NGUYEN Thi Minh Tuyen

Théorie des automates et langages formels

Machines de Turing

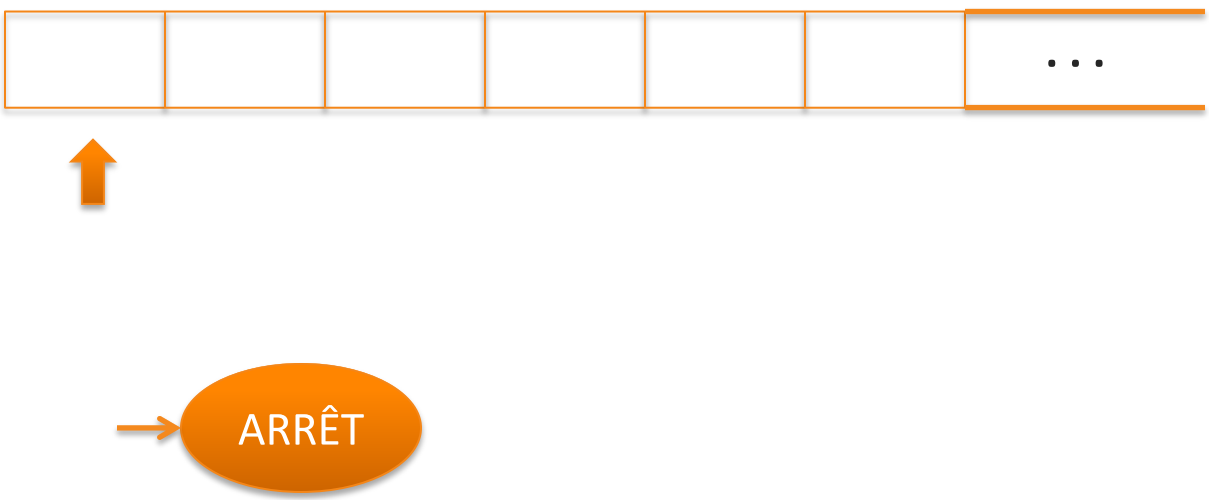
Définition [1]

Une machine de Turing est défini par:

1. un alphabet Σ de lettres d'entrées ($\Delta \notin \Sigma$)
2. un ruban mémoire, séparé en cases, fini à gauche mais infini à droite. Au départ, le ruban contient le mot d'entrée à partir de la première case. Toutes les cases après ce mot contiennent le symbole blanc Δ.
3. une tête de lecture positionnée au début sur la première case
4. un alphabet Γ de caractères de sortie ($\Delta \notin \Gamma$)
5. un ensemble fini d'états q_1, q_2, q_3, … avec un état désigné l'état de départ et quelques états (peut être aucun) désignés les états finaux.
6. un programme qui est un ensemble de règles qui indique, pour une lettre et un état, les actions d'impression, de déplacement, et de transition.

Définition [2]

Le ruban mémoire:



Les états finaux: On ne peut pas sortir d'un état final.

Définition [3]

$$q_i \xrightarrow{\text{(lettre, lettre, direction)}} q_j$$

Les règles d'un programme

- La première lettre est le contenu de la case du ruban mémoire où la tête de lecture est positionnée.
- La deuxième lettre est celle qui doit être imprimer sur la ruban mémoire dans la case où la tête de lecture est positionnée. (action d'impression).
- La direction est R (droite) ou L (gauche) et indique si la tête de lecture doit être déplacer par une case à droite ou une case à gauche (action de déplacement).
- Les machines de Turing sont déterministes. De chaque état, il n'y a pas plus d'une arête qui sort et qui soit étiqueter avec la même première lettre.

Définition [4]

On dira que la machine de Turing gèle:

- S'il n'y a pas d'arête étiqueté par la lettre qui est dans la case examinée par la tête de lecture.
- S'il faut déplacer une case à gauche à partir de la 1^{ere} case.

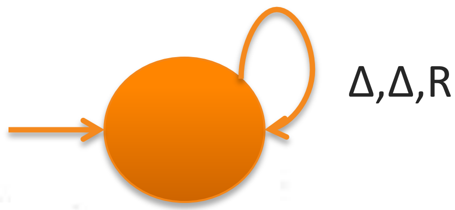
On dira qu'un mot est accepté si on rentre dans un état final.

Définition [5]

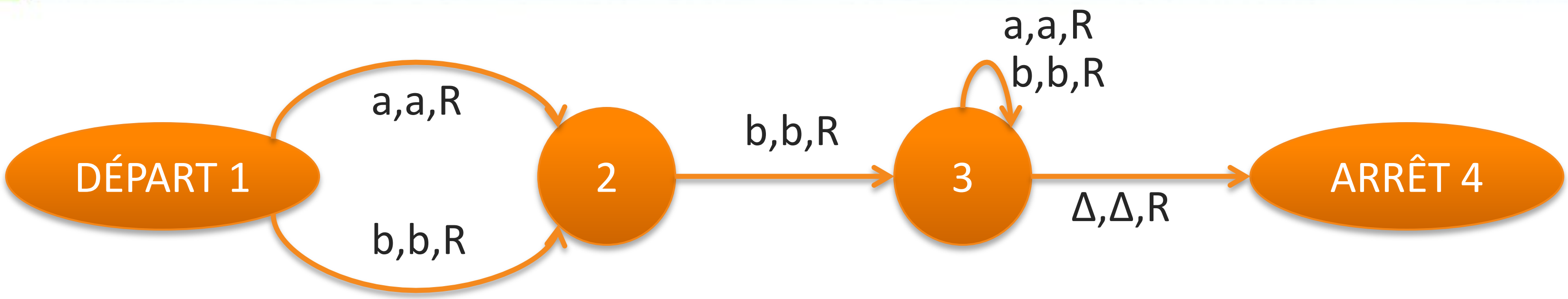
Trois possibilités du comportement pour une machine de Turing:

