۱۳
تبدیلهای لاپلاس

هدف از این فصل، بحث و توسعهٔ درست آن مقدار از روش تبدیل لاپلاس است که ما را به استفاده از این روش در مطالعهٔ شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، قادر می‌سازد. تبدیل لاپلاس (با فامیل نزدیکش، تبدیل فوریه) یک وسیلهٔ اساسی برای مطالعهٔ سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان است. به عنوان مثال، در سیستم‌های الکترومکانیکی (میکروفون‌ها، بلندگوها، مبدل‌های الکترومغناطیسی و غیره) یا در سیستم‌های ارتباطی، که در آن‌جا خواص به هم پیوستن شبکه‌ها، آنتن‌ها و محیطهای انتشار را مطالعه می‌کنیم. تبدیل لاپلاس موضوع وسیعی است و بسیاری از مسائل مهندسی، با این روش و خواص آن، وابسته هستند. ما تنها آن خواص تبدیل لاپلاس را توسعه خواهیم داد که منظور کنونی ما را برمی‌آورد، لیکن دانشجویان در سایر درسهای خود، با جنبه‌های دیگر تبدیل لاپلاس آشنا شده و فرصتی برای درک عمیق این موضوع، به دست خواهند آورد.

باید تأکید شود که تبدیل لاپلاس، یک وسیلهٔ بسیار مهم و یک روش مؤثر برای مطالعهٔ شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشد. اما در مورد شبکه‌های تغییرپذیر با زمان و / یا غیرخطی، تقریباً بی‌فایده است. با افزایش اهمیت شبکه‌های غیرخطی و تغییرپذیر با زمان، تبدیل لاپلاس، آن اهمیت زیادی را که سابق براین، مثلاً ۳۰ سال پیش داشت، دیگر ندارد. در آن زمان بسیاری از مردم به سختی می‌توانستند میان نظریهٔ مدار و کاربردهای تبدیل لاپلاس، تفاوتهایی قائل شوند.

ما دو بخش اول این فصل را به ارائهٔ مختصری از خواص تبدیل لاپلاس که به منظورهای ما مربوط می‌شوند، اختصاص می‌دهیم. در بخش ۳ نشان می‌دهیم که چگونه تبدیل لاپلاس، در حل یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی تنها با ضرایب ثابت به‌کار می‌رود و توجه خاصی به نتایج نظریه‌ای مدار که از تجزیه و تحلیل انجام گرفته حاصل می‌شوند، خواهیم داشت. در بخش ۴، تکنیک‌های مهمی را برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت توسعه می‌دهیم و سپس در بخش ۵، با به‌کار بردن نتایج این تجزیه و تحلیل، پنج خاصیت کلی شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان را ثابت می‌کنیم. ما در مطالعهٔ مدارهای ساده به بعضی از این خواص، اشاره کردیم. این پنج خاصیت کلی، برای مهندسین برق اهمیت فوق‌العاده‌ای دارند و باید کاملاً آنها را درک کرد. در بخش ۶ ، تبدیل لاپلاس را به معادلات حالت اعمال می‌کنیم و در بخش ۷ نشان می‌دهیم که چگونه، مدل‌سازی ناشیانهٔ یک سیستم فیزیکی، می‌تواند حالتهای سودهٔ گیج‌کننده‌ای به‌وجود آورد. در بخش ۸ خاصیت مهم یکتایی جوابهای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان را که از مقاومت‌ها، خازن‌ها و سلف‌های پسیو تشکیل شده‌اند، به دست می‌آوریم.

۱- تعریف تبدیل لاپلاس

ابتدا مفهوم یک تبدیل را معرفی کرده و کاربرد آن را با یک مثال بسیار آشنا توجیه می‌کنیم. در روزگاران قدیم هنگامی که تمام اداره‌های مهندسی دارای ماشین حساب رومیزی و/ یا کامپیوتر الکترونیکی نبودند، اگر مهندسی می‌خواست دو عدد، مثلاً $a = ۱۷۲۳۹۵$ و $b = ۸۹۶۴۳۲$ را درهم ضرب کند، ممکن بود از لگاریتم استفاده کند، یعنی از رابطهٔ:

$$\log ab = \log a + \log b$$

لگاریتم حاصلضرب را به دست می‌آورد، و با توجه به این حقیقت که عدد یکتایی وجود دارد که لگاریتم آن برابر $\log ab$ می‌باشد، او می‌توانست حاصلضرب ab را به دست آورد. مزیت این روش در آن است که جمع اعداد خیلی آسانتر از ضرب آنها می‌باشد. به طریق مشابه، تبدیل لاپلاس، حل معادلات دیفرانسیل خطی را به حل معادلات جبری خطی کاهش می‌دهد. به جای اینکه یک عدد مثبت a را به عدد حقیقی دیگر $\log a$ مربوط سازیم، برای یک تابع زمانی که در فاصلهٔ $[0, \infty)$ تعریف می‌گردد، تبدیل لاپلاس، تابع دیگری را که در صفحهٔ فرکانس مختلط، یعنی صفحهٔ s، تعریف می‌شود، ارتباط می‌دهد.

اهمیت تبدیل لاپلاس، از حقایق دیگری نیز ناشی می‌شود. (۱) نظریهٔ تبدیل لاپلاس مفهوم تابع شبکه را به‌کار می‌برد. از آنجایی که توابع شبکه را می‌توان به طور تجربی با سنجش حالت دایمی سینوسی (در واقع با دقت بسیار زیاد) به دست آورد، تبدیل لاپلاس به ما کمک می‌کند که مسائل را برحسب توابع شبکه که کار کردن با آنها اغلب راحت‌تر از کار کردن با پاسخهای ضربه می‌باشد، تصور کنیم. (۲) تبدیل لاپلاس رابطهٔ نزدیکی را که میان رفتار حوزهٔ زمانی شبکه (مثلاً مانند شکل موجها روی اسیلوسکوپ) و رفتار حالت دایمی سینوسی آن وجود دارد، نمایش می‌دهد.

چنانکه قبلاً گفته شد، ایدهٔ اصلی تبدیل لاپلاس در این است که در مقابل یک تابع زمانی f که در فاصلهٔ زمانی $[0, \infty)$ تعریف می‌شود، تابع F از صفحهٔ فرکانس مختلط s را مربوط می‌سازد. این تبدیل به طریق زیر ساخته می‌شود: ابتدا $f(t)$ را در عبارت e^{-st} ضرب می‌کنیم و از تابع به دست آمده برحسب t، یعنی $f(t)e^{-st}$، در فاصلهٔ 0^- تا ∞ انتگرال می‌گیریم و چنین به دست می‌آوریم:

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

با توجه به اینکه این انتگرال، یک انتگرال معین است (حدود 0^- و ∞ ثابت هستند)، حاصل آن به t بستگی نداشته و تنها به پارامتر s وابسته می‌باشد. بنابراین نتیجهٔ آن تابعی از فرکانس مختلط s می‌باشد. تابعی را که با این انتگرال تعریف می‌گردد، $F(s)$ بنامید، یعنی:

$$\boxed{F(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt} \qquad (۱-۱)$$

انتگرال سمت راست را **انتگرال تعریف کننده**، $F(s)$ را **تبدیل لاپلاس** $f(t)$ و متغیر s را **فرکانس مختلط** می‌نامند. برای متمایز ساختن F از f، اغلب f را به عنوان "تابع زمانی" و F را به عنوان "تبدیل لاپلاس" اطلاق می‌کنیم. معادلهٔ (۱−۱) را به صورت زیر نیز می‌نویسیم:

$$F(t) = \mathfrak{L}[f(t)]$$

که در آن $\mathfrak{L}$، "تبدیل لاپلاسِ" خوانده می‌شود.

تبصرهٔ ۱ توجه کنید که ما 0^- را به عنوان حد پایین انتگرال به کار می‌بریم. این کار به خاطر تأکید این حقیقت صورت می‌گیرد که اگر تابع زمانی f شامل ضربه‌ای در $t = 0$ باشد، انتگرال تعریف کننده، این ضربه را در برخواهد داشت.

تبصرهٔ ۲ انتگرال (۱−۱) را باید به عنوان نتیجهٔ دو عمل حدگیری تعبیر کرد:

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \lim_{T \to \infty} \int_{-\varepsilon}^{T} f(t)e^{-st}dt$$

عمل حدگیری $\varepsilon \to 0$ معمولاً هیچ اشکالی به وجود نمی‌آورد، زیرا برای $t < 0$، f یا به طور متحد برابر صفر است یا خوش رفتار است. عمل حدگیری $T \to \infty$ ممکن است تولید اشکال کند، زیرا هنگامی که فاصلهٔ انتگرال‌گیری بی‌نهایت بزرگ می‌شود، سطح خالص زیر منحنی $f(t)e^{-st}$ ممکن است به سمت بی‌نهایت برود، یا به سوی هیچ مقدار خاصی میل نکند. راه چارهٔ معمولی این است که s را چنان محدود کنیم که دارای جزء حقیقی مثبت و بزرگی باشد به قسمی که ضریب وزنی e^{-st} به سرعت به سمت صفر میل کند و در نتیجه انتگرال، یعنی سطح مورد نظر، پایاندار گردد.

تبصرهٔ ۳ برای نشان دادن تبدیلهای لاپلاس، در همه‌جا حروف بزرگ را به کار خواهیم برد. بنابراین تبدیلهای لاپلاس $v(t)$ و $j(t)$ به ترتیب $V(s)$ و $J(s)$ می‌باشند. به علاوه چون با تابع زمانی و تبدیل لاپلاس آن به طور همزمان سروکار داریم، طرز نمایش تابعی تبدیل لاپلاس مانند $V(0)$، به کار برده نمی‌شود، زیرا می‌خواهیم بدانیم که متغیر نابستهٔ یک تابع کدام است. طرز نمایش (0) این‌گونه اطلاعات را به ما نمی‌دهد. بدین ترتیب، طرز نمایش تابعی، حتی برای یک تابع زمانی مانند $v(0)$ الزامی نیست؛ هنگامی که بخواهیم تأکیدی روی متغیر نابستهٔ t یک تابع زمانی انجام گیرد، تابع ولتاژ $v(t)$ را در مقابل تبدیل لاپلاس آن $V(s)$ می‌نویسیم.

مثال ۱ فرض کنید $f(t) = u(t)$ تابع پلهٔ واحد باشد. انتگرال تعریف کننده چنین است:

$$\int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt \qquad (۱-۲)$$

فرض کنید s را یک عدد حقیقی مثبت مانند $\sigma > 0$ بگیریم. در این صورت، تابع مورد انتگرال‌گیری (۱−۲)، $e^{-\sigma t}$ می‌باشد که یک نمایی میرا است. واضح است که سطح زیر یک نمایی میرا پایاندار است.

در حقیقت:

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-\sigma t} dt = \frac{e^{-\sigma t}}{-\sigma}\bigg|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{\sigma}$$

در اینجا، از این حقیقت استفاده کردیم که (در حالت $\sigma > 0$) اگر $t \to \infty$ ، داریم $e^{-\sigma t} \to 0$. اگر s یک عدد حقیقی منفی مانند $-a$ (با $a > 0$) می‌بود، تابع مورد انتگرال‌گیری به صورت e^{at} یعنی یک نمایی افزایشی درمی‌آمد. واضح است که سطح زیر یک چنین منحنی بی‌پایان است. به عبارت دیگر، وقتی s حقیقی و منفی باشد انتگرال (۱-۲) "می‌ترکد"، یعنی انتگرال تعریف کنندهٔ (۱-۲) بی‌پایان می‌گردد.

اگر فرکانس مختلط s به صورت $s = \sigma + j\omega$ باشد (که در اینجا σ و ω به ترتیب جزءهای حقیقی و انگاری s هستند) و $\sigma > 0$ ، انتگرال (۱-۲) ممکن است به صورت زیر نوشته شود:

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\sigma t}\cos\omega t\, dt - j\int_{0^-}^{\infty} e^{-\sigma t}\sin\omega t\, dt$$

با توجه به اینکه $\sigma > 0$ است، تابع مورد انتگرال‌گیری در هر انتگرال، یک سینوسی میرای نمایی است و بنابراین هر انتگرال، عدد خوش‌تعریفی است. بهتر است که برای منظورهای محاسباتی، صورت نمایی زیر را به کار ببریم:

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \frac{e^{-(\sigma+j\omega)t}}{-(\sigma+j\omega)}\bigg|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{\sigma+j\omega} \qquad \text{برای } \sigma > 0$$

بنابراین نشان دادیم که:

$$\mathfrak{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \qquad \text{برای } \operatorname{Re}(s) > 0 \qquad (۱-۳)$$

هنگامی که دقیق‌تر صحبت کنیم، تبدیل لاپلاس $u(t)$ تنها برای $\operatorname{Re}(s) > 0$ تعریف می‌شود. لیکن برای تمام مقادیر s جز $s = 0$ ، تبدیل لاپلاس $\frac{1}{s}$ را به صورت تابع مشخص شدهٔ خوش تعریفی در نظر می‌گیریم (در حقیقت، وقتی که $s = 0$ است، مخرج کسر صفر بوده و عبارت $\frac{1}{s}$ بی‌معنی می‌باشد). این مفهوم بزرگ کردن دامنهٔ یک تابع را، معمولاً پیوستگی تحلیلی می‌گویند.

مثال ۲ فرض کنید a یک عدد حقیقی و یا مختلط دلخواه باشد. تبدیل لاپلاس e^{at} به موجب تعریف، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathfrak{L}[e^{at}] = \int_{0^-}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\bigg|_{0^-}^{\infty}$$

بنابراین:

$$\mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \qquad \text{برای} \quad \mathrm{Re}(s-a) > 0 \qquad (۱-۴)$$

بار دیگر ، تبدیل لاپلاس e^{at} یعنی تابع $\frac{1}{s-a}$ را برای تمام مقادیر s جز $s = a$ ، به صورت تابع خوش‌تعریفی در نظر خواهیم گرفت.

تبصرهٔ ۱ دو تبدیل لاپلاسی که در بالا (معادلات (۱-۳) و (۱-۴)) محاسبه شدند، مثالهای ساده‌ای از تبدیلات لاپلاس هستند که توابع گویایی از s می‌باشند. هر تابعی از s را که به صورت نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s باشد، یک **تابع گویا** برحسب s می‌نامند. در این دو مثال، چندجمله‌ای صورت کسر، یک چندجمله‌ای با مقدار ثابت ۱ بود. در بیشتر کاربردها، تبدیلات لاپلاس حاصل، توابع گویایی خواهند بود. دربارهٔ توابع گویا، در بخش ۳ و فصل ۱۵، بحث بیشتری خواهیم کرد.

تبصرهٔ ۲ از دیدگاه منطقی دقیق، انتگرال تعریف کننده در معادلهٔ (۱-۴)، تبدیل لاپلاس $\frac{1}{s-a}$ را تنها برای $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$ تعریف می‌کند. از طرف دیگر ، عبارت $\frac{1}{s-a}$ ، برای تمام مقادیر s (جز $s = a$ که به‌ازای آن مخرج برابر صفر است) تابعی از فرکانس مختلط s را تعریف می‌کند. بنابراین، به طور حسی، معقول است که برای تمام مقادیر s جز $s = a$ ، تبدیل لاپلاس $\frac{1}{s-a}$ را تعریف شده در نظر بگیریم. این عمل تعمیم را می‌توان با استفاده از تکنیک پیوستگی تحلیلی، به طور دقیق توجیه نمود.

اکنون مثال مشابهی را از ریاضیات بیان می‌کنیم. سری توانی، $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ را در نظر می‌گیریم. این سری، یک سری هندسی است که برای $|x| < 1$ همگرا است و مجموع این سری، $\frac{1}{1-x}$ می‌باشد. به‌طور دقیق این سری تنها در فاصلهٔ $(-1 , 1)$ تابعی را مشخص می‌کند، لیکن عبارت $\frac{1}{1-x}$ برای تمام مقادیر x جز $x = 1$ تابعی را تعریف می‌کند.

مثال ۳ فرض کنید $f(t) = e^{t^2}$ ، در این صورت:

$$\mathfrak{L}[e^{t^2}] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} e^{t^2} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st+t^2} dt \qquad (۱-۵)$$

برای هر مقدار مشخص s ، هر قدر هم که بزرگ باشد، وقتی $t > |s|$ گردد، نمای $t^2 - st$ با افزایش t به‌طور یکنوا، افزایش خواهد یافت. هنگامی که $t \to \infty$ ، تابع مورد انتگرال‌گیری، به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد. واضح است که انتگرال "می‌ترکد". بنابراین، هیچ مقداری برای s وجود ندارد که به‌ازای آن رابطهٔ (۱-۵) معنی‌دار باشد و گوییم که e^{t^2} قابل تبدیل لاپلاس گرفتن نیست یا e^{t^2} دارای تبدیل لاپلاس نمی‌باشد.

مثال ٤ فرض کنید $f(t) = \delta(t)$ ، در این صورت:

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

این مثالی است که درآن، برای تمام مقادیر حقیقی و مختلط s ، انتگرال تعریف کننده دارای معنی است.

در سراسر این فصل، به طور ضمنی فرض خواهیم کرد تمام توابعی که مورد نظر ما هستند، دارای تبدیل لاپلاس می‌باشند. باید تأکید شود که این موضوع، هیچگونه محدودیتی در نتایج مهم نظریه‌ای مدار بخش ۵، ایجاد نمی‌کند. این نتایج، حتی در مورد ورودی‌هایی به شکل e^{t^2} نیز به کار می‌رود، زیرا تنها در یک زمان پایانداری، خواص پاسخ، مورد توجه ما است. فرض کنید بخواهیم پاسخ به، مثلاً e^{t^2} را در زمانی مانند t_1 (t_1 می‌تواند هر اندازه که بخواهیم بزرگ باشد، ولی در طول این بحث مقدار آن ثابت است) محاسبه کنیم. در این‌جا، تنها لازم است که تابع زیر را به عنوان ورودی انتخاب کنیم:

$$f(t) = \begin{cases} e^{t^2} & 0 \le t \le t_1 + 1 \quad \text{برای} \\ 0 & t > t_1 + 1 \quad \text{برای} \end{cases}$$

واضح است که در زمان t_1 ، پاسخ هر شبکه به ورودی $f(t)$ ، با پاسخ همان شبکه به ورودی e^{t^2} ، یکسان خواهد بود. با این وجود $f(t)$ ، دارای تبدیل لاپلاس کاملاً خوش تعریفی می‌باشد. در خاتمه با در نظر گرفتن این حقیقت که وقتی $t \to \infty$ ، بعضی از ورودی‌ها ممکن است با سرعتی بزرگ شوند که دارای تبدیل لاپلاس نباشند، با این وجود نتایج کلی بخش ۵ هنوز معتبر خواهند بود.

۲- خواص اساسی تبدیل لاپلاس

تنها آن خواص اساسی تبدیل لاپلاس را در زیر تشریح می‌کنیم که در مطالعهٔ شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان برای ما مفید هستند.

۲-۱ یکتایی

خاصیت یکتایی همان قدر اساسی است که به طور حسی واضح است. این بدان معنی است که اگر بدانیم تابع داده شده‌ای از فرکانس مختلط s، مثلاً $F(s)$ ، تبدیل لاپلاس یک تابع زمانی، مثلاً $f(t)$ ، باشد و اگر تابع زمانی دیگری مثلاً $g(t)$ نیز دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد، در این صورت تفاوت تابع $g(t)$ با تابع $f(t)$ خیلی جزئی است.

فرض کنید f را تابع پلهٔ واحد بگیریم. بنابراین:

$$f(t) = \begin{cases} ۱ & t > ۰ \quad \text{برای} \\ ۰/۵ & t = ۰ \quad \text{برای} \\ ۰ & t < ۰ \quad \text{برای} \end{cases}$$

در این صورت $F(s) = \frac{۱}{s}$. اکنون به سادگی می‌توان بررسی کرد که اگر تنها عرض f را در نقطهٔ $t = ۰$ تغییر دهیم و بدین ترتیب (وقتی دقیق‌تر صحبت کنیم) تابع جدید $g(t)$ را به دست آوریم، به عنوان مثال خواهیم داشت:

$$g(t) = \begin{cases} ۱ & t > ۰ \quad \text{برای} \\ ۱ & t = ۰ \quad \text{برای} \\ ۰ & t < ۰ \quad \text{برای} \end{cases}$$

در این صورت، $\mathfrak{L}[g(t)] = \frac{۱}{s}$. واضح است برای منظورهایی که ما داریم، تفاوت میان f و g بسیار جزئی است.

یک حقیقت مهم و عمیق آنالیز این است که، به استثنای آن تفاوتهای جزئی، یک تابع زمانی با تبدیل لاپلاس خود، به طور یکتا مشخص می‌شود. البته روشن است که چون انتگرال تعریف کننده برای فاصلهٔ $[۰, \infty)$ تعریف می‌شود، ممکن است که برای $t < ۰$ ، تابع زمانی دلخواه باشد. بحث بیشتر این موضوع، بعداً داده خواهد شد.

با به خاطر سپردن این خاصیت یکتایی، باید دوباره به تشابه آن با لگاریتم‌ها به صورت زیر توجه کنیم:

$$\begin{array}{c|c} f(t) \xrightarrow{\text{به‌طور یکتا}} F(s) & a \xrightarrow{\text{به‌طور یکتا}} \log a \\ f(t) \xleftarrow{\text{به‌طور یکتا}} F(s) & a \xleftarrow{\text{به‌طور یکتا}} \log a \end{array}$$

این خاصیت یکتایی، برای تمام کاربردهای تبدیل لاپلاس، اساسی است. متأسفانه اثبات آن بسیار پیچیده بوده و ما را از مطلب اصلی بسیار دور خواهد نمود.

اکنون می‌دانیم که تبدیل لاپلاس $F(s)$ یک تابع زمانی داده شدهٔ $f(t)$، توسط انتگرال تعریف کنندهٔ آن، به طور یکتایی مشخص می‌گردد. این حقیقت به طور نمایشی با طرز نمایش زیر نشان داده شده است:

$$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] \qquad (۱-۲)$$

که در این‌جا، $\mathfrak{L}[\cdot]$ را می‌توان به عنوان اپراتور $\int_{۰^-}^{\infty} \cdot e^{-st}dt$ تصور کرد که تابع زمانی را به تبدیل لاپلاس آن می‌نگارد. برعکس، برای یک تبدیل لاپلاس $F(s)$ داده شده، می‌دانیم که (جز برای بعضی جزئیات) تابع زمانی یکتای $f(t)$ در فاصلهٔ $[۰, \infty)$ وجود دارد به قسمی که رابطهٔ (۲-۱) برقرار است. این حقیقت،

با رابطهٔ زیر نمایش داده می‌شود:

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] \qquad (۲-۲)$$

این معادله، بدان معنی است که $f(t)$ تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ می‌باشد.

۲-۲ خطی بودن

دومین خاصیت مهم تبدیل لاپلاس، خطی بودن آن است. تبدیل لاپلاس $\mathfrak{L}[\cdot]$ را به عنوان تبدیلی که بتوان آن را در مورد طبقهٔ بسیار بزرگی از توابع زمانی اعمال کرد در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس، تابعی از s را به هر یک از این توابع زمانی اختصاص می‌دهد که همان تبدیل لاپلاس تابع زمانی داده شده می‌باشد. بنابراین، می‌توان خود تبدیل لاپلاس را به عنوان تابعی که توابع زمانی را به تبدیلهای لاپلاس آنها می‌نگارد، در نظر گرفت. خاصیت خطی بودن بیان می‌دارد که تبدیل لاپلاس، یک تابع خطی است. با مراجعه به تعریف تابع خطی (پیوست الف را ببینید) ملاحظه می‌کنیم که خطی بودن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیه فرض کنید f_1 و f_2 دو تابع زمانی دلخواه و c_1 و c_2 دو ثابت اختیاری باشند. در این صورت:

$$\mathfrak{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathfrak{L}[f_1(t)] + c_2 \mathfrak{L}[f_2(t)] \qquad (۳-۲)$$

اثبات مطابق تعریف، طرف چپ این رابطه چنین است:

$$\mathfrak{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\,dt$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} c_1 f_1(t)dt + \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} c_2 f_2(t)dt$$

زیرا انتگرال مجموع چند عبارت، برابر مجموع انتگرال‌های هر یک از آن عبارتهاست. با به‌خاطر آوردن اینکه c_1 و c_2 ثابت هستند، می‌توان آنها را از زیر علامت انتگرال بیرون کشیده و به دست آورد:

$$\mathfrak{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_1(t)dt + c_2 \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_2(t)dt$$

$$= c_1 \mathfrak{L}[f_1(t)] + c_2 \mathfrak{L}[f_2(t)]$$

کاربرد با به کاربردن این حقیقت که $\mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$، به دست می‌آوریم:

$$\mathfrak{L}[\cos \beta t] = \mathfrak{L}\left[\frac{1}{2} e^{j\beta t} + \frac{1}{2} e^{-j\beta t}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\beta} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\beta}$$

بنابراین:

$$\mathfrak{L}[\cos \beta t] = \frac{s}{s^2 + \beta^2} \qquad (۴-۲)$$

به طریق مشابه:

$$\mathfrak{L}[\sin \beta t] = \mathfrak{L}\left[\frac{۱}{۲j} e^{j\beta t} - \frac{۱}{۲j} e^{-j\beta t}\right]$$

$$= \frac{\beta}{s^{۲} + \beta^{۲}} \quad (۵-۲)$$

تمرین نشان دهید که:

$$\mathfrak{L}[e^{\alpha t} \cos \beta t] = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^{۲} + \beta^{۲}} \quad (۶-۲)$$

$$\mathfrak{L}[e^{\alpha t} \sin \beta t] = \frac{\beta}{(s - \alpha)^{۲} + \beta^{۲}} \quad (۷-۲)$$

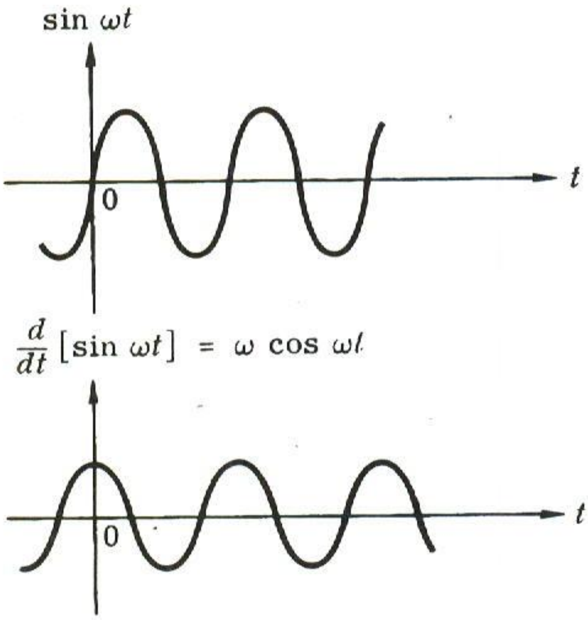
۲-۳ قاعدهٔ مشتق‌گیری

سومین خاصیت مهم تبدیل لاپلاس، رابطهٔ ساده‌ای است که میان تبدیل لاپلاس یک تابع f و تبدیل لاپلاس مشتق آن $\frac{df}{dt}$ وجود دارد. برای اینکه نکاتی را روشن کنیم، چند مثال در نظر می‌گیریم.

