NGUYEN Thi Minh Tuyen

Théorie des automates et langages formels

Automate fini

Définition

- **Un automate fini est défini par:**
    1. Un ensemble fini non vide d'états avec un état désigné comme l'état de départ (ou initial) et quelques (peut-être aucun) états désignés comme les états finaux (ou états acceptants)
    2. Un alphabet ∑ des lettres d'entrées
    3. Une fonction de transition qui fait correspondre à chaque pair (état, lettre) - un état. «étant dans un état et avec une entrée spécifique, cette fonction indique l'état dans lequel on passe »

$$(\text{état, lettre}) \xrightarrow{\text{transition}} \text{état}$$

- Le langage reconnu par un automate fini est l'ensemble de tous les mots qui terminent dans un état final.
- Si **w** appartient au langage reconnu par un automate fini, alors on dira aussi que l'automate fini accepte **w**.

Exemple

- ∑ = {a, b}
- états = {x, y, z}
- états de départ: x
- état final: {z}

transitions

	a	b
x	y	z
y	x	z
z	z	z

aaa $x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{a} x \xrightarrow{a} y$

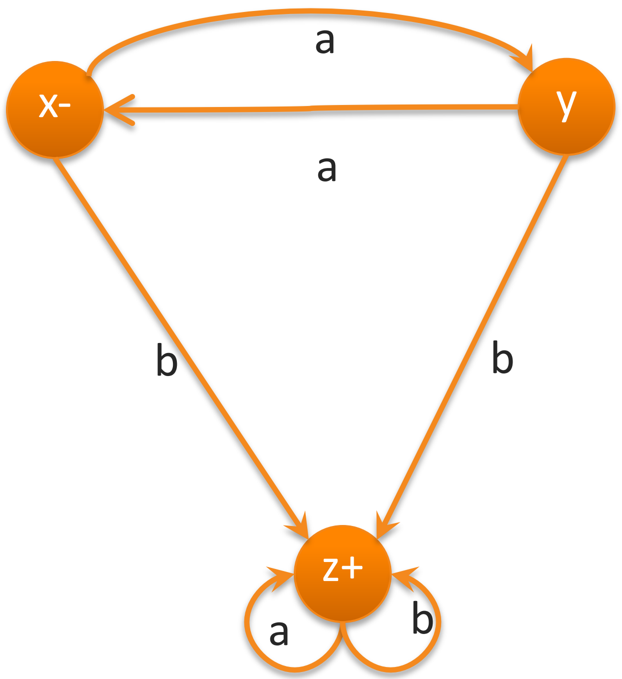
y n'est pas final; aaa est rejecté

aaba $x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{a} x \xrightarrow{b} z \xrightarrow{a} z$