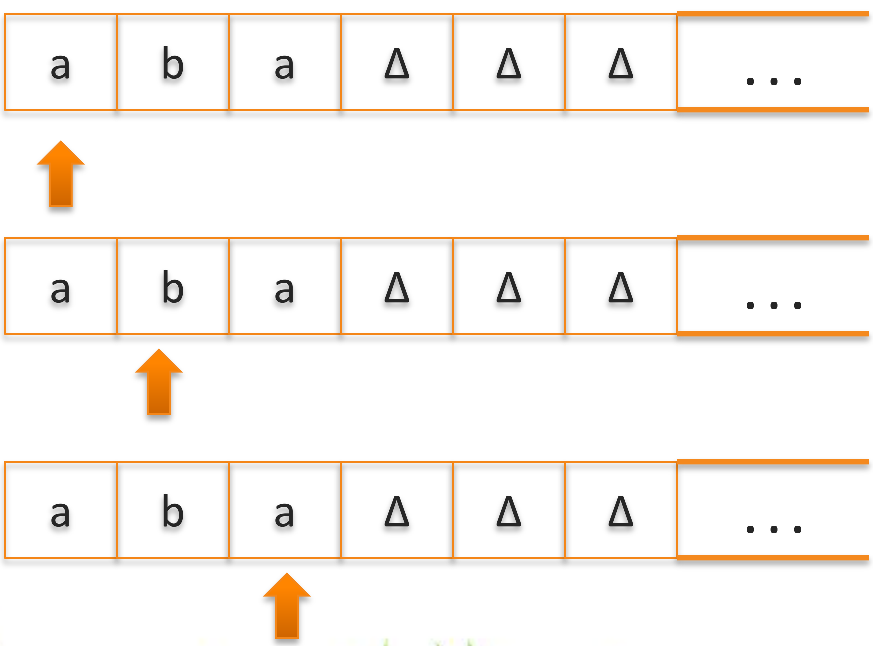
1. La dernière étape du calcul se termine dans un état final. On dira que la machine s'arrête, et que le mot sur le ruban mémoire dans la configuration initiale est accepté. Ce mot est dans le langage reconnu par la machine.
2. On gèle: Soit la machine essaie de se déplacer à gauche à partir de la première case, soit la dernière étape de calcul se termine dans un état qui n'est pas final (parce qu'il n'y a pas d'arête étiqueté par la lettre qui est dans la case examinée par la tête de lecture). Le mot est rejeté.
3. La machine ne s'arrête pas (a cause d'une boucle infini).

Par exemple:
La tête de lecture du ruban mémoire se déplace indéfiniment vers la droite.



