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ می‌باشند. گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ در شکل (۴-۷ پ) دوباره رسم شده است.

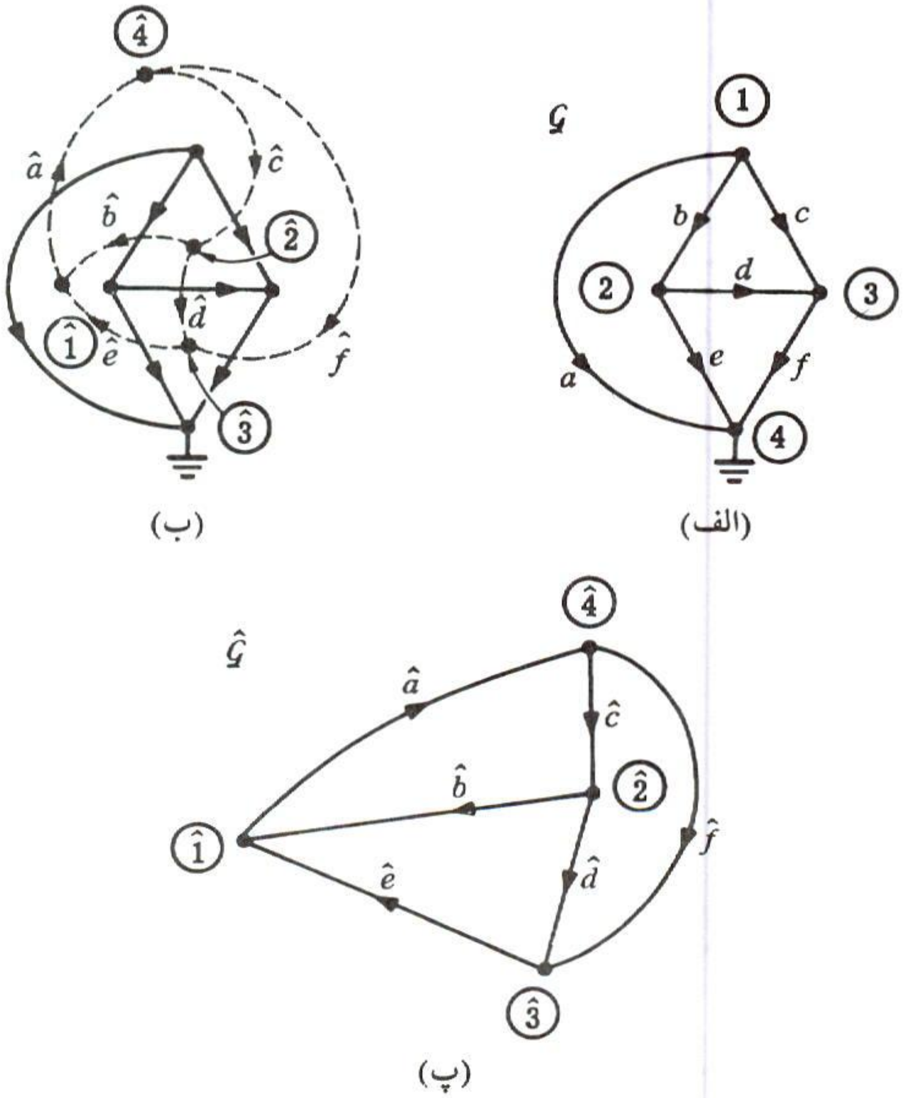
در حالتی که گراف داده شدهٔ $\mathcal{G}$ جهت‌دار باشد، یعنی در موردی که هر شاخهٔ $\mathcal{G}$ یک جهت قراردادی داشته باشد، جهت‌دار کردن گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ را می‌توان با اضافه نمودن یک قرارداد ساده به طرز ساختن گراف دوگان گفته شده در بالا به دست آورد. چون شاخه‌های هر دو گراف جهت‌دار هستند می‌توان تصور کرد که جهت‌های قراردادی شاخه‌ها با بردارهایی نشان داده شوند که در روی آن شاخه‌ها



شکل ۴-۷ مثال ۲: تشریح طرز ساختن یک گراف دوگان. (الف) گراف داده شده؛ (ب) مراحل ساختن؛ (پ) گراف دوگان.

قرار گرفته و جهت‌های آن بردارها در جهت‌های قراردادی آن شاخه‌ها باشند. جهت قراردادی یک شاخه از گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ با در نظر گرفتن جهت قراردادی شاخهٔ متناظر در گراف داده شدهٔ $\mathcal{G}$ و با دوران آن بردار به میزان 90° در جهت عقربه‌های ساعت به دست می‌آید. با این الگوریتم، می‌توان با یک روش منظم، برای هر گراف توپولوژیکی مسطح جهت‌دار $\mathcal{G}$ یک گراف دوگان جهت‌دار $\hat{\mathcal{G}}$ به دست آورد.

مثال ۳ گراف جهت‌دار شکل (۴-۸ الف) را در نظر بگیرید. فرض کنید گره ④ گره مبنا باشد. می‌خواهیم گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ را که مش بیرونی آن متناظر با گره ④ از گراف $\mathcal{G}$ باشد، به دست آوریم. با پیروی از قواعد ساختن یک گراف دوگان گره‌های $\hat{1}$، $\hat{2}$ و $\hat{3}$ را به ترتیب در درون مش‌های ۱، ۲ و ۳ در گراف $\mathcal{G}$ قرار می‌دهیم و گره $\hat{4}$ را مطابق شکل (۴-۸ ب) بیرون مش می‌گذاریم. برای تکمیل گراف دوگان، گره‌های $\hat{\mathcal{G}}$ را با شاخه‌هایی به هم وصل می‌کنیم تا شاخه‌هایی متناظر با شاخه‌های گراف $\mathcal{G}$ ایجاد شوند. این شاخه‌ها با خطوط خط چین شده مطابق شکل (۴-۸ ب) رسم شده‌اند. جهت‌های قراردادی شاخه‌های $\hat{\mathcal{G}}$ با روش گفته شده در بالا به دست آمده‌اند. گراف دوگان مطابق شکل (۴-۸ پ) مجدداً رسم شده است. برای تضمین این مطلب که شاخه‌های متصل شده به گره مبنا در گراف $\mathcal{G}$ متناظر با مش



شکل ۴-۸ مثال ۳: ساختن گراف دوگان جهت‌دار.