z est final; aaba est accepté

Diagramme des transitions

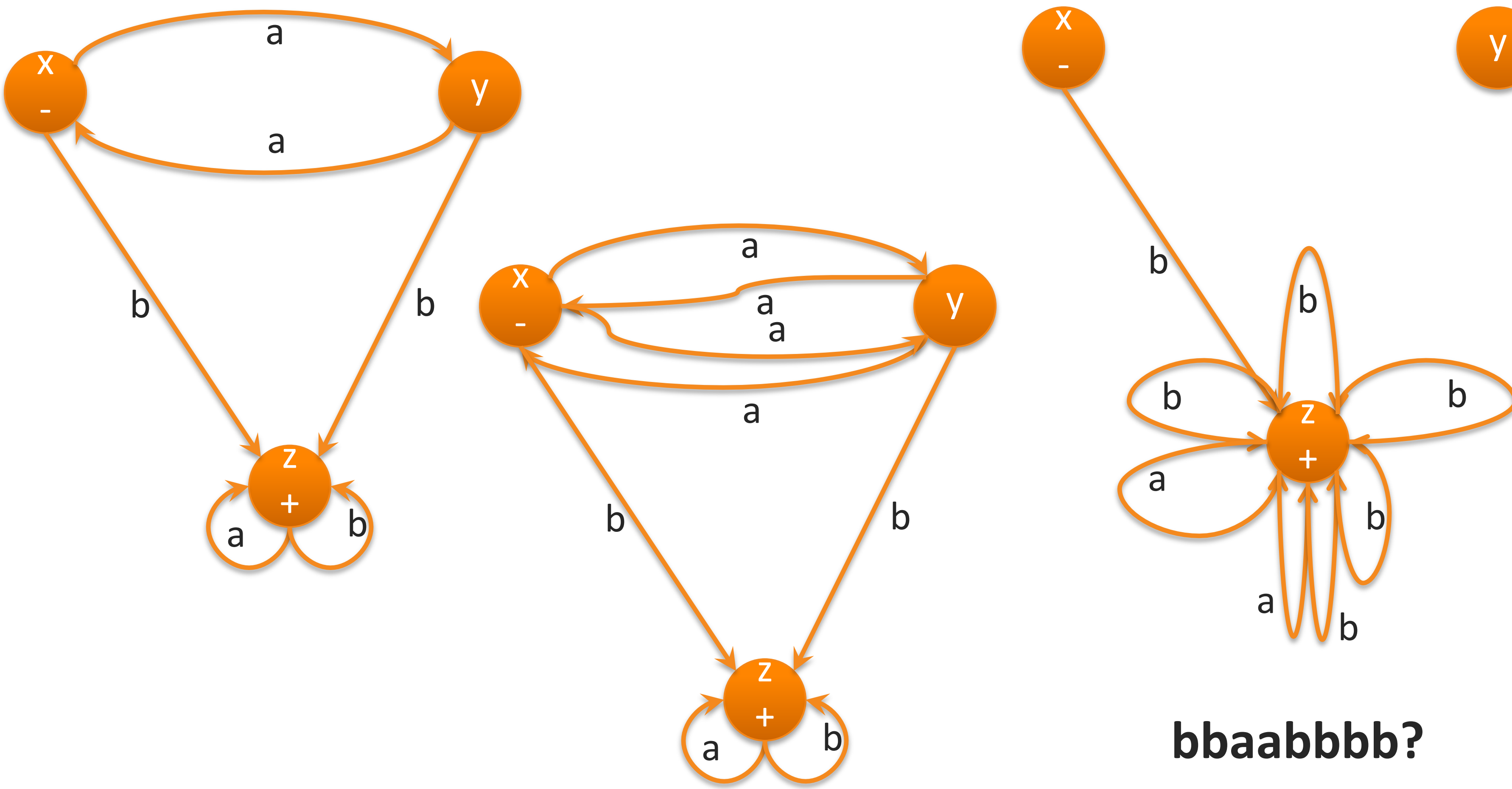
	a	b
x	y	z
y	x	z
z	z	z



Expression Régulière: **(a+b)*b(a+b)***

aaaabba?
bbaabbbb?

Diagramme des transitions



bbaabbbb?

aaaaba?

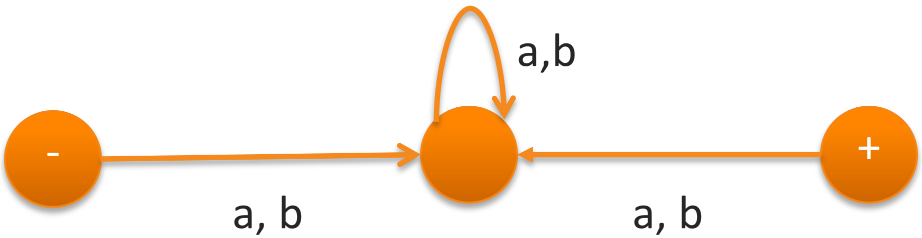
Diagramme des transitions

$(a+b)(a+b)^* = (a+b)^+$

$(a+b)^*$

Automates finis qui n'acceptent aucun mot

Pas d'états finals



L'état du milieu n'est pas un état final et toutes les transitions issues de cet état y restent; un tel état est appelé un rebut.