Exemple



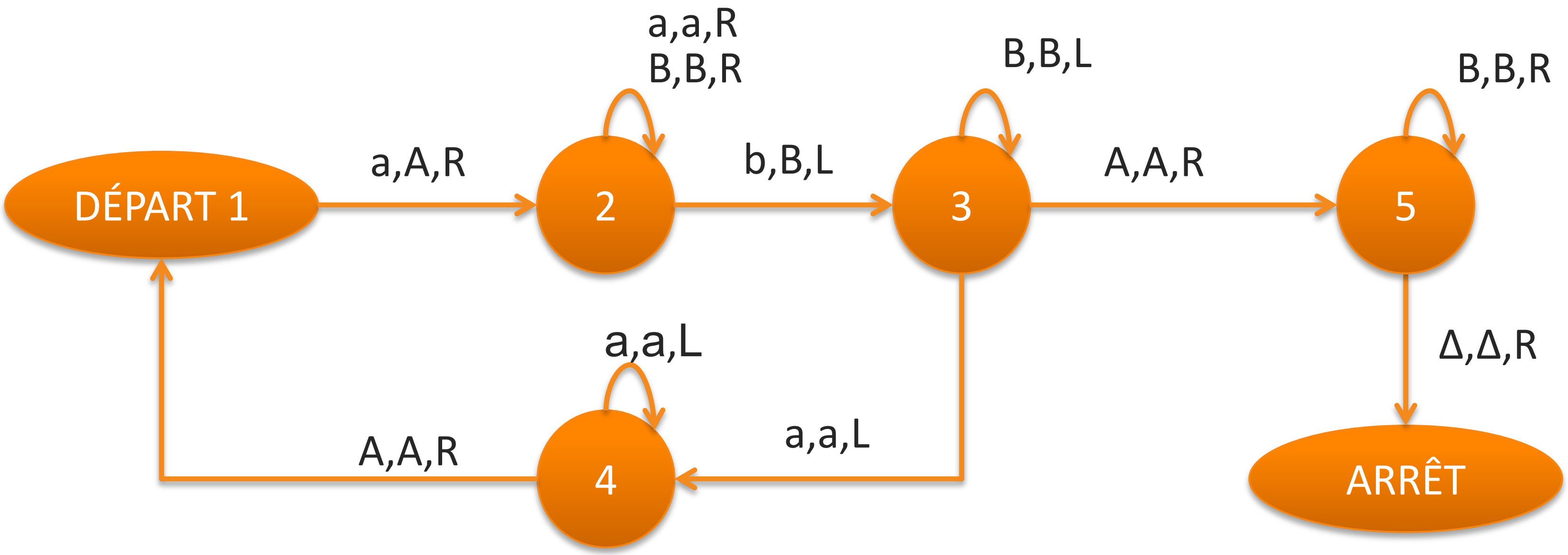


1 → 2 → 3 → 3 → ARRÊT

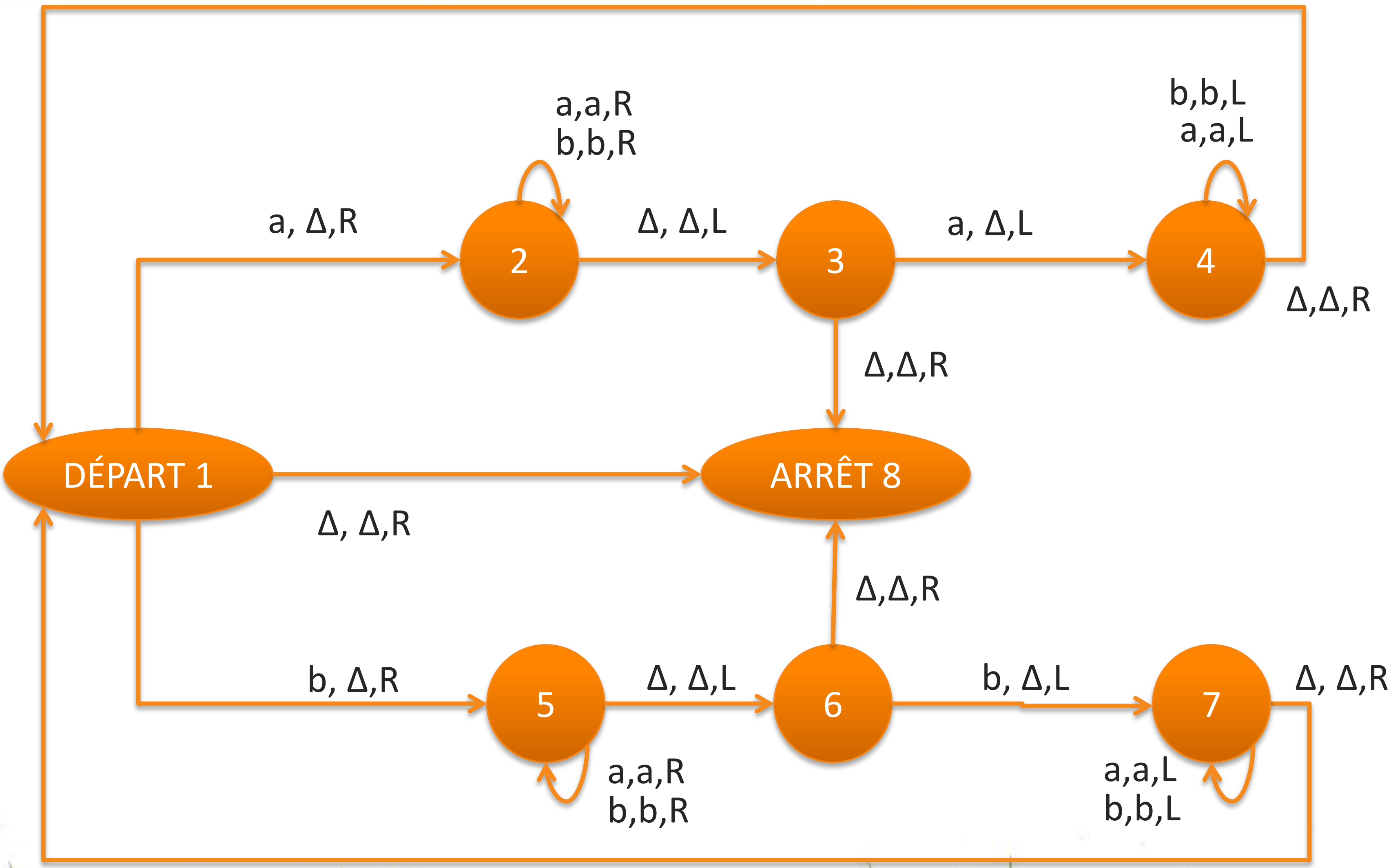
aba aba aba abaΔ

Exemple

$\{a^n b^n\}$ $\Sigma=\{a,b\}$, $\Gamma=\{a,A,B\}$



PALINDROME



a,a,R
b,b,R
b,b,L
a,a,L
a, Δ,R
Δ, Δ,L
a, Δ,L
2
3
4
Δ,Δ,R
Δ,Δ,R
DÉPART 1
ARRÊT 8
Δ, Δ,R
Δ,Δ,R
b, Δ,R
Δ, Δ,L
b, Δ,L
Δ, Δ,R
5
6
7
a,a,R
b,b,R
a,a,L
b,b,L

