$with(plots)$:
$with(Student[LinearAlgebra])$:

Workshop 4

Delopgave 1

1.1

Antagelserne ovenfor betyder, at bolden ikke hat nogle acceleration. Brug integralregning til at vise at $X(t) = x_0 + t \cdot v_0$ så længe bolden ikke kolliderer med noget.

Vi kan at: $\vec{x}\,'(t) = \vec{v}(t) \quad \rightarrow \vec{v}\,'(t) = \vec{a}(t)$ hvor at $\vec{a}(t)$ er vores accelerations vektor som vi har fået givet er 0.

Vi kan nu finde $\vec{v}(t)$ ved at tage integralet af $\vec{a}(t)$ fra 0 til tiden t.

$$\int_0^t \vec{a}(t)\,\mathrm{d}t + \vec{v_0} = \vec{v}_0$$

Det fortæller os at vores hastighed er konstant.

Vi kan nu tage intregralet af $\vec{v}_0$ for at begynde at finde x_0
ved at tage integralet kan vi sige at

$$\int_0^t \vec{v}(s)\,\mathrm{d}s = [\vec{x}(s)]_{s=0}^{s=t} = x(t) - x(0) :$$

$$\int_0^t \vec{v}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \vec{v}_0\,\mathrm{d}s = \left[s \cdot \vec{v_0}\right]_{s=0}^{s=t} = t \cdot \vec{v_0} + 0 \cdot \vec{v_0} = t \cdot \vec{v_0} :$$

$$x(t) - \vec{x}(0) = \int_0^t \vec{v}(s)\,\mathrm{d}s = t \cdot \vec{v_0} \rightleftharpoons x(t) = \vec{x}(0) + t \cdot v_0 = \vec{x_0} + t \cdot \vec{v_0} :$$

plusser med $\vec{x}(0)$ på begge sider for at få: $\vec{x_0} + t \cdot \vec{v_0}$: til sidst.

1.2

Algorytme for hvornår bildene rammer hindanden:

Hvis længden mellem de to vektore er støre end de to radiuser lig hindanden har boldene ikke ramt hindanden, men hvis aftanden mellem vektorene er det samme som radiuserne lig hindanden er der en kolition, og hvis aftenaden er mindre er skær boldene hinanden.

setning vi får gevet senere

$\left(r_1 + r_2\right)^2 < \left\|x_2(0) - x_1(0)\right\|^2$

$\left(r_1 + r_2\right)^2 > \left\|x_2(\Delta t) - x_1(\Delta t)\right\|^2$

Bestem en formel for det tidspunkt i intervaller $[0, \Delta t]$, hvor boldene kolidere.

Bliver ikke nævnt i videoen og er mærkeligt at forstår om det er en del af opgaven.

1.3

Prikprodukt

$\|x \pm y\|^2 = \|x^2\| + \|y\|^2 \pm 2(x \cdot y)$

Vi kan starte med at opgæve "|| ||"
$(x \pm y) \cdot (x \pm y) = x \cdot x + y \cdot y \pm 2(x \cdot y)$ Det her kan vi gøre fordi vi ved at længden af en vektor i anden er det samme som at tage prikproduktet af en vektor med sig selv. $2(x \cdot y)$ Kan omskrives til $(2x) \cdot y$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2$

$|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 = a_1^2 + a_2^2$

Kilde: https://www.webmatematik.dk/lektioner/matematik-b/vektorer-i-2d/skalarprodukt

Vi kan reducere setningen til at blive til: $(x \pm y) \cdot (x \pm y) = x^2 + y^2 \pm 2x \cdot y$
Vi kan også reducere vensre side af lighedstegnet: $x^2 + y^2 \pm 2x \cdot y = x^2 + y^2 \pm 2x \cdot y$

1.4

Hvis ligningen går op; med at radiuserne sammelagt i anden er det samme som afstanden mellem de to boldes centrum i anden er der en kollition. ligningen er afhængi af t til at bestemme tidspunktet de kolidere, hvis $t = 0$ forexemple, kan det være lgningen ikke går op. Ligningen kan kun gå op hvis t er det rigtige tal.

1.5

Vi kan starte med at skrive dem ud:
$\left(r_1 + r_2\right)^2 = \left\|\left(x_2 + tv_2\right) - \left(x_1 + tv_1\right)\right\|^2$ vi kan rykke lidt rund nu for at få et bedre over blik.
$\left\|\left(x_2 - x_1\right) + \left(tv_2 - tv_1\right)\right\|^2$ her fra kan vi flytte t ud a parntesen så ligningen hedder:
$\left\|\left(x_2 - x_1\right) + t\left(v_2 - v_1\right)\right\|^2$ Det er det samme for selv hvis t er ude for pantecen bliver den ganget på begge tal.

Ved at samligning den nuværende ligning med ligningen fra opgave 1.3, kan vi kalde $\left(x_2 - x_1\right)$ for vores x værdi og $t\left(v_2 - v_1\right)$ for vores y værdi.

Som vi kan se på højre side af ligheds teget i opgave 1.3, kan vi indsætte de x og y værdier vi har lavet.
$\|x \pm y\|^2 = \|x^2\| + \|y\|^2 \pm 2(x \bullet y)$

$$\left\|x_2 - x_1\right\|^2 + t\left\|v_2 - v_1\right\|^2 + 2t\left(x_2 - x_1\right) \bullet \left(v_2 - v_1\right)$$

1.6

Skal lige have lavet 1.5 først, men virker ret lige til

Vi kan nu gennem den tideligere opgave lave vores konstanter x og y om til andre variabler så det er nemere at læse som en anden grads ligning.

Først minuser vi med $(r_1 + r_2)^2$ på begge sider for at få liningen $=0$

(vi) Hvis vi definerer $a = \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|^2$, $b = 2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$, og $c = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2 - (r_1 + r_2)^2$, så kan andengradsligningen i (4) skrives på den velkendte form

$$at^2 + bt + c = 0. \qquad (5)$$

Vi skal i dette spørgsmål undersøge denne ligning nærmere.

a)

I ulighed (1) vises det at hvis $t=0$ er $\left\|x_2 - x_1\right\|^2 > \left(r_1 + r_2\right)^2$ hvilket vil betyde at hvis der bliver minuset med $\left(r_1 + r_2\right)^2$ på begge sider før hen, at $0 < \left\|x_2 - x_1\right\|^2 \nleq \left(r_1 + r_2\right)^2$

Hvis v_2 og v_1 er $=0$ vil det betyde at $v_2 = v_1$ hvilket vil give os en $\Delta t \cdot 0 = 0$ og efterlade os med ulighed (1) som vi fandt ud af er støre end 0.

b)

hvis man isulere for b bliver den nigativ. Hint: Alt andet er positivt
Vi ved fra opgave (a) at både c og a er støre end 0 så hvis ligningen skal gå op, skal b være lavere end 0.

c)

diskriminanten
Vi kan starte med at gange pantecen ud:
$b^2 - 4ac > 4a^2\Delta t + b^2 + 4a\Delta tb$
Vi kan state med at dividere med $4a$ på begge sider for at få:
$b^2 - c > a^2\Delta t + b^2 + \Delta tb$ Her fra kan vi minus med b^2 og der efter $+c$.
$0 > a^2\Delta t + b\Delta t + c$

d)

Diskriminaten skal være lavere eller lig 0

e)

Vi ved at t kan være $=0$ men $\Delta t > t$
Tag kvadrat roden af begge sider og isoler fra t i (7)

Delopgave 2

2.1