Programmation Logique

Rappels de logique

Enseignant: NGUYEN Thi Minh Tuyen

Plan

Plan

1. **Logique des propositions**
2. **Logique des prédicats**
3. **Unification**

Syntaxe

On définit :

- Les propositions : a, b, c, ...
- Les constantes : V (vrai) et F (faux)
- Les connecteurs logiques :
  - $\wedge$ (conjonction – et)
  - $\vee$ (disjonction – ou)
  - $\neg$ (négation – non)
  - $\rightarrow$ (implication – si ... alors)
  - $\leftrightarrow$ (équivalence)
- Des parenthèses

Variable propositionnelle

- Est représentée par une lettre (a, b, p, q, . . .)
- Peut prendre l'une des deux valeurs suivantes :
  - Vrai (= 1)
  - Faux (= 0)
- Exemple:
  - 3 fois 5 font 16 (V ou F?)
  - 3 et 5 sont deux nombres premiers (V ou F?)
  - 6 est divisible par 2 (V ou F?)

Construction d'une formule

- Une proposition est une formule
- Si a et b sont des formules, alors
  - (a),
  - $\neg a$,
  - $a \vee b$,
  - $a \wedge b$,
  - $a \rightarrow b$,
  - $a \leftrightarrow b$

sont des formules

Formule atomique

- Une formule est atomique si c’est une variable propositionnelle.
- Ne peut la décomposer ou émettre des considérations relatives à certains constituants d'une formule atomique.