Théorème

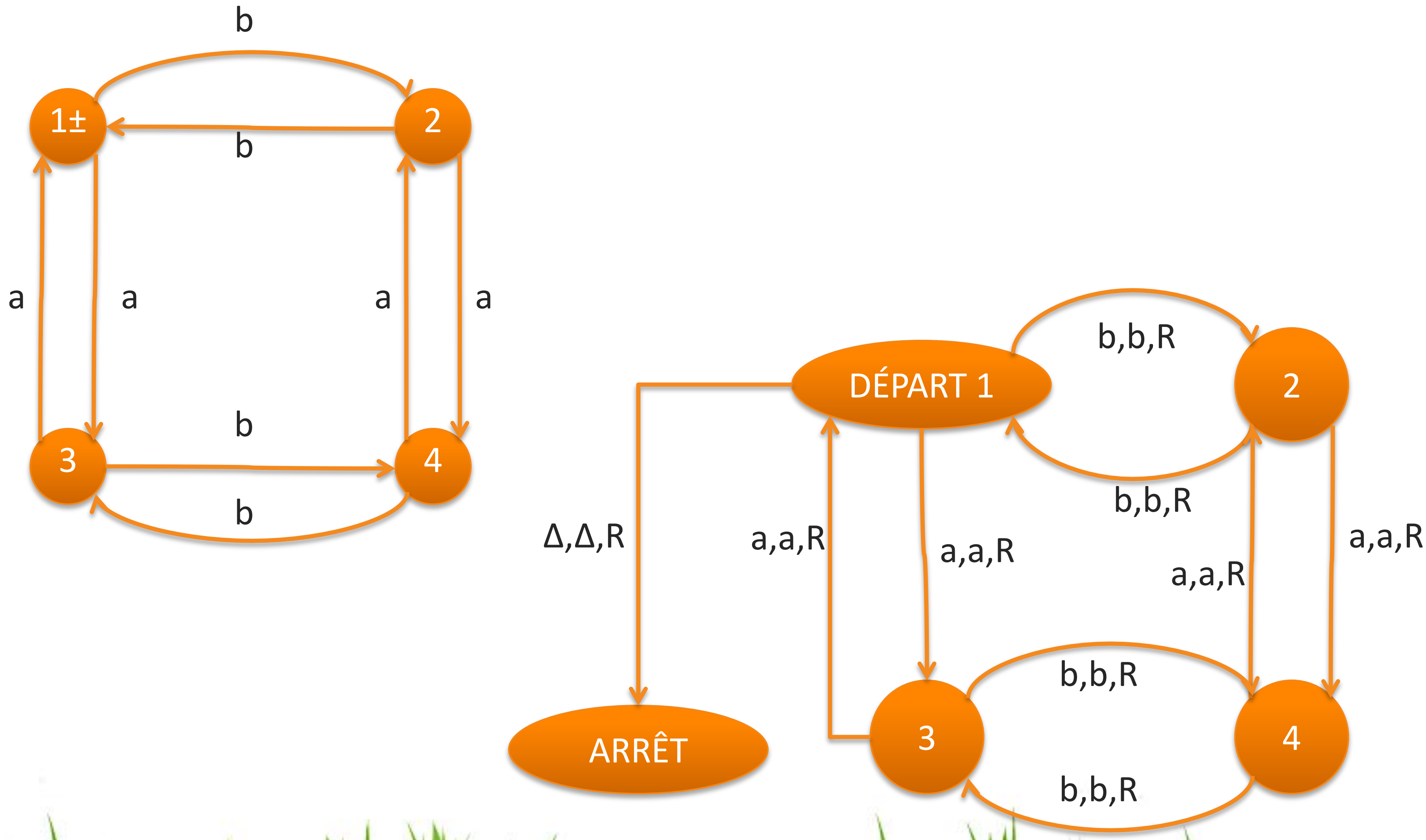
Pour tout langage régulier, il existe une machine de Turing qui le reconnaît.

<u>Preuve</u>:

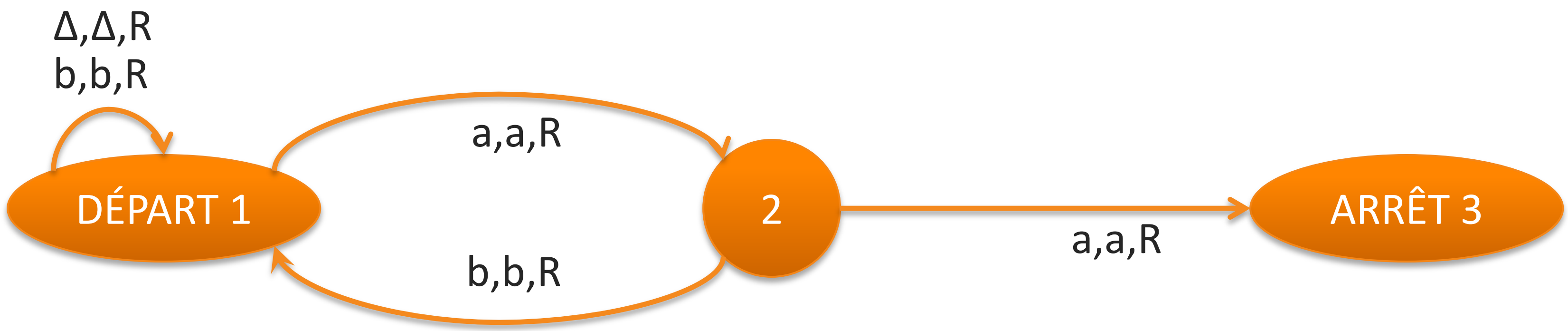
On transforme un automate fini en une machine de Turing

