Prozhefa.com

۱۱

تجزیه و تحلیل حلقه و کات‌ست

در فصل پیش، روش منظم انجام تجزیه و تحلیل گره را برای هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان آموختیم و نیز، چگونگی انجام تجزیه و تحلیل مش را در این شبکه‌ها، به شرط مسطح بودن گراف آن فرا گرفتیم. در این فصل، دربارهٔ دو تعمیم کلی و یا شاید تغییرات این روش‌ها، یعنی تجزیه و تحلیل کات‌ست و تجزیه و تحلیل حلقه، به اختصار بحث خواهیم کرد. برای مطالعهٔ تجزیه و تحلیل حلقه و کات‌ست دو دلیل وجود دارد: نخست این که، این روش‌ها به علت داشتن انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به تجزیه و تحلیل گره و مش، سودمند می‌باشند و دوم این که آنها مفاهیمی به کار برده و نکاتی به ما می‌آموزند که در نوشتن معادلات حالت ضروری می‌باشند.

در بخش ۱، چند مفهوم جدید نظریهٔ گراف را معرفی کرده و یک قضیهٔ اساسی را اثبات می‌کنیم. در بخش ۲، تجزیه و تحلیل حلقه و در بخش ۳ تجزیه و تحلیل کات‌ست را مطالعه می‌کنیم. بخش ۴ به بحث و توضیح این روش‌ها اختصاص داده شده است. در بخش ۵، یک رابطهٔ اساسی میان ماتریس حلقهٔ $\mathbf{B}$ و ماتریس کات‌ست $\mathbf{Q}$ برقرار می‌سازیم.

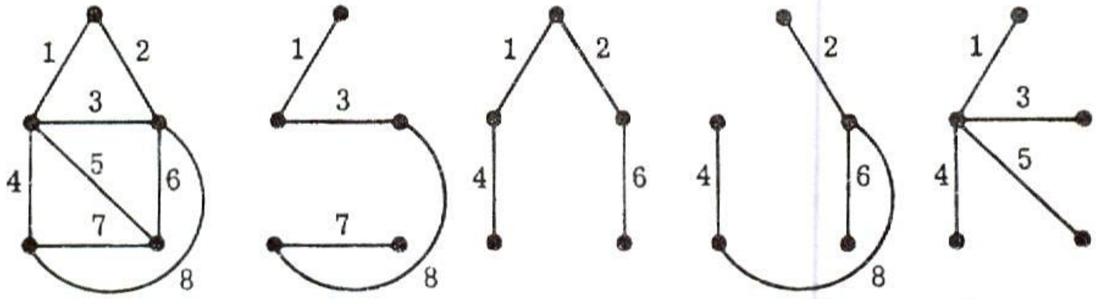
۱- قضیهٔ اساسی نظریهٔ گراف

برای این که این قضیه را توسعه دهیم لازم است معنی آنچه را که درخت می‌نامند، به دقت روشن کنیم. فرض کنید که $\mathcal{G}$ یک گراف متصل به هم بوده و T یک زیرگراف $\mathcal{G}$ باشد. **T یک درخت از گراف متصل به هم $\mathcal{G}$** گفته می‌شود چنانچه: (۱) T یک زیرگراف متصل به هم باشد، (۲) T شامل تمام گره‌های $\mathcal{G}$ باشد، (۳) T شامل هیچ حلقه‌ای نباشد.

گراف متصل به هم $\mathcal{G}$ و یک درخت T از آن داده شده‌اند. شاخه‌های T را **شاخه درخت** نامیده، و شاخه‌هایی از $\mathcal{G}$ را که در T نباشند، **لینک** می‌نامند. (بعضی از مؤلفین آنها را شاخهٔ همراه درخت و یا بند نامیده‌اند.)

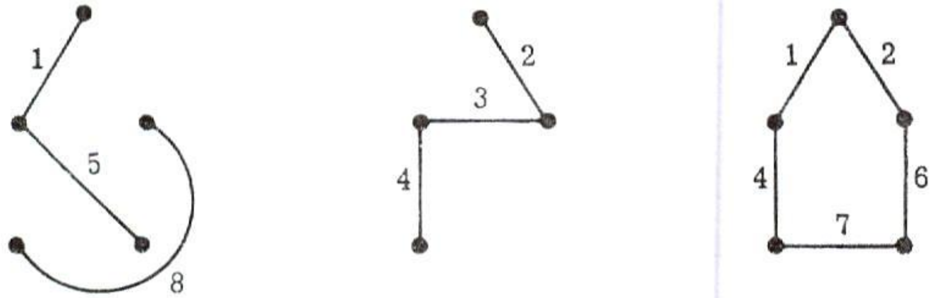
معمولاً یک گراف تعداد زیادی درخت دارد. در شکل (۱-۱) چند درخت از یک گراف متصل به هم $\mathcal{G}$ را نشان داده‌ایم. برای درک بهتر تعریف فوق، چند زیرگراف (از همان گراف $\mathcal{G}$) را که درختهای $\mathcal{G}$ نمی‌باشند در شکل (۱-۲) نشان داده‌ایم. برای تأکید این حقیقت که گراف‌های پیچیده دارای تعداد زیادی درخت می‌باشند، به خاطر بسپارید که اگر گرافی دارای n_t گره بوده و هر جفت گره آن را یک شاخه به هم وصل کند، در این صورت این گراف دارای $n_t^{n_t-2}$ درخت می‌باشد. این گونه گراف‌ها. برای n_t = ۵ ، ۱۲۵ درخت و برای n_t = ۱۰ ، 10^8 درخت دارند

Prozhefa.com



درخت T_4 درخت T_3 درخت T_2 درخت T_1 گراف $\mathcal{G}$

شکل ۱-۱ مثال‌هایی از درختهای گراف $\mathcal{G}$.



خاصیت (۳) را نقض می‌کند خاصیت (۲) را نقض می‌کند خاصیت (۱) را نقض می‌کند

شکل ۱-۲ مثال‌هایی از زیرگراف‌های $\mathcal{G}$ که درخت نیستند.

تمرین تمام درختهای ممکن گراف نشان داده شده در شکل (۱-۳) را رسم کنید.

قضیهٔ اساسی زیر، خواص حلقه‌ها، کات‌ست‌ها و درختها را به هم ارتباط می‌دهد.

قضیه گراف متصل به هم $\mathcal{G}$ با n_t گره و b شاخه و یک درخت T از $\mathcal{G}$ داده شده‌اند،

۱ـ میان هر جفت گره از $\mathcal{G}$ مسیر یکتایی در روی درخت وجود دارد.

۲ـ $n_t - ۱$ شاخه درخت و $b - n_t + ۱$ لینک وجود دارند.

۳ـ هر لینک T و مسیر یکتای میان گره‌های دوسر آن در روی درخت، حلقهٔ یکتایی تشکیل می‌دهد (این حلقه را **حلقهٔ اساسی** متناظر با این لینک گویند).

۴ـ هر شاخه درخت T همراه با بعضی از لینک‌ها، کات‌ست یکتایی از $\mathcal{G}$ را تعریف می‌کند. این کات‌ست را **کات‌ست اساسی** متناظر با آن شاخه درخت گویند.

شکل ۱-۳ یک گراف متصل به هم با چهار گره و شش شاخه.

Prozhefa.com

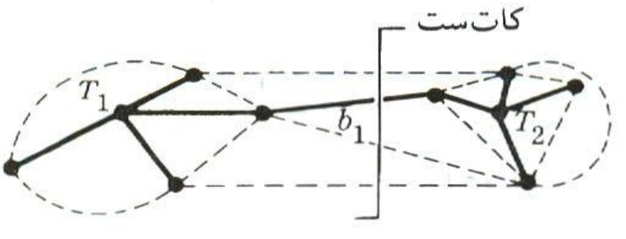
اثبات ۱- فرض کنید دو مسیر میان گره ① و گره ② در روی درخت وجود دارد. از آنجایی که بعضی از شاخه‌های این دو مسیر حلقه‌ای با هم تشکیل می‌دهند، درخت نیز شامل یک حلقه می‌شود و این امر شرط سوم تعریف درخت را نقض می‌کند.

۲- فرض کنید T یک درخت از $\mathcal{G}$ باشد، در این صورت T یک زیرگراف $\mathcal{G}$ است که تمام گره‌ها را به هم متصل می‌سازد و بنابراین T دارای n_t گره می‌باشد. اگر در گرهی تنها یک شاخه درخت از T تلاقی داشته باشد، آن گره را یک گره پایانه T می‌نامند. از آنجا که T یک زیرگراف متصل به هم است که شامل هیچ حلقه‌ای نمی‌باشد، پس حداقل دارای دو گره پایانه است. فرض کنید یکی از گره‌های پایانه و شاخه درخت متلاقی با آن را از درخت حذف کنیم. زیرگراف باقیمانده هنوز هم باید حداقل دارای دو گره پایانه باشد. فرض کنید حذف گره‌های پایانه و شاخه درخت‌های متلاقی با آنها را ادامه دهیم، تا این که تنها یک شاخه درخت باقی بماند. این آخرین شاخه با دو گره تلاقی دارد. بنابراین، به ازای هر گره، یک شاخه از درخت را حذف کرده‌ایم به جز در مورد شاخهٔ آخر که به دو گره متصل بود. از آنجا که n_t گره وجود داشت، پس $n_t - ۱$ شاخه باید در T وجود داشته باشد، و چون تمام شاخه‌های $\mathcal{G}$ که در T نباشند لینک خوانده می‌شوند، پس $b - (n_t - ۱) = b - n_t + ۱$ لینک وجود دارد.

۳- لینک $l_۱$ را که گره‌های ① و ② را به هم متصل می‌سازد، در نظر بگیرید. به موجب قسمت ۱، میان گره‌های ① و ② یک مسیر یکتایی روی درخت وجود دارد. این مسیر درخت، همراه با لینک $l_۱$ حلقه‌ای تشکیل می‌دهد و چون درخت از اول حلقه نداشت، حلقهٔ دیگری نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۴- شاخهٔ $b_۱$ را از T که در شکل (۱-۴) نشان داده شده است در نظر گرفته و $b_۱$ را از T حذف کنید. آنچه از T باقی می‌ماند از دو قسمت مجزا (متصل به هم) مانند $T_۱$ و $T_۲$ تشکیل می‌شود. چون هر لینک، یک گره از T را به گره دیگری از T وصل می‌کند، دستهٔ L را از تمام لینک‌هایی که یک گره از $T_۱$ را به یک گره از $T_۲$ وصل می‌کنند در نظر بگیرید. به سادگی تحقیق می‌شود که لینک‌های دستهٔ L ، همراه با شاخه درخت $b_۱$ یک کات‌ست تشکیل می‌دهند. تمام لینک‌هایی که در دستهٔ L نیستند، نمی‌توانند برای تشکیل کات‌ست دیگری سهیم باشند، زیرا هر یک از آنها با یک مسیر روی درخت، حلقه‌ای در $T_۱$ یا در $T_۲$ تشکیل می‌دهد.

چنانکه در بیان زیر نشان داده شده است، می‌توان به آسانی این قضیه را برای حالتی که گراف شامل چند قسمت مجزا از هم باشد، تعمیم داد.



شکل ۱-٤ تشریح خواص یک کات‌ست اساسی.

Prozhefa.com

قضیهٔ فرعی فرض کنید که $\mathcal{G}$ دارای n_t گره، b شاخه و s قسمت مجزا از هم باشدو T_1، T_2، …، T_s به ترتیب درختهای هر قسمت مجزا باشند. دستهٔ $\{T_1, T_2, \cdots, T_s\}$ را **یک جنگل از $\mathcal{G}$** می‌نامند. این جنگل دارای $n_t - s$ شاخه بوده، و $\mathcal{G}$ دارای $b - n_t + s$ لینک می‌باشد. باقی بیانهای قضیهٔ قبل همگی درست می‌باشند.