بیرونی باشند، باید دقت لازم صورت گیرد. لحظه‌ای تفکر، قاعدهٔ زیر را که یک تناظر یک به یک مناسبی را تعیین می‌کند، به دست می‌دهد. به علت اینکه گره مبنا یعنی گره ۴ در این مثال باید بیرون از تمام خطوط خط چین شده قرار گیرد، هنگامی که گره $\hat{4}$ از گراف $\hat{\mathcal{G}}$ را تعیین می‌کنیم، راحت‌تر است آن را تا آنجا که ممکن است طبق شکل (۴-۸ ب) دورتر از گره ۴ انتخاب کنیم.

تبصرهٔ ۱ یک گراف توپولوژیکی داده شده در حالت کلی دوگان‌های متعددی دارد. با این وجود چنانچه گره مبنای $\mathcal{G}$ را مشخص کرده و بیان کنیم که این گره باید با مش بیرونی $\hat{\mathcal{G}}$ متناظر باشد، در این صورت روش توصیف شده در بالا گراف دوگان یکتایی را تعریف می‌کند. شاخه‌هایی که به گره مبنا در گراف $\mathcal{G}$ متصل‌اند، متناظر با شاخه‌هایی هستند که مش بیرونی گراف $\hat{\mathcal{G}}$ را تشکیل می‌دهند.

تبصرهٔ ۲ تناظر میان گراف $\mathcal{G}$ و دوگان آن $\hat{\mathcal{G}}$ شامل شاخه در مقابل شاخه، گره در مقابل مش، و گره مبنا در مقابل مش بیرونی است. به علاوه ماتریس تلاقی $\mathbf{A}_a$ یک گراف داده شدهٔ $\mathcal{G}$ برابر با ماتریس $\mathbf{M}_a$ از گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ می‌باشد.

تمرین گراف $\hat{\mathcal{G}}$ دوگان گراف مسطح جهت‌دار $\mathcal{G}$ داده شده در شکل (۴-۵) را بسازید. معادلات KCL را برای تمام گره‌های گراف دوگان بنویسید. یعنی:

$$\hat{\mathbf{A}}_a\hat{\mathbf{j}} = 0$$

نشان دهید که این دسته معادلات همانند معادلات KVL برای تمام مش‌های گراف داده شده می‌باشند (با در نظر گرفتن مش بیرونی) یعنی:

$$\mathbf{M}_a\mathbf{v} = 0$$

٤-۳ شبکه‌های دوگان

در این بحث، ما خود را به شبکه‌هایی که دارای خواص زیر باشند محدود می‌کنیم: گراف‌های آنها متصل به هم، مسطح و بی‌لولا باشند و همهٔ عناصر آنها اجزای یک قطبی باشند. به عبارت دیگر، ما سلف‌های تزویج شده، ترانسفورماتورها و منابع وابسته را از بحث خارج می‌کنیم و منابع ولتاژ یا جریان نابسته، سلف‌ها، مقاومتها و خازنها را شامل می‌کنیم. توجه به این نکته بسیار اساسی است که لزومی ندارد این اجزاء خطی و/ یا تغییرناپذیر با زمان باشند.

شبکهٔ $\hat{\mathcal{N}}$ را **دوگان شبکهٔ** $\mathcal{N}$ گویند چنانچه: (۱) گراف توپولوژیکی $\hat{\mathcal{G}}$ از شبکهٔ $\hat{\mathcal{N}}$ دوگان گراف توپولوژیکی $\mathcal{G}$ از شبکهٔ $\mathcal{N}$ باشد و (۲) معادلهٔ شاخهٔ یک شاخه از شبکهٔ $\hat{\mathcal{N}}$، از معادلهٔ شاخهٔ متناظر شبکهٔ $\mathcal{N}$ با انجام جایگزینی‌های زیر به‌دست آید:

$$v \to \hat{j} \qquad q \to \hat{\phi} \qquad (۴-۴)$$
$$j \to \hat{v} \qquad \phi \to \hat{q}$$

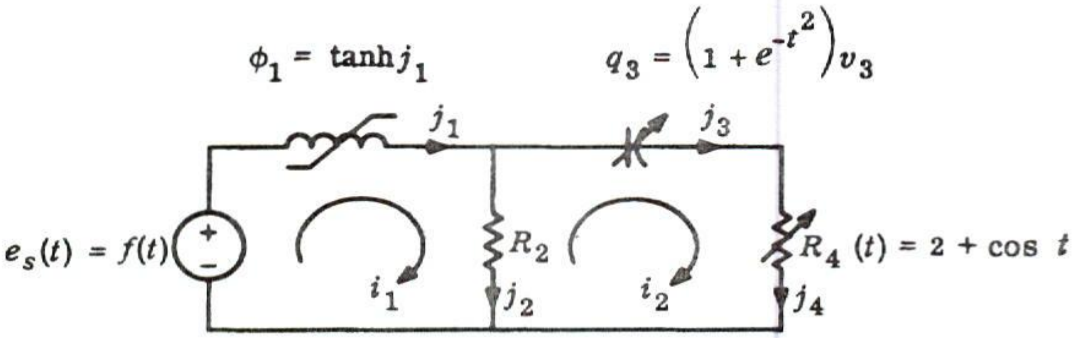
که درآنجا v، j، q و ϕ به ترتیب متغیرهای ولتاژ، جریان، بار و شار شاخه برای شبکهٔ $\mathcal{N}$ و $\hat{v}$، $\hat{j}$،

$\hat{q}$ و $\hat{\phi}$ متغیرهای شاخهٔ متناظر برای شبکهٔ $\hat{\mathcal{N}}$ می‌باشند.

