



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

---

SEDE BOGOTÁ  
FACULTAD DE INGENIERÍA

Presentación No. 1  
2016

## **Robot RP**

Servomecanismos

*Pedro Arturo Estupiñan Gómez, Juan Sebastian  
Martinez Rugeles, Daniel Felipe Ordoñez Apraez*

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Presentación del Mecanismo</b>	<b>3</b>
<b>3. Perfiles de velocidad y posición</b>	<b>4</b>
<b>4. Análisis de articulación rotacional</b>	<b>10</b>
4.1. Descripción . . . . .	10
4.2. Análisis de torque . . . . .	11
4.3. Selección del actuador . . . . .	13
<b>5. Análisis de articulación prismática</b>	<b>17</b>
5.1. Análisis de Tornillo de Transmisión de Potencia . . . . .	18
5.2. Calculo de Inercia total . . . . .	19
5.3. Torque gravitacional y de fricción . . . . .	20
5.4. Perfiles de velocidad, aceleración y torque caso estático . . . . .	21
5.5. Perfiles de velocidad, aceleración y torque caso dinámico . . . . .	23
5.6. Selección del Actuador . . . . .	26
<b>6. Video de funcionamiento</b>	<b>29</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>29</b>
<b>8. Bibliografía</b>	<b>30</b>
<b>9. Índice de Figuras y Tablas</b>	<b>31</b>
<b>10. Anexos</b>	<b>32</b>
10.1. Plano del ensamble principal . . . . .	32

## 1. Introducción

Este documento presenta el avance del proyecto de la asignatura Servomecanismos, dicho proyecto consiste en el diseño, construcción y control de un robot de dos grados de libertad, cuyas articulaciones son rotacional y prismática.

Con la construcción del mecanismo se pretende lograr trazar una trayectoria predefinida con el efector final, el cual deberá plasmar esta misma sobre un tablero a través de un marcador o lapicero.

Durante el proceso de diseño se obtuvieron los perfiles de posición, velocidad y aceleración que regirán ambas articulaciones, se calculó de igual manera el torque aproximado que deberá ofrecer el actuador de cada una de estas, y a su vez se seleccionaron los sensores apropiados para lograr cerrar el lazo de control de manera fructuosa.

Para la construcción de la estructura de soporte se utilizó impresión 3D, con material plástico ABS, para los acoples de ejes de rotación y transmisión de fuerza se mecanizaron las piezas en aluminio.

## 2. Presentación del Mecanismo

En el anexo encontrará el plano del ensamble principal con indicación de las partes importantes que componen el mecanismo, deberá ayudarse de este para comprender el funcionamiento del sistema.

El robot se compone de dos articulaciones

- Rotacional: El dominio de la variable articular de esta articulación se restringe de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , y se pretende sensar la rotación a través de un potencio-metro lineal de 1.2 vueltas, resistencia máxima de  $50k\Omega$  y un ADC de 10bits.
- Prismática: Se compone de un micro-motor de baja inercia que transmite rotación a un tornillo de transmisión de potencia, el cual traduce el movimiento giratorio en longitudinal, dicho movimiento rige el efector final que llevará consigo un marcador o lapicero con el objetivo de demarcar la trayectoria realizada.

La variable articular longitudinal se pretende sensar a partir de un encoder con sensibilidad de  $\pm 5^\circ$ .

El tornillo de transmisión de potencia tiene rosca ACME de  $30^\circ$  y cuatro entradas, con un paso nominal de  $8 \frac{mm}{rev}$ .

### 3. Perfiles de velocidad y posición

Para la definición de los perfiles de posición y velocidad, es necesario tener definido claramente la trayectoria recorrida por el mecanismo como tal, y por lo tanto, se explicará la parametrización de la trayectoria en primera instancia.

Puesto que la trayectoria de *trébol estilizado* es simétrica y cerrada, entonces se optó por tratarla en coordenadas polares, donde tenemos un ángulo  $\theta$  que se recorre entre 0 y  $2\pi$  y un radio que varía en función del ángulo. Dado que el radio necesariamente tenía que oscilar entre un valor máximo y un mínimo, se definió la función mediante el concepto de Rosa polar [4]. Dado que la fórmula de rosa polar esta expresada como:

$$r(\theta) = a \cdot \cos(k\theta + \phi_0) \quad (1)$$

Donde  $a$  representa el tamaño de la rosa,  $k$  la cantidad de pétalos, y  $\phi_0$  el ángulo de rotación de la misma.

Como una primera aproximación a la trayectoria se usó la ecuación:

$$r(\theta) = 15 \cdot \cos(2\theta + \frac{\pi}{2}) \quad (2)$$

Lo que produce la figura 1 :

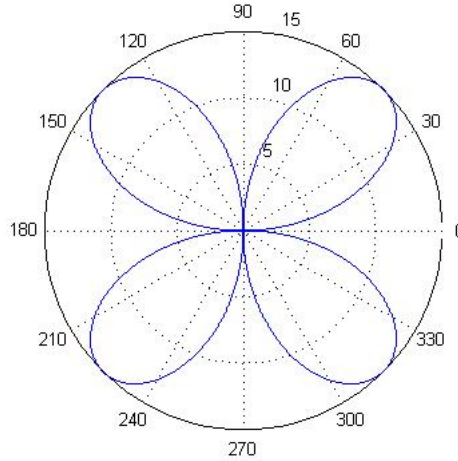


Figura 1: Rosa Polar de cuatro pétalos

Una vez descartada esta figura, pues siempre cruza al origen, se planteó la necesidad de definir el trébol como un círculo al que se le resta una rosa de ocho pétalos, estas representaciones se observan en las figuras 2 y 3.

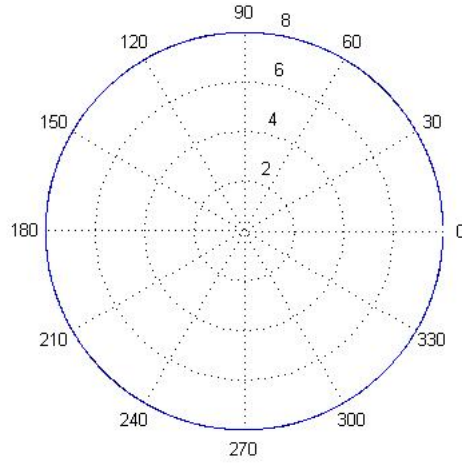


Figura 2: Circulo base

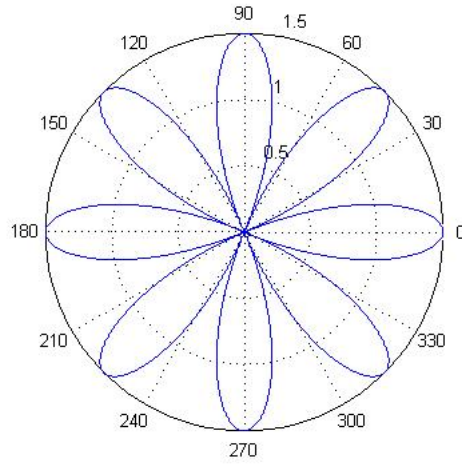


Figura 3: Rosa Polar de ocho pétalos

Aunque en primera instancia se piensa que el trébol debería tener un mínimo cada  $\frac{\pi}{4}rad$ , lo que sucede es que los valores de las diagonales para la rosa son negativos, es decir, no representan un máximo sino un mínimo y por tanto producirán un máximo en el trébol deseado. La parametrización final se observa en la figura 4. La fórmula correspondiente al radio del trébol está dada así:

$$r(\theta) = 8 - 1,5\cos(4 \cdot \theta) \quad (3)$$

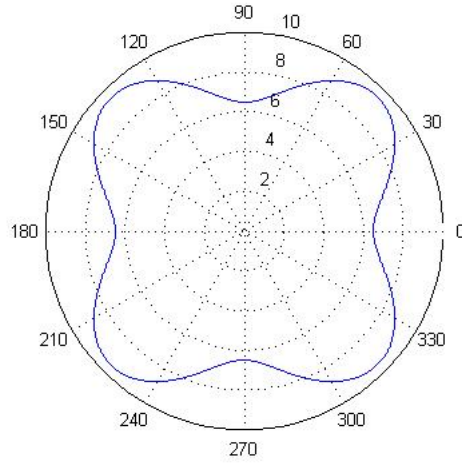


Figura 4: Parametrización trébol estilizado

Una vez definida la trayectoria del mecanismo, es necesario definir el punto de origen, lo que a su vez define el tamaño de la articulación prismática para que ésta pueda recorrer toda la trayectoria. Puesto que uno de los requerimientos del proyecto exige que el efector final se encuentre fuera del espacio de trabajo, se decide como la posición inicial la mostrada en la Figura 5, donde además se tomará como referencia el punto más alejado para realizar el cálculo de la longitud de la articulación prismática. Cabe destacar que se deja un espacio de  $5\text{cm}$  en ambas direcciones por si se desea implementar un trébol ligeramente mas amplio.

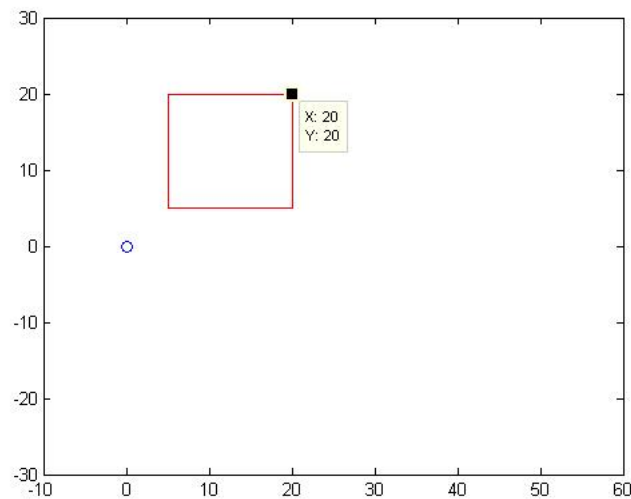


Figura 5: Ubicación del efector final

La ubicación del mecanismo se calcula mediante geometría asumiendo que éste se encuentra ubicado en una posición  $(0, -L)$  y teniendo en cuenta que se debe cumplir que la distancia entre la base del mecanismo y el punto más alejado, en nuestro caso  $(20, 20)$  es menor que el doble de la longitud de la articulación prismática. Tomando en cuenta estas consideraciones tenemos:

$$\begin{aligned}
2L &> \sqrt{20^2 + (20 + L)^2} \\
2L &> \sqrt{L^2 + 40L + 800} \\
4L^2 &> L^2 + 40L + 800 \\
L &> 24,3cm
\end{aligned} \tag{4}$$

Se decide entonces tomar una longitud  $L = 25cm$  y además definir el origen coordenado del mecanismo en la base del mismo como se observa en la figura 6:

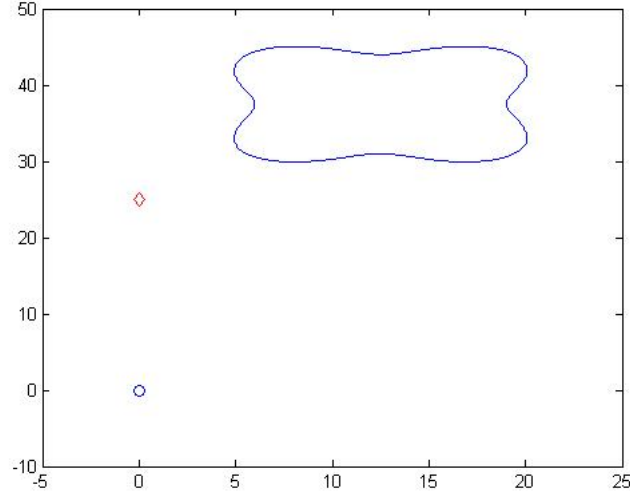


Figura 6: Ubicación planar del mecanismo y su área de trabajo

Una vez definido claramente el origen del sistema coordenado, se realiza la respectiva traslación de la parametrización al nuevo sistema coordenado, ésto se consigue expresando cada punto así:

$$\begin{aligned}
x &= r \cdot \cos(\theta) + 12,5 \\
y &= r \cdot \sin(\theta) + 37,5
\end{aligned} \tag{5}$$

En la figura 6 el trébol está representado basándose en la traslación del sistema coordenado.

En base a la ecuación 5, podemos hallar el valor en cada una de las articulaciones convirtiendo el sistema a coordenadas polares, por tanto nuestras variables articulares están definidas como:



$$\begin{aligned} Prismatic &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ Rotational &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

En este momento gracias a herramientas matemáticas como Matlab ya se tiene una primera aproximación a los perfiles de posición, pero estos perfiles no están directamente relacionados a una escala de tiempo, ni tampoco cumplen con la condición de que el efector final se mueva con velocidad tangencial constante.

Para solucionar estos dos inconvenientes lo que se realizó fue definir intervalos de tiempo  $dt$  constantes, y puesto que la velocidad tangencial es constante y se define como:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (7)$$

Siendo  $x$  el desplazamiento, entonces éste también debería ser constante; pero debido a que las herramientas computacionales trabajan en intervalos discretos, es imposible encontrar los desplazamientos exactos. Por lo tanto el procedimiento utilizado fue dividir el trébol en la mayor cantidad de puntos posibles, y una vez obtenidos estos, empezar a recorrerlos en pares, de manera que uno estuviera fijo y el otro se mueva por la figura; si el punto móvil garantiza un  $\Delta x$  mayor a cierto valor, el punto se agregará a la trayectoria y se tomará como el punto fijo ahora, pero si el desplazamiento no supera ese valor, simplemente el punto se descartará y el punto móvil avanzará al siguiente. Además como cada punto está representado tanto en coordenadas cartesianas como coordenadas articulares, al hacer este procedimiento se garantiza que se pueda calcular la variación en las articulaciones numéricamente. Los respectivos perfiles de velocidad y posición se muestran en la figura 7.