Étudier les automates finis

- Deux méthodes pour étudier les automates finis:
  1. À partir d'un automate fini, déterminer le langage reconnu
  2. À partir d'un langage, construire un automate fini qui lui correspond.

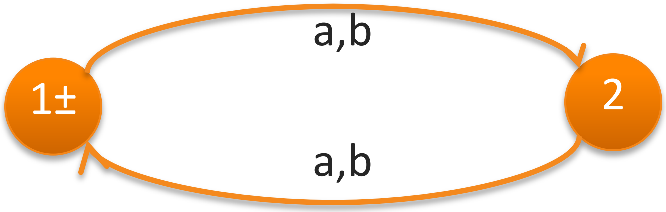
Exemple de 2 états

Le langage formé des mots contenant un nombre pair de lettres:

- Deux états:

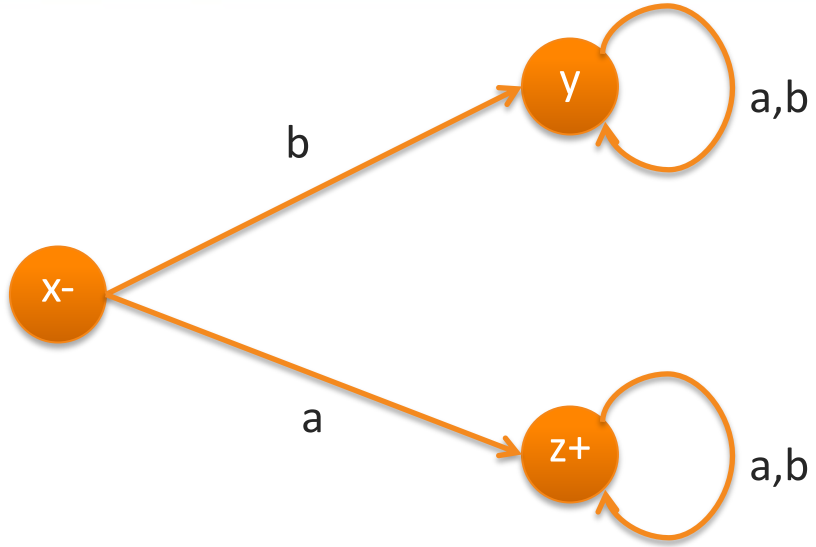
  1 – nombre pair, 2 – nombre impair
- état de départ: 1
- état final: 1
- Les transitions:

	a	b
1	2	2
2	1	1

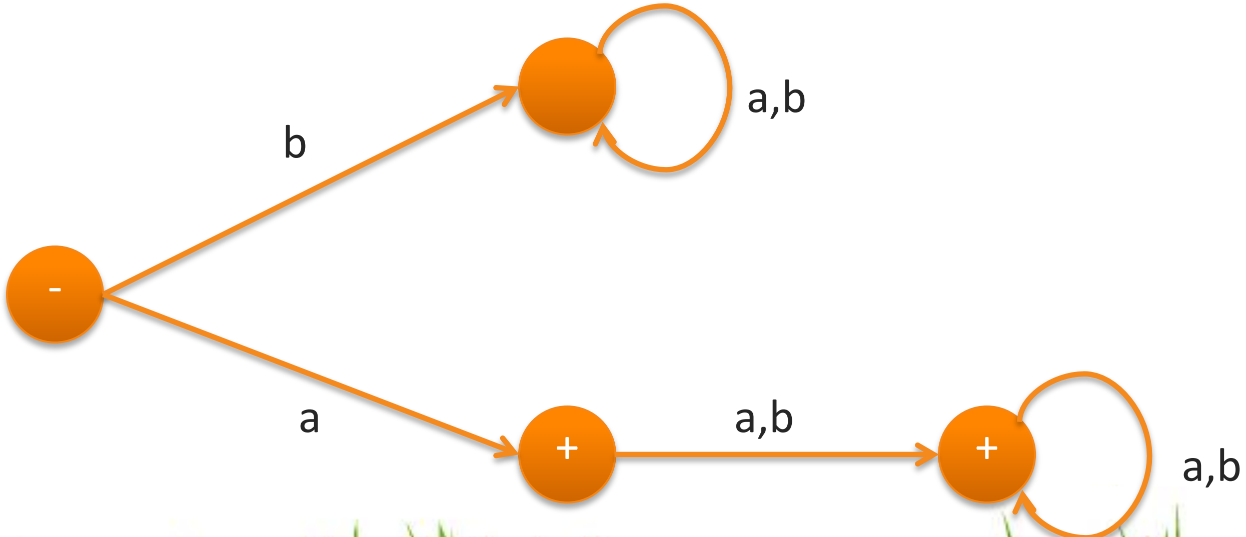


Exemples

a(a+b)*



Pas nécessairement unique:



2 états finaux

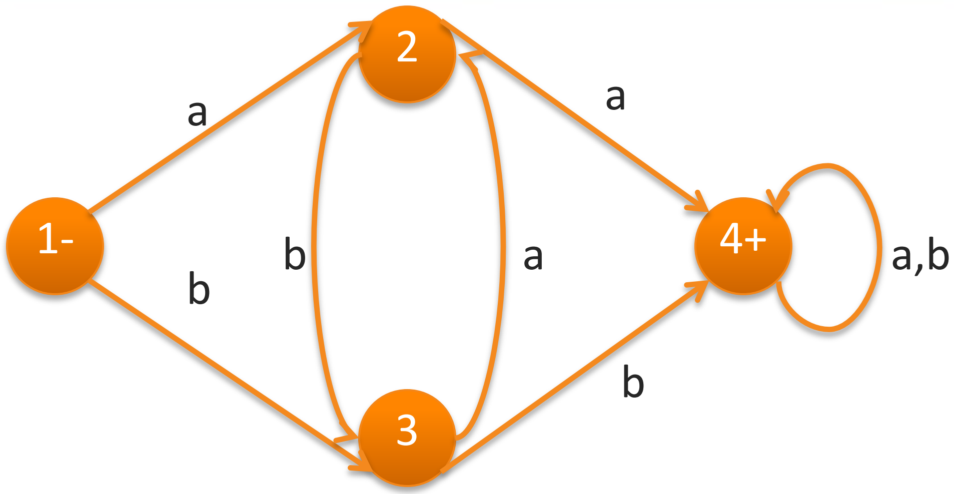
Automates finis associés aux langages

- Il n’y a pas nécessairement un seul automate fini associé à un langage.
- Est-ce qu’il y a toujours, au moins, un automate fini:
  - associé à chaque langage?
  - associé à chaque expression régulière?