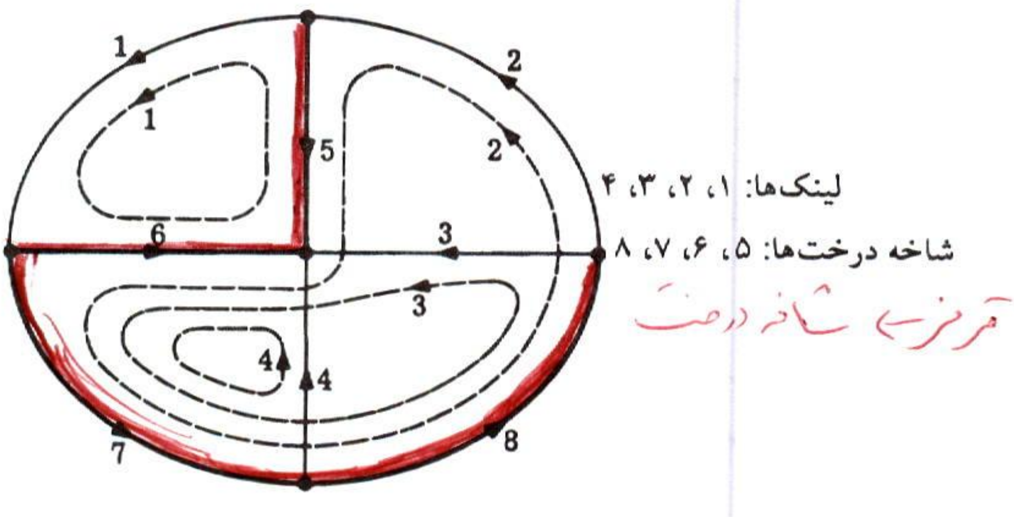
تمرین گراف $\mathcal{G}$ نشان داده شده در شکل (۱-۱) را در نظر بگیرید. تمام حلقه‌های اساسی و کات‌ست‌های اساسی متناظر با درخت T_1 را رسم کنید. این عمل را برای درختهای T_2، T_3 و T_4 نیز تکرار کنید.

۲- تجزیه و تحلیل حلقه

۲-۱ دو مطلب اساسی

یک گراف متصل به هم با b شاخه و n_t گره را در نظر گرفته و درخت دلخواه T را از آن انتخاب کنید. در این درخت $n = n_t - 1$ شاخه درخت و $l = b - n$ لینک وجود دارد. شاخه‌ها را به ترتیب زیر شماره‌گذاری کنید: نخست لینک‌ها را از ۱ تا l و سپس شاخه‌درخت‌ها را از $l + 1$ تا b شماره‌گذاری کنید. هر لینک یک حلقهٔ اساسی را تعریف می‌کند، یعنی، حلقه‌ای که از لینک فوق و مسیر یکتای روی درخت، میان گره‌های دو سر آن لینک تشکیل می‌یابد. این مطلب به وسیلهٔ یک گراف ساده با $b = 8$، $n_t = 5$، $n = 4$ و $l = 4$ در شکل (۲-۱) تشریح شده است.

برای به کار بردن KVL در هر حلقهٔ اساسی، یک جهت قراردادی برای حلقه انتخاب می‌کنیم که با جهت قراردادی لینکی که تعیین کنندهٔ حلقهٔ اساسی است، هم‌جهت باشد. این عمل در شکل (۲-۱) نشان داده شده است. به عنوان مثال، حلقهٔ اساسی ۱، همان جهت لینک ۱ را دارا می‌باشد و الی آخر. می‌توان معادلات KVL را برای چهار حلقهٔ اساسی برحسب ولتاژ شاخه‌ها به صورت زیر نوشت:



شکل ۲-۱ حلقه‌های اساسی برای یک درخت انتخاب شده از یک گراف.

Prozhefa.com

حلقهٔ ۱ : $v_1 - v_5 + v_6 = 0$

حلقهٔ ۲ : $v_2 + v_5 - v_6 + v_7 + v_8 = 0$

حلقهٔ ۳ : $v_3 - v_6 + v_7 + v_8 = 0$

حلقهٔ ۴ : $v_4 - v_6 + v_7 = 0$

معادلات فوق در شکل ماتریسی به صورت زیر خواهند بود:

$$\text{حلقه } l \left\{ \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{l \text{ لینک}} & \underbrace{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix}}_{n \text{ شاخه درخت}} \end{bmatrix} \right. \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به طور کلی، چنانچه KVL را در مورد هر یک از l حلقهٔ اساسی اعمال کنیم، یک دستگاه l معادلهٔ جبری خطی با b مجهول v_1 ، v_2 ، ... ، v_b به دست می‌آوریم. اولین مطلب اساسی تجزیه و تحلیل حلقه به شرح زیر است:

l معادلهٔ جبری خطی همگن با مجهول‌های v_1 ، v_2 ، ... ، v_b که از اعمال *KVL* به هر حلقهٔ اساسی به دست می‌آیند، یک دسته از l معادلهٔ نابستهٔ خطی تشکیل می‌دهند.

اگر این قرارداد را که جهت قراردادی حلقه با جهت قراردادی لینکی که مشخص کنندهٔ آن است مطابقت دارد، به خاطر بیاوریم، ملاحظه می‌کنیم که دستگاه معادلاتی که از KVL به دست می‌آید، به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = 0 \qquad (۲-۱)$$

که در آنجا $\mathbf{B}$ یک ماتریس $l \times b$ بوده و ماتریس **حلقهٔ اساسی** خوانده می‌شود. به علاوه، عنصر (i, k) ام آن به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ در حلقهٔ } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آنها یکسان باشد} \\ -1 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ در حلقهٔ } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آنها یکسان نباشد} \\ 0 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ در حلقهٔ } i \text{ نباشد} \end{cases} \qquad (۲-۲)$$

از آنجایی که هر حلقهٔ اساسی تنها شامل یک لینک بوده و جهت‌های حلقه و لینک یکسان انتخاب شده‌اند، واضح است که اگر لینک‌ها را از ۱، ۲، ... تا l و شاخه‌درخت‌ها را از $l+1$ ، $l+2$ ، ... تا b شماره‌گذاری کنیم، ماتریس $\mathbf{B}$ به صورت زیر خواهد بود:

Prozhefa.com

$$\mathbf{B} = \Big[\ \underbrace{\mathbf{1}_l}_{l\ \text{لینک}}\ \Big\vdots\ \underbrace{\mathbf{F}}_{n\ \text{شاخه درخت}}\ \Big]\Big\}\ l\ \text{حلقه} \qquad (۲-۳)$$

که در آنجا $\mathbf{1}_l$ مشخص کنندهٔ یک ماتریس واحد از مرتبهٔ l و $\mathbf{F}$ نشان دهندهٔ یک ماتریس مستطیلی با l سطر و n ستون می‌باشد. واضح است که رتبهٔ ماتریس $\mathbf{B}$ نیز l است، زیرا $\mathbf{B}$ شامل یک ماتریس واحد $\mathbf{1}_l$ بوده و تنها l سطر دارد. بدین ترتیب این مطلب را که l معادلهٔ حلقهٔ اساسی که برحسب ولتاژهای شاخه‌ها نوشته می‌شوند یک دسته از l معادلهٔ نابستهٔ خطی را تشکیل می‌دهند، ثابت کردیم.

تمرین برای گراف شکل (۲-۱)، یک حلقهٔ $\mathfrak{L}$ را که حلقهٔ اساسی نباشد در نظر بگیرید. نشان دهید که اعمال KVL به حلقهٔ $\mathfrak{L}$ معادله‌ای به دست می‌دهد که با l معادلهٔ حلقه‌های اساسی وابستگی خطی دارد.

اکنون به KCL برمی‌گردیم. توجه کنید KCL لازم می‌دارد هر جریانی که به یک گره می‌رسد، باید آن گره را ترک کند. بنابراین می‌توان جریانهای شاخه‌ها را به صورت جریانهایی که از جریانهای حلقه‌ها تشکیل شده‌اند تصور نمود و جریانهای l لینک درخت T را i_1 ، i_2 ، $\cdots$ ، i_l نامید و فرض کرد که هر یک از این جریانها در حلقهٔ اساسی متناظر خود جریان دارد. بدین ترتیب جریان هر شاخه درخت، مجموع جریانهای یک یا چند حلقهٔ اساسی می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر، بیان می‌داریم که:

$$\mathbf{j} = \mathbf{B}^T\mathbf{i} \qquad (۲-۴)$$

که در آنجا $\mathbf{B}^T$ ، ترانهادهٔ ماتریس حلقهٔ اساسی است. برای اثبات معادلهٔ (۲-۴)، آن را به صورت $\mathbf{j} = \mathbf{C}\mathbf{i}$ می‌نویسیم که در اینجا $\mathbf{C}$ ماتریس مناسبی با b سطر و l ستون می‌باشد که موجب برقراری معادلهٔ بالا می‌گردد. می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$. اکنون جریان شاخه‌ها را در نظر می‌گیریم. برای آن دسته از شاخه‌هایی که لینک‌های درخت داده شده می‌باشند، جریانهای لینک‌ها مساوی جریانهای حلقه‌های اساسی است؛ یعنی:

$$j_k = i_k \qquad k = 1, 2, \cdots, l \qquad (۲-۵)$$

شاخه‌های باقیمانده، متعلق به درخت بوده و بنابراین، شاخه درخت می‌باشند. جریان هر شاخه درخت یک ترکیب خطی از جریانهای حلقه‌های اساسی است. به عبارت خیلی مشخص‌تر، جریان شاخهٔ k ام را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$j_k = \sum_{i=1}^{l} c_{ki} i_i \qquad k = l+1\ ,\ l+2, \cdots, b \qquad (۲-۶)$$

که در آنجا c_{ki} به وسیلهٔ معادلهٔ زیر داده می‌شود:

Prozhefa.com

$$c_{ki} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ در حلقهٔ } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آنها یکسان باشد} \\ -۱ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ در حلقهٔ } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آنها یکسان نباشد} \\ ۰ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ در حلقهٔ } i \text{ نباشد} \end{cases} \qquad (۷-۲)$$

واضح است که معادلهٔ (۲-۷) تمام شاخه‌ها را شامل می‌شود، زیرا برای یک لینک، شاخهٔ k تنها در حلقهٔ k بوده و جهت‌های قراردادی آنها یکسان است. در نتیجه، مانند معادلهٔ (۲-۵) همهٔ c_{kk}ها برابر یک می‌باشند. از مقایسهٔ معادلهٔ (۲-۷) با معادلهٔ (۲-۲) نتیجه می‌شود که $c_{ki} = b_{ik}$ و بنابراین، ماتریس $\mathbf{C} = (c_{ki})$ که به وسیلهٔ رابطهٔ $\mathbf{j} = \mathbf{Ci}$ مشخص می‌شود، ترانهادهٔ ماتریس $\mathbf{B}$ است، یعنی $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$.
چنانچه ماتریس $\mathbf{B}^T$ را در معادلهٔ (۲-۴) برحسب این که هر شاخهٔ آن یک لینک یا یک شاخه درخت می‌باشد، تفکیک کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{j} = \mathbf{B}^T\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_l \\ \hdashline \mathbf{F}^T \end{bmatrix} \mathbf{i} \qquad (۸-۲)$$

این معادله برای کاربردهای بعد مفید خواهد بود.

اکنون، مثال شکل (۲-۱) را در نظر می‌گیریم. مطابق معادلهٔ (۲-۷)، می‌توان معادلات زیر را نوشت:

$$\begin{aligned} j_۱ &= i_۱ \\ j_۲ &= i_۲ \\ j_۳ &= i_۳ \\ j_۴ &= i_۴ \\ j_۵ &= -i_۱ + i_۲ \\ j_۶ &= i_۱ - i_۲ - i_۳ - i_۴ \\ j_۷ &= i_۲ + i_۳ + i_۴ \\ j_۸ &= i_۲ + i_۳ \end{aligned}$$

و به شکل ماتریسی، به صورت معادلهٔ زیر است:

$$\begin{bmatrix} j_۱ \\ j_۲ \\ j_۳ \\ j_۴ \\ j_۵ \\ j_۶ \\ j_۷ \\ j_۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_۱ \\ i_۲ \\ i_۳ \\ i_۴ \end{bmatrix}$$

Prozhefa.com

خلاصه KVL با رابطهٔ $\mathbf{Bv} = 0$ و KCL با رابطهٔ $\mathbf{j} = \mathbf{B}^T\mathbf{i}$ بیان می‌شود. در اینجا $\mathbf{i}$ بردار جریان حلقه می‌باشد. نتیجهٔ انتخاب جهت‌های قراردادی ما این است که ماتریس $\mathbf{B}$، به صورت (۲-۳) باشد. این معادله‌ها بدون توجه به ماهیت شاخه‌ها معتبرند.

تمرین ۱ با استفاده از معادله‌های (۲-۱) و (۲-۴) قضیهٔ تلگان را ثابت کنید.

تمرین ۲ گراف $\mathcal{G}$ شکل (۱-۱) را در نظر بگیرید. برای هر یک از شاخه‌ها، یک جهت قراردادی تعیین کرده و ماتریس $\mathbf{B}$ را برای درخت T_1 معین کنید.

تمرین ۳ تجزیه و تحلیل مش همیشه یک حالت خاص تجزیه و تحلیل حلقه نمی‌باشد. یک مثال برای این حالت خاص بیان کنید. (راهنمایی: این در موردی خواهد بود که برای جریان هر مش، شاخه‌ای وجود دارد که از آن شاخه، تنها جریان آن مش می‌گذرد.)

۲-۲ تجزیه و تحلیل حلقه برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

در این بخش، توجه خود را به شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان محدود می‌کنیم. در اینجا معادلات شاخه را معرفی نموده و از روی آنها l معادلهٔ خطی شبکه را برحسب جریان l حلقهٔ اساسی، به طریق حذفی به دست می‌آوریم. برای سادگی، شبکه‌هایی را که تنها از مقاومتها تشکیل می‌شوند در نظر خواهیم گرفت و تعمیم آنها به حالت کلی، درست مانند تعمیمی است که در فصل ۱۰ بحث شد.