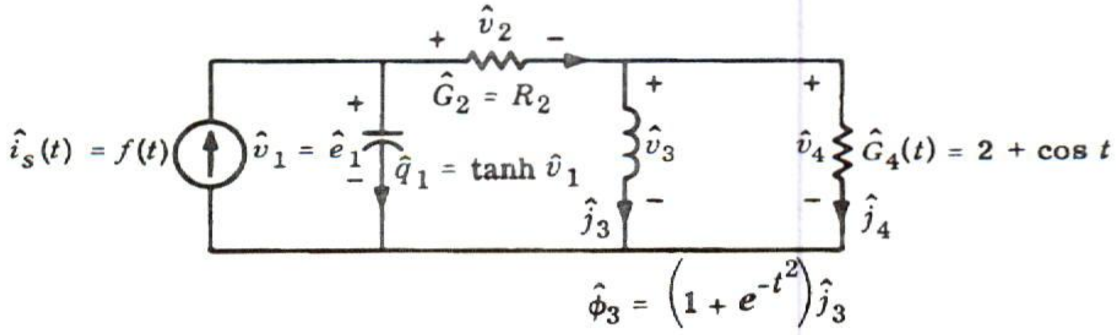
شرط (۲) این تعریف، بدین معنی است که یک مقاومت از $\mathcal{N}$ متناظر با یک مقاومت از $\hat{\mathcal{N}}$ می‌باشد و به علاوه یک مقاومت خطی با مقاومت K اهم از $\mathcal{N}$ متناظر با یک مقاومت خطی با رسانایی K مهو از $\hat{\mathcal{N}}$ می‌باشد. در واقع معادلهٔ شاخهٔ مقاومت شبکهٔ $\mathcal{N}$ به صورت $v = Kj$ است و در نتیجه معادلهٔ شاخهٔ مقاومت متناظر از شبکهٔ $\hat{\mathcal{N}}$ به صورت $\hat{j} = K\hat{v}$ می‌باشد. به طریق مشابه، یک سلف از شبکهٔ $\mathcal{N}$ متناظر با یک خازن از شبکهٔ $\hat{\mathcal{N}}$ می‌باشد و به علاوه یک سلف غیرخطی تغییرپذیر با زمان از شبکه $\hat{\mathcal{N}}$ مشخص شده به صورت $\phi = f(i, t)$، که در آن $f(\cdot, \cdot)$ یک تابع داده شدهٔ دو متغیره است، متناظر با یک خازن غیرخطی تغییرپذیر با زمان از شبکهٔ $\hat{\mathcal{N}}$ مشخص شده به صورت $\hat{q} = f(\hat{v}, t)$ خواهد بود. یک منبع ولتاژ که ولتاژ آن یک تابع $f(\cdot)$ می‌باشد با یک منبع جریان که جریان آن همان تابع $f(\cdot)$ می‌باشد متناظر خواهد بود. همچنین دوگان مدار اتصال کوتاه، مدار باز می‌باشد. یک مدار اتصال کوتاه به وسیلهٔ $v = 0$ مشخص می‌شود و در نتیجه دوگان آن به وسیلهٔ $\hat{j} = 0$ که همان معادلهٔ یک مدار باز است، مشخص می‌گردد.

به راحتی دیده می‌شود که اگر $\hat{\mathcal{N}}$ شبکهٔ دوگان $\mathcal{N}$ باشد در این صورت $\mathcal{N}$ نیز شبکهٔ دوگان $\hat{\mathcal{N}}$ خواهد بود، به عبارت دیگر: دوگانی یک رابطهٔ متقارن میان شبکه‌ها است.

مثال ٤ شبکهٔ غیرخطی تغییرپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۴-۹ الف) را در نظر بگیرید. سلف



(الف)



(ب)

شکل ٤-۹ مثال ۴ : تشریح شبکه‌های دوگان.

غیرخطی است و مشخصهٔ آن به صورت $\phi_۱ = \tanh j_۱$ می‌باشد. خازن خطی ولی تغییرپذیر با زمان است و مشخصهٔ آن به صورت $q_۳ = (۱ + e^{-t^۲})v_۳$ می‌باشد. مقاومت خروجی، خطی و تغییرپذیر با زمان با مقاومت $۲ + \cos t$ است، یعنی مشخصهٔ آن به صورت $v_۴ = (۲ + \cos t)j_۴$ می‌باشد. جهت شاخه‌ها در شکل نشان داده شده است. فرض کنید جریان مش‌ها $i_۱$ و $i_۲$ باشند، در این صورت:

$$j_۱ = i_۱ \qquad j_۲ = i_۱ - i_۲ \qquad j_۳ = j_۴ = i_۲$$

معادلات مش‌ها چنین هستند:

$$e_s(t) = f(t) = \frac{۱}{\cosh^۲ i_۱}\frac{di_۱}{dt} + R_۲(i_۱ - i_۲) \tag{۴-۵ الف}$$

$$۰ = R_۲(i_۲ - i_۱) + \frac{q_۳(۰)}{۱ + e^{-t^۲}} + \frac{۱}{۱ + e^{-t^۲}}\int_۰^t i_۲(t')\,dt' + (۲ + \cos t)i_۲(t) \tag{۴-۵ ب}$$

شبکهٔ دوگان $\hat{\mathcal{N}}$ به راحتی تعیین می‌شود. نخست گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ که جهت‌های آن نیز مشخص‌اند رسم می‌گردد. سپس هر شاخه به وسیلهٔ عنصر دوگان مناسب تعیین شده طبق شرط (۲)، پر می‌شود و نتیجهٔ حاصل در شکل (۴-۹ ب) نشان داده شده است. فرض کنید ولتاژهای گره نسبت به مبنا $\hat{e}_۱$ و $\hat{e}_۲$ باشند. در این صورت ولتاژهای شاخه‌ها به کمک روابط زیر بـه ولتـاژهای گـره‌ها مـربوط مـی‌شوند: $\hat{v}_۱ = \hat{e}_۱$ ، $\hat{v}_۲ = \hat{e}_۱ - \hat{e}_۲$ و $\hat{v}_۳ = \hat{v}_۴ = \hat{e}_۲$. معادلات گره‌ها چنین هستند:

$$\hat{i}_s(t) = f(t) = \frac{۱}{\cosh^۲ \hat{e}_۱}\frac{d\hat{e}_۱}{dt} + \hat{G}_۲(\hat{e}_۱ - \hat{e}_۲) \tag{۴-۶ الف}$$

$$۰ = \hat{G}_۲(\hat{e}_۲ - \hat{e}_۱) + \frac{\hat{\phi}_۳(۰)}{۱ + e^{-t^۲}} + \frac{۱}{۱ + e^{-t^۲}}\int_۰^t \hat{e}_۲(t')\,dt' + (۲ + \cos t)\hat{e}_۲(t) \tag{۴-۶ ب}$$