Exemple

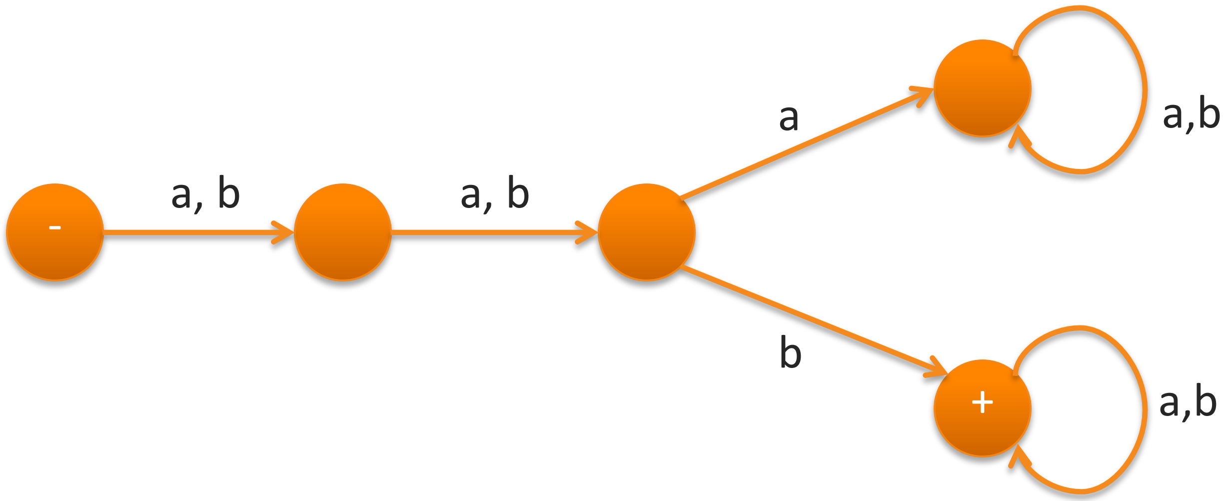
- Construire un automate fini qui accepte tous les mots contenant un triplet de a « aaa » ou un triplet de b « bbb ».
  1. Un automate fini qui accepte aaa
  2. Ajouter un chemin qui accepte bbb.
  3. Ajouter les chemins pour les mots qui contiennent des a et des b **avant** et **après** les facteurs de aaa ou bbb.

Langages associés aux automates finis



1. Cet automate accepte-t-il le mot ababa?
2. Le mot babbb?
3. 2 façons pour arriver à l’état 4
4. 2 possibilités pour arriver à l’état 2 (par l’entrée a)
5. 2 pour arriver à l’état 3 (par l’entrée b)
6. Quel langage?

Langages associés aux automates finis

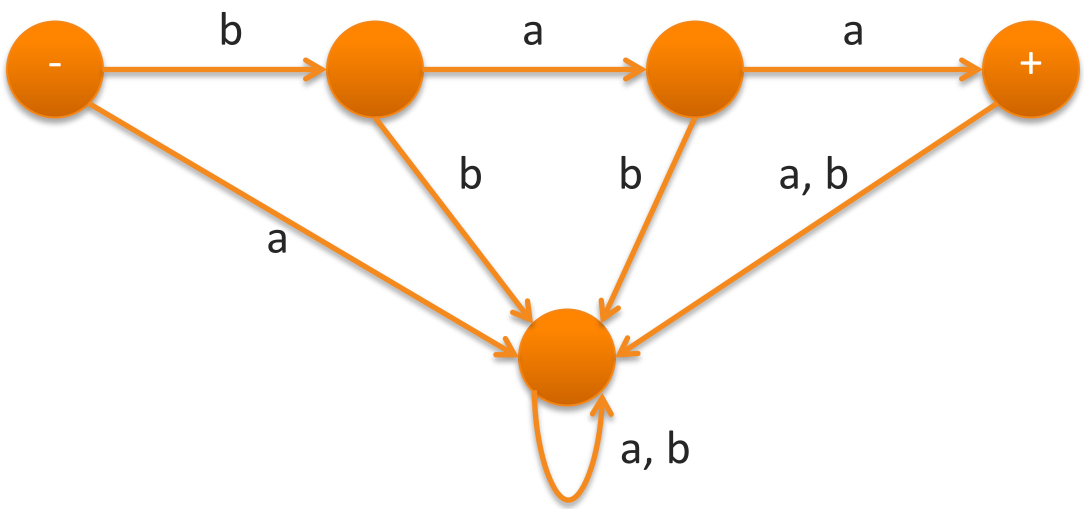


- La troisième lettre est b.