معادله‌های شاخه به شکل ماتریسی، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Rj} + \mathbf{v}_s - \mathbf{Rj}_s \qquad (۲-۹)$$

مانند قبل، $\mathbf{R}$ یک ماتریس قطری مقاومت شاخه‌ها است که بعد آن b می‌باشد و $\mathbf{v}_s$ و $\mathbf{j}_s$ به ترتیب بردارهای منبع ولتاژ و منبع جریان می‌باشند. از ترکیب معادله‌های (۲-۱)، (۲-۸) و (۲-۹) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{BRB}^T\mathbf{i} = -\mathbf{Bv}_s + \mathbf{BRj}_s \qquad (۲-۱۰)$$

یا:

$$\boxed{\mathbf{Z}_l\mathbf{i} = \mathbf{e}_s} \qquad (۲-۱۱)$$

که در آن:

$$\mathbf{Z}_l \triangleq \mathbf{BRB}^T \qquad \mathbf{e}_s \triangleq -\mathbf{Bv}_s + \mathbf{BRj}_s \qquad (۲-۱۲)$$

$\mathbf{Z}_l$ را **ماتریس امپدانس حلقه** از مرتبهٔ l می‌نامند و $\mathbf{e}_s$ **بردار منبع ولتاژ حلقه** است. ماتریس امپدانس حلقه، خواصی مشابه با ماتریس امپدانس مش که در فصل پیش بحث شد، دارا می‌باشد. ماتریس $\mathbf{Z}_l$ متقارن است. این مطلب از ملاحظهٔ این که ماتریس $\mathbf{R}$ در معادلهٔ (۲-۱۲) یک ماتریس متقارن است، به سهولت دیده می‌شود. اکنون معادلهٔ (۲-۱۱) را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم:

Prozhefa.com

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1l} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{l1} & z_{l2} & \cdots & z_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s1} \\ e_{s2} \\ \vdots \\ e_{sl} \end{bmatrix} \qquad (۲-۱۳)$$

مثال شبکهٔ (۲-۲) را در نظر می‌گیریم. گراف شبکه همان گراف شکل (۲-۱) می‌باشد و در نتیجه ماتریس حلقهٔ اساسی قبلاً به دست آمده است. معادلهٔ شاخه چنین است:

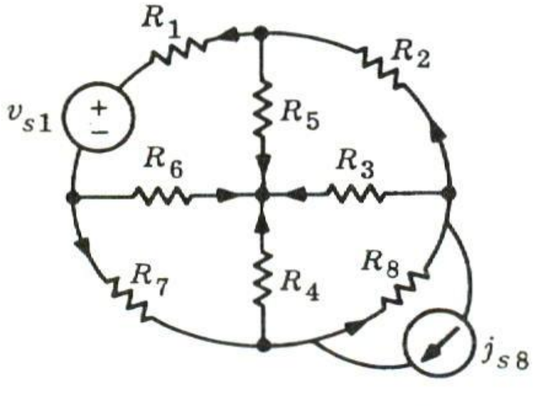
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & & & & \\ & R_2 & & & & 0 & & \\ & & R_3 & & & & & \\ & & & R_4 & & & & \\ & & & & R_5 & & & \\ & & & & & R_6 & & \\ & 0 & & & & & R_7 & \\ & & & & & & & R_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_8 j_{s8} \end{bmatrix}$$

می‌توان ماتریس امپدانس حلقه را با به کار بردن معادلهٔ (۲-۱۲) به دست آورد:

$$\mathbf{Z}_l = \mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{B}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 + R_5 + R_6 & -R_5 - R_6 & -R_6 & -R_6 \\ -R_5 - R_6 & R_2 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8 & R_6 + R_7 + R_8 & R_6 + R_7 \\ -R_6 & R_6 + R_7 + R_8 & R_3 + R_6 + R_7 + R_8 & R_6 + R_7 \\ -R_6 & R_6 + R_7 & R_6 + R_7 & R_4 + R_6 + R_7 \end{bmatrix}$$

معادلات حلقه چنین هستند:



شکل ۲-۲ مثالی از تجزیه و تحلیل حلقه.

Prozhefa.com

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_5 + R_6 & -R_5 - R_6 & -R_6 & -R_6 \\ -R_5 - R_6 & R_2 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8 & R_6 + R_7 + R_8 & R_6 + R_7 \\ -R_6 & R_6 + R_7 + R_8 & R_3 + R_6 + R_7 + R_8 & R_6 + R_7 \\ -R_6 & R_6 + R_7 & R_6 + R_7 & R_4 + R_6 + R_7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{s1} \\ -R_8 j_{s8} \\ -R_8 j_{s8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

تمرین فرض کنید که شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۲-۲)، در حالت دایمی سینوسی است و شاخهٔ kام آن دارای امپدانس $Z_k(j\omega)$ می‌باشد. معادله‌های حلقهٔ متناظر با درخت داده شده را برحسب فازورها بنویسید.

۲-۳ خواص ماتریس امپدانس حلقه

واضح است که تجزیه و تحلیل یک شبکهٔ مقاومتی و تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی یک شبکهٔ مشابه، ارتباط بسیار نزدیکی دارند. اختلاف اصلی در پیدایش فازورها و امپدانس‌ها می‌باشد.

در مورد ماتریس امپدانس حلقه $\mathbf{Z}_l(j\omega)$ خواص زیر از رابطهٔ: $\mathbf{Z}_l(j\omega) = \mathbf{B}\mathbf{Z}_b(j\omega)\mathbf{B}^T$ نتیجه می‌شوند:

۱ـ اگر شبکه عناصر تزویج شده نداشته باشد، ماتریس امپدانس شاخه $\mathbf{Z}_b(j\omega)$ قطری بوده و ماتریس امپدانس حلقه متقارن می‌باشد.

۲ـ همچنین اگر شبکه عناصر تزویج شده نداشته باشد، ماتریس امپدانس حلقه $\mathbf{Z}_l(j\omega)$ را می‌توان به طور نظری نوشت.

الف ـ عنصر قطری iام ماتریس $\mathbf{Z}_l(j\omega)$ ، یعنی z_{ii} ، برابر مجموع امپدانس‌های موجود در حلقهٔ i می‌باشد. z_{ii} را **خود امپدانس حلقهٔ** i می‌نامند.

ب ـ عنصر (i, k)ام ماتریس $\mathbf{Z}_l(j\omega)$ ، یعنی z_{ik} ، برابر مجموع امپدانس‌های شاخه‌های مشترک حلقهٔ i و حلقهٔ k می‌باشد. اگر در شاخه‌های مشترک حلقهٔ i و k ، جهت‌های قراردادی دو حلقه موافق باشند علامت مثبت، و در غیر این صورت، علامت منفی برای z_{ik} به کار می‌رود.

۳ـ اگر طبق قضیهٔ تونن تمام منابع جریان به منابع ولتاژ تبدیل شوند، در این صورت جملهٔ محرک e_{si} برابر مجموع جبری تمام منابع ولتاژ موجود در حلقهٔ i می‌باشد: منابع ولتاژی که جهت‌های قراردادی آنها

Prozhefa.com

جریان را در جهت قراردادی حلقهٔ iام می‌فرستند با علامت مثبت، و بقیه با علامت منفی مشخص می‌گردند.

۴ـ اگر شبکه مقاومتی بوده و تمام مقاومتها مثبت باشند، در این صورت $\det(\mathbf{Z}_l) > 0$ است.

تمرین ۱ نتایج نظریه‌ای مداری خاصیت ۴ را در چند جمله بنویسید.

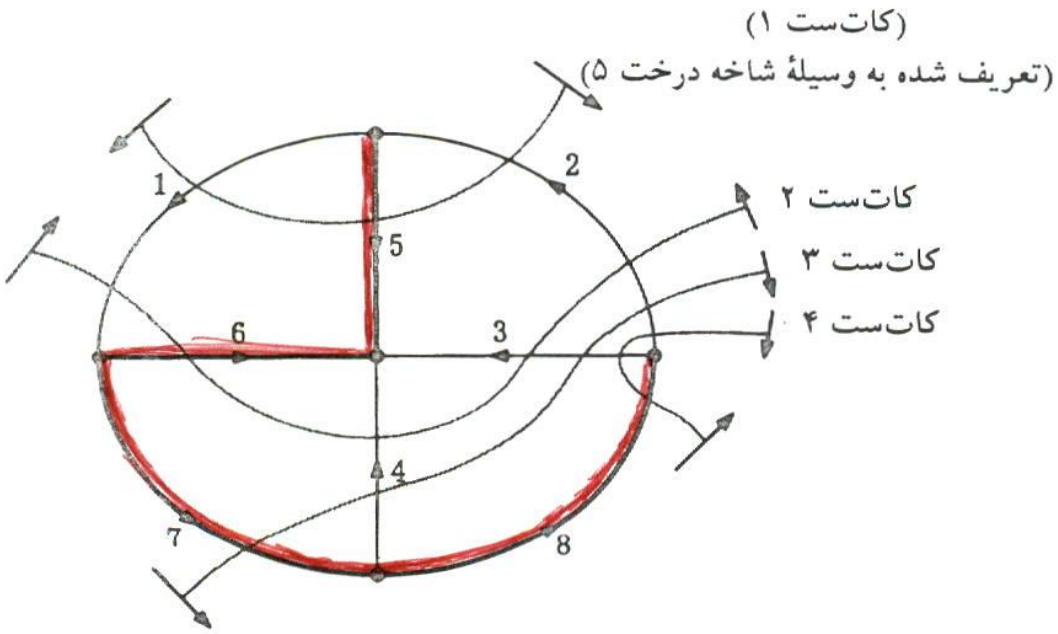
تمرین ۲ مثالی از یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان که از عناصر پسیو ساخته شده باشد، بیاورید به قسمی که برای یک درخت و فرکانس مشخص ω_0 ، $\det[\mathbf{Z}_l(j\omega_0)] = 0$ باشد. آیا می‌توانید مثالی بزنید که شامل یک مقاومت نیز باشد؟

تمرین ۳ در شبکهٔ شکل (۲-۲)، درختی را که شامل شاخه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ است، انتخاب کنید و معادلات حلقه را به طور نظری بنویسید.

۳- تجزیه و تحلیل کات‌ست

۳-۱ دو مطلب اساسی تجزیه و تحلیل کات‌ست

تجزیه و تحلیل کات‌ست دوگان تجزیه و تحلیل حلقه است. نخست یک درخت انتخاب کرده و آن را T می‌نامیم. سپس، شاخه‌ها را مانند قبل شماره‌گذاری می‌کنیم. یعنی، شمارهٔ لینک‌ها از ۱ تا l و شمارهٔ شاخه‌درخت‌ها از $l + 1$ تا b می‌باشد. می‌دانیم که هر شاخه درخت (برای درخت داده شده) یک کات‌ست اساسی یکتایی را تعریف می‌کند. این کات‌ست از لینک‌ها و یک شاخه درخت، یعنی، شاخه درختی که کات‌ست را تعریف می‌کند، تشکیل می‌شود. در شکل (۳-۱) گراف $\mathcal{G}$ و همان درخت T بخش پیش را نشان داده‌ایم. چهار کات‌ست اساسی نیز نشان داده شده‌اند.



شکل ۳-۱ کات‌ست‌های اساسی برای درخت انتخاب شده از یک گراف داده شده.

Prozhefa.com

فرض کنید کات‌ست‌ها را به طریق زیر شماره‌گذاری کنیم: کات‌ست ۱ متناظر با شاخه درخت ۵، کات‌ست ۲ متناظر با شاخه درخت ۶ و غیره. برای هر کات‌ست اساسی، یک جهت قراردادی کات‌ست مشابه قرارداد قبلی، چنان انتخاب می‌کنیم که با جهت قراردادی شاخه درخت تعریف کنندهٔ کات‌ست موافق باشد. تحت این شرایط، چنانچه KCL را برای چهار کات‌ست فوق اعمال کنیم، چنین به دست می‌آوریم:

$$\text{کات‌ست ۱}: \quad j_1 - j_2 + j_5 = 0$$
$$\text{کات‌ست ۲}: \quad -j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_6 = 0$$
$$\text{کات‌ست ۳}: \quad -j_2 - j_3 - j_4 + j_7 = 0$$
$$\text{کات‌ست ۴}: \quad -j_2 - j_3 + j_8 = 0$$

این معادلات به صورت ماتریسی چنین خواهند بود:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به طور کلی، چنانچه KCL را در مورد هر یک از n کات‌ست اساسی اعمال کنیم، یک دستگاه معادلات جبری خطی همگن با b مجهول j_1، j_2، ⋯، j_b به دست می‌آوریم. اولین مطلب اساسی تجزیه و تحلیل کات‌ست، در بیان زیر خلاصه شده است:

n معادلهٔ جبری خطی همگن با مجهول‌های j_1، j_2، ⋯، j_b که از اعمال KCL به هر کات‌ست اساسی به دست می‌آیند، یک دسته از n معادلهٔ نابستهٔ خطی تشکیل می‌دهند.