- L'état de départ de l'automate fini est l'état de départ de la machine de Turing
- On rajoute un état final à la machine de Turing, et une arête qui sort de chaque état final de l'automate fini qui aboutit dans le nouvel état. (On efface les +.) On étiquette les nouvelles arêtes (Δ, Δ,R).
- On remplace une étiquette **a** de l'automate fini par **(a,a,R)**, et similairement pour les autres lettres de Σ.

Exemple: PAIR-PAIR

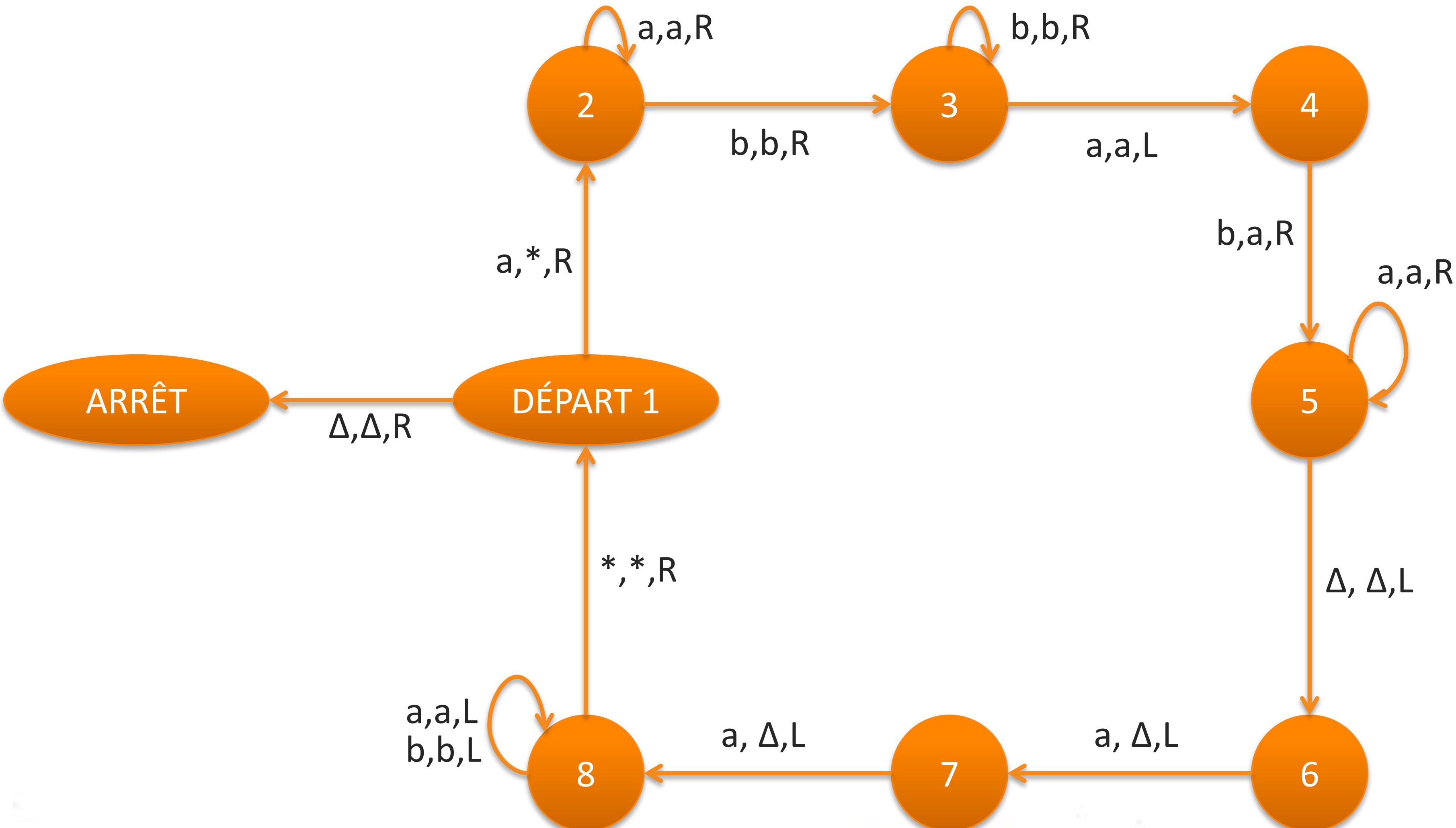


Exemple



- Si on se terminent dans l'état ARRÊT, le mot est accepté. (double a)
- Si la machine gèle, le mot est rejeté. (pas de aa et se terminent par a)
- Il est aussi possible d'entrer une boucle infini. (pas de aa et se terminent par b)

