Introduktion

Denne workshop omhandler en model for en beholder med et antal bolde, der bevæger sig uden påvirkning af ydre kræfter. Når boldene kolliderer med hinanden eller beholderens sider antages kollisionerne at være fuldstændigt elastiske, dvs. vi antager at

1. den kinetiske energi er bevaret,

2. momentum er bevaret.

Vi skal senere se nærmere på detaljerne i disse to antagelser. Dette er (tilnærmelsesvist) tilfældet når f.eks. molekyler i en gas, eller billiardkugler støder sammen.

For at få en realistisk model er det essentielt at basere modellen på fysikkens love. Dette gælder for alle modeller man laver, både simple modeller som i denne workshop, og mere komplicerede modeller som f.eks. computerspil og animationer. Fysikken bag en kollision mellem tre eller flere bolde på en gang er meget mere komplicerede, end når blot to bolde kolliderer, så for at undgå dette antager vi også at

3. en bold kan kun kollidere med én anden bold, eller en side af beholderen ad gangen.

Selvom det selvfølgelig godt kan ske, at en bold kan kollidere med to andre på præcis samme tid, så er sandsynligheden for at dette sker så lille, at det i praksis ikke forekommer.

Modellen består af Matalb filerne `kollisioner.m`, `Model.m`, `Container.m`, `Ball.m`. Modellen kan ses ved at køre filen `kollisioner.m`. Modellen genererer en regulær polygon, og placerer et antal bolde inde i denne polygon. Udover at have en position har boldene også en radius, en masse og en hastighedsvektor. Massen og radiussen er proportionale. Når man kører modellen regner den boldenes positioner ud som tiden går, og som boldene kolliderer med hinanden og polygonen. *Kør filen* `kollisioner.m` *og se hvordan modellen virker.*

Lige som alle andre computermodeller af virkeligheden (herunder computerspil og animationer) er modellen i denne workshop baseret på en diskret tidsinddeling. Det vil sige, at modellen kun udregner boldenes positioner til udvalgte tidspunkter f.eks. tiderne 0, 0.01, 0.02, osv. Hvis tidsintervallet er lille, og boldenes hastighedsvektorer ikke er for store, så får man en model, der ser kontinuert ud for det menneskelige øje. Der er dog forskellige problemer forbundet ved at anvende et fast tidsinterval. F.eks. kan man, hvis man ikke tænker sig godt om, risikere (hvis boldenes hastighedsvektorer er store) at boldene kan passere igennem hinanden, eller beholderen, uden at modellen registrerer, at de skulle være kolliderede. Derudover kan man risikere at tre eller flere bolde kolliderer i samme tidsinterval. For at undgå dette tager modellen i denne workshop udgangspunkt i et fast tidsinterval Δt, men opdeler så dette i mindre intervaller, hvis det er nødvendigt. I grove træk gør modellen følgende til tiden t.

1. Bestem den første kollision i tidsintervallet $I = [t, t + \Delta t]$, og find den første tid $t_1 \in I$ hvor en kollision forekommer.
2. Udregn boldenes positioner til tiden t_1 og udregn de kolliderende boldes hastighedsvektorer efter kollisionen.
3. Gentag punkt 1-2 men med tidsintervallet $I = [t_1, t + \Delta t]$ indtil der ikke forekommer kollisioner i tidsintervallet I.
4. Udregn boldenes positioner til tiden $t + \Delta t$.

Denne procedure gentages så til tiden $t + \Delta t$ osv.

1 Delopgave 1

I denne delopgave skal vi beskrive boldenes bevægelser vha. vektorfunktioner, og bestemme det præcise tidspunkt for en kollision mellem to bolde. Vi betragter en bold, hvor positionen af boldens centrum beskrives med stedvektoren $\mathbf{x}(t)$. Vi antager, at boldens centrum til tiden $t = 0$ befinder sig i positionen beskrevet ved stedvektoren $\mathbf{x}_0$, og til denne tid har bolden hastighedsvektoren $\mathbf{v}_0$. Vi antager også, at der ikke er nogle ydre kræfter der påvirker bolden, inden den første gang kolliderer med en anden bold eller en af beholderens sider.

(i) Antagelserne ovenfor betyder, at bolden ikke har nogen acceleration. Brug integralregning til at vise at

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}_0,$$

så længe at bolden ikke kolliderer med noget.

(ii) Betragt to bolde hvis centre er beskrevet ved stedvektorerne $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$, og som har radier r_1 og r_2. Beskriv en algoritme der ud fra disse 4 oplysninger afgør, om boldene skærer hinanden (er kollideret) eller ej.