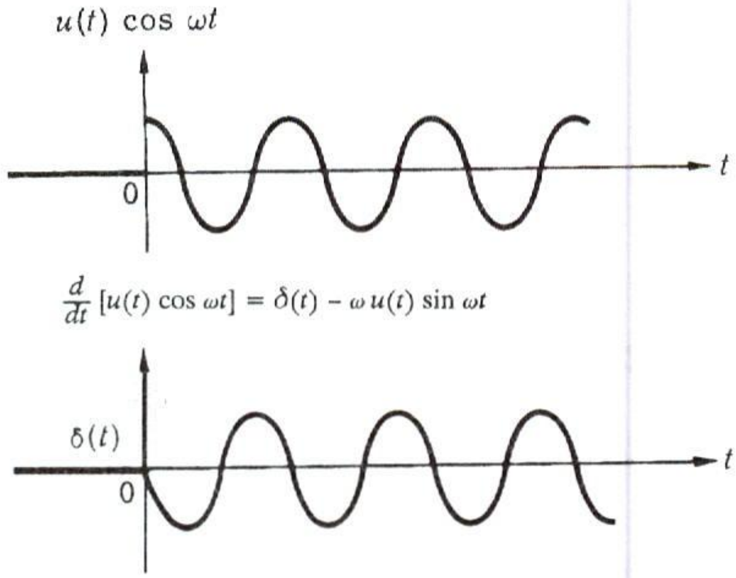
مثال ۱ اکنون $\mathfrak{L}[\sin \omega t]$ را در نظر بگیرید. با مشتق‌گیری از تابع زمانی $\sin \omega t$ برای تمام t ، تابع $\omega \cos \omega t$ را به دست می‌آوریم (شکل (۲-۱) را ببینید). توجه کنید که:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d}{dt} \sin \omega t\right] = \mathfrak{L}[\omega \cos \omega t] = \omega \frac{s}{s^{۲} + \omega^{۲}} = s\mathfrak{L}[\sin \omega t]$$

مثال ۲ تابع $u(t) \cos \omega t$ را که در شکل (۲-۲) نشان داده شده است، در نظر بگیرید. با مشتق‌گیری از این تابع زمانی، به دست می‌آوریم:



شکل ۲-۱ توابع زمانی مثال ۱.



شکل ۲-۲ توابع زمانی مثال ۲.

$$\frac{d}{dt}[u(t)\cos\omega t] = \frac{du(t)}{dt}\cos\omega t + u(t)[-\omega\sin\omega t]$$

$$= \delta(t) - \omega u(t)\sin\omega t$$

این منحنی نیز در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. در این صورت:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}[u(t)\cos\omega t]\right\} = ۱ - \frac{\omega^۲}{s^۲+\omega^۲} = s\frac{s}{s^۲+\omega^۲} = s\mathfrak{L}[u(t)\cos\omega t]$$

این مثالها پیشنهاد می‌کنند که تبدیل لاپلاس $\frac{df}{dt}$ مساوی s برابر تبدیل لاپلاس f است. لیکن چنانچه در مثال بعدی می‌بینیم، در حالت کلی چنین نیست.

مثال ۳ تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(t) = \begin{cases} -۱ & t < ۰ \quad \text{برای} \\ e^{at} & t \geq ۰ \quad \text{برای} \end{cases}$$

منحنی تابع f در شکل (۲-۳) نشان داده شده است، تبدیل لاپلاس $f(t)$ چنین است:

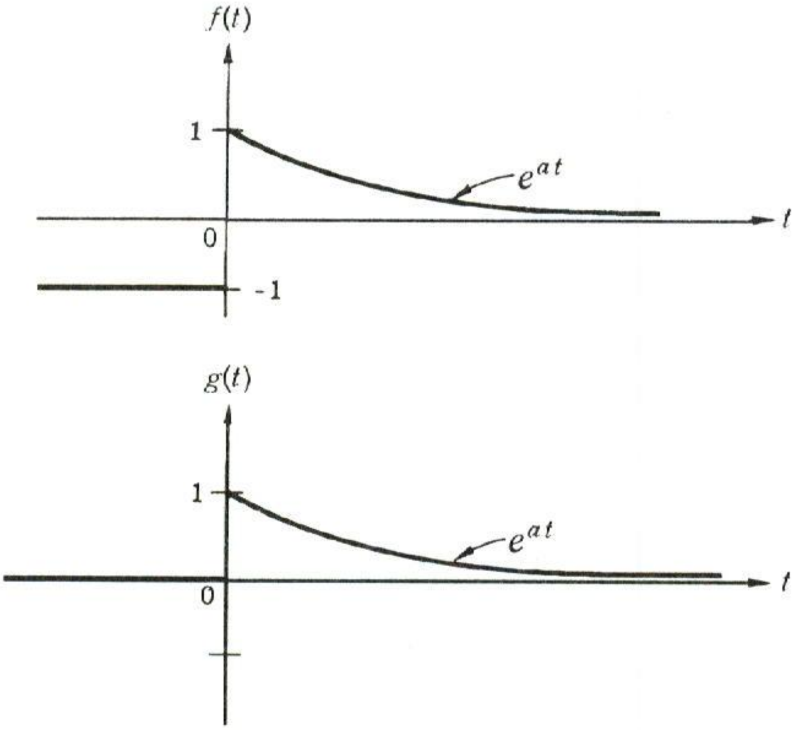
$$\mathfrak{L}[f(t)] = \int_{۰^-}^{\infty} e^{at}e^{-st}dt = \frac{۱}{s-a}$$

اکنون با مراجعه به شکل (۲-۳) و مشاهدهٔ اینکه $f(۰^+) - f(۰^-) = ۲$ است، به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt}f(t) = ۲\delta(t) + ae^{at}$$

و:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = ۲ + \frac{a}{s-a} = \frac{۲s-a}{s-a}$$



شکل ۲-۳ توابع زمانی مثال ۳.

فرض کنید تابع f را با صفر قرار دادن مقدار آن برای $t < ۰$ اصلاح کنیم. بنابراین، تابع جدید g را به دست می‌آوریم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۰ \quad \text{برای} \\ e^{at} & t \geq ۰ \quad \text{برای} \end{cases}$$

واضح است که:

$$\mathfrak{L}[g(t)] = \mathfrak{L}[e^{at}] = \mathfrak{L}[f(t)] = \frac{۱}{s-a}$$

اما:

$$\frac{d}{dt}g(t) = \delta(t) + ae^{at}$$

و بنابراین:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d}{dt}g(t)\right] = ۱ + \frac{a}{s-a} = \frac{s}{s-a}$$

تبدیل لاپلاس $\frac{dg}{dt}$ با تبدیل لاپلاس $\frac{df}{dt}$ متفاوت است، زیرا اندازهٔ جهش g در $t = ۰$ برابر ۱ بوده در حالی که جهش f برابر ۲ است.

این مثالها نشان می‌دهند که تبدیل لاپلاس $\frac{df}{dt}$ به اندازهٔ جهش در $t = ۰$ ، یعنی $f(۰^+) - f(۰^-)$

بستگی دارد. این ملاحظات باید مطلب زیر را طبیعی‌تر جلوه دهد:

قضیهٔ مشتق‌گیری

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\mathfrak{L}[f(t)] - f(0^-) \qquad (۲-۸)$$

توجه به این نکته حائز اهمیت است که هر وقت مشتق را در رابطهٔ (۲-۸) حساب می‌کنیم، هر جا که f دارای جهشی باشد، تابع ضربهٔ وزن‌دار مناسبی قرار می‌دهیم. انتگرال تعریف کنندهٔ تبدیل لاپلاس نیز از 0^- شروع می‌شود و بنابراین تأثیر کامل هر تابع ضربهٔ موجود در مبدأ را شامل می‌شود.

اثبات با انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-s)e^{-st}dt \qquad (۲-۹)$$

$$= s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt - f(0^-) = s\mathfrak{L}[f(t)] - f(0^-)$$

در این جا دوباره این مطلب را به کار می‌بریم که $\mathrm{Re}(s)$ آنقدر بزرگ انتخاب می‌شود که هرگاه $t \to \infty$، داشته باشیم $f(t)e^{-st} \to 0$.

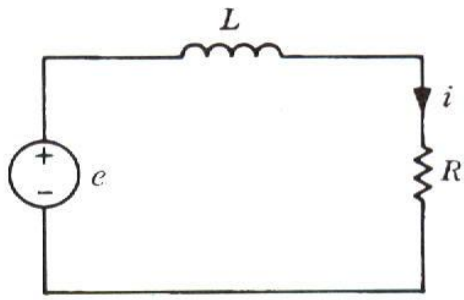
مثال ٤ از $\mathfrak{L}[\delta(t)] = 1$ به دست می‌آوریم:

$$\mathfrak{L}[\delta^{(1)}(t)] = s\,,\ \ \mathfrak{L}[\delta^{(2)}(t)] = s^2, \cdots,\ \ \mathfrak{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n \qquad (۲-۱۰)$$

مثال ۵ می‌خواهیم پاسخ ضربهٔ مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۲-۴) را که در آن e ورودی و i پاسخ می‌باشد، حساب کنیم. ورودی، $e(t) = \delta(t)$ بوده، و مطابق تعریف پاسخ ضربه، $i(0^-) = 0$ است، زیرا مدار باید پیش از اعمال ضربه در حالت صفر باشد. فرض کنید طرز نمایش سابق را به کار ببریم و h را پاسخ ضربه بنامیم. معادلهٔ دیفرانسیل مدار چنین است:

$$L\frac{dh}{dt} + Rh = \delta(t) \qquad h(0^-) = 0$$

اکنون از هر دو طرف رابطهٔ فوق، به صورت زیر تبدیل لاپلاس می‌گیریم:



شکل ۲-٤ مدار خطی تغییرناپذیر با زمان مثال ۵.

$$\mathfrak{L}\left[L\frac{dh}{dt}+Rh\right]=\mathfrak{L}[\delta(t)]=1$$

از خاصیت خطی بودن (با توجه به اینکه R و L ثابت هستند)، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$L\mathfrak{L}\left[\frac{dh}{dt}\right]+R\mathfrak{L}[h]=1$$

با به کار بردن قاعدهٔ مشتق‌گیری و شرط اولیه، به دست می‌آوریم:

$$(Ls+R)\mathfrak{L}[h(t)]=1$$

زیرا $h(0-)=0$. بنابراین:

$$\mathfrak{L}[h(t)]=\frac{1}{Ls+R}=\frac{1}{L}\frac{1}{s+\frac{R}{L}} \qquad (۲-۱۱)$$

و از این‌رو:

$$h(t)=\frac{1}{L}u(t)e^{-(\frac{R}{L})t} \qquad \text{برای تمام } t \qquad (۲-۱۲)$$

باید تذکر داده شود که روش تبدیل لاپلاس، جوابها را تنها برای $t\geq 0$ به دست می‌دهد. این حقیقت که تابع پلهٔ $u(t)$ در (۲-۱۲) به کار رفته است، ناشی از این مطلب فیزیکی است که پاسخ مدار، پیش از اعمال ضربه، مساوی صفر است.

از کاربرد مکرر قضیهٔ مشتق‌گیری، قضیهٔ فرعی زیر را به دست می‌آوریم:

قضیهٔ فرعی

$$\mathfrak{L}[f^{(2)}(t)]=s^2\mathfrak{L}[f(t)]-sf(0-)-f^{(1)}(0-)$$

$$\mathfrak{L}[f^{(3)}(t)]=s^3\mathfrak{L}[f(t)]-s^2f(0-)-sf^{(1)}(0-)-f^{(2)}(0-)$$

و به طور کلی:

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}(t)]=s^n\mathfrak{L}[f(t)]-s^{n-1}f(0-)-\cdots-sf^{(n-2)}(0-)-f^{(n-1)}(0-)$$

۲-٤ قاعدهٔ انتگرال‌گیری

این خاصیت، عکس مشتق‌گیری است ولی تعبیر دقیق آن حائز اهمیت است. قاعدهٔ انتگرال‌گیری، تبدیل لاپلاس یک تابع داده شدهٔ f را به تبدیل لاپلاس انتگرال آن، $\int_{0-}^{t} f(t')dt'$ مربوط می‌سازد. به عبارت دقیق‌تر، قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ انتگرال‌گیری

$$\mathfrak{L}\left[\int_{0-}^{t} f(t')\,dt'\right]=\frac{1}{s}\mathfrak{L}[f(t)] \qquad (۲-۱۳)$$

توجه کنید که انتگرال‌گیری تابع را از $-$۰ شروع می‌کنیم. بنابراین چنانچه f شامل توابع ضربه در $t = ۰$ باشد، تأثیر کامل آنها در انتگرال گنجانیده خواهد شد.

اثبات دوباره انتگرال‌گیری جزء به جزء را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$\mathfrak{L}\left[\int_{۰^-}^{t} f(t')dt'\right] = \int_{۰^-}^{\infty}\left[\int_{۰^-}^{t} f(t')dt'\right]e^{-st}dt$$

$$= \left[\int_{۰^-}^{t} f(t')dt'\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_{۰^-}^{\infty} - \int_{۰^-}^{\infty} f(t)\left(-\frac{۱}{s}\right)e^{-st}dt$$

جملهٔ اول صفر است. زیرا برای $t = ۰^-$، مقدار انتگرال برابر صفر است و برای $t \to \infty$، با در نظر گرفتن اینکه $\mathrm{Re}(s)$ به قدر کافی بزرگ است، از این‌رو e^{-st} آنقدر سریع به سوی صفر میل می‌کند که موجب می‌شود تمام عبارت به سمت صفر برود. در نتیجه:

$$\mathfrak{L}\left[\int_{۰^-}^{t} f(t')dt'\right] = \frac{۱}{s}\int_{۰^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \frac{۱}{s}\,\mathfrak{L}[f(t)]$$

مثال ۶ از روابط $\int_{۰^-}^{t}\delta(t')dt' = u(t)$ و $\mathfrak{L}[\delta(t)] = ۱$ نتیجه می‌گیریم $\mathfrak{L}[u(t)] = \frac{۱}{s}$.

مثال ۷ با انتگرال‌گیری متوالی از تابع پلهٔ واحد، به دست می‌آوریم:

$$\int_{۰^-}^{t} u(t')dt' = t \qquad \int_{۰^-}^{t} t'\,dt' = \frac{t^۲}{۲} \qquad \int_{۰^-}^{t}\frac{t'^۲}{۲}dt' = \frac{t^۳}{۳!}$$

و:

$$\int_{۰^-}^{t}\frac{t'^k}{k!}dt' = \frac{t^{k+۱}}{(k+۱)!}$$ برای هر عدد صحیح k

در نتیجه:

(۱۴-۲) $$\mathfrak{L}[t] = \frac{۱}{s^۲} \qquad \mathfrak{L}\left[\frac{t^۲}{۲!}\right] = \frac{۱}{s^۳}$$

و:

(۱۵-۲) $$\mathfrak{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{۱}{s^{n+۱}}$$ برای هر عدد صحیح n

---

مثال ۸ فرض کنیم $f(\cdot)$ یک پالس مستطیلی باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۱ \\ ۱ & ۱ \le t \le ۳ \\ ۰ & t > ۳ \end{cases}$$

در این صورت، تبدیل لاپلاس آن چنین است:

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{1}^{3} e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{1}^{3} = \frac{e^{-s} - e^{-3s}}{s}$$

مثال ۹ فرض کنیم $f(\cdot)$ شکل موجی باشد که برای $t < 0$ به طور متحد برابر صفر بوده و تبدیل لاپلاس آن $F(s)$ باشد. می‌خواهیم تبدیل لاپلاس شکل موج $f_\tau(\cdot)$ که تأخیر یافتهٔ شکل موج $f(\cdot)$ به مقدار τ ثانیه است (دراینجا $\tau > 0$ است) را پیدا کنیم. ابتدا توجه کنید که برای تمام t، $u(t)f(t) = f(t)$.
در این صورت، مطابق تعریف $f_\tau(\cdot)$ داریم:

$$f_\tau(t) = u(t-\tau)f(t-\tau) \qquad \text{برای تمام } t$$

و:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f_\tau(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} u(t-\tau)f(t-\tau)e^{-st}dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} u(t')f(t')e^{-s(t'+\tau)}dt' \\ &= e^{-s\tau}\int_{0^-}^{\infty} f(t')e^{-st'}dt' = e^{-s\tau}F(s)\end{aligned}$$

تبصره از آنجا که تبدیل لاپلاس ماهیت تابع زمانی قبل از $t = 0^-$ را پنهان می‌سازد، بنابراین می‌توان هر تابع زمانی مورد مطالعه را برای $t < 0$ به صورت $f(t) = 0$ در نظر گرفت و معمولاً راحت‌تر است که چنین عمل شود. با این تفسیر، همیشه $f(0^-) = 0$ را خواهیم داشت. هنگام به کار بردن قاعدهٔ مشتق‌گیری، نباید ضربه‌هایی را که ممکن است در اثر مشتق‌گیری تابع زمانی به دست آمده در مبدأ حاصل می‌شوند، فراموش کرد.

این مطالعه، بررسی مختصر ما را از خواص تبدیل لاپلاس خاتمه می‌دهد. البته تبدیل لاپلاس خواص زیاد دیگری دارد که در بعضی از مطالعات دیگر، بسیار مفید هستند. لیکن ما قادر خواهیم بود که تنها با چهار خاصیت ذکر شده در بالا و خاصیت کانولوشن که بعداً آن را به دست خواهیم آورد، مطالب خود را بیان کنیم.

فهرستی از تبدیلهای لاپلاس بعضی از توابع زمانی که مکرراً با آنها مواجه می‌شویم، در جدول (۱۳-۱) داده شده است.

تمرین ۱ رابطهٔ (۲-۱۳) را با استفاده از (۲-۸)، به دست آورید. [راهنمایی: انتگرال سمت چپ رابطهٔ (۲-۱۳) را $g(t)$ نامیده و سپس $g(0^-)$ و $\frac{dg}{dt}$ را پیدا کرده و (۲-۸) را اعمال کنید.]

تمرین ۲ درستی چهار سطر آخر جدول (۱۳-۱) را تحقیق کنید.

جدول (۱۳-۱) تبدیلهای لاپلاس توابع ساده

$f(t)$	$F(s) \triangleq \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	$s^n \qquad (n = 1, 2, \cdots)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$
e^{-at} (a حقیقی یا مختلط)	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}$ (a حقیقی یا مختلط)	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
$e^{-\alpha t}\cos \beta t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{-\alpha t}\sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
$ae^{-\alpha t}\cos \beta t + \frac{(b-a\alpha)}{\beta}e^{-\alpha t}\sin \beta t$	$\frac{as+b}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
$2\|K\|e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \measuredangle K)$	$\frac{K}{s+\alpha-j\beta} + \frac{\bar{K}}{s+\alpha+j\beta}$

*۲-۵ تبدیل لاپلاس توابع متناوب

فرض کنید تابع $f(t)$ به صورت مجموعی از یک تابع معین $f_1(t)$ و صورتهای انتقال یافتهٔ آن در فواصل معینی از زمان مانند T ، $2T$ ، ... ، kT ، ... بوده و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(t-kT) \qquad (16\text{-}2*)$$

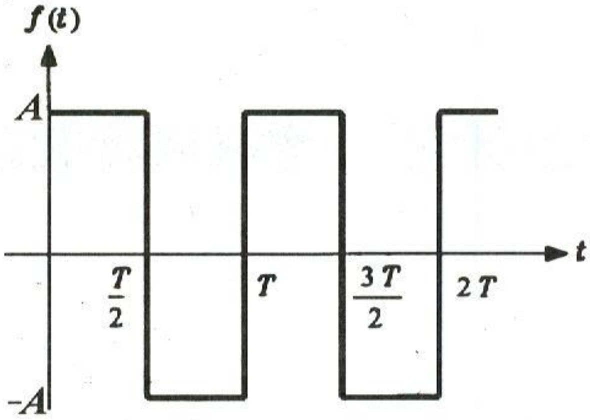
در این صورت گوییم $f(t)$ یک تابع متناوب (یا به عبارتی دیگر نیمه متناوب است، زیرا برای زمانهای منفی مقدار آن صفر فرض می‌شود) است که از یک مؤلفهٔ اصلی $f_1(t)$ و مجموعی از مؤلفه‌های انتقال یافتهٔ آن در فواصل زمانی T ، $2T$ ، ... تشکیل می‌گردد. اکنون می‌خواهیم ارتباط میان $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ و $F_1(s)$ تبدیل لاپلاس $f_1(t)$ را تعیین کنیم. با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف رابطهٔ *۲-۱۶) و استفاده از خاصیت انتقال حوزهٔ زمانی تبدیل لاپلاس به دست می‌آوریم:

$$F(s) = F_1(s) + e^{-Ts}F_1(s) + e^{-2Ts}F_1(s) + \cdots + e^{-kTs}F_1(s) + \cdots$$

$$= F_1(s)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = F_1(s)\frac{1}{1-e^{-Ts}} \qquad (۱۷-۲*)$$

به روشنی دیده می‌شود که اگر تبدیل لاپلاس $F_1(s)$ را در عامل $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ ضرب کنیم که در آن T دورهٔ تناوب $f(t)$ است، تبدیل لاپلاس $F(s)$ را به دست می‌آوریم. همچنین می‌توان بیان کرد که اگر در تبدیل لاپلاس هر تابعی عامل ضربی به صورت $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ وجود داشته باشد، این عامل نشانگر متناوب بودن تابع داده شده است و می‌توان بدون در نظر گرفتن این عامل از بقیهٔ آن عکس تبدیل لاپلاس گرفت و مؤلفهٔ اصلی $f_1(t)$ را به دست آورده و تابع $f(t)$ مورد نظر را از تکرار $f_1(t)$ در فواصل زمانی T ، $2T$ ، $\cdots$ ، kT ، $\cdots$ به دست آورد.

مثال *۱۰ تبدیل لاپلاس تابع نشان داده شده در شکل (*۲-۵) را به دست آورید.



شکل *۲-۵ مثال *۱۰؛ شکل موج متناوب.

تابع $f(t)$ از شکل موج مربعی $f_1(t)$ و تکرار آن در فواصل زمانی T ، $2T$ ، $3T$ ، $\cdots$ تشکیل می‌شود و $f_1(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_1(t) = Au(t) - 2Au\left(t-\frac{T}{2}\right) + Au(t-T) \qquad (۱۸-۲*)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دوطرف رابطهٔ (*۲-۱۸) و استفاده از خاصیت انتقال حوزهٔ زمانی تبدیل لاپلاس به دست می‌آوریم:

$$F_1(s) = \frac{A}{s} - \frac{2Ae^{-\frac{T}{2}s}}{s} + \frac{Ae^{-Ts}}{s} = \frac{A}{s}(1-2e^{-\frac{T}{2}s}+e^{-Ts}) = \frac{A}{s}(1-e^{-\frac{T}{2}s})^2 \qquad (۱۹-۲*)$$

با به کار بردن رابطهٔ (*۲-۱۷) تبدیل لاپلاس شکل موج مورد نظر در مثال *۱۰ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F(s) = \frac{A}{s}(1 - e^{-\frac{T}{2}s})^2 \times \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \qquad (۲۰-۲*)$$

یا:

$$F(s) = \frac{A}{s}\frac{1 - e^{-\frac{T}{2}s}}{1 + e^{-\frac{T}{2}s}} \qquad (۲۱-۲*)$$

تبصره اگر بخواهیم از عبارت (۲۱-۲*) عکس تبدیل لاپلاس بگیریم با توجه به اینکه عامل مخرج به صورت $1 + e^{-\frac{T}{2}s}$ است، نمی‌توان بلافاصله عکس تبدیل لاپلاس گرفت. ابتدا باید با ضرب کردن صورت و مخرج در عبارت $1 - e^{-\frac{T}{2}s}$ آن را به صورت (۲۰-۲*) درآورد تا بتوان از آن عکس تبدیل لاپلاس گرفت.