Exemple: $a^n b^n a^n$



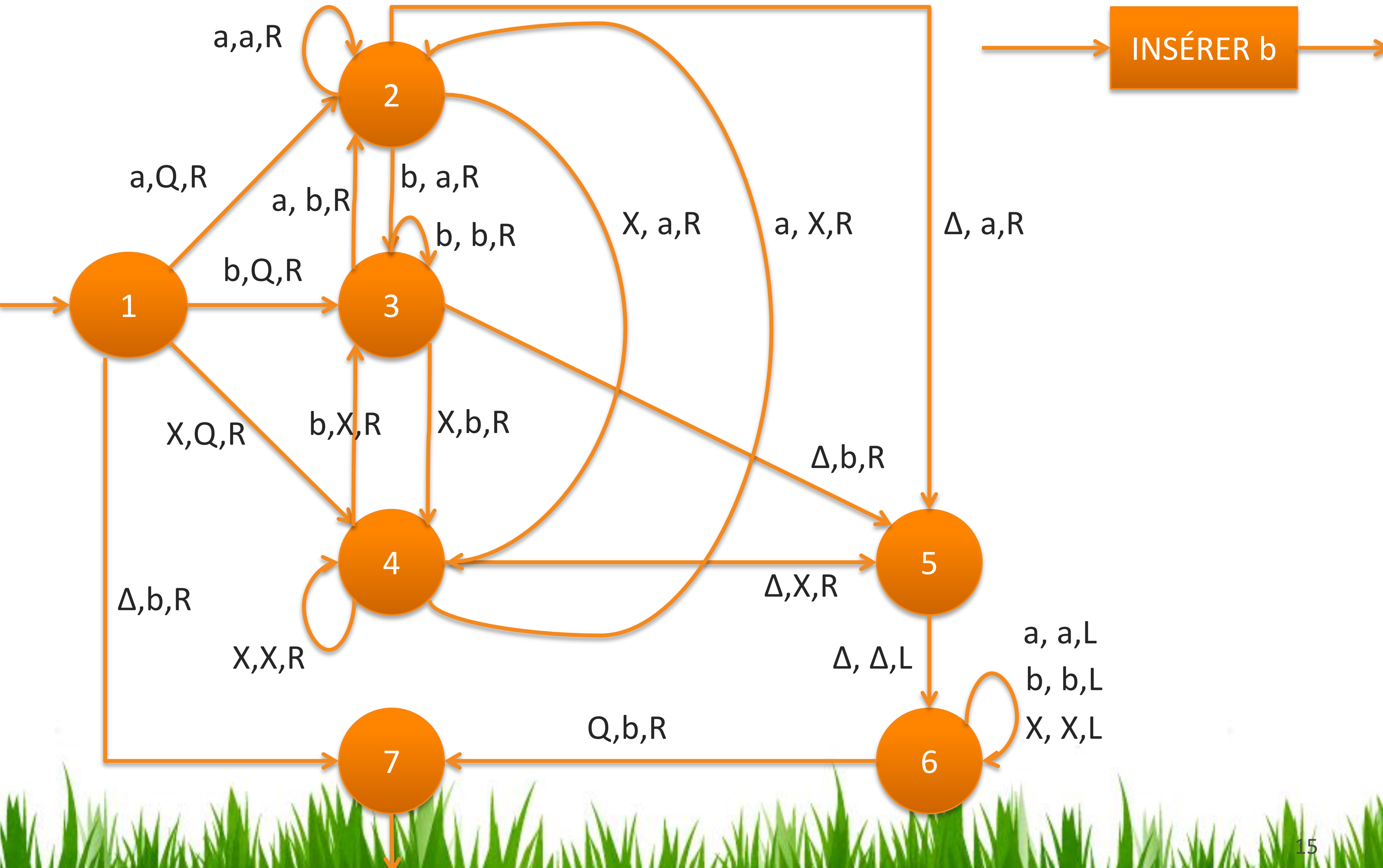
Insérer

...	b	X	a	b	b	X	Δ	Δ	...