که در آنجا رسانایی $\hat{G}_۲$ با مقاومت $R_۲$ برابر است. توجه کنید که به‌جز نام متغیرها، معادلات (۴-۶) همانند معادلات (۴-۵) می‌باشند.

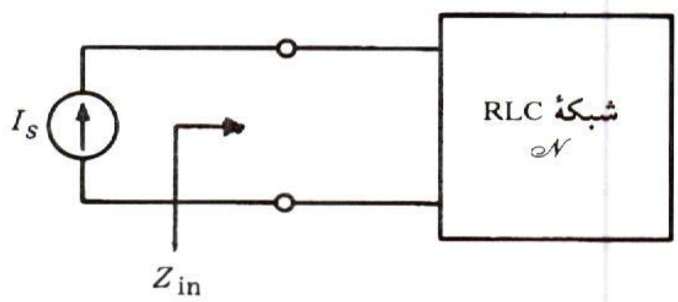
خواص عمومی شبکه‌های دوگان اهمیت دوگانی را بیش از این نمی‌توان تأکید نمود. قدرت دوگانی به وسیلهٔ قضیهٔ کلی زیر نمایان می‌شود: شبکهٔ مسطح دلخواه $\mathcal{N}$ و دوگان آن $\hat{\mathcal{N}}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید S بیان درستی در مورد رفتار شبکهٔ $\mathcal{N}$ باشد و فرض کنید $\hat{S}$ بیان به دست آمده از S با تعویض هر کلمه یا عبارت نظریه‌ای گراف (مانند گره، مش، حلقه و غیره) با دوگان مربوطه، و هر کمیت الکتریکی (مانند ولتـاژ، جـریان، امپدانس و غـیره) بـا دوگـان آن بـاشد. در ایـن صـورت $\hat{S}$ بـیان درسـتی در مـورد رفـتار شبکهٔ $\hat{\mathcal{N}}$ می‌باشد. یک جدول‌بندی از جفت واژه‌های دوگان در جدول (۱۰-۱) داده شده است. بعضی از این واژه‌ها در فصل‌های بعد تشریح خواهند شد.

تمرین ۱ شبکهٔ RLC خطی تغییرناپذیر با زمان $\mathcal{N}$ (بدون سلف‌های تزویج شده) را مطابق شکل (۴-۱۰) در نظر گرفته و فرض کنید که گراف آن مسطح و بی‌لولا است. همچنین فرض کنید که این شبکه با یک منبع جریان سینوسی تحریک شده و در حالت دایمی قرار دارد. شبکهٔ دوگـان $\hat{\mathcal{N}}$ را در نظر

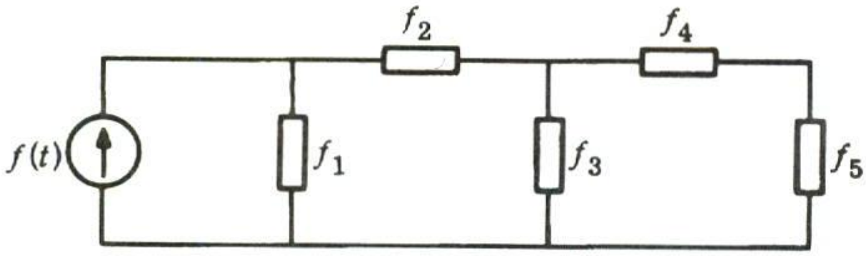
جدول ۱۰-۱ واژه‌های دوگان

نوع خواص	S	$\hat{S}$
خواص نظریه‌ای	گره	مش
گراف	کات‌ست	حلقه
	گره مبنا	مش بیرونی
	شاخه درخت*	لینک*
	کات‌ست اساسی*	حلقهٔ اساسی*
	شاخه‌های سری	شاخه‌های موازی
	ماتریس تلاقی مختصر شده	ماتریس مش*
	ماتریس کات‌ست اساسی*	ماتریس حلقه اساسی*
خواص نظریه‌ای	ولتاژهای گره نسبت به مبنا	جریانهای مش
و الکتریکی گراف	ولتاژهای شاخه درخت‌ها*	جریانهای لینک‌ها*
	KCL	KVL
خواص الکتریکی	ولتاژ	جریان
	بار	شار
	مقاومت	مقاومت
	سلف	خازن
	مقاومت الکتریکی	رسانایی
	اندوکتانس	ظرفیت
	منبع جریان	منبع ولتاژ
	مدار اتصال کوتاه	مدار باز
	ادمیتانس	امپدانس
	ماتریس ادمیتانس گره	ماتریس امپدانس مش*

* ستاره‌ها برای مشخص کردن واژه‌هایی که در این فصل و فصل بعدی با آنها مواجه خواهیم بود به کار رفته‌اند.



شکل ۱۰-۴ تمرین ۱ : تشریح دوگان امپدانس نقطهٔ تحریک.



شکل ۴-۱۱ یک شبکهٔ نردبانی $\mathcal{N}$.

بگیرید و نشان دهید که برای هر ω ، امپدانس نقطهٔ تحریک Z_{in} شبکهٔ $\mathcal{N}$ با ادمیتانس نقطهٔ تحریک Y_{in} شبکهٔ $\hat{\mathcal{N}}$ برابر است.