تمرین عکس تبدیل لاپلاس توابع $\frac{1}{1 - e^{-s}}$ و $\frac{1}{s(1 - e^{-s})}$ را تعیین کنید.

۳- حل مدارهای ساده

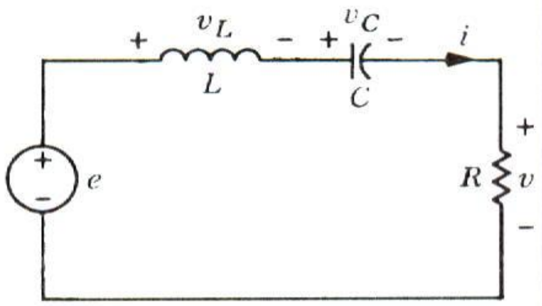
یکی از استفاده‌های اصلی تبدیل لاپلاس، حل معادلات انتگرال دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت است. ما این روش را از طریق چند مثال تشریح خواهیم کرد.

۳-۱ محاسبهٔ پاسخ ضربه

مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۳-۱) راکه در آن e ورودی و v خروجی است، در نظر بگیرید. اکنون می‌خواهیم پاسخ ضربه را تعیین کنیم. معادلات شاخه چنین هستند:

$$i = \frac{v}{R} \qquad v_C(t) = v_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(t')dt' \qquad v_L = \frac{L}{R}\frac{dv}{dt}$$

بنابراین از KVL داریم:



شکل ۳-۱ مدار RLC خطی تغییرناپذیر با زمان.

$$\frac{L}{R}\frac{dv}{dt} + v + \frac{۱}{RC}\int_{۰^-}^{t} v(t')dt' + v_C(۰^-) = e(t) \qquad (۱-۳)$$

مطابق تعریف پاسخ ضربه، مدار در زمان ۰^- در حالت صفر است و ورودی آن، یک ضربهٔ واحد است، یعنی:

$$v_C(۰^-) = ۰ \qquad i_L(۰^-) = \frac{۱}{R}v(۰^-) = ۰ \qquad e(t) = \delta(t)$$

فرض کنیم h ، پاسخ ضربه باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{L}{R}\frac{dh}{dt} + h + \frac{۱}{RC}\int_{۰^-}^{t} h(t')dt' = \delta(t) \qquad (۲-۳)$$

با:

$$h(۰^-) = ۰$$

چنانچه از طرفین تبدیل لاپلاس بگیریم و $H(s) \triangleq \mathfrak{L}[h(t)]$ بگذاریم، در این صورت:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{L}{R}\frac{dh}{dt} + h + \frac{۱}{RC}\int_{۰^-}^{t} h(t')dt'\right] = ۱$$

از خاصیت خطی بودن به دست می‌آوریم:

$$\frac{L}{R}\mathfrak{L}\left[\frac{dh}{dt}\right] + H(s) + \frac{۱}{RC}\mathfrak{L}\left[\int_{۰^-}^{t} h(t')dt'\right] = ۱ \qquad (۳-۳)$$

با به کار بردن قضیهٔ مشتق‌گیری و قضیهٔ انتگرال‌گیری، و منظور کردن شرایط اولیه به دست می‌آوریم:

$$\left[\frac{L}{R}s + ۱ + \frac{۱}{RCs}\right]H(s) = ۱$$

یا:

$$H(s) = \frac{R}{L}\frac{s}{s^۲ + \frac{R}{L}s + \frac{۱}{LC}} \qquad (۴-۳)$$

مطابق جدول (۵-۱) با $Q \triangleq \frac{\omega_۰}{۲\alpha}$ و با فرض $Q > \frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$\omega_۰^۲ \triangleq \frac{۱}{LC} \qquad \alpha \triangleq \frac{R}{۲L} \qquad \omega_d \triangleq \sqrt{\omega_۰^۲ - \alpha^۲} \qquad \phi \triangleq \sin^{-۱}\frac{\alpha}{\omega_۰}$$

و به دست می‌آوریم:

$$H(s) = \frac{R}{L}\frac{s}{(s+\alpha)^۲ + \omega_d^۲} \qquad (۵-۳)$$

با مراجعه به جدول (۱۳-۱)، نتیجه می‌گیریم که:

$$h(t) = \frac{R}{L} u(t) e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t - \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t\right)$$

$$= \frac{\omega_\circ R}{\omega_d L} u(t) e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi) \qquad (۳-۶)$$

این جواب، البته با نتایج به دست آمده در فصل ۵ موافقت دارد.

تبصرهٔ ۱ فرض کنید که می‌خواستیم پاسخ حالت دایمی سینوسی (نمایش داده شده با فازور V) را به ورودی سینوسی $e(t) = E_m \cos \omega t$ (نمایش داده شده با فازور E)، حساب کنیم. در این صورت، از روش فازوری استفاده کرده و معادلهٔ زیر را که فازور مجهول V را به فازور E مربوط می‌سازد، به دست می‌آوردیم:

$$\frac{L}{R} j\omega V + V + \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega} V = E$$

بنابراین:

$$\frac{V}{E} = \frac{R}{L} \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L} j\omega + \frac{1}{LC}} \qquad (۳-۷ \text{ الف})$$

معادلهٔ (۳-۷ الف)، تابع شبکه را که فازور ورودی E را به فازور پاسخ V مربوط می‌سازد، به دست می‌دهد. از مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ (۳-۴)، نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{V}{E} = H(j\omega) \qquad (۳-۷ \text{ ب})$$

تبصرهٔ ۲ روشی که تاکنون برای رفتن از تبدیل لاپلاس (۳-۵) به تابع زمانی متناظرش به کار برده‌ایم، به سادگی با نگاه کردن و انتخاب آن از جدول بود. به عبارت دیگر، از جدول تبدیل لاپلاس، به همان طریقی استفاده می‌کنیم که از یک جدول لگاریتم استفاده می‌کنیم. این روش کاملاً مجاز است، زیرا خاصیت یکتایی تضمین می‌کند که اگر با به کار بردن هر گونه روشی یک تابع $f(t)$ را چنان پیدا کنیم که تبدیل لاپلاس آن، تابع داده شدهٔ $F(s)$ باشد، در این صورت $f(t)$ همان تابع زمانی است که ما در جستجوی آن هستیم.

۳-۲ گسترش به صورت کسرهای جزئی

واضح است که یک مسألهٔ پیچیده، به یک تبدیل لاپلاس پیچیده منجر می‌گردد، یعنی، یک تابع گویای پیچیده‌تری از s حاصل می‌شود. بسیاری از این‌گونه تبدیلها، مستقیماً در جدولهای تبدیل لاپلاس دیده نمی‌شوند. لیکن به راحتی می‌توان تابع زمانی متناظر را با تقلیل دادن تبدیل آن به اجزای ساده‌تری که تبدیل لاپلاس آنها در جدولهای ما دیده می‌شوند، به دست آورد.

برای تجزیهٔ هر تابع گویا به جزءهای ساده، یک روش عمومی وجود دارد (که ممکن است شما قبلاً در آنالیز به آن برخورد کرده باشید). این روش، گسترش به صورت کسرهای جزئی نامیده می‌شود. تابع گویای زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \qquad (۳-۸)$$

که در این‌جا $P(s)$ و $Q(s)$، چندجمله‌ای‌هایی برحسب متغیر فرکانس مختلط s بوده و ضرایب a_0، a_1، ...، a_n، b_0، b_1، ...، b_m، اعداد حقیقی هستند. یک تابع گویا، به وسیلهٔ دو دسته از ضرایب حقیقی که چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج را تعریف می‌کنند، کاملاً مشخص می‌شود. از طرف دیگر، چندجمله‌ای‌ها را می‌توان به صورت عوامل تجزیه شده برحسب صفرهای آنها نیز بیان کرد. بنابراین، یک طرز نمایش دیگر $F(s)$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$F(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)} \qquad (۳-۹)$$

که در این‌جا z_i، $i = 1, 2, \cdots, m$ صفرهای چندجمله‌ای صورت $P(s)$ و p_j، $j = 1, 2, \cdots, n$ صفرهای چندجمله‌ای مخرج $Q(s)$ می‌باشند. z_iها را **صفرها** و p_jها را **قطب‌های** تابع گویا می‌نامند[1]. چنانچه p_j یک صفر سادهٔ چندجمله‌ای مخرج $Q(s)$ باشد، در این صورت p_j یک **قطب سادهٔ** تابع گویا گفته می‌شود. اگر p_k یک صفر مرتبهٔ r چندجمله‌ای $Q(s)$ باشد، در این صورت، p_k یک **قطب مکرر از مرتبهٔ r** گفته می‌شود.

اولین گام در گسترش به صورت کسرهای جزئی، نوشتن تابع گویا به یک صورت مناسب است. یک تابع گویا را **مناسب** گویند اگر درجهٔ چندجمله‌ای صورت از درجهٔ چندجمله‌ای مخرج، کمتر باشد. چنانچه تابع گویای داده شده به صورت $F(s)$، مناسب نباشد، یعنی درجهٔ $P(s)$ بزرگتر یا مساوی درجهٔ $Q(s)$ گردد، $P(s)$ را به $Q(s)$ تقسیم کرده و به دست می‌آوریم:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \hat{P}(s) + \frac{R(s)}{Q(s)} \qquad (۳-۱۰)$$

خارج قسمت $\hat{P}(s)$، در رابطهٔ (۳-۱۰) به صورت یک چندجمله‌ای بوده و $R(s)$ باقیماندهٔ تقسیم می‌باشد. بنابراین درجهٔ $R(s)$ از درجهٔ $Q(s)$ کمتر بوده و تابع گویای جدید $\frac{R(s)}{Q(s)}$ به صورت مناسب می‌باشد. از آنجا که $\hat{P}(s)$ یک چندجمله‌ای است، تابع زمانی متناظر با آن یک ترکیب خطی از δ، $\delta^{(1)}$،

[1] فرض می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج، عامل ضرب مشترکی ندارند.

$\delta^{(2)}$ و غیره می‌باشد که می‌توانند مستقیماً از جدول (۱۳-۱) معین گردند. بنابراین، بحث خود را با تابع گویای جدید $\frac{R(s)}{Q(s)}$ که به صورت مناسب است، ادامه می‌دهیم و در قسمت باقیماندهٔ این بخش، فرض می‌کنیم که تمام توابع گویا به صورت مناسب هستند.

گام دوم گسترش به صورت کسرهای جزئی، تجزیهٔ چندجمله‌ای مخرج $Q(s)$ و به دست آوردن قطب‌های تابع گویا می‌باشد. در این‌جا، ما سه حالت در نظر خواهیم گرفت، یعنی قطب‌های ساده، قطب‌های مکرر و قطب‌های مختلط.

حالت ۱: قطب‌های ساده بحث خود را با یک مثال ساده به صورت زیر شروع می‌کنیم:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

بیان می‌کنیم که ثابت‌هایی مانند K_1 ، K_2 و K_3 وجود دارند، به قسمی که برای تمام s داریم:

$$\frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3} \qquad (۳-۱۱)$$

(اگر دقیق‌تر صحبت کنیم باید بیان کنیم که به ازای تمام مقادیر s ، جز مقادیر قطب‌ها یعنی $s \neq -1$ ، $s \neq -2$ و $s \neq -3$.) چنانچه مخرج‌ها را در رابطهٔ (۳-۱۱) حذف کنیم، به دست می‌آوریم:

$$s^2 + 3s + 5 = K_1(s+2)(s+3) + K_2(s+1)(s+3) + K_3(s+1)(s+2)$$

چون این معادله باید به ازای تمام مقادیر s برقرار باشد، پس اگر $s = -1$ ، $s = -2$ و $s = -3$ را به ترتیب در آن قرار دهیم، به روشنی به دست می‌آوریم که:

$$K_1 = \left.\frac{s^2 + 3s + 5}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1} = \frac{3}{2} = 1/5$$

$$K_2 = \left.\frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$K_3 = \left.\frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-3} = \frac{5}{2} = 2/5$$

در نتیجه:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/5}{s+1} + \frac{-3}{s+2} + \frac{2/5}{s+3}\right]$$

$$= 1/5\, e^{-t} - 3e^{-2t} + 2/5\, e^{-3t} \qquad \text{برای } t \geq 0$$

این مثال، یک راه سرراست را برای به دست آوردن گسترش به صورت کسرهای جزئی در حالتی که تمام قطب‌ها ساده هستند، نشان می‌دهد. ضرایب K_1 ، K_2 و K_3 در معادلهٔ (۳-۱۱)، به ترتیب

مانده‌های قطب‌های خاص ۱- ، ۲- و ۳- خوانده می‌شوند.

برای محاسبهٔ ماندهٔ یک تابع گویای دلخواه $F(s)$ در یک قطب سادهٔ آن، فرمولی وجود دارد: فرض کنید چندجمله‌ای مخرج $F(s)$ ، به صورت زیر باشد:

$$Q(s) = \prod_{j=1}^{n} (s - p_j) \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

که در این‌جا، p_j ، $(j = 1, 2, \cdots, n)$ قطب‌های سادهٔ $F(s)$ هستند. در این صورت گسترش به صورت کسرهای جزئی چنین است:

$$\boxed{F(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{K_j}{s - p_j}} \qquad (۳\text{-}۱۳ \text{ الف})$$

و ماندهٔ K_j قطب p_j به صورت زیر داده می‌شود:

$$\boxed{K_j = (s - p_j)F(s)\Big|_{s = p_j}} \qquad (۳\text{-}۱۳ \text{ ب})$$

اثبات از ضرب طرفین (۳-۱۳ الف) در عامل $s - p_j$ ، به دست می‌آوریم:

$$(s - p_j)F(s) = K_j + (s - p_j)\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{K_i}{s - p_i} \qquad (۳\text{-}۱۴)$$

با جایگذاری $s = p_j$ در (۳-۱۴)، فرمول (۳-۱۳ ب) را بلافاصله به دست می‌آوریم.

توجه کنید که در مثال سادهٔ (۳-۱۱)، مانده‌ها در حقیقت به وسیلهٔ فرمولی که در (۳-۱۳ ب) داده شده است، حساب شده‌اند.

حالت ۲: قطب‌های مکرر فرض کنید تابع زیر داده شده است:

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)^2(s+2)}$$

بیان می‌کنیم که ثابت‌هایی مانند K_{12} ، K_{11} و K_2 وجود دارند، به قسمی که برای تمام مقادیر s داریم:

$$\frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

از حذف مخرجها، به دست می‌آوریم:

$$s^2 + 3s + 5 = K_{12}(s+2) + K_{11}(s+1)(s+2) + K_2(s+1)^2$$

این معادله باید برای تمام مقادیر s برقرار باشد. بنابر این با جایگذاری $s = -1$ و $s = -2$ ، ثابت‌های

$K_{۱۲}$ و $K_۲$ را به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$K_{۱۲} = \left.\frac{s^۲ + ۳s + ۵}{s + ۲}\right|_{s = -۱} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

$$K_۲ = \left.\frac{s^۲ + ۳s + ۵}{(s + ۱)^۲}\right|_{s = -۲} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

با پیداکردن مقادیر $K_{۱۲}$ و $K_۲$ ، می‌توان با انتخاب مقدار مناسبی برای s ، معادله‌ای نسبت به $K_{۱۱}$ به دست آورد. با گرفتن $s = ۰$ به دست می‌آید:

$$۵ = ۲K_{۱۲} + ۲K_{۱۱} + K_۲ = ۹ + ۲K_{۱۱}$$

یا:

$$K_{۱۱} = -۲$$

بنابراین:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{s^۲ + ۳s + ۵}{(s + ۱)^۲(s + ۲)}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{۳}{(s + ۱)^۲} + \frac{-۲}{s + ۱} + \frac{۳}{s + ۲}\right]$$

$$= ۳te^{-t} - ۲e^{-t} + ۳e^{-۲t} \qquad \text{برای } t \geq ۰$$

اکنون فرض می‌کنیم که مخرج تابع گویای $F(s)$ چندجمله‌ای زیر باشد:

$$Q(s) = (s - p_۱)^{n_۱}(s - p_۲)^{n_۲} \cdots (s - p_r)^{n_r} \qquad \text{(۳-۱۵ الف)}$$

بنابراین، تابع گویای $F(s)$ ، دارای یک قطب مرتبهٔ $n_۱$ در $p_۱$ و یک قطب مرتبهٔ $n_۲$ در $p_۲$ ، ⋯ ، و یک قطب مرتبهٔ n_r در p_r می‌باشد. واضح است که اگر n درجهٔ Q باشد، در این صورت:

$$\sum_{i=۱}^{r} n_i = n \qquad \text{(۳-۱۵ ب)}$$

گسترش به صورت کسرهای جزئی تابع گویای $F(s)$ ، چنین است:

$$F(s) = \frac{K_{۱۱}}{s - p_۱} + \frac{K_{۱۲}}{(s - p_۱)^۲} + \cdots + \frac{K_{۱n_۱}}{(s - p_۱)^{n_۱}}$$

$$+ \frac{K_{۲۱}}{s - p_۲} + \frac{K_{۲۲}}{(s - p_۲)^۲} + \cdots + \frac{K_{۲n_۲}}{(s - p_۲)^{n_۲}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{K_{r۱}}{s - p_r} + \frac{K_{r۲}}{(s - p_r)^۲} + \cdots + \frac{K_{rn_r}}{(s - p_r)^{n_r}} \qquad \text{(۳-۱۶ الف)}$$

توجه کنید که اندیس اول یعنی i از زیرنویس K_{ij}، متناظر با قطب p_i، و اندیس دوم یعنی j، متناظر با مرتبهٔ مخرج نظیر به آن، می‌باشد. برای محاسبهٔ ضرایب K_{11}، K_{12}، ...، K_{1n_1} مربوط به قطب p_1، حاصلضرب $F(s)$ و $(s-p_1)^{n_1}$ را در نظر می‌گیریم، یعنی:

$$(s-p_1)^{n_1}F(s) = K_{11}(s-p_1)^{n_1-1} + K_{12}(s-p_1)^{n_1-2} + \cdots + K_{1,n_1-1}(s-p_1) + K_{1n_1} + (s-p_1)^{n_1}\sum_{i=2}^{r}\sum_{j=1}^{n_r}\frac{K_{ij}}{(s-p_i)^j}$$

چون مجموع دوگانهٔ آخر دارای عامل $(s-p_1)^{n_1}$ می‌باشد، پس اگر عبارت‌های $(s-p_1)^{n_1}F(s)$، $\frac{d}{ds}[(s-p_1)^{n_1}F(s)]$، ...، $\frac{d^{n_1-1}}{ds^{n_1-1}}[(s-p_1)^{n_1}F(s)]$ را در $s=p_1$ حساب کنیم، مجموع دوگانهٔ آخر چیزی را اضافه نمی‌کند. در نتیجه به ترتیب چنین به دست می‌آوریم:

$$K_{1,n_1} = (s-p_1)^{n_1}F(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1,n_1-1} = \frac{d}{ds}[(s-p_1)^{n_1}F(s)]\Big|_{s=p_1} \qquad (\text{۳-۱۶ ب})$$

$$K_{1,n_1-2} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s-p_1)^{n_1}F(s)]\Big|_{s=p_1}$$

....

مثال گسترش به صورت کسرهای جزئی:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3 s^2}$$

را پیدا کنید. تابع دارای دو قطب مکرر در $s=p_1=-1$ (مرتبهٔ سوم، $n_1=3$) و در $s=p_2=0$ (مرتبهٔ دوم، $n_2=2$) می‌باشد. بنابر این، گسترش به صورت کسرهای جزئی آن چنین است:

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{K_{21}}{s} + \frac{K_{22}}{s^2}$$

برای محاسبهٔ K_{11}، K_{12} و K_{13}، ابتدا $F(s)$ را در $(s+1)^3$ ضرب می‌کنیم تا مقدار زیر حاصل شود:

$$(s+1)^3F(s) = \frac{1}{s^2}$$

با به کار بردن (۳-۱۶ ب)، به دست می‌آوریم:

$$K_{13} = \frac{1}{s^2}\bigg|_{s=-1} = 1$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds}\frac{1}{s^2}\bigg|_{s=-1} = \frac{-2}{s^3}\bigg|_{s=-1} = 2$$

$$K_{11} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s^2}\bigg|_{s=-1} = \frac{1}{2}\frac{6}{s^4}\bigg|_{s=-1} = 3$$

به طریق مشابه، برای محاسبهٔ K_{21} و K_{22}، ابتدا $F(s)$ را در s^2 ضرب می‌کنیم تا به دست آوریم:

$$s^2F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

با به کار بردن (۳-۱۶ ب)، نتیجه می‌گیریم که:

$$K_{22} = \frac{1}{(s+1)^3}\bigg|_{s=0} = 1$$

$$K_{21} = \frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)^3}\bigg|_{s=0} = -3$$

در نتیجه، گسترش $F(s)$ به صورت کسرهای جزئی چنین است:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3s^2} = \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}$$

تابع زمانی متناظر آن عبارت است از:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3s^2}\right] = 3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} - 3 + t \qquad t \geq 0 \text{ برای}$$

حالت ۳: قطب‌های مختلط دو حالتی که در بالا ارائه شد، در مورد قطب‌هایی که حقیقی یا مختلط باشند، معتبر است. لیکن اگر قطب‌های مختلط وجود داشته باشند، ضرایب در گسترش به صورت کسرهای جزئی در حالت کلی، مختلط بوده و ساده کردن بیشتری امکان دارد. ابتدا ملاحظه کنید که $F(s)$ در رابطهٔ (۳-۸) به صورت نسبت چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی است. بنابراین، چنانچه صفرها و قطب‌ها مختلط باشند، باید به صورت جفت مزدوج‌های مختلط درآیند. به عبارت دقیق‌تر، اگر $p_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ یک قطب باشد، یعنی $Q_1(p_1) = 0$، در این صورت، $\bar{p}_1 = \sigma_1 - j\omega_1$ هم یک قطب است، یعنی، $Q_1(\bar{p}_1) = 0$. این مطلب به خاطر این حقیقت است که برای تمام مقادیر s، هر چندجمله‌ای $Q(s)$ با ضرایب حقیقی دارای این خاصیت است که $\overline{Q(s)} = Q(\bar{s})$.

اکنون فرض کنید که یک تابع گویا، دارای قطب ساده‌ای در $s = p_1 = \alpha + j\beta$ است. تابع فوق در این صورت باید قطب دیگری در $s = p_2 = \bar{p}_1 = \alpha - j\beta$ داشته باشد. گسترش به صورت کسرهای جزئی $F(s)$، باید دارای دو جملهٔ زیر باشد:

$$\frac{K_۱}{s-\alpha-j\beta}+\frac{K_۲}{s-\alpha+j\beta} \qquad (۳-۱۷)$$

با به کار بردن فرمول (۳-۱۳ ب) در مورد قطب‌های ساده، به دست می‌آوریم که:

$$K_۱=(s-\alpha-j\beta)F(s)\Big|_{s=\alpha+j\beta}$$

(۳-۱۸ الف)

$$K_۲=(s-\alpha+j\beta)F(s)\Big|_{s=\alpha-j\beta}$$

از آنجاکه $F(s)$ تابع گویایی از s با ضرایب حقیقی است، از (۳-۱۸ الف) نتیجه می‌شود که $K_۲$ مزدوج مختلط $K_۱$ است. اکنون $K_۱$ و $K_۲$ را به صورت قطبی بیان می‌کنیم، در این صورت:

$$K_۱=|K_۱|e^{j\measuredangle K_۱}$$

(۳-۱۸ ب)

$$K_۲=\bar{K}_۱=|K_۱|e^{-j\measuredangle K_۱}$$

عکس تبدیل لاپلاس (۳-۱۷) چنین است:

$$K_۱e^{(\alpha+j\beta)t}+K_۲e^{(\alpha-j\beta)t}=|K_۱|e^{\alpha t}[e^{j(\beta t+\measuredangle K_۱)}+e^{-j(\beta t+\measuredangle K_۱)}]$$

$$=۲|K_۱|e^{\alpha t}\cos(\beta t+\measuredangle K_۱) \qquad (۳-۱۹)$$

این فرمول، که تابع زمانی متناظر را برای یک جفت عبارت ناشی از قطب‌های مزدوج مختلط به دست می‌دهد، فوق‌العاده مفید است. توجه کنید که لازم است تنها با به کار بردن (۳-۱۸ الف)، ماندهٔ مختلط $K_۱$ پیدا شود، زیرا تابع زمانی متناظر برای هر دو جملهٔ (۳-۱۷) را می‌توان بلافاصله به وسیلهٔ (۳-۱۹) نوشت.

مثال گسترش به صورت کسرهای جزئی را پیدا کنید:

$$F(s)=\frac{s^۲+۳s+۷}{[(s+۲)^۲+۴](s+۱)}$$

$$=\frac{K_۱}{s+۲-j۲}+\frac{\bar{K}_۱}{s+۲+j۲}+\frac{K_۳}{s+۱}$$

با به کار بردن (۳-۱۸ الف)، داریم:

$$K_۱=(s+۲-j۲)F(s)\Big|_{s=-۲+j۲}$$

$$=\frac{s^۲+۳s+۷}{(s+۲+j۲)(s+۱)}\Bigg|_{s=-۲+j۲}$$

$$=\frac{(-۲+j۲)^۲+۳(-۲+j۲)+۷}{j۴(-۱+j۲)}$$

$$=j\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}e^{j۹۰^\circ}$$

به طریق مشابه، برای قطب حقیقی در $s = -۱$ داریم:

$$K_۲ = \frac{s^۲ + ۳s + ۷}{(s+۲)^۲ + ۴}\bigg|_{s=-۱} = ۱$$

با به کار بردن (۳-۱۹) تابع زمانی متناظر $F(s)$ را می‌توان به طور نظری نوشت؛ در این صورت:

$$f(t) = -\frac{۱}{۲}e^{-۲t}\sin ۲t + e^{-t} \qquad \text{برای } t \geq ۰$$

توجه کنید که جملهٔ اول موجود در $f(t)$، نشان دهندهٔ تابع زمانی متناظر با جفت قطب مزدوج مختلط می‌باشد.