  (aab + abb + bab + bbb)(a+b)*

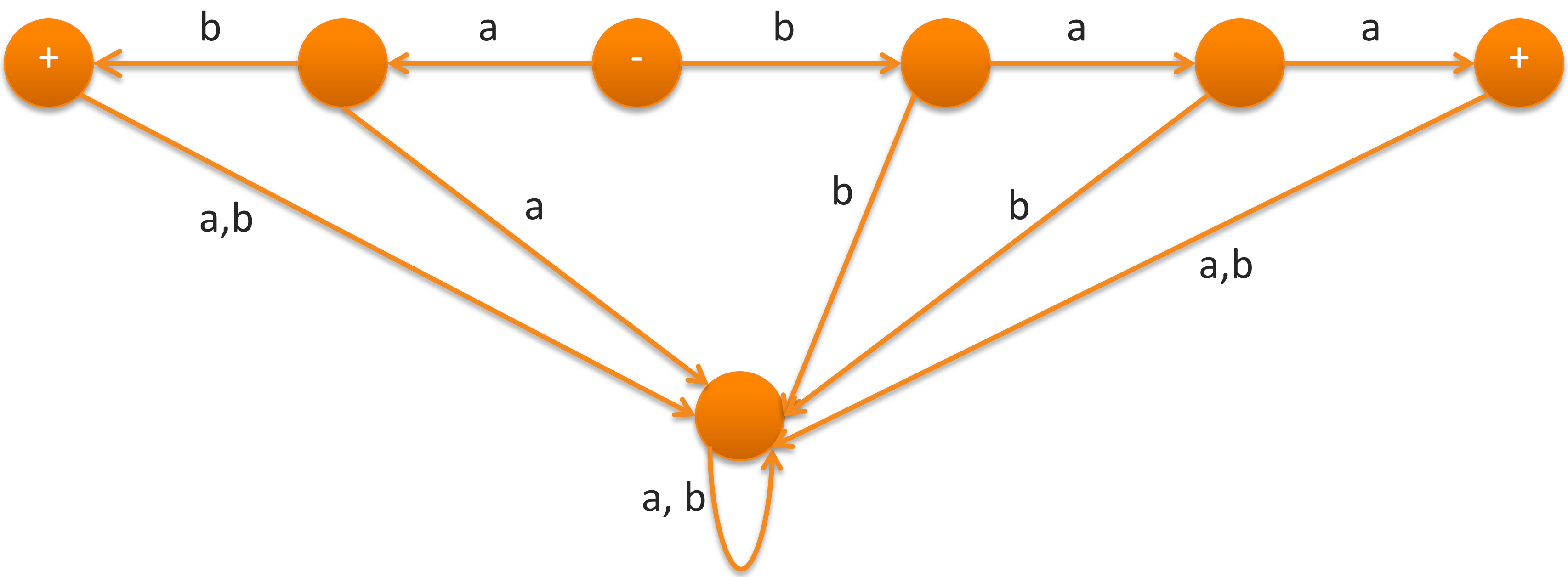
  $(a+b)(a+b)b(a+b)^* = (a+b)^2b(a+b)^*$
- L’expression régulière n’est pas unique.
- Existe-t-il toujours une expression régulière associé à chaque automate fini?

Langages associés aux automates finis



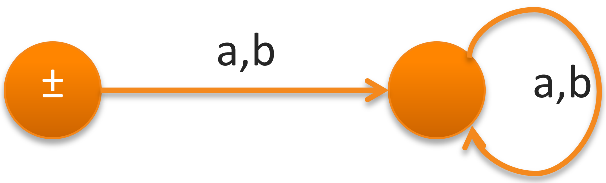
- expression régulière : **baa**
- Un rebut pour tous les autres mots.

