۱۴
فرکانس‌های طبیعی

این فصل به مطالعهٔ فرکانس‌های طبیعی شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان اختصاص داده شده است. مفهوم فرکانس طبیعی در مورد مدارهای مرتبهٔ دوم در فصل ۵ معرفی شد. تعریف آن برحسب ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت که مدار مرتبهٔ دوم مورد نظر را توصیف می‌کرد، داده شده بود. در این فصل، یک تعریف کلی برای فرکانس‌های طبیعی که در مورد هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان معتبر است، داده خواهد شد. برای اینکه دقیق‌تر باشیم، لازم است میان دو مفهوم تمایز قائل شویم. یکی فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه که در بخش ۱ بحث خواهد شد و دیگری فرکانس‌های طبیعی یک شبکه که در بخش ۳ مورد بحث قرار خواهد گرفت. هر دوی اینها تحت شرایط ورودی صفر تعریف می‌شوند. این مفاهیم برای درک رفتار شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان اهمیت فراوانی دارند.

ابتدا، با تعریف فیزیکی فرکانس طبیعی یک متغیر شبکه، آغاز می‌کنیم. برای اینکه فرکانس‌های طبیعی یک متغیر خاص شبکه را محاسبه کنیم، لازم است "معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال" آن را به دست آوریم. بدین منظور روش حذفی را توسعه می‌دهیم. بالاخره فرکانس‌های طبیعی را به معادلات حالت ارتباط می‌دهیم.

۱- فرکانس طبیعی یک متغیر شبکه

شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان $\mathcal{N}$ را در نظر بگیرید. هر یک از شبکه‌های نشان داده شده در شکلهای (۱-۱) تا (۱-۵) را می‌توانید به عنوان مثال در نظر بگیرید. تمام منابع نابستهٔ این شبکه را برابر صفر قرار دهید، یعنی تمام منابع ولتاژ نابسته را به صورت مدار اتصال کوتاه و تمام منابع جریان نابسته را به صورت مدار باز درآورید. توجه خود را روی یکی از متغیرهای شبکهٔ $\mathcal{N}$ معطوف می‌داریم. این متغیر شبکه، ممکن است ولتاژ یک شاخه، ولتاژ یک گره، جریان یک شاخه و یا جریان یک حلقه باشد. برای اینکه اندیشهٔ خود را مقید نکنیم، آن را x می‌نامیم. با دانستن حالت اولیهٔ شبکهٔ $\mathcal{N}$ در $t = 0$، پاسخ ورودی صفر متناظر، شکل موج $x(\cdot)$ است که در حالت کلی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots \qquad \text{برای } t \geq 0 \qquad (۱-۱)$$

که در آن‌جا K_i ها و s_i ها مقادیر ثابت می‌باشند (احتمالاً مختلط). s_i ها به توپولوژی و مقادیر اجزای شبکه بستگی دارند. K_i ها علاوه بر این، به حالت اولیه نیز وابسته می‌باشند. به تدریج روشن خواهد شد

که عددهای s_i حائز اهمیت فراوانی هستند و بنابراین، سزاوار نامی می‌باشند. چنانچه برای حالت اولیهٔ معینی پاسخ ورودی صفر x جمله‌ای مانند $K_1 e^{s_1 t}$ را در برداشته باشد، در این صورت s_1 را **یک فرکانس طبیعی متغیر شبکهٔ** x خواهیم نامید. به عبارت دیگر، برای بعضی از حالت‌های اولیه، $K_1 e^{s_1 t}$ ، $K_1 \neq 0$ ، در عبارت مربوط به پاسخ ورودی صفر x ظاهر می‌شود.

اکنون این تعریف را به کمک مثالهایی روشن می‌کنیم.

مثال ۱ شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۱-۱) را در نظر گرفته و فرض کنید v متغیر شبکهٔ مورد توجه باشد. معادلهٔ دیفرانسیل برای v چنین است:

$$C\frac{dv}{dt} + Gv = 0 \qquad (۱-۲)$$

پاسخ ورودی صفر برای حالت اولیهٔ $v(0)$ به صورت:

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

می‌باشد. بنابراین، $-\frac{1}{RC}$ فرکانس طبیعی متغیر شبکهٔ v می‌باشد.

اگر متغیر شبکهٔ مورد نظر i بود، چون $i(t) = Gv(0)e^{-\frac{t}{RC}}$ است، $-\frac{1}{RC}$ فرکانس طبیعی i نیز می‌شد.

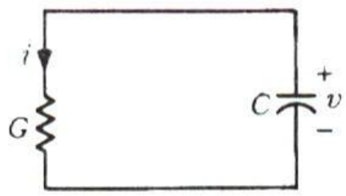
مثال ۲ مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۱-۲) را در نظر بگیرید. در این‌جا $C = 1\,F$ ، $R = \frac{1}{6}\,\Omega$ و $L = \frac{1}{25}\,H$ است. از معادلهٔ دیفرانسیل:

$$C\dot{v}_C + Gv_C + \frac{1}{L}\int_0^t v_C(t')\,dt' + j_L(0^-) = 0 \qquad (۱-۳)$$

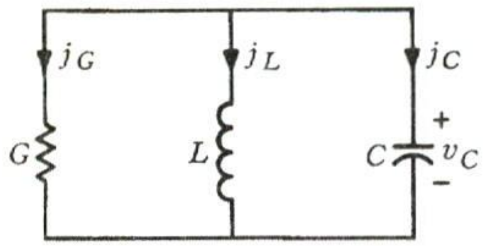
و تبدیل لاپلاس آن:

$$\left(Cs + G + \frac{1}{Ls}\right)V_C(s) = Cv_C(0^-) - \frac{1}{s}j_L(0^-)$$

چنین به دست می‌آوریم:



شکل ۱-۱ $-\frac{1}{RC}$ فرکانس طبیعی متغیر شبکهٔ v می‌باشد.



شکل ۱-۲ شبکهٔ RLC به کار رفته در محاسبهٔ فرکانس‌های طبیعی.

$$V_C(s) = \frac{sCv_C(0^-) - j_L(0^-)}{Cs^2 + Gs + \frac{1}{L}}$$

$$= \frac{sv_C(0^-) - j_L(0^-)}{(s+3)^2 + 4^2} \qquad (4-1)$$

با استفاده از روش گسترش به صورت کسرهای جزئی، خواهیم داشت:

$$v_C(t) = \frac{(-3+j4)v_C(0^-) - j_L(0^-)}{j8} e^{(-3+j4)t} + \frac{(-3-j4)v_C(0^-) - j_L(0^-)}{-j8} e^{(-3-j4)t}$$

بدین ترتیب، $-3+j4$ و $-3-j4$ فرکانس‌های طبیعی v_C هستند. می‌توان به راحتی تحقیق کرد که j_L ، v_L ، j_G ، v_G ، j_C و v_C فرکانس‌های طبیعی یکسان دارند.

مثال ۳ مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۱-۲) را مجدداً در نظر بگیرید. دراینجا $C = 1\,F$ ، $R = \frac{1}{6}\,\Omega$ و $L = \frac{1}{9}H$ است. فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکهٔ v_C مجدداً از روی معادلهٔ (۱-۴) به دست آمده است. در این مورد داریم:

$$V_C(s) = \frac{sv_C(0^-) - j_L(0^-)}{(s+3)^2}$$

که دارای گسترش به صورت کسرهای جزئی زیر می‌باشد:

$$V_C(s) = \frac{-3sv_C(0^-) - j_L(0^-)}{(s+3)^2} + \frac{v_C(0^-)}{s+3}$$

تبدیل معکوس لاپلاس چنین است:

$$v_C(t) = [-3v_C(0^-) - j_L(0^-)]te^{-3t} + v_C(0^-)e^{-3t}$$

بدین ترتیب، فرکانس طبیعی v_C برابر -3 می‌باشد. با توجه به وجود جمله‌ای متناسب با te^{-3t} ، گوییم -3 فرکانس طبیعی v_C از مرتبهٔ ۲ می‌باشد.

ممکن است مثال ۳ چنین نشان دهد که تعریف فوق برای فرکانس طبیعی، ناقص است. البته چنین نیست. در واقع، چنانچه مرتبهٔ فرکانس طبیعی s_i بالاتر از ۱ باشد، (مثلاً ۳ به منظور بحث در

اینجا) در این صورت (۱-۱) چنین نوشته می‌شود:

$$x(t) = K_{11}e^{s_1 t} + K_{12}te^{s_1 t} + K_{13}t^2 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots$$

اکنون به این حقیقت توجه کنید که اگر حالت اولیهٔ معینی وجود داشته باشد که به ازای آن K_{12} یا K_{13} بتوانند متفاوت با صفر گردند، در این صورت شرایط اولیهٔ خاصی نیز وجود خواهد داشت که به ازای آن K_{11} مخالف صفر باشد. بنابراین در تمام موارد تنها لازم است که عامل مربوط به نمایی خالص، یعنی $e^{s_1 t}$ در نظر گرفته شود.

در بخش بعد، نشان خواهیم داد که می‌توان برای متغیر x ، یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن به صورت زیر به دست آورد:

$$Q(D)x = 0 \qquad (۵-۱)$$

معادلهٔ دیفرانسیل فوق دارای این خاصیت است که هر پاسخ ورودی صفر x شبکهٔ $\mathscr{N}$ ، معادلهٔ دیفرانسیل (۱-۵) را برمی‌آورد و هر جواب معادلهٔ (۱-۵)، پاسخ ورودی صفر x متناظر با حالت اولیهٔ معینی از $\mathscr{N}$ می‌باشد. از آنجایی که هیچ معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ کوچکتری نمی‌تواند خاصیت فوق را داشته باشد، لذا این معادله را **معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال** متغیر شبکهٔ x نامند. فرض کنید که این معادلهٔ دیفرانسیل، داده شده بود. در این صورت از معلوماتی که دربارهٔ معادلات دیفرانسیل می‌دانیم، نتیجه می‌گیریم که s_1 یک فرکانس طبیعی x است اگر و تنها اگر s_1 یکی از صفرهای چند جمله‌ای $Q(s)$ باشد [یعنی اگر و تنها اگر $Q(s_1)$ مساوی صفر باشد]. چنانچه s_1 یک صفر مرتبهٔ mام چند جمله‌ای $Q(s)$ باشد، در این صورت s_1 را یک **فرکانس طبیعی از مرتبهٔ** m متغیر شبکهٔ x نامند.

مثال ٤   فرض کنید متغیر شبکهٔ مورد توجه، ولتاژ شاخهٔ v بوده و معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال آن چنین باشد:

$$(D^5 + 2D^4 + 2D^3 + 2D^2 + D)v = 0$$

یا:

$$(D^2 + 1)(D + 1)^2 Dv = 0$$

در نتیجه پاسخ ورودی صفر v به صورت زیر می‌باشد:

$$v(t) = K_1 e^{jt} + K_2 e^{-jt} + (K_3 + K_4 t)e^{-t} + K_5$$

فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکهٔ v عبارتند از $s_1 = j1$ ، $s_2 = -j1$ و $s_3 = s_4 = -1$ (s_3 فرکانس طبیعی از مرتبهٔ ۲ است) و $s_5 = 0$.

تبصرهٔ ۱   چنانچه مانند بالا $s_i = 0$ گردد، پاسخ ورودی صفر ممکن است دارای جملهٔ ثابتی باشد. از لحاظ فیزیکی، روشن است که این وضع ممکن است در دو مورد پیش بیاید:

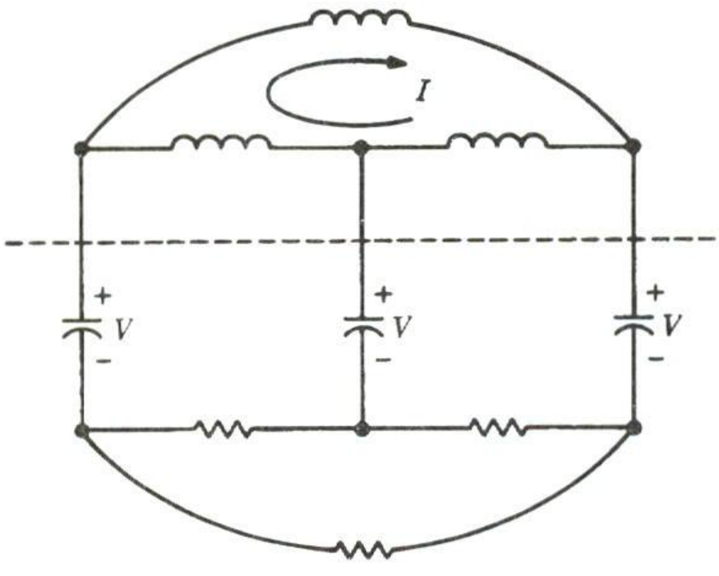
الف ـ متغیر شبکهٔ مورد نظر، جریان یک سلف می‌باشد و این سلف، در حلقه‌ای که تنها از سلف‌ها

ساخته شده است، قرار دارد. به علت اینکه تمام این سلف‌ها ایده‌آل هستند، ممکن است جریان ثابت I در این حلقه جاری شود و در نتیجه در دو سر هیچ یک از این سلف‌ها ولتاژی ظاهر نخواهد شد، زیرا $L\frac{dI}{dt} = 0$ است. به عنوان مثال، شکل (۱-۳) را ببینید.