۳-۳ پاسخ حالت صفر

مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۳-۱) را دوباره در نظر بگیرید. فرض کنید که ورودی $e(۰)$، شکل موج دلخواهی باشد که تبدیل لاپلاس آن $E(s)$ است. می‌خواهیم پاسخ حالت صفر را به ورودی $e(۰)$ حساب کنیم. با تکرار تجزیه و تحلیل پیشین و به کار بردن این حقیقت که همهٔ شرایط اولیه صفر هستند، به دست می‌آوریم که:

$$\left(\frac{L}{R}s + ۱ + \frac{۱}{RCs}\right)V(s) = E(s)$$

از اینجا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} V(s) &= \left[\frac{R}{L}\,\frac{s}{s^۲ + \frac{R}{L}s + \frac{۱}{LC}}\right]E(s) \\ &= H(s)E(s) \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۲۰)$$

به خاطر بیاورید که در تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی، تابع شبکه را به صورت نسبت فازور خروجی به فازور ورودی تعریف کردیم. همچنین متوجه شدیم که اگر s را با $j\omega$ عوض می‌کردیم، عامل $H(s)$ در معادلهٔ (۳-۲۰)، همان تابع شبکه می‌گردید. از آنجا که در نظریهٔ تبدیل لاپلاس، متغیر s می‌تواند هر مقداری را در صفحهٔ مختلط انتخاب کند، بنابراین ما به طور رسمی تعریف خود را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم: نسبت تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر به تبدیل لاپلاس ورودی را **تابع شبکه** می‌نامیم. بنابراین، تعبیر معادلهٔ (۳-۲۰) بیان می‌دارد که تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر، برابر حاصلضرب تابع شبکه در تبدیل لاپلاس ورودی می‌باشد. از آنجا که این حقیقت اهمیت زیادی دارد، آن را دوباره بیان می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{c}\text{تبدیل لاپلاس}\\ \text{ورودی}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{تابع}\\ \text{شبکه}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{تبدیل لاپلاس}\\ \text{پاسخ حالت صفر}\end{array}\right) \tag{۳-۲۱}$$

از آنجا که تبدیل لاپلاس تابع ضربهٔ واحد، برابر ۱ بوده و پاسخ ضربه، خود یک پاسخ حالت صفر است، پس حقیقت مهم زیر را به دست می‌آوریم.

$$\boxed{\mathcal{L}\,[h(t)] = H(s)}$$

یعنی تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه، همان تابع شبکه می‌باشد.

تمرین فرض کنید در معادلهٔ (۳-۲۰)، $\frac{R}{L} = ۶$ ، $\frac{۱}{LC} = ۲۵$ و $e(t) = u(t)e^{-t}$ باشند. پاسخ حالت صفر متناظر را حساب کنید.

۳-۴ قضیهٔ کانولوشن

از معلومات قبلی خود راجع به نظریهٔ مدار، می‌توان قضیهٔ اساسی کانولوشن تبدیل لاپلاس را به دست آورد. اکنون سه حقیقت زیر را مشاهده می‌کنیم.

۱ـ می‌دانیم که برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، پاسخ حالت صفر $v(\cdot)$ را می‌توان با محاسبهٔ کانولوشن ورودی $e(\cdot)$ با پاسخ ضربهٔ $h(\cdot)$ به دست آورد. بنابراین، از معادلهٔ (۴-۴) فصل ۶ با $t_\circ = \circ$ ، داریم:

$$v(t) = \int_{\circ^-}^{t^+} h(t-\tau)e(\tau)d\tau \qquad \text{برای } t \geq \circ \tag{۳-۲۲}$$

۲ـ تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه، همان تابع شبکه است:

$$\mathcal{L}\,[h(t)] = H(s) \tag{۳-۲۳}$$

۳ـ تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر، با حاصلضرب تبدیل لاپلاس تابع ورودی و تابع شبکه برابر بوده و به صورت زیر می‌باشد:

$$V(s) = H(s)E(s) \tag{۳-۲۴}$$

این حقایق نشان می‌دهند که تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع، برابر حاصلضرب تبدیلهای لاپلاس آنها می‌باشد. به عبارت رسمی‌تر، قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم:

قضیهٔ کانولوشن فرض کنید $F_1(s)$ و $F_2(s)$ ، به ترتیب تبدیلهای لاپلاس $f_1(t)$ و $f_2(t)$ بوده و f_3 کانولوشن f_1 و f_2 باشد، یعنی:

$$f_3(t) \triangleq \int_{0^-}^{t^+} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \qquad t \geq 0 \text{ برای} \qquad (۳-۲۵)$$

در این صورت:

$$F_3(s) = F_1(s)F_2(s) \qquad (۳-۲۶)$$

حدود انتگرال کانولوشن f_1 و f_2 را عمداً به ترتیب با 0^- و t^+ نشان می‌دهیم. این کار به دلایل زیر انجام می‌شود: (۱) چنانچه $f_2(0)$ تابع ضربه‌ای در مبدأ داشته باشد، در این صورت باید این تابع در محاسبهٔ انتگرال کانولوشن (۳-۲۵) به حساب آید؛ (۲) چنانچه $f_1(0)$ تابع ضربه‌ای در مبدأ داشته باشد، $f_1(t-\tau)$ به عنوان تابعی از τ ، دارای تابع ضربه‌ای در $\tau = t$ است و این تابع ضربه نیز، باید در محاسبهٔ انتگرال کانولوشن به حساب آید.

اثبات این قضیه را مستقیماً ثابت می‌کنیم. فرض کنید برای راحتی، $f_1 * f_2$ نشان دهندهٔ انتگرال کانولوشن باشد. به موجب تعریف داریم:

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = \mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t^+} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]$$

$$= \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{t^+} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] e^{-st}\,dt$$

اکنون به خاطر می‌آوریم که هر وقت آرگومان‌های f_1 و f_2 منفی باشند، می‌توان آنها را برای منظورهایی که ما داریم به طور متحد برابر صفر گرفت. در این صورت به‌ازای t مشخصی برای $\tau > t$ ، $f(t-\tau)$ به طور متحد برابر صفر است. بنابراین، می‌توان حد بالای انتگرال‌گیری را با ∞ عوض کرد. در نتیجه:

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = \int_{0^-}^{\infty}\int_{0^-}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\, e^{-st}\,dt$$

با استفاده از این مطلب که $e^{-st} = e^{-s(t-\tau)}e^{-s\tau}$ و از هم جدا کردن انتگرال‌ها به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = \int_{0^-}^{\infty} f_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_{0^-}^{\infty} f_1(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} f_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda$$

که در اینجا $\lambda = t - \tau$ متغیر جدید انتگرال‌گیری است؛ بنابراین:

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = F_1(s)F_2(s) \qquad (۳-۲۷)$$

در این‌جا $f_1 * f_2$ کانولوشن f_1 و f_2 را نشان می‌دهد.

تمرین تغییر متغیر به کار رفته در محاسبات بالا را به تشریح انجام دهید.

۳-۵ پاسخ کامل

مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۳-۲) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم جریان i را برای $t \geq \circ$ با داشتن $v_C(\circ^-) = ۱\ V$ و $i_L(\circ^-) = ۵\ A$ و $e(t) = ۱۲ \sin ۵t$ حساب کنیم. معادلهٔ دیفرانسیل مدار چنین است:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{۱}{C}\int_{\circ^-}^{t} i(t')dt' + v_C(\circ^-) = e(t) \qquad \text{برای } t \geq \circ$$

اگر از طرفین معادلهٔ فوق تبدیل لاپلاس بگیریم، به دست می‌آوریم:

$$\frac{L}{s}\left(s^۲ + \frac{R}{L}s + \frac{۱}{LC}\right)I(s) = E(s) + Li_L(\circ^-) - \frac{v_C(\circ^-)}{s}$$

با به کار بردن مقادیر داده شدهٔ عناصر $L = ۱$ ، $R = ۶$ و $C = \circ/\circ۴$ ، به دست می‌آوریم:

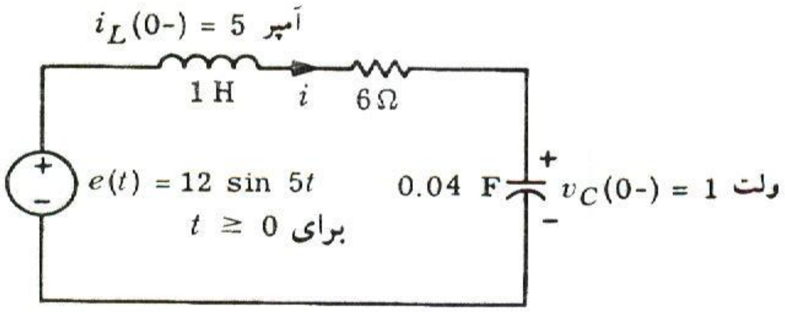
$$\underbrace{I(s)}_{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ کامل}} = \underbrace{\frac{s}{(s+۳)^۲ + ۴^۲}E(s)}_{\substack{I_\circ(s) \\ \text{تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر}}} + \underbrace{\frac{۵s - ۱}{(s+۳)^۲ + ۴^۲}}_{\substack{I_i(s) \\ \text{تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر}}} \qquad (۳-۲۸)$$

برای تأکید معنی فیزیکی پاسخ کامل، رابطهٔ بالا را به صورت دو جملهٔ جدا از هم نوشتیم. جملهٔ اول معلول ورودی، و جملهٔ دوم معلول شرایط اولیه می‌باشد. اکنون پاسخ حالت صفر را حساب می‌کنیم. ابتدا $E(s)$ را از ورودی داده شدهٔ $e(t) = ۱۲ \sin ۵t$ برای $t \geq \circ$ به دست می‌آوریم، در این صورت:

$$E(s) = \frac{۶\circ}{s^۲ + ۵^۲}$$

از رابطهٔ (۳-۲۸) داریم:

$$I_\circ(s) = \frac{۶\circ s}{[(s+۳)^۲ + ۴^۲](s^۲ + ۵^۲)}$$



شکل ۳-۲ مدار به کار رفته برای محاسبهٔ پاسخ کامل.

با به کار بردن گسترش به صورت کسرهای جزئی، چنین می‌نویسیم:

$$I_\circ(s) = \frac{K_۱}{s+۳-j۴} + \frac{\bar{K}_۱}{s+۳+j۴} + \frac{K_۲}{s-j۵} + \frac{\bar{K}_۲}{s+j۵}$$

که در این‌جا:

$$K_۱ = (s+۳-j۴)I_\circ(s)\Big|_{s=-۳+j۴} = j۱/۲۵ = ۱/۲۵\, e^{j۹۰^\circ}$$

و:

$$K_۲ = (s-j۵)I_\circ(s)\Big|_{s=j۵} = -j = e^{-j۹۰^\circ}$$

با به کار بردن (۳-۱۹)، می‌توان تبدیل لاپلاس معکوس را به طور نظری به صورت زیر نوشت:

$$i_\circ(t) = \mathfrak{L}^{-۱}[I_\circ(s)] = ۲/۵\, e^{-۳t}\cos(۴t+۹۰^\circ) + ۲\cos(۵t-۹۰^\circ)$$

$$= -۲/۵\, e^{-۳t}\sin ۴t + ۲\sin ۵t \qquad \text{برای } t \ge ۰$$

از رابطهٔ (۳-۲۸)، پاسخ ورودی صفر چنین است:

$$i_i(t) = \mathfrak{L}^{-۱}[I_i(s)] = ۵\, e^{-۳t}\cos ۴t - ۴e^{-۳t}\sin ۴t \qquad \text{برای } t \ge ۰$$

در این صورت پاسخ کامل برابر است با:

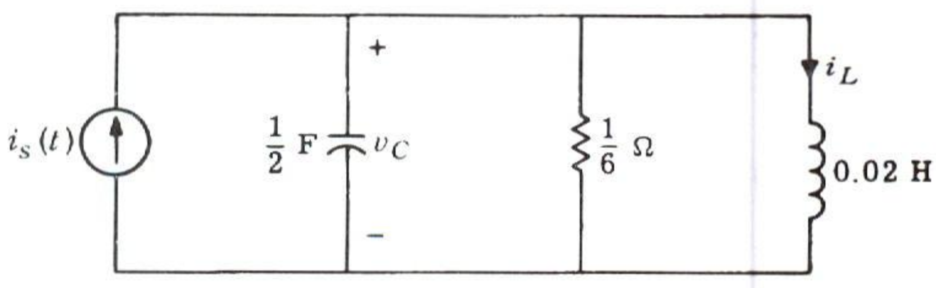
$$i(t) = i_\circ(t) + i_i(t)$$

$$= ۵\, e^{-۳t}\cos ۴t - ۶/۵\, e^{-۳t}\sin ۴t + ۲\sin ۵t \qquad \text{برای } t \ge ۰$$

آخرین جملهٔ سمت راست، پاسخ حالت دایمی سینوسی بوده و جملات دیگر، پاسخ گذرا را تشکیل می‌دهند.

مثال فوق، این حقیقت کلی را تشریح می‌کند که پاسخ گذرا، هم معلول شرایط اولیه و هم معلول اعمال ناگهانی ورودی سینوسی $۱۲\sin ۵t$ در $t = ۰$ می‌باشد.

تمرین مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۳-۳) را در نظر بگیرید. حالت اولیهٔ آن به وسیلهٔ $v_C(۰^-) = ۲\,V$ و $i_L(۰^-) = ۳\,A$ داده شده است. پاسخ کامل را برای ورودی‌های زیر محاسبه کنید:



شکل ۳-۳ محاسبهٔ پاسخ کامل.

الف- $i_s(t) = ۶ \cos ۷t$

ب- $i_s(t) = u(t)$

پ- $i_s(t) = \delta(t)$

ت- $i_s(t) = r(t)$

آیا جواب قسمت (پ) مشتق زمانی جواب قسمت (ب) می‌باشد؟ اگر چنین نیست، چرا؟

٤ - حل شبکه‌های کلی

در این بخش، نشان می‌دهیم که چگونه تبدیل لاپلاس برای حل دستگاههای معادلات انتگرال دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به کار می‌رود. این روش را برای اثبات چند خاصیت مهم شبکه‌های فشردهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان به کار خواهیم برد.

٤-۱ تنظیم کردن معادلات جبری خطی

در بخش ۳-۴ فصل ۱۰ ما تجزیه و تحلیل گره را برای نوشتن معادلات انتگرال دیفرانسیل شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، به کار بردیم. معادلات گره به صورت زیر هستند:

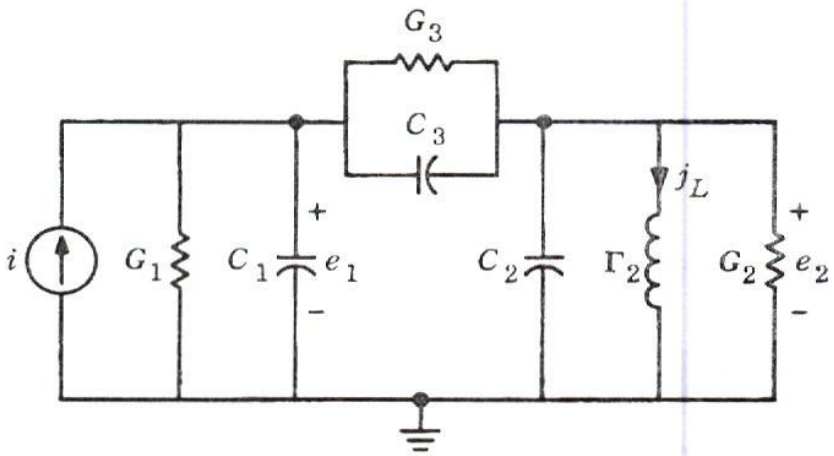
$$\mathbf{Y}_n(D)\,\mathbf{e} = \mathbf{i} \qquad (۱-۴)$$

که در این‌جا، $\mathbf{e}$ بردار ولتاژ گره نسبت به مبنا، $\mathbf{i}$ بردار منبع جریان گره، $\mathbf{Y}_n(D)$ اپراتور ماتریس ادمیتانس گره، $D = \frac{d}{dt}$ اپراتور مشتق‌گیری و $D^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot)dt$ اپراتور انتگرال‌گیری است. معادلهٔ (۴-۱) یک دستهٔ معادلات خطی انتگرال دیفرانسیل همزمان می‌باشد. به راحتی می‌توان ملاحظه کرد که هرگاه از معادلهٔ (۴-۱) تبدیل لاپلاس بگیریم، دستهٔ معادلات جبری خطی همزمان زیر را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{Y}_n(s)\mathbf{E}(s) = \mathbf{I}(s) + \mathbf{a} \qquad (۲-۴)$$

در این‌جا $\mathbf{E}(s)$ و $\mathbf{I}(s)$ ، به ترتیب تبدیلهای لاپلاس $\mathbf{e}(t)$ و $\mathbf{i}(t)$ می‌باشند، یعنی مؤلفه‌های $\mathbf{E}(s)$ و $\mathbf{I}(s)$ ، به ترتیب تبدیلهای لاپلاس مؤلفه‌های متناظر $\mathbf{e}(t)$ و $\mathbf{i}(t)$ هستند. بردار $\mathbf{a}$ برداری است که تأثیر ناشی از شرایط اولیه را در بردارد. ماتریس $\mathbf{Y}_n(s)$ ماتریس ادمیتانس گره برحسب متغیر فرکانس مختلط s است. اکنون مثال خاصی را انتخاب می‌کنیم. هر چند که این مثال تنها شامل دو معادله و دو تابع مجهول می‌باشد، خواننده باید برای خود تحقیق کند که روشها کاملاً عمومیت دارند.

مثال ۱ شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۴-۱) را در نظر بگیرید. ورودی این مدار، جریان i و پاسخ مورد نظر، ولتاژ $e_۲$ است. با به کار بردن ولتاژهای گره $e_۱$ و $e_۲$ به عنوان متغیرها، معادلات گره را به دست می‌آوریم:



شکل ٤-١ مدار خطی تغییرناپذیر با زمان با سه گره.

$$(C_1 + C_3)\frac{d}{dt}e_1 + (G_1 + G_3)\,e_1 - \left(C_3\frac{d}{dt}e_2 + G_3 e_2\right) = i$$

$$-\left(C_3\frac{d}{dt}e_1 + G_3 e_1\right) + (C_2 + C_3)\frac{d}{dt}e_2 \qquad (۳-۴)$$

$$+ (G_2 + G_3)\,e_2 + \Gamma_2\int_{0^-}^{t} e_2(t')\,dt' + j_L(0^-) = 0$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادلهٔ فوق و اعمال خاصیت خطی بودن، قواعد مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

(۴-۴)

$$\begin{bmatrix} (C_1 + C_3)s + (G_1 + G_3) & -(C_3 s + G_3) \\ -(C_3 s + G_3) & (C_2 + C_3)s + (G_2 + G_3) + \frac{\Gamma_2}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(s) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

که در این‌جا $E_1(s)$ ، $E_2(s)$ و $I(s)$ به ترتیب تبدیلهای لاپلاس $e_1(t)$ ، $e_2(t)$ و $i(t)$ می‌باشند و:

$$a_1 = e_1(0^-)(C_1 + C_3) - e_2(0^-)C_3 \qquad (۵-۴)$$

$$a_2(s) = -e_1(0^-)C_3 + e_2(0^-)(C_2 + C_3) - \frac{j_L(0^-)}{s} \qquad (۶-۴)$$

توجه کنید که معادلهٔ (۴-۴)، به صورت معادلهٔ (۴-۲) می‌باشد.

چنانچه تجزیه و تحلیل مش، حلقه یا کات‌ست به کار برده می‌شد، به ترتیب معادلات مش، حلقه یا کات‌ست را به دست می‌آوردیم و پس از اینکه تبدیل لاپلاس می‌گرفتیم مجدداً به یک دستهٔ معادلات خطی جبری همزمان می‌رسیدیم. بنابراین کار باقیمانده، حل این معادلات جبری است.

٤-٣ روش کوفاکتور

اکنون دستهٔ معادلات جبری خطی همزمان زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{Y}_n(s)\mathbf{E}(s) = \mathbf{F}(s) \qquad (۴-۷)$$

که در این‌جا $\mathbf{Y}_n(s)$ یک ماتریس $n \times n$ داده شده، مثل ماتریس ادمیتانس گره است. $\mathbf{E}(s)$ بردار n-بعدی ولتاژ گره است که باید تعیین شود و $\mathbf{F}(s)$ بردار n-بعدی داده شده‌ای است که تابع تحریک را نشان می‌دهد (شامل شرایط اولیه). واضح است که بردار مجهول $\mathbf{E}$ را می‌توان بلافاصله برحسب ماتریس معکوس $\mathbf{Y}_n^{-1}(s)$ ، به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{Y}_n^{-1}(s)\mathbf{F}(s) \qquad (۴-۸)$$

بنابراین، جواب کامل $\mathbf{E}$ شامل چیزی جز تعیین عکس یک ماتریس داده شده نیست. با وجود این، محاسبهٔ عکس یک ماتریس، مثلاً ماتریس بزرگتر از ۳ × ۳، کار ساده‌ای نیست. از آن‌جا که در اغلب مسائل تنها لازم است که یک یا دو مجهول در بردار $\mathbf{E}$ را پیدا کنیم، لذا احتیاجی نیست که عکس ماتریس را پیدا کنیم.

در بحث روش کوفاکتور، راحت‌تر است که معادلهٔ (۴-۷) را به صورت گستردهٔ زیر بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \qquad (۴-۹)$$

فرض کنید می‌خواهیم مجهول E_j را تعیین کنیم. ابتدا طرز نمایش زیر را معرفی می‌کنیم: فرض کنید $\Delta_n(s) \triangleq \det \mathbf{Y}_n(s)$ دترمینانی باشد که آن را **دترمینان شبکه براساس گره‌ها** می‌نامند. فرض کنید Δ_{ij} کوفاکتور Y_{ij} باشد، یعنی Δ_{ij} مساوی $(-1)^{j+i}$ برابر دترمینان ماتریسی باشد که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس مربعی $\mathbf{Y}_n(s)$ به دست می‌آید. اکنون به دو حقیقت از نظریهٔ دترمینان‌ها نیاز داریم.

۱- چنانچه هر عنصر ستون jام را در کوفاکتور نظیر آن عنصر ضرب کنیم و نتیجهٔ n حاصلضرب را با هم جمع کنیم، دترمینان شبکهٔ $\Delta_n(s)$ را به دست می‌آوریم. در طرز نمایش ریاضی داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_{ij}(s)\Delta_{ij}(s) = \Delta_n(s) \qquad \text{برای تمام } s$$

۲- چنانچه هر عنصر ستون kام را در کوفاکتور عنصر متناظر آن در ستون jام ضرب کنیم (در این‌جا k یک عدد صحیح متفاوت با j می‌باشد) و نتیجهٔ n حاصلضرب را با هم جمع کنیم، یک چندجمله‌ای به دست می‌آوریم که به طور متحد برابر صفر است. با طرز نمایش ریاضی و برای $j \neq k$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_{ik}(s)\Delta_{ij}(s) = 0 \qquad \text{برای تمام } s$$

این حقایق لازم می‌دارند که اگر معادلهٔ اسکالر اول رابطهٔ (۴-۹) را در $\Delta_{1j}(s)$ ، دوم را در $\Delta_{2j}(s)$ ، … ، nام را در $\Delta_{nj}(s)$ ضرب کرده و همه را با هم جمع کنیم، چنین به دست می‌آوریم:

$$\Delta_n(s)E_j(s) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}(s)F_k(s)$$

بنابراین، مجهول $E_j(s)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$E_j(s) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}(s)F_k(s)}{\Delta_n(s)} \qquad (۱۰-۴)$$

این نتیجه، اغلب به عنوان جوابی که از قاعدهٔ کرامر به دست آمده است، اطلاق می‌شود. برای تشریح روش کوفاکتور، بررسی مدار مثال ۱ را ادامه می‌دهیم.

مثال ۲ ولتاژ $E_2(s)$ را به عنوان متغیری که می‌خواهیم آن را تعیین کنیم، در نظر می‌گیریم. از معادلهٔ (۴-۴) داریم:

$$\begin{aligned}\Delta_n(s) = {} & (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1)s^2 \\ & + (G_1C_2 + G_1C_3 + G_3C_2 + G_2C_1 + G_2C_3 + G_3C_1)s \\ & + (C_1\Gamma_2 + C_3\Gamma_2 + G_1G_2 + G_1G_3 + G_2G_3) + (G_1 + G_3)\frac{\Gamma_2}{s}\end{aligned}$$

$$\Delta_{12}(s) = C_3 s + G_3$$

و:

$$\Delta_{22}(s) = (C_1 + C_3)s + G_1 + G_3$$

توابع تحریک عبارتند از:

$$F_1(s) = I(s) + a_1$$

و:

$$F_2(s) = a_2(s)$$

با به کار بردن معادلهٔ (۴-۱۰)، می‌توان $E_2(s)$ را جداگانه، برحسب جزئی که معلول منبع جریان ورودی است و جزئی که معلول شرایط اولیه است، نوشت. بنابراین:

$$E_2(s) = \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_n(s)}I(s) + \frac{N(s)}{\Delta_n(s)} \qquad (۱۱-۴)$$

که در آن:

$$N(s) \triangleq \Delta_{12}(s)a_1 + \Delta_{22}(s)a_2(s)$$

تبصرهٔ ۱ جملهٔ اول سمت راست رابطهٔ (۴-۱۱)، تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر بوده، و جملهٔ دوم تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر است؛ $E_2(s)$ تبدیل لاپلاس پاسخ کامل می‌باشد. مسألهٔ باقیمانده، به دست آوردن تابع زمانی $e_2(t)$ است. توجه کنید که در رابطهٔ (۴-۱۱) هرگاه $I(s)$ تابع گویایی از s باشد،

پاسخ کامل $e_{۲}(t)$ را می‌توان به وسیلهٔ گسترش به صورت کسرهای جزئی به دست آورد.