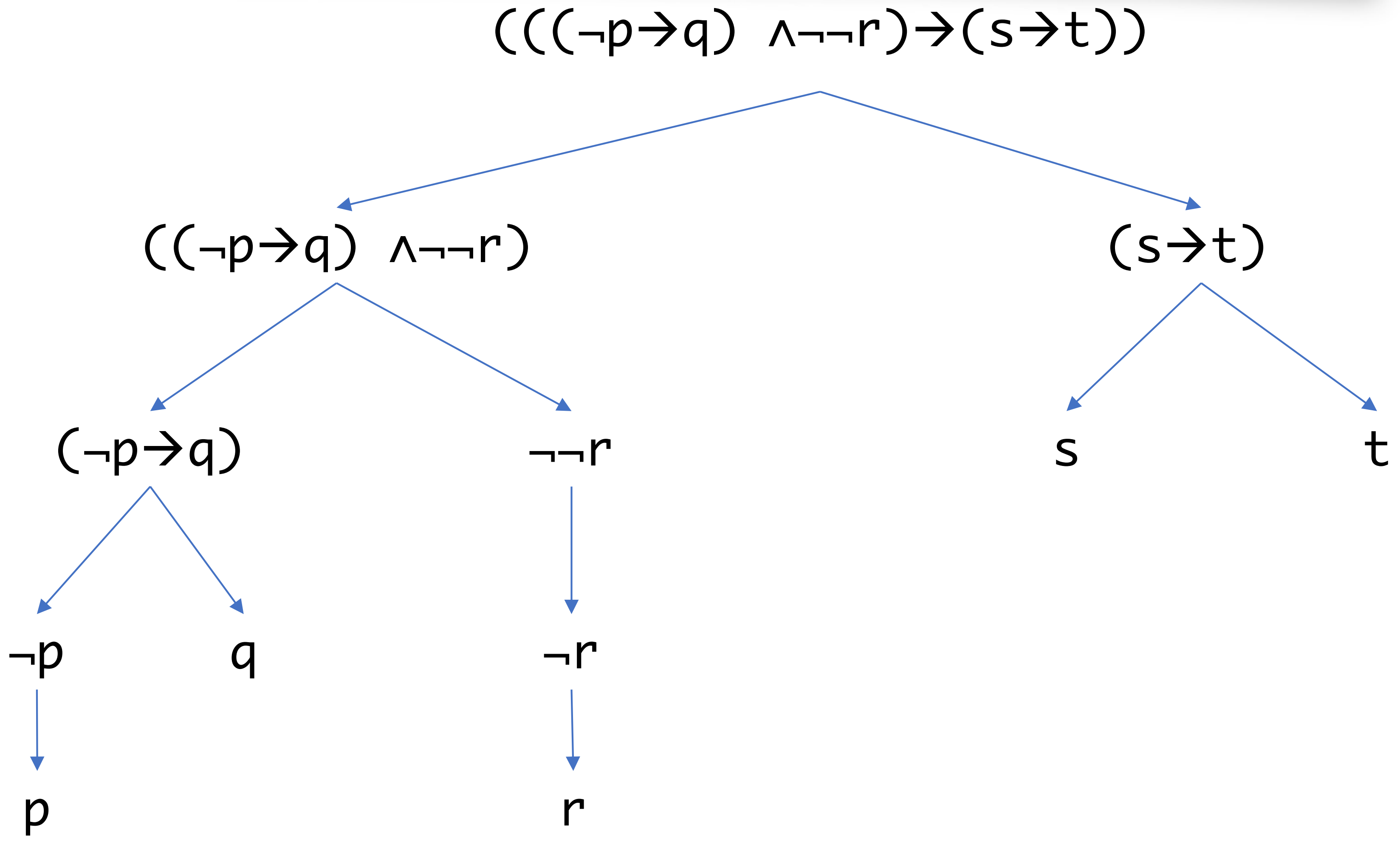
Sous-formules

- Les sous-formules d'une formule A sont les formules qui apparaissent dans son arbre syntaxique.
  - A est une sous-formule de A.
  - Si ($\neg$ B) est une sous-formule de A alors B est une sous-formule de A.
  - Si (B $\wedge$ C) est une sous-formule de A alors B et C sont des sous-formules de A.
  - Si (B $\vee$ C) est une sous-formule de A alors B et C sont des sous-formules de A.
  - Si (B $\rightarrow$ C) est une sous-formule de A alors B et C sont des sous-formules de A.
- Exemple: avec A: $p \rightarrow q$:
  - sous-formules: p, q, $p \rightarrow q$

Arbre syntaxique

- Toute formule A de la logique propositionnelle est représentée par un arbre syntaxique
  - Arbre syntaxique = arbre de construction = arbre de formation
  - La racine de l'arbre correspond à la formule A
  - Les feuilles de l'abre correspondent aux variables propositionnelles
  - Tout noeud (à l'exception des feuilles) a des successeurs

Arbre syntaxique: Exemple



Logique des propositions sémantique

- Les formules sont interprétées dans $\{V, F\}$
- On définit l'interprétation associée à chaque connecteur grâce aux tables de vérité.

Tables de vérité des connecteurs

A	B	¬A	A∧B	A∨B	A→B	A⟷B
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Propriétés des formules

- On appelle **modèle** une interprétation pour laquelle une formule est vraie.
- Une formule est **consistante** s'il existe une interpétation dans laquelle elle est vraie. Elle est **inconsistante** dans le cas contraire.
- Une formule est **valide** si elle est toujours vraie (quelque soit l'interprétation).
- Problème : étant donnée une formule, est-elle valide ? consistante ?

Exemple

Que dire de la formule $(a \rightarrow (b \wedge c))$?

Table de vérité

a	b	c	$b \wedge c$	$a \rightarrow (b \wedge c)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

Quelques équivalences [1]

- $a \vee a \equiv a$, $a \wedge a \equiv a$ (idempotence)
- $a \wedge V \equiv a$, $a \vee V \equiv V$
- $a \wedge F \equiv F$, $a \vee F \equiv a$
- $\neg\neg a \equiv a$ (double négation)
- $a \vee \neg a \equiv V$, $a \wedge \neg a \equiv F$
- $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
- $a \leftrightarrow b \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$

Quelques équivalences [2]

- Lois de De Morgan :
  - $\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$
  - $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$
- Commutativité et associativité de $\vee$ et $\wedge$
- Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$ et de $\wedge$ par rapport à $\vee$
- $a \wedge (a \vee b) \equiv a$, $a \vee (a \wedge b) \equiv a$ (absorption)
- $a \vee (\neg a \wedge b) \equiv a \vee b$

Exemple: Une énigme policière

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences.