با به خاطر آوردن قرارداد علامت برای کات‌ست‌ها، ملاحظه می‌کنیم که معادلات KCL به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{j} = 0 \qquad (۳-۱)$$

که در اینجا $\mathbf{Q}$ یک ماتریس $n \times b$ بوده و چنین تعریف می‌گردد:

Prozhefa.com

$$q_{ik} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ متعلق به کات‌ست } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آنها یکسان باشد} \\ -۱ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ متعلق به کات‌ست } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آنها مخالف هم باشد} \\ ۰ & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ به کات‌ست } i \text{ متعلق نباشد} \end{cases} \quad (۳-۲)$$

ماتریس $\mathbf{Q} = [q_{ik}]$ ، **ماتریس کات‌ست اساسی** نامیده می‌شود. توجه کنید که این ماتریس مانند آنچه که قبلاً نظیرش را دیده‌ایم، به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{Q} = \Big[\underbrace{\mathbf{E}}_{l \text{ لینک}} \;\vdots\; \underbrace{\mathbf{1}_n}_{n \text{ شاخه درخت}} \Big] \; n \text{ کات‌ست} \quad (۳-۳)$$

که در اینجا $\mathbf{E}$ یک ماتریس مناسب $n \times l$ با عناصر ۱ − ، ۱ + یا ۰ بوده و $\mathbf{1}_n$ ماتریس واحد $n \times n$ می‌باشد. واضح است که $\mathbf{Q}$ از رتبهٔ n می‌باشد، زیرا شامل ماتریس واحد $\mathbf{1}_n$ است. در نتیجه، n معادلهٔ کات‌ست اساسی برحسب جریان شاخه‌ها، به طور خطی نابسته می‌باشند.

اکنون به KVL برمی‌گردیم. توجه کنید که ولتاژ هر شاخه را می‌توان برحسب یک ترکیب خطی ولتاژهای شاخه‌درخت‌ها، بیان نمود. برای سهولت، فرض کنید ولتاژهای شاخه‌درخت‌ها با $e_۱$ ، $e_۲$ ، … ، e_n مشخص گردند. به عنوان مثال، در شکل (۳-۱) با استفاده از KVL معادلات زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
v_۱ &= v_۵ - v_۶ = e_۱ - e_۲ \\
v_۲ &= -v_۵ + v_۶ - v_۷ - v_۸ = -e_۱ + e_۲ - e_۳ - e_۴ \\
v_۳ &= v_۶ - v_۷ - v_۸ = e_۲ - e_۳ - e_۴ \\
v_۴ &= v_۶ - v_۷ = e_۲ - e_۳ \\
v_۵ &= e_۱ \\
v_۶ &= e_۲ \\
v_۷ &= e_۳ \\
v_۸ &= e_۴
\end{aligned}$$

با به کار بردن دوگان استدلال به کار رفته در مورد تجزیه و تحلیل حلقه، می‌توان موضوع دومین مطلب اساسی یعنی:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \mathbf{e} \quad (۳-۴)$$

را ثابت کرد. یعنی، بردار ولتاژ شاخه از حاصلضرب ترانهادهٔ ماتریس کات‌ست در بردار ولتاژ شاخه درخت‌ها به دست می‌آید.

خلاصه KCL لازم می‌دارد که رابطهٔ $\mathbf{Qj} = ۰$ برقرار باشد و KVL به وسیلهٔ $\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T\mathbf{e}$ بیان می‌گردد.

Prozhefa.com

در نتیجهٔ قراردادی که برای شماره‌گذاری شاخه‌ها به کار بردیم، ماتریس کات‌ست اساسی $\mathbf{Q}$ به صورت (۳-۳) می‌باشد. این معادلات بدون توجه به ماهیت شاخه‌ها معتبرند.

تمرین ۱ با استفاده از معادلات (۳-۱) و (۳-۴) قضیهٔ تلگان را ثابت کنید.

تمرین ۲ تجزیه و تحلیل گره همواره حالت خاصی از تجزیه و تحلیل کات‌ست نمی‌باشد. مثالی برای نشان دادن این مطلب ذکر کنید.

۳-۲ تجزیه و تحلیل کات‌ست برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

در تجزیه و تحلیل کات‌ست، قوانین کیرشف به وسیلهٔ معادلات زیر بیان می‌گردند [(۳-۱) و (۳-۴) را ببینید]:

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{j} = 0$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T\mathbf{e}$$

این معادلات را به منظور تشکیل معادلات شبکه برحسب n ولتاژ شاخه درخت‌های e_1 ، e_2 ، ... ، e_n به عنوان متغیرهای شبکه با معادلات شاخه‌ها، ترکیب می‌کنیم.

در مورد شبکه‌های مقاومتی خطی تغییرناپذیر با زمان، معادلات شاخه‌ها به سادگی به صورت ماتریسی نوشته می‌شوند. اکنون طرز عمل را با یک شبکهٔ مقاومتی تشریح می‌کنیم. معادلات شاخه‌ها به صورت ماتریسی چنین نوشته می‌شوند:

$$\mathbf{j} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{j}_s - \mathbf{G}\mathbf{v}_s \qquad (۳-۵)$$

مانند آنچه که قبلاً دیده‌ایم، $\mathbf{G}$ ماتریس قطری رسانایی شاخه‌ها بوده و دارای بعد b می‌باشد و $\mathbf{j}_s$ و $\mathbf{v}_s$ بردارهای منابع هستند. از ترکیب معادلات (۳-۱)، (۳-۴) و (۳-۵) به دست می‌آوریم که:

$$\mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^T\mathbf{e} = \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{v}_s - \mathbf{Q}\,\mathbf{j}_s \qquad (۳-۶)$$

یا:

$$\mathbf{Y}_q\mathbf{e} = \mathbf{i}_s. \qquad (۳-۷)$$

که در اینجا:

$$\mathbf{Y}_q \triangleq \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^T \qquad \mathbf{i}_s \triangleq \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{v}_s - \mathbf{Q}\,\mathbf{j}_s \qquad (۳-۸)$$

ماتریس $\mathbf{Y}_q$ **ماتریس ادمیتانس کات‌ست**، و بردار $\mathbf{i}_s$ **بردار منبع جریان کات‌ست**، خوانده می‌شوند.

معادلات کات‌ست به صورت اسکالر چنین هستند:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ \vdots \\ i_{sn} \end{bmatrix}$$

Prozhefa.com

۳-۳ خواص ماتریس ادمیتانس کات‌ست

توجه کنید که در تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی مانند آنچه قبلاً دیده‌ایم، ماتریس ادمیتانس کات‌ست $\mathbf{Y}_q$ دارای چند خاصیت است که متکی بر معادلهٔ زیر می‌باشند:

$$\mathbf{Y}_q(j\omega) = \mathbf{Q}\mathbf{Y}_b(j\omega)\mathbf{Q}^T$$

۱- اگر شبکه عناصر تزویج شده نداشته باشد، ماتریس ادمیتانس شاخه $\mathbf{Y}_b(j\omega)$ قطری بوده و ماتریس $\mathbf{Y}_q(j\omega)$ متقارن می‌باشد.

۲- چنانچه عناصر تزویج شده در شبکه وجود نداشته باشد، در این صورت:

الف - عنصر قطری i ام ماتریس $\mathbf{Y}_q(j\omega)$ ، یعنی $y_{ii}(j\omega)$ ، برابر مجموع ادمیتانس‌های شاخه‌های موجود در کات‌ست i ام می‌باشد.

ب - عنصر (i, k) ام ماتریس $\mathbf{Y}_q(j\omega)$ ، یعنی $y_{ik}(j\omega)$ ، برابر مجموع ادمیتانس‌های شاخه‌های مشترک کات‌ست i ام و کات‌ست k ام است. اگر در شاخه‌های مشترک این دو کات‌ست، جهت‌های قراردادی کات‌ست‌ها موافق هم باشند، علامت مثبت، و در غیر این صورت، علامت منفی برای y_{ik} منظور می‌شود.

۳- چنانچه تمام منابع ولتاژ به منابع جریان تبدیل شوند، در این صورت i_{sk} برابر جمع جبری تمام منابع جریان موجود در کات‌ست k ام می‌باشد. منابع جریانی که جهت قراردادی آنها مخالف جهت قراردادی کات‌ست k ام می‌باشند، با علامت مثبت و بقیه با علامت منفی مشخص می‌گردند.

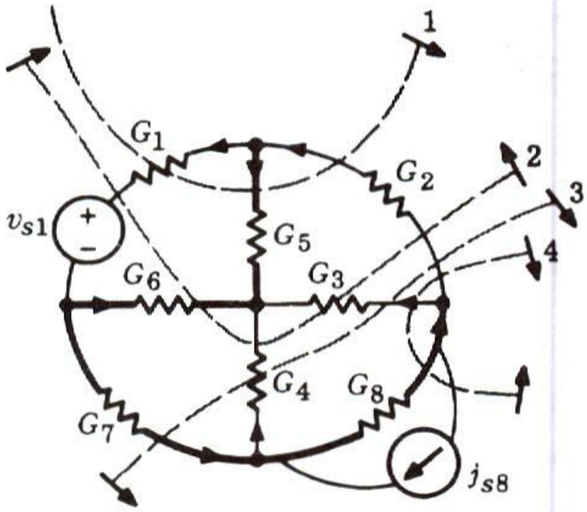
۴- اگر شبکه مقاومتی بوده و تمام مقاومتها مثبت باشند، در این صورت $\det(\mathbf{Y}_q) > 0$ است.

مثال شبکهٔ مقاومتی شکل (۳-۲) را در نظر بگیرید. معادلات کات‌ست چنین هستند:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+G_5 & -G_1-G_2 & G_2 & G_2 \\ -G_1-G_2 & G_1+G_2+G_3+G_4+G_6 & -G_2-G_3-G_4 & -G_2-G_3 \\ G_2 & -G_2-G_3-G_4 & G_2+G_3+G_4+G_7 & G_2+G_3 \\ G_2 & -G_2-G_3 & G_2+G_3 & G_2+G_3+G_8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 v_{s1} \\ -G_1 v_{s1} \\ 0 \\ j_{s8} \end{bmatrix}$$

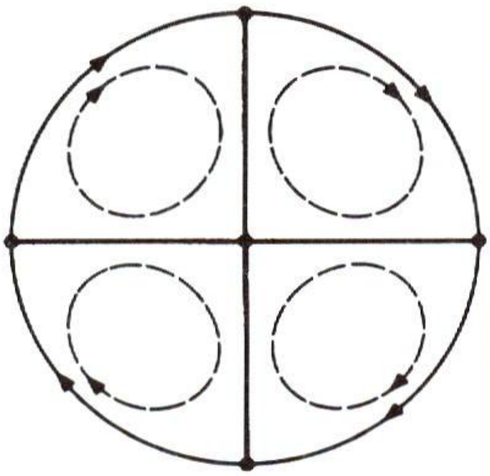
Prozhefa.com



شکل ۳-۲ مثالی از تجزیه و تحلیل کات‌ست.

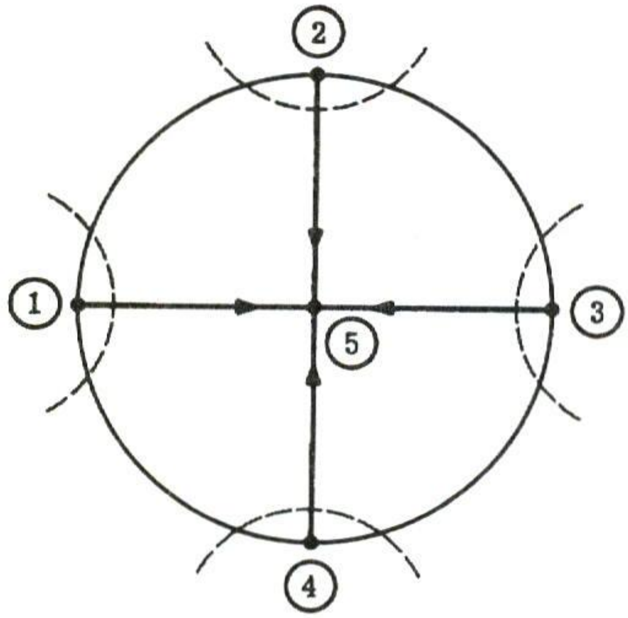
٤ - توضیحاتی دربارهٔ تجزیه و تحلیل حلقه و کات‌ست

تجزیه و تحلیل حلقه و تجزیه و تحلیل کات‌ست، هر دو با انتخاب یک درخت برای گراف داده شده شروع می‌شوند. از آنجا که تعداد درختهای ممکن برای یک گراف معمولاً زیاد است، این دو روش فوق‌العاده انعطاف‌پذیر می‌باشند. واضح است که این روش‌ها از تجزیه و تحلیل مش و تجزیه و تحلیل گره کلی‌تر هستند. برای مثال، گراف شکل (۴-۱) را در نظر بگیرید، که در آن درخت انتخاب شده با شاخه‌های سیاه‌تر نشان داده شده است. حلقه‌های اساسی برای این درخت خاص، بر چهار مش گراف منطبق می‌باشند. بنابراین، جریانهای مش‌ها همانند جریانهای حلقه‌های اساسی خواهند بود و به طریق مشابه، چنانکه در شکل (۴-۲) نشان داده شده است، کات‌ست‌های اساسی برای این درخت خاص، منطبق بر دسته شاخه‌هایی است که به گره‌های ①، ②، ③ و ④ متصل می‌باشند. چنانچه گره ⑤ را به عنوان گره مبنا انتخاب کنیم، ولتاژهای شاخه‌درخت‌ها، همانند ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا خواهند



شکل ٤-۱ حلقه‌های اساسی برای درخت انتخاب شده همانند مش‌ها می‌باشند.