ب - متغیر شبکهٔ مورد نظر، ولتاژ یک خازن می‌باشد و این خازن در کات‌ستی که تنها از خازن‌ها ساخته شده است، قرار دارد. به علت اینکه تمام این خازن‌ها ایده‌آل هستند، ممکن است ولتاژ ثابت V در دو سر هر یک از خازن‌های این کات‌ست وجود داشته باشد و در نتیجه هیچ جریانی از داخل آنها عبور نخواهد کرد، زیرا $C\frac{dV}{dt} = 0$ است. در شکل (۱-۳)، مثالی از این حالت دوم نیز دیده می‌شود.

تبصرهٔ ۲ چنانچه فرکانس‌های طبیعی از مرتبهٔ m را مانند m فرکانس طبیعی به حساب بیاوریم، تعداد فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه با مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال آن، برابر می‌باشد (یا به عبارت معادل، با درجهٔ چند جمله‌ای مشخصهٔ متناظر آن مساوی است). از لحاظ فیزیکی، تعداد فرکانس‌های طبیعی یک متغیرشبکه با حداقل تعداد شرایط اولیهٔ لازم برای یکتا مشخص کردن پاسخ آن متغیر شبکه، برابر می‌باشد.

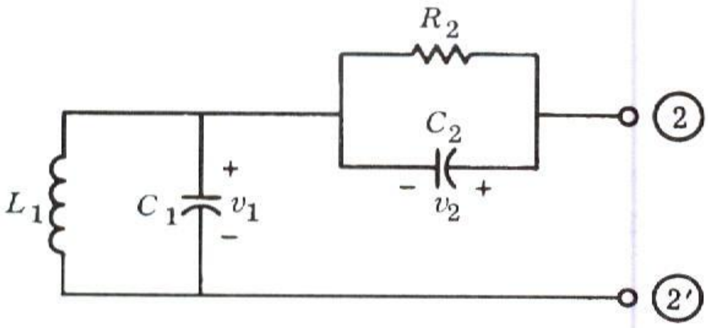
فرکانس طبیعی متغیر شبکهٔ v در مثال ۱ را از معادلهٔ (۱-۲)، برابر با $-\frac{1}{RC}$ به دست آوردیم و ملاحظه کردیم که فرکانس طبیعی جریان i نیز همین مقدار می‌باشد، زیرا $i = Gv$ است. بنابراین، معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال برای جریان i دارای همان چند جمله‌ای مشخصهٔ $Q(s) = s + \frac{1}{RC}$ می‌باشد. همچنین در مثال ۲ نیز توجه کردیم که فرکانس‌های طبیعی ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها یکسان است. اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا این یک حقیقت کلی است که در یک شبکهٔ داده شده، هر متغیر شبکه



شکل ۱-۳ مثالی که جریان گردشی dc در حلقه‌ای از سلف‌ها و یا ولتاژ dc در دو سر یک کات‌ست خازنی را تشریح می‌کند.

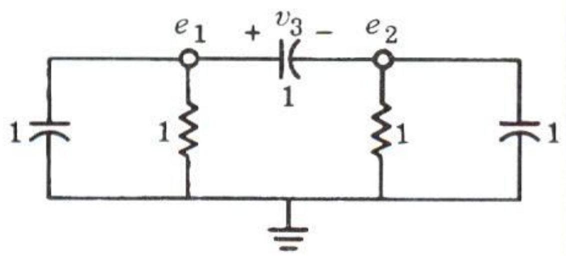
دارای دستهٔ یکسانی از فرکانس‌های طبیعی می‌باشد؟ جواب این سؤال منفی است. برای ملاحظهٔ این مطلب، مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۵ منظور از این مثال، نشان دادن این مطلب است که دو متغیر شبکه لزومی ندارند دستهٔ یکسانی از فرکانس‌های طبیعی را داشته باشند. شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۱-۴) را در نظر بگیرید. توجه کنید که سرهای ② و ②′ به صورت مدار بازگذارده شده‌اند. از مثالهای قبل نتیجه می‌شود که فرکانس‌های طبیعی v_1 برابر با $j\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ و $-j\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ بوده در حالی که فرکانس طبیعی v_2، برابر با $-\frac{1}{R_2C_2}$ می‌باشد. ضمن بیان این مطالب، ملاحظه می‌کنیم که چنانچه می‌خواستیم تجزیه و تحلیل گره انجام دهیم، به سادگی تحقیق می‌کردیم که $-\frac{1}{R_2C_2}$، $+j\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ و $-j\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ صفرهای دترمینان شبکه، یعنی صفرهای $\det[\mathbf{Y}_n(s)]$ می‌باشند. در بخش ۳ که با مفهوم فرکانس‌های طبیعی یک شبکه آشنا خواهیم شد، این مطلب خاص نیز مورد بحث قرار خواهد گرفت.



شکل ۱-٤ با فرض اینکه سرهای ② و ②′ به صورت مدار بازگذارده شوند، متغیرهای شبکهٔ v_1 و v_2 هیچ فرکانس طبیعی مشترکی ندارند.

تمرین شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۱-۵) را در نظر بگیرید. نشان دهید که فرکانس‌های طبیعی متغیرهای e_1 و e_2 برابر -۱ و $-\frac{۱}{۳}$ بوده، در حالی که فرکانس طبیعی v_3، تنها برابر $-\frac{۱}{۳}$ می‌باشد.



شکل ۱-۵ متغیرهای شبکهٔ e_1 و e_2 دارای فرکانس طبیعی -۱ می‌باشند، در حالی که v_3 این فرکانس طبیعی را ندارد.

۲- روش حذف

در این بخش، روش منظمی را توسعه می‌دهیم که به کمک آن هنگامی که از یک معادلهٔ انتگرال دیفرانسیل توصیف کنندهٔ شبکه‌ای شروع می‌کنیم، معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال متغیر مشخص شده‌ای را به دست می‌آوریم.

۲-۱ ملاحظات کلی

تجزیه و تحلیل شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، به معادلات دیفرانسیل یا انتگرال دیفرانسیل خطی همزمان منجر می‌گردد. بی‌آنکه کلیت مطلب از دست داده شود، می‌توان فرض نمود که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی را باید حل کرد، زیرا چنانچه فرض کنید تجزیه و تحلیل مش (یا حلقه) را به کار ببریم، در این صورت هر موقع که با انتگرالی مانند $\frac{1}{C}D^{-1}i(t)$ مواجه می‌شویم که در آنجا C ظرفیت، i جریان مش (یا حلقه)، $D=\frac{d}{dt}$ و $D^{-1}(\cdot)=\int_0^t(\cdot)dt$ می‌باشد، می‌توان بار خازن را به عنوان متغیر در نظر گرفت:

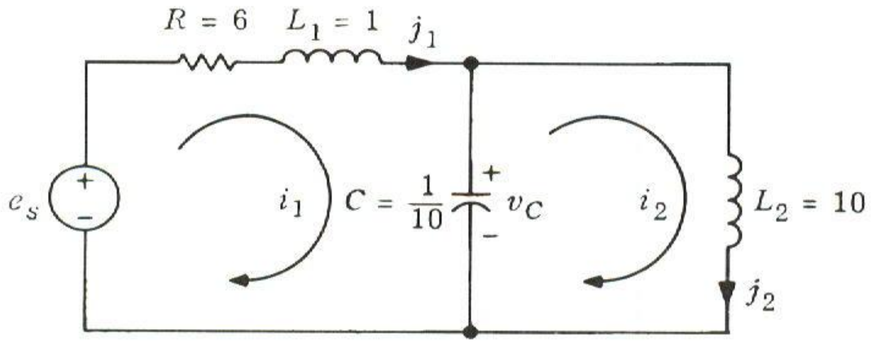
$$q(t)\triangleq\int_0^t i(t')\,dt'$$

و جملهٔ $\frac{1}{C}D^{-1}i(t)$ به صورت $\frac{1}{C}q(t)$ درمی‌آید. به طریق مشابه، در تجزیه و تحلیل گره (یا کات‌ست) می‌توان شار را به عنوان متغیر در نظر گرفت:

$$\phi(t)\triangleq\int_0^t v(t')\,dt'$$

که در آنجا v ولتاژ گره نسبت به مبنا (یا ولتاژ شاخه درخت) می‌باشد. بدین ترتیب، ما در تجزیه و تحلیل مش (یا حلقه) با متغیرهای جریان و/ یا بار و در تجزیه و تحلیل گره (یا کات‌ست) با متغیرهای ولتاژ و/ یا شار سروکار داریم. برای مرور نوشتن معادلات شبکه، ابتدا مثال ساده‌ای را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱ یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان که دارای دو مش است در شکل (۲-۱) دیده می‌شود.



شکل ۲-۱ شبکهٔ مثال ۱ با مقادیر اجزای آن برحسب اهم، فاراد و هانری.

حالت اولیهٔ این مدار به وسیلهٔ جریانهای اولیهٔ سلف‌ها یعنی $j_1(0)$ و $j_2(0)$، و ولتاژ اولیهٔ دوسر خازن یعنی $v_C(0)$، مشخص می‌گردد. فرض کنید جریان‌های مش i_1 و i_2 را به عنوان متغیر شبکه به کار ببریم. معادلات مش‌ها چنین هستند:

$$(D + 6 + 10D^{-1})i_1 - 10D^{-1}i_2 = e_s - v_C(0) \qquad \text{(۲-۱ الف)}$$

$$-10D^{-1}i_1 + (10D + 10D^{-1})i_2 = v_C(0) \qquad \text{(۲-۱ ب)}$$

توجه کنید که ولتاژ اولیهٔ دو سر خازن قبلاً در معادلات منظور شده است. بدین ترتیب یک دستگاه دو معادله‌ای انتگرال دیفرانسیل خطی همزمان با ضرایب ثابت برحسب متغیرهای i_1 و i_2 خواهیم داشت. این معادلات به صورت ماتریسی چنین نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_m(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v_C(0) \\ v_C(0) \end{bmatrix} \qquad \text{(۲-۲)}$$

که در آنجا $\mathbf{Z}_m(D)$ اپراتور ماتریس امپدانس مش می‌باشد. از طرف دیگر، چنانچه بارهای مش q_1 و q_2 را به عنوان متغیرهای شبکه انتخاب کنیم، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$q_1(t) \triangleq \int_0^t i_1(t')dt' \qquad q_2(t) \triangleq \int_0^t i_2(t')dt' \qquad \text{(۲-۳)}$$

بنابراین، یک دستگاه دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی همزمان از متغیرهای q_1 و q_2 به دست می‌آوریم:

$$(D^2 + 6D + 10)q_1 - 10q_2 = e_s - v_C(0) \qquad \text{(۲-۴ الف)}$$

$$-10q_1 + (10D^2 + 10)q_2 = v_C(0) \qquad \text{(۲-۴ ب)}$$

این معادلات، یک دستگاه دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی معمولی برحسب توابع مجهول q_1 و q_2 می‌باشند. معادلات فوق به صورت ماتریسی چنین نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} D\,\mathbf{Z}_m(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v_C(0) \\ v_C(0) \end{bmatrix} \qquad \text{(۲-۵)}$$

اختلاف میان معادلات (۲-۲) و (۲-۵) آشکار است. معادلهٔ (۲-۲) یک دستگاه معادلات انتگرال دیفرانسیل را برحسب جریانهای مش‌ها نمایش می‌دهد، در حالی که معادلهٔ (۲-۵) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل برحسب بارهای مش‌ها می‌باشد.

از آنجایی که تغییر متغیرها از جریانها به بارها و از ولتاژها به شارها به سادگی انجام می‌گیرد، از این به بعد فرض می‌کنیم که به جای معادلات انتگرال دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل را باید حل کرد. بدون اینکه تعصبی در مورد تجزیه و تحلیل حلقه (یا مش) یا کات‌ست (یا گره) داشته باشیم، n متغیر شبکه را با x_1، x_2، ...، x_n نشان می‌دهیم. دستگاه n معادلهٔ دیفرانسیل خطی همزمان که از تجزیه و تحلیل انجام گرفته به دست می‌آید، به صورت زیر خواهد بود:

$$p_{11}(D)x_1 + p_{12}(D)x_2 + \cdots + p_{1n}(D)x_n = f_1$$
$$p_{21}(D)x_1 + p_{22}(D)x_2 + \cdots + p_{2n}(D)x_n = f_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (۲-۶)$$
$$p_{n1}(D)x_1 + p_{n2}(D)x_2 + \cdots + p_{nn}(D)x_n = f_n$$

که در آنجا $D = \frac{d}{dt}$ و $p_{ij}(D)$ها چند جمله‌ای‌هایی از D که حداکثر از درجهٔ دوم هستند، می‌باشند. توابع f_1، f_2، ⋯ ، f_n که در سمت راست ظاهر می‌شوند، توابع تحریکی هستند که اثر منابع نابسته و بعضی از شرایط اولیه را نشان می‌دهند. راحت‌تر است که دستگاه معادلات فوق را (فرض کنید آن را دستگاه معادلات ۱ بنامیم) به صورت ماتریسی زیر نشان دهیم:

$$\mathbf{P}(D)\mathbf{x} = \mathbf{f} \qquad (۲-۷ \text{ الف})$$

یا:

$$\begin{bmatrix} p_{11}(D) & p_{12}(D) & \cdots & p_{1n}(D) \\ p_{21}(D) & p_{22}(D) & \cdots & p_{2n}(D) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}(D) & p_{n2}(D) & \cdots & p_{nn}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \qquad (۲-۷ \text{ ب})$$

که در آنجا $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ یک بردار ستونی است که مؤلفه‌های آن، شکل موجهای مجهول می‌باشند. ماتریس $\mathbf{P}(D)$ که عناصر آن چند جمله‌ای‌هایی برحسب D اند، **ماتریس دستگاه معادلات** و بردار $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$ **بردار تابع تحریک** می‌باشد. به منظور مراجعهٔ بعدی می‌نویسیم:

$$\Delta(D) = \det \mathbf{P}(D) \qquad (۲-۸)$$

Δ را **دترمینان دستگاه معادلات** می‌نامیم. توجه به این مطلب حائز اهمیت است که $\mathbf{P}(D)$ ، ماتریسی است که عناصر آن چند جمله‌ای‌هایی برحسب D بوده و در محاسبهٔ $\det[\mathbf{P}(D)]$ ، D مانند متغیر معمولی در نظر گرفته می‌شود.