Som nævnt i introduktionen så virker modellen ved at undersøge, hvad der sker, når man går et lille skridt Δt frem i tiden. Derfor er modellen tit i en situation, hvor to bolde ikke er kollideret til tiden t_0, mens de til tiden $t_0 + \Delta t$ ikke bare er kollideret men også halvt på vej igennem hinanden. I de nedenstående opgaver betragter vi præcis denne situation. Dvs. at vi betragter to bolde, hvis centre fra tiden $t = 0$ og frem til boldene kolliderer er beskrevet ved vektorfunktionerne $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_2 + t\mathbf{v}_2$. Vi antager at boldene har radier r_1 og r_2. Modellen kender ikke umiddelbart tidspunktet for kollisionen, men udregner i stedet positionerne et lille skridt frem i tiden, altså $\mathbf{x}_1(\Delta t)$ og $\mathbf{x}_2(\Delta t)$. Vi antager, at algoritmen fra (ii) viser, at boldene skærer hinanden til tiden Δt. Udtrykt med formler betyder det, at modellen kender følgende oplysninger

$$(r_1 + r_2)^2 < \|\mathbf{x}_2(0) - \mathbf{x}_1(0)\|^2 \tag{1}$$

$$(r_1 + r_2)^2 > \|\mathbf{x}_2(\Delta t) - \mathbf{x}_1(\Delta t)\|^2 . \tag{2}$$

Vi skal bestemme en formel for det tidspunkt i intervallet $[0, \Delta t]$, hvor boldene kolliderer.

(iii) Lad $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ være vilkårlige vektorer. Brug egenskaberne ved prikproduktet til at vise at

$$\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \pm 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

Hint: $\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} \pm \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} \pm \mathbf{y})$.

(iv) Argumenter for, at tidspunktet for kollisionen er en løsning til ligningen

$$(r_1 + r_2)^2 = \|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)\|^2 , \tag{3}$$

hvor t er den ubekendte. Hint: Størrelsen $\|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)\|$ angiver afstanden mellem boldenes centrummer til tiden t.

(v) Brug at $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_2 + t\mathbf{v}_2$, samt opgave (iii) til at omskrive (3) til

$$(r_1 + r_2)^2 = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2 + t^2 \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|^2 + 2t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \tag{4}$$

(vi) Hvis vi definerer $a = \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|^2$, $b = 2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$, og $c = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2 - (r_1 + r_2)^2$, så kan andengradsligningen i (4) skrives på den velkendte form

$$at^2 + bt + c = 0. \tag{5}$$

Vi skal i dette spørgsmål undersøge denne ligning nærmere.

(a) Konkluder fra (1) at $c > 0$. Argumenter efterfølgende for at $a > 0$. Hint: Hvis vi antager at $a = 0$ så er $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ og indsættes dette i (1) og (2) fås ulighederne

$$(r_1 + r_2)^2 < \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2$$
$$(r_1 + r_2)^2 > \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2 .$$

Hvad betyder dette for vores antagelse om at $a = 0$?

(b) Ved anvende opgave (iii) samt definitionerne af a, b og c kan man omskrive (2) til

$$0 > a\Delta t^2 + b\Delta t + c. \tag{6}$$

Brug (a) samt det faktum at $\Delta t > 0$ til at vise at $b < 0$.

(c) Vis at uligheden (6) er ækvivalent med uligheden

$$b^2 - 4ac > (2a\Delta t + b)^2, \tag{7}$$

og konkluder, at diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ for andengradsligningen i (5) er ikke-negativ. Hint: Gang parentesen i (7) ud og reducer.

(d) Brug (a) til at argumentere for at $d < b^2$ og konkluder at tidspunktet for kollisionen er givet ved

$$t = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{8}$$

samt at $t > 0$.

(e) Brug (7) til at konkludere at $t < \Delta t$.

Delopgave 2

Fra delopgave 1 ved vi, hvordan boldene bevæger sig, når ikke de kolliderer med noget. Derudover ved vi også, hvordan vi udregner det præcise tidspunkt for en kollision. I de to næste delopgaver skal vi undersøge hvordan en kollision mellem to bolde påvirker de involverede hastighedsvektorer.

For at beskrive en fuldstændig elastisk kollision mellem to bolde i en vilkårlig dimension er det nemmest først at forstå en fuldstændig elastisk kollision i en dimension. I denne opgave betragter vi to partikler med (positive) masser hhv. m_1 og m_2 som kolliderer i én dimension, dvs. at partiklerne bevæger sig på en linje. Før kollisionen har partiklerne hastighederne hhv. u_1

og u_2, og efter kollisionen har de hastighederne hhv. v_1 og v_2. Antagelserne 1 og 2 fra indledningen kan nu formuleres som

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2, && \text{(energibevarelse)} \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1u_1 + m_2u_2, && \text{(impulsbevarelse)} \end{aligned} \tag{9}$$

Vi ønsker at bestemme de nye hastigheder v_1 og v_2 udfra de ovenstående ligninger.