تمرین ۲ شبکهٔ نردبانی $\mathcal{N}$ نشان داده شده در شکل (۴-۱۱) را در نظر بگیرید. توابع $f_1(j\omega)$ ، $f_2(j\omega)$، ... ، $f_5(j\omega)$ امپدانس‌های عناصر متناظر از شبکهٔ $\mathcal{N}$ را مشخص می‌کنند. تابع f شکل موج منبع را مشخص می‌کند. نشان دهید که دوگان $\mathcal{N}$ را می‌توان چنین به دست آورد: (۱) منبع جریان $f(t)$ آمپر را با یک منبع ولتاژ $f(t)$ ولت تعویض می‌کنیم. (۲) هر عنصر افقی با امپدانس $f_i(j\omega)$ از $\mathcal{N}$ را با یک عنصر عمودی با ادمیتانس $f_i(j\omega)$ تعویض می‌کنیم. (۳) هر عنصر عمودی با امپدانس $f_i(j\omega)$ از $\mathcal{N}$ را با یک عنصر افقی با ادمیتانس $f_i(j\omega)$ تعویض می‌کنیم.

۵- دو مطلب اساسی تجزیه و تحلیل مش

شبکهٔ دلخواه $\mathcal{N}$ را که گراف آن متصل به هم، مسطح و بی‌لولا است، در نظر گرفته و فرض کنید این شبکه دارای n_t گره و b شاخه باشد؛ در نتیجه بدون به حساب آوردن مش بیرونی، $l = b - n_t + 1$ مش دارد. این مش‌ها را با شماره‌های ۱، ۲، ... ، l علامت گذارده و جهت‌های قراردادی عقربه‌های ساعت را به کار می‌بریم. این مش‌ها دوگان گره‌ها و مش بیرونی دوگان گره مبنا می‌باشد. برای توسعهٔ دو مطلب اساسی از تجزیه و تحلیل مش، از مفهوم دوگانی استفاده خواهیم کرد. مجدداً باید تأکید نمود که این دو مطلب، به ماهیت عناصر شبکه بستگی ندارند. بدین ترتیب، شبکه می‌تواند خطی یا غیرخطی، تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان باشد.

۵-۱ استنباطهای KVL

فرض کنید KVL را در مش‌های ۱، ۲، ... ، l اعمال کنیم (مش بیرونی را در نظر نمی‌گیریم). چنانکه در مثال زیر (شکل ۵-۱) دیده می‌شود، هر یک از عبارتهای حاصل، یک معادلهٔ جبری خطی همگن برحسب ولتاژهای شاخه‌ها است. بدین ترتیب، یک دستگاه l معادلهٔ جبری خطی همگن از b مجهول v_1 ، v_2 ، ... ، v_b به دست می‌آید. اولین مطلب اساسی از تجزیه و تحلیل مش را می‌توان چنین بیان نمود:

l معادلهٔ جبری خطی همگن برحسب v_1 ، v_2 ، ... ، v_b که از اعمال KVL به هر یک از مش‌ها حاصل

می‌شوند (به جز مش بیرونی) یک دسته از l معادلهٔ خطی نابسته را تشکیل می‌دهند.

اثبات این مطلب را می‌توان به طریق مشابهی مانند اثبات مطلب متناظر آن در مورد تجزیه و تحلیل گره بیان کرد. انجام مراحل متناظر این اثبات، به خواننده واگذار می‌شود. ولی اثبات این مطلب با استفاده از دوگانی بسیار راحت است. دوگان شبکهٔ $\mathscr{N}$ را با $\hat{\mathscr{N}}$ نشان داده و KCL را به تمام گره‌های $\hat{\mathscr{N}}$ به‌جز گره مبنا اعمال کنید. چنانچه اولین مطلب اساسی گفته شده در بالا غلط باشد، اولین مطلب اساسی مربوط به تجزیه و تحلیل گره نیز غلط خواهد بود. چون موضوع دوم جداگانه ثابت شده است، چنین نتیجه می‌شود که اولین مطلب اساسی از تجزیه و تحلیل مش صحیح می‌باشد.

می‌توان KVL را به طور تحلیلی با استفاده از ماتریس مش بیان نمود:

$$\mathbf{Mv} = ۰ \qquad \text{(KVL)} \qquad (۵-۱)$$

که در آن $\mathbf{M} = (m_{ij})$ یک ماتریس $l \times b$ است که به وسیلهٔ معادلهٔ (۵-۲) در زیر تعریف شده است. هنگامی که مؤلفهٔ iام ماتریس $\mathbf{Mv}$ را صفر می‌نویسیم، صرفاً بیان می‌داریم که مجموع ولتاژهای شاخه‌های قرارگرفته در مش iام برابر صفر است؛ زیرا این مؤلفهٔ iام به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{k=۱}^{b} m_{ik} v_k = ۰$$

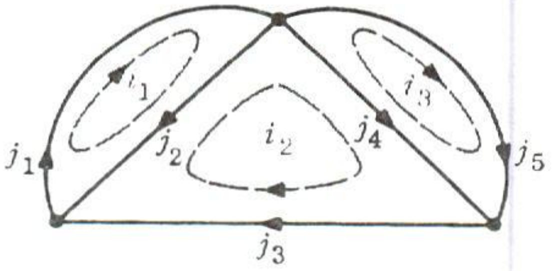
برای $i = ۱, ۲, \cdots, l$ و $k = ۱, ۲, \cdots, b$ باید داشته باشیم:

$$m_{ik} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آنها برهم منطبق باشند} \\ -۱ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آنها برهم منطبق نباشند} \\ ۰ & \text{اگر شاخه } k \text{ به مش } i \text{ متعلق نباشد} \end{cases} \qquad (۵-۲)$$

مطلب اساسی گفته شده در بالا لازم می‌دارد که ماتریس مش $\mathbf{M}$ دارای رتبهٔ l باشد.

توجه کنید که ماتریس مش $\mathbf{M}$ با حذف سطری از ماتریس $\mathbf{M}_a$ که متناظر با مش بیرونی است، به دست می‌آید.