تبصره تذکر این مطلب حائز اهمیت می‌باشد که در مورد تجزیه و تحلیل مش، ماتریس $\mathbf{P}(D)$ به اپراتور ماتریس امپدانس مش، یعنی $\mathbf{Z}_m(D)$ ، به طور ساده‌ای مربوط می‌شود. اگر در تجزیه و تحلیل مش مانند مثال ۱ به جای جریانها، بارها را به کار ببریم؛ در این صورت $\mathbf{P}(D) = D\mathbf{Z}_m(D)$ خواهد بود.

اکنون دترمینان دستگاه معادلات یعنی $\Delta(s) \triangleq \det[\mathbf{P}(s)]$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که ریشه‌های غیرصفر $\Delta(s) = 0$ همانند ریشه‌های غیرصفر دترمینان شبکه، یعنی $\Delta_m(s) \triangleq \det[\mathbf{Z}_m(s)]$ می‌باشند. به طریق مشابه، چنانچه تجزیه و تحلیل گره را به کار برده و شارها را به جای ولتاژها به عنوان متغیرها انتخاب کنیم، در این صورت $\mathbf{P}(D) = D\mathbf{Y}_n(D)$ خواهد بود. واضح است که ریشه‌های غیرصفر $\Delta(s) \triangleq \det[\mathbf{P}(s)]$ همانند ریشه‌های غیرصفر دترمینان شبکه، یعنی $\Delta_n(s) \triangleq \det[\mathbf{Y}_n(s)]$ می‌باشند.
در واقع، می‌توان ثابت کرد که در مورد هر شبکهٔ داده شده، چنانچه روشهای مختلف تجزیه و تحلیل شبکه به کار برده شوند، دترمینانهای شبکهٔ متناظر، دسته ریشه‌های غیرصفر یکسانی خواهند داشت،

یعنی ریشه‌های غیرصفر $\Delta_m(s)$ ، $\Delta_n(s)$ ، $\Delta_l(s) \triangleq \det [\mathbf{Z}_l(s)]$ (ماتریس امپدانس حلقه) و $\Delta_q(s) \triangleq \det [\mathbf{Y}_q(s)]$ (ماتریس ادمیتانس کات‌ست) همگی یکسان بوده و با ریشه‌های غیرصفر $\Delta(s)$ ، دترمینان دستگاه معادلات دیفرانسیل $\mathbf{P}(D)\mathbf{x} = \mathbf{f}$ برابر می‌باشند.

۲-۲ دستگاه‌های معادل

می‌خواهیم به منظور به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال مربوط به متغیر شبکهٔ خاصی مانند x_n ، عملیاتی روی دستگاه معادلات (۲-۶) یا (۲-۷ الف) انجام دهیم. در انجام این کار می‌خواهیم مطمئن شویم که جوابهای خارجی وارد معادله نمی‌شوند. به عبارت دیگر، اگر با دستگاه معادلات ۱ از (۲-۷ الف) شروع کنیم، یعنی:

$$\mathbf{P}(D)\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

و به دستگاه معادلات ۲ برسیم:

$$\hat{\mathbf{P}}(D)\mathbf{x} = \hat{\mathbf{f}} \tag{۲-۹}$$

می‌خواهیم مطمئن شویم که این دو معادله، جوابهای یکسانی دارند. برای اینکه دقیق‌تر باشیم، مفهوم دستگاه‌های معادل را معرفی می‌کنیم: دستگاه معادلات دیفرانسیل ۱ را **معادل** دستگاه معادلات ۲ نامند چنانچه هر جواب دستگاه ۱ یک جواب دستگاه ۲ بوده و هر جواب دستگاه ۲ نیز یک جواب دستگاه ۱ باشد.

اکنون به نکته‌ای که بعدها مفید خواهد بود، توجه می‌کنیم. از این تعریف مستقیماً نتیجه می‌شود که اگر دستگاه ۱ معادل دستگاه ۲ و دستگاه ۲ معادل دستگاه ۳ باشد، در این صورت، دستگاه ۱ معادل دستگاه ۳ خواهد بود.

برای اینکه پیشرفت زیادتری حاصل گردد، پیشنهاد می‌کنیم که دستگاه ۱ از (۲-۷ الف) به یک دستگاه معادل به صورت زیر که آن را دستگاه T می‌نامیم، تبدیل شود:

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{11}(D)x_1 + \hat{p}_{12}(D)x_2 + \cdots\cdots\cdots + \hat{p}_{1n}(D)x_n &= \hat{f}_1 \\
\hat{p}_{22}(D)x_2 + \cdots\cdots\cdots + \hat{p}_{2n}(D)x_n &= \hat{f}_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\hat{p}_{n-1,n-1}(D)x_{n-1} + \hat{p}_{n-1,n}(D)x_n &= \hat{f}_{n-1} \\
\hat{p}_{nn}(D)x_n &= \hat{f}_n
\end{aligned} \tag{۲-۱۰}$$

در طرز نمایش ماتریسی خواهیم داشت:

$$\hat{\mathbf{P}}(D)\mathbf{x} = \hat{\mathbf{f}} \tag{۲-۱۱ الف}$$

یا:

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_{11}(D) & \hat{p}_{12}(D) & \cdots & \hat{p}_{1n}(D) \\ 0 & \hat{p}_{22}(D) & \cdots & \hat{p}_{2n}(D) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \hat{p}_{n-1,n-1}(D) & \hat{p}_{n-1,n}(D) \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{p}_{nn}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{bmatrix} \qquad \text{(۲-۱۱ ب)}$$

چنانکه قبلاً دیدیم، $\hat{\mathbf{P}}(D)$ (برحسب اپراتور D) ماتریس دستگاه جدید است. عنصر ijام آن یعنی، $\hat{p}_{ij}(D)$ ، چندجمله‌ای برحسب D است که درجهٔ آن می‌تواند از ۲ بیشتر باشد، حال آنکه $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \cdots, \hat{f}_n)^T$ بردار تابع تحریک دستگاه جدید است. مجدداً

$$\hat{\Delta}(D) = \det [\hat{\mathbf{P}}(D)] \qquad \text{(۲-۱۲)}$$

را به عنوان دترمینان (برحسب اپراتور D) دستگاه جدید تعریف می‌کنیم. برای راحتی، دستگاه اصلی را دستگاه ۱ و دستگاه جدید را دستگاه T خواهیم گفت (T به منظور نشان دادن خاصیت مثلثی ماتریس است). به دلایلی که واضح است، گویند دستگاه T به صورت مثلثی است. توجه کنید که در معادلهٔ آخر دستگاه T تمام متغیرها به‌جز x_n حذف شده‌اند. بنابراین معادلهٔ آخر دستگاه T ، نشان دهندهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل تنها از متغیر x_n است. این معادله، معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال متغیر x_n می‌باشد.

تبصرهٔ ۱ دستگاههای ۱ و T بالا معادل می‌باشند. بدین معنی که هر جواب دستگاه ۱ یک جواب دستگاه T بوده و هر جواب دستگاه T یک جواب دستگاه ۱ است. به خصوص مؤلفهٔ آخر هر جواب $\mathbf{x}$ از دستگاه ۱، یک جواب معادلهٔ $\hat{p}_{nn}(D)\, x_n = \hat{f}_n$ می‌باشد و برعکس هر جواب معادلهٔ آخر دستگاه T یعنی $\hat{p}_{nn}(D)\, x_n = \hat{f}_n$ مؤلفهٔ آخر یک جواب دستگاه ۱ می‌باشد و بدین ترتیب معادلهٔ:

$$\hat{p}_{nn}(D)\, x_n = \hat{f}_n \qquad \text{(۲-۱۳)}$$

معادلهٔ دیفرانسیل از کمترین مرتبه برحسب متغیر x_n است که به وسیلهٔ مؤلفهٔ nام تمام جوابهای دستگاه ۱ برآورده می‌شود. بدین دلیل این معادله، معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال متغیر شبکهٔ x_n می‌باشد.

تبصرهٔ ۲ توجه به این مطلب حائز اهمیت است که چندجمله‌ای $\hat{p}_{nn}(D)$ و تابع $\hat{f}_n$ که در معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال متغیر x_n ظاهر می‌شوند، به طور یکتایی تعیین می‌گردند (به‌جز احتمالاً یک ضریب ثابت غیرصفر). به عبارت دیگر، چندجمله‌ای $\hat{p}_{nn}$ به روشی که برای تجزیه و تحلیل شبکه به کار می‌رود بستگی ندارد. بنابراین، چندجمله‌ای فوق پاره‌ای از خواص اساسی متغیر x_n را توصیف می‌کند. برای ملاحظهٔ این مطلب، فرض کنید که تمام ورودی‌های دستگاه ۱ مساوی صفر باشند. معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال x_n تمام پاسخهای ورودی صفر ممکن x_n (ناشی از هر حالت اولیه) را پیش‌بینی می‌کند و به‌جز اینها چیز دیگری را مشخص نمی‌کند. به عنوان مثال، چنانچه معادله دارای جوابی به صورت $Ke^{s_1 t}$ باشد (که در آنجا K و s_1 ثابتهای مناسبی هستند)، در این صورت حالت اولیه‌ای در شبکه وجود خواهد داشت که منجر به پاسخ $Ke^{s_1 t}$ می‌گردد. از آنجایی که تمام روشهای تجزیه و تحلیل، پاسخهای یکسانی را پیش‌بینی می‌کنند، تمام آنها باید پس از انجام عملیات حذفی، به معادلهٔ دیفرانسیل

مینیمال یکسانی منجر گردند (به‌جز احتمالاً یک ضریب ثابت غیرصفر).

تبصرهٔ ۳ چندجمله‌ای مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال متغیر شبکهٔ x_n در معادلهٔ (۲-۱۳)، $\hat{p}_{nn}(s)$ می‌باشد. در نتیجه s_1 یک فرکانس طبیعی متغیر شبکهٔ x_n است، اگر و تنها اگر $\hat{p}_{nn}(s_1) = 0$ باشد.

تمرین با به کار بردن طرز نمایشهای معادلات (۲-۱۱ الف)، (۲-۱۱ ب) و (۲-۱۲) نشان دهید که $\Delta(D) = \hat{p}_{11}(D)\hat{p}_{22}(D)\cdots\hat{p}_{nn}(D)$.

یک روش منظم برای به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال بر قضیهٔ زیر استوار است.

قضیه فرض کنید که دستگاه داده شدهٔ A مرکب از یک دستهٔ n معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، به صورت زیر باشد:

$$U_j(\mathbf{x}) = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \qquad \text{(۲-۱۴ الف)}$$

که در آنجا:

$$U_j(\mathbf{x}) \triangleq p_{j1}(D)x_1 + p_{j2}(D)x_2 + \cdots + p_{jn}(D)x_n - f_j \qquad \text{(۲-۱۴ ب)}$$

و $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ مجهول ما می‌باشد. فرض کنید:

$$U^*_i(\mathbf{x}) \triangleq mU_i(\mathbf{x}) + M(D)U_k(\mathbf{x}) \qquad k \neq i \qquad (۲\text{-}۱۵)$$

که در آنجا m یک ثابت غیرصفر و $M(D)$ یک چندجمله‌ای دلخواه از D و k یک زیرنویس متفاوت از i می‌باشد. دستگاه B را که از روی دستگاه A تنها با تعویض معادلهٔ iام دستگاه A، یعنی $U_i = 0$ با $U^*_i = 0$ به دست می‌آید، در نظر بگیرید. تحت این شرایط، دستگاه A معادل دستگاه B می‌باشد.

اثبات ما اثبات مستقیمی را که بر تعریف دستگاه‌های معادل متکی است، بیان خواهیم کرد. برای راحتی، معادلات دستگاه B را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$U^*_j(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \qquad (۲\text{-}۱۶)$$

که در اینجا علامت $\mathbf{x}^*$ را برای نشان دادن یک جواب دستگاه B به کار می‌بریم. نخست نشان می‌دهیم که هر جواب دستگاه A، مانند $\mathbf{x}$، یک جواب دستگاه B نیز است. از آنجایی که تمام معادلات دستگاه B، به‌جز معادلهٔ iام، همانند معادلات دستگاه A هستند، پس چنانچه $\mathbf{x}$ را در معادلات دستگاه B قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$U^*_j(\mathbf{x}) = U_j(\mathbf{x}) = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n \qquad (۲\text{-}۱۷)$$

اکنون $\mathbf{x}$ را در معادلهٔ iام دستگاه B قرار می‌دهیم. در این صورت از رابطهٔ (۲-۱۵) به دست می‌آوریم:

$$U^*_i(\mathbf{x}) = mU_i(\mathbf{x}) + M(D)U_k(\mathbf{x}) = 0$$

که در آنجا برابری آخر از رابطهٔ (۲-۱۴) نتیجه می‌شود. بدین ترتیب داریم:

$$U^*_j(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{برای تمام } j$$

به عبارت دیگر، نشان دادیم که هر جواب دستگاه A یک جواب دستگاه B نیز می‌باشد.