تبصرهٔ ۲ در این مثال، منبع جریان i، ورودی و ولتاژ $e_{۲}$ خروجی مدار است. از آنجا که تابع شبکه به عنوان نسبت تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر و تبدیل لاپلاس ورودی تعریف شده است (معادلهٔ (۳-۲۱) را ببینید)، از رابطهٔ (۴-۱۱) تابع شبکه را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$H(s) = \frac{\Delta_{۱۲}(s)}{\Delta_n(s)} \tag{۱۲-۴}$$

که یک تابع گویا می‌باشد.

٤-۳ توابع شبکه و حالت دایمی سینوسی

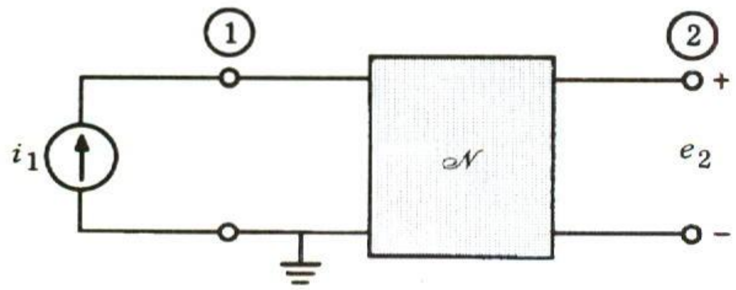
فرض کنید از ما خواسته شده است که پاسخ حالت دایمی سینوسی شبکهٔ $\mathscr{N}$ نشان داده شده در شکل (۴-۲) را پیدا کنیم. ورودی آن، جریان سینوسی $i_{۱}(t) = I_m \cos \omega t$ و خروجی آن، ولتاژ گره نسبت به مبنای $e_{۲}$ می‌باشد. به منظور تجزیه و تحلیل فازوری، ورودی را با فازور $I_{۱} = I_m$ (در حالت کنونی یک عدد حقیقی) نشان می‌دهیم. خروجی (مجهول) با فازور $E_{۲}$ نشان داده شده است. صورت ماتریسی معادلات گره چنین است:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{Y}_n(j\omega) & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{۱} \\ E_{۲} \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{۱} \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix} \tag{۱۳-۴}$$

چنانچه این دستهٔ معادلات را با قاعدهٔ کرامر حل کنیم، به دست می‌آوریم که:

$$E_{۲} = \frac{\Delta_{۱۲}(j\omega)}{\Delta_n(j\omega)} I_{۱} \tag{۱۴-۴}$$

که در اینجا $\Delta_{۱۲}(j\omega)$ کوفاکتور عنصر (۲ ، ۱) از ماتریس $\mathbf{Y}_n(j\omega)$ و $\Delta_n(j\omega)$ دترمینان ماتریس $\mathbf{Y}_n(j\omega)$ است. عامل $\frac{\Delta_{۱۲}(j\omega)}{\Delta_n(j\omega)}$ تابع گویایی از ω می‌باشد و چون این عامل، فازور ورودی $I_{۱}$ را به فازور



شکل ٤-۲ یک شبکهٔ کلی با منبع جریان ورودی $i_{۱}$ و ولتاژ خروجی $e_{۲}$.

خروجی E_2 مربوط می‌سازد، آن را امپدانس انتقالی می‌نامند، که حالت خاصی از تابع شبکه است. چنانچه برای سادگی بنویسیم:

$$H(j\omega) \triangleq \frac{\Delta_{12}(j\omega)}{\Delta_n(j\omega)} \tag{۴-۱۵}$$

در این صورت، رابطهٔ میان شکل موج $e_2(\cdot)$ و $i_1(\cdot)$، به صورت زیر درمی‌آید:

$$e_2(t) = \text{Re}\,[H(j\omega)I_m e^{j\omega t}] = |H(j\omega)|I_m \cos[\omega t + \measuredangle H(j\omega)] \tag{۴-۱۶}$$

اکنون یک مسألهٔ مربوط را در نظر می‌گیریم. فرض کنید شبکهٔ $\mathcal{N}$ در $t = 0^-$ در حالت صفر بوده و ورودی $i_1(t) = I_m \cos \omega t$ را در $t = 0^-$ وصل کنیم. می‌خواهیم پاسخ $e_2(\cdot)$ را محاسبه کنیم. مطابق معمول، برای سادگی، تمام محاسبات را براساس اینکه ورودی به صورت $I_m e^{j\omega t}$ می‌باشد، انجام می‌دهیم و سپس جزء حقیقی پاسخ[1] e_{2e} را در نظر می‌گیریم. فرض کنید تبدیل لاپلاس و تجزیه و تحلیل گره را مطابق روش بالا به کار ببریم. از آنجا که شبکهٔ $\mathcal{N}$ در $t = 0^-$ در حالت صفر است، تبدیل لاپلاس معادلات گره به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{Y}_n(s) & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1e}(s) \\ E_{2e}(s) \\ \vdots \\ E_{ne}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{I_m}{s - j\omega} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۴-۱۷}$$

توجه کنید که ماتریس $\mathbf{Y}_n(s)$، عیناً همان ماتریس موجود در رابطهٔ (۴-۱۳) است، جز اینکه در همه جا، s جانشین $j\omega$ شده است. تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر چنین است:

$$E_{2e}(s) = \frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_n(s)} \frac{I_m}{s - j\omega} \tag{۴-۱۸}$$

بنابراین، با به کار بردن همان طرز نمایش قبلی یعنی $H = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_n}$ [همان است که در (۴-۱۵) بود]، داریم:

$$E_{2e}(s) = H(s) \frac{I_m}{s - j\omega} \tag{۴-۱۹}$$

فرض کنیم تمام قطب‌های $H(s)$ در نیم صفحهٔ باز چپ باشند [یعنی $\text{Re}(p_j) < 0$ برای $j = 1, 2, \cdots$، که در اینجا p_j قطب‌های $H(s)$ هستند]. گسترش به صورت کسرهای جزئی (۴-۱۹) شامل جملاتی است که می‌توانند در دو دسته گروه‌بندی شوند. در دستهٔ اول جملاتی را شامل می‌کنیم که به صورت

---

[1] زیرنویس e برای یادآوری اینکه کمیت متناظر، مربوط به ورودی نمایی است، به کار رفته است.

$\frac{K_{jk}}{(s-p_j)^k}$ می‌باشند (در مورد قطب‌های مکرر) و این کار را برای تمام قطب‌های $H(s)$ انجام می‌دهیم. در دستهٔ دوم، تک جمله‌ای به صورت زیر را شامل می‌کنیم:

$$\frac{K}{s-j\omega} = \frac{H(j\omega)I_m}{s-j\omega} \qquad (۲۰-۴)$$

چون برای تمام j ، $\text{Re}(p_j) < 0$ است، در این صورت وقتی $t \to \infty$ ، برای تمام j ، توابع زمانی متناظر با جملات دستهٔ اول، به طور نمایی به سمت صفر میل می‌کنند. بنابراین، برای تمام مقادیر بزرگ t ، پاسخ $e_{۲e}$ ، به طور نمایی به سمت تابع زمانی که متناظر با تک جمله‌ای (۴-۲۰) می‌باشد، میل می‌کند و داریم:

$$e_{۲e}(t) = \mathcal{L}^{-1}[E_{۲e}(s)]$$
$$\approx H(j\omega)I_m e^{j\omega t} \qquad \text{برای مقادیر بزرگ } t$$

برای به دست آوردن پاسخ $e_۲(0)$ ناشی از $i_۱(t) = I_m \cos \omega t$ ، جزء حقیقی عبارت بالا را حساب کرده و به دست می‌آوریم که:

$$e_۲(t) \approx |H(j\omega)|I_m \cos[\omega t + \measuredangle H(j\omega)] \qquad \text{برای تمام مقادیر بزرگ } t \qquad (۲۱-۴)$$

هنگامی که $t \to \infty$ ، معادلهٔ (۴-۲۱) پاسخ سینوسی را به دست می‌دهد و این پاسخ همانند پاسخی است که در رابطهٔ (۴-۱۶) از تجزیه و تحلیل دقیق حالت دایمی سینوسی به دست آمد.

برای خلاصه کردن این مطالب، دو نتیجهٔ زیر را بیان می‌کنیم:

۱ـ اگر تمام قطب‌های $H(s)$ دارای جزء‌های حقیقی منفی باشند، پاسخ حالت صفر ناشی از $I_m \cos \omega t$ به سمت پاسخ حالت دایمی سینوسی $|H(j\omega)|I_m \cos[\omega t + \measuredangle H(j\omega)]$ میل می‌کند.

۲ـ هنگامی که تابع شبکهٔ $H(s)$ را در $s = j\omega$ محاسبه می‌کنیم، نتیجهٔ به دست آمده نسبت فازور خروجی به فازور ورودی در حالت دایمی سینوسی در فرکانس ω می‌باشد.

تبصره نتیجهٔ اخیر بسیار مهم است زیرا این نتیجه، تابع شبکه را به کمیت‌هایی که به سادگی قابل سنجش می‌باشند (دامنه و فاز نسبی ورودی و خروجی سینوسی) مربوط می‌سازد. بنابراین، اگر به عنوان مثال چیزی در مورد توپولوژی و مقادیر عناصر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان معلوم نبوده و تنها ورودی و خروجی قابل سنجش باشند، بازهم می‌توان تابع شبکه را به طور تجربی تعیین کرد.

تمرین نشان دهید که اگر تمام صفرهای $\Delta_n(s)$ در نیم صفحهٔ باز چپ باشند [برای تمام i ، $\text{Re}(s_i) < 0$ ، که در اینجا s_i صفرهای $\Delta_n(s)$ هستند]، در این صورت شرایط اولیهٔ $\mathcal{N}$ هر چه باشند وقتی $t \to \infty$ ، پاسخ ناشی از ورودی $u(t)I_m \cos \omega t$ ، به طور نمایی به سمت $|H(j\omega)|I_m \cos[\omega t + \measuredangle H(j\omega)]$ میل می‌کند.

۵ - خواص اساسی شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

در این بخش، پنج خاصیت اساسی شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان را دوباره بیان کرده و آنها را اثبات می‌کنیم. قبلاً در مطالعهٔ مدارهای ساده، در این کتاب، با این خواص آشنا شده‌ایم.

خاصیت ۱ برای هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، تبدیل لاپلاس پاسخ کامل، برابر مجموع تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر و تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر می‌باشد. به علت خطی بودن تبدیلهای لاپلاس، همین خاصیت برای توابع زمانی متناظر نیز برقرار است.

قبلاً دیده‌ایم که این بیان، در مورد مثال بخش ۴ برقرار است. برای نشان دادن اینکه چنین بیانی در حالت کلی برقرار است، شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان دلخواهی را با یک ورودی تنها در نظر بگیرید. می‌توان همیشه معادلات گره، مش، حلقه، یا کات‌ست را چنان نوشت که ورودی، تنها در معادلهٔ اول ظاهر شود. به خصوص چنانچه تجزیه و تحلیل گره را به کار برده و متغیرها را ولتاژهای گره e_1، e_2، $\cdots$، e_n و پاسخ مطلوب را e_2 بگیریم، پس از گرفتن تبدیل لاپلاس، ملاحظه می‌کنیم که معادلات به صورت زیر هستند:

$$\left[\quad \mathbf{Y}_n(s) \quad\right]\left[\mathbf{E}(s)\right] = \begin{bmatrix} I(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{۵-۱}$$

با به کار بردن قاعدهٔ کرامر، و مشخص کردن $\Delta_{12}(s)$ به عنوان کوفاکتور عنصر $(1,2)$ از ماتریس ادمیتانس گره $\mathbf{Y}_n(s)$ و $\Delta_n(s)$ به عنوان دترمینان $\mathbf{Y}_n(s)$، به دست می‌آوریم که:

$$\underbrace{E_2(s)}_{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ کامل}} = \underbrace{\frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_n(s)} I(s)}_{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر}} + \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta_{k2}(s) a_k}{\Delta_n(s)}}_{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر}} \tag{۵-۲}$$

توجه کنید که $\frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_n(s)}$ تابع گویایی بوده و (به موجب تعریف) تابع شبکه‌ای است که پاسخ E_2 را به ورودی I مربوط می‌سازد. جملهٔ اول سمت راست رابطهٔ (۵-۲)، تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر است، زیرا هنگامی که تمام شرایط اولیه صفر باشند، تمام a_k ها برابر صفر بوده و جملهٔ دوم در رابطهٔ (۵-۲) از بین می‌رود. به طریق مشابه، وقتی که ورودی به‌طور متحد برابر صفر است، برای تمام مقادیر s، $I(s) = 0$ بوده و جملهٔ اول از بین می‌رود. در نتیجه جملهٔ دوم، تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر است.

با در نظر گرفتن جملهٔ اول رابطهٔ (۵-۲) و توجه به اینکه تابع شبکهٔ $\frac{\Delta_{12}(s)}{\Delta_{n}(s)}$ تابع گویایی با ضرایب حقیقی است، خاصیت زیر را بیان می‌کنیم.

خاصیت ۲ تابع شبکه به موجب تعریف، تابعی است از s که هرگاه در تبدیل لاپلاس ورودی ضرب شود، تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر را به دست می‌دهد. برای هر شبکهٔ فشردهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، هر یک از توابع شبکهٔ آن، تابعی گویا با ضرایب حقیقی می‌باشد.

دلیل لازم بودن اینکه شبکه باید به ویژه "فشرده" باشد، این است که برای شبکه‌های گسترده لزومی ندارد تابع شبکه، تابع گویایی باشد.

در بسیاری از مثالها، چنین دریافتیم که شرایط اولیهٔ لازم برای یکتا مشخص کردن جواب یک مسألهٔ شبکه، ولتاژهای اولیهٔ دوسر خازن‌ها و جریان‌های اولیهٔ داخل سلف‌ها بودند. اکنون با استفاده از تبدیل لاپلاس، ثابت می‌کنیم که این مطلب در حالت کلی درست است. این خاصیت را در بیان زیر توضیح می‌دهیم.

خاصیت ۳ برای هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، شرایط اولیهٔ لازم برای حل آن، نسبت به هر متغیر شبکه، به وسیلهٔ ولتاژهای اولیهٔ دوسر خازن‌ها و جریان‌های اولیهٔ داخل سلف‌ها، کاملاً مشخص می‌شوند.

ایدهٔ نهفته شده در این خاصیت را می‌توان با بیان اینکه حالت اولیهٔ یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان به وسیلهٔ ولتاژهای اولیهٔ دوسر خازن‌ها و جریان‌های اولیهٔ داخل سلف‌ها کاملاً مشخص می‌شود، نیز توضیح داد.

این خاصیت، تقریباً واضح است. یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان را که از مقاومت‌ها، خازن‌ها، سلف‌ها، سلف‌های تزویج شده و منابع وابسته و نابسته درست شده است، در نظر بگیرید. می‌خواهیم نشان دهیم که همان عمل نوشتن معادلات تبدیل لاپلاس، تمام جریانهای اولیهٔ سلف‌ها و تمام ولتاژهای اولیهٔ خازن‌ها را لازم دارد. فرض کنید تجزیه و تحلیل گره یا کات‌ست را انجام داده و ولتاژها را به عنوان متغیرها به کار ببریم. جریان اولیهٔ داخل سلف، در نتیجهٔ بیان جریان سلف برحسب تابعی از ولتاژ سلف، ظاهر می‌شود. در این صورت:

$$i_L(t) = \Gamma \int_0^t v_L(t')dt' + i_L(0-)$$

ولتاژ اولیهٔ خازن در اثر تبدیل لاپلاس گرفتن از جریان خازن، ظاهر می‌شود. در این صورت:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt}$$

از این‌رو:

$$I_C(s) = CsV_C(s) - Cv_C(0-)$$

در تجزیه و تحلیل مش یا حلقه، روابط دوگانی، تمام جریان‌های اولیهٔ سلف‌ها و تمام ولتاژهای اولیهٔ خازن‌ها را در معادلات لاپلاس وارد می‌کنند. بنابراین، تبدیل لاپلاس هر متغیر شبکه، به وسیلهٔ تبدیل لاپلاس ورودی‌ها، ولتاژهای اولیهٔ خازن‌ها و جریان‌های اولیهٔ سلف‌ها کاملاً مشخص می‌شود.

خاصیت ٤ برای هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، تابع شبکه تبدیل لاپلاس پاسخ ضربهٔ متناظر آن شبکه است.

در حقیقت، فرض کنید می‌خواستیم پاسخ ضربه را محاسبه کنیم، یعنی ولتاژ $e_۲$ ناشی از ورودی $i(t) = \delta(t)$ ، با شرط اینکه شبکه، پیش از اعمال ضربه در ورودی آن، در حالت صفر قرار داشته باشد. در این صورت، تمام شرایط اولیه صفر می‌باشند و سمت راست رابطهٔ (۵-۱) به بردار ستونی تنهای $(۱ , ۰ , ۰ , \cdots , ۰)^T$ تقلیل می‌یابد. چنانچه تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه را $H(s)$ بنامیم، از رابطهٔ (۵-۲) به دست می‌آوریم:

$$H(s) = \frac{\Delta_{۱۲}(s)}{\Delta_n(s)} \qquad (۵-۳)$$

عبارت سمت چپ، تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه و عبارت سمت راست، تابع شبکه می‌باشد و بدین ترتیب، خاصیت ۴ ثابت می‌شود.

خاصیت ۵ برای هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، مشتق پاسخ پله، برابر پاسخ ضربه است.

چنانچه پاسخ پله را $\mathfrak{s}(t)$ بنامیم، از رابطهٔ (۵-۳) به دست می‌آوریم:

$$\mathfrak{L}[\mathfrak{s}(t)] = \frac{\Delta_{۱۲}(s)}{\Delta_n(s)} \frac{۱}{s} \qquad (۵-۴)$$

از آنجا که پاسخ پلهٔ $\mathfrak{s}(t)$ مطابق تعریف، برای $t < ۰$ به طور متحد برابر صفر است، با استفاده از قاعدهٔ مشتق‌گیری به دست می‌آوریم:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right] = s\mathfrak{L}[\mathfrak{s}] = \frac{\Delta_{۱۲}(s)}{\Delta_n(s)} = H(s) = \mathfrak{L}[h(t)] \qquad (۵-۵)$$

از خاصیت یکتایی تبدیل لاپلاس نتیجه می‌گیریم:

$$h(t) = \frac{d\mathfrak{s}}{dt} \qquad (۵-۶)$$

هنگامی که رابطهٔ (۵-۶) را به کار می‌بریم، به راحتی فهمیده می‌شود که هرگاه $\mathfrak{s}$ "جهش" داشته باشد، مشتق آن، ضربهٔ متناظر آن جهش را شامل می‌گردد.

در مورد شبکه‌های خطی تغییرپذیر با زمان، و یا در مورد شبکه‌های غیرخطی، خاصیت ۵ درست نیست.

تبصره برای اینکه کاملاً دقیق باشیم، در سراسر بحث بالا می‌بایست حالتی را که دترمینان $\Delta_n(s)$ به طور متحد برابر صفر است (یعنی صفر برای برای همهٔ مقادیر s) حذف می‌کردیم. وقتی که چنین اتفاقی رخ دهد، گوییم در حالت سوده هستیم. در چنین مواردی ممکن است شبکه جوابی نداشته یا جوابهای بی‌شماری داشته باشد. از نظر فیزیکی واضح است که حالت‌های سوده در نتیجهٔ ساده کردن‌های بیش از حد در عمل مدل‌سازی، حاصل می‌گردند؛ مثلاً بعضی از جنبه‌های فیزیکی مربوط به مسأله ممکن است نادیده گرفته شده باشند. مثالهایی از شبکه‌های سوده در بخش ۷ داده خواهد شد.

۶ - معادلات حالت

تبدیل لاپلاس، به همان خوبی و مؤثری در مورد معادلات حالت نیز به کار می‌رود.

مثال مدار نشان داده شده در شکل (۶-۱) را در نظر بگیرید. برای مقادیر عناصر نشان داده شده، معادلات حالت چنین هستند:

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۲/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} e_s \qquad (۶-۱)$$

می‌توان این معادله را به شکل استاندارد زیر نوشت:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}w \qquad (۶-۲)$$

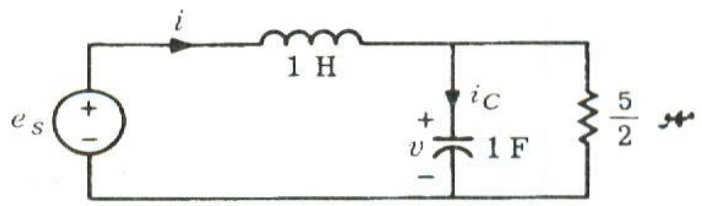
بدین ترتیب، در حالت کنونی $\mathbf{x} = [i \ \ v]^T$ بردار حالت و $w = e_s$ ورودی بوده و داریم:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۲/۵ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادلهٔ (۶-۱)، به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} s & ۱ \\ -۱ & s + ۲/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} E(s) + \begin{bmatrix} i(۰^-) \\ v(۰^-) \end{bmatrix}$$

که در اینجا $I(s)$ ، $V(s)$ و $E(s)$ به ترتیب تبدیلهای لاپلاس $i(t)$ ، $v(t)$ و $e_s(t)$ می‌باشند. به سادگی



شکل ۶-۱ مثالی برای تشریح معادلات حالت.

می‌توان این دو معادله را برحسب دو مجهول حل کرد. لیکن برای نشان دادن فرمول کلی، معادلهٔ بالا را از سمت چپ در ماتریس معکوس زیر ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} s & ۱ \\ -۱ & s+۲/۵ \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{\psi(s)}\begin{bmatrix} s+۲/۵ & -۱ \\ ۱ & s \end{bmatrix}$$

که در اینجا $\psi(s)$ دترمینان ماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix} s & ۱ \\ -۱ & s+۲/۵ \end{bmatrix}$$

و به صورت $s^۲ + ۲/۵s + ۱$ بیان می‌شود. نتیجهٔ عملیات بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} I(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+۲/۵}{\psi(s)} & \frac{-۱}{\psi(s)} \\ \frac{۱}{\psi(s)} & \frac{s}{\psi(s)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} E(s) + \begin{bmatrix} \frac{s+۲/۵}{\psi(s)} & \frac{-۱}{\psi(s)} \\ \frac{۱}{\psi(s)} & \frac{s}{\psi(s)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(۰^-) \\ v(۰^-) \end{bmatrix} \qquad (۳-۶)$$

ملاحظه کنید که پاسخ، برحسب حاصل‌جمع دو جمله بیان شده است؛ جملهٔ اول تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر و جملهٔ دوم تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر می‌باشد. به عنوان مثال، فرض کنید حالت اولیه، همان حالت صفر باشد. در این صورت $i(۰^-) = v(۰^-) = ۰$ و چنانچه $e_s(t) = \delta(t)$ باشد، داریم، $E(s) = ۱$.