مثال ۱ گراف جهت‌دار شکل (۵-۱) را که در واقع دوگان گراف شکل (۲-۳) است، در نظر بگیرید. در این گراف، سه گره و پنج شاخه وجود دارد و در نتیجه $l = ۵ - ۳ + ۱ = ۳$ می‌باشد. سه مش موجود در



شکل ۵-۱ گراف جهت‌داری که دوگان گراف شکل (۲-۳) می‌باشد.

این گراف، مطابق شکل علامت‌گذاری شده‌اند. بردار ولتاژ شاخه چنین است:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

ماتریس مش به دست آمده از معادلهٔ (۵-۲) به صورت زیر است:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{cl} & \text{مش} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \text{شاخه} \end{array} & \end{array}$$

بنابراین معادلهٔ مش به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{Mv} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و یا:

$$v_1 + v_2 = 0$$
$$-v_2 + v_3 + v_4 = 0$$
$$-v_4 + v_5 = 0$$

روشن است که معادلات فوق، سه معادلهٔ مش به دست آمده از اعمال KVL در مش‌های ۱، ۲ و ۳ می‌باشند. واضح است که این سه معادله به طور خطی نابسته‌اند، زیرا هر معادله دارای متغیری است که در دو معادلهٔ دیگر وجود ندارد.

تمرین فرض کنید $\mathbf{M}$ ماتریس مش یک گراف جهت‌دار $\mathcal{G}$ و $\hat{\mathbf{A}}$ ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ گراف دوگان $\hat{\mathcal{G}}$ باشد. نشان دهید که $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}$. تحقیق کنید که دوگان تعریف (۲-۳) برای a_{ik} ، تعریف (۵-۲) برای m_{ik} را به دست می‌دهد.

۵-۲ استنباطهای KCL

فرض کنید جریانهای مش‌ها را i_1 ، i_2 ، ... ، i_l نامیده، برای راحتی، به هر یک از این مش‌ها جهت قراردادی عقربه‌های ساعت را اختصاص می‌دهیم. ابتدا توجه کنید تا آنجا که KCL مطرح است، جریانهای مش‌های i_1 ، i_2 ، ... ، i_l به طور خطی نابسته‌اند. زیرا جریان هر مش از تمام شاخه‌های یک حلقه می‌گذرد و اگر جریان مش i_k کات‌ست انتخاب شدهٔ دلخواهی را در جهت مثبتی قطع کند، جریان فوق، همان کات‌ست را در جهت منفی نیز قطع خواهد کرد و بدین ترتیب، از معادلهٔ KCL نوشته شده برای آن کات‌ست، حذف می‌گردد. به عبارت دیگر، چنانچه ما KCL را برای هر کات‌ست بنویسیم و جریانهای شاخه‌ها را برحسب جریانهای مش‌ها بیان کنیم، تمام جملات حذف می‌شوند. بدین ترتیب KCL چیزی در مورد جریانهای مش‌ها بیان نمی‌کند و این موجب می‌گردد که جریانهای فوق، تا آنجا که KCL مطرح باشد، به طور خطی نابسته باشند.

گام بعدی نشان دادن این مطلب است که می‌توان جریانهای شاخه‌ها را برحسب جریانهای مش‌ها به کمک معادلهٔ زیر حساب کرد:

$$\mathbf{j} = \mathbf{M}^T\mathbf{i} \qquad \text{(KCL)} \qquad (۵-۳)$$

که در آنجا $\mathbf{M}^T$ ترانهادهٔ ماتریس مش $\mathbf{M}$ می‌باشد. معادلهٔ (۵-۳) بدین معنی است که جریان هر شاخه را می‌توان به صورت ترکیب خطی جریانهای مش‌ها بیان کرد و ماتریسی که این ترکیب خطی را مشخص می‌کند، ترانهادهٔ ماتریس مش است که قبلاً تعریف شده است. از خواننده خواسته می‌شود که مفهوم دوگانی را به اثبات رابطهٔ $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$ اعمال کند و درستی معادلهٔ (۵-۳) را بررسی نماید.

مثال ۲ شبکه‌ای را که گراف آن در شکل (۵-۱) نشان داده شده است در نظر بگیرید. واضح است که جریانهای شاخه‌ها و جریانهای مش‌ها را می‌توان به صورت زیر به هم ارتباط داد:

$$j_1 = i_1$$
$$j_2 = i_1 - i_2$$
$$j_3 = i_2$$
$$j_4 = i_2 - i_3$$
$$j_5 = i_3$$

یا:

$$\mathbf{j} = \mathbf{M}^T\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

تمرین ۱ برای گراف شکل (۴-۷ الف)، قوانین کیرشف را به صورت معادلات (۵-۱) و (۵-۳) بیان کنید.

تمرین ۲ فرض کنید گراف شبکه‌ای از یک مربع بزرگ که به ۲۵ مربع کوچک تقسیم شده باشد تشکیل گردد (پنج مربع روی هر پهلو). همچنین فرض کنید که تعداد زیادی آمپرمترهای با امپدانس صفر موجود است. برای سنجش جریان تمام مش‌ها، حداقل چند آمپرمتر لازم است؟ این آمپرمترها را کجا قرار خواهید داد؟

تمرین ۳ با استفاده از تعریف (۵-۲) برای m_{ik} ، معادلهٔ (۵-۳) را ثابت کنید.