اکنون باید عکس این موضوع را نشان داد، یعنی هر جواب $\mathbf{x}^*$ از دستگاه B، یک جواب دستگاه A نیز می‌باشد. طبق آنچه که قبلاً دیدیم، بلافاصله به دست می‌آوریم که:

$$U_j(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n \tag{۲-۱۸}$$

بنابراین $U_k(\mathbf{x}^*) = 0$ است، زیرا $k \neq i$ می‌باشد. از (۲-۱۵) به دست می‌آوریم:

$$mU_i(\mathbf{x}^*) = U^*_i(\mathbf{x}^*) - M(D)U_k(\mathbf{x}^*) = 0$$

که در آنجا برابری آخر از روابط (۲-۱۶) و (۲-۱۸) نتیجه می‌شود. از آنجایی که m یک ثابت غیرصفر است، $U_i(\mathbf{x}^*) = 0$ می‌گردد. بدین ترتیب هر جواب دستگاه B یک جواب دستگاه A نیز هست و بنابراین دو دستگاه A و B معادل می‌باشند.

تبصرهٔ ۱ توجه به این مطلب حائز اهمیت است که m به کار رفته در تبدیل بالا در معادله (۲-۱۵)، یک ثابت غیرصفر است و در غیر این صورت قضیه برقرار نمی‌شود.

تبصرهٔ ۲ توصیف ماتریسی دو سیستم را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{P}(D)\mathbf{x} - \mathbf{f} = 0 \tag{۲-۱۹ الف}$$

$$\mathbf{P}^*(D)\mathbf{x}^* - \mathbf{f}^* = 0 \tag{۲-۱۹ ب}$$

که در این‌جا:

$$\mathbf{P}^*(D) = \begin{bmatrix} p^*_{11}(D) & p^*_{12}(D) & \cdots & p^*_{1n}(D) \\ p^*_{21}(D) & p^*_{22}(D) & \cdots & p^*_{2n}(D) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^*_{n1}(D) & p^*_{n2}(D) & \cdots & p^*_{nn}(D) \end{bmatrix} \tag{۲-۲۰}$$

معمولاً تبدیل بیان شده در قضیهٔ فوق را یک تبدیل سطری مقدماتی ماتریس سیستم داده شده می‌نامند. می‌توان این تبدیل را به صورت ماتریس زیر بیان کرد:

$$\mathbf{P}^*(D) = \mathbf{T}(D)\mathbf{P}(D) \tag{۲-۲۱ الف}$$

$$\mathbf{T}(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & k & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & m & 0 & \cdots M(D) \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \tag{۲-۲۱ ب}$$

چون ضرب دو ماتریس از حاصلضرب سطر در ستون انجام می‌گیرد، واضح است که روابط (۲-۲۱ الف) و (۲-۲۱ ب) نشان می‌دهند که اختلاف ماتریس‌های $\mathbf{P}(D)$ و $\mathbf{P}^*(D)$ تنها در سطر iام می‌باشد. عملی که اپراتور $\mathbf{T}(D)$ انجام می‌دهد، شامل ضرب سطر iام ماتریس $\mathbf{P}(D)$ در m و جمع آن با سطری که از اعمال اپراتور $M(D)$ روی سطر kام به‌وجود می‌آید، می‌باشد. از نظریهٔ دترمینان‌ها داریم:

$$\det[\mathbf{P}^*(D)] = \det[\mathbf{T}(D)]\det[\mathbf{P}(D)]$$

از گسترش $\det[\mathbf{T}(D)]$ به ترتیب سطرها ملاحظه می‌کنیم که $\det[\mathbf{T}(D)] = m$ و بنابراین $\det[\mathbf{P}^*(D)] = m\det[\mathbf{P}(D)]$، که در اینجا m یک ثابت غیرصفر است.

مثال زیر، کاربرد تبدیلهای سطری مقدماتی را تشریح می‌کند.

مثال ۲ معادلات (۲-۴ الف) و (۲-۴ ب) مثال ۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید که بخواهیم $q_۲$ را حذف کنیم و یک معادلهٔ دیفرانسیل تنها برحسب $q_۱$ به دست آوریم. فرض کنید دو معادلهٔ اصلی را به صورت زیر با $\mathcal{E}_۱$ و $\mathcal{E}_۲$ نشان دهیم:

$$\mathcal{E}_۱:\ (D^۲+۶D+۱۰)q_۱-۱۰q_۲=e_s-v_C(۰) \qquad \text{(۲-۲۲ الف)}$$

$$\mathcal{E}_۲:\ -۱۰q_۱+(۱۰D^۲+۱۰)q_۲=v_C(۰) \qquad \text{(۲-۲۲ ب)}$$

با قضیه‌ای که در بالا ثابت شد، می‌توان یک دستگاه معادل به طریق زیر به دست آورد:

$$\mathcal{E}^*_۱=\mathcal{E}_۱:\ (D^۲+۶D+۱۰)q_۱-۱۰q_۲=e_s-v_C(۰) \qquad \text{(۲-۲۳ الف)}$$

$$\mathcal{E}^*_۲=\mathcal{E}_۲+(D^۲+۱)\mathcal{E}_۱:\ [-۱۰+(D^۲+۱)(D^۲+۶D+۱۰)]q_۱ \qquad \text{(۲-۲۳ ب)}$$
$$=v_C(۰)+(D^۲+۱)[e_s-v_C(۰)]$$

دستگاه (۲-۲۳) به صورت مثلثی است. معادلهٔ دوم شامل یک متغیر تنهای $q_۱$ است و همان معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال متغیر $q_۱$ می‌باشد. بدین ترتیب داریم:

$$(D^۴+۶D^۳+۱۱D^۲+۶D)q_۱=(D^۲+۱)e_s \qquad \text{(۲-۲۴)}$$

چندجمله‌ای مشخصهٔ این معادله از درجهٔ چهارم بوده و ۰، ۱-، ۲- و ۳- فرکانس‌های طبیعی $q_۱$ می‌باشند. اگر q_p را یک جواب خاص معادلهٔ (۲-۲۴) بگیریم، در این صورت جواب زیر برای $q_۱$ به دست می‌آید:

$$q_۱(t)=K_۱+K_۲e^{-t}+K_۳e^{-۲t}+K_۴e^{-۳t}+q_p(t) \qquad \text{(۲-۲۵)}$$

که در آنجا $K_۱$، $K_۲$، $K_۳$ و $K_۴$ ثابت‌های دلخواهی هستند که باید توسط شرایط اولیه تعیین گردند. توجه کنید که جریان $i_۱$ به وسیلهٔ رابطهٔ زیر به $q_۱$ مربوط می‌شود:

$$i_۱=Dq_۱ \qquad \text{(۲-۲۶)}$$

از معادلهٔ (۲-۲۴)، معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال برای متغیر $i_۱$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$(D^۳+۶D^۲+۱۱D+۶)i_۱=(D^۲+۱)e_s \qquad \text{(۲-۲۷)}$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکهٔ $i_۱$، ۱-، ۲- و ۳- می‌باشند. توجه کنید که تعداد فرکانس‌های طبیعی برای $i_۱$ با تعداد اجزای ذخیره‌کنندهٔ انرژی در مدار برابر می‌باشد.

تبصره به کار بردن واژهٔ "فرکانس طبیعی" برای یک متغیر شبکه که جریان یا ولتاژ باشد، متداول است. چنانچه بار یا شار به عنوان متغیر شبکه به کار روند، پاسخ ورودی صفر برای آن بار یا شار را می‌توان به ترتیب با انتگرال‌گیری پاسخ ورودی صفر متناظر برای جریان یا ولتاژ به دست آورد. اکنون اگر s_1 یک فرکانس طبیعی غیرصفر جریان i باشد، در این صورت برای بعضی از شرایط اولیه، پاسخ ورودی صفر i جمله‌ای به صورت $Ke^{s_1 t}$ را دربر خواهد داشت. بار متناظر با این جریان:

$$q(t) = \int_{0}^{t} i(t')\, dt'$$

جمله‌ای به صورت $\frac{K}{s_1} e^{s_1 t}$ را شامل خواهد بود. بنابراین اگر s_1 یک فرکانس طبیعی غیرصفر جریان i باشد، s_1 فرکانس طبیعی بار q نیز خواهد بود. به طریق مشابه، چنانچه s_1 فرکانس طبیعی غیرصفر یک ولتاژ باشد، s_1 فرکانس طبیعی شار متناظر نیز خواهد بود. اکنون با توجه به $Dq = i$ ملاحظه می‌کنیم که مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل بار به مقدار یک واحد از مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل جریان بیشتر است. چندجمله‌ای مشخصهٔ بار شامل یک صفر اضافی در مبدأ می‌باشد. از دیدگاه فیزیکی، شرایط اولیهٔ فیزیکی اضافی لازم نخواهد بود، زیرا که خود تعریف q، شرط اولیه، یعنی $q(0) = 0$ را مشخص می‌کند (معادلهٔ ۲-۳ را ببینید). بدین ترتیب افزایش مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل هیچ گونه اهمیت فیزیکی خاصی ندارد.

۲-۳ الگوریتم حذف

می‌خواهیم الگوریتمی برای به دست آوردن یک دستگاه معادل مثلثی یک دستگاه داده شده ارائه کنیم. این الگوریتم، اثبات این بیان راکه با استفاده از تبدیلات سطری مقدماتی متوالی همواره می‌توان تبدیل به صورت مثلثی را انجام داد، تشکیل می‌دهد.

برای راحتی فرض کنید دو سیستم را مجدداً تعریف کنیم. n متغیر را با x_1 ، x_2 ، ... ، x_n و n معادله را برای $k = 1, 2, \ldots, n$ با $\mathcal{E}_k$ نشان می‌دهیم. دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی داده شدهٔ ۱ چنین است:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{E}_1: & p_{11}(D)x_1 + p_{12}(D)x_2 + \cdots + p_{1n}(D)x_n = f_1 \\
\mathcal{E}_2: & p_{21}(D)x_1 + p_{22}(D)x_2 + \cdots + p_{2n}(D)x_n = f_2 \\
\vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathcal{E}_k: & p_{k1}(D)x_1 + p_{k2}(D)x_2 + \cdots + p_{kn}(D)x_n = f_k \\
\vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathcal{E}_n: & p_{n1}(D)x_1 + p_{n2}(D)x_2 + \cdots + p_{nn}(D)x_n = f_n
\end{array}$$

که در آنجا D نشان دهندهٔ $\frac{d}{dt}$ و p_{ij}ها چندجمله‌ای‌هایی از D با ضرایب ثابت حداکثر از درجهٔ ۲ و f_iها نشان دهندهٔ اثر منابع نابسته و پاره‌ای از شرایط اولیه می‌باشند. فرض کنید که معادلات دستگاه مثلثی

معادل را برای $k = 1, 2, \cdots, n$ با $\hat{\mathcal{E}}_k$ نشان دهیم. دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مثلثی T چنین است:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}}_1 &: \ \hat{p}_{11}(D)x_1 + \hat{p}_{12}(D)x_2 + \hat{p}_{13}(D)x_3 + \cdots + \hat{p}_{1n}(D)x_n = \hat{f}_1 \\
\hat{\mathcal{E}}_2 &: \ \hat{p}_{22}(D)x_2 + \hat{p}_{23}(D)x_3 + \cdots + \hat{p}_{2n}(D)x_n = \hat{f}_2 \\
&\vdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hat{\mathcal{E}}_{n-1} &: \ \hat{p}_{n-1,n-1}(D)x_{n-1} + \hat{p}_{n-1,n}(D)x_n = \hat{f}_{n-1} \\
\hat{\mathcal{E}}_n &: \ \hat{p}_{nn}(D)x_n = \hat{f}_n
\end{aligned}
$$

الگوریتم

گام ۱ در حالتی که تنها محاسبهٔ یک متغیر شبکه مورد نیاز باشد، توابع مجهول x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n را در صورت لزوم دوباره چنان مرتب می‌کنیم که x_n متغیر شبکهٔ مورد نظر باشد.

گام ۲ ستون اول ماتریس $\mathbf{P}(D)$ را بررسی کنید. اگر تنها یک چندجمله‌ای مانند p_{k1} وجود داشته باشد که متحد با صفر نباشد جای معادلهٔ اول و kام را با هم عوض کنید و سپس به گام ۷ بروید. در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

گام ۳ از میان ستون اول چندجمله‌ای با کمترین درجه را که متحد صفر نباشد، انتخاب کنید و شمارهٔ سطر این چندجمله‌ای را k بنامید. در این صورت نام چندجمله‌ای با کمترین درجه، p_{k1} می‌باشد.

گام ٤ برای تمام $i \neq k$ هر یک از چندجمله‌ای‌های $p_{i1}(D)$ را بر $p_{k1}(D)$ تقسیم کنید و خارج قسمت این تقسیم، یعنی p_{i1} بر p_{k1} را q_{i1} و ماندهٔ آن را r_{i1} بنامید و بدین ترتیب:

$$p_{i1}(D) - q_{i1}(D)p_{k1}(D) = r_{i1}(D) \qquad \text{برای تمام } i \neq k$$

(ملاحظه کنید که درجهٔ هر یک از چندجمله‌ای‌های r_{i1} حداقل یکی از درجهٔ p_{k1} کمتر می‌باشد).

