$with(plots):$
$with(Student[LinearAlgebra]):$

Noter:
Rotation ting ting som Christian fil læren til at fortælle ham

Vi starter med at finde vektoren mellem de to punkter $\vec{u}$
så rotere vi den rundt om origo med θ og bruger den nye vektor til at gå fra punkt x0, og så har vi det nye.

$\theta := \frac{\pi}{4}:$
$P := (1, 1):$

$RotationMatrix(\theta)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

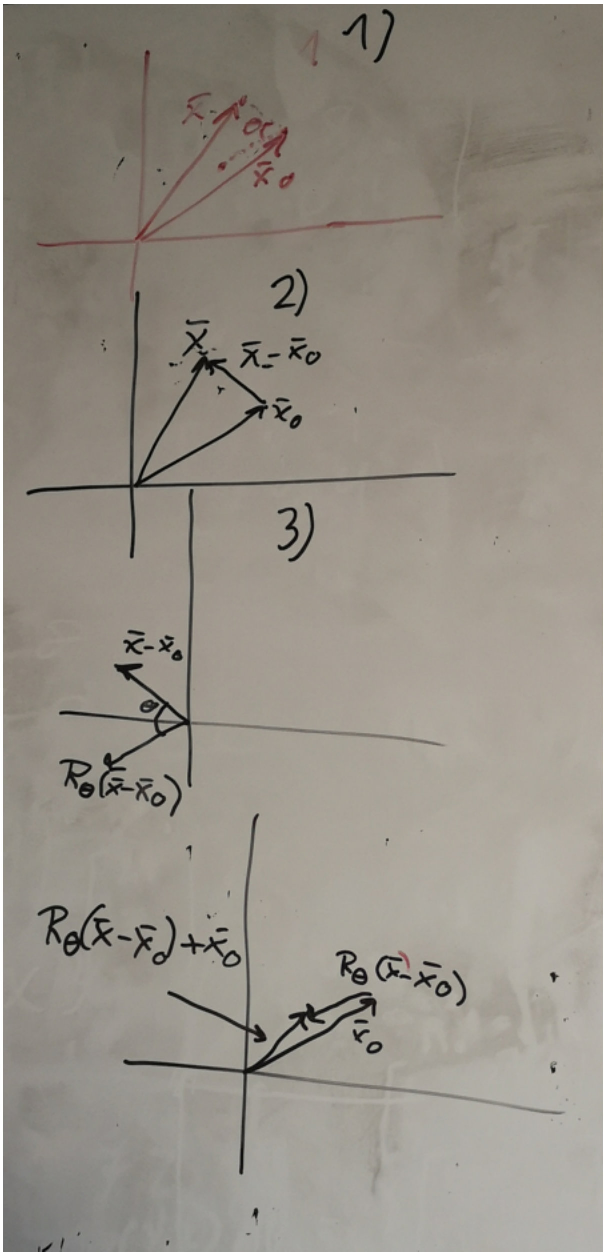
$T\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}:$

T_a

$$T_a \quad (2)$$

Delopgave 1

(i)



vi skal argumentere for giver formel:
så det vi gerne ville i andre ord er at roter punkt x rundt om punkt x_0 med vinklet θ .

Vi ved hvordan man rotater omkring orego (punkt (0,0)) ved hjælp af $R_\theta(x)$

Vi ved at vektoren punktet vi gerne ville rotater er x omkring x_0. Vi kender jo hvordan man rotater rundt omrkring orego og vectoren vi jo gerne ville roter er vectoren frax_0 til vector x med θ . Vi kan finde vectoren imellem dem ved at trække dem fra hindanen. så vectoren er $x - x_0$ og rotation med theta omkring orego er $R_\theta(x)$ så hvis vi ersatter x med vores vector for vi nu den rotateret vector omkring orego som er $R_\theta\left(x - x_0\right)$. vi kan rykke vectoren med frem til pived pointet med at lægge pivetpoint vectoren til så vi for $R_\theta\left(x - x_0\right) + x_0$

hvilket har givet os formelen:
$R_\theta(x - x_0) + x_0 = R_\theta x + (1 - R_\theta)x_\theta$

(ii)

løsning 1

Denne opgave er forkert se: https://panopto.aau.dk/Panopto/Pages/Viewer.aspx?pid=fcc471b5-cabd-40d7-85d6-acc50072e077&id=fea846f7-099c-45c2-92d3-acc40159487d&advance=true