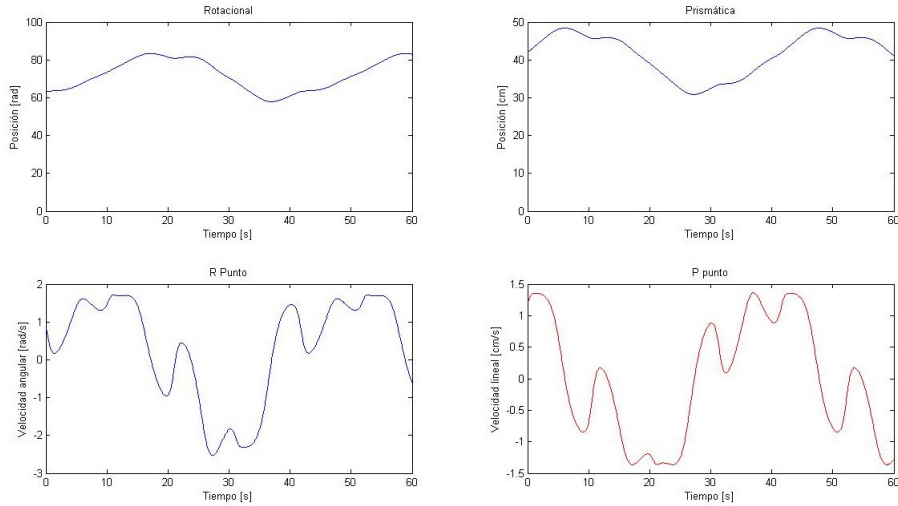


Figura 7: Perfiles de posición y velocidad para cada articulación

En la figura 8 se muestra la trayectoria obtenida después de realizar el respectivo muestreo sobre la parametrización propuesta inicialmente.

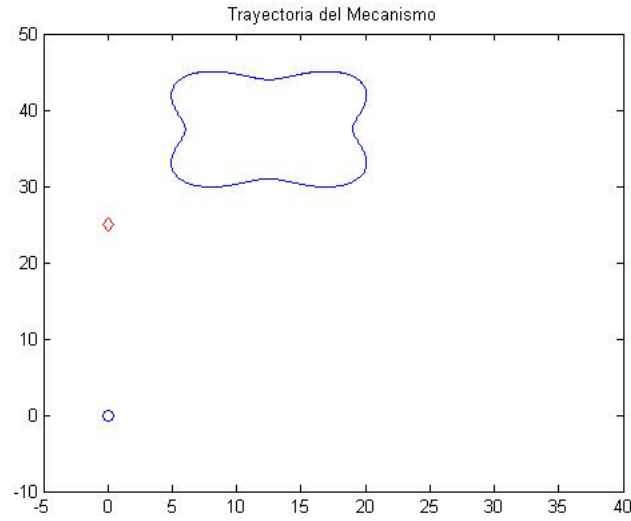


Figura 8: Trayectoria descrita por el mecanismo para esta discretización

## 4. Análisis de articulación rotacional

### 4.1. Descripción

Elemento	Cantidad	Masa [g]	Descripción
Moto-reductor	1	65	Moto-reductor de bajas revoluciones y torque de $4kg$
Rodamiento 6200-Z	2	35	Rodamiento de bolas de una fila
Potenciómetro lineal	1	18	Sensor que obtiene la posición de la junta rotacional
Estructura soporte del motor	1	28	Estructura impresa en ABS que sostiene el motor a presión
Soporte del potenciómetro	1	21	Soporte del lado contrario al motor
Barras de soporte	2	25	Barras de acero que ayudan a soportar cargas
Acople motor - junta prismática	1	12	Acople entre el eje del motor y la estructura de la junta prismática
Acople potenciómetro - junta prismática	1	12	Acople que permite al potenciómetro moverse junto con el mecanismo
Tornillos prisioneros	4	1	Tornillos que aseguran los diferentes elementos entre ellos
Estructura prismática	1		Ver Cuadro 2

Cuadro 1: Componentes articulación rotacional

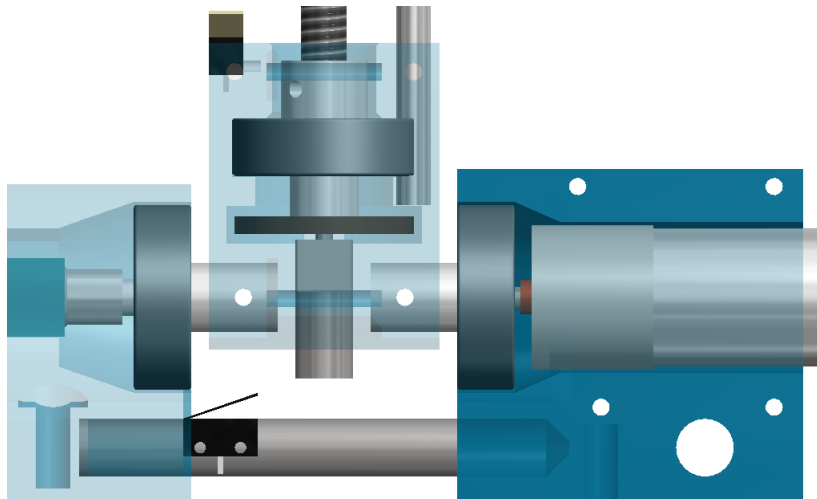


Figura 9: Modelo de la junta rotacional

## 4.2. Análisis de torque

Para la articulación rotacional, existe un torque inercial debido a la aceleración del mecanismo a la hora de realizar el movimiento, un torque gravitacional debido a las masas que debe soportar el motor, y un torque de fricción causado principalmente por el rozamiento tanto de los rodamientos, como del potenciómetro lineal.

Para encontrar el torque inercial, hallamos las inercias de los diferentes elementos del sistema.

$$\begin{aligned} &Tornillo \\ &r = 0,4cm \\ &l = 25cm \\ &m = 99g \end{aligned} \quad (8)$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot (0,099kg) \cdot (0,25m)^2 = 2,1 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

$$\begin{aligned} &Barrasdealuminio \\ &r = 0,2cm \\ &l = 25cm \\ &m = 8,5g \end{aligned} \quad (9)$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot (0,0085kg) \cdot (0,25m)^2 = 1,77 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$$

Se tomaron las piezas de la impresión en ABS como puntuales a la hora de calcular el torque a lo largo de la trayectoria.

El torque inercial está dado por la aceleración requerida en cada punto; además de las inercias del mecanismo las cuales varían dependiendo de la posición de la articulación prismática debido al teorema de Steiner.

La formula para hallar el torque inercial en cierto momento de la trayectoria, está dada por

$$\begin{aligned} T_{inercial} = \alpha * (I_{tornillo} + I_{varillas} + (distancia_{efectorFinal}/100)^2 * (m_{marcador} + m_{abs}) \\ + 2 * (I_{varillas} + (distancia_{efectorFinal} - 25)/100)^2 * (m_{varillas})); \end{aligned} \quad (10)$$

Donde  $distancia_{efectorFinal}[cm]$  es la distancia entre el eje del motor rotacional y el efector final. Esta distancia se menciona como P en las gráficas obtenidas.

Ahora se calcula el torque gravitacional

$$\begin{aligned} T_{gravitacional} = \cos(\theta) * (9,8) * ((m_{tornillo} + m_{varillas}) * L/2 + \\ (2 * m_{varillas}) * (distancia_{efectorFinal}/100 - L/2) \\ + m_{abs} * L + m_{abs} * (distancia_{efectorFinal}/100) + m_{marcador} * distancia_{efectorFinal}/100); \end{aligned} \quad (11)$$

Con los torque obtenidos, y teniendo en cuenta los diferentes valores que toman las variables a lo largo de la trayectoria, obtenemos:

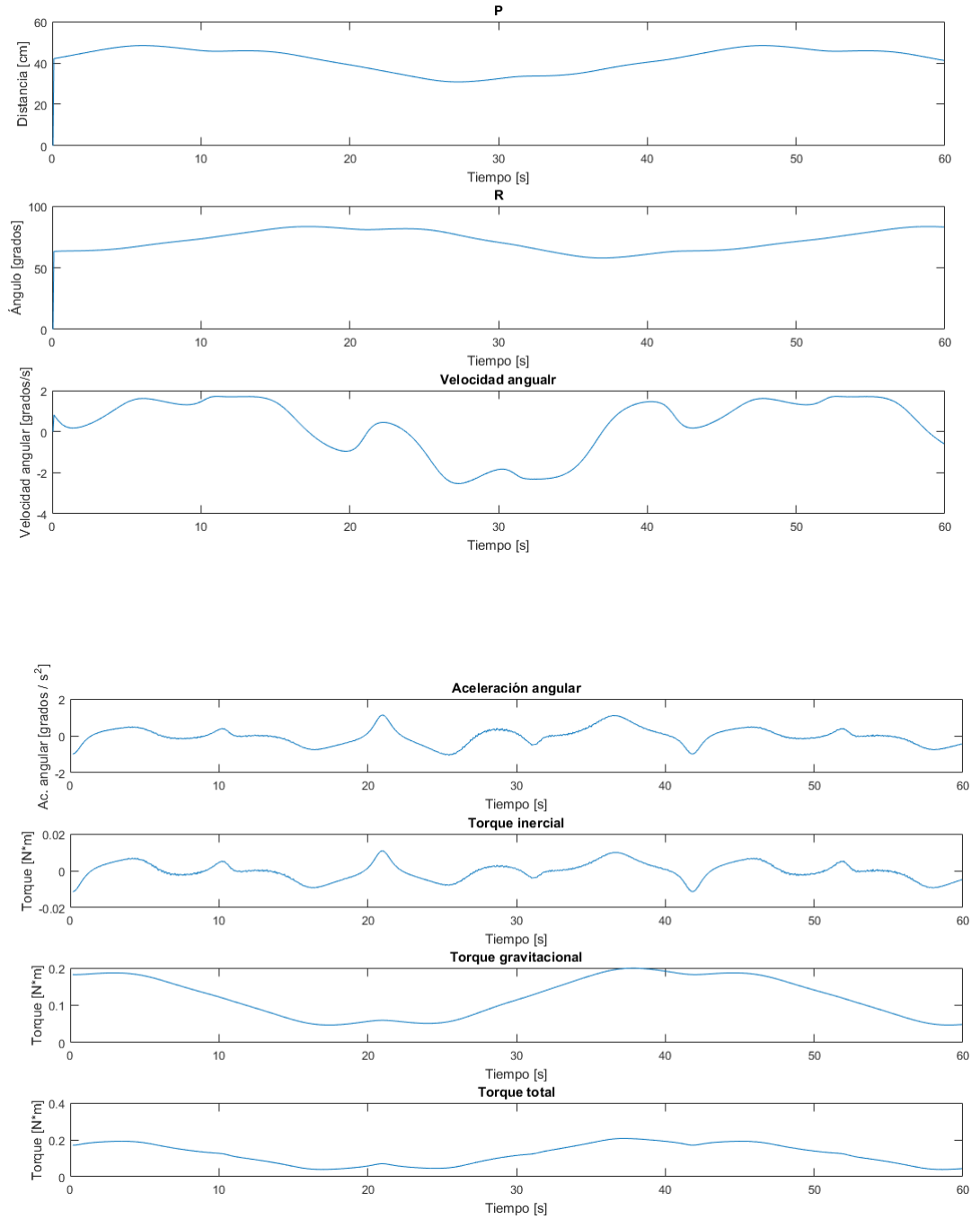


Figura 10: Perfiles de torque del motor rotacional

### 4.3. Selección del actuador

Con los perfiles de torque obtenidos y teniendo en cuenta que el torque total calculado se puede ver afectado por factores no conocidos como la fricción causada por los rodamientos, el potenciómetro y demás elementos; se decidió optar por un factor de seguridad de 2.

Con esto, obtenemos un torque pico de  $440 \text{ mNm}$ .

La velocidad angular pico es de  $3 \text{ grados/s}$ ; lo que se traduce a  $0,5 \text{ rpm}$ . Con estas especificaciones, se puede escoger del catálogo de Maxon Motors, se escogió un motor con la mayor reducción que se podía encontrar en motores con un torque mayor al torque pico solicitado. Se escogió una reducción planetaria con radio 850:1 que admite un torque de hasta  $0,5 \text{ N} \cdot \text{m}$  y sus especificaciones son:



<b>Datos generales</b>		
	Tipo de reductor	GP
	Diámetro exterior	22 mm
	Versión	Versión de plástico
<b>Datos del reductor</b>		
	Relación de reducción	850 : 1
	Relación de reducción absoluta	531441/625
	Máx. diámetro del eje del motor	2.5 mm
	Número de etapas	4
	Máx. par en continuo	0.5 Nm
	Par de fuerza admisible brevemente	0.7 Nm
	Sentido de giro, de motor a eje de salida	=
	Máx. rendimiento	49 %
	Holgura media del reductor sin carga	2 °
	Momento de inercia	0.4 gcm <sup>2</sup>
	Longitud del reductor (L1)	43.1 mm
	Máx. potencia transmisible en continuo	0.37 W
	Máx. potencia transmisible brevemente	0.52 W
<b>Datos técnicos</b>		
	Juego radial	máx. 0.2 mm, 10 mm desde la brida
	Juego axial	0 - 0.2 mm
	Máx. carga radial	30 N, 10 mm desde la brida
	Máx. carga axial (dinámica)	20 N
	Máx. fuerza axial de montaje a presión	100 N
	Máx. velocidad de entrada en continuo	6000 rpm
	Máx. velocidad de entrada brevemente	6000 rpm
	Rango de temperatura recomendado	-15...+80 °C
	Número de ciclos de esterilización	0
<b>Producto</b>		
	Peso	51 g

Figura 11: Selección de motores Maxon junta rotacional : Reducción

Ahora, debemos encontrar un motor que cumpla también con los requerimientos. Si trasladamos la inercia calculada de  $440mNm$  al eje del motor pasando por la transmisión, obtenemos:

$$T = \frac{1}{N^2} \cdot T_{reduccion} = \frac{1}{850} \cdot 440 = 0,517mNm \quad (12)$$

El motor de más bajo costo que cumple con las especificaciones, es un motor de voltaje nominal de 6 voltios, un par nominal de 10.3 mNm y una velocidad pico de 7500 rpm. Con este se cumplen todas las especificaciones.