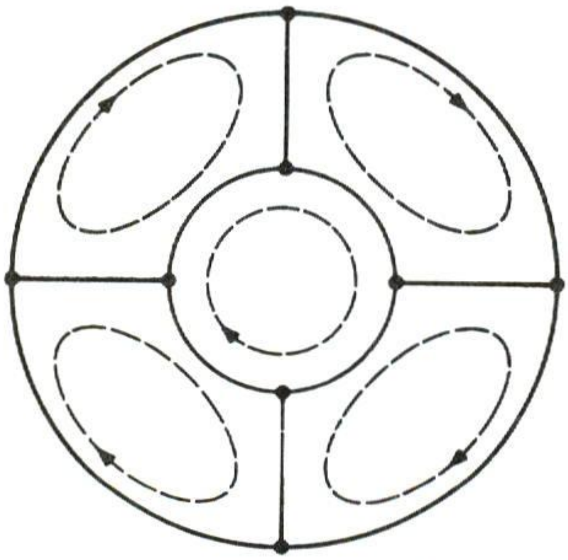
Prozhefa.com



شکل ٤-۲ چهار کات‌ست برای درخت انتخاب شده منطق بر دسته شاخه‌های متصل شده به گره‌های ①، ②، ③ و ④ می‌باشند.

بود. بنابراین، تجزیه و تحلیل مش و تجزیه و تحلیل گره برای این مثال بخصوص، حالتهای خاصی از تجزیه و تحلیل حلقه و تجزیه و تحلیل کات‌ست می‌باشند. اما باید خاطرنشان کرد که برای گراف شکل (۴-۳)، مش‌ها حالتهای خاصی از حلقه‌های اساسی نیستند؛ یعنی، درختی که این پنج مش حلقه‌های اساسی آن باشند، وجود ندارد. به طریق مشابه، چنانچه گره ④ در شکل (۴-۲) را به عنوان گره مبنا انتخاب کنیم، هیچ درختی وجود ندارد که ولتاژهای شاخه درخت‌های آن، همانند ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا باشد.

تا آنجا که مزایای نسبی تجزیه و تحلیل کات‌ست و تجزیه و تحلیل حلقه مورد نظر است، نتیجه،



شکل ٤-۳ گرافی که نشان می‌دهد مش‌ها حالت خاصی از حلقه‌های اساسی نیستند.

Prozhefa.com

درست همان است که در تجزیه و تحلیل مش و تجزیه و تحلیل گره وجود داشت. به کار بردن یکی از این‌دو روش به خود گراف، نوع و تعداد منابع موجود در شبکه بستگی دارد. به عنوان مثال، اگر n ، تعداد شاخه درخت‌ها، از l ، تعداد لینک‌ها، خیلی کوچکتر باشد، روش کات‌ست معمولاً مناسب‌تر است.

به خاطر سپردن دوگانی موجود میان مفاهیم مربوط به شبکه‌ها و گراف‌های کلی، حائز اهمیت فراوان است. جدول (۱۰-۱) فصل ۱۰ مجدداً باید در این موقع مطالعه گردد. در حالی که در مطالعهٔ اولیهٔ خود دوگانی را تنها در مورد گراف‌ها و شبکه‌های مسطح به کار بردیم و برحسب تجزیه و تحلیل مش و گره فکر کردیم، اکنون واضح است که دوگانی به مفاهیم مربوط به گراف‌ها و شبکه‌های نامسطح نیز تعمیم می‌یابد. به عنوان مثال، کات‌ست‌ها و حلقه‌ها مفاهیم دوگان می‌باشند. عناصر جدول (۱۰-۱) فصل ۱۰ باید به دقت در نظر گرفته شوند.

۵ - رابطهٔ میان B و Q

چنانچه با گراف جهت‌دار $\mathcal{G}$ شروع کرده و یکی از درختهای آن را انتخاب نموده و T بنامیم و ماتریس اساسی حلقهٔ $\mathbf{B}$ و ماتریس اساسی کات‌ست $\mathbf{Q}$ را بنویسیم، باید انتظار داشته باشیم که ارتباط نزدیکی میان این ماتریس‌ها پیدا شود. ماتریس $\mathbf{B}$ مشخص می‌کند که هر شاخه در کدام حلقهٔ اساسی واقع است و ماتریس $\mathbf{Q}$ نشان می‌دهد که هر شاخه در کدام کات‌ست اساسی قرار دارد. رابطهٔ دقیق میان $\mathbf{B}$ و $\mathbf{Q}$ در قضیهٔ زیر بیان شده است.

قضیه ماتریس اساسی حلقه و ماتریس اساسی کات‌ست یک گراف جهت‌دار $\mathcal{G}$ را به ترتیب $\mathbf{B}$ و $\mathbf{Q}$ بنامید و فرض کنید که هر دو ماتریس مربوط به یک درخت T باشند. در این صورت:

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = 0 \qquad \text{و} \qquad \mathbf{Q}\mathbf{B}^T = 0 \tag{۵-۱}$$

و به علاوه، اگر لینک‌ها را از ۱ تا l و شاخه درخت‌ها را از $l+1$ تا b شماره‌گذاری کنیم، داریم:

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{1}_l \;\vdots\; \mathbf{F}\right] \qquad \text{و} \qquad \mathbf{Q} = \left[-\mathbf{F}^T \;\vdots\; \mathbf{1}_n\right] \tag{۵-۲}$$

پیش از این که این مطالب را ثابت کنیم، ابتدا معنی معادلهٔ اول (۵-۱) را بررسی می‌کنیم. این معادله بیان می‌دارد که حاصل‌ضرب ماتریس $l \times b$ ، $\mathbf{B}$ و ماتریس $b \times n$ ، $\mathbf{Q}^T$ یک ماتریس $l \times n$ صفر می‌باشد. به عبارت دیگر، حاصل‌ضرب هر سطر از $\mathbf{B}$ در هر ستون از $\mathbf{Q}^T$ ، برابر صفر است. معادلهٔ دوم (۵-۱)، به آسانی ترانهادهٔ معادلهٔ اول می‌باشد؛ یعنی حاصل‌ضرب هر سطر از $\mathbf{Q}$ در هر ستون از $\mathbf{B}^T$ برابر صفر است.

اثبات فرض کنید مؤلفه‌های بردار $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \cdots, e_n]^T$ دلخواه باشند. از آنجا که آنها ولتاژهای شاخه درخت‌های درخت T می‌باشند، ولتاژهای شاخه‌های $\mathcal{G}$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T\mathbf{e}$$

به عبارت دیگر، n-بردار $\mathbf{e}$ هر چه باشد، این معادله دسته‌ای از b ولتاژ شاخه‌ها را که در KVL صدق

Prozhefa.com

می‌کند به ما می‌دهد. از طرف دیگر، هر موقع که دسته‌ای از ولتاژهای شاخه‌های v_k در KVL صدق کند، خواهیم داشت:

$$\mathbf{Bv} = 0$$

(یعنی، این v_k ها در تمام حلقه‌های اساسی، در KVL صدق می‌کنند). با جایگذاری $\mathbf{v}$ ، به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{BQ}^T\mathbf{e} = 0 \qquad \text{برای تمام } \mathbf{e} \tag{۵-۳}$$

به این مطلب با دقت تمام توجه کنید، معنی معادلهٔ فوق این است که برای هر n ـ بردار داده شدهٔ $\mathbf{e}$ ، چنانچه آن را از سمت چپ در ماتریس $\mathbf{BQ}^T$ ، ضرب کنیم، یک بردار صفر به دست می‌آوریم! ملاحظه کنید که حاصل‌ضرب $\mathbf{BQ}^T$ ، یک ماتریس $l \times n$ می‌باشد و این بدان معنی است که هر موقع هر nـ بردار $\mathbf{e}$ را در $\mathbf{BQ}^T$ ضرب کنیم، بردار صفر به دست می‌آوریم. به عنوان مثال، اگر $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \triangleq [1, 0, 0, \cdots, 0]^T$ را انتخاب کنیم، به آسانی دیده می‌شود که $\mathbf{BQ}^T\mathbf{e}_1$ ستون اول $\mathbf{BQ}^T$ می‌باشد و بنابراین ستون اول $\mathbf{BQ}^T$ یک ستون صفر است. به طریق مشابه، اگر $\mathbf{e} = \mathbf{e}_2 \triangleq [0, 1, 0, \cdots, 0]^T$ را انتخاب کنیم، می‌بینیم که دومین ستون $\mathbf{BQ}^T$ هم، یک ستون صفر است و الی آخر. بنابراین، معادلهٔ (۵-۳) لازم می‌دارد که تمام عناصر ماتریس $\mathbf{BQ}^T$ ، برابر صفر باشند و بدین ترتیب معادلات (۵-۱) اثبات شدند. (معادلهٔ دومی به سادگی ترانهادهٔ معادلهٔ اولی است.)

برای اثبات معادلهٔ (۵-۲)، به خاطر بیاورید که ماتریس $\mathbf{Q}$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{E} & \mathbf{1}_n \end{array}\right] \tag{۵-۴}$$

بنابراین:

$$\mathbf{BQ}^T = \left[\begin{array}{c:c} \underbrace{\mathbf{1}_l}_{l} & \underbrace{\mathbf{F}}_{n} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T \\ \mathbf{1}_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \}l \\ \}n \end{matrix}$$

با استفاده از این حقیقت که حاصلضرب ماتریس‌ها از ضرب سطرها در ستونها انجام می‌گیرد، و با توجه به این که تعداد ستونهای $\mathbf{1}_l$ برابر تعداد سطرهای $\mathbf{E}^T$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که:

$$\mathbf{BQ}^T = \mathbf{1}_l\mathbf{E}^T + \mathbf{F}\mathbf{1}_n = \mathbf{E}^T + \mathbf{F} = 0$$

بنابراین:

$$\mathbf{E}^T = -\mathbf{F}$$

و با ترانهاده کردن دو طرف:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{F}^T$$

با استفاده از این نتیجه در (۵-۴) ملاحظه می‌کنیم که:

$$\mathbf{Q} = [\; -\mathbf{F}^T \quad \mathbf{1}_n \;]$$

Prozhefa.com

و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

رابطهٔ میان ماتریس‌های $\mathbf{B}$ و $\mathbf{Q}$ که توسط (۵-۲) بیان شده است، بسیار مفید می‌باشد. زیرا این رابطه بدین معنی است که هر وقت یکی از این ماتریس‌ها را بدانیم، ماتریس دیگر را می‌توان بدون محاسبه نوشت، یا حتی بهتر این که، هر دو ماتریس $\mathbf{B}$ و $\mathbf{Q}$ به وسیلهٔ ماتریس $l \times n$، $\mathbf{F}$ به طور یکتایی مشخص می‌شوند.

تمرین ۱ برای گراف شکل (۳-۱) رابطهٔ $\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = 0$ را تحقیق کنید.

تمرین ۲ با مراجعه به تعریف‌های $\mathbf{B}$ و $\mathbf{Q}$، معادلهٔ اول (۵-۱) را ثابت کنید. توجه کنید که عنصر (i, k) ام ماتریس $\mathbf{B}\mathbf{Q}^T$ به صورت زیر است:

$$\sum_{j=1}^{b} q_{ij} b_{kj} = q_{ik} b_{kk} + q_{i(i+l)} b_{k(i+l)}$$

یعنی، مجموع دارای دو جملهٔ غیرصفر می‌باشد.