Vi ved at for at en transformation T kan siges at være lineær er hvis

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

og at:

$$T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$$

vi ved at første del af transformation er $T_{\theta,p}(x) = R_\theta x + (1 - R_\theta)x_\theta$ så $R_\theta(x)$ da vi har fået oplyst så vi kan undersøge om de er linære hvis disse regler gælder

Regl 1
vi kan finde ud af om regl et er sandt ved at sætte $t(\vec{0}) = \vec{0}$

$T(x) = (i - R_\theta)x$

vi ville genre finde ud af hvad $T(0)$ er lig med 0

$T(x) = (i - R_\theta)x$
$T(0) = (i - R_\theta)0$
$T(0) = i \cdot 0 - R_\theta \cdot x$
$T(0) = 0 - 0$

$$T(0) = 0 \qquad (3)$$

og som sagt oven over er i beskrivels er regl 1 opfyldt

Regl 2
Vi ved jo at regl 2 er:

$$T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$$

så hvis vi først finder
$T(au + bv)$ og derefter $aT(u) + bT(v)$ og de er det samme så er tranfation linær

$T(a\vec{u}+b\vec{v})$

$$T(a\vec{u}+b\vec{v})=(I-R_\theta)\cdot(a\vec{u}+b\vec{v})$$

$$=I\cdot(a\vec{u}+b\vec{v})-R_\theta\cdot(a\vec{u}+b\vec{v})$$

$$=I\cdot a\vec{u}+I\cdot b\vec{v}-R_\theta\cdot a\vec{u}-R_\theta\cdot b\vec{v}$$

$aT(\vec{u})+bT(\vec{v})$

$$aT(\vec{u})+bT(\vec{v})=a\cdot(I-R_\theta)\cdot\vec{u}+b\cdot(I-R_\theta)\cdot\vec{v}$$

$$=(I-R_\theta)\cdot a\vec{u}+(I-R_\theta)\cdot b\vec{v}$$

$$=I\cdot a\vec{u}-R_\theta\cdot a\vec{u}+I\cdot b\vec{v}-R_\theta\cdot b\vec{v}$$

Konklustion
da begge regler er opfyldt kan vi konkludere at transformation T kan siges at være lineær

løsning 2 :

Vi kan sige at den er linær hvis $T(x+y)=Tx+Ty$ og at $T(c\cdot x)=c\cdot T(x)$ så hvis vi starte med at renge:

$T(c\cdot x)=R(c\cdot x)+(I-R)x_0$
$c\cdot T(x)=c\cdot\left(R(x)+(I-R)x_0\right)$
$c\cdot T(x)=c\cdot R(x)+c\cdot(I-R)x_0$
vi kan se at de 2 linjer at den tilføjet konstant kun er linær hvis $(I-R)x_0$ er 1 for ellers er de 2 ligninger ikke lig hindanden

(iii)

Da vi oven over har fået af hvide at formelen er $R_\theta\left(x-x_0\right)+x_0$

og vi ved at

$\theta := \frac{\pi}{4}$

$$\theta := \frac{\pi}{4} \tag{4}$$

$P := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

vi kender også punktet som det skal dreje omkring

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det betyder vi kan regne resutaltet ud sådan her

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,414 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(iv)

restart :

Vi ved at rotation for kan udtrykkes som:

$$R_\theta x + \left(1 - R_\theta\right) x_\theta$$

$$R_\theta x + \left(1 - R_\theta\right) x_\theta \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \left(1 - \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - \cos(\theta))\, x_0 + \sin(\theta)\, y_0 \\ -\sin(\theta)\, x_0 + (1 - \cos(\theta))\, y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - \cos(\theta))\, x_0 + \sin(\theta) y_0 \\ (1 - \cos(\theta))\, y_0 - \sin(\theta)\, x_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y + (1 - \cos(\theta))\, x_0 + \sin(\theta)y_0 \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y + (1 - \cos(\theta))\, y_0 - \sin(\theta)\, x_0 \end{bmatrix}:$$

Da vi skal have det havde det som rumlig koordinater og vi ved at det kun skal være i kordinat 1 kan vi skrive matrixen som

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y + (1 - \cos(\theta))\, x_0 + \sin(\theta)y_0 \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y + (1 - \cos(\theta))\, y_0 - \sin(\theta)\, x_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og dette kan også skrives som:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & (1 - \cos(\theta))\, x_0 + \sin(\theta)y_0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & (1 - \cos(\theta))\, y_0 - \sin(\theta)\, x_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Delopgave 2