با استفاده از رابطهٔ (۶-۳) و گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس از رابطهٔ زیر، پاسخ مطلوب را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} I(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+۲/۵}{\psi(s)} & \frac{-۱}{\psi(s)} \\ \frac{۱}{\psi(s)} & \frac{s}{\psi(s)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+۲/۵}{\psi(s)} \\ \frac{۱}{\psi(s)} \end{bmatrix}$$

با توجه به $\psi(s) = (s+۰/۵)(s+۲)$ و به کار بردن گسترش به صورت کسرهای جزئی، به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۳}e^{-۰/۵t} - \frac{۱}{۳}e^{-۲t} \\ \frac{۲}{۳}e^{-۰/۵t} - \frac{۲}{۳}e^{-۲t} \end{bmatrix} \qquad (۴-۶)$$

در حالت کلی، می‌توان خروجی را برحسب یک ترکیب خطی از مؤلفه‌های بردار حالت و

ورودی نوشت. فرض کنید y خروجی مطلوب باشد؛ در این صورت، برحسب طرز نمایش استاندارد داریم:

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d_\circ w \qquad (۶-۵)$$

که در اینجا بردار $\mathbf{c}$ و اسکالر $d_\circ$ ثابت هستند. فرض کنید متغیر خروجی مثال فوق را برحسب جریان i_C داخل خازن، بیان کنیم. در این صورت:

$$i_C = i - ۲/۵\, v = \begin{bmatrix} ۱ & -۲/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} \qquad (۶-۶)$$

برحسب طرز نمایش معادلهٔ (۶-۵)، این رابطه بدین معنی است که:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲/۵ \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad d_\circ = ۰$$

از ترکیب روابط (۶-۴) و (۶-۶)، پاسخ ضربهٔ این مدار را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$i_C(t) = -\frac{۱}{۳} e^{-۰/۵t} + \frac{۴}{۳} e^{-۲t}$$

برای شبکه‌های کلی خطی تغییرناپذیر با زمان، با یک ورودی و یک خروجی، معادلات حالت استاندارد، به صورت زیر است:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}w \qquad (۶-۷)$$

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d_\circ w \qquad (۶-۸)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس، به دست می‌آوریم:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{b}W(s) + \mathbf{x}(۰^-) \qquad (۶-۹)$$

$$Y(s) = \mathbf{c}^T\mathbf{X}(s) + d_\circ W(s) \qquad (۶-۱۰)$$

که در اینجا $\mathbf{X}(s)$ ، $Y(s)$ و $W(s)$ ، به ترتیب تبدیلهای لاپلاس $\mathbf{x}(t)$ ، $y(t)$ و $w(t)$ می‌باشند. چنانچه رابطهٔ (۶-۹) را از سمت چپ در $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-۱}$ ضرب کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-۱}\mathbf{b}W(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-۱}\mathbf{x}(۰^-) \qquad (۶-۱۱)$$

با جایگذاری (۶-۱۱) در (۶-۱۰)، تبدیل لاپلاس خروجی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{Y(s)}_{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ کامل}} = \underbrace{[\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-۱}\mathbf{b} + d_\circ]W(s)}_{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر}} + \underbrace{\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-۱}\mathbf{x}(۰^-)}_{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر}} \qquad (۶-۱۲)$$

تبصرهٔ ۱ چنانچه معادلهٔ (۶-۱۲) را با معادلهٔ (۵-۲) مقایسه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که تبدیل لاپلاس

پاسخ کامل، مجدداً به صورت مجموع دو جمله است. توجه کنید که اگر شبکه از حالت صفر شروع کند، یعنی $\mathbf{x}(0^-) = 0$ ، پاسخ، تنها ناشی از تحریک ورودی است و بنابراین جملهٔ اول سمت راست رابطهٔ (۶-۱۲)، تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر است. به طریق مشابه، چنانچه ورودی مساوی صفر قرار داده شود، یعنی برای تمام s ، $W(s) = 0$ باشد، پاسخ منحصراً ناشی از حالت اولیهٔ $\mathbf{x}(0^-)$ می‌باشد. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که جملهٔ دوم سمت راست رابطهٔ (۶-۱۲) تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر است.

تبصرهٔ ۲ به خاطر بیاورید که تابع شبکه، مطابق تعریف، نسبت تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر به تبدیل لاپلاس ورودی است. بنابر این، تابع شبکهٔ $H(s)$ را می‌توان صریحاً برحسب ضرایب $\mathbf{A}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ و d_0 از معادلات حالت به صورت زیر بیان کرد:

$$H(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d_0 \qquad (۶-۱۳)$$

تبصرهٔ ۳ برای محاسبهٔ عکس ماتریس $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ ، لازم است که دترمینان ماتریس $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ را پیدا کنیم. فرض کنید دترمینان فوق را به صورت $\psi(s) \triangleq \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ نشان دهیم. $\psi(s)$ یک چندجمله‌ای برحسب متغیر فرکانس مختلط s بوده و **چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس** $\mathbf{A}$ خوانده می‌شود. بنابراین:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\psi(s)}\mathbf{N}(s) \qquad (۶-۱۴)$$

که در اینجا $\mathbf{N}(s)$ ماتریسی با عناصر چندجمله‌ای است. معادلهٔ (۶-۱۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H(s) = \frac{1}{\psi(s)}\mathbf{c}^T\mathbf{N}(s)\mathbf{b} + d_0 \qquad (۶-۱۵)$$

بنابر این، هر قطب تابع شبکهٔ $H(s)$ یک صفر چندجمله‌ای مشخصهٔ $\psi(s)$ است، اما ممکن است بعضی از صفرهای چندجمله‌ای مشخصهٔ $\psi(s)$ ، قطب $H(s)$ نباشند، زیرا امکان دارد عاملی میان چندجمله‌ای صورت $\mathbf{c}^T\mathbf{N}(s)\mathbf{b}$ و چندجمله‌ای مخرج $\psi(s)$ مشترک بوده و در نتیجه حذف گردد.

تمرین تابع شبکه‌ای را که به وسیلهٔ ورودی e_s و خروجی i_C در مدار شکل (۶-۱) مشخص می‌شود، تعیین کنید.

*۶-۱ محاسبهٔ $e^{\mathbf{A}t}$ با استفاده از تبدیل لاپلاس

همان‌طوری که می‌دانیم پاسخ ورودی صفر معادلهٔ دیفرانسیل برداری:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \qquad (*۶-۱۶)$$

به صورت زیر است:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_{\circ} \qquad \text{برای } t \geq \circ \qquad (\text{۱۷-۶*})$$

برای محاسبهٔ $e^{\mathbf{A}t}$ روشهای متعددی وجود دارد که یکی از ساده‌ترین آنها استفاده از تبدیل لاپلاس است. اگر از طرفین رابطهٔ (*۶-۱۶) تبدیل لاپلاس بگیریم و از شرط اولیهٔ داده شده نیز استفاده کنیم، به دست می‌آوریم:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_{\circ} = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \qquad (\text{۱۸-۶*})$$

می‌توان این معادله را به صورت زیر مرتب کرد:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_{\circ} \qquad (\text{۱۹-۶*})$$

که در آن $\mathbf{I}$ ماتریس واحد است. از ضرب کردن طرفین این معادله در عکس ماتریس $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_{\circ} \qquad (\text{۲۰-۶*})$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از طرفین رابطهٔ (*۶-۲۰) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{x}(t) = (\mathcal{L}^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1})\mathbf{x}_{\circ} \qquad (\text{۲۱-۶*})$$

از مقایسهٔ (*۶-۲۱) با پاسخ حوزهٔ زمانی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده در (*۶-۱۷) بلافاصله درمی‌یابیم:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}} \qquad (\text{۲۲-۶*})$$

رابطهٔ (*۶-۲۲) امکان محاسبهٔ $e^{\mathbf{A}t}$ را با استفاده از تبدیل لاپلاس به راحتی فراهم می‌آورد.

مثال با استفاده از تبدیل لاپلاس، $e^{\begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}t}$ را حساب کنید.

با استفاده از رابطهٔ (*۶-۲۲) می‌نویسیم:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+۲ & ۱ \\ -۲ & s+۵ \end{bmatrix}$$

با محاسبهٔ عکس ماتریس $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ به دست می‌آوریم:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+۲ & ۱ \\ -۲ & s+۵ \end{bmatrix}^{-1} = \frac{۱}{s^{۲} + ۷s + ۱۲}\begin{bmatrix} s+۵ & -۱ \\ ۲ & s+۲ \end{bmatrix}$$

یا:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+۵}{(s+۳)(s+۴)} & \dfrac{-۱}{(s+۳)(s+۴)} \\ \dfrac{۲}{(s+۳)(s+۴)} & \dfrac{s+۲}{(s+۳)(s+۴)} \end{bmatrix}$$

با گسترش به صورت کسرهای جزئی هر یک از عناصر ماتریس $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ و گرفتن عکس تبدیل لاپلاس به دست می‌آوریم:

$$e^{\begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}t} = \mathfrak{L}^{-1}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} ۲e^{-۳t}-e^{-۴t} & -e^{-۳t}+e^{-۴t} \\ ۲e^{-۳t}-۲e^{-۴t} & -e^{-۳t}+۲e^{-۴t} \end{bmatrix}$$

۷ - شبکه‌های سوده

به طور حسی انتظار داریم که هر شبکهٔ RLC خطی تغییرناپذیر با زمان، در پاسخ به هر دسته از شرایط اولیه و هر دسته از منابع نابسته، جواب یکتا داشته باشد. مثالهایی که در زیر بیان خواهیم کرد نشان می‌دهند که این مطلب در بعضی از حالت‌های محدود کننده صحیح نیست. همچنین خواهیم دید که هرگاه یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان شامل چند منبع وابسته یا چند مقاومت منفی باشد، ممکن است اتفاق بیفتد که برای بعضی از شرایط اولیه و/ یا برای بعضی از توزیع‌های منابع، شبکه دارای جوابی نبوده یا بیش از یک جواب داشته باشد.

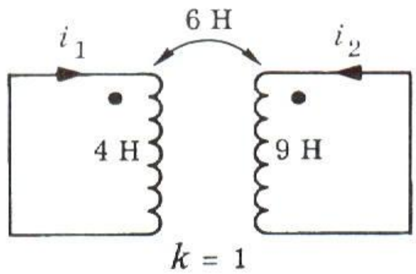
مثال ۱ این ساده‌ترین مثالی از یک شبکهٔ $RLCM$ پسیو است که جوابهای بی‌نهایت زیادی دارد. سلف‌های تزویج شدهٔ کامل نشان داده شده در شکل (۷-۱) را در نظر بگیرید. معادلات مش چنین هستند:

$$\mathbf{L}\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_۱}{dt} \\ \frac{di_۲}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad (۱-۷)$$

و فرض کنید که:

$$i_۱(۰) = i_۲(۰) = ۰ \qquad (۲-۷)$$

توجه کنید که ماتریس اندوکتانس $\mathbf{L}$ یک ماتریس ویژه است [یعنی، $\det(\mathbf{L}) = ۰$] . این یک نتیجهٔ مستقیم حقیقتی است که سلف‌ها به طور کامل تزویج شده‌اند. به سادگی می‌توان دید که اگر بردار



شکل ۷-۱ مثالی از یک شبکهٔ سوده: سلف‌های تزویج شدهٔ کامل.

$(\text{۲}, \text{۳}-)^T$ را **a** بنامیم، در این صورت، $\mathbf{La} = \text{۰}$. در نتیجه چنانچه $f(t)$ هر تابع قابل مشتق‌گیری که در آن $f(\text{۰}) = \text{۰}$ است، باشد:

$$i_1(t) = -\text{۳}f(t) \qquad \text{و} \qquad i_2(t) = \text{۲}f(t) \tag{۷-۳}$$

یک جواب از معادلهٔ (۷-۱) را تشکیل می‌دهند که شرایط اولیهٔ (۷-۲) را نیز برمی‌آورند.

به نظر می‌رسد که این موضوع ممکن است تضاد روشنی با قضیهٔ یکتایی معادلات دیفرانسیل داشته باشد (پیوست پ، بخش ۴). اما برای اینکه بتوان قضیه یکتایی پیوست پ را اعمال کرد، باید معادلات را به صورت نرمال $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ درآورد. برای نوشتن معادلهٔ (۷-۱) به صورت نرمال، باید معادلهٔ (۷-۱) را در عکس ماتریس **L** ضرب کرد، اما چون **I** ماتریس ویژه است، ماتریس عکس آن وجود ندارد. بنابراین، معادلهٔ (۷-۱) را نمی‌توان به صورت نرمال نوشت و در نتیجه قضیهٔ یکتایی را نمی‌توان در این مورد به کار برد.

از دیدگاه فیزیکی، مشکل کار البته در آن قسمت از عمل مدل‌سازی قرار دارد که در جستجوی مدل بهتری در اثر ساده کردن‌های متوالی، اصل مطلب هم از دستمان درمی‌رود. این نکته، در تمرین زیر تشریح شده است.

تمرین تحقیق کنید چنانچه مدار نشان داده شده در شکل (۷-۱) توسط یکی از راه‌های زیر، تغییر داده شود، در این صورت مدار دارای یک و تنها یک جواب خواهد بود؛ (۱) یک مقدار مثبت به یکی از خود القایی‌ها اضافه شود (این، مدلی از شار پراکندگی موجود در هر حالت را نشان می‌دهد)، (۲) در یکی از مش‌ها، یک مقاومت خطی قرار داده شود، یا (۳) خازن کوچکی به طور سری با یکی از سلف‌ها قرار داده شود.

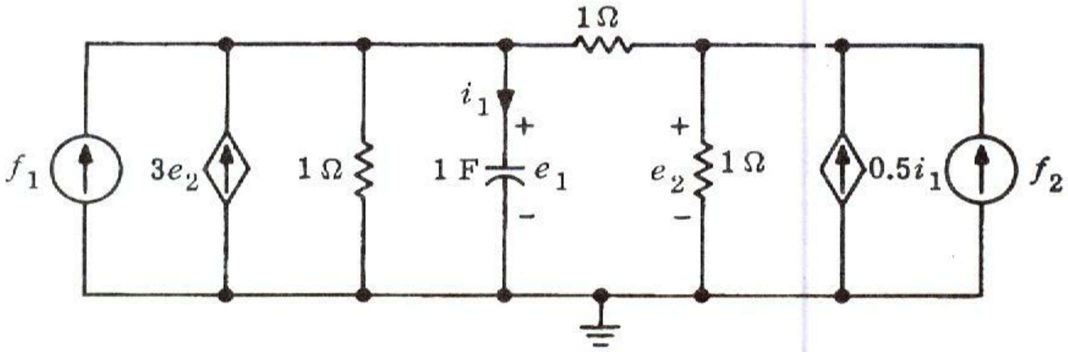
مثال ۲ این مثال، آن نوع مشکلی را که ممکن است وقتی شبکه، هم شامل عناصر RLC و هم منابع وابسته است و مقادیر عناصر رابطهٔ خاصی نسبت به هم دارند پدید می‌آید، نشان می‌دهد. معادلات گره، برای مدار شکل (۷-۲) چنین هستند:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}e_1 + \text{۲}e_1 - \text{۴}e_2 = f_1 \\ &-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\frac{d}{dt}e_1 - e_1 + \text{۲}e_2 = f_2 \end{aligned} \tag{۷-۴}$$

ابتدا توجه کنید که اگر معادلهٔ دوم را در ۲- ضرب کنیم، نتیجهٔ حاصل از سمت چپ، همانند سمت چپ معادلهٔ اول خواهد بود و بنابراین، دستگاه معادلات (۷-۴) دارای جواب است اگر و تنها اگر:

$$f_1 = -\text{۲}f_2 \tag{۷-۵}$$

به عبارت دیگر، جز در موردی که منابع جریان نابسته دارای شکل موجهای $f_1(\text{۰})$ و $f_2(\text{۰})$ باشند که به وسیلهٔ معادلات (۷-۵) به هم مربوط می‌شوند، پیدا کردن ولتاژهای شاخه‌ها و جریان‌های شاخه‌ها که معادلات شاخه و قوانین کیرشف را برمی‌آورند، امکان‌پذیر نیست. بنابراین، هنگامی که f_1 برابر $-\text{۲}f_2$



شکل ۷-۲ مثالی از یک شبکهٔ سوده با منابع وابسته.

نباشد، شکل (۷-۲) مثالی از یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان به دست می‌دهد که دارای جواب نمی‌باشد.

اکنون فرض کنید:

$$f_1(t) = f_2(t) = 0 \qquad \text{برای تمام } t \tag{۷-۶}$$

و $e_1(0) = 0$. به سادگی می‌توان تحقیق کرد (با جایگذاری مستقیم) که اگر $g(t)$ هر تابع قابل مشتق‌گیری، که در رابطهٔ $g(0) = 0$ نیز صدق کند باشد، در این صورت:

$$e_1(t) = 4g(t) \qquad \text{و} \qquad e_2(t) = \dot{g}(t) + 2g(t)$$

به شرطی که (۷-۶) برقرار بوده و $e_1(0) = 0$ باشد، جوابی از معادلهٔ (۷-۴) را تشکیل می‌دهد. در این مورد تعداد جوابها بی‌پایان است. مجدداً این مورد از آنهایی است که عمل مدل‌سازی، ما را گمراه کرده است.

اکنون چنانچه از دو طرف معادلهٔ (۷-۴)، تبدیل لاپلاس بگیریم، به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{Y}_n(s)\mathbf{E}(s) = \mathbf{F}(s)$$

علت این مشکلات آن است که برای تمام مقادیر s ، داریم: $\det[\mathbf{Y}_n(s)] = 0$.

شرط "برای تمام مقادیر s " اهمیت قاطعی در این مورد دارد. در واقع $\det[\mathbf{Y}_n(s)]$ یک چندجمله‌ای برحسب متغیر مختلط s می‌باشد و بنابراین همیشه امکان دارد که مقادیر خاصی از s را بتوان پیدا کرد که به‌ازای آنها $\det[\mathbf{Y}_n(s)]$ مساوی صفر گردد. از طرف دیگر، تنها راهی که $\det[\mathbf{Y}_n(s)]$ بتواند برای تمام مقادیر s صفر باشد، این است که تمام ضرایب آن صفر باشد.

تمرین برای هر کدام از مثالهای بالا، $\det[\mathbf{Y}_n(s)]$ را حساب کنید (تحقیق کنید که برای تمام s ، مقدار آن برابر صفر است).

این مثالها، تعریف زیر را توجیه می‌کنند: یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان وقتی **سوده** نامیده خواهد شد که دترمینان دستگاه معادلات تبدیل لاپلاس حاصل از تجزیه و تحلیل گره، مش، حلقه یا کات‌ست، برای تمام مقادیر s برابر صفر باشد. توجه به این نکته حائز اهمیت است که شبکه‌های سوده، نتیجهٔ ساده کردن‌های بیش از حد در عمل مدل‌سازی می‌باشند.

۸ - شرایط کافی برای یکتایی

اولین مطلبی را که می‌خواهیم ثابت کنیم، بیان زیر است: هر شبکهٔ RLC خطی تغییرناپذیر با زمان که تمام مقاومتهای آن دارای مقاومت مثبت، تمام خازن‌های آن دارای ظرفیت مثبت، و تمام سلف‌های آن دارای اندوکتانس مثبت می‌باشند، در پاسخ به هر دسته از منابع نابسته و هر حالت اولیه، جواب یکتایی خواهد داشت.

چون شرایط بیان شده برای اجزای RLC لازم می‌دارد که این عناصر پسیو باشند، می‌توان نتیجهٔ فوق را دوباره به صورت زیر بیان کرد:

برای هر حالت اولیه و هر دسته از ورودی‌های داده شده، هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان که از Rها، Lها و C های پسیو ساخته شده باشد، جواب یکتایی دارد.

اثبات اثبات خود را بر مبنای تجزیه و تحلیل گره انجام می‌دهیم. معادلات گره برحسب تبدیلهای لاپلاس به صورت زیر هستند:

$$\mathbf{Y}_n(s)\mathbf{E}(s) = \mathbf{F}(s) \qquad (۸-۱)$$

که در اینجا بردار سمت راست، $\mathbf{F}(s)$ ، شامل تأثیر منابع نابسته و شرایط اولیه هر دو، می‌باشد. اگر در حالتی نباشیم که به‌ازای تمام مقادیر s ، $\det[\mathbf{Y}_n(s)] = 0$ باشد، جواب یکتا خواهد بود. در واقع، نشان خواهیم داد که هر وقت s مثبت و حقیقی است، $\det[\mathbf{Y}_n(s)] \neq 0$ می‌باشد. به منظور این اثبات، فرض کنید s_1 یک عدد حقیقی و مثبت باشد. ماتریس ادمیتانس شاخهٔ $\mathbf{Y}_b(s)$ را که یک ماتریس $b \times b$ بوده و در s_1 حساب شده است، در نظر بگیرید. ماتریس $\mathbf{Y}_b(s)$ قطری است و عناصر آن به صورت G ، Cs_1 و $\frac{1}{Ls_1}$ ، می‌باشند که در اینجا G ، C و L اعداد مثبتی هستند. بنابراین، تمام عناصر قطری ماتریس قطری $\mathbf{Y}_b(s_1)$ مثبت خواهند بود. ماتریس ادمیتانس گره $\mathbf{Y}_n(s)$ حساب شده در s_1 را در نظر بگیرید. این ماتریس با رابطهٔ زیر به ماتریس ادمیتانس شاخه مربوط می‌شود:

$$\mathbf{Y}_n(s_1) = \mathbf{A}\mathbf{Y}_b(s_1)\mathbf{A}^T \qquad (۸-۲)$$

که در اینجا ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ $\mathbf{A}$ ، یک ماتریس $n \times b$ و از رتبهٔ کامل است. به منظور اثبات از طریق برهان خلف، فرض کنید که $\det[\mathbf{Y}_n(s_1)] = 0$. در این صورت، بردار nـ مؤلفه‌ای غیرصفری مانند $\mathbf{x}$ وجود دارد به قسمی که:

$$\mathbf{Y}_n(s_1)\mathbf{x} = 0 \qquad (۸-۳)$$

در حقیقت، معادلهٔ (۸-۳) یک دستگاه از معادلات جبری خطی همگن برحسب x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n را نشان می‌دهد و دترمینان دستگاه، برابر صفر است. چنانچه معادلهٔ (۸-۳) را از سمت چپ در $\mathbf{x}^T$ ضرب کنیم، نتیجهٔ حاصل برابر صفر بوده و به ترتیب، چنین به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{x}^T\mathbf{Y}_n(s_1)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{Y}_b(s_1)\mathbf{A}^T\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{A}^T\mathbf{x})^T\mathbf{Y}_b(\mathbf{A}^T\mathbf{x}) \end{aligned} \qquad (۸-۴)$$

بنابراین چنانچه بردار bـ مؤلفه‌ای $\mathbf{z}$ را به صورت $\mathbf{z} \triangleq \mathbf{A}^T\mathbf{x}$ تعریف می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم که:

$$\mathbf{z}^T\mathbf{Y}_b(s_1)\mathbf{z} = 0 \qquad (۵-۸)$$

این بردار جدید، $\mathbf{z} \neq 0$ است، زیرا $\mathbf{x} \neq 0$ بوده و $\mathbf{A}^T$ از رتبهٔ کامل است. اکنون معادلهٔ (۸-۵) نمی‌تواند برقرار باشد زیرا بردار حقیقی $\mathbf{z} \neq 0$ بوده و $\mathbf{Y}_b(s_1)$ یک ماتریس قطری با عناصر قطری مثبت است. در واقع، رابطه (۸-۵) بیان می‌دارد که:

$$\sum_{i=1}^{b} y_{ii}(s_1)z_i^2 = 0$$

که در اینجا همهٔ z_iها صفر نبوده و هر یک از $y_{ii}(s_1)$ها مثبت می‌باشند و این یک تناقض است. در نتیجه رابطهٔ $\det[\mathbf{Y}_n(s_1)] \neq 0$ باید برقرار باشد.

نتیجهٔ بالا را می‌توان در موردی که اندوکتانس‌های متقابل وجود دارند نیز توسعه داد. چنانچه این مطالب را به دقت تنظیم کنیم، نتیجهٔ حاصل چنین خواهد بود:

فرض کنید که $\mathcal{N}$ یک شبکهٔ $RLCM$ خطی تغییرناپذیر با زمان باشد، به قسمی که تمام مقاومت‌های آن دارای مقاومت مثبت، تمام خازن‌های آن دارای ظرفیت مثبت و تمام سلف‌های آن دارای اندوکتانس مثبت باشند. همچنین فرض کنید که هر دسته از سلف‌های تزویج شده، دارای ماتریس اندوکتانس معین مثبت باشند. تحت این شرایط، برای هر حالت اولیه و هر دسته از ورودی‌های داده شده، شبکهٔ $\mathcal{N}$ دارای جواب یکتا می‌باشد.

می‌توان با به‌کار بردن تجزیه و تحلیل حلقه و استفاده از این حقیقت که برای مقادیر مثبت و حقیقی s_1، ماتریس امپدانس شاخهٔ $\mathbf{Z}_b(s_1)$، یک ماتریس حقیقی، متقارن و معین مثبت است، بیان فوق را ثابت کرد.

تمرین یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان را به قسمی در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{Y}_b(j\omega) = \mathbf{G}_b + j\mathbf{B}_b(\omega)$ باشد، که در اینجا $\mathbf{G}_b$ ماتریسی از اعداد حقیقی بوده و $\mathbf{B}_b(\omega)$ دارای عناصر حقیقی است که وابسته به ω می‌باشند. درستی حقایق زیر را نشان دهید:

الف ـ چنانچه برای ω مشخصی، ماتریس حقیقی $\mathbf{G}_b + \mathbf{B}_b(\omega)$ متقارن و معین مثبت باشد، در این صورت ماتریس ادمیتانس گره $\mathbf{Y}_n(j\omega)$، ناویژه است.

ب ـ در هر شبکهٔ RC که از مقاومتهای مثبت و ظرفیتهای مثبت ساخته شده باشد، برای تمام مقادیر $\omega > 0$، ماتریس $\mathbf{Y}_n(j\omega)$، یک ماتریس ناویژه است.

پ ـ با به کار بردن تجزیه و تحلیل حلقه نشان دهید که در هر شبکهٔ RL که از مقاومتهای مثبت و اندوکتانس‌های مثبت ساخته شده باشد، برای تمام مقادیر $\omega > 0$، ماتریس امپدانس حلقهٔ $\mathbf{Z}_l(j\omega)$، یک ماتریس ناویژه است.

خلاصه

■ خواص اساسی تبدیل لاپلاس آنهایی هستند که در جدول (۱۳-۲) خلاصه شده‌اند. درست مانند لگاریتم‌ها، استفاده از تبدیل لاپلاس براساس خاصیت یکتایی آن قرار دارد، یعنی برای یک تابع زمانی، تنها یک تبدیل لاپلاس متناظر است و برعکس، برای یک تبدیل لاپلاس، تنها یک تابع زمانی متناظر می‌باشد.

جدول ۱۳-۲ خواص اساسی تبدیل لاپلاس

انتگرال تعریف کننده: $\mathfrak{L}[f(t)] \triangleq \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

خطی بودن: $\mathfrak{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathfrak{L}[f_1(t)] + c_2 \mathfrak{L}[f_2(t)]$

که در اینجا c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه هستند.

مشتق‌گیری: $\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\mathfrak{L}[f(t)] - f(0^-)$

(چنانچه f "جهش" داشته باشد، $\frac{df}{dt}$ ضربه‌های متناظر را شامل می‌گردد.)