گام ۵ دستگاه معادل زیر را بنویسید:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}'_1 &\triangleq \mathcal{E}_1 - q_{11}(D)\mathcal{E}_k \\
\mathcal{E}'_2 &\triangleq \mathcal{E}_2 - q_{21}(D)\mathcal{E}_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathcal{E}'_k &\triangleq \mathcal{E}_k \\
\mathcal{E}'_{k+1} &\triangleq \mathcal{E}_{k+1} - q_{k+1,1}(D)\mathcal{E}_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathcal{E}'_n &\triangleq \mathcal{E}_n - q_{n1}(D)\mathcal{E}_k
\end{aligned}
$$

ستون اول ضرایب دستگاه $(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, \cdots, \mathcal{E}'_n)$، به ترتیب $r_{11}(D)$ ، $r_{21}(D)$ ، ... ، $p_{k1}(D)$ ، ... ، $r_{n1}(D)$ می‌باشند.

گام ۶ گامهای ۲ تا ۵ را برای این دستگاه معادل تکرار کنید.

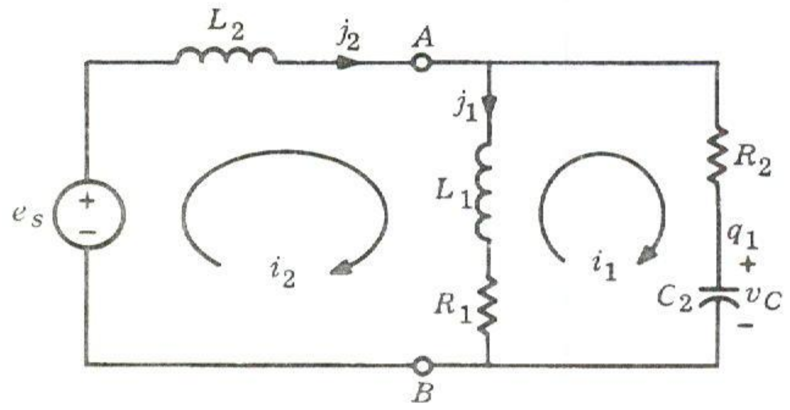
گام ۷ پس از انجام حداکثر سه تکرار، دستگاه (اکنون دستگاه ′۱) به صورت زیر درمی‌آید (چون ضرایب چندجمله‌ای اخیر احتمالاً متفاوت از ضرایب دستگاه ۱ می‌باشند، آنها را به صورت p^*_{ij} می‌نویسیم):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^*_1 :&\quad p^*_{11}(D)x_1 + p^*_{12}(D)x_2 + \cdots + p^*_{1n}(D)x_n = f^*_1 \\
\mathcal{E}^*_2 :&\quad \phantom{p^*_{11}(D)x_1 +{}} p^*_{22}(D)x_2 + \cdots + p^*_{2n}(D)x_n = f^*_2 \\
\vdots &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathcal{E}^*_n :&\quad \phantom{p^*_{11}(D)x_1 +{}} p^*_{n2}(D)x_2 + \cdots + p^*_{nn}(D)x_n = f^*_n
\end{aligned}$$

(دستگاه ′۱ معادل دستگاه ۱ می‌باشد، یعنی هر جواب یکی از این دستگاه‌ها، جواب دستگاه دیگری نیز هست و برعکس). اکنون از معادلهٔ اول صرفنظر کنید. اگر تنها یک معادله باقی مانده باشد، عملیات را متوقف کنید. ولی چنانچه بیش از یک معادله باقی مانده باشد، به گام ۲ برگشته و گامهای ۲ تا ۷ را برای معادلات باقیمانده تکرار کنید.

این الگوریتم، دستگاه ۱ را به‌طور گام به گام به صورت مثلثی درمی‌آورد و به راحتی می‌توان آن را برای یک کامپیوتر برنامه‌ریزی کرد.

مثال ۳ شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۲-۲) را در نظر بگیرید. جریانهای اولیهٔ سلف‌ها $j_1(0)$ و $j_2(0)$ ، و ولتاژ اولیهٔ خازن $v_C(0)$ معلوم هستند. می‌خواهیم معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال متغیر شبکهٔ j_2 ، یعنی جریان در سلف L_2 را تعیین کنیم. با توجه به گراف شبکهٔ مورد نظر،



شکل ۲-۲ $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$ و $C_2 = 1\,F$ و $L_1 = 1\,H$ و $L_2 = 2\,H$ ، فرکانس‌های طبیعی j_2 ، ۱- و $-\frac{1}{2}$ می‌باشند.

تجزیه و تحلیل مش را به کار خواهیم برد. جریان مش‌های i_1 و i_2 در شکل (۲-۲)، مشخص شده‌اند. چون در مش ۱ یک خازن وجود دارد، بار خازن q_1 را به جای i_1، به عنوان متغیر مش به کار خواهیم برد و داریم:

$$i_1(t) = \frac{dq_1}{dt} \qquad \text{و} \qquad q_1(0) = Cv_C(0)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل چنین است:

$$\mathcal{E}_1: \quad (D^2 + 2D + 1)q_1 - (D + 1)i_2 = 0$$

$$\mathcal{E}_2: \quad -D(D + 1)q_1 + (3D + 1)i_2 = e_s$$

گام ۱ به علت اینکه متغیر شبکهٔ مورد نظر از ابتدا در ستون آخر قرار دارد، مرتب کردن مجدد متغیرها لازم نیست.

در اینجا $k = 1$ و $p_{11}(D) = D^2 + 2D + 1$ می‌باشد.

گام ٤ $p_{21}(D) - (-1)p_{11}(D) = D + 1$

گامهای ۲ و ۳ در اینجا $q_{21}(D) = -1$ و $r_{21}(D) = D + 1$ می‌باشند.

گام ۵ $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1: \quad (D^2 + 2D + 1)q_1 - (D + 1)i_2 = 0$

$$\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}_2 - q_{21}(D)\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1: \quad (D + 1)q_1 + 2Di_2 = e_s$$

به علت اینکه ستون اول هنوز به صورت مطلوب نیست، دوباره به گام ۲ برمی‌گردیم و به ترتیب چنین به دست می‌آوریم: [ضرایب دستگاه $\mathcal{E}'_1$، $\mathcal{E}'_2$، ... را $p'_{ij}(D)$ می‌نامیم].

$$k = 2 \qquad p'_{21}(D) = D + 1$$

$$p'_{11}(D) - (D + 1)(D + 1) = 0 \qquad \text{یا} \qquad q'_{11}(D) = D + 1 \quad , \quad r'_{11}(D) = 0$$

دستگاه جدید چنین است:

$$\mathcal{E}''_1 = \mathcal{E}'_1 - (D + 1)\mathcal{E}'_2: \quad 0 \quad -(D + 1)(2D + 1)i_2 = -(D + 1)e_s$$

$$\mathcal{E}''_2 = \mathcal{E}'_2: \quad (D + 1)q_1 + 2Di_2 = e_s$$

با تعویض ترتیب معادلات، شکل مثلثی زیر را به دست می‌آوریم:

$$(D + 1)q_1 + 2Di_2 = e_s$$

$$(2D^2 + 3D + 1)i_2 = (D + 1)e_s$$

بنابراین چندجمله‌ای مینیمال متغیر شبکهٔ i_2 به صورت $2D^2 + 3D + 1$ و فرکانس‌های طبیعی i_2 مساوی ۱ - و $-\frac{1}{2}$ می‌باشند.

تمرین شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۲-۲) را در نظر بگیرید. فرکانس‌های طبیعی j_2 را برای حالتی که در آن $L_2 = 1\,H$، $L_1 = 4\,H$، $C_1 = 1\,F$ و $R_1 = R_2 = 2\,\Omega$ می‌باشند، محاسبه کنید.

در پایان، الگوریتم حذف، یک روش منظم برای به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال و فرکانس‌های طبیعی هر متغیر شبکه‌ای که مورد نظر ما باشد، فراهم می‌کند. در واقع صفرهای چندجمله‌ای $\hat{p}_{nn}(s)$، فرکانس‌های طبیعی x_n می‌باشند.

۳- فرکانس‌های طبیعی یک شبکه

اکنون دیدگاه خود را وسیع‌تر کرده و شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان $\mathcal{N}$ را به طور کلی در نظر می‌گیریم. مفهوم اصلی که مورد نظر ما است، فرکانس طبیعی یک شبکه است. عدد s_k را **یک فرکانس طبیعی شبکهٔ** $\mathcal{N}$ گویند، اگر s_k فرکانس طبیعی یک ولتاژ یا فرکانس طبیعی یک جریان شبکهٔ $\mathcal{N}$ باشد. ثابت خواهد شد که برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک شبکه لازم نیست که تمام فرکانس‌های طبیعی هر ولتاژ و هر جریان شبکه را پیدا کنیم.

مثال فرکانس‌های طبیعی شبکهٔ مثال ۵ بخش ۱، عبارتند از فرکانس‌های طبیعی ولتاژ v_1، یعنی $j\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ و $-j\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ و فرکانس‌های طبیعی ولتاژ v_2، یعنی $-\frac{1}{R_2C_2}$.

فرض کنید این مطلب را با دو ملاحظهٔ زیر شروع کنیم:

۱- اگر $s_1 \neq 0$ بوده و اگر s_1 فرکانس طبیعی یک جریان شاخه باشد، در این صورت s_1 یک فرکانس طبیعی ولتاژ شاخهٔ متناظر نیز خواهد بود. دلیل این مطلب چنین است: بنابه فرض جریان شاخهٔ j برای حالت اولیهٔ خاصی جملهٔ $K_1e^{s_1t}$ را شامل خواهد بود که در آنجا $K_1 \neq 0$ می‌باشد. با در نظر گرفتن ماهیت شاخه‌ها، ولتاژهای شاخه‌های متناظر به صورت زیر خواهند بود:

الف - برای یک مقاومت، $v = Rj$ بوده و v شامل جملهٔ $R_1K_1e^{s_1t}$ می‌باشد.

ب - برای یک سلف، $v = L\frac{dj}{dt}$ بوده و v شامل جملهٔ $LK_1s_1e^{s_1t}$ می‌باشد.

پ - برای یک خازن، $v = v(0^-) + \frac{1}{C}\int_0^t j(t')dt'$ بوده و v شامل جملهٔ $\frac{1}{C}K_1\frac{1}{s_1}e^{s_1t}$ می‌باشد.

۲- اگر $s_1 \neq 0$ بوده و اگر s_1 فرکانس طبیعی یک ولتاژ شاخه باشد، در این صورت s_1 یک فرکانس طبیعی جریان شاخهٔ متناظر نیز خواهد بود.

دلیل لازم برای شرط $s_1 \neq 0$ از لحاظ فیزیکی روشن است. اگر جریان ثابتی از سلفی عبور کند، ولتاژ دوسر سلف متحد با صفر است. به طریق دوگان، چنانچه ولتاژ ثابتی در دوسر یک خازن وجود داشته باشد، جریان گذرنده از درون خازن متحد با صفر است. بنابراین، عدد صفر ممکن است یک فرکانس طبیعی یک جریان شاخه باشد بی‌آنکه فرکانس طبیعی ولتاژ شاخهٔ متناظر گردد و برعکس.

یک نتیجهٔ مهم ملاحظات ۱ و ۲ این است که برای پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر یک شبکه می‌توان از هر روش تجزیه و تحلیل که مایل باشیم استفاده کرد. در واقع اگر $s_1 \neq 0$ بوده و s_1 فرکانس طبیعی مثلاً جریان حلقه‌ای باشد، در این صورت s_1 لزوماً فرکانس طبیعی هر ولتاژ شاخهٔ موجود در آن حلقه خواهد بود و برعکس.

اکنون نتیجهٔ اصلی این بخش را بیان می‌کنیم.

قضیه فرکانس‌های طبیعی غیرصفر هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، همانند ریشه‌های غیرصفر معادلهٔ $\Delta(s) \triangleq \det[\mathbf{P}(s)] = 0$ می‌باشند که در اینجا $\mathbf{P}(s)$ ماتریس هر دستگاه معادلات دیفرانسیلی است که شبکهٔ فوق را توصیف می‌کند.

تبصرهٔ ۱ به علاوه، از آنجایی که ریشه‌های غیرصفر $\Delta(s)$ همانند ریشه‌های غیرصفر دترمینان‌های مختلف شبکه مانند $\Delta_n(s)$ ، $\Delta_m(s)$ و غیره می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که فرکانس‌های طبیعی غیرصفر هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، همانند ریشه‌های غیرصفر هر دترمینان شبکه می‌باشند.

تبصرهٔ ۲ توجه به این مطلب حائز اهمیت است که اگر s_1 فرکانس طبیعی شبکه‌ای باشد، امکان دارد بعضی از متغیرهای شبکه وجود داشته باشند که s_1 فرکانس طبیعی آنها نباشد. این مطلب، در مثال ۵ بخش ۱ نشان داده شده است.

اثبات باید نشان داد که دستهٔ ریشه‌های غیرصفر $\det[\mathbf{P}(s)] = 0$ همانند دستهٔ فرکانس‌های طبیعی غیرصفر شبکه می‌باشند. این کار را در دو گام انجام می‌دهیم.

۱ـ نشان می‌دهیم که اگر $s_1 \neq 0$ بوده و اگر $\det[\mathbf{P}(s_1)] = 0$ باشد، در این صورت s_1 یک فرکانس طبیعی شبکه است.

از آنجایی که تنها پاسخهای ورودی صفر مورد توجه ما است، شبکه توسط یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر توصیف می‌گردد[1]:

$$\mathbf{P}(D)\mathbf{x} = 0 \qquad (۱-۳)$$

چنانچه اپراتور دیفرانسیل D را با متغیر مختلط s تعویض کنیم، دترمینان ماتریس حاصل $\mathbf{P}(s)$ یک چندجمله‌ای برحسب s می‌باشد. فرض کنید که s_1 یک صفر این دترمینان باشد، یعنی:

$$\det[\mathbf{P}(s_1)] = 0$$

این بدین معنی است که ماتریس $\mathbf{P}(s_1)$ (که عناصر آن حقیقی یا احتمالاً عددهای مختلطی هستند)، یک

[1] برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیلی مانند معادلهٔ (۳-۱) که سمت راست آنها صفر باشد، ممکن است مجبور شویم که متغیرهایی مانند $q(t) = q(0^-) + \int_{0^-}^{t} i(t')dt'$ و $\phi(t) = \phi(0^-) + \int_{0^-}^{t} v(t')\,dt'$ را به کار ببریم.