(i) Argumenter for at det er fornuftigt at forvente at $v_1 \neq u_1$ og $v_2 \neq u_2$.

(ii) Brug formlen $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, samt antagelserne $v_1 \neq u_1$ og $v_2 \neq u_2$ til at omskrive (9) til ligningssystemet

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= u_2 - u_1, \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1u_1 + m_2u_2. \end{aligned} \tag{10}$$

(iii) Vis at ligningssystemet (10) kan skrives som

$$A\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

hvor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix}.$$

(iv) Vis at

$$A^{-1} = \frac{1}{m_1 + m_2}\begin{bmatrix} m_2 & 1 \\ -m_1 & 1 \end{bmatrix},$$

og brug dette til at vise at

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = A^{-1}B\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{m_1 + m_2}\begin{bmatrix} m_1 - m_2 & 2m_2 \\ 2m_1 & m_2 - m_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2}\begin{bmatrix} (m_1 - m_2)u_1 + 2m_2u_2 \\ 2m_1u_1 + (m_2 - m_1)u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Delopgave 3

Når to bolde (i to eller højrere dimensioner) kolliderer, kan man reducere det til en kollision i en dimension. For at kunne gøre dette, skal vi kunne opdele en vektor i to ortogonale dele. Lad $\mathbf{r}$ være en vektor med længde 1, og lad $\mathbf{u}$ være en vilkårlig vektor. Vi ønsker at bestemme to vektorer $\mathbf{u}_{\|}$ og $\mathbf{u}_{\perp}$, således at $\mathbf{u}_{\|}$ er parallel med $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}_{\perp}$ står vinkelret på $\mathbf{r}$, og $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\|} + \mathbf{u}_{\perp}$.

(i) Lad $\mathbf{u}_{\|} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$. Argumenter for at $\mathbf{u}_{\|}$ og $\mathbf{r}$ er parallelle.

(ii) Vis at

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|} = \mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$$

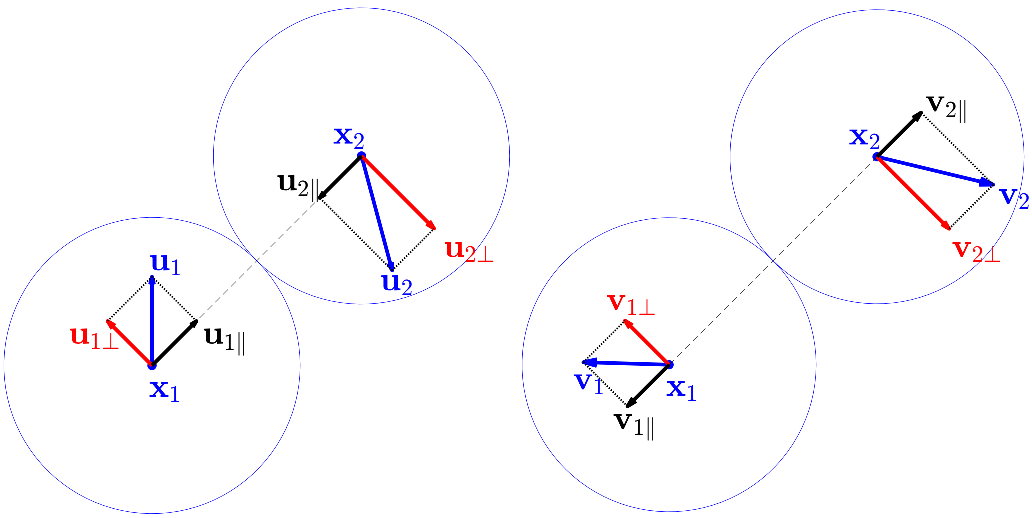
står vinkelret på $\mathbf{r}$. Hint: Betragt prikproduktet $\mathbf{u}_{\perp}\cdot\mathbf{r}$ og brug antagelsen $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|^2 = 1$.

Vi betragter nu situationen afbildet i Figur 1. De to bolde antages at have deres centre placeret i punkterne givet ved stedvektorerne $\mathbf{x}_1$, og $\mathbf{x}_2$ (blå prikker i Figur 1), og har tilhørende hastighedsvektorer $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ (blå vektorer i Figur 1) umiddelbart inden kollisionen. Vi skal i denne delopgave se, hvordan man udregner hastighedsvektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ umiddelbart efter kollisionen.