<b>Valores a tensión nominal</b>	
Tensión nominal	6 V
Velocidad en vacío	6350 rpm
Corriente en vacío	52.9 mA
Velocidad nominal	4540 rpm
Par nominal (máx. par en continuo)	10.3 mNm
Corriente nominal (máx. corriente en continuo)	1.2 A
Par de arranque	36.3 mNm
Corriente de arranque	4.07 A
Máx. rendimiento	79 %
<b>Datos característicos</b>	
Resistencia entre terminales	1.47 $\Omega$
Inductancia en terminales	0.082 mH
Constante de par	8.91 mNm/A
Constante de velocidad	1070 rpm/V
Relación velocidad/par	177 rpm/mNm
Constante mecánica de tiempo de arranque	4.98 ms
Momento de inercia del rotor	2.68 gcm <sup>2</sup>
<b>Datos térmicos</b>	
Resistencia térmica carcasa-ambiente	17.6 K/W
Resistencia térmica bobinado-carcasa	6.5 K/W
Constante de tiempo térmica del bobinado	11.3 s
Constante de tiempo térmica del motor	312 s
Temperatura ambiente	-40...+85 °C
Máx. temperatura de bobinado	+100 °C
<b>Datos mecánicos</b>	
Tipo de rodamiento/cojinete	Rodamiento de bolas
Velocidad límite	7500 rpm
Juego axial	0 - 0.1 mm
Juego radial	0.02 mm
Máx. carga axial (dinámica)	2.5 N
Máx. fuerza axial de montaje a presión (estática)	30 N
(estático, eje apoyado)	440 N
Máx. carga radial	16 N, 5 mm desde la brida
<b>Más especificaciones</b>	
Número de pares de polos	1
Número de segmentos de colector	9
Número de ciclos de esterilización	0
<b>Producto</b>	
Peso	50 g

Figura 12: Selección de motores Maxon junta rotacional : Motor

Debido a la dificultad que trae el conseguir estos motores, se seleccionó uno más acorde a las necesidades del mecanismo y al costo al cual se podía adquirir.



El motor usado en la articulación rotacional, es un moto-reductor con velocidad máxima de  $75rpm$  y un torque de  $4kg$ . Se hizo la suposición de que las unidades que nos ofrecían los comerciantes de motores, era  $kg/cm$ ; por lo que se hace la conversión:

$$T = 0,22N \cdot m \cdot \frac{100cm}{1m} \cdot \frac{10kg}{1N} = 2,2kg \quad (13)$$

## 5. Análisis de articulación prismática

Esta articulación se compone de:

Elemento	Cantidad	Masa [g]	Descripción
Motor	1	9	Micro-motor de 200RPM con Stall torque $2,9kg \cdot cm$ y corriente máxima de $1,6A$
Reducción	1	0.5	$N = 150.58:1$
Rodamiento 6200-Z	1	35	Rodamiento de bolas de soporte de carga axial y radial
Tornillo de transmisión	1	99	Rosca ACME - $30^\circ$ , cuatro entradas, paso de $8mm \frac{mm}{rev}$
Varillas de guía	3	21	Guían la manzana y al efector final en el movimiento longitudinal.
Acople eje tornillo	1	10	Acople entre el tornillo de transmisión y el eje del motor, a su vez soporta la Rueda del encoder.
Rueda de encoder	1	2	Sensibilidad de $\pm 5^\circ$
Estructura de manzana	1	24	Acopla la manzana con las varillas de guía y el efector final, se compone de manzana de bronce, tornillos de sujeción y prisioneros y buje de bronce
Soporte de Tornillo	1	15	Limitante del desplazamiento longitudinal y soporte mecánico para el tornillo de transmisión, se compone de estructura de ABS, rodamiento KML 625RS, y dos bujes de bronce
Estructura Efector final	1	18	Estructura de soporte para el marcador y el marcador
Estructura prismática ( <i>soporte</i> )	1	51	Estructura de ABS que acopla el rodamiento, motor, acople, encoder, varilla de guía, conectores, acoples con articulación prismática y final de carrera
Final de carrera	1	1	Fin de carrera, limite inferior del dominio de la variable articular

Cuadro 2: Componentes articulación prismática

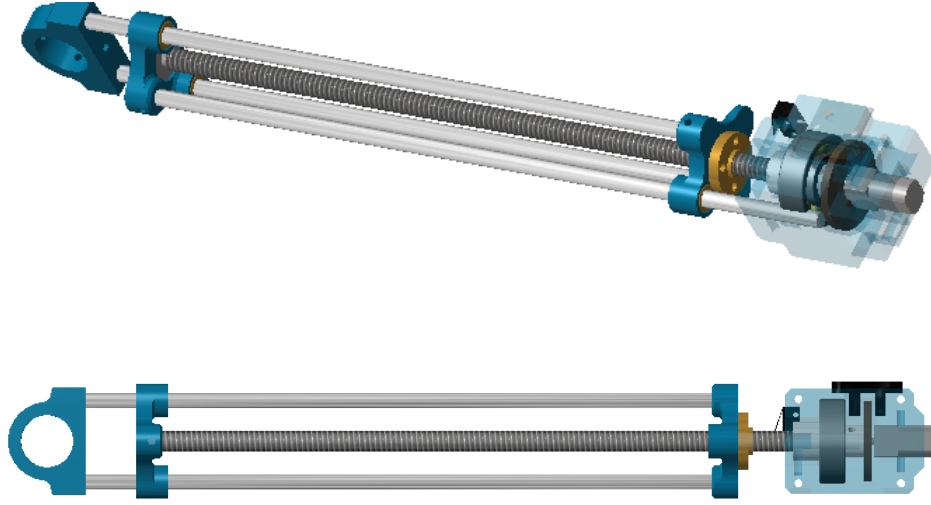


Figura 13: Articulación prismática, ver sección de Anexos para un plano detallado de la estructura

### 5.1. Análisis de Tornillo de Transmisión de Potencia

El paso del tornillo es:

$$l_s = 1,27 \frac{mm}{rad} = 8 \frac{mm}{rev} \quad (14)$$

Por lo que la razón de transmisión característica del tornillo de determina por:

$$N_{screw} = \frac{inputSpeed}{outputSpeed} = \frac{\dot{\theta}[rad/s]}{\dot{x}[mm/s]} = \frac{1 [rad]}{l_s [mm]} \quad (15)$$

Para reflejar la inercia de la carga gravitatoria sobre la manzana se utiliza la ecuación:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \cdot m_l \cdot \dot{x}^2 \\ K &= \frac{1}{2} \cdot m_l \cdot l_s^2 \cdot \dot{\theta}^2 \\ K &= \frac{1}{2} \frac{m_l}{N_{screw}^2} \cdot \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

$m_l$  representa la masa de la estructura que se desplaza sobre el tornillo, su valor es 87g sin carga, 98g con carga

Dado que ahora el termino que acompaña a la velocidad angular debe ser equivalente a la inercia de carga reflejada se comprende entonces que:

$$J_{ref} = \frac{m_l}{N_{screw}^2 \eta} = 137,6g \cdot mm^2 = 1,736e^{-7} kg \cdot m^2 \quad (17)$$

Se analiza el sistema con carga pues representa mayor esfuerzo para el motor  $\eta$ : Eficiencia del tornillo de transmisión, la cual se toma de 0.35 (caso mas critico)

## 5.2. Calculo de Inercia total

Para el cálculo de la inercia total del sistema se analiza:

$$\begin{aligned}
 J &= J_{screw} + J_{ref} + J_{coupling} \\
 J &\approx \frac{1}{2} m_{screw} \cdot r_{screw}^2 + J_{ref} + \frac{1}{2} m_{coupling} \cdot r_{coupling}^2 \\
 J &\approx 7,92 \cdot e^{-7} + 1,736e^{-7} + 1,8 \cdot e^{-7} \\
 J &\approx 1,15 \cdot e^{-6} [kg \cdot m^2]
 \end{aligned} \tag{18}$$

*coupling hace referencia al acople que permite la transmisión de rotación entre el eje del motor y el tornillo*

Para el calculo del torque de carga que debe soportar el motor, se analizan las fuerzas que actúan sobre el tornillo de transmisión, en el punto donde se encuentra la manzana.

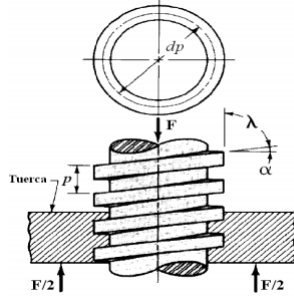


Figura 14: Fuerzas que experimenta el tornillo de transmisión en el punto donde se encuentra la tuerca o manzana

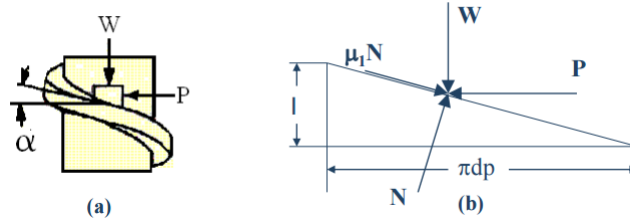


Figura 15: Fuerzas que experimenta el tornillo de transmisión en el punto donde se encuentra la tuerca o manzana, P: representa la carga necesaria para producir movimiento hacia la izquierda, dando lugar a que tienda a desplazarse hacia arriba, N: es la fuerza normal entre la tuerca y el tornillo, W: es la carga externa.

Debido a que el tornillo seleccionado es de 4 entradas se deben realizar consideraciones a la hora de hallar  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \arctan \frac{l}{\pi \cdot d_p} \\
 \alpha &= \arctan \frac{8mm}{\pi \cdot d_p} = 18,75^\circ = 0,32rad
 \end{aligned} \tag{19}$$

Es importante aclarar que se analiza la fricción estática pues esta es normalmente mayor a la fricción viscosa o dinámica, por esto el coeficiente  $\mu_1$  es el coeficiente de fricción estática entre el acero y bronce,  $\mu_1 = 0.22$  [3].

$$\begin{aligned}\sum F_H &= P - \mu_1 N \cos \alpha - N \sin \alpha - W_H = 0 \\ \sum F_V &= W_V - \mu_1 N \sin \alpha - N \cos \alpha = 0\end{aligned}\tag{20}$$

*V: es el eje longitudinal, paralelo al eje de rotación del tornillo*  
*H: es el eje perpendicular al eje de rotación del tornillo*

En el sistema se debe considerar la rotación del tornillo de transmisión de potencia, pues la articulación rotacional esta en serie con la prismática por lo que:

$$\begin{aligned}W &= m_l \cdot g \\ W_V &= W \cdot \sin q_1 \\ W_H &= W \cdot \cos q_1\end{aligned}\tag{21}$$

$q_1$ : Ángulo de rotación de la articulación rotacional

$$\begin{aligned}P &= W \left[ \cos(q_1) + \sin(q_1) \cdot \frac{\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha} \right] \\ N &= \frac{W_V}{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha}\end{aligned}\tag{22}$$

*Se puede apreciar la no linealidad del sistema, pues el torque necesario para romper el equilibrio estable varía con el ángulo de inclinación  $q_1$*

El torque necesario para romper el equilibrio dinámico está expresado por:

$$T_{equilibrium} = P \cdot \frac{d_p}{2}\tag{23}$$

### 5.3. Torque gravitacional y de fricción

Como se puede apreciar en las ecuaciones 22 y 23, estos torques son máximos cuando  $q_1$  es  $90^\circ$ , y debido a que el coeficiente de fricción viscosa es difícil de calcular y obtener empíricamente se utiliza el componente estático, dado que la fricción estática es generalmente mayor a la viscosa o dinámica, cuando las velocidades de operación son bajas, como las que se espera tener en el robot. Es importante incorporar un factor de corrección por el ángulo de la rosca ACME, como lo recomienda [2], ya que la inclinación de la rosca aumenta la

componente gravitacional y de fricción sobre el tornillo.

$$\begin{aligned}
T_{fricc,gravit,subida} &= \frac{P(90^\circ) \cdot d_p}{2\cos\theta} \\
T_{fricc,gravit,subida} &= \frac{P(90^\circ) \cdot d_p}{2\cos(30^\circ)} = 0,598 \cdot W \frac{3,75e^{-3}}{0,866} \\
T_{fricc,gravit,subida} &= \frac{P(90^\circ) \cdot d_p}{2\cos(30^\circ)} = 0,598 \cdot W \frac{3,75e^{-3}}{0,866} = 2,27e^{-3}W \\
T_{fricc,gravit,subida} &= 2,59mN \cdot m
\end{aligned} \tag{24}$$

*Este torque afecta el sistema cuando  $q_1$  es  $90^\circ$  y la carga se esta elevando*

Con el mismo procedimiento se analizan el torque adicional que se debe realizar en el sistema para suplir la componente gravitacional y de fricción cuando la carga va de bajada.

$$T_{fricc,gravit,bajada} = -0,462mN \cdot m \tag{25}$$

*Este torque afecta el sistema cuando  $q_1$  es  $90^\circ$  y la carga se encuentra de bajada, el signo es negativo debido a que en este caso la componente gravitacional apoya el movimiento del motor*

Así se concluye que la orientación del robot en la que más se exige el motor de la articulación prismática es cuando  $q_1$  es  $90^\circ$ , y la curva de torque está definida por:

$$\begin{aligned}
T_{motor,subida} &= J \cdot \alpha + T_{fricc,gravit,subida} \\
T_{motor,bajada} &= J \cdot \alpha - T_{fricc,gravit,bajada}
\end{aligned} \tag{26}$$

$\alpha$ : *representa la aceleración angular del motor de la articulación prismática y por ende del tornillo*

*Cuando la aceleración angular es negativa, significa que se esta intentando frenar el mecanismo y/o disminuir la posición radial, por lo que al torque de motor se le debe disminuir la magnitud del  $T_{fricc,gravit,bajada}$*

#### 5.4. Perfiles de velocidad, aceleración y torque caso estático

Es importante resaltar las diferencias en magnitud de los torques que influyen en el comportamiento de la articulación, como se puede observar los torques de rompimiento del equilibrio estático (*que por definición deberían ser mayores al los torques dinámicos*) son varias veces mayores al torque inercial del sistema; esto se debe primero a que la carga y los materiales del sistema que se desliza sobre el tornillo de transmisión son de muy bajo peso, y la inercia de este sistema deslizante es bastante pequeña cuando se refleja sobre el eje de rotación del motor, posterior a la caja de reducción.