خلاصه

- در هر یک از تجزیه و تحلیل حلقه و تجزیه و تحلیل کات‌ست، ابتدا یک درخت انتخاب کرده و تمام شاخه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم. برای سادگی، ابتدا لینک‌ها را از ۱ تا l شماره‌گذاری کرده و بعد، شاخه درخت‌ها را از $l+1$ تا b شماره‌گذاری می‌نماییم. سپس جهت‌های شاخه‌ها را مشخص می‌کنیم.
- در تجزیه و تحلیل حلقه، جریانهای حلقه‌های اساسی i_1 ، i_2 ، $\cdots$ ، i_l را به عنوان متغیرهای شبکه به کار می‌بریم. با به کار بردن KVL در هر حلقهٔ اساسی، l معادلهٔ جبری نابستهٔ خطی برحسب ولتاژهای شاخه‌ها می‌نویسیم. در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، با در نظر گرفتن معادلات شاخه‌ها، می‌توان این l معادله را صریحاً برحسب l جریان حلقه‌های اساسی نوشت. در حالت کلی، معادلات حاصل از شبکه، یک دستگاه از l معادلهٔ انتگرال دیفرانسیل تشکیل می‌دهند که به شکل ماتریسی چنین می‌باشد:

$$\mathbf{Z}_l(D)\mathbf{i} = \mathbf{e}_s$$

حل این دستگاه معادلات خطی انتگرال دیفرانسیل، در فصل‌های بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت. وقتی که جریان حلقه‌های اساسی $\mathbf{i}$ تعیین شدند، جریان شاخه‌ها را می‌توان بلافاصله از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$\mathbf{j} = \mathbf{B}^T\mathbf{i} \qquad \text{(KCL)}$$

سپس b ولتاژ شاخه را می‌توان از b معادلهٔ شاخه به دست آورد.

- تجزیه و تحلیل کات‌ست، دوگان تجزیه و تحلیل حلقه است. n ولتاژ شاخه‌درخت‌ها e_1 ، e_2 ، $\cdots$ ، e_n به عنوان متغیرهای شبکه به کار می‌روند، و از اعمال KCL برای تمام کات‌ست‌های اساسی

Prozhefa.com

متناظر با درخت، n معادلهٔ نابسته خطی برحسب جریانهای شاخه‌ها نوشته می‌شوند. در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، این n معادله را می‌توان صریحاً برحسب n ولتاژ شاخه درخت‌ها نوشت.

در حالت کلی، معادلهٔ ماتریسی حاصل به صورت زیر است:

$$\mathbf{Y}_q(D)\mathbf{e} = \mathbf{i}_s$$

وقتی که $\mathbf{e}$ تعیین شود، ولتاژ b شاخه را می‌توان بلافاصله از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T\mathbf{e} \qquad \text{(KVL)}$$

سپس b جریان شاخه را می‌توان از b معادلهٔ شاخه نتیجه گرفت.

- برای هر گراف جهت‌دار $\mathcal{G}$ و هر درخت داده شده از آن، ماتریس حلقهٔ اساسی $\mathbf{B}$ و ماتریس کات‌ست اساسی $\mathbf{Q}$ به دست آمده چنان هستند که:

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = 0 \qquad \text{و} \qquad \mathbf{Q}\mathbf{B}^T = 0$$

و به علاوه:

$$\mathbf{B} = \Big[\underbrace{\mathbf{1}_l}_{l} \;\vdots\; \underbrace{\mathbf{F}}_{n}\Big]\Big\}l \qquad \text{و} \qquad \mathbf{Q} = \Big[\underbrace{-\mathbf{F}^T}_{l} \;\vdots\; \underbrace{\mathbf{1}_n}_{n}\Big]\Big\}n$$

- شایسته است که شباهت موجود میان چهار روش تجزیه و تحلیل، مورد تأکید قرار گیرد:

برای تجزیه و تحلیل گره $\qquad \mathbf{Y}_n(j\omega) = \mathbf{A}\mathbf{Y}_b(j\omega)\mathbf{A}^T$

برای تجزیه و تحلیل مش $\qquad \mathbf{Z}_m(j\omega) = \mathbf{M}\mathbf{Z}_b(j\omega)\mathbf{M}^T$

برای تجزیه و تحلیل کات‌ست $\qquad \mathbf{Y}_q(j\omega) = \mathbf{Q}\mathbf{Y}_b(j\omega)\mathbf{Q}^T$

برای تجزیه و تحلیل حلقه $\qquad \mathbf{Z}_l(j\omega) = \mathbf{B}\mathbf{Z}_b(j\omega)\mathbf{B}^T$

- هر یک از ماتریس‌های "ارتباط دهندهٔ" $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{M}$ ، $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{B}$ از رتبهٔ کامل هستند.

مسائل

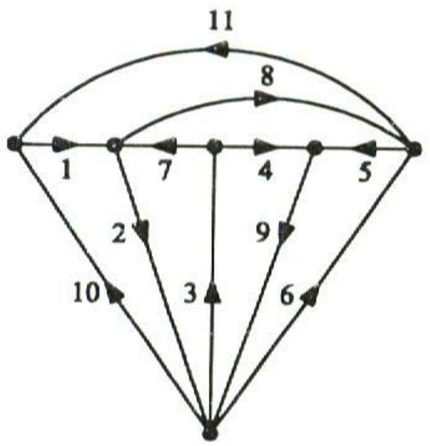
۱- در گراف شکل (مسألهٔ ۱۱-۱) درختی چنان انتخاب کنید که حلقه‌های اساسی آن به صورت زیر باشد:

۲, ۸, ۱۰, ۱۱

۳, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱

۵, ۹, ۱۰, ۱۱

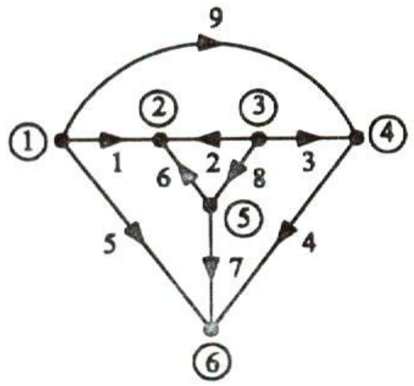
۴, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱



شکل (مسألهٔ ۱۱-۱)

Prozhefa.com

۲- در گراف شکل (مسألهٔ ۱۱-۲) و برای درخت متشکل از شاخه‌های ۱، ۲، ۴، ۵ و ۷ حلقه‌های اساسی و کات‌ست‌های اساسی را مشخص کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۱-۲)

۳- در گراف شکل (مسألهٔ ۱۱-۲) درختی متشکل از شاخه‌های ۳، ۶، ۷، ۸ و ۹ انتخاب کنید.

الف - حلقه‌های اساسی متناظر با لینک‌های این درخت را تعیین و ماتریس حلقهٔ اساسی را بنویسید.

ب - کات‌ست‌های اساسی متناظر با شاخه درخت‌های این درخت را تعیین و ماتریس کات‌ست اساسی را بنویسید.

پ - با توجه به درخت داده شده، یک دسته ولتاژ مستقل شاخه‌ها را هم انتخاب کنید. ولتاژ بقیهٔ شاخه‌ها را برحسب ترکیب خطی این ولتاژها بیان کنید.

ت - با توجه به درخت داده شده، یک دسته جریان مستقل شاخه‌ها را انتخاب کنید. جریان بقیهٔ شاخه‌ها را برحسب ترکیب خطی این جریانها بیان کنید.

ث - آیا می‌توان درختی چنان انتخاب کرد که حلقه‌های اساسی آن همان مش‌ها باشد؟ در صورت مثبت بودن جواب این کار را انجام دهید.

ج - آیا می‌توان درختی چنان انتخاب کرد که کات‌ست‌های اساسی آن همان شاخه‌های وصل شده به گره‌ها باشد؟ در صورت مثبت بودن جواب این کار را انجام دهید.

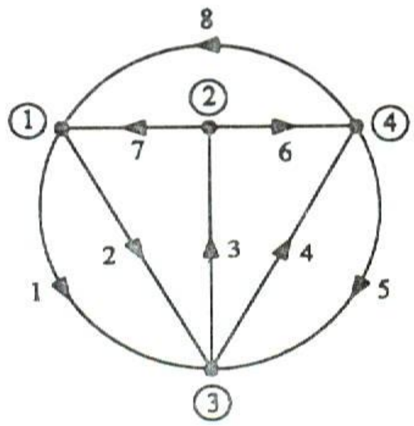
٤- در گراف شکل (مسألهٔ ۱۱-۴) درختی انتخاب کنید که شامل شاخه‌های ۱، ۶ و ۸ باشد.

الف - حلقه‌های اساسی و کات‌ست‌های اساسی را مشخص کنید.

ب - جریان شاخه‌درخت‌ها را برحسب جریان لینک‌ها به‌صورت ماتریسی بنویسید.

پ - ولتاژ لینک‌ها را برحسب ولتاژ شاخه‌درخت‌ها به صورت ماتریسی بنویسید.

ت - درختی چنان انتخاب کنید که کات‌ست‌های اساسی آن شاخه‌های وصل شده به گره‌ها باشند. همهٔ جوابها را مشخص کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۱-٤)

Prozhefa.com

۵ـ در گراف شکل (مسألهٔ ۱۱-۴) درختی چنان انتخاب کنید که حلقه‌های اساسی آن همان مش‌ها باشد. چند تا از این درختها وجود دارد و چرا؟

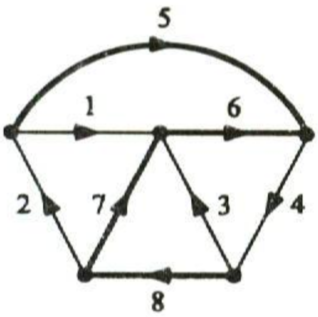
۶ـ الف ـ در گراف شکل (مسألهٔ ۱۱-۶) برای درخت انتخاب شدهٔ مرکب از شاخه‌های ۵، ۶، ۷ و ۸ حلقه‌های اساسی و کات‌ست‌های اساسی را مشخص کنید. ماتریس‌های حلقهٔ اساسی و کات‌ست اساسی را بنویسید.

ب ـ متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه‌ها را مشخص کنید و بقیهٔ ولتاژها را برحسب آنها بنویسید.

پ ـ متغیرهای مستقل جریان شاخه‌ها را مشخص کنید و بقیهٔ جریانها را برحسب آنها بنویسید.

ت ـ آیا درختی می‌توان انتخاب کرد که حلقه‌های اساسی آن همان مش‌ها باشد؟ یا درخت را انتخاب کنید یا دلیل عدم وجود آن را بیان کنید.

ث ـ آیا درختی وجود دارد که کات‌ست‌های اساسی آن همان شاخه‌های وصل شده به گره‌ها باشد؟ یا درخت را انتخاب کنید یا دلیل عدم وجود آن را بیان کنید.

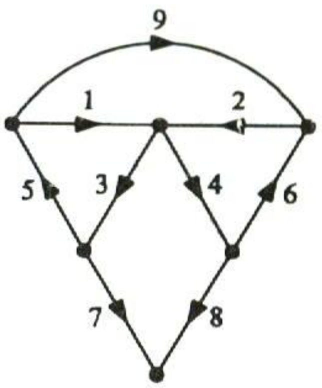


شکل (مسألهٔ ۱۱-۶)

۷ـ در گراف نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۱-۷):

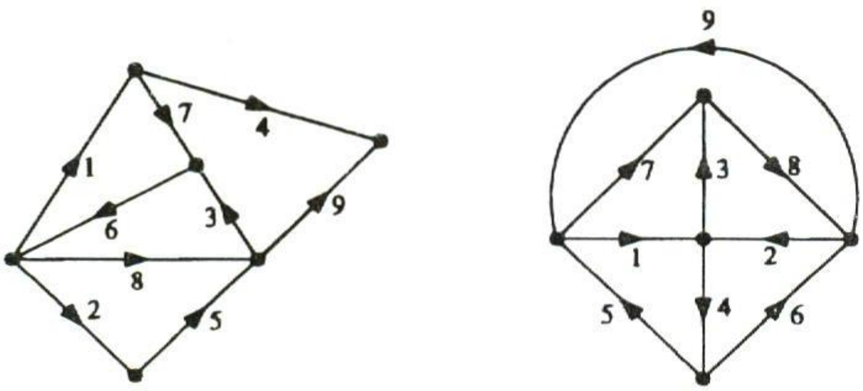
الف ـ درختی چنان انتخاب کنید که تمام حلقه‌های اساسی آن همان مش‌ها باشند. چندتا از چنین درختهایی وجود دارد؟

ب ـ درختی چنان انتخاب کنید که تمام کات‌ست‌های اساسی آن متناظر با شاخه‌های وصل شده به گره‌ها باشند. چند تا از چنین درختهایی وجود دارد؟



شکل (مسألهٔ ۱۱-۷)

۸ـ مسألهٔ ۷ را در مورد گراف‌های نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۱-۸) حل کنید.