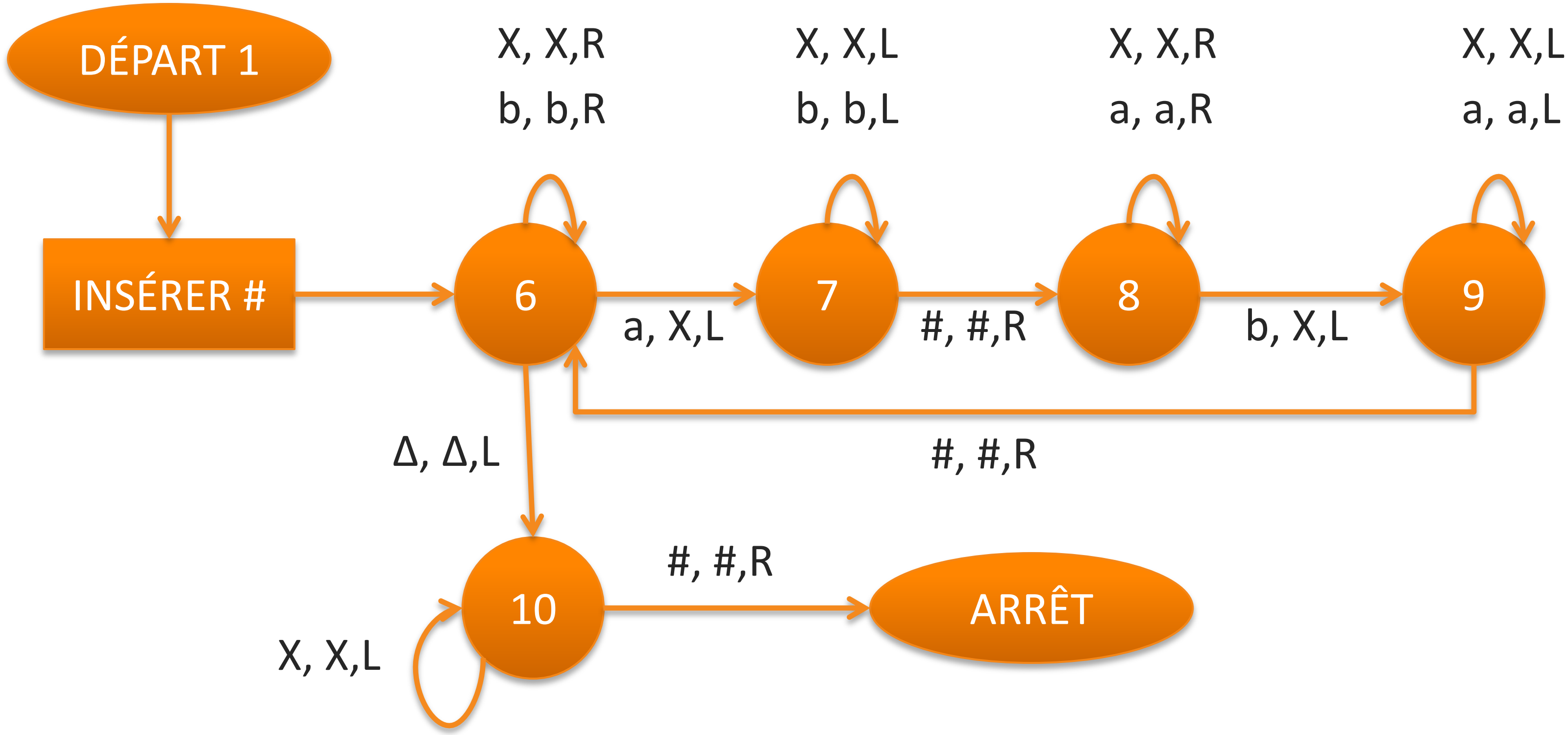
INSÉRER b

...	b	X	b	a	b	b	X	Δ	Δ	...