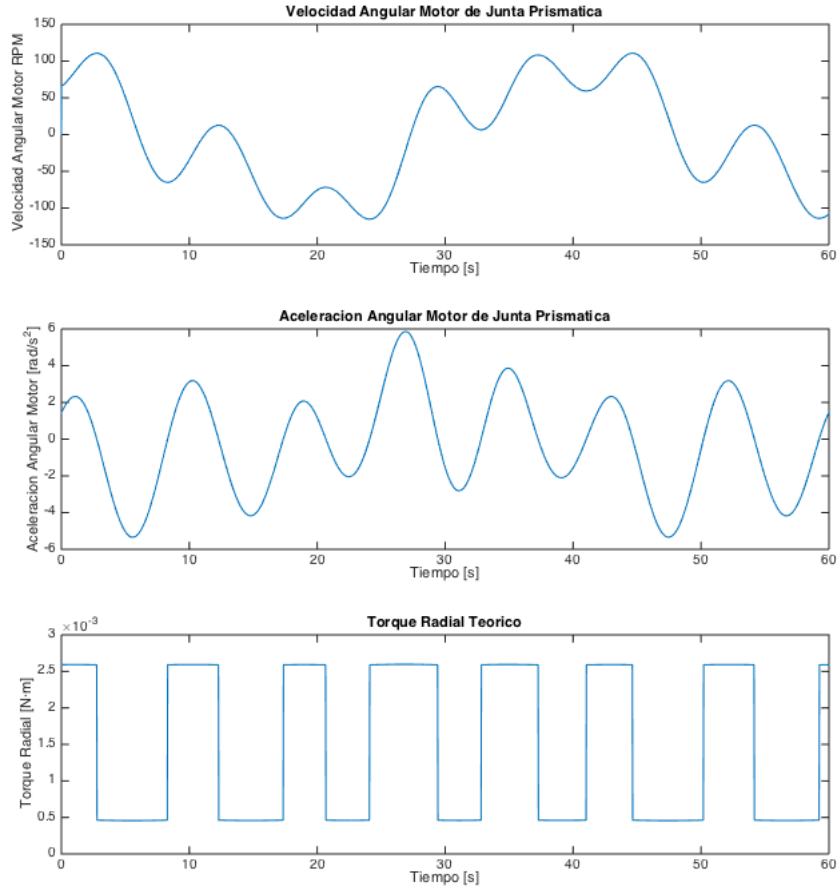


Figura 16: Velocidad angular, aceleración y torque del motor de la articulación prismática

Como se puede apreciar en la Figura 17, el torque teórico que debe ofrecer el motor después de la caja de reducción se ve regido por los torques gravitacional y de fricción máximos esperados, a su vez debido a que no se esta considerando la fricción entre los bujes y las varillas de guia, el sistema es en teoría reversible, dadas las características del tornillo y los materiales implementados *como se confirma siguiendo el análisis de [2]*; por lo que dado que la sumatoria del torque gravitacional y de fricción impulsa los momentos de desaceleración y descenso de la carga, es comprensible que el motor deba realizar un torque para contrarrestar el efecto de la gravedad en cierta proporción.

Parámetro	Magnitud
$T_{rms}$	$18mN \cdot m$
$T_{max}$	$26mN \cdot m$
$\alpha_{max}$	$5,85 \frac{rad}{s^2}$
$\omega_{max}$	$110RPM$
$\omega_{rms}$	$71RPM$

## 5.5. Perfiles de velocidad, aceleración y torque caso dinámico

Para el caso dinámico se procede analizar el sistema modelándolo a partir de dinámica Lagrangiana, para ello se analiza tan solo el Lagrangiano que rige la articulación prismática.

**Definición:**

$$\begin{aligned} q &\in \mathbb{R}^2, q = [q_1, q_2]^T \\ q_1 &\in [0, 180]^\circ \\ q_2 &\in [22, 44]cm \end{aligned} \quad (27)$$

$q_1$ : Representa la posición angular de la articulación rotacional  
 $q_2$ : Representa la posición longitudinal de la articulación prismática, medida desde el eje de rotación de la articulación rotacional al efector final

**Parámetros de caracterización:**

- $dp$ : Distancia del efector final al centro de masa de la estructura prismática (Carro que se desplaza)
- $m_p$ : Masa de la estructura prismática.
- $g$ : Aceleración de gravedad :  $9,8 \frac{m}{s^2}$
- $L_{cmp}$ : Distancia entre el eje de giro de la articulación rotacional y el centro de masa de la articulación prismática :  $q_2 - dp$
- $J_{p,cm}$ : Momento de inercia de la articulación prismática con respecto a un eje que atraviesa su centro de masa en la dirección Z.
- $J_p$ : Momento de inercia de la articulación prismática con respecto al eje de giro de la articulación rotacional :  $J_{p,cm} + m_p \cdot q_2^2$

Procedemos a obtener la expresión de la energía cinética y potencial para la articulación prismática en función de las variables articulares:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_p V_T^2 + \frac{1}{2}J_p \dot{q}_1^2 \\ K &= \frac{1}{2}m_p(\dot{q}_2^2 + (L_{cmp} \cdot \dot{q}_1)^2) + \frac{1}{2}J_p \dot{q}_1^2 \\ K &= \frac{1}{2}m_p(\dot{q}_2^2 + (q_2 - dp)^2 \cdot \dot{q}_1^2) + \frac{1}{2}(J_{p,cm} + m_p \cdot q_2^2)\dot{q}_1^2 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} U &= m_p \cdot g \cdot L_{cmp} \cdot \sin(q_1) \\ U &= m_p \cdot g \cdot (q_2 - dp) \cdot \sin(q_1) \end{aligned}$$

Definiendo el Lagrangiano como:

$$\mathcal{L} = K - U \quad (29)$$



Se procede a encontrar la funcion de vector de fuerzas y torques a partir del Lagrangiano.

$$\begin{aligned}
F &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \\
F &= \frac{d}{dt} (m_p \cdot \dot{q}_2) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \\
F &= m_p \cdot \ddot{q}_2 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \\
F &= m_p \cdot \ddot{q}_2 - m_p \dot{q}_1^2 (2q_2 - dp) + m_p g \sin(q_1) \\
F &= m_p \cdot \ddot{q}_2 - m_p \dot{q}_1^2 (2q_2 - dp) + m_p g \sin(q_1) + \text{sgn}(\dot{q}_2) \cdot [\dot{q}_2 \beta_G]
\end{aligned} \tag{30}$$

$\dot{q}_2 \beta_G$ : Representa la fricción viscosa entre las barras de guía y los bujes del mecanismo, dado que la fricción es siempre una componente de fuerza opositora se incluye la función  $\text{sgn}(\dot{q}_2)$

Se asume como positiva la dirección en la que la articulación prismática se estira

Con el análisis anterior se puede conocer la fuerza  $F$  necesaria para mover la articulación prismática con una aceleración  $\ddot{q}_2$  determinada, sin embargo es necesario conocer el torque dinámico, pues es este el que determina el comportamiento del motor; para esto se utiliza la definición de trabajo, con el objetivo de relacionar el torque con la fuerza.

$$\begin{aligned}
Work &= F \cdot q_2 \\
Work &= F \cdot \frac{\theta_{motor}}{N_s}
\end{aligned} \tag{31}$$

Pero también se sabe que, analizando el sistema desde la entrada:

$$Work = T_{in} \cdot \theta_{motor} \tag{32}$$

Obteniendo así la expresión que relaciona el Torque de entrada con la fuerza que ejerce el tornillo sobre la manzana.

$$\begin{aligned}
T_{in} &= \frac{F}{\eta N_s} \\
T_{in} &= \frac{F}{\eta N_s} + (J_{screw} + J_{coupling}) \ddot{q}_2 N_s + \text{sgn}(\dot{\theta}_{motor}) \cdot [\dot{\theta}_{motor} \beta_M]
\end{aligned} \tag{33}$$

$\dot{\theta}_{motor} \beta_M$ : Representa la fricción viscosa que presentan los rodamientos acoplados al tornillo de transmisión y rozamiento entre la manzana y el tornillo

$(J_{screw} + J_{coupling}) \ddot{q}_2 N_s$ : Es el termino de torque inercial necesario para acelerar el tornillo de transmisión y el acople, este torque se adiciona al final del análisis pues no se consideraron dentro del desarrollo por dinámica Lagrangiana

A partir del desarrollo ilustrado anteriormente se obtienen las curvas características del torque dinámico ejercido por el motor.

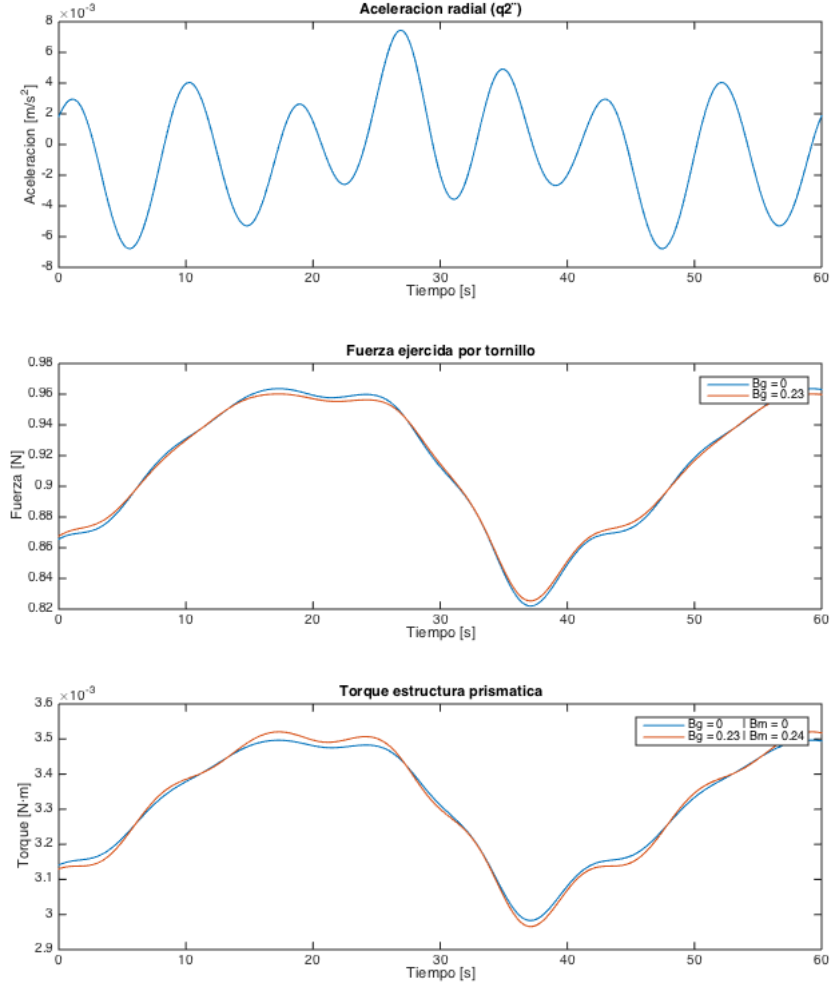


Figura 17: Aceleración radial, Fuerza y Torque ejercidos sobre la articulación prismática para lograr el seguimiento de la trayectoria propuesta

SE utilizaron los valores  $\beta_G = 0,23$  y  $\beta_M = 0,24$ , pues son los coeficientes cinéticos típicos ?? entre los materiales presentes en el robot,

Parámetro	Magnitud
$T_{rms}$	$33mN \cdot m$
$T_{max}$	$35mN \cdot m$
$\alpha_{max}$	$5,85 \frac{rad}{s^2}$
$\omega_{max}$	$110RPM$
$\omega_{rms}$	$71RPM$

Como se puede apreciar en la figura 18, para que el robot pueda cumplir

con la trayectoria planteada, siempre se trabaja por encima del coeficiente de fricción estática esperado, es decir, la aplicación se rige por el comportamiento dinámico del sistema.

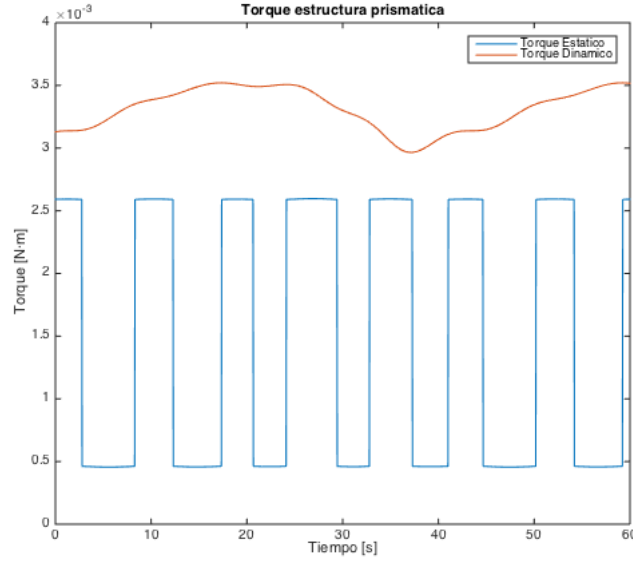


Figura 18: Torque estático y dinámico

## 5.6. Selección del Actuador

Para la selección del actuador se deben realizar ciertas consideraciones.

1. El no considerar la fricción viscosa y estática de las varillas de guía sobre bujes en la estructura deslizante, debido a su dificultad de caracterización, aumentara la componente de carga en el eje de giro sobre la manzana, y por ende el torque de rompimiento de equilibrio estático, a su vez hará que el sistema pueda llegar a un estado de no reversibilidad, por lo que el torque RMS y máximo esperados pueden elevarse sobre lo esperado.
2. Debido a que la fricción viscosa ejercida por los rodamientos es difícil de caracterizar y su magnitud es en la mayoría de los casos bastante inferior, se ha despreciado sin embargo esta aumentara el torque RMS y máximo esperados.
3. La velocidad tangencial de caracterización de la trayectoria es de aproximadamente  $1,4\text{cm/s}$ , dicha caracterización se realizó con 1021 puntos; dado que esta velocidad es cercana a la menor velocidad permitida para el robot, es importante seleccionar un actuador con capacidad de velocidad mayor, con el objetivo de tener un rango de velocidades posibles de trabajo a la hora de realizar el control.

Hay que considerar que:

$$\begin{aligned}
 J_{motorTotal} &= J_{motor} + \frac{J_{ref}}{N_G^2} \\
 T_{motor,rms} &\approx \frac{T_{rms}}{N_G^2} \\
 T_{motor,max} &\approx \frac{T_{max}}{N_G^2}
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Se procede a seleccionar el actuador dentro del catalogo de Maxon motor [1], obteniendo como resultado el motor.