Vektoren $\mathbf{r} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)$ er en enhedssvektor for linjen, der forbinder de to centre. For at kunne anvende resultaterne fra delopgave 2 bruger vi (i) og (ii) ovenfor til at skrive

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_{1\|} + \mathbf{v}_{1\perp}, \quad & \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_{1\|} + \mathbf{u}_{1\perp}, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_{2\|} + \mathbf{v}_{2\perp}, \quad & \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_{2\|} + \mathbf{u}_{2\perp}, \end{aligned} \tag{12}$$

hvor $\mathbf{u}_{1\perp}$, $\mathbf{v}_{1\perp}$, $\mathbf{u}_{2\perp}$ og $\mathbf{v}_{2\perp}$ står vinkelret på $\mathbf{r}$, og $\mathbf{u}_{1\|}$, $\mathbf{v}_{1\|}$, $\mathbf{u}_{2\|}$ og $\mathbf{v}_{2\|}$ er parallelle med $\mathbf{r}$. Det er nemmest at bestemme de to vektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ved først at bestemme komponenterne $\mathbf{v}_{1\|}, \mathbf{v}_{2\|}, \mathbf{v}_{1\perp}, \mathbf{v}_{2\perp}$.



Figur 1: Kollision mellem to bolde i to dimensioner. Venstre billede viser hastighedsvektorerne umiddelbart før kollisionen. Højre billede viser hastighedsvektorerne umiddelbart efter kollisionerne.

(iii) Argumenter for at kollisionen ikke påvirker vektorerne $\mathbf{u}_{1\perp}$ og $\mathbf{u}_{2\perp}$ (inddrag gerne Figur 1). Konkluder at

$$\mathbf{v}_{1\perp} = \mathbf{u}_{1\perp}, \quad \mathbf{v}_{2\perp} = \mathbf{u}_{2\perp}.$$

(iv) Argumenter for at udregningen af hastighedsvektorerne $\mathbf{v}_{1\|}$ og $\mathbf{v}_{2\|}$ ud fra $\mathbf{u}_{1\|}$ og $\mathbf{u}_{2\|}$ kan betragtes som et endimensionelt problem. Konkluder efterfølgende, vha. delopgave 1(iv) at

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{1\|} &= \frac{(m_1 - m_2)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{r}) + 2m_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{r})}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \\
\mathbf{v}_{2\|} &= \frac{2m_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{r}) + (m_2 - m_1)(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{r})}{m_1 + m_2}\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

(v) Brug formlerne i (12) til at vise at

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}((\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}, \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}((\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

Hint: Vis først at

$$\mathbf{v}_{1\|} = \frac{(m_1 + m_2)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{r}) + 2m_2((\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{r})}{m_1 + m_2}\mathbf{r},$$

og reducer efterfølgende brøken. Gør det samme for $\mathbf{v}_{2\|}$.

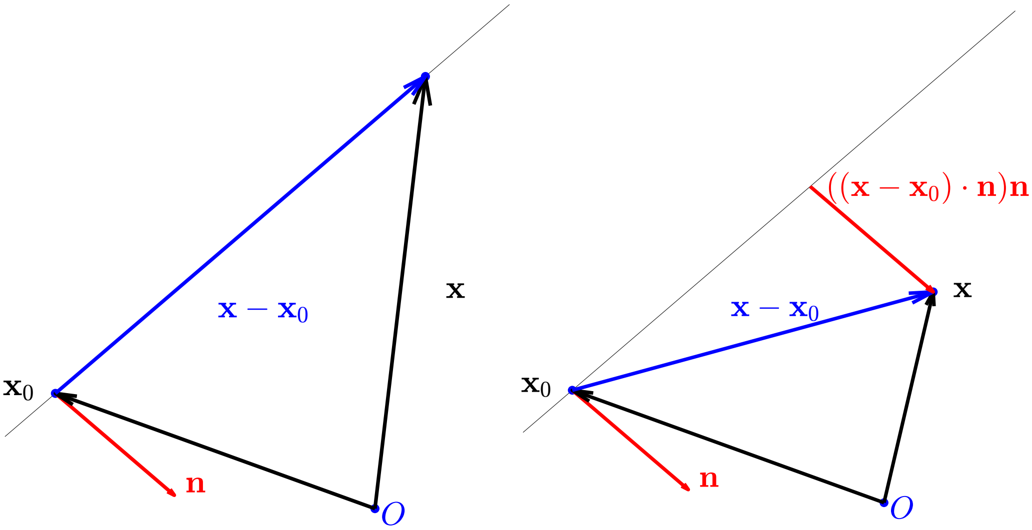
Delopgave 