Langages associés aux automates finis

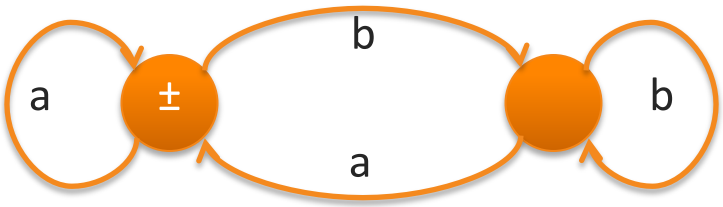


expression régulière : **baa + ab**

Langages associés aux automates finis

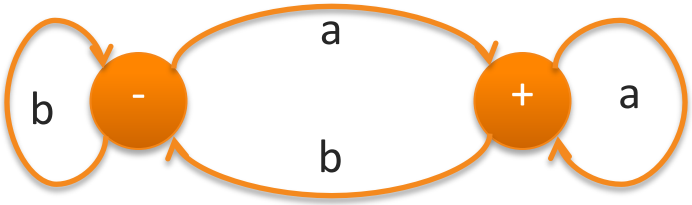


Λ



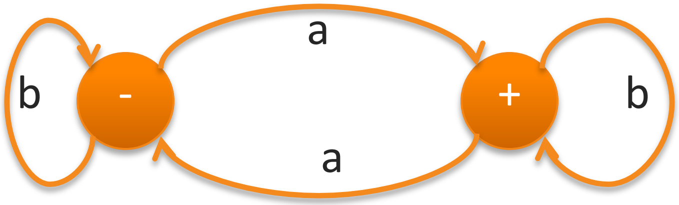
(a+b)*a+Λ

Mots qui ne finissent pas par un “a”.



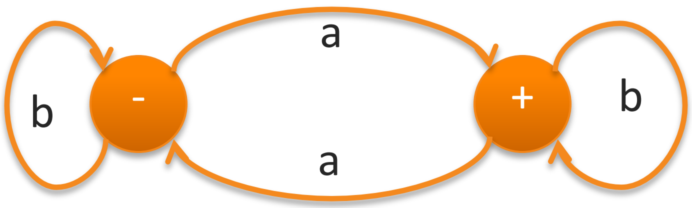
(a+b)*a

Mots qui finissent par un “a”.



?

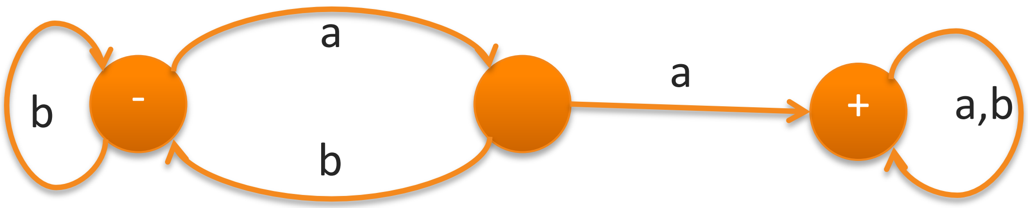
Langages associés aux automates finis



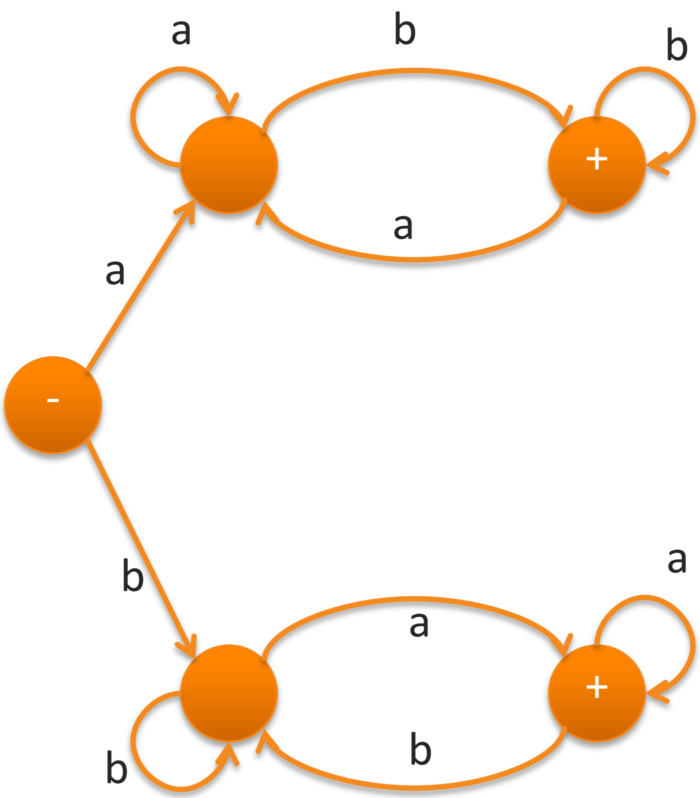
- « a » est l'unique lettre qui change les états.