Nominal voltage	1.8 V
No load speed	11000 rpm
No load current	53.8 mA
Nominal speed	6520 rpm
Nominal torque (max. continuous torque)	1.02 mNm
Nominal current (max. continuous current)	0.72 A
Stall torque	2.45 mNm
Stall current	1.62 A
Max. efficiency	67 %

Figura 19: RE 13 Ø13 mm, Precious Metal Brushes, 1.2 Watt



Reduction	17 : 1
Absolute reduction	3249/196
Max. motor shaft diameter	1.5 mm
Number of stages	2
Max. continuous torque	0.2 Nm
Max. intermittent torque	0.3 Nm
Direction of rotation, drive to output	=
Max. efficiency	83 %
Average backlash no load	1.2 °
Mass inertia	0.015 gcm <sup>2</sup>
Gearhead length (L1)	19.9 mm
Max. transmittable power (continuous)	9.9 W
Max. transmittable power (intermittent)	15 W

Figura 20: Planetary Gearhead GP 13 A Ø13 mm, Metal version

Se comprueba la selección de actuador.

$$\begin{aligned}
 J_{ref,motor} &= \frac{J_{ref}}{N_G^2 \eta_G} = 4,65e^{-9} [kg \cdot m^2] \\
 Inertia_{ratio} &= \frac{J_{ref,motor} + J_{gear}}{J_{motor}} \approx 0 \\
 Speed_{ratio} &= \frac{UsableSpeed}{MaximumApplicationSpeed} = 59
 \end{aligned} \tag{35}$$

Dada la baja inercia de la carga a desplazar las diferentes razones de inercia con diferentes motores, siempre se aproximaba a 0, sin embargo esto significa que el motor sera capaz de manejar la inercia de la aplicación y sera de fácil sintonizado el control. Con respecto a la razón de velocidad, ya que es mayor al  $N_G$  de la caja de transmisión se concluye que la selección logra cumplir el perfil de velocidad requerido.

Ya que la combinación motor-reducción tiene un torque de bloqueo de  $41mN \cdot m$ , se concluye que el motor logra satisfacer la capacidad de carga requerida, con un factor de seguridad de 1.17.

Finalmente, se decidió optar por un micromotor marca Pololu; que también satisface los requerimientos del sistema.

Este tiene una reducción 150:1 ; lo que hace que alcance una velocidad de 200 rpm; y un torque máximo de  $40oz \cdot in$ , lo que es equivalente a  $282,4mN \cdot m$  o  $2,9kg \cdot cm$



## 6. Video de funcionamiento

En el siguiente enlace, se puede observar el funcionamiento del mecanismo al energizar directamente los motores.

Ambos fueron energizados con 10 voltios; por lo que se puede observar que el motor de la junta rotacional tiene problemas al arrancar desde angulos lejanos a la vertical. Esto se debe a que el motor admite hasta 50 voltios, además que el ángulo más alejado de la vertical en el proceso de dibujar la trayectoria, no es de más de 30 grados

<https://www.youtube.com/watch?v=jDhmQE3UjZ4&feature=youtu.be>

## 7. Conclusiones

- A la hora de analizar el montaje implementado se observo que el torque de la articulación prismática no es constante debido a un des alineamiento de los ejes del motor con el eje de rotación del tornillo de transmisión de potencia.
- Debe re diseñarse el incrustamiento del tornillo de transmisión de potencia al acople, debido a que el diseño actual permite juego entre las piezas que se traduce en torques irregulares e imposibilidad del control de posición.
- Aunque teóricamente el sistema es reversible, dadas las características del tornillo de transmisión de potencia, la fricción dinámica de las varillas de guía eliminan esta característica del sistema.
- A pesar de los inconvenientes ilustrados anteriormente el comportamiento mecánico del sistema parece cumplir los requerimientos del proyecto.
- Los motores seleccionados cumplen con los requerimientos para lograr el perfil de velocidad requerido.
- El sobredimensionar un motor, puede traer algunos problemas; pero es la mejor solución cuando tanto los recursos como los proveedores no son favorables.
- La cantidad de puntos para realizar el respectivo seguimiento de posición es aún una variable sin analizar completamente, y por tanto se podría modificar en caso de que el elemento que proporcione el control no esté en la capacidad de procesar tanta información.

## 8. Bibliografía

### Referencias

- [1] Maxon. *Online Servo selection and configuration shop*. URL: <http://www.maxonmotor.com/maxon/view/content/products>.
- [2] Merida. *Tornillos de Transmisión de potencia, Universidad De los Andes, Catedra de Diseño, 2010*. URL: <http://www2.ula.ve/dsiaportal/dmdocuments/elementos/TORNILLOPOTENCIA.pdf>.
- [3] Engineering Toolbox. *Friction and Friction Coefficients Friction theory and coefficients of friction for ice, aluminum, steel, graphite and other common materials and materials combinations*. URL: [http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d\\_778.html](http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html).
- [4] Eric W Weisstein. *Rose. From MathWorld—A Wolfram Web Resource*. URL: <http://mathworld.wolfram.com/Rose.html>.

## 9. Índice de Figuras y Tablas

### Índice de figuras

1.	Rosa Polar de cuatro pétalos . . . . .	4
2.	Circulo base . . . . .	5
3.	Rosa Polar de ocho pétalos . . . . .	5
4.	Parametrización trébol estilizado . . . . .	6
5.	Ubicación del efector final . . . . .	6
6.	Ubicación planar del mecanismo y su área de trabajo . . . . .	7
7.	Perfiles de posición y velocidad para cada articulación . . . . .	8
8.	Trayectoria descrita por el mecanismo para esta discretización . . . . .	9
9.	Modelo de la junta rotacional . . . . .	10
10.	Perfiles de torque del motor rotacional . . . . .	12
11.	Selección de motores Maxon junta rotacional : Reducción . . . . .	14
12.	Selección de motores Maxon junta rotacional : Motor . . . . .	15
13.	Articulación prismática, ver sección de Anexos para un plano detallado de la estructura . . . . .	18
14.	Fuerzas que experimenta el tornillo de transmisión en el punto donde se encuentra la tuerca o manzana . . . . .	19
15.	Fuerzas que experimenta el tornillo de transmisión en el punto donde se encuentra la tuerca o manzana, P: representa la carga necesaria para producir movimiento hacia la izquierda, dando lugar a que tienda a desplazarse hacia arriba, N: es la fuerza normal entre la tuerca y el tornillo, W: es la carga externa. . . . .	19
16.	Velocidad angular, aceleración y torque del motor de la articulación prismática . . . . .	22
17.	Aceleración radial, Fuerza y Torque ejercidos sobre la articulación prismática para lograr el seguimiento de la trayectoria propuesta . . . . .	25
18.	Torque estático y dinámico . . . . .	26
19.	RE 13 Ø13 mm, Precious Metal Brushes, 1.2 Watt . . . . .	27
20.	Planetary Gearhead GP 13 A Ø13 mm, Metal version . . . . .	28

### Índice de cuadros

1.	Componentes articulación rotacional . . . . .	10
2.	Componentes articulación prismática . . . . .	17



## **10. Anexos**

### **10.1. Plano del ensamble principal**



Presentación No. 2  
2016

## **Robot RP**

Servomecanismos

*Pedro Arturo Estupiñan Gómez, Juan Sebastian  
Martinez Rugeles, Daniel Felipe Ordoñez Apraez*

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Conformación de la planta ampliada</b>	<b>3</b>
<b>3. Caracterización de la planta</b>	<b>4</b>
3.1. Articulación prismática . . . . .	4
3.2. Articulación rotacional . . . . .	7
<b>4. Controlador implementado</b>	<b>11</b>
4.1. Junta prismática . . . . .	11
4.2. Junta rotacional . . . . .	15
<b>5. Vídeo de funcionamiento</b>	<b>20</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>20</b>
<b>7. Índice de Figuras y Tablas</b>	<b>21</b>

## 1. Introducción

El desarrollo de un robot que realice un seguimiento de una trayectoria se puede condicionar a varias etapas, por un lado se tiene la planeación de todo lo referente a la trayectoria, perfiles de posición, velocidad, aceleración, jerk, etc. Una vez que se tienen estos datos comienza el proceso de diseño de mecanismos que garanticen el cumplimiento a esos perfiles, se selecciona los mecanismos de transmisión de potencia, y cuando se reúna toda esa información se procede a la selección de los motores.

La siguiente etapa consiste en verificar el comportamiento del sistema desarrollado, es decir, analizar la respuesta del sistema ante entradas tipo paso, pues de esta forma se pueden extraer las características que describen el sistema.

El último paso consiste en la sintonización de los controladores para que, mediante ciertas características de desempeño se pueda determinar que el robot cumple las condiciones de seguimiento.

Para el caso de este documento, nos corresponde el desarrollo de la segunda etapa, es decir, buscar la mejor función de transferencia que describa al sistema, en otras palabras, encontrar los parámetros que describen el comportamiento de la planta ampliada del sistema. Además se pide la sintetización de un controlador proporcional para el sistema, el cual se encontrará utilizando el método del lugar de las raíces.

## 2. Conformación de la planta ampliada

El término planta ampliada corresponde a la separación de todo el sistema en el controlador por un lado, y los demás elementos por el otro, es decir, la planta ampliada típicamente está conformada por los elementos:

- Driver de potencia.
- Motor.
- Sistema de transmisión de potencia mecánica.
- Mecanismo.
- Sensor

En el diagrama se puede ver la comparación entre un servomecanismo típico[1] y uno reducido mediante la conformación de la planta ampliada[2]. Dado que hasta el momento no se tiene el conocimiento sobre el control feedforward se suprime del esquema mientras se desarrolla el tema en el salón de clase.

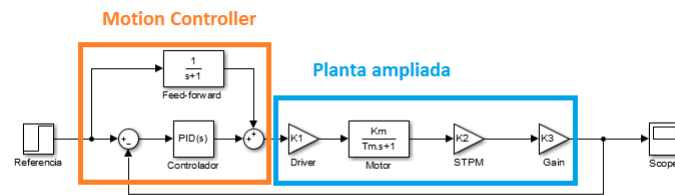


Figura 1: Servomecanismo

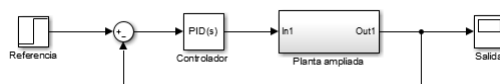


Figura 2: Reducción de sistema a planta ampliada

Una vez definido el concepto de planta ampliada, se procede a su implementación para cada una de las articulaciones de nuestro robot RP, de tal manera que se dispone de una herramienta para extraer los parámetros de respuesta tanto de la parte rotacional como prismática del mismo.

### 3. Caracterización de la planta

Para la caracterización de la planta, se realizó la misma prueba en ambas articulaciones: Se le aplicó una señal tipo paso desde diferentes condiciones iniciales a los actuadores; y se observó como respondía el mecanismo en posición. Los datos fueron tomados en un osciloscopio, con el cual se podían guardar los datos en una memoria USB; para su posterior análisis desde una herramienta computacional.

#### 3.1. Articulación prismática

Se analizó la respuesta al paso de la articulación prismática frente a diferentes orientaciones de la misma, y se evaluó su comportamiento tanto con la gravedad en contra, como con la gravedad a favor. Los resultados de estos experimentos se muestran en las figuras 3, 4, 5, 6. La referencia para el ángulo mostrado en las gráficas corresponde a la vertical.

Cabe anotar que todas las curvas describen un comportamiento creciente, debido a que el sensor utilizado es un encoder incremental que no detecta sentido de giro, y por lo tanto se asume que la posición está aumentando, aún cuando en la realidad la articulación esté bajando.

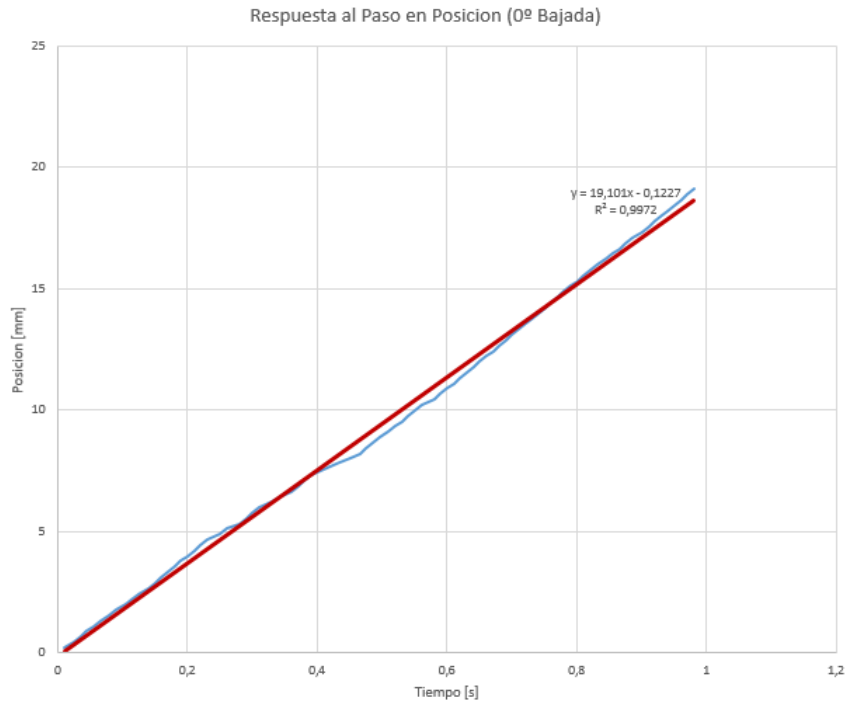


Figura 3: Prueba para 0°, articulación en bajada. Línea azul: Datos Experimentales Línea Roja: Linealización del sistema en velocidad constante

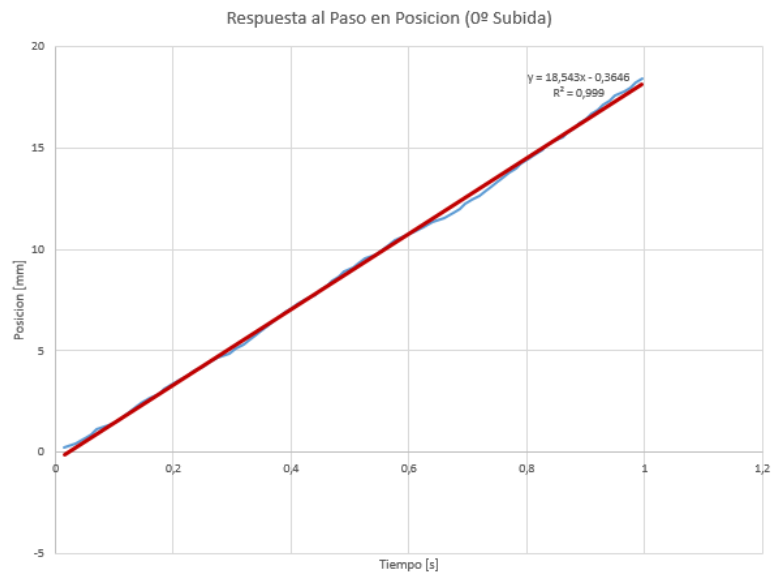


Figura 4: Prueba para 0º, articulación en subida. Línea azul: Datos Experimentales Línea Roja: Linealización del sistema en velocidad constante