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2\mathfrak{L}[f(t)] - sf(0^-) - f^{(1)}(0^-)$$

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^3f}{dt^3}\right] = s^3\mathfrak{L}[f(t)] - s^2f(0^-) - sf^{(1)}(0^-) - f^{(2)}(0^-)$$

انتگرال‌گیری: $\mathfrak{L}\left[\int_{0^-}^{t^+} f(t')\,dt'\right] = \frac{1}{s}\mathfrak{L}[f(t)]$

کانولوشن:

کانولوشن f_1 و f_2 را با $f_1 * f_2$ نمایش دهید، یعنی:

$$(f_1 * f_2)(t) \triangleq \int_{0^-}^{t^+} f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau \qquad \text{برای } t \geq 0$$

$$\mathfrak{L}[f_1 * f_2] = \mathfrak{L}[f_1(t)]\,\mathfrak{L}[f_2(t)]$$

■ تابع شبکهٔ یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، مطابق تعریف، نسبت تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر، به تبدیل لاپلاس ورودی آن است.

■ هنگامی که تابع شبکه را در $s = j\omega$ حساب کنیم، نتیجهٔ حاصل، عدد مختلط $H(j\omega)$ می‌باشد. این عدد، نسبت فازور خروجی به فازور ورودی را در حالت دایمی سینوسی در فرکانس ω نشان می‌دهد.

■ پنج خاصیت اساسی شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، چنین هستند:

۱- پاسخ کامل، حاصل جمع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر می‌باشد.

۲- هر تابع شبکه، تابع گویایی از متغیر فرکانس مختلط s با ضرایب حقیقی است.

۳- هر متغیر شبکه، به وسیلهٔ شکل موج ورودی، ولتاژ اولیهٔ خازن‌ها و جریان اولیهٔ سلف‌ها کاملاً مشخص می‌شود.

۴- هر تابع شبکه، تبدیل لاپلاس پاسخ ضربهٔ متناظر است.

۵- مشتق پاسخ پله، پاسخ ضربه است.

■ یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان سوده خوانده می‌شود، اگر دترمینان تبدیل لاپلاس دستگاه معادلات آن برای تمام مقادیر s ، برابر صفر باشد.

■ یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان RLC با مقاومت‌ها، اندوکتانس‌ها و ظرفیت‌های مثبت، برای هر حالت اولیه و برای هر دسته از شکل موج‌های ورودی، دارای جواب یکتایی می‌باشد.

مسائل

۱- تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید:

الف - $f_1(t) = \left[3e^{-2t} + 4e^{-3t}\cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right) + te^{3t}\right]u(t)$

ب - $f_2(t) = e^{-t}u(t-1) + e^{-(t-1)}u(t)$

۲- درستی روابط زیر را ثابت کنید:

الف - $\mathfrak{L}[(1-e^{-t})^n] = \dfrac{n!}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}$

ب - $\mathfrak{L}\left[e^{\alpha t}\dfrac{d^n}{dt^n}\left(\dfrac{t^n}{n!}e^{-2\alpha t}\right)\right] = \dfrac{(s-\alpha)^n}{(s+\alpha)^{n+1}}$

۳- عکس تبدیل لاپلاس توابع زیر را حساب کنید:

الف - $F_1(s) = \dfrac{s^2+s+\alpha}{s^2(s+\alpha)}$

ب - $F_2(s) = \dfrac{3s^2+6}{s^2+2s+5}$

پ - $F_3(s) = \left(\dfrac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}\right)\dfrac{1}{s}$

۴- عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را هم با استفاده ازگسترش به صورت کسرهای ساده و هم با استفاده از کانولوشن حساب کنید.

$$F(s) = \frac{60s}{(s^2+6s+25)(s^2+25)}$$

۵ـ عکس تبدیل لاپلاس $F(s) = \frac{se^{-s} + 2s^2 + 9}{s(s^2 + 9)}$ را حساب کنید و شکل موج آن را رسم کنید.

۶ـ عکس تبدیل لاپلاس توابع زیر را تعیین کنید:

الف ـ $F_1(s) = \frac{(s^2 + 3)}{s(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$ ب ـ $F_2(s) = \frac{n!}{s(s + 1)(s + 2)\cdots(s + n)}$

پ ـ $F_3(s) = \frac{s^2 + 1}{(s^2 + 1)^2(s + 2)^2}$ ت ـ $F_4(s) = \frac{s + 4}{(s + 1)^2(s + 2)^3}$

۷ـ عکس تبدیل لاپلاس توابع زیر را تعیین و شکل موج آنها را رسم کنید:

الف ـ $F_1(s) = \frac{1}{s(1 - e^{-s})}$ ب ـ $F_2(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}$ پ ـ $F_3(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(1 + e^{-s})}$

۸ـ درستی روابط زیر را نشان دهید:

الف ـ (قضیهٔ مقدار اولیه) $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$

ب ـ (قضیهٔ مقدار نهایی) $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$

پ ـ $\mathfrak{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$ ، $\mathfrak{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)ds$

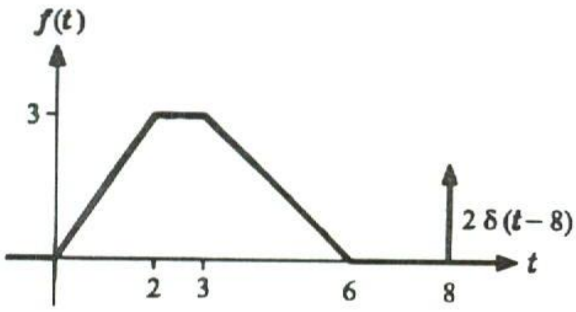
۹ـ برای $F(s) = \frac{s + a}{s^3 + bs^2 + cs + d}$ که در آن $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$ است:

الف ـ مقدار اولیه و نهایی $f(t)$ را به دست آورید.

ب ـ مقدار اولیه و نهایی مشتق‌های اول و دوم $f(t)$ را به دست آورید.

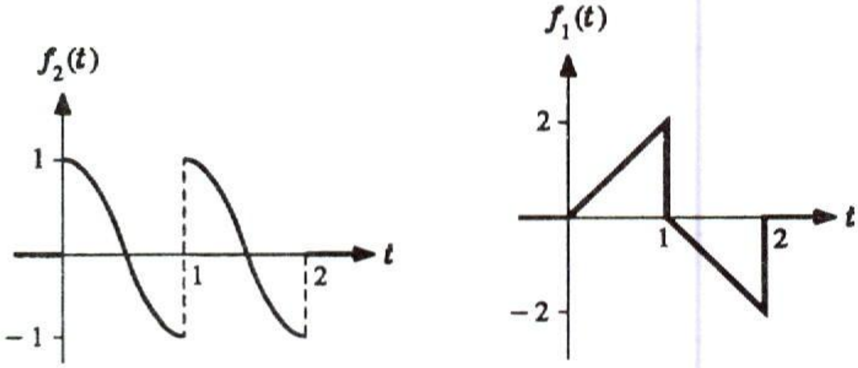
۱۰ـ اگر $V(s) = \frac{-36s^2 - 24s + 2}{12s^3 + 17s^2 + 6s}$ باشد، $\frac{dv}{dt}(0^+)$ را با استفاده از تبدیل لاپلاس حساب کنید.

۱۱ـ تبدیل لاپلاس شکل موج نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۳-۱۱) را حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۱۱)

۱۲ـ تبدیل لاپلاس سیگنال‌های شکل (مسألهٔ ۱۳-۱۲) را حساب کنید. (f_2 از دو تابع سینوسی تشکیل می‌شود.)



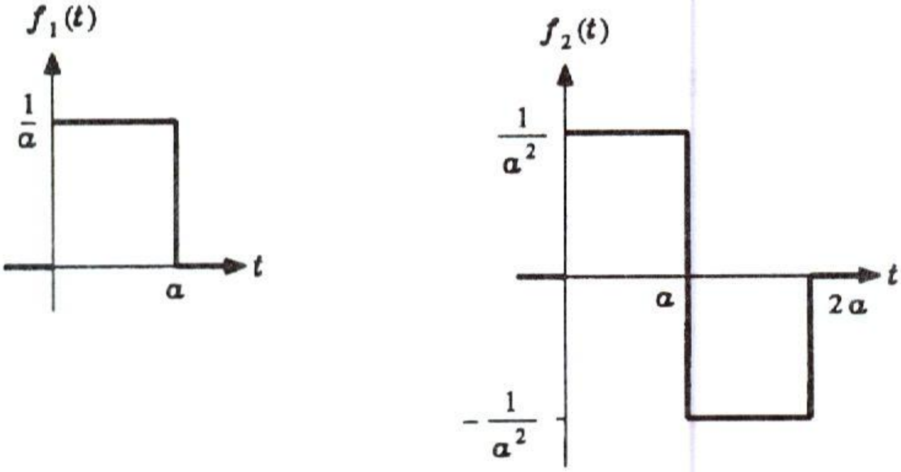
(الف) (ب)

شکل (مسألهٔ ۱۳-۱۲)

۱۳- نشان دهید که:

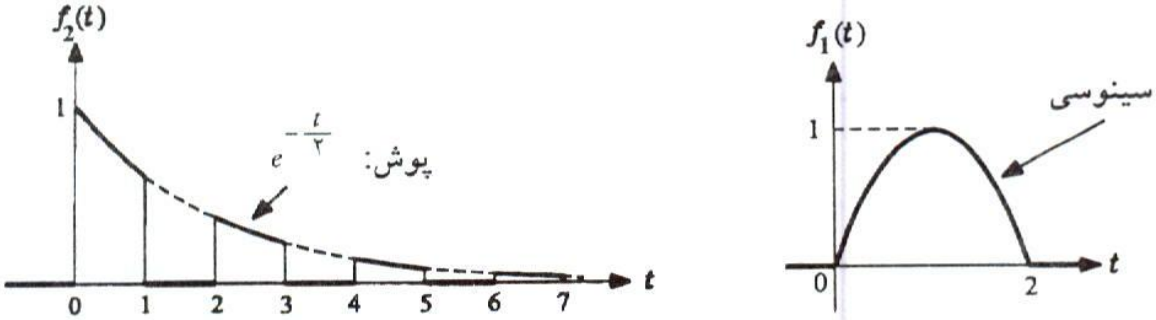
الف - $t\delta^{(1)}(t) = -\delta(t)$ ب - $t^2\delta^{(2)}(t) = 2\delta(t)$

۱٤- سیگنال‌های $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در شکل (مسألهٔ ۱۳-۱۴) داده شده‌اند. تبدیل لاپلاس آنها را به دست آورید و حد این توابع را برای $a \to 0$ حساب کرده و توضیح لازم را بدهید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۱٤)

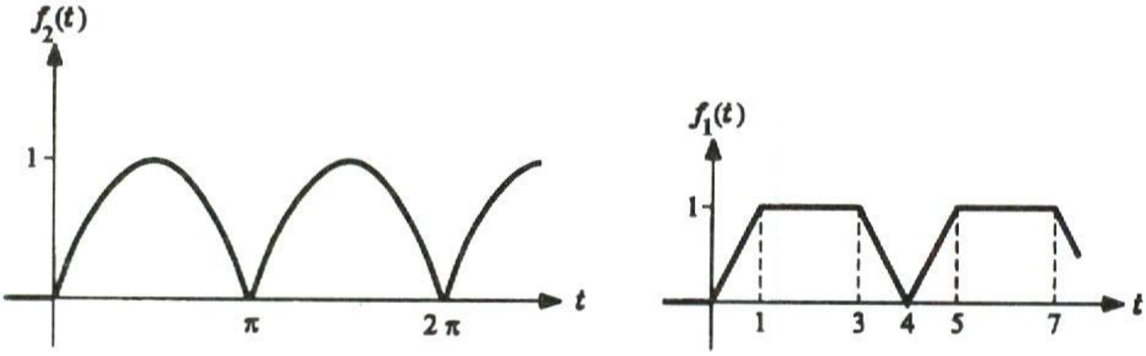
۱۵- تبدیل لاپلاس سیگنال‌های نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۳-۱۵) را به دست آورید.



(الف) (ب)

شکل (مسألهٔ ۱۳-۱۵)

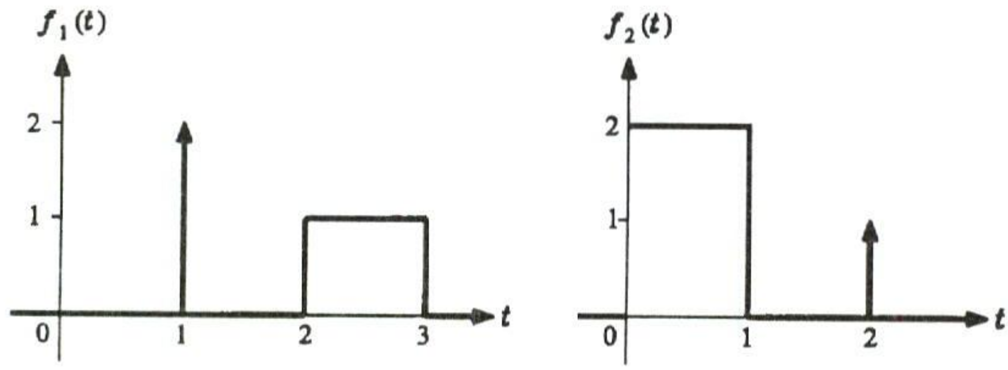
۱۶ـ تبدیل لاپلاس شکل موجهای متناوب شکل (مسألهٔ ۱۳-۱۶) را محاسبه کنید.



(ب) (الف)

شکل (مسألهٔ ۱۳-۱۶)

۱۷ـ کانولوشن دو سیگنال داده شده در شکلهای (مسألهٔ ۱۳-۱۷) را با روش تبدیل لاپلاس به دست آورده و شکل موج آن را رسم کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۱۷)

۱۸ـ نشان دهید که کانولوشن $\frac{df_1(t)}{dt}$ و $f_2(t)$ با کانولوشن $f_1(t)$ و $\frac{df_2(t)}{dt}$ برابر است و هر دو برابر مشتق کانولوشن $f_1(t)$ و $f_2(t)$ است.

۱۹ـ معادلات انتگرالی زیر را حل کنید:

الف ـ $y(t) = \cos t + \int_0^t e^{-(t-\tau)} y(\tau) d\tau$ ب ـ $y(t) = \sin t + \int_0^t e^{-(t-\tau)} y(\tau) d\tau$

۲۰ـ معادلات زیر را برحسب $f(t)$ حل کنید.

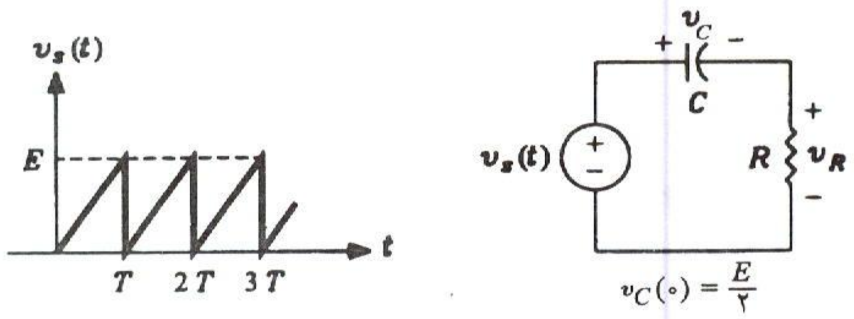
الف ـ $e^t f(t) + \int_0^t f(\tau) e^{\tau} d\tau = te^t$ ب ـ $\int_0^t f(\tau) e^{\tau} d\tau = e^t \sin t$

۲۱ـ الف ـ کانولوشن توابع $f_1(t) = t^3$ و $f_2(t) = t^5$ چیست؟

ب ـ اگر A ، A_1 و A_2 به ترتیب مساحتهای توابع $f(t)$ ، $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در فاصلهٔ $(0, \infty)$ بوده و $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ، نشان دهید $A = kA_1A_2$. مقدار k را تعیین کنید.

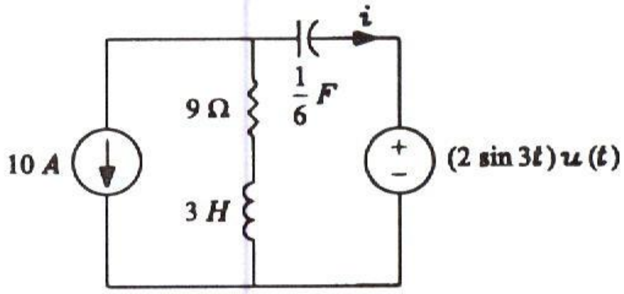
۲۲ـ ولتاژ دوسر مقاومت مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۲) را برای سیگنال ورودی $v_s(t)$ دندان ارهای داده

شده حساب کنید.

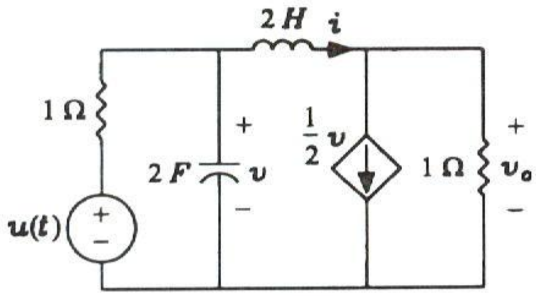


شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۲)

۲۳- مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۳) را با روش تبدیل لاپلاس حل کنید و $i(t)$ را برای $t > 0$ به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۳)

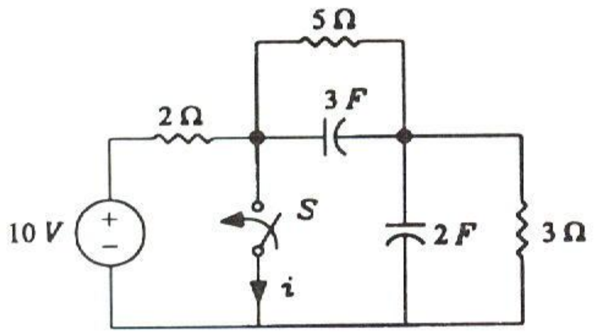


شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۴)

۲۴- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۴) ولتاژ اولیهٔ خازن $-2\,V$ و جریان اولیهٔ سلف $1\,A$ است. ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را برای $t > 0$ با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آورید.

۲۵- معادلات حالت مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۴) را بنویسید و ولتاژ خروجی v_o را برحسب متغیرهای حالت بیان کنید. این معادلات را با تبدیل لاپلاس حل کنید.

۲۶- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۶) کلید S برای مدت طولانی باز بوده و در $t = 0$ بسته می‌شود. جریان گذرنده از کلید را برای $t > 0$ حساب کنید.

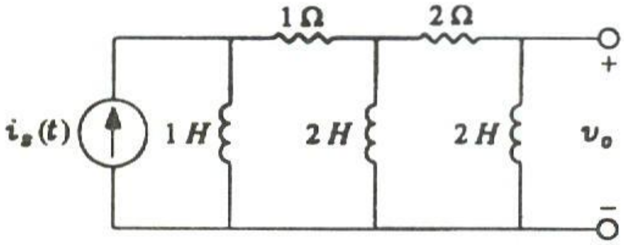


شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۶)

۲۷- تابع شبکهٔ یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت $H(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$ است. پاسخ حالت صفر آن را به ورودی $x(t) = (\cos 2t)u(t)$ به دست آورید.

۲۸- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۸) معادلهٔ دیفرانسیلی که خروجی v_o را به ورودی $i_s(t)$ ارتباط می‌دهد، بنویسید و با استفاده از تبدیل لاپلاس، ولتاژ خروجی را به دست آورید. شرایط اولیه،

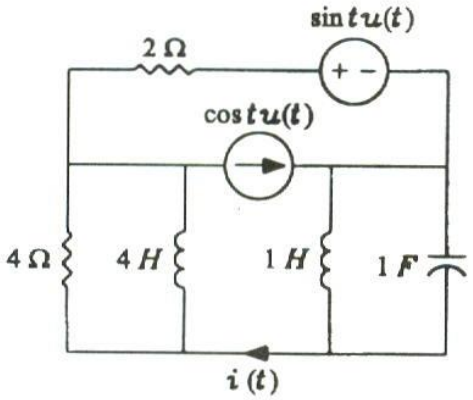
صفرهستند. ورودی را تابع پلهٔ واحد فرض کنید.



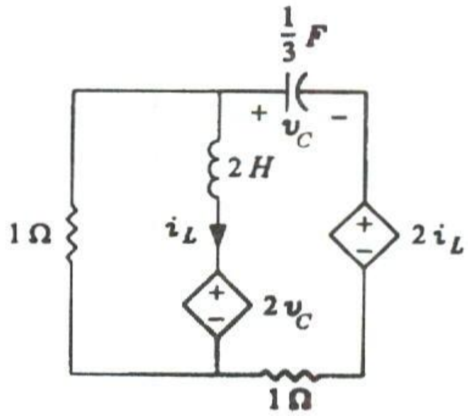
شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۸)

۲۹- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۲۸) سلف وسطی $2\,H$ را با خازن $2\,F$ **تعویض کنید** و بار دیگر مسأله را حل کنید.

۳۰- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۰) می‌دانیم که $v_C(0^-) = 1\,V$ و $i_L(0^-) = 0\,A$. $v_C(t)$ را برای $t > 0$ به دست آورید.



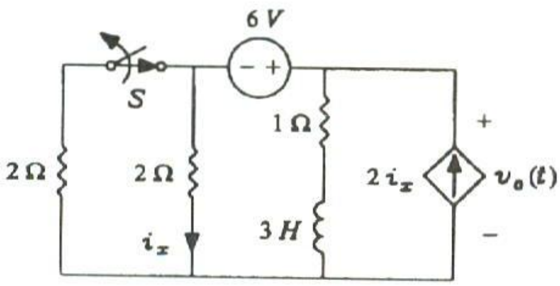
شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۱)



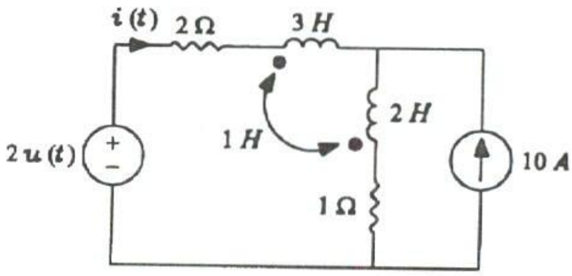
شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۰)

۳۱- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۱) جریان $i(t)$ را برای $t > 0$ حساب کنید. فرض کنید تمام شرایط اولیه صفر هستند.

۳۲- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۲) جریان $i(t)$ را برای $t > 0$ هم با استفاده از تبدیل لاپلاس و هم بدون استفاده از تبدیل لاپلاس حساب کنید.



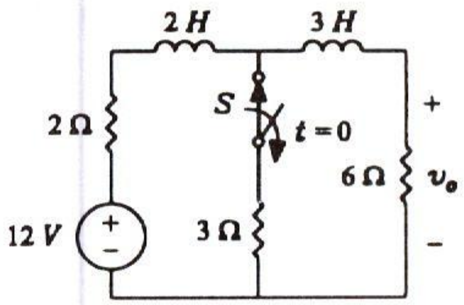
شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۳)



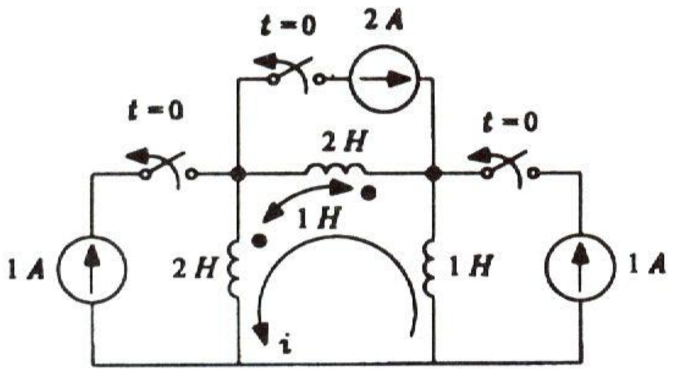
شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۲)

۳۳- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۳) کلید S برای مدت طولانی وصل بوده و در $t = 0$ باز می‌شود. ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را برای $t \geq 0$ حساب کنید.

۳٤- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۳٤) کلید S برای مدت طولانی وصل بوده و در $t = ۰$ باز می‌شود. ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را برای $t \geq ۰$ محاسبه کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۳٤)



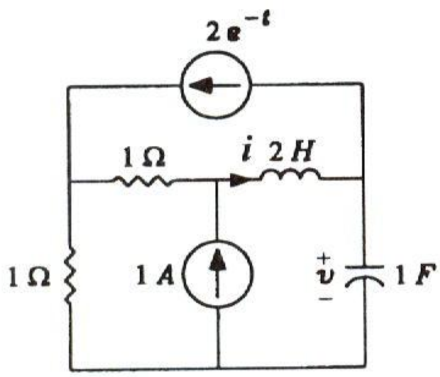
شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۵)

۳۵- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۵) هر سه کلید به طور همزمان در لحظهٔ $t = ۰$ باز می‌شوند. جریان $i(۰^+)$ را حساب کنید.