(الف) (ب)

شکل (مسألهٔ ۱۱-۸)

Prozhefa.com

۹- برای یک شبکهٔ متصل به هم و معلوم و یک درخت مشخص از آن ماتریس حلقه‌های اساسی چنین است:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

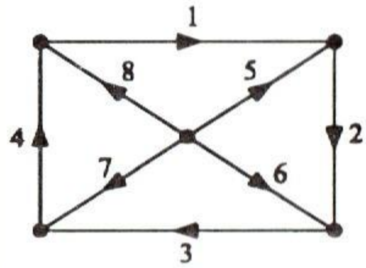
الف - ماتریس کات‌ست اساسی متناظر با همان درخت را بدون محاسبه بنویسید.

ب - گراف جهت‌دار شبکه را رسم کنید.

۱۰- در گراف نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۱-۱۰) دو ماتریس کات‌ست ناقص داده شده‌اند، که در آنجا نقطه‌ها نشان دهندهٔ ستونهای ناقص هستند. هر ماتریس کات‌ست داده شده را کامل کنید و تعیین کنید کدام یک متناظر با یک کات‌ست اساسی است و چرا؟ درخت متناظر را رسم کنید.

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & . & . \\ -1 & 1 & . & . & -1 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & . & . \\ 0 & -1 & . & . & 0 & -1 & . & . \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & -1 & . & . & 0 & . & . \end{bmatrix} \end{array}$$



شکل (مسألهٔ ۱۱-۱۰)

۱۱- نشان دهید که هر کات‌ست C از هر گراف G یک شاخه از هر درخت T از G را دربردارد.

۱۲- **الف -** نشان دهید که اگر ماتریس تلاقی را برای هر گرافی که به شکل یک درخت است بنویسیم یک ماتریس ناویژهٔ مربعی به دست می‌آوریم که دترمینان آن همواره برابر ۱ ± است.

ب - با استفاده از بند (الف) نشان دهید که ماتریس تلاقی مختصر شده از رتبهٔ کامل است.

۱۳- فرض کنید T درختی از گراف G بوده و $\mathbf{A}$ ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ این گراف باشد. اگر شاخه‌ها را چنان شماره‌گذاری کنیم که l ستون اول ماتریس $\mathbf{A}$ متناظر با لینک‌ها و n ستون آخر

Prozhefa.com

متناظر با شاخه‌درخت‌ها باشد، می‌توان ماتریس $\mathbf{A}$ را به‌صورت زیرتفکیک کرد $\mathbf{A} = [\,\mathbf{A}_t \mid \mathbf{A}_l\,]$.
نشان دهید که $\mathbf{A}_t$ یک ماتریس $n \times n$ ناویژه است، یعنی دترمینان آن مخالف صفر است. اثبات این مطلب نشان می‌دهد که رتبهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ برابر n است.

۱۴ـ گرافی دارای ۵ گره و ۷ شاخه است. ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ این گراف چنین است:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الف ـ ادعا می‌شود که شاخه‌های {۵ , ۴ , ۳ , ۱} یک درخت تشکیل می‌دهند. بدون رسم گراف درستی این ادعا را ثابت کنید.

ب ـ بدون رسم گراف، ماتریس حلقه‌های اساسی $\mathbf{B}$ را بنویسید.

پ ـ بدون رسم گراف، ماتریس کات‌ست‌های اساسی $\mathbf{Q}$ را بنویسید.

ت ـ تعداد درختهای گراف را تعیین کنید.

ث ـ گراف را رسم کنید و نتایج بندهای الف، ب، پ و ت را تأیید کنید.

۱۵ـ می‌دانیم ماتریس کات‌ست اساسی $\mathbf{Q}$ یک گراف، به صورت $\mathbf{Q} = [\,E \mid \mathbf{1}\,]$ قابل تفکیک است.
اگر ماتریس $\mathbf{E}$ به صورت زیر داده شده باشد، شکل گراف را تعیین کنید.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

آیا جواب منحصر به فرد است؟ توضیح دهید. (روش رسیدن به گراف باید با استدلال همراه باشد.)

۱۶ـ الف ـ آیا هیچ گونه ارتباطی بین ماتریس کات‌ست اساسی یک گراف و ماتریس تلاقی آن وجود دارد؟

ب ـ آیا از روی ماتریس کات‌ست اساسی یک گراف می‌توان آن گراف را رسم کرد؟ چطور؟

پ ـ اگر ماتریس کات‌ست اساسی یک گراف به صورت زیر باشد، ماتریس تلاقی آن را تعیین و گراف مربوط به آن را رسم کنید.

Prozhefa.com

$$
\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

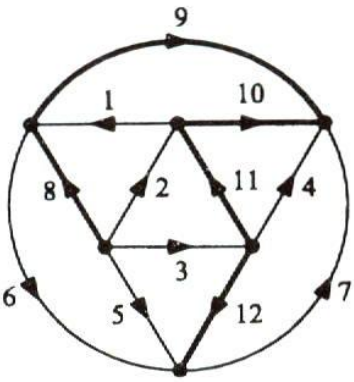
ت - درختی روی این گراف تعیین کنید که با ماتریس کات‌ست اساسی داده شده، متناظر باشد.

۱۷- در گراف شکل (مسألهٔ ۱۱-۱۷) درختی مرکب از شاخه‌های ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ انتخاب کنید.

الف - تمام حلقه‌های اساسی متناظر با لینک‌های این درخت را تعیین کنید.

ب - ماتریس حلقه‌های اساسی $\mathbf{B}$ را بنویسید و آن را به صورت $B = [\mathbf{1}_l \mid \mathbf{F}]$ درآورید.

پ - تمام کات‌ست‌های اساسی متناظر با شاخه‌درخت‌ها را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۱-۱۷)

ت - ماتریس کات‌ست‌های اساسی $\mathbf{Q}$ را بنویسید و آن را به صورت $\mathbf{Q} = [\,\mathbf{E} \mid \mathbf{1}_n\,]$ درآورید.

ث - درستی رابطهٔ $\mathbf{BQ}^T = 0$ را در این گراف تحقیق کنید.

۱۸- الف - در گراف شکل مسألهٔ ۱۷ چند درخت وجود دارد که حلقه‌های اساسی آنها {۲ , ۸ , ۹ , ۱۰}، {۷ , ۱۰ , ۱۱ , ۱۲} و {۲ , ۶ , ۷ , ۸ , ۱۰} باشند؟ همهٔ درختها را مشخص کنید.

ب - درختی چنان انتخاب کنید که کات‌ست‌های اساسی آن به صورت {۱ , ۶ , ۸ , ۹}، {۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۱۱}، {۳ , ۵ , ۶ , ۹ , ۱۰ , ۱۱} و {۳ , ۴ , ۱۱ , ۱۲} باشد. همهٔ درختها را مشخص کنید.

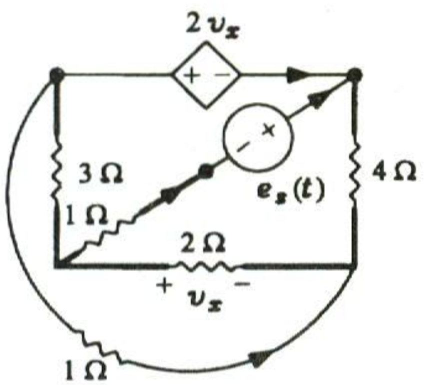
۱۹- در گراف شکل مسألهٔ ۱۷ درختی چنان انتخاب کنید که حلقه‌های اساسی آن کمترین اشتراک را با مش‌های گراف داشته باشد. این کمترین اشتراک چندتا است؟

۲۰- الگوریتمی برای ایجاد تمام درخت‌های یک گراف به طور خودکار به دست آورید به قسمی که اجرای کامپیوتری این الگوریتم یا شمارهٔ شاخه‌های هر درخت را مشخص کند و/ یا شکل درخت مورد نظر از گراف را رسم کند.

۲۱- فرض کنید گراف‌های $\mathcal{G}$ و $\hat{\mathcal{G}}$ دوگان یکدیگر باشند و T یک درخت از گراف $\mathcal{G}$ باشد. آیا شاخه‌های متناظر T در گراف $\hat{\mathcal{G}}$ تشکیل درختی از $\hat{\mathcal{G}}$ می‌دهند؟ آیا تشکیل لینک‌های یک درخت می‌دهند؟

Prozhefa.com

۲۲- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۲) شاخه‌درخت‌ها با خطوط سیاه و لینک‌ها با خطوط نازک نشان داده شده‌اند. معادلات این مدار را براساس روش حلقه‌های اساسی به طور نظری بنویسید. معادلات را حل نکنید و آنها را به صورت ماتریسی درآورید که متغیرهای آن جریان حلقه‌های اساسی باشد.



شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۲)

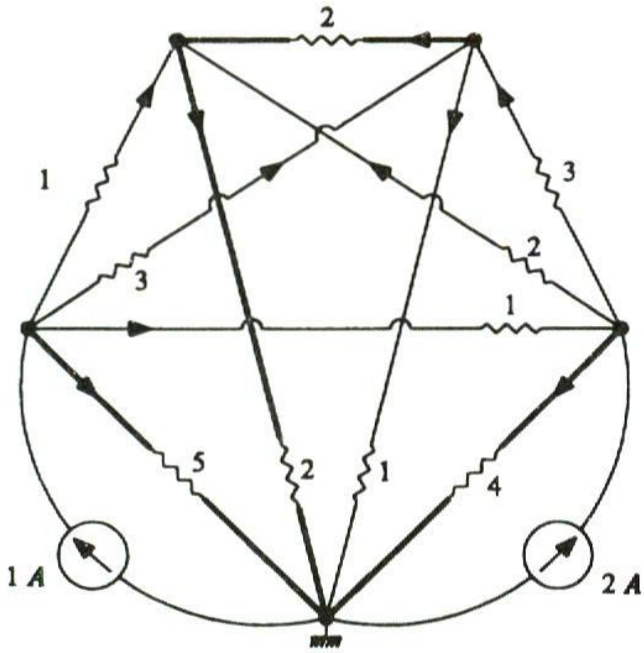
۲۳- مدار شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۳) دارای گراف نامسطح کورتافسکی است. رسانایی‌ها برحسب مهو داده شده‌اند.

الف - معادلات گره را بنویسید و از حل آنها ولتاژهای گره را به دست آورید.

ب - درختی مرکب از شاخه‌های سیاه انتخاب کنید. ماتریس‌های حلقه‌های اساسی و کات‌ست‌های اساسی را بنویسید.

پ - معادلات حلقه و معادلات کات‌ست را در شکل ماتریسی بنویسید و از حل معادلات مربوط به کات‌ست، درستی جوابهای بند (الف) را تأیید کنید.

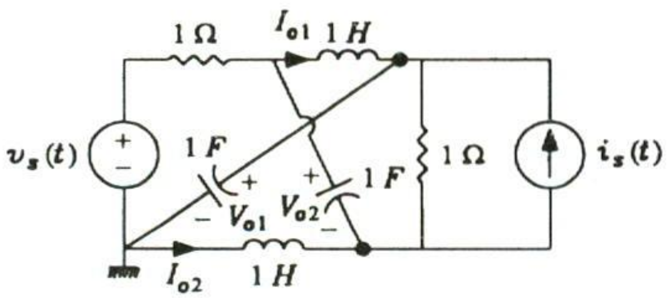
ت - بردار ولتاژ لینک‌ها را برحسب ولتاژ شاخه‌درخت‌ها و بردار جریان شاخه درخت‌ها را برحسب جریان لینک‌ها به صورت ماتریسی بنویسید.



شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۳)

۲۴- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۴) فرض کنید منبع جریان $i_s(t)$ شیب واحد و منبع ولتاژ $v_s(t)$ پلهٔ واحد باشند. درختی متشکل از دو خازن و سلف پایینی را در نظر بگیرید.

الف - معادلات انتگرال دیفرانسیل حلقه را براساس درخت انتخاب شده بنویسید و شرایط اولیه را مشخص کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۴)

Prozhefa.com

ب ـ معادلات انتگرال دیفرانسیل کات‌ست را براساس درخت انتخاب شده بنویسید و شرایط اولیه را مشخص کنید.

۲۵ـ در مدار شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۵) درختی مرکب از خازنهای C_1 ، C_2 ، C_3 و C_4 انتخاب کنید.

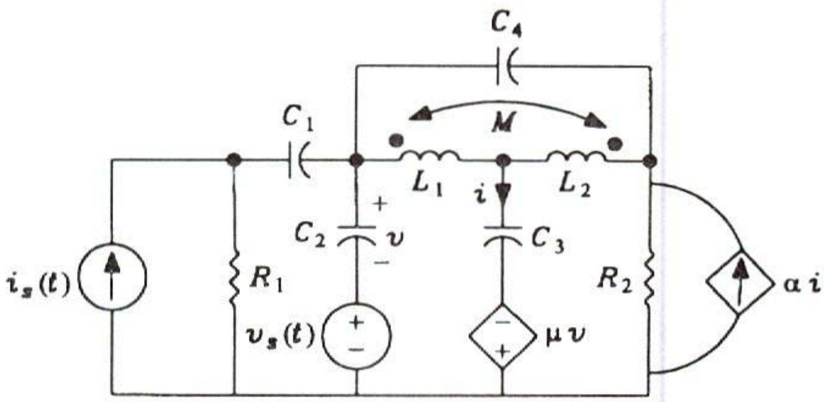
الف ـ ماتریس حلقهٔ اساسی **B** و ماتریس کات‌ست اساسی **Q** را برای درخت فوق بنویسید.