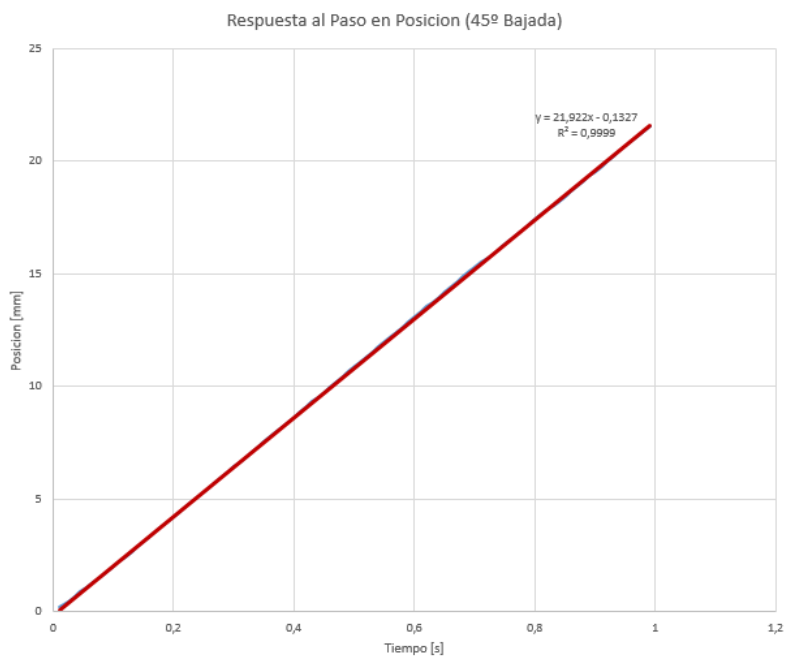


Figura 5: Prueba para 45º, articulación en bajada. Línea azul: Datos Experimentales Línea Roja: Linealización del sistema en velocidad constante



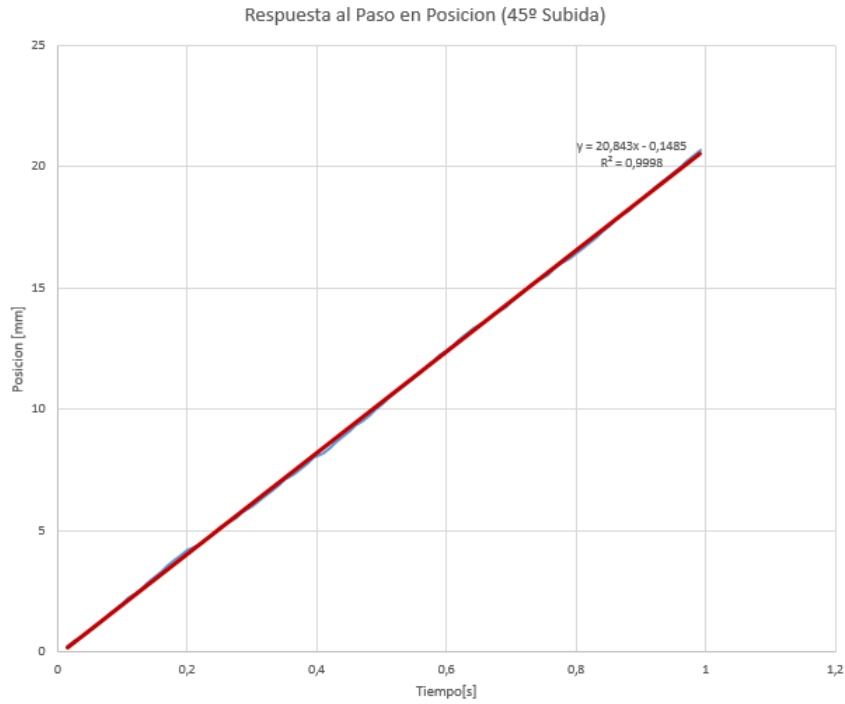


Figura 6: Prueba para 45°, articulación en subida. Línea azul: Datos Experimentales Línea Roja: Linealización del sistema en velocidad constante

Tras el análisis de la respuesta del sistema a la excitación, se puede reconocer que la componente gravitacional afecta en baja medida al sistema, y que la constante de tiempo de la planta ampliada es de muy baja magnitud, a tal punto que es difícil reconocerla en las pruebas realizadas, a consecuencia de la resolución del servomecanismo ( $0.22 \text{ mm}$ ); tras promediar el comportamiento de la articulación en las diferentes secciones de prueba se obtiene:

- **Ganancia planta ampliada:**  $K_m = 1,675166667$
- **Constante de tiempo:**  $\tau_m = 0,009816117$

En la siguiente imagen, se puede encontrar la respuesta al modelo del sistema(12), con una entrada tipo paso de 12 voltios

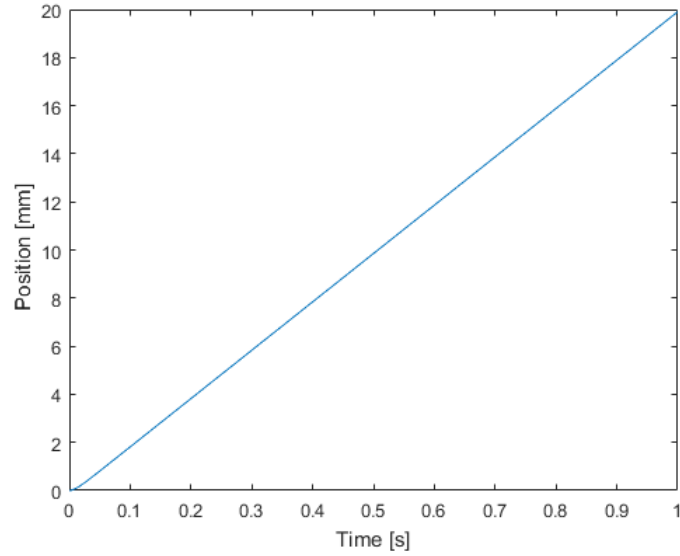


Figura 7: Respuesta del modelo del sistema

### 3.2. Articulación rotacional

Para la caracterización de la articulación rotacional se realizaron pruebas de respuesta al paso en diferentes ángulos de orientación ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ), obteniendo respuestas como las ilustradas en la figura 8, como se puede apreciar el sensor utilizado (*potenciometro lineal*) tiene un ruido de aproximadamente  $120[mV]_{max}$  y frecuencia mayor a  $600Hz$ , por lo que se procedió a utilizar un filtro Butterworth (*ver figura 9*) pasa bajos obteniendo así la señal en color rojo.

La señal de osciloscopio es posteriormente procesada para obtener el equivalente de voltaje en posición angular; a través de una previa caracterización del sensor, lo cual nos permite obtener la respuesta en posición angular a una excitación tipo paso de  $24V_{DC}$ .

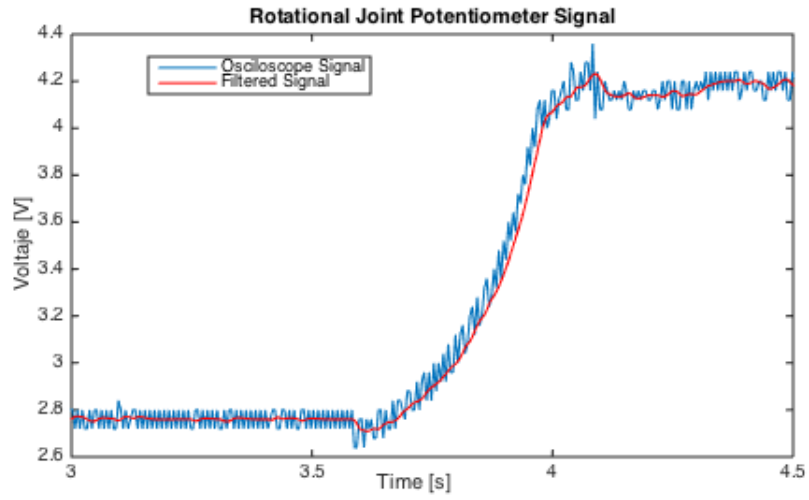


Figura 8: Prueba para  $45^\circ$ , articulación en subida

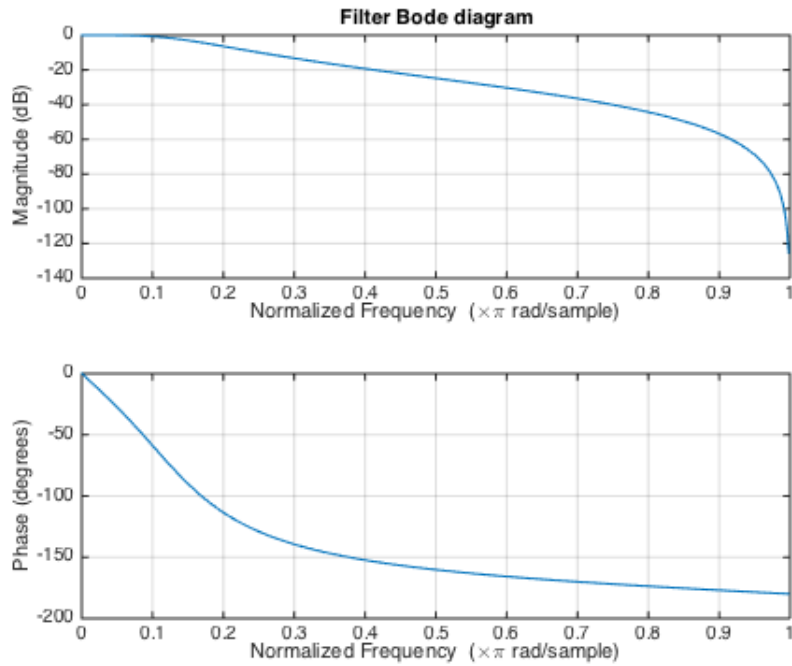


Figura 9: Filtro Butterworth implementado

Dicha respuesta al paso en teoría después del tiempo transitorio, tendría un comportamiento con pendiente constante, sin embargo debido a la no linealidad incluida por el torque gravitacional que varía en función de la posición angular, el sistema carece de este comportamiento, por lo que se procedió a analizar la

velocidad angular durante el tiempo de respuesta y encontrar el punto donde esta fuese mas constante, intentando así obviar el comportamiento no lineal del sistema pues dicha estabilidad temporal se logra con variaciones bajas de la posición angular (*lo que equivale a pequeñas variaciones en el torque gravitacional*); dicho análisis puede entenderse mas viendo la figura 11.

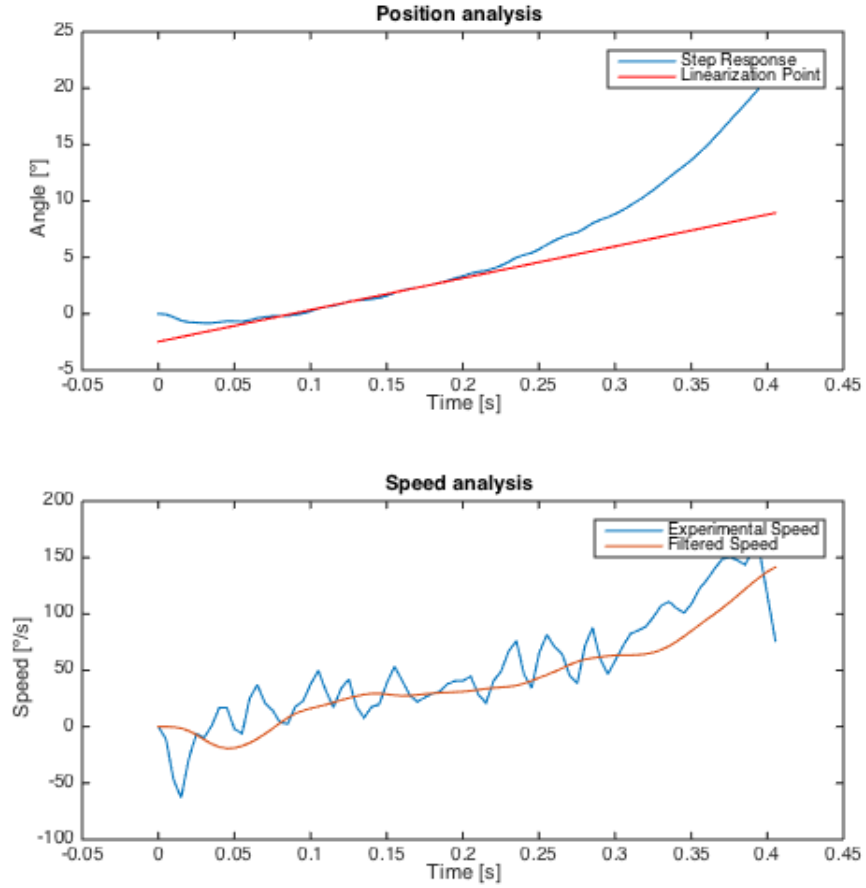


Figura 10: Respuesta de articulación rotacional con angulo de inicio de 45 con respecto a la horizontal, tiempo de estabilización  $\approx 0,15s$