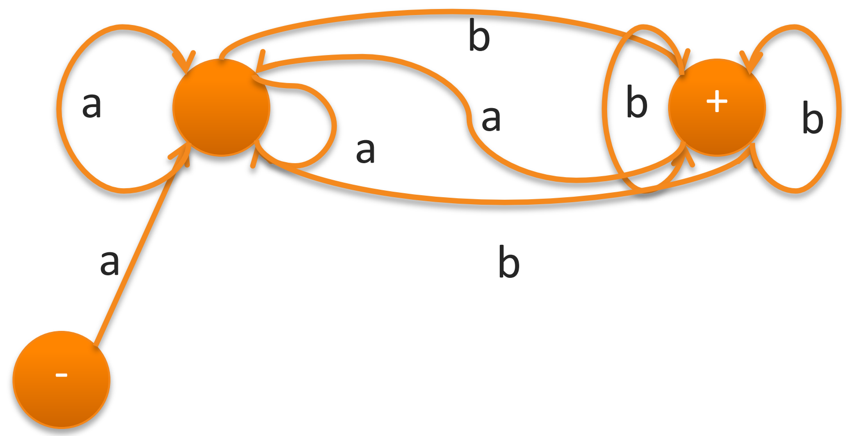
  (b*ab*)(ab*ab*)*
- Un nombre impair de « a »

Langages associés aux automates finis



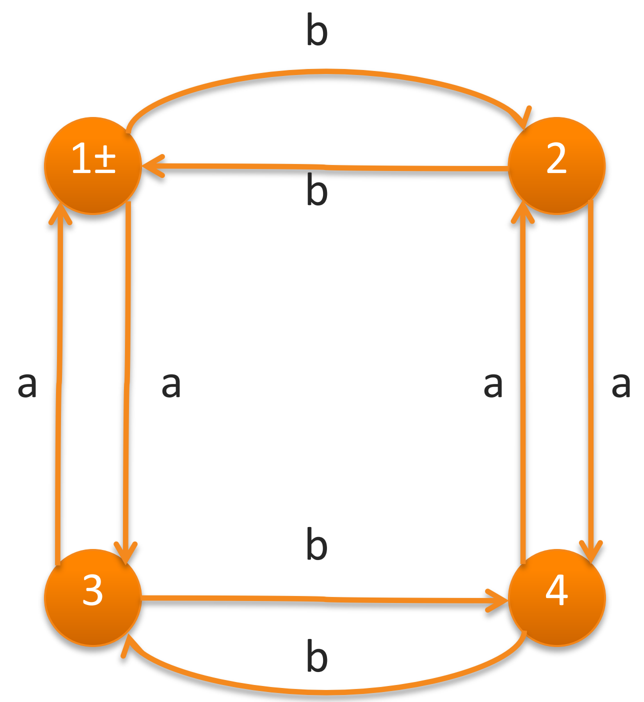
- Mots qui contiennent un double a « aa »
  (a+b)*aa(a+b)*
- L’état de départ: la lettre précédente (s’il y en a eu une) ne peut être un a.
- L’état de milieu: on venait de voir un a qui n’a pas été précédé par un autre a.
- L’état final: on a sûrement rencontré un double a





aabbaabb

Le langage PAIR-PAIR



Question?