ب ـ با استفاده از روش منظم تحلیل حلقه، معادلات این مدار را به صورت انتگرال دیفرانسیل بنویسید و شرایط اولیه را مشخص کنید. (با فرض تمام شرایط اولیهٔ غیرصفر)

پ ـ با استفاده از روش میانبر معادلات حلقه را به طور نظری بنویسید.

ت ـ با استفاده از روش منظم تحلیل کات‌ست، معادلات انتگرال دیفرانسیل مدار را بنویسید و شرایط اولیه را مشخص کنید.

ث ـ با استفاده از روش میانبر معادلات کات‌ست را به طور نظری بنویسید.



شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۵)

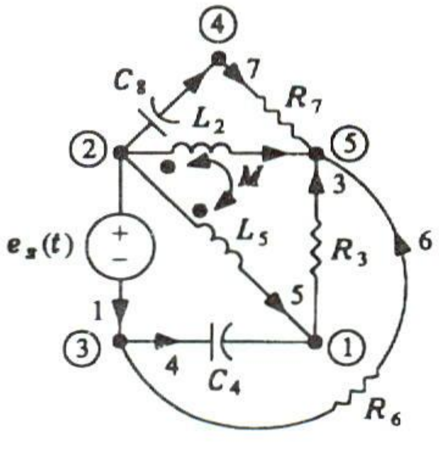
۲۶ـ الف ـ برای مدار شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۶) درخت مرکب از شاخه‌های ۳ ، ۵ ، ۶ ، ۷ را انتخاب کرده، حلقه‌های اساسی را مشخص کنید و ماتریس حلقه‌های اساسی **B** را بنویسید.

ب ـ برای همان درخت کات‌ست‌های اساسی را مشخص کرده و ماتریس کات‌ست‌های اساسی **Q** را بنویسید.

پ ـ روابط میان **B** و **Q** را تحقیق کنید.

ت ـ معادلات انتگرال دیفرانسیل حلقه را با روش نظری بنویسید. (برای درخت انتخاب شدهٔ بالا)

ث ـ معادلات انتگرال دیفرانسیل کات‌ست را بنویسید.



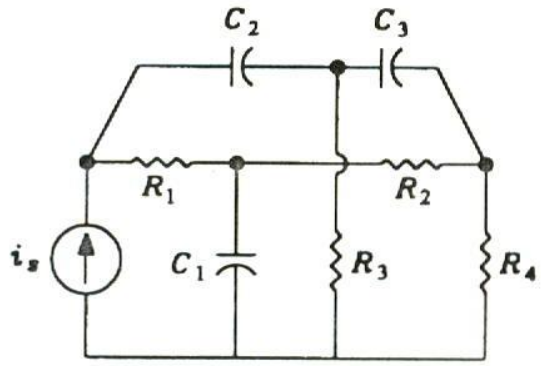
شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۶)

Prozhefa.com

۲۷ـ **الف ـ** در مدار شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۷) درختی چنان انتخاب کنید که حلقه‌های اساسی آن به صورت $i_sR_1C_1$ ، $C_1R_1C_2R_3$ ، $C_1R_2R_4$ و $C_2C_3R_2R_1$ باشند. در صورتی که انتخاب چنین درختی مقدور نباشد، توضیح کافی بدهید.

ب ـ قسمت الف را برای حلقه‌های اساسی $i_sR_1C_1$ ، $C_1R_1C_2R_3$ ، $R_3C_3R_4$ و $R_1R_2C_2C_3$ حل کنید.

پ ـ دوگان مدار شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۷) را رسم کنید.

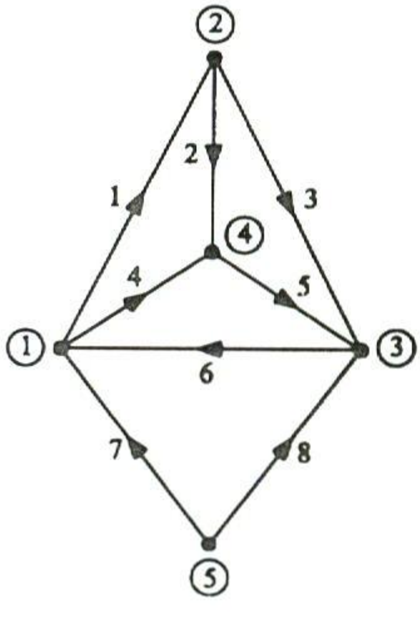


شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۷)

۲۸ـ **الف ـ** تمام درختهای ممکن گراف شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۸) را تعیین و رسم کنید. تعداد آنها چندتا است؟

ب ـ ماتریس تلاقی گره با شاخه‌های این گراف یعنی **A** را بنویسید و سپس دترمینان ماتریس $\mathbf{AA}^T$ را حساب کنید و عملاً نشان دهید که تعداد درختهای این گراف برابر $\det(\mathbf{AA}^T)$ است.

پ ـ ماتریس حلقه‌های اساسی متناظر با درخت مرکب از شاخه‌های ۱ ، ۲ ، ۵ و ۸ یعنی **B** را بنویسید و سپس دترمینان ماتریس $\mathbf{BB}^T$ را حساب کنید. در مورد این دترمینان چه می‌توانید بگویید؟



شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۸)

ت ـ آیا درختی وجود دارد که کات‌ست‌های اساسی آن همان شاخه‌های وصل شده به گره‌ها باشد؟ یعنی ماتریس **A** مساوی ماتریس **Q** باشد؟ آن را مشخص کنید. چند تا از چنین درختهایی وجود دارد؟

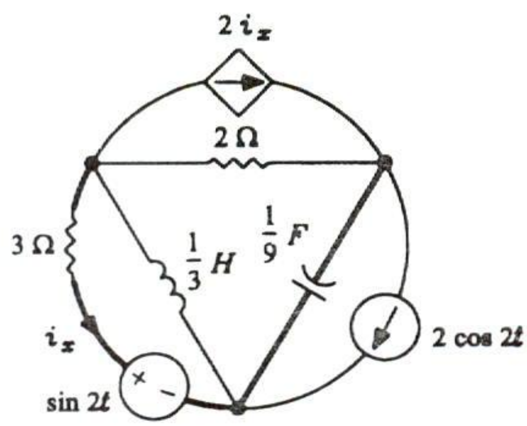
ث ـ در مثال فوق نشان دهید $\mathbf{BA}_a{}^T = 0$ و $\mathbf{A}_a\mathbf{B}^T = 0$. آیا چنین رابطه‌ای در حالت کلی برقرار است؟ در صورت مثبت بودن جواب درستی آن را نشان دهید.

۲۹ـ در مدار شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۹) درختی مرکب از خازن و منبع ولتاژ و مقاومت سه اهمی انتخاب کنید.

الف ـ معادلات حالت دایمی سینوسی حلقه را با توجه به حلقه‌های اساسی متناظر با درخت انتخاب شده بنویسید و آنها را به صورت ماتریسی درآورید.

Prozhefa.com

ب ـ معادلات حالت دایمی سینوسی کات‌ست را با توجه به کات‌ست‌های اساسی متناظر با درخت انتخاب شده بنویسید و آنها را به صورت ماتریسی درآورید.

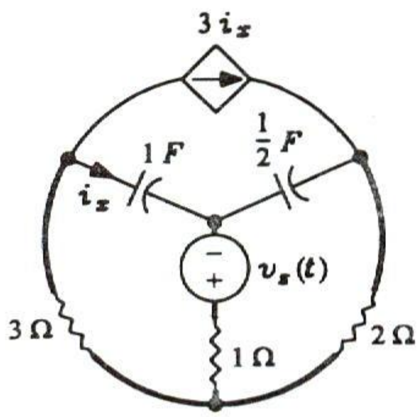


شکل (مسألهٔ ۱۱-۲۹)

۳۰- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۱-۳۰) درختی مرکب از شاخه‌های مقاومتی و منبع ولتاژ نابسته انتخاب کنید.

الف ـ معادلات انتگرال دیفرانسیل حلقه را براساس حلقه‌های اساسی این درخت بنویسید.

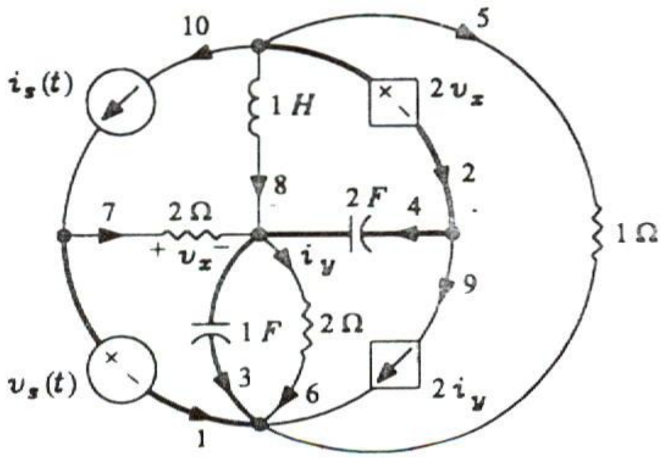
ب ـ معادلات انتگرال دیفرانسیل کات‌ست را براساس کات‌ست‌های اساسی این درخت بنویسید. (شرایط اولیه را صفر فرض کنید.)



شکل (مسألهٔ ۱۱-۳۰)

۳۱- شاخه‌های مدار نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۱۱-۳۱) شماره‌گذاری شده‌اند تا انتخاب درخت و لینک‌ها را راحت‌تر کند.

الف ـ درختی مرکب از شاخه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ انتخاب کنید. معادلات حلقه‌های اساسی را بنویسید و ولتاژ لینک‌ها را برحسب ولتاژ شاخه‌درختها بیان کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۱-۳۱)

ب ـ کات‌ست‌های اساسی متناظر با درخت داده شده را مشخص کرده و معادلات آنها را بنویسید. جریان شاخه درخت‌ها را برحسب جریان لینک‌ها بیان کنید.

پ ـ معادلات انتگرال دیفرانسیل حلقه را به طور نظری برای حلقه‌های اساسی مشخص شده

Prozhefa.com

در بند (الف) بنویسید و شرایط اولیه را برحسب ولتاژ اولیهٔ خازنها و جریان اولیهٔ سلف مشخص کنید.

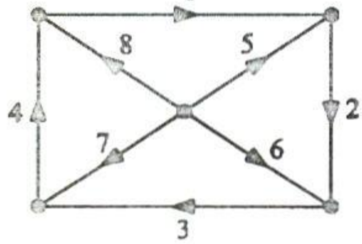
ت ـ معادلات انتگرال دیفرانسیل کات‌ست را به‌طور نظری برای کات‌ست‌های اساسی مشخص شده در بند (ب) بنویسید و شرایط اولیه را برحسب ولتاژ اولیهٔ خازنها و جریان اولیهٔ سلف مشخص کنید.

۳۲ـ اگر ابتدا شاخه درخت‌های یک گراف و سپس لینک‌های آن را شماره‌گذاری کنیم، ماتریس تلاقی این گراف را می‌توان به صورت زیر تفکیک کرد:

$$A = [\, A_t \; \vdots \; A_l \,]$$

نشان دهید که ماتریس مربعی $n \times n$ ، A_t یک ماتریس ناویژه (nonsingular) است و این روش اثبات دیگری برای نشان دادن رتبهٔ ماتریس تلاقی A است. آیا عکس این قضیه نیز صادق است؟ چرا؟

۳۳ـ با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۳۲ و قضیهٔ Cauchy-Binet در مورد دترمینان حاصلضرب دو ماتریس نشان دهید که تعداد درختهای یک گراف از رابطهٔ $\det(AA^T)$ داده می‌شود (A ماتریس تلاقی است) با استفاده از این نتیجه، تعداد درختهای گراف شکل (مسألهٔ ۱۱-۳۳) را حساب کنید و همهٔ درختها را رسم کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۱-۳۳)

۳٤ـ فرض کنید در ماتریس‌های تلاقی A و حلقهٔ اساسی B یک گراف، ستونها به ترتیب یکسان مرتب شده باشند. ثابت کنید:

$$AB^T = 0 \qquad \text{و} \qquad BA^T = 0$$

۳۵ـ با استفاده از نتایج مسائل ۳۲ و ۳۴، ماتریس حلقهٔ اساسی B را برحسب ماتریس تلاقی بنویسید.