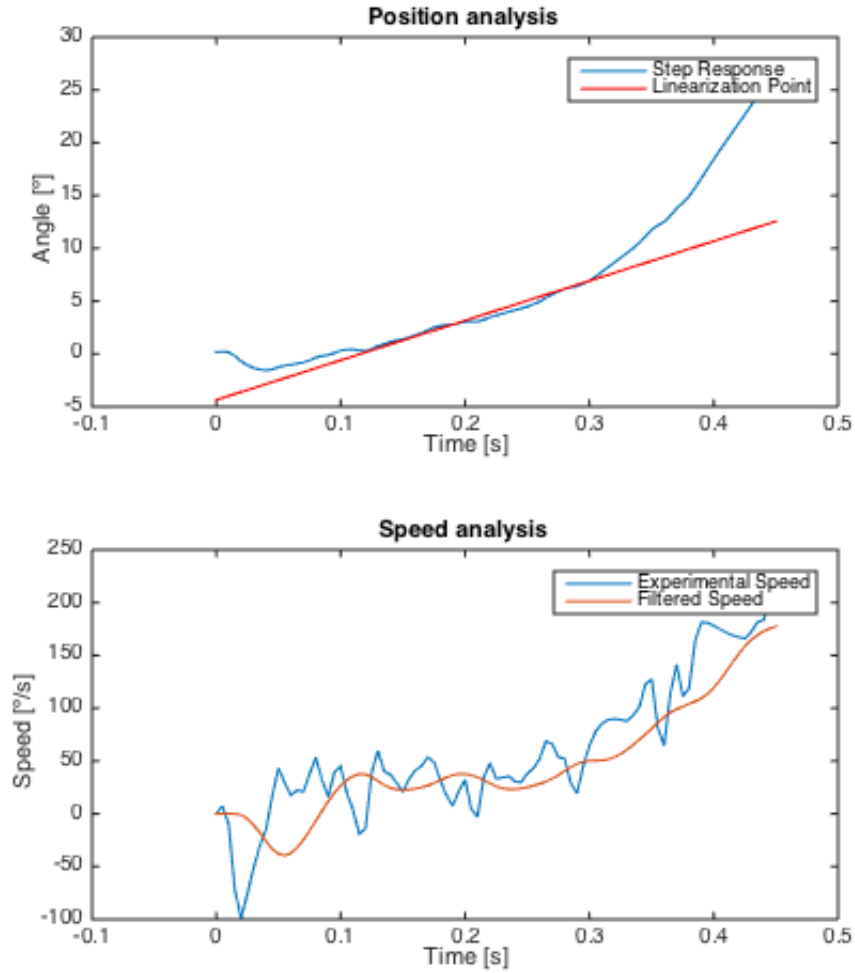


Figura 11: Respuesta de articulación rotacional con ángulo de inicio de 60 con respecto a la horizontal, tiempo de estabilización  $\approx 0,15s$

Con dicha linearización se obtiene el valor de la pendiente o velocidad angular de estado estable, equivalente a  $K_m$  y el tiempo de corte con el eje del tiempo de la recta proyectada con pendiente  $K_m$  en el punto de linearización, equivalente a  $\tau_m$ ; promediando los parámetros obtenidos en las diferentes pruebas realizadas se obtiene:

- **Ganancia planta ampliada:**  $K_m = 1,3046$
- **Constante de tiempo:**  $\tau_m = 0,103466667$

## 4. Controlador implementado

### 4.1. Junta prismática

Para la elección del controlador proporcional, se realizó el modelo de la figura 12, en el cual se encuentra la saturación física que presenta el motor, calculada así:

$$200 \frac{rev}{min} \cdot \frac{8mm}{1rev} \cdot \frac{1min}{60s} = 26,66 \frac{mm}{s} \quad (1)$$

Se debe recordar que el modelo tiene la salida en posición en milímetros; por lo que se requiere de una conversión para poder obtener nuestras gráficas de velocidad en rpm.

La constante del controlador, se halló con la herramienta sisotool de matlab; con la cual se sintoniza el controlador dependiendo de la respuestas posibles y deseadas que se pueden obtener.

Se optó por una constante de  $P = 10$ ; para obtener tiempos de respuesta indicados, a entradas tipo paso de gran magnitud.

El modelo final de simulink es el siguiente:

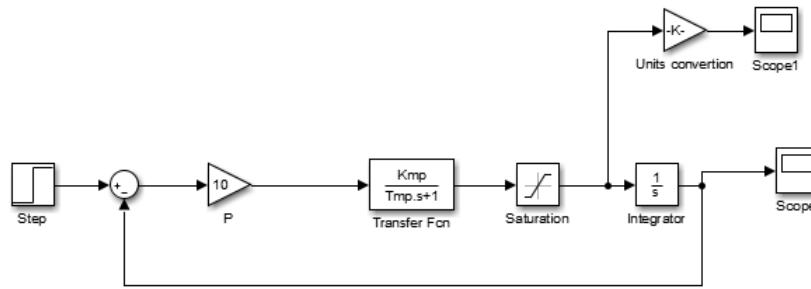


Figura 12: Modelo de la articulación tipo P con un controlador proporcional

Las figuras 13 y 14 tienen como entrada un paso de 10mm; las 15 y 17 tienen como entrada un paso de 50 mm; y las 18 y 20 tienen como entrada un paso de 100 mm.

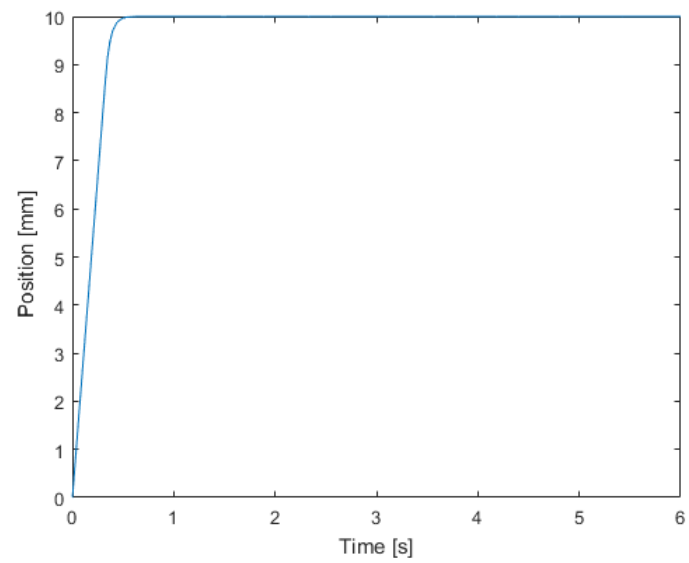


Figura 13: Posición de la junta prismática con entrada tipo paso de 10mm

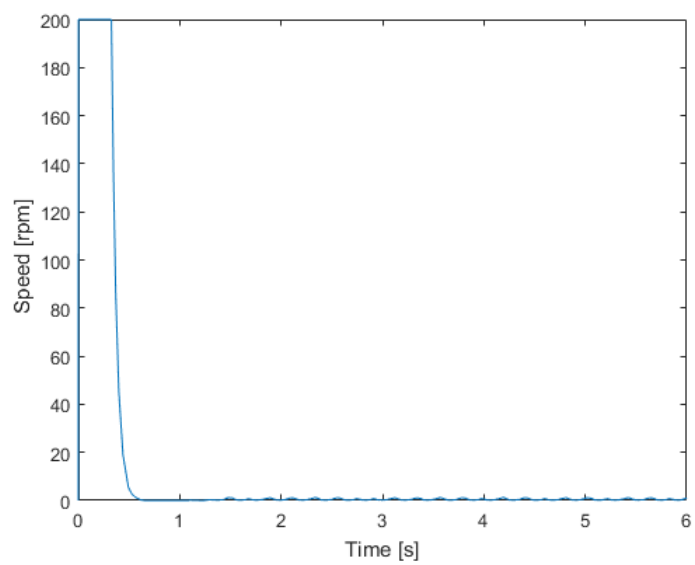


Figura 14: Velocidad de la junta prismática con entrada tipo paso de 10mm

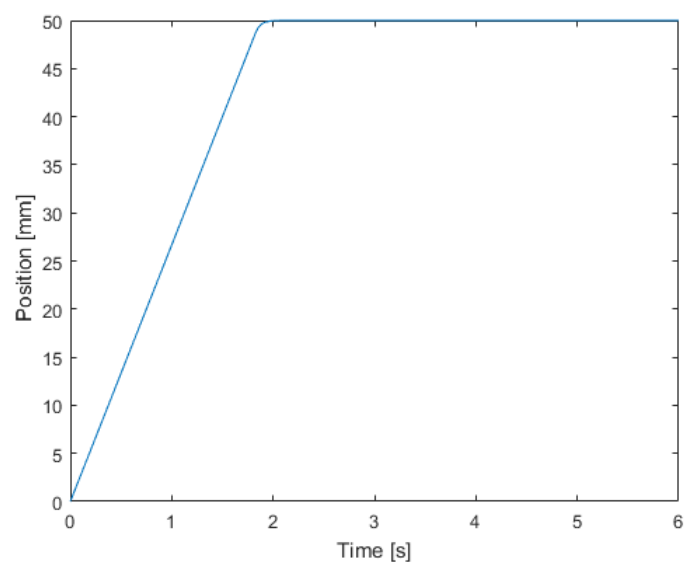


Figura 15: Posición de la junta prismática con entrada tipo paso de 50mm

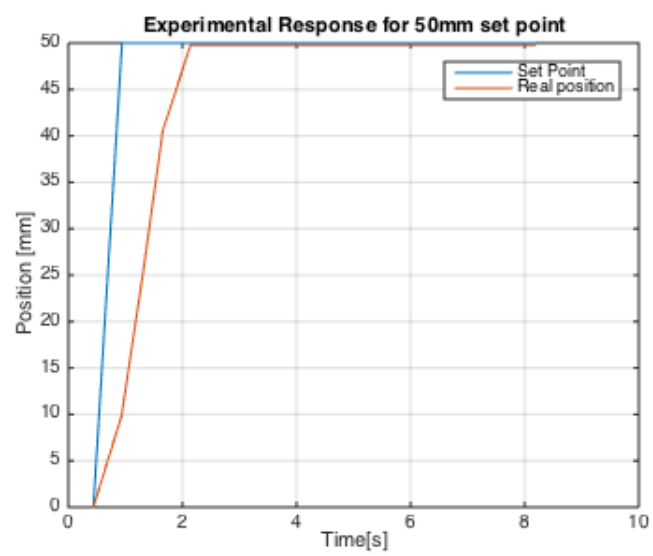


Figura 16: Posición experimental de la junta prismática con entrada tipo paso de 50mm



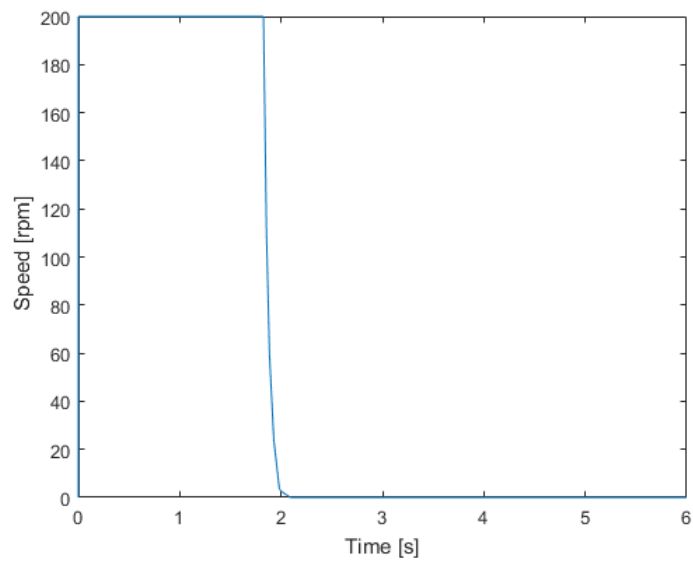


Figura 17: Velocidad de la junta prismática con entrada tipo paso de 50mm

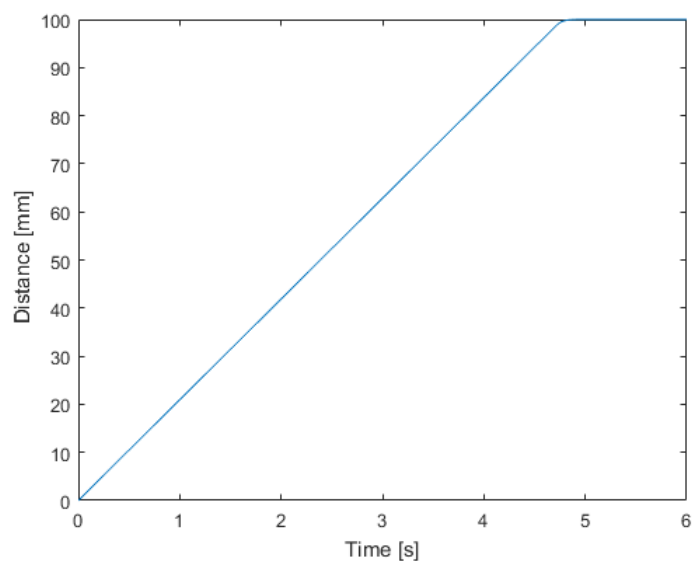


Figura 18: Posición de la junta prismática con entrada tipo paso de 100mm

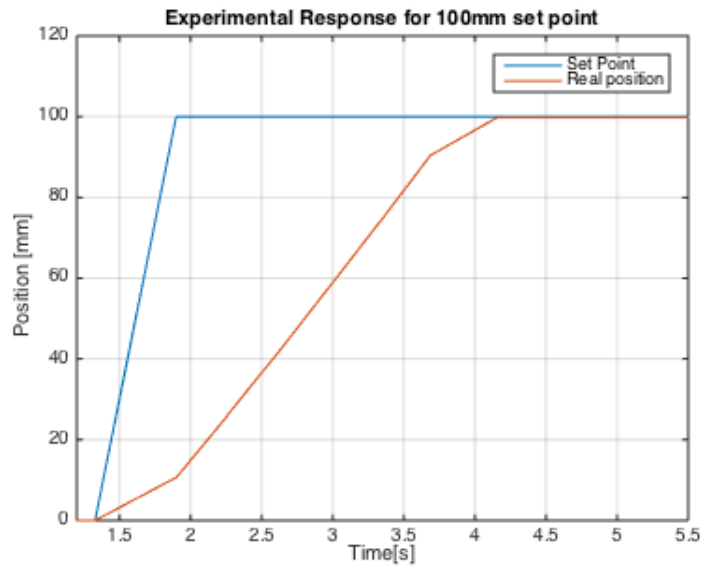


Figura 19: Posición experimental de la junta prismática con entrada tipo paso de 100mm