ماتریس ویژه است. در نتیجه، دستگاه n معادلهٔ جبری همگن خطی برحسب n مجهول z_1 ، z_2 ، ... ، z_n به صورت:

$$\mathbf{P}(s_1)\mathbf{z} = 0$$

حداقل دارای یک جواب غیرصفر است. فرض کنید $\mathbf{y}$ یک چنین جواب غیرصفری باشد. بنابراین $\mathbf{y}$ برداری است که مؤلفه‌های آن عددهای حقیقی یا مختلط هستند و $\mathbf{P}(s_1)\mathbf{y} = 0$ است.

اکنون شکل موجهایی راکه به صورت زیر مشخص می‌شوند، در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}e^{s_1 t} = \begin{bmatrix} y_1 e^{s_1 t} \\ y_2 e^{s_1 t} \\ \vdots \\ y_n e^{s_1 t} \end{bmatrix} \qquad \text{برای } t \geq 0$$

از این حقیقت که $D\, e^{s_1 t} = s_1\, e^{s_1 t}$ ، $D^2\, e^{s_1 t} = s_1^2\, e^{s_1 t}$ ، ... ، چنین نتیجه می‌شود که برای تمام $t \geq 0$ ، $\mathbf{P}(D)\,\mathbf{y}e^{s_1 t} = \mathbf{P}(s_1)\,\mathbf{y}e^{s_1 t} = 0$. به عبارت دیگر، شکل موج‌های $\mathbf{y}e^{s_1 t}$ جوابهای دستگاه (۳-۱) هستند. بنابراین با در نظر گرفتن اینکه $\mathbf{y}$ یک بردار غیرصفر است، پس s_1 یک فرکانس طبیعی تمام متغیرهای شبکهٔ y_i برای $i = 1, 2, \cdots, n$ می‌باشد که در آنها $y_i \neq 0$ است. اگر y_i نشان دهندهٔ یک ولتاژ یا یک جریان باشد، بنابه تعریف، s_1 یک فرکانس طبیعی شبکه می‌باشد. اگر y_i نمایشگر یک بار یا شار باشد، چون $s_1 \neq 0$ است، پس s_1 یک فرکانس طبیعی جریان یا ولتاژ متناظر نیز هست و بدین‌ترتیب s_1 یک فرکانس طبیعی شبکه می‌باشد.

۲ـ اکنون باید عکس این مطلب را نشان داد، یعنی اگر $s_1 \neq 0$ بوده و اگر s_1 یک فرکانس طبیعی شبکه باشد، در این صورت $\det[\mathbf{P}(s_1)] = 0$ خواهد بود.

اگر از معادلهٔ (۳-۱) تبدیل لاپلاس بگیریم، به دست می‌آوریم:

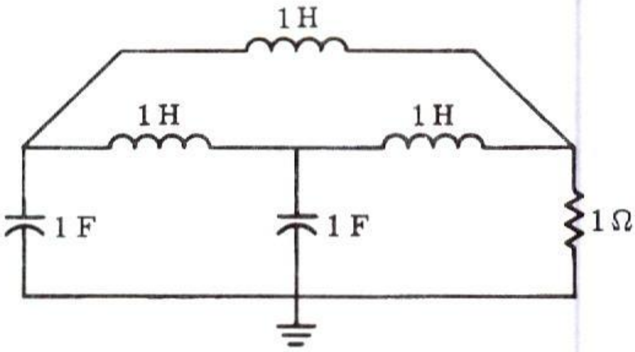
$$\mathbf{P}(s)\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \qquad (۳-۲)$$

که در آنجا مؤلفه‌های $\mathbf{F}(s)$ چندجمله‌ای‌هایی برحسب s هستند که ضرایب آنها شرایط اولیه را دربردارند. اگر معادلهٔ (۳-۲) را با استفاده از قاعدهٔ کرامر حل کنیم، خواهیم دید که هر مؤلفهٔ $\mathbf{X}(s)$ به صورت نسبت دو چندجمله‌ای بوده و چندجمله‌ای مخرج، همان $\det[\mathbf{P}(s)]$ می‌باشد. بنابراین از گسترش به صورت کسرهای جزئی دیده می‌شود برای اینکه به ازای حالت اولیهٔ معینی، یک مؤلفهٔ $\mathbf{x}(t)$ عبارتی به صورت $K_1\, e^{s_1 t}$ را شامل باشد، باید رابطهٔ $\det[\mathbf{P}(s_1)] = 0$ برقرار گردد. بدین‌ترتیب، هر وقت که s_1 یک فرکانس طبیعی شبکه باشد، رابطهٔ $\det[\mathbf{P}(s_1)] = 0$ برقرار می‌گردد.

بخش فوق را با بیان این توضیح که تعداد فرکانس‌های طبیعی یک شبکه (با به حساب آوردن فرکانس‌های طبیعی موجود در مبدأ) از تعداد اجزای ذخیره کنندهٔ انرژی موجود در شبکه بزرگتر نیست،

خاتمه می‌دهیم. برای توجیه این بیان، یک بحث فیزیکی ارائه می‌دهیم. حالت اولیهٔ یک شبکه، به وسیلهٔ جریانهای اولیهٔ تمام سلف‌ها و ولتاژهای اولیهٔ دوسر تمام خازن‌ها مشخص می‌گردد. شرایط اولیه، تمام ثابت‌های اختیاری موجود در جواب را تعیین می‌کنند. ممکن است در تعیین حالت اولیه محدودیت‌هایی به وسیلهٔ قوانین کیرشف اعمال شوند. به عنوان مثال، مجموع ولتاژهای اولیه در خازن‌هایی که تشکیل یک حلقه می‌دهند یا مجموع جریانهای اولیه در سلف‌هایی که تشکیل یک کات‌ست می‌دهند، باید برابر صفر باشد. بدین ترتیب تعداد مشخصه‌های نابسته ممکن است از تعداد عناصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی کمتر باشد. بنابراین، تعداد فرکانس‌های طبیعی در یک شبکه و یا تعداد شرایط اولیهٔ نابستهٔ مورد نیاز برای یکتا مشخص کردن تمام ولتاژها و جریان‌ها در شبکه، از تعداد عناصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی در شبکه بزرگتر نیست.

تمرین برای یک شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۳-۱)، یک تجزیه و تحلیل گره و یک تجزیه و تحلیل مش انجام دهید. برای هر حالت، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست آورید. وضع دترمینان‌های آنها را در $s = 0$ مقایسه کنید. یک تعبیر فیزیکی بیان کنید.



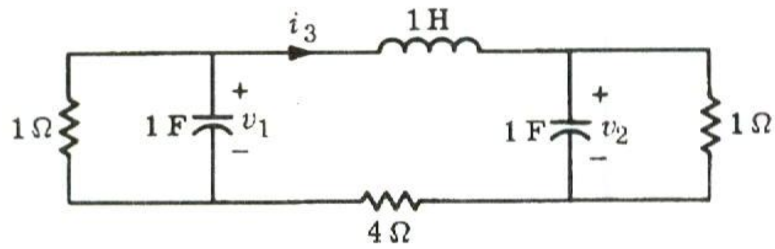
شکل ۳-۱ شبکه‌ای که باید به وسیلهٔ تجزیه و تحلیل گره و مش مورد بررسی قرار گیرد، به حلقهٔ تشکیل شده از سلف‌ها توجه کنید.

٤- فرکانس‌های طبیعی و معادلات حالت

اکنون موضوع فرکانس‌های طبیعی یک شبکه را از لحاظ معادلات حالت در نظر می‌گیریم. برای مشخص بودن، شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۴-۱) را در نظر بگیرید. با پیروی از روش معمول، معادلات حالت زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \qquad (۱-۴)$$

صورت کلی این معادلات چنین است:



شکل ٤-۱ معادلات حالت این شبکه توسط معادلات (۴-۱) داده شده است.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{۴-۲}$$

معادلات حالت در (۴-۲)، در واقع حالت خاصی از دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی زیر هستند:

$$\mathbf{P}(D)\,\mathbf{x} = \mathbf{f} \tag{۴-۳}$$

که در آنجا اپراتور ماتریسی $\mathbf{P}(D)$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{P}(D) = D\mathbf{I} - \mathbf{A} \tag{۴-۴}$$

دترمینان این دستگاه عبارت است از:

$$\Delta(s) = \det[\mathbf{P}(s)] = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \tag{۴-۵}$$

بنابراین صفرهای چندجمله‌ای $\Delta(s)$ فرکانس‌های طبیعی شبکه می‌باشند. در مورد مثال بالا داریم:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & s+۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ & s+۴ \end{bmatrix}$$

و:

$$\Delta(s) = (s+۱)(s+۲)(s+۳)$$

بنابراین، فرکانس‌های طبیعی شبکه ۱ − ، ۲ − و ۳ − می‌باشند.

ارتباط با بردارهای مشخصه با به خاطر آوردن حقایق اساسی جبر خطی، ملاحظه می‌شود که هر فرکانس طبیعی مانند s_i ، مقدار مشخصهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ می‌باشد زیرا:

$$\det[\mathbf{A} - s_i\mathbf{I}] = ۰ \tag{۴-۶}$$

متناظر با هر مقدار مشخصهٔ s_i یک بردار مشخصهٔ (غیرصفر) $\mathbf{u}_i$ وجود دارد، یعنی یک بردار $\mathbf{u}_i$ که در معادلات جبری همگن زیر صدق می‌کند:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = s_i\mathbf{u}_i \tag{۴-۷}$$

در مثال بالا به راحتی تحقیق می‌شود که برای هر مقدار مشخصه، می‌توان بردار مشخصه را به صورت زیر به دست آورد:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s_1 = -1 \text{ برای}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad s_2 = -2 \text{ برای}$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad s_3 = -3 \text{ برای}$$

برای اینکه بردارهای مشخصه را از لحاظ فیزیکی تعبیر کنیم، فرض کنید که حالت اولیهٔ $\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{u}_2$ باشد. در این صورت اظهار می‌کنیم که پاسخ ورودی صفر چنین است:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}_2 e^{-2t}$$

در واقع با جایگزینی این عبارت در معادلهٔ (۴-۲) به دست می‌آوریم که:

$$-2\mathbf{u}_2 e^{-2t} = (\mathbf{A}\mathbf{u}_2)e^{-2t} = (-2)\mathbf{u}_2 e^{-2t}$$

که در اینجا از رابطهٔ (۴-۷) استفاده کردیم. بنابراین نتیجهٔ جالب زیر به دست می‌آید:

اگر حالت اولیه در امتداد بردار مشخصهٔ $\mathbf{u}_i$ قرار گیرد، در این صورت: (۱) مسیر حالت در امتداد این بردار مشخصه باقی می‌ماند. (۲) تمام متغیرهای شبکه با $e^{-s_i t}$ متناسب می‌گردند.

تمرین ۱ برای شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۴-۱)، شکل موج‌ها را برای حالت‌های اولیهٔ زیر به دست آورید:

الف - $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_1$

ب - $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_2$

پ - $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_3$

ت - $\mathbf{x}(0) = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3$

(که در آنجا α_1، α_2 و α_3 اعداد مشخص شده‌ای هستند.)

تمرین ۲ برای شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۱-۵)، حالت اولیه‌ای چنان پیدا کنید که ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها با کمیت‌های زیر متناسب باشند:

الف - e^{-t}

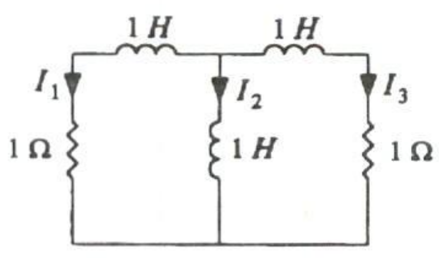
ب - $e^{-(\frac{1}{3})t}$

خلاصه

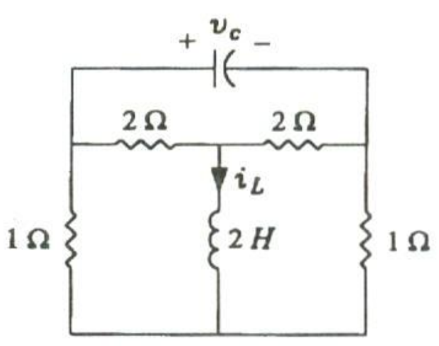
- فرض کنید x یک متغیر شبکهٔ یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان باشد. عدد s_1 را فرکانس طبیعی متغیر شبکهٔ x گویند اگر پاسخ ورودی صفر x برای حالت اولیهٔ معینی، جمله‌ای مانند $K_1 e^{s_1 t}$ را شامل گردد.
- معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال متغیر شبکهٔ x_n ، یعنی $\hat{p}_{nn}(D)x_n = \hat{f}_n$ ، تمام پاسخهای ممکن x_n را به هر شکل موج ورودی و هر حالت اولیه‌ای پیش‌بینی می‌کند.
- عدد s_1 یک فرکانس طبیعی x_n است اگر و تنها اگر $\hat{p}_{nn}(s_1) = 0$ باشد، یعنی اگر s_1 یک صفر چندجمله‌ای مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال آن باشد.
- با داشتن هر دستگاه معادلات دیفرانسیلی که شبکه‌ای را برحسب متغیرهای شبکهٔ x_1 ، x_2 ، … ، x_n توصیف می‌کند، روش حذف، یک روش منظم برای به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال هر یک از این متغیرها می‌باشد.
- عدد s_k را یک فرکانس طبیعی شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان $\mathscr{N}$ گویند اگر s_k یک فرکانس طبیعی یک ولتاژ یا یک جریان آن شبکه باشد. ممکن است s_k فرکانس طبیعی شبکهٔ $\mathscr{N}$ باشد ولی فرکانس طبیعی یک متغیر شبکهٔ خاص نباشد.
- فرض کنید $\mathbf{P}(D)$ ماتریس چندجمله‌ای هر دستگاه معادلات دیفرانسیل توصیف کنندهٔ شبکهٔ $\mathscr{N}$ بوده و s_1 یک عدد غیرصفر باشد. در این صورت، s_1 یک فرکانس طبیعی $\mathscr{N}$ است اگر و تنها اگر $\Delta(s_1) = 0$ باشد، که در اینجا $\Delta(s) = \det[\mathbf{P}(s)]$ می‌باشد. دستهٔ ریشه‌های غیرصفر $\Delta(s) = 0$ ، همانند دستهٔ فرکانس‌های طبیعی غیرصفر شبکهٔ $\mathscr{N}$ هستند.