(i)

dette kan gøres med at gange Rx på dem alle

(ii)

udrenging af matrie:

$\theta := \frac{\pi}{2}$:

$$R_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$R_y := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_y := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$R_z := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$R = R_z R_y R_x$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

(iii)

For at kunne vise at rotatoinerne sammensætning er det samme som rotation på y aksen kan gøre ved at udrenge R og R_y og hvis de er det samme så må sammensætningen af tre rotationer så er det faktisk bare en rotation om y-aksen med en vinkel på $\frac{\pi}{2}$

$\theta := \frac{\pi}{2}$:

$$R_y := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_y := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$R = R_z R_y R_x$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Da de to rotationer er det samme kan vi konkludere at

ammensætningen af tre rotationer så er det faktisk bare en rotation om y-aksen med en vinkel på $\frac{\pi}{2}$

(iv)

tror dette er forkert for vi kan bare finde den reduceret trappeform og finde løsningen

Vi ved at lining systemet er:

$(R - I)x = 0$

Vi ved at R er rotations matrixen som lyder:

$$R = R_z R_x R_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

I er identitet matrixen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I denne opgave skal vi finde x hvor det opfylder

$(R - I)x = 0$

og

$Rx = Ix = x$

$$\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) x = 0 :$$

$$\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} & \frac{x\sqrt{2}}{2} \\ \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & -\frac{x\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{x\sqrt{2}}{2} & \frac{x\sqrt{2}}{2} & -x \end{bmatrix} = 0 \qquad \textbf{(14)}$$

Hvis vi gætter 0 for vi

$x := 0$

$$x := 0 \qquad \textbf{(15)}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}x\sqrt{2} & \frac{1}{2}x\sqrt{2} & -x \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(16)}$$

vi kan nu se om svaret passer: $Rx = Ix = x$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Da svaret er det samme på begge sider må det være rigtigt

(v)

(iv)

Delopgave 3

(i)

Vi har 2 kvationer

$$q := \left[1, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right]:$$

$$p := \left[1, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right]:$$

$$qp = \left[1\cdot 1 - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, 1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right]$$

$$qp = \left[1 - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right]$$

$$qp = \left[1 - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]$$

$$qp = \left[1 - 0, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]$$

$$qp = \left[1, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right]$$

$$pq = \left[1\cdot 1 - \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right]$$

$$pq = \left[1 - 0, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right]$$

$$pq = \left[1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right]$$

(ii)

der skal vises at $q = [s, \lambda v]$er en enheds kvataion når $s^2 + \lambda^2 = 1$ og $\|v\| = 1$

længden kan regnes ud :
$q^* q = [s, -\lambda v][s, \lambda v]$

$= [s \cdot s - (-\lambda v) \cdot \lambda v, 0 \cdot s + 0 \cdot s + 0 \times 0]$
$= [s^2 + \|\lambda v\|^2, 0]$
$= [s^2 + \lambda^2 \|v\|^2, 0]$
vi har antaget at $\|v\| = 1$ og $s^2 + \lambda^2$

$= [1 \cdot 1 \cdot 1, 0]$
$= [1, 0]$

da vi for $[1, 0]$ kan vi antage at $q = [s, \lambda v]$er en enheds kvataion når $s^2 + \lambda^2 = 1$ og $\|v\| = 1$

(iii)

Vi skal regne :

$qpq^{-1} = [s, \lambda v][0, u]q^{-1}$

$qpq^{-1} = [s, \lambda v][0, u]\frac{1}{|q|^2} q^*$

da det er en enheds kvataion er lægnden 1

$qpq^{-1} = [s, \lambda v][0, u]\frac{1}{1}[s, -\lambda v]$

$qpq^{-1} = [s, \lambda v][0, u][s, -\lambda v]$

Vi ved at

$$s = \cos\left(\frac{0}{2}\right) \text{ og } \lambda = \sin\left(\frac{0}{2}\right)$$

$$qpq^{-1} = \left[\cos\left(\frac{0}{2}\right), \sin\left(\frac{0}{2}\right)v\right][0, u]\left[\cos\left(\frac{0}{2}\right), -\sin\left(\frac{0}{2}\right)v\right]$$

$$qp = \left[\cos\left(\frac{0}{2}\right), \sin\left(\frac{0}{2}\right)v\right][0, u]$$

$$\cos\left(\frac{0}{2}\right)$$

$$1 \tag{19}$$

(iv)

(v)

Delopgave 4

Dette er matlab opgaver

(i)

(ii)

(iii)