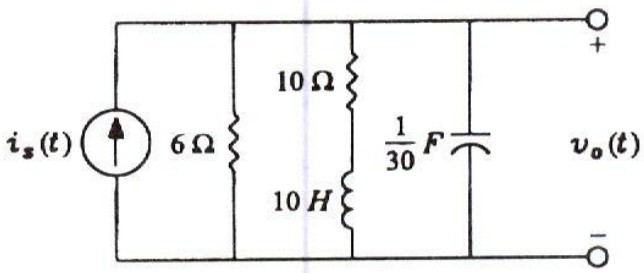
۳۶- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۶) ورودی $i_s(t)$ به صورت زیر است:

$$i_s(t) = ۴۰e^{۶t}u(-t) - ۴۰e^{-۶t}u(t)$$

مقادیر $v_o(۰^-)$ و $v_o(۰^+)$ را تعیین کنید و مقدار $v_o(t)$ را برای تمام t حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۷)

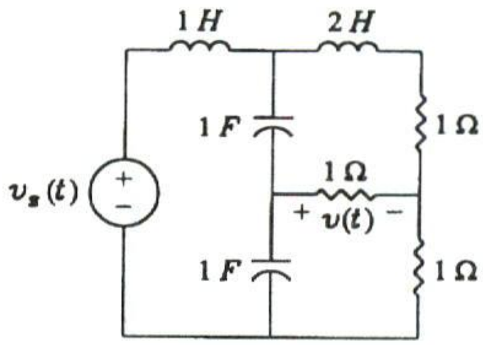


شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۶)

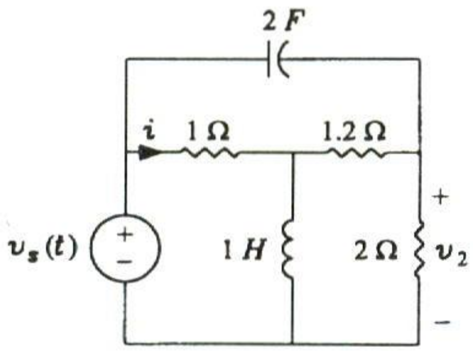
۳۷- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۷) برای $v(۰) = ۴V$ و $i(۰) = ۲A$، مقدار $i(t)$ را برای $t > ۰$ به دست آورید.

۳۸- اگر پاسخ ضربهٔ مداری به صورت $h(t) = te^{-۲t}u(t)$ باشد، پاسخ حالت صفر این مدار را به ورودی $e^{-۲t}\cos t\, u(t)$ تعیین کنید.

۳۹- پاسخ ضربهٔ مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۹) را برای ورودی $v_s(t)$ و خروجی $v(t)$ به دست آورید.



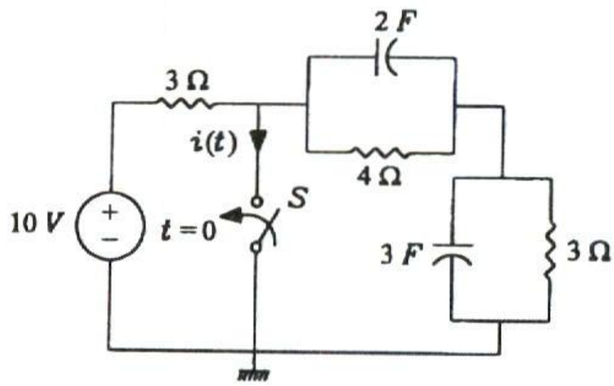
شکل (مسألهٔ ۱۳-۳۹)



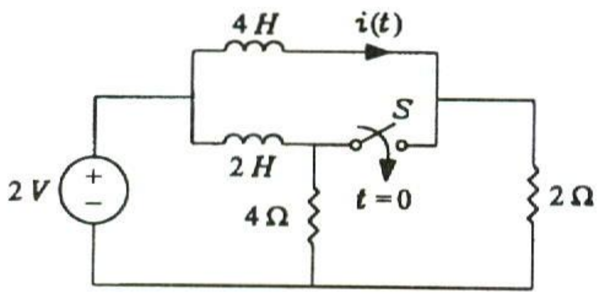
شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۰)

۴۰- تابع شبکهٔ $H(s)$ مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۰) راکه در آن $v_2(t)$ به عنوان خروجی و $i(t)$ به عنوان ورودی در نظر گرفته شود، به دست آورید.

۴۱- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۱) کلید S برای مدت طولانی باز بوده و در $t = 0$ بسته می‌شود. جریان گذرنده از کلید را برای $t > 0$ حساب کنید. (مسأله را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.)

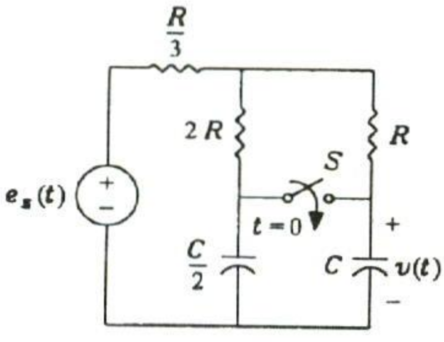


شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۱)



شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۲)

۴۲- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۲) کلید S برای مدت طولانی باز بوده و در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود. جریان $i(t)$ را برای زمانهای $t > 0$ حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۳)

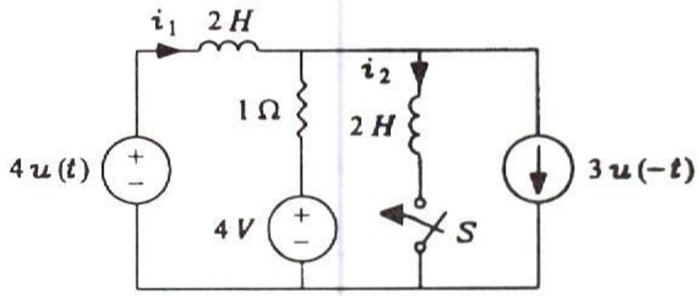
۴۳- مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۳) در حالت دایمی سینوسی بوده و $e_s(t) = 20 \cos 10^6 t$. کلید S در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود.

$$R = 1000\Omega \ ، \ C = 10^{-9}F$$

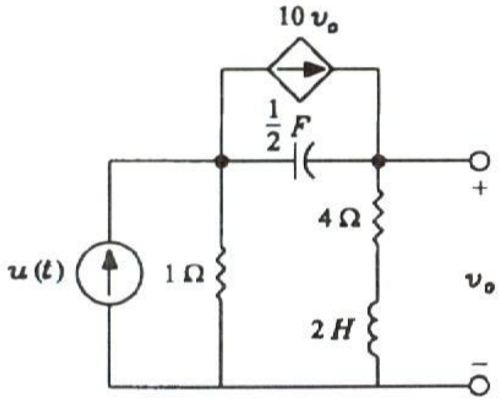
الف - $v(t)$ را برای $t > 0$ به دست آورید.

ب - اگر خازن $\frac{C}{2}$ را با خازن $2C$ تعویض کنیم، بار دیگر بند (الف) را حل کنید.

۴۴- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۴) کلید S برای مدت طولانی باز بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده است. در لحظهٔ $t = 0^-$ کلید S را می‌بندیم. جریانهای گذرنده از سلف‌ها را برای $t \geq 0$ حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-٤٤)

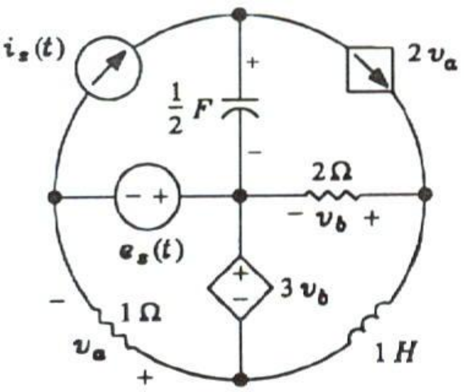


شکل (مسألهٔ ۱۳-٤٥)

٤٥- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۵) کمیت‌های $\frac{dv_o}{dt}(0^-)$ و $\frac{d^2v_o}{dt^2}(0^+)$ را با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آورید.

٤۶- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۶) دو سیگنال ورودی $i_s(t)$ و $e_s(t)$ داریم و خروجی ولتاژ دوسر منبع جریان وابسته است.

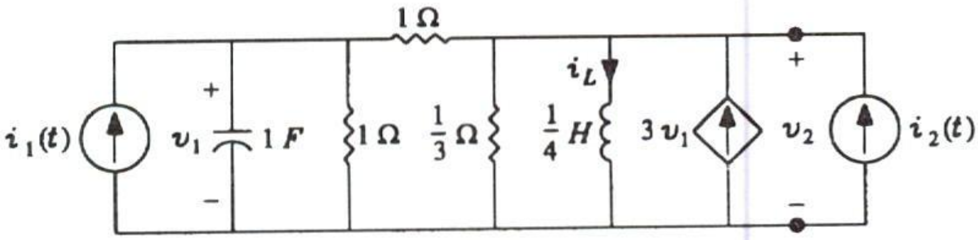
الف - تبدیل لاپلاس خروجی را برحسب تبدیل لاپلاس‌های $e_s(t)$ و $i_s(t)$ به دست آورید. توابع شبکهٔ ارتباط دهندهٔ هر یک از این ورودی‌ها و خروجی مورد نظر چیست؟



شکل (مسألهٔ ۱۳-٤۶)

ب - برای ورودی $i_s(t) = \delta(t)$ ، $e_s(t) = 2u(t)$ ، $v_C(0^-) = 1$ و $i_L(0^-) = -1$ ، خروجی مورد نظر را برای تمام t حساب کنید.

٤٧- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۷) ورودی‌ها $i_1(t)$ و $i_2(t)$ و پاسخ $v_2(t)$ است.



شکل (مسألهٔ ۱۳-٤٧)

الف - با استفاده از تبدیل لاپلاس، پاسخ را به صورت مجموع سه جمله بنویسید که یکی پاسخ حالت صفر نظیر $i_1(t)$ و دیگری پاسخ حالت صفر نظیر $i_2(t)$ و سومی پاسخ ورودی صفر ناشی از شرایط اولیهٔ $v_C(0)$ و $i_L(0)$ را نشان دهد.

ب - توابع شبکهٔ $H_1(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)}$ و $H_2(s) = \frac{V_2(s)}{I_2(s)}$ را حساب کنید.

پ - برای حالتی که $i_1(t) = tu(t)$ ، $i_2(t) = e^{-2t}u(t)$ ، $v_C(0) = \frac{1}{4}$ و $i_L(0) = 0$ باشد، پاسخ $v_2(t)$ را محاسبه و رسم کنید.

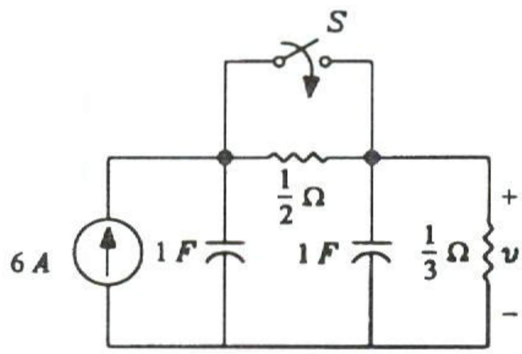
ت - اگر جای دو منبع جریان ورودی $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را با هم تعویض کنیم، پاسخ $v_2(t)$ به چه صورت درمی‌آید؟

۴۸- e^{At} را برای ماتریس‌های زیر حساب کنید:

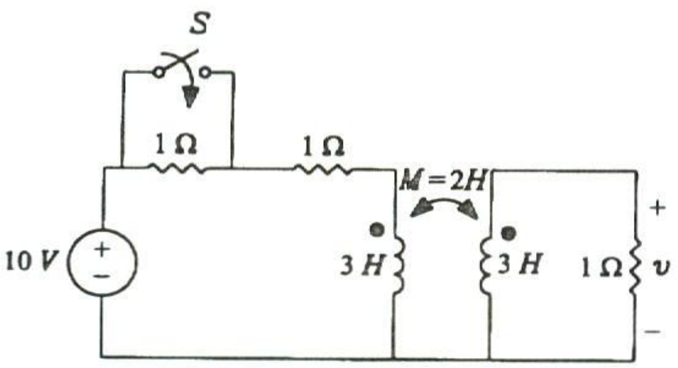
الف - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ب - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

۴۹- الف - در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۹) کلید S برای مدت طولانی باز بوده و در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود. ولتاژ دوسر مقاومت $\frac{1}{3}$ اهمی را حساب کنید.

ب - اگر کلید برای مدت طولانی بسته بوده و در لحظهٔ $t = 0$ آن را باز کنیم، ولتاژ دوسر مقاومت $\frac{1}{3}$ اهمی را حساب کنید.



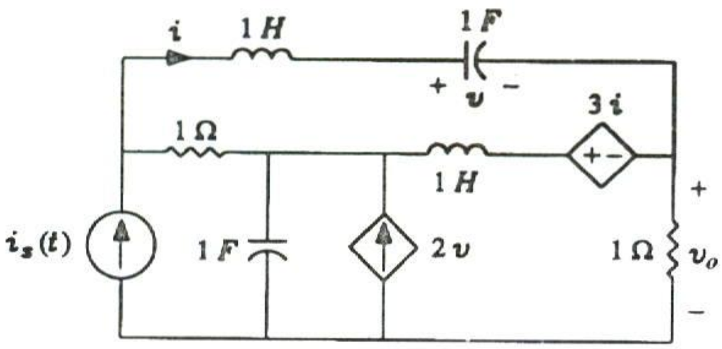
شکل (مسألهٔ ۱۳-۴۹)



شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۰)

۵۰- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۰) کلید S برای مدت طولانی باز بوده و در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود. ولتاژ v دوسر مقاومت خروجی را برای $t \geq 0$ حساب کنید.

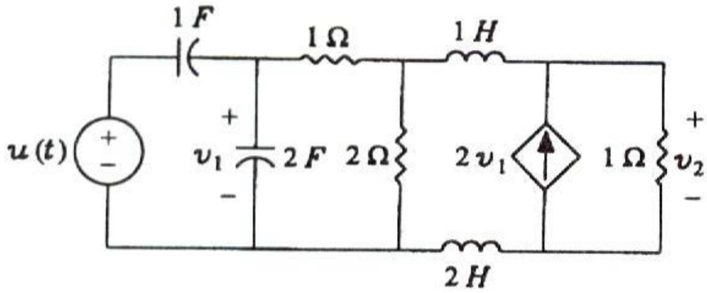
۵۱- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۱) فرض کنید تمام شرایط اولیه صفر بوده و ورودی $i_s(t)$ پلهٔ واحد باشد. ولتاژ v_o دوسر مقاومت خروجی را حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۱)

۵۲- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۲) تمام شرایط اولیه صفر است.

الف - معادلات حالت را بنویسید و ولتاژ $v_۲$ دوسر مقاومت خروجی را برحسب متغیرهای حالت بیان کنید.

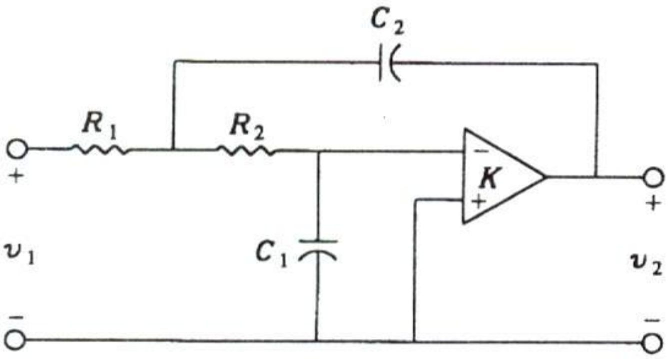


شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۲)

ب - برای ورودی پلهٔ واحد ولتاژ $v_۲(t)$ را حساب کنید.

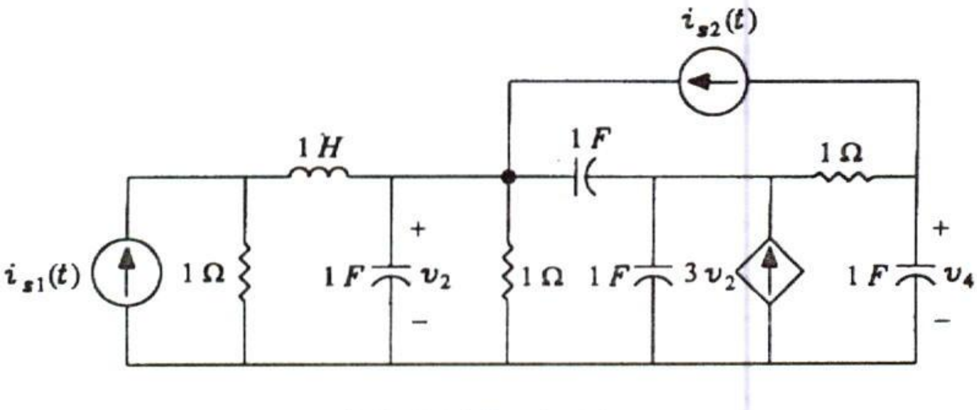
۵۳- **الف -** تابع شبکهٔ $H(s) = \dfrac{V_۲(s)}{V_۱(s)}$ مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۳) را حساب کنید.

ب - اگر مقاومت $R_۳$ را در دوسر خروجی وصل کنیم، تابع شبکه را بار دیگر حساب کنید و در حالت خاص برای $R_۱ = R_۲ = R_۳ = ۱\ \Omega$ و $C_۱ = C_۲ = ۱\ F$ در پایداری مدار برحسب مقادیر K بحث کنید.



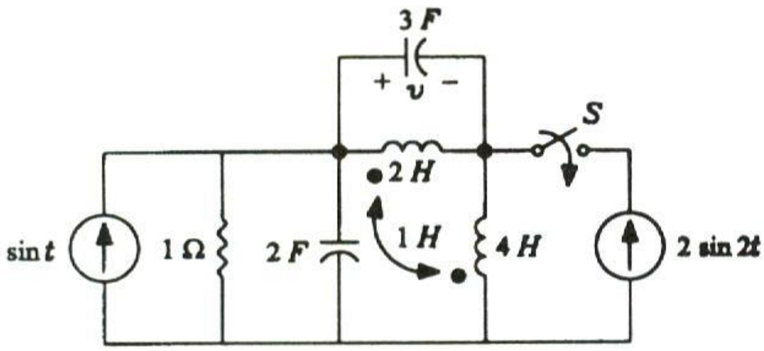
شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۳)

۵۴- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۴) برای ورودی $i_{s_۱}(t) = u(t)$ و $i_{s_۲}(t) = ۲\delta(t)$ ، پاسخ $v_۴(t)$ را حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۴)

۵۵- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۵) کلید S برای مدت طولانی باز بوده و در لحظهٔ $t=0$ بسته می‌شود. ولتاژ v دوسر خازن ۳ فارادی را برای $t \geq 0$ حساب کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۵)

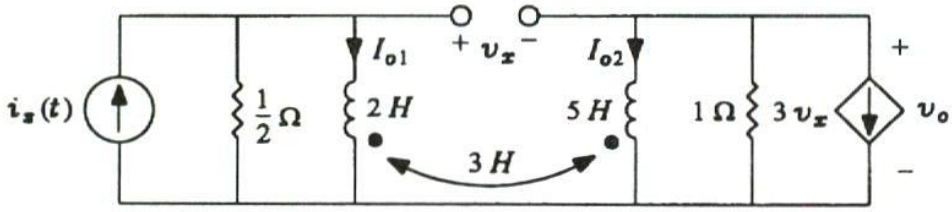
۵۶- تبدیل لاپلاس پاسخ ضربهٔ مداری به صورت $\frac{s+2}{(s+1)(s^2+1)}$ است. پاسخ حالت دایمی سینوسی این مدار را به ورودی $2\sin(2t+40^\circ)$ با دو روش زیر به دست آورید.

الف - روش فازوری.

ب - روش تبدیل لاپلاس.

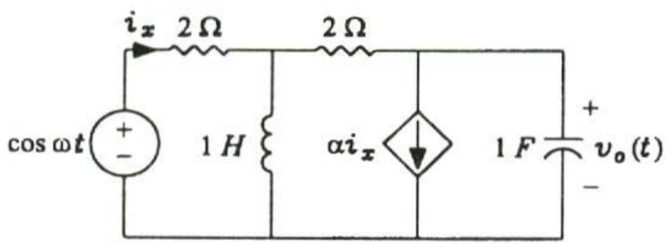
۵۷- پاسخ ضربهٔ مداری به صورت $h(t)=e^{-t}\cos t\, u(t)$ است. پاسخ حالت صفر این مدار را به ورودی $e^{-t}\sin t\, u(t)$ تعیین کنید.

۵۸- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۸) سیگنال ورودی و شرایط اولیهٔ I_{01} و I_{02} را چنان انتخاب کنید که برای $t>0$، پاسخ کامل $v_o(t)$ متحد با صفر باشد.



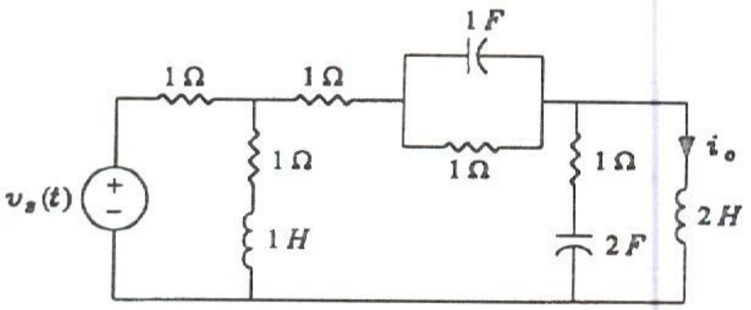
شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۸)

۵۹- به ازای چه مقادیری از α و ω، مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۹) نمی‌تواند پاسخ حالت دایمی سینوسی داشته باشد؟ خروجی مورد نظر $v_o(t)$ است.



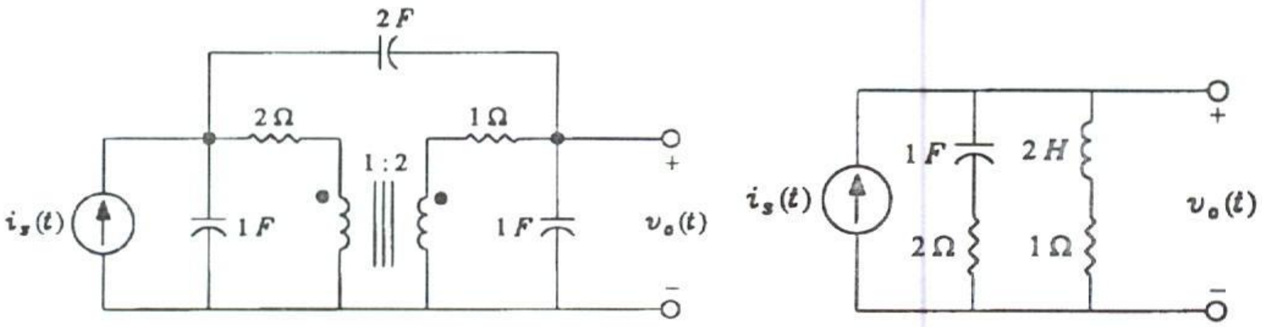
شکل (مسألهٔ ۱۳-۵۹)

۶۰- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۶۰) اگر $v_s(t)=\delta(t)$ باشد، جریان خروجی i_o را در لحظهٔ 0^+ به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۶۰)

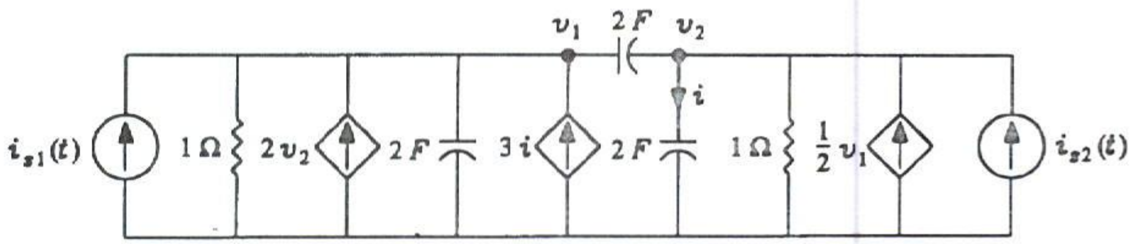
۶۱- با استفاده از تبدیل لاپلاس، پاسخ ضربهٔ $v_o(t)$ مدارهای نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۳-۶۱ الف و ب) را به دست آورید.



(ب)   (الف)

شکل (مسألهٔ ۱۳-۶۱)

۶۲- در مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۳-۶۲) چه رابطه‌ای میان منابع جریان $i_{s_1}(t)$ و $i_{s_2}(t)$ وجود داشته باشد تا این مدار دارای جواب یکتا، جواب بی‌شمار یا بدون جواب باشد؟



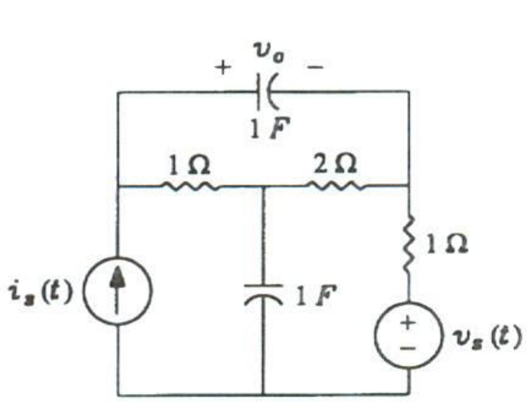
شکل (مسألهٔ ۱۳-۶۲)

۶۳- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۳-۶۳) $i_s(t) = \cos t$ و $v_s(t) = \sin 2t$ و پاسخ مورد نظر $v_o(t)$ است.

الف - با استفاده از تبدیل لاپلاس، ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را حساب کنید.

ب - آیا مدار دارای پاسخ حالت دایمی است؟ در صورت مثبت بودن، آن را محاسبه کنید.

پ - آیا می‌توان پاسخ حالت دایمی را با روش فازوری به دست آورد؟ در صورت مثبت بودن، آن را محاسبه کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۳-۶۳)