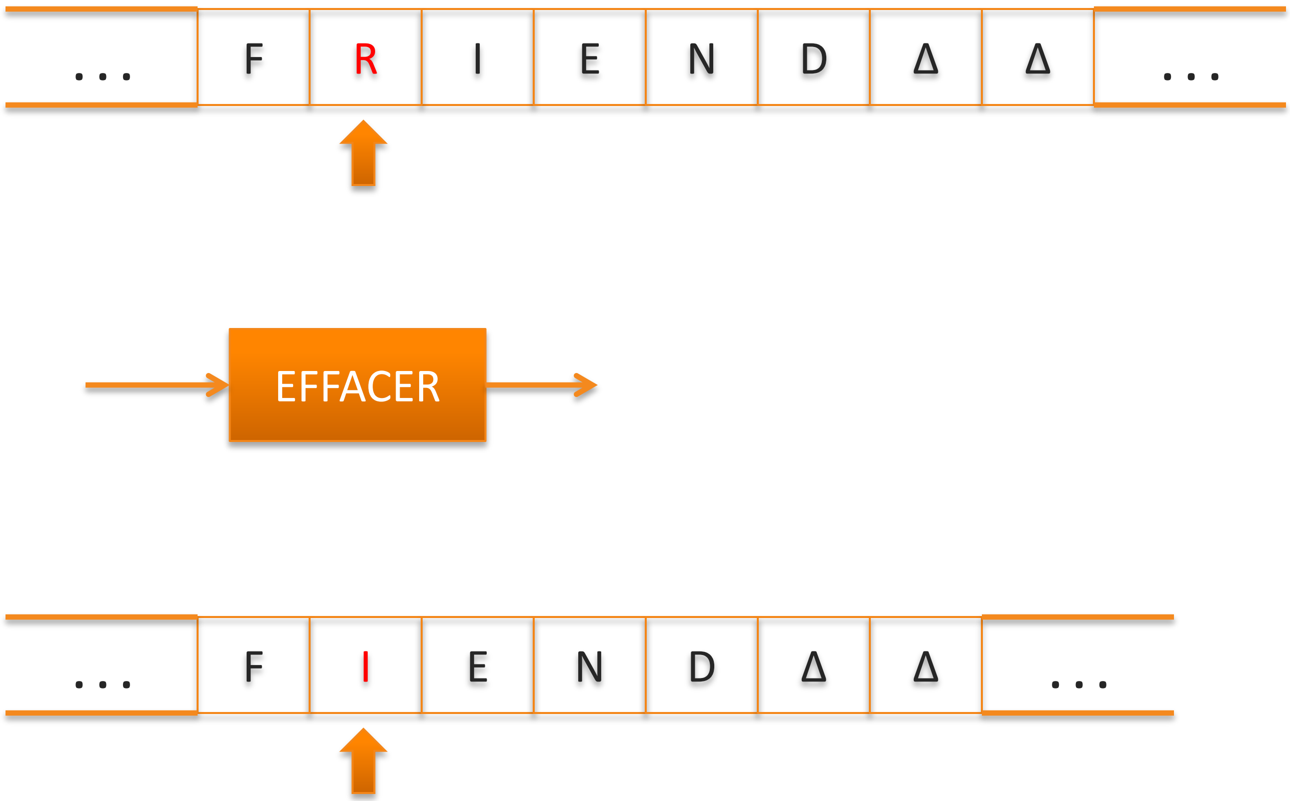
Exemple: Insérer b avec Σ={a,b,X}



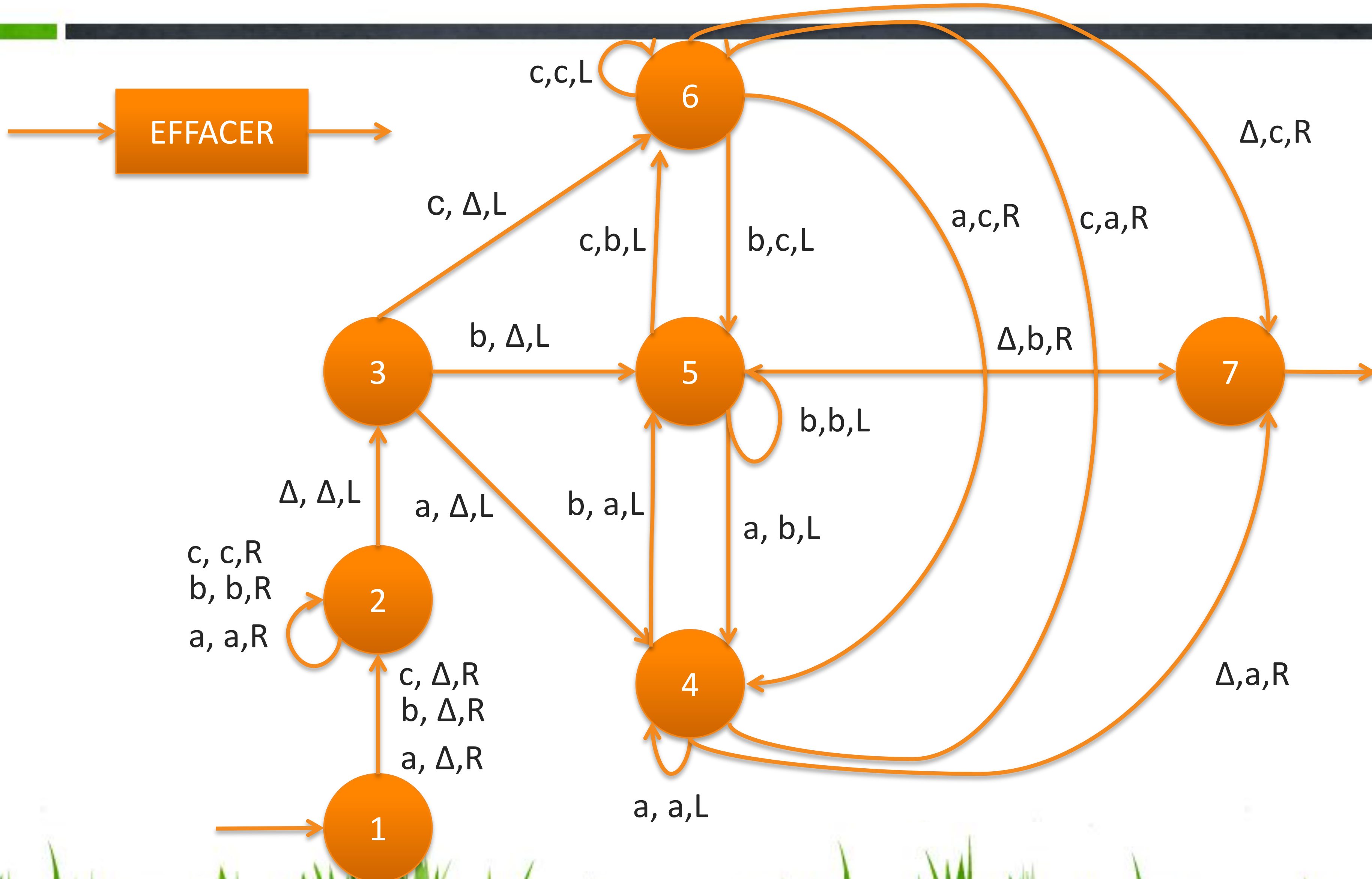
ÉGAL


DÉPART 1
INSÉRER #
X, X,R
b, b,R
X, X,L
b, b,L
X, X,R
a, a,R
X, X,L
a, a,L
6
7
8
9
a, X,L
#, #,R
b, X,L
Δ, Δ,L
#, #,R
10
#, #,R
ARRÊT
X, X,L

Effacer



Effacer d'une lettre avec Σ={a,b,c}



Question?