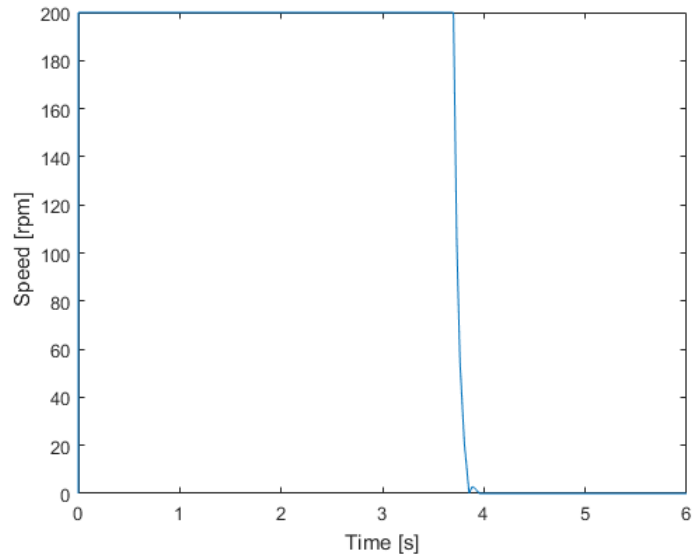


Figura 20: Velocidad de la junta prismática con entrada tipo paso de 100mm

## 4.2. Junta rotacional

Se realizó el mismo procedimiento que con la articulación prismática. La saturación del sistema, teniendo en cuenta una velocidad máxima de motor

de 75 rpm, se calculó así:

$$75 \frac{rev}{min} \cdot \frac{360}{1 rev} \cdot \frac{1 min}{60 s} = \frac{12,5}{s} \quad (2)$$

Para el modelo, se optó por una constante del controlador proporcional menor, con un valor de 2.5

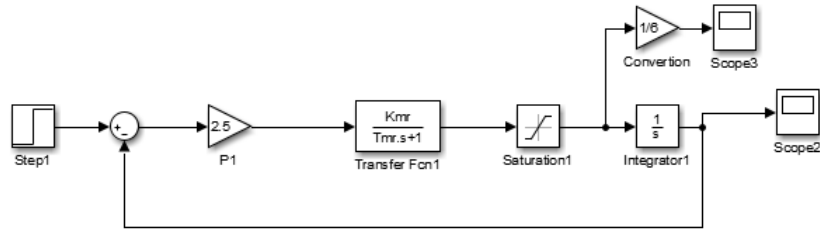


Figura 21: Modelo de la articulación tipo R con un controlador proporcional

Las figuras 22 y 23 tienen como entrada un paso de 15°; las 24 y 25 tienen como entrada un paso de 45°; y las 26 y 27 tienen como entrada un paso de 90°.

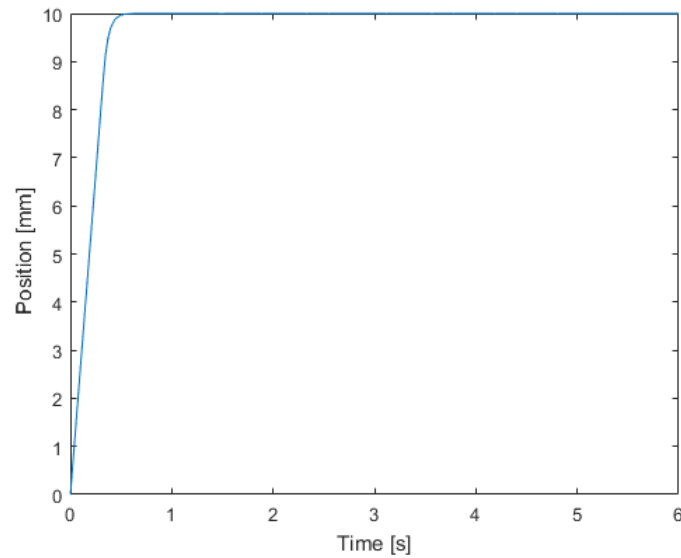


Figura 22: Posición de la junta rotacional con entrada tipo paso de 15°

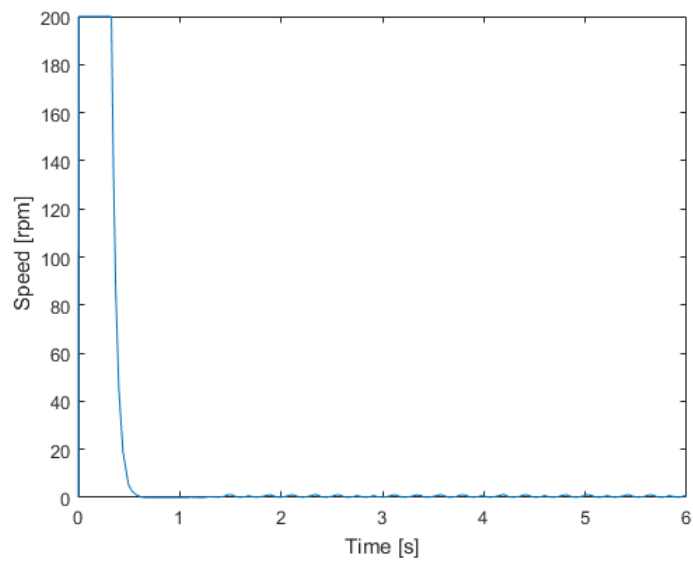


Figura 23: Velocidad de la junta rotacional con entrada tipo paso de  $15^\circ$

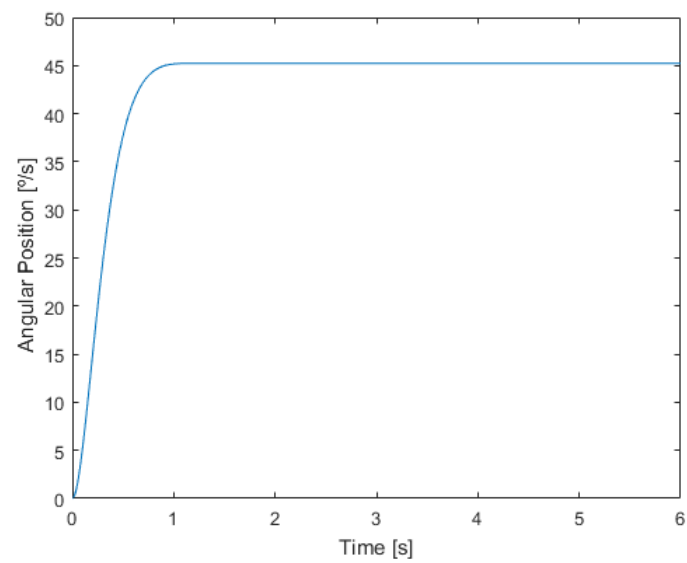


Figura 24: Posición de la junta rotacional con entrada tipo paso de  $45^\circ$

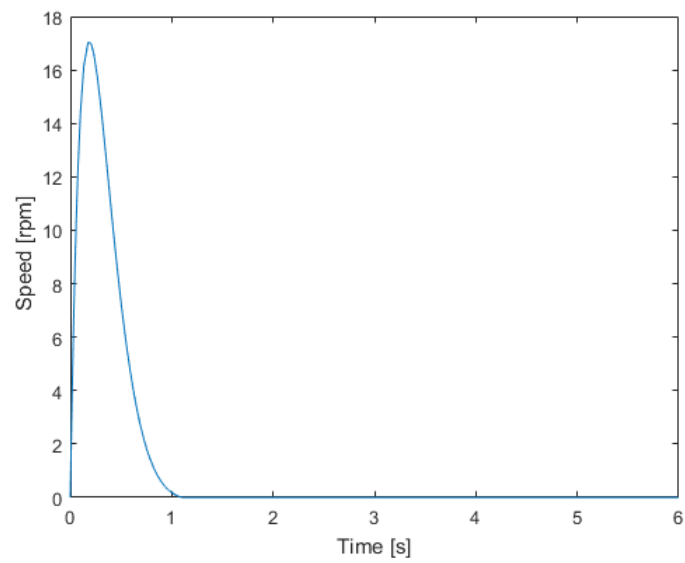


Figura 25: Velocidad de la junta rotacional con entrada tipo paso de  $45^\circ$

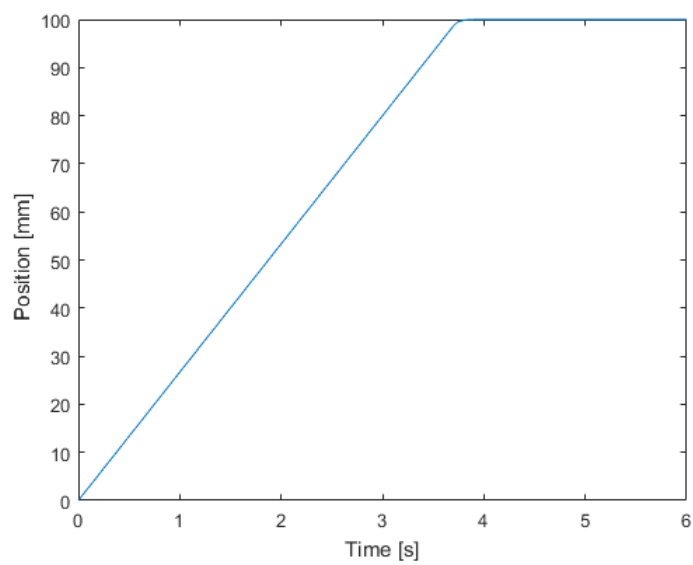


Figura 26: Posición de la junta rotacional con entrada tipo paso de  $90^\circ$

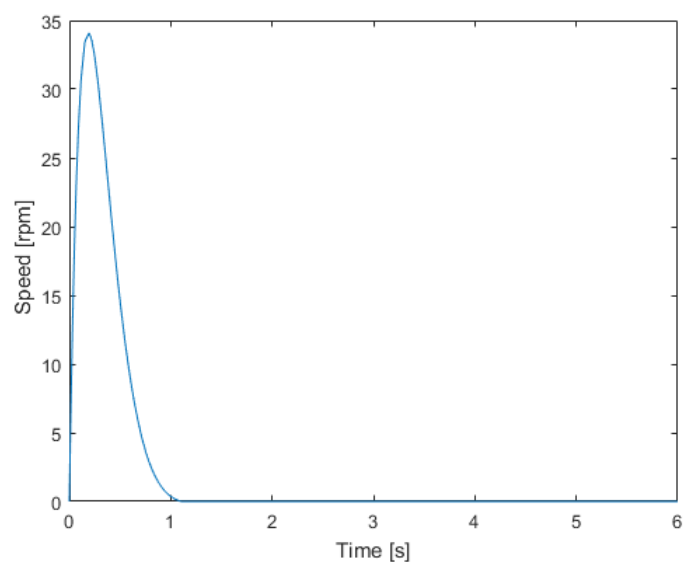


Figura 27: Velocidad de la junta rotacional con entrada tipo paso de  $90^\circ$

## 5. Vídeo de funcionamiento

La implementación de un control proporcional-integral se simuló de manera satisfactoria, pero su implementación se restringió únicamente a la articulación prismática pues al realizar las pruebas con la rotacional se presento un inconveniente con la caja de reducción del motor, pues se desajusta debido al torque exigido y deja de transmitir potencia, problema que actualmente estamos resolviendo.

En el siguiente enlace se muestra el funcionamiento de la articulación prismática:

<https://youtu.be/SPpHixJEZEw>

## 6. Conclusiones

- Dado que la articulación rotacional se describe bajo una función no lineal, el control de esta articulación muy seguramente no mostrará las características bajo el cual fue diseñado.
- Aunque en las imágenes de caracterización de la junta prismática se puede ver que una mayor componente gravitacional sobre el tornillo de transmisión genera una disminución en la velocidad máxima del sistema, cabe resaltar que dicho efecto es muy bajo comparado con el efecto gravitacional sobre la junta prismática, a tal punto de considerarse despreciable, esto se debe a que el coeficiente de transmisión característica del tornillo hace que el componente inercial y gravitacional de la articulación prismática se vean disminuidos en gran medida.

## 7. Índice de Figuras y Tablas

### Índice de figuras

1.	Servomecanismo . . . . .	3
2.	Reducción de sistema a planta ampliada . . . . .	3
3.	Prueba para $0^\circ$ , articulación en bajada. Linea azul: Datos Experimentales Linea Roja: Linealización del sistema en velocidad constante . . . . .	4
4.	Prueba para $0^\circ$ , articulación en subida. Linea azul: Datos Experimentales Linea Roja: Linealización del sistema en velocidad constante . . . . .	5
5.	Prueba para $45^\circ$ , articulación en bajada. Linea azul: Datos Experimentales Linea Roja: Linealización del sistema en velocidad constante . . . . .	5
6.	Prueba para $45^\circ$ , articulación en subida. Linea azul: Datos Experimentales Linea Roja: Linealización del sistema en velocidad constante . . . . .	6
7.	Respuesta del modelo del sistema . . . . .	7
8.	Prueba para $45^\circ$ , articulación en subida . . . . .	8
9.	Filtro Butterworth implementado . . . . .	8
10.	Respuesta de articulación rotacional con angulo de inicio de $45^\circ$ con respecto a la horizontal, tiempo de estabilización $\approx 0,15s$ . . . . .	9
11.	Respuesta de articulación rotacional con angulo de inicio de $60^\circ$ con respecto a la horizontal, tiempo de estabilización $\approx 0,15s$ . . . . .	10
12.	Modelo de la articulación tipo P con un controlador proporcional . . . . .	11
13.	Posición de la junta prismática con entrada tipo paso de 10mm . . . . .	12
14.	Velocidad de la junta prismática con entrada tipo paso de 10mm . . . . .	12
15.	Posición de la junta prismática con entrada tipo paso de 50mm . . . . .	13
16.	Posición experimental de la junta prismática con entrada tipo paso de 50mm . . . . .	13
17.	Velocidad de la junta prismática con entrada tipo paso de 50mm . . . . .	14
18.	Posición de la junta prismática con entrada tipo paso de 100mm . . . . .	14
19.	Posición experimental de la junta prismática con entrada tipo paso de 100mm . . . . .	15
20.	Velocidad de la junta prismática con entrada tipo paso de 100mm . . . . .	15
21.	Modelo de la articulación tipo R con un controlador proporcional . . . . .	16
22.	Posición de la junta rotacional con entrada tipo paso de $15^\circ$ . . . . .	16
23.	Velocidad de la junta rotacional con entrada tipo paso de $15^\circ$ . . . . .	17
24.	Posición de la junta rotacional con entrada tipo paso de $45^\circ$ . . . . .	17
25.	Velocidad de la junta rotacional con entrada tipo paso de $45^\circ$ . . . . .	18
26.	Posición de la junta rotacional con entrada tipo paso de $90^\circ$ . . . . .	18
27.	Velocidad de la junta rotacional con entrada tipo paso de $90^\circ$ . . . . .	19