خلاصه معادلهٔ (۵-۱):

$$\mathbf{Mv} = 0 \qquad \text{(KVL)}$$

و معادلهٔ (۵-۳):

$$\mathbf{j} = \mathbf{M}^T\mathbf{i} \qquad \text{(KCL)}$$

به ترتیب دو معادلهٔ اساسی تجزیه و تحلیل مش هستند. از آنجایی که این دو معادله، با استفاده از گراف شبکه (مسطح، متصل به هم و بی‌لولا) و دو قانون کیرشف به دست آمده‌اند، آنها به ماهیت اجزای شبکه بستگی ندارند. معادلهٔ (۵-۱)، KVL را بیان کرده و از یک دسته از l معادلهٔ خطی نابسته از b ولتاژ شاخهٔ v_1 ، v_2 ، ... ، v_b تشکیل می‌گردد. معادلهٔ (۵-۳)، KCL را بیان کرده و b جریان شاخهٔ j_1 ، j_2 ، ... ، j_b را به l جریان مش i_1 ، i_2 ، ... ، i_l ارتباط می‌دهد. برای اینکه l متغیر شبکهٔ i_1 ، i_2 ، ... ، i_l را به دست آوریم، لازم است که توصیف شاخه‌های شبکه را بدانیم، یعنی b معادلهٔ شاخه که ولتاژهای شاخه‌ها را به جریانهای شاخه‌ها ارتباط می‌دهند، داشته باشیم. تنها در این معادلات شاخه‌ها است که ماهیت اجزای شبکه وارد تجزیه و تحلیل می‌شوند. در بخش بعد منحصراً شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان را بررسی خواهیم کرد. شبکه‌های غیرخطی و تغییرپذیر با زمان بعداً در نظر گرفته خواهند شد.

۶- تجزیه و تحلیل مش در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

تجزیه و تحلیل مش در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، اجرای یک سری مراحل منظم را لازم دارد که دوگان مراحل به کار رفته در تجزیه و تحلیل گره، برای شبکهٔ دوگان $\hat{\mathcal{N}}$ می‌باشد. این امر موجب می‌شود که مطالب فوق را به‌اختصار بحث کنیم.

۶-۱ تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی

چون تجزیه و تحلیل شبکه‌های مقاومتی حالت خاصی از تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی است، از این جهت ما تنها قسمت اخیر را بحث خواهیم کرد.

فرض کنید $\mathcal{N}$ ، یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان با b شاخه و n_t گره بوده و گراف $\mathcal{G}$ آن

مسطح، متصل به هم و بی‌لولا باشد. فرض کنید منابع سینوسی بوده و همگی دارای فرکانس یکسان ω باشند. بردارهای bـ مؤلفه‌ای را که مولفهٔ kام آنها فازورهای نشان دهندهٔ منابع سینوسی در شاخهٔ kام می‌باشند $\mathbf{J}_s$ و $\mathbf{V}_s$ بنامید. به طریق مشابه $\mathbf{V}$ و $\mathbf{J}$ بردارهای bـ مؤلفه‌ای هستند که مؤلفهٔ kام آنها فازورهای نشان دهندهٔ ولتاژ شاخهٔ v_k و جریان شاخهٔ j_k می‌باشند. بردار lـ مؤلفه‌ای را که مؤلفه‌های آن فازورهای نشان‌دهندهٔ جریانهای مش i_1 ، i_2 ، ... ، i_l می‌باشند $\mathbf{I}$ بنامید. از قوانین کیرشف نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{MV} = 0 \qquad \text{(KVL)} \tag{۶-۱}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^T\mathbf{I} \qquad \text{(KCL)} \tag{۶-۲}$$

معادلات شاخه‌ها چنین هستند:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_b(j\omega)\mathbf{J} - \mathbf{Z}_b(j\omega)\mathbf{J}_s + \mathbf{V}_s \tag{۶-۳}$$

ماتریس $b \times b$ ، $\mathbf{Z}_b(j\omega)$ **ماتریس امپدانس شاخه** خوانده می‌شود. از جایگزینی عبارتهای فوق، به دست می‌آید:

$$(\mathbf{MZ}_b(j\omega)\mathbf{M}^T)\mathbf{I} = \mathbf{MZ}_b(j\omega)\mathbf{J}_s - \mathbf{MV}_s$$

یا:

$$\boxed{\mathbf{Z}_m(j\omega)\mathbf{I} = \mathbf{E}_s} \tag{۶-۴}$$

که در آنجا ماتریس $l \times l$ ، $\mathbf{Z}_m(j\omega)$ **ماتریس امپدانس مش** خوانده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{Z}_m(j\omega) = \mathbf{MZ}_b(j\omega)\mathbf{M}^T \tag{۶-۵}$$

و $\mathbf{E}_s$ **بردار منبع ولتاژ مش**، یک بردار lـ مؤلفه‌ای است که چنین بیان می‌شود:

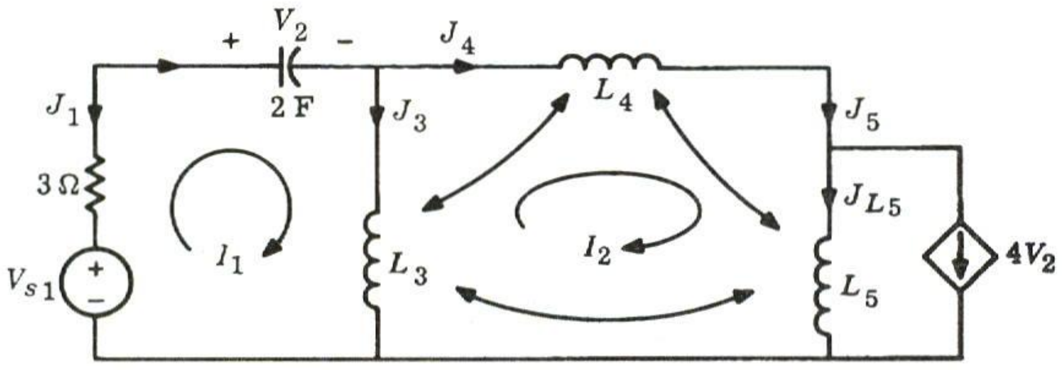
$$\mathbf{E}_s = \mathbf{MZ}_b(j\omega)\mathbf{J}_s - \mathbf{MV}_s \tag{۶-۶}$$

معادلات (۶-۴) **معادلات مش** شبکهٔ $\mathcal{N}$ خوانده می‌شوند. آنها یک دستگاه l معادلهٔ جبری خطی (با ضرایب مختلط) برحسب l مجهول فازورهای نشان دهندهٔ جریانهای مش‌های I_1 ، I_2 ، ... ، I_l را تشکیل می‌دهند. حل معادلات (۶-۴) جریان تمام مش‌ها را مشخص می‌کند. پس از آن، جریانهای شاخه‌ها توسط معادلهٔ (۶-۲) و ولتاژهای شاخه‌ها توسط معادلهٔ (۶-۳) به دست می‌آیند.