On dispose des informations suivantes :

- La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences.
- Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines.
- L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu.

On souhaite démontrer que : **si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment**

Formalisation en calcul des propositions

- `p` : la secrétaire dit vrai
- `q` : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime
- `r` : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- `s` : l'ingénieur a entendu le coup de feu
- `t` : l'ingénieur dit vrai

Résolution de l'énigme

- Les informations de l'énoncé se traduisent par les implications :

  $p \to q,\ q \to r,\ r \to s,\ t \to \neg s$

- Il s'agit de prouver la validité de la formule :

  $(p \to q \land q \to r \land r \to s \land t \to \neg s) \to (p \to \neg t)$

Démonstration

- $(p \rightarrow q \land q \rightarrow r \land r \rightarrow s \land t \rightarrow \neg s) \rightarrow (p \rightarrow \neg t)$
- La formule ne peut être fausse que si
  - $(p \rightarrow \neg t)$ est faux, soit p et t vrais
  - la prémisse est vraie, soit toutes les implications vraies
- Comme t doit être vrai, s doit être faux, donc r faux, donc q faux, donc p faux, et il y a contradiction

Plan

Syntaxe

- On définit :
  - Les constantes : V et F
  - Les connecteurs : $\wedge$ $\vee$ $\neg$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
  - Les parenthèses
  - Les variables : `x, y, z, ...`
  - Les fonctions : `f, g, h, ...`
  - Les prédicats ou relation
  - Les quantificateurs : $\forall$, $\exists$

Définitions

- Terme :
  - Une variable est un terme
  - Une constante est un terme
  - Si t_1, t_2, $\ldots$, t_n sont des termes, alors $f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ est un terme
  - Exemple : `fils(x)`
- Atome :
  - Si t_1, t_2, $\ldots$, t_n sont des termes, et p un prédicat, alors $p(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ est un atome
  - Exemple : `pere(x,y)`

Construction d'une formule

- V, F sont des formules
- Un atome est une formule
- Si F_1 et F_2 sont les formules, alors $\neg F_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \rightarrow F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$ sont des formules
- Si F est une formule, $\forall x\ F$ et $\exists x\ F$ sont des formules
- Exemples :
  $\forall x\ pere(x,fils(x))$
  $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (pere(x,y) \wedge pere(y,z)) \rightarrow papy(x,z)$
- **Remarque** : la logique des propositions est un cas particulier de la logique des prédicats

Liens entre ∀ et ∃

- $\neg\forall x \;\; F \;\equiv\; \exists x \;\; \neg F$
- $\neg\exists x \;\; F \;\equiv\; \forall x \;\; \neg F$
- $\forall x \;\; F \;\equiv\; \neg\exists x \;\; \neg F$
- $\exists x \;\; F \;\equiv\; \neg\forall x \;\; \neg F$

Exemple 1

- Soient
  - `p(x)` : "x est un nombre premier" ;
  - `r(x)` : "x est un nombre réel" ;
  - `q(x)` : "x est un nombre rationnel" ; et
  - `inf(x, y)` : "x < y".

1. "Tout nombre rationnel est un nombre réel";
2. "Il existe un nombre qui est premier" ;
3. "Pour tout nombre x, il existe un nombre y tel que x < y".

Exemple 2

Axiomes basiques des nombres naturels :

- Soient les fonctions
  - `s(x)` : "successeur immédiat de x" ;
  - `p(x)` : "prédécesseur immédiat de x" et
- le prédicat `e(x, y)` : "x = y"

A1. Pour tout nombre, il y a un et seulement un successeur immédiat.