مسائل

۱- فرکانس‌های طبیعی متغیرهای شبکه I_1 ، I_2 و I_3 مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۱) را به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ١٤-١)

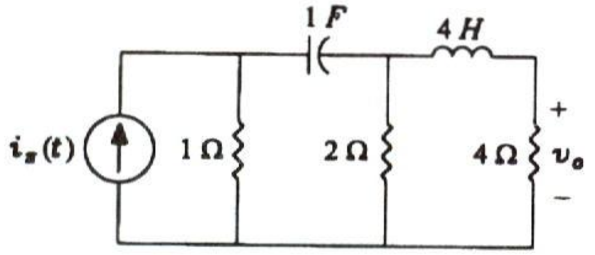


شکل (مسألهٔ ١٤-٢)

۲- الف ـ فرکانس‌های طبیعی متغیرهای شبکهٔ v_C و i_L را در مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۲) تعیین کنید.

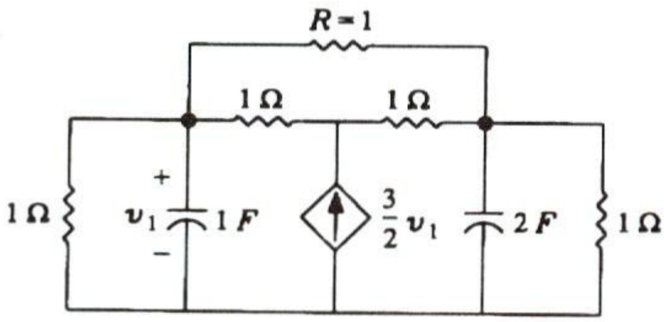
ب ـ اگر دو خازن یک فارادی به طور موازی با مقاومتهای یک اهمی قرار گیرند، بار دیگر فرکانس‌های طبیعی متغیرهای شبکهٔ v_C و i_L را تعیین کنید.

۳ـ الف ـ فرکانس‌های طبیعی مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۳) را به دست آورید.
این مسأله را با دو روش حل کنید.
ب ـ شرایط اولیه‌ای چنان پیدا کنید که تنها کوچکترین فرکانس تحریک شود.
پ ـ تابع شبکهٔ امپدانس انتقالی $H(s) = \frac{V_o(s)}{I_s(s)}$ را به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ١٤-٣)

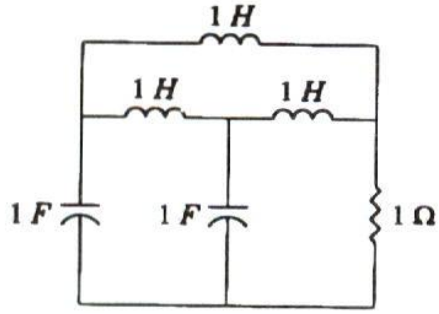
٤ـ الف ـ در مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۴) معادلات دیفرانسیل گره را بنویسید و معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال متغیر v_1 را به دست آورید.
ب ـ فرکانس‌های طبیعی این مدار را تعیین کنید.



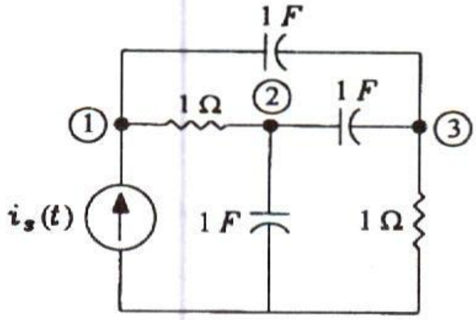
شکل (مسألهٔ ١٤-٤)

پ ـ اگر مقاومت R را با خازن C تعویض کنیم آیا می‌توان C را چنان انتخاب کرد که فرکانس‌های طبیعی مدار تغییر نکند؟

۵ـ می‌خواهیم فرکانس‌های طبیعی ولتاژهای گره‌های ①، ② و ③ را در مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۵) تعیین کنیم.
الف ـ با استفاده از حوزهٔ زمان و الگوریتم حذف معادلات دیفرانسیل مینیمال مربوط به متغیرهای e_1 ، e_2 و e_3 را به دست آورده و فرکانس‌های طبیعی را تعیین کنید.
ب ـ با استفاده از روش حوزهٔ فرکانس (تبدیل لاپلاس) فرکانس‌های طبیعی e_1 ، e_2 و e_3 را به دست آورید.



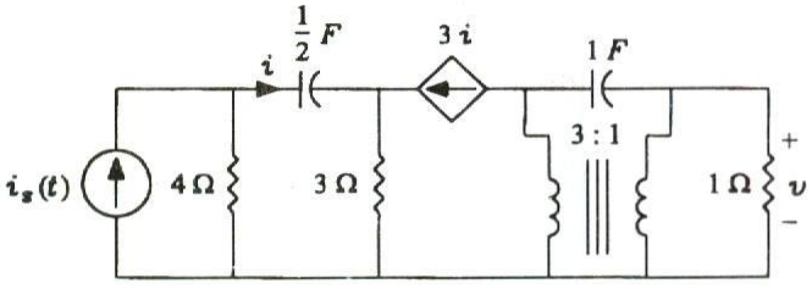
شکل (مسألهٔ ١٤-٦)



شکل (مسألهٔ ١٤-٥)

۶- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۶) فرکانس‌های طبیعی جریانهای مش‌ها را تعیین کنید.

۷- فرکانس‌های طبیعی متغیر v در مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۷) را به دست آورید. فرکانس‌های طبیعی شبکه را نیز تعیین کنید.



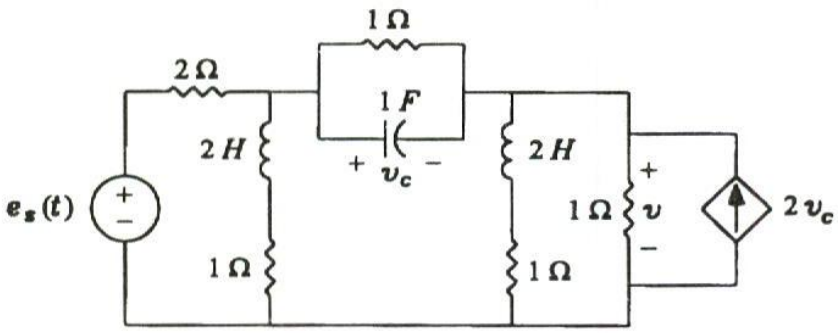
شکل (مسألهٔ ١٤-٧)

۸- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۶) فرض کنید مقاومت یک اهمی را با یک مقاومت R اهمی جایگزین کنیم. R را چنان تعیین کنید که ۱ - یک فرکانس طبیعی مدار باشد.

۹- الف - فرکانس‌های طبیعی ولتاژ خروجی v مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۹) را تعیین کنید.

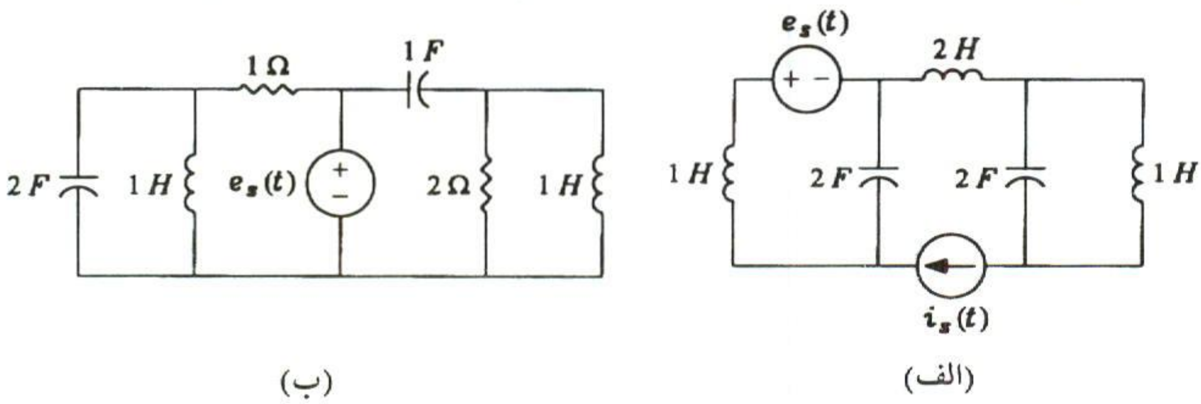
ب - فرکانس‌های طبیعی ولتاژ دوسر خازن یعنی v_C را تعیین کنید.

پ - فرکانس‌های طبیعی شبکه را تعیین کنید.

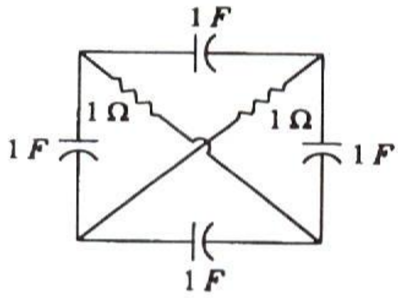


شکل (مسألهٔ ١٤-٩)

۱۰- فرکانس‌های طبیعی مدارهای نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۰) را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ١٤-١٠)



(پ)

شکل (مسألهٔ ١٤-١٠) (ادامه)

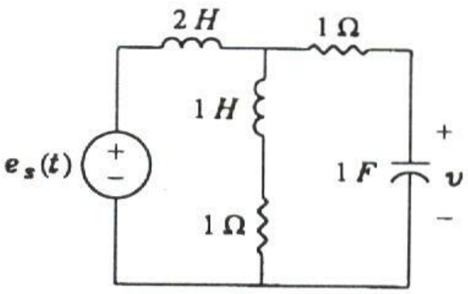
۱۱ـ فرکانس‌های طبیعی مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۱) را با استفاده از روشهای زیر به دست آورید:

الف ـ ریشه‌های دترمینان شبکه براساس روش گره

ب ـ ریشه‌های دترمینان شبکه براساس روش مش

پ ـ معادلات حالت و ریشه‌های دترمینان شبکه براساس معادلات حالت.

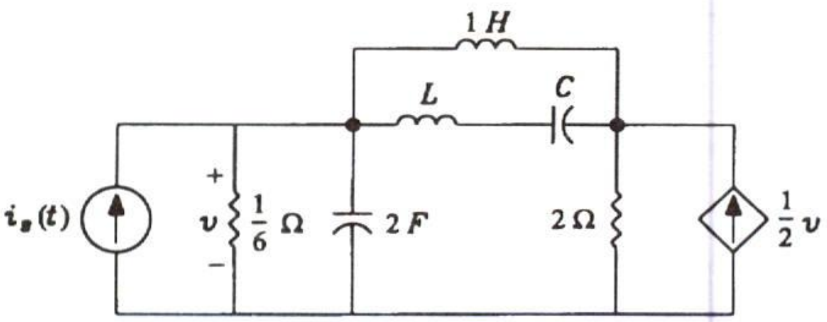
ت ـ فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکهٔ v ولتاژ دوسر خازن را به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ١٤-١١)

ث ـ شرایط اولیه‌ای چنان به دست آورید که پاسخ ورودی صفر v تنها بزرگترین فرکانس طبیعی را در برداشته باشد.

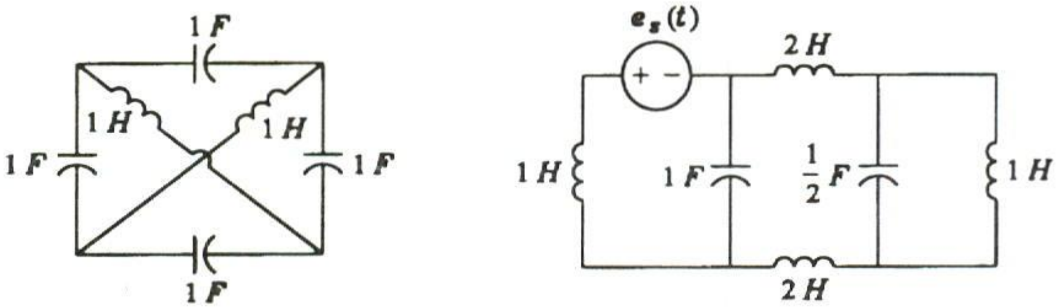
۱۲ـ ثابت کنید در مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۲) و برای تمام مقادیر L و C، $s = -۳$ یکی از فرکانس‌های طبیعی است. آیا می‌توانید دلیلی برای توجیه این مطلب بیان کنید؟ برای $C = \frac{۱}{۲}F$ و $L = \frac{۱۶}{۹}H$ بقیهٔ فرکانس‌های طبیعی مدار را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ١٤-١٢)

۱۳ـ الف ـ فرکانس‌های طبیعی شبکه‌های نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۳) را تعیین کنید.