مثال ۱ شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان $\mathcal{N}$ ، نشان داده شده در شکل (۶-۱) را در نظر بگیرید. فازور V_{s1} نشان دهندهٔ ولتاژ سینوسی منبع بوده و $v_{s1}(t) = |V_{s1}| \cos(\omega t + \measuredangle V_{s1})$ می‌باشد. با یک نگاه می‌توان نوشت:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{۶-۷}$$

فرض کنید ماتریس اندوکتانس شاخه‌های ۳، ۴ و ۵ چنین باشد:



شکل ۶-۱ شبکه تجزیه و تحلیل شده در مثال ۱.

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \tag{۶-۸}$$

بدین ترتیب:

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3j\omega & j\omega & -j\omega \\ j\omega & 4j\omega & 2j\omega \\ -j\omega & 2j\omega & 5j\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_3 \\ J_4 \\ J_{L5} \end{bmatrix} \tag{۶-۹}$$

چنانچه توجه کنیم، جریان J_5 با رابطهٔ زیر به جریان داخل سلف J_{L5} مربوط می‌شود:

$$J_{L5}=J_5-4V_2=J_5-\frac{2}{j\omega}J_2 \tag{۶-۱۰}$$

معادلات شاخه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3j\omega & j\omega & -j\omega \\ 0 & -4 & j\omega & 4j\omega & 2j\omega \\ 0 & -10 & -j\omega & 2j\omega & 5j\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} V_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از معادلات (۶-۵) و (۶-۶)، معادلات مش زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} 5+3j\omega+\frac{1}{2j\omega} & -3j\omega \\ -16-3j\omega & 16j\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_{s1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

خواص ماتریس امپدانس مش ۱ـ چنانچه شبکهٔ $\mathcal{N}$ اجزای تزویج شده نداشته باشد، $\mathbf{Z}_b(j\omega)$ قطری بوده و $\mathbf{Z}_m(j\omega)$ متقارن است؛ یعنی، $\mathbf{Z}_m(j\omega)=\mathbf{Z}_m^{T}(j\omega)$ [این مطلب از (۶-۵) نتیجه می‌شود].

۲ـ مجدداً چنانچه شبکهٔ $\mathcal{N}$ اجزای تزویج شده نداشته باشد، ماتریس امپدانس مش $\mathbf{Z}_m(j\omega)$ را می‌توان به طور نظری چنین نوشت:

الف ـ عنصر قطری $\mathbf{Z}_m$ واقع در سطر و ستون iام را z_{ii} بنامید. z_{ii} مجموع امپدانس‌های تمام شاخه‌های واقع در مش i بوده و **سلف امپدانس مش** i نامیده می‌شود.

ب ـ عنصر (i, k)ام $\mathbf{Z}_m$ را z_{ik} بنامید. z_{ik} منفی مجموع امپدانس‌های تمام شاخه‌هایی است که میان مش‌های i و k مشترک می‌باشند[1] و **امپدانس متقابل میان مش** i و مش k نامیده می‌شود.

۳ـ چنانچه تمام منابع را با استفاده از مدار معادل تونن، به منابع ولتاژ تبدیل کنیم، در این صورت e_{sk} جمع جبری تمام منابع ولتاژ موجود در مش k می‌باشد. به آن منابع ولتاژی که جهت قراردادی آنها موجب برقراری جریانی موافق با جهت قراردادی مش kام می‌شود، علامت مثبت و به تمام منابع ولتاژ دیگر، علامت منفی می‌دهیم.

۴ـ در مورد شبکه‌های مقاومتی چنانچه تمام مقاومتها مثبت باشند در این صورت $\det(\mathbf{Z}_m) > 0$ است. بنابراین قاعدهٔ کرامر تضمین می‌کند که به‌ازای تمام مقادیری که منابع نابسته اختیار می‌کنند، معادلات مش (۶-۴) دارای جواب منحصر به فرد می‌باشند.

در حالتی که شبکهٔ $\mathcal{N}$ عناصر تزویج شده داشته باشد، تنها نتیجهٔ کلی این است که $\mathbf{Z}_b(j\omega)$ دیگر قطری نبوده و $\mathbf{Z}_m(j\omega)$ معمولاً دیگر متقارن نخواهد بود.

تمرین ۱ بیانهای (۲- الف) و (۲- ب) را ثابت کنید. (راهنمایی: (۶-۵) و (۵-۲) را به کار ببرید).

تمرین ۲ معادلات مش شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۶-۱) را به طور نظری بنویسید. فرض کنید تمام اندوکتانس‌های متقابل و منابع جریان وابسته مساوی صفر قرار داده شده‌اند.

تمرین ۳ شبکه‌ای با اجزای تزویج شده تعیین کنید که ماتریس امپدانس مش آن متقارن باشد. (راهنمایی: از تقارن استفاده کنید.)

۶-۲ معادلات انتگرال دیفرانسیل

اکنون روش عمومی نوشتن معادلات انتگرال دیفرانسیل مش را تشریح می‌کنیم. ما حالت ساده‌ای را انتخاب می‌کنیم تا بتوانیم دقت خود را برروی چگونگی کاربرد شرایط اولیه، متمرکز سازیم. لیکن روش عمل کاملاً عمومی است.

شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۶-۲) را در نظر بگیرید. مقادیر اجزای R_2 ، R_5 ، C_4 ، α و ماتریس اندوکتانس

---

[1] این حقیقت که z_{ik} منفی مجموع امپدانس‌های تمام شاخه‌هایی است که میان مش‌های i و k مشترک می‌باشند، نتیجهٔ این قرارداد است که جهت‌های قراردادی عقربه‌های ساعت به **تمام** جریانهای مش‌ها داده می‌شود.