A2. Il n'y a pas un nombre pour lequel 0 est son successeur immédiat.

A3. Pour tout nombre ≠ 0, il y a un et seulement un prédécesseur immédiat.

Exemples de formules valides

- "Certains étudiants assistent à tous les cours."

$$\exists x.(Etudiant(x) \land (\forall y.Assiste(x,y)))$$

- "Aucun étudiant n'assiste à un cours intéressant."

$$\neg\exists x.(Etudiant(x) \rightarrow (Assiste(x,y) \land \neg Interessant(y)))$$

Exercice

Exprimer les énoncés suivants en logique des prédicats.

1. Tous les lions sont féroces.
2. Quelques lions ne boivent pas de café.
3. Aucun singe n'est soldat.
4. Tous les singes sont malicieux.

Définition [1]

- Littéral
  - Un atome est un littéral (positif)
  - La négation d'un atome est un littéral (négatif)
- Une clause est une formule qui a la forme d'une disjonction de littéraux
  - Exemple : `P(x,y) v ¬Q(z)`
  - Une clause concrète est une clause sans variable

Définition [2]

- Une clause de Horn est une clause comportant au plus un littéral positif
- Trois types de clauses de Horn :
  - Faits : pas de littéral négatif
  - Règles : un littéral positif et au moins un littéral négatif
  - Questions : pas de littéral positif.

Définition [3]

- Nous pouvons transformer une formule en un ensemble de clauses (conjonction)
- Un programme en logique de Horn est un ensemble fini de clauses comportant chacune exactement un littéral positif.
- Une requête est un ensemble fini (disjonction) de littéraux négatifs.
- Un programme Prolog est un ensemble de clauses de Horn.

Principle de résolution

- C'est une règle d'inférence qui s'applique aux clauses
- Principe sur des clauses concrètes :
  - $G = G_1 \vee G_2 \vee ... \vee G_n$
  - $H = \neg G_1 \vee H_2 \vee ... \vee H_m$
  - $K = G_2 \vee ... \vee G_n \vee H_2 \vee ... \vee H_m$
- K est le résolvant de G et H, on peut l'ajouter à la conjonction de clauses
- G_1 et $\neg G_1$ sont des littéraux complémentaires

Utilisation

- Le principe de résolution est une règle d'inférence saine,
  - C'est-à-dire: tout résolvant est une conséquence logique des deux clauses parentes.
- Pour appliquer le principe de résolution à des clauses non concrètes, on définit l'**unification**, afin de rechercher des littéraux complémentaires

Plan

1. Logique des propositions
2. Logique des prédicats
3. **Unification**

Unification

- Deux termes t_1 et t_2 sont <u>unifiables</u> s'il existe une substitution σ des variables de t_1 et t_2 telle que $\sigma t_1 = \sigma t_2$
- Exemples :
  - `pere(X,jean)` s'unifie avec `pere(Y,Z)` si `X|Y` et `jean|Z`
  - `pere(jean,mere(X))` s'unifie avec `pere(Y,mere(pierre))` si `jean|Y` et `X|pierre`

Réfutation par résolution

Pour prouver que H est une conséquence logique de G :

- On transforme G et H en ensemble de clauses
- On applique le principe de résolution à $G \lor \neg H$ jusqu'à trouver la clause vide (vrai)
  Ce principe est complet pour les clauses de Horn (Prolog)

Exercice

Trouver la clause résolvante dans les cas suivants :

1. $C1 = \neg Q \vee P$ $C2 = R \vee \neg P \vee S$
2. $C1 = \neg Q \vee P$ $C2 = Q$
3. $C1 = \neg P \vee \neg Q$ $C2 = P \vee S \vee \neg R$
4. $C1 = P \vee Q$ $C2 = R \vee P$

Question?