ب ـ اگر در مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۳ الف) به جای سلف $۲H$ منبع جریان $i_s(t)$ را جایگزین کنیم، ابتدا تعداد فرکانس‌های طبیعی را بدون انجام هرگونه محاسبه با توجیه استدلالی تعیین کنید و سپس تمام فرکانس‌های طبیعی مدار را حساب کنید.



(ب) (الف)

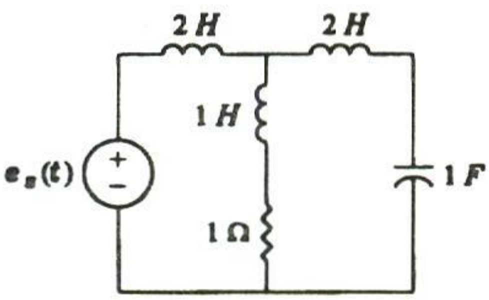
شکل (مسألهٔ ١٤-١٣)

۱۴ـ فرکانس‌های طبیعی مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۴) را با روشهای زیر حساب کنید.

۱ـ تشکیل معادلات گره و محاسبهٔ دترمینان ماتریس ادمیتانس گره.

۲ـ تشکیل معادلات مش و محاسبهٔ دترمینان ماتریس امپدانس مش.

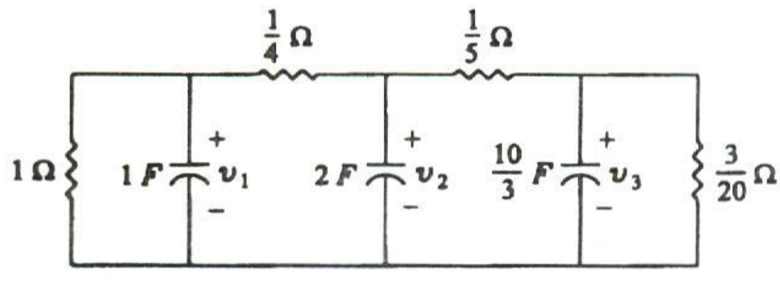
۳ـ تشکیل معادلات حالت و محاسبهٔ مقادیر ویژه ماتریس **A**



شکل (مسألهٔ ١٤-١٤)

۱۵ـ در مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۵) فرکانس‌های طبیعی متغیرهای شبکهٔ v_1 ، v_2 و v_3 و خود شبکه را به دست آورید.

شرایط اولیه‌ای چنان تعیین کنید فقط کوچکترین فرکانس (از لحاظ قدر مطلق) در ولتاژ دوسر خازنها ظاهر شود.



شکل (مسألهٔ ١٤-١٥)

۱۶ـ **الف** ـ در مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۵) نشان دهید که ولتاژهای v_1 ، v_2 و v_3 را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$v_1 = K_{11} e^{-t} + K_{12} e^{-3t} + K_{13} e^{-8t}$$

$$v_2 = K_{21} e^{-t} + K_{22} e^{-3t} + K_{23} e^{-8t}$$

$$v_3 = K_{31} e^{-t} + K_{32} e^{-3t} + K_{33} e^{-8t}$$

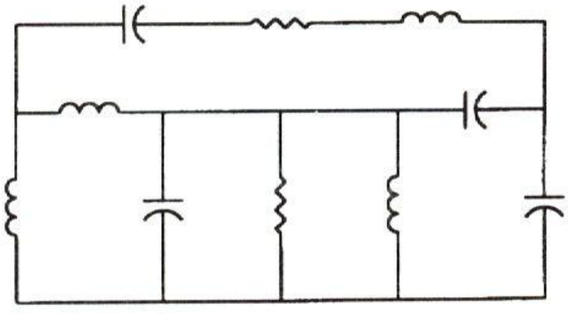
ب - آیا ثابتهای موجود در v_2 و v_3 را می‌توانید برحسب ثابتهای موجود در v_1 بنویسید؟

پ - شرایط اولیه‌ای چنان انتخاب کنید که تنها بزرگترین فرکانس طبیعی در v_1 ، v_2 و v_3 ظاهر شود.

ت - فرکانس‌های طبیعی ولتاژ دوسر مقاومت $\frac{1}{4}$ اهمی را تعیین کنید.

ث - شرایط اولیه‌ای چنان انتخاب کنید که تنها فرکانس طبیعی ۱ - در ولتاژ دوسر مقاومت $\frac{1}{4}$ اهمی ظاهر شود.

۱۷- الف - بدون نوشتن هیچ معادله‌ای دربارهٔ تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۷) چه می‌توانید بگویید؟

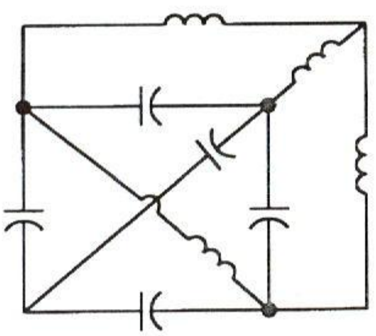


شکل (مسألهٔ ١٤-١٧)

ب - اگر مقادیر تمام عناصر برابر ۱ باشد، با هر روش تحلیلی، فرکانس‌های طبیعی این مدار را به دست آورید و درستی پاسخ بند الف را تأیید کنید.

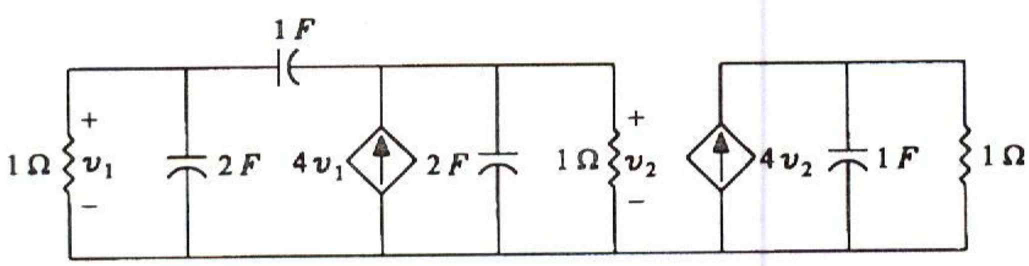
پ - آیا می‌توانید الگوریتمی برای تعیین تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر یک شبکهٔ پیچیده ارائه دهید؟

۱۸- در مورد مرتبهٔ مدار، تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر و تعداد فرکانس‌های صفر مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۸) هر چه می‌دانید با ذکر دلیل بیان کنید. هیچ محاسبه‌ای لازم نیست، استدلال منطقی کافی است.



شکل (مسألهٔ ١٤-١٨)

۱۹- الف - فرکانس‌های طبیعی شبکهٔ شکل (مسألهٔ ۱۴-۱۹) را تعیین کنید.



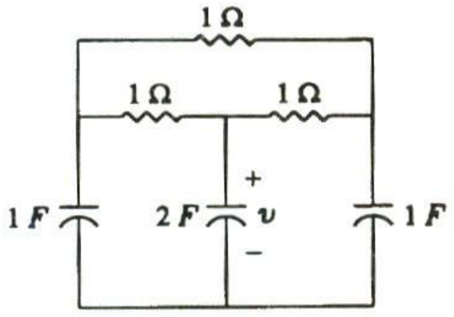
شکل (مسألهٔ ١٤-١٩)

ب ـ شرایط اولیه‌ای چنان تعیین کنید که تنها فرکانس طبیعی حقیقی تحریک شود.

پ ـ شرایط اولیه‌ای چنان تعیین کنید که فرکانس طبیعی حقیقی تحریک نشود.

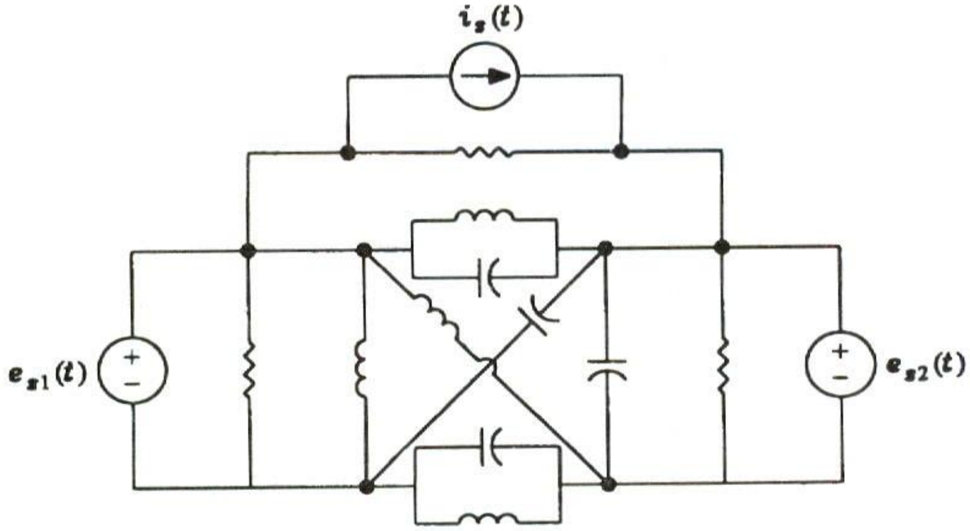
ت ـ بندهای ب و پ را هم از راه روش گره و هم از راه روش معادلات حالت حل کنید.

۲۰ـ فرکانس‌های طبیعی مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۲۰) و همچنین فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکهٔ v را به دست آورید. هرگونه اطلاعاتی که با توجه به شکل مدار و بدون محاسبه می‌توانید بگویید، بیان کنید.



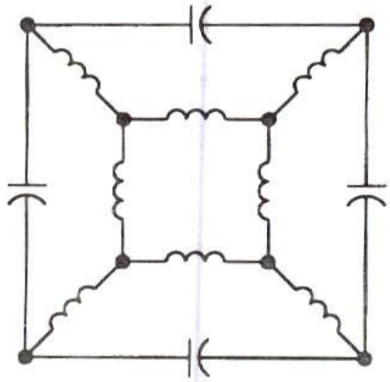
شکل (مسألهٔ ۱٤-۲۰)

۲۱ـ در مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۲۱) مقدار تمام عناصر را یک در نظر بگیرید. فرکانس‌های طبیعی غیرصفر این مدار را تعیین کنید.

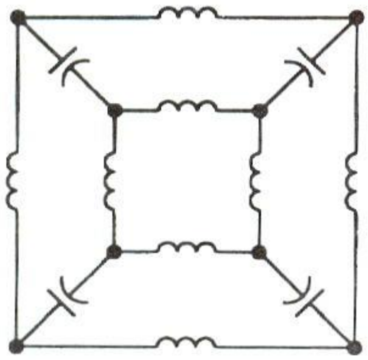


شکل (مسألهٔ ۱٤-۲۱)

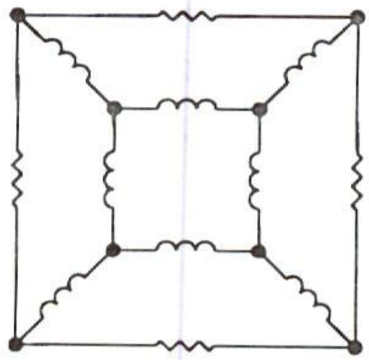
۲۲ـ در هر یک از مدارهای نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۴-۲۲)، در مورد مرتبهٔ مدار، تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر و غیرصفر و محل فرکانس‌های طبیعی هر چه می‌دانید با ذکر دلیل ولی بدون محاسبه بیان کنید. مقادیر عناصر نامشخص هستند.



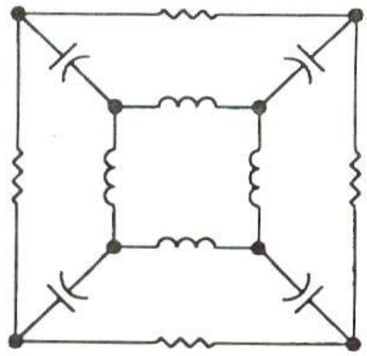
(الف)



(ب)



(پ)

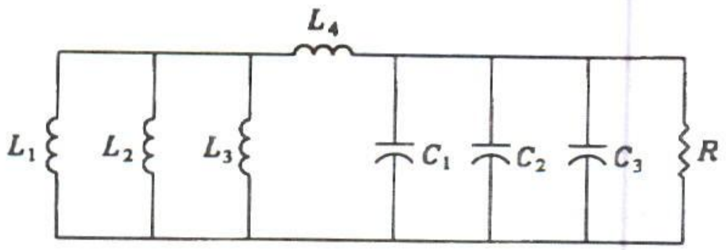


(ت)

شکل (مسألهٔ ۱۴-۲۲)

۲۳- الف - مدار شکل (مسألهٔ ۱۴-۲۳) چند فرکانس طبیعی صفر و چند فرکانس طبیعی غیرصفر دارد؟

ب - چنانچه بجای سلف L_4 یک مقاومت R اهمی دیگر قرار دهیم، بار دیگر تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر و غیرصفر را مشخص کنید. اگر مقاومتهای R هر کدام $\frac{1}{2}\,\Omega$ و $L_1 = L_2 = L_3 = 3H$ و $C_1 = C_2 = C_3 = \frac{1}{3}F$ باشند، فرکانس‌های طبیعی مدار را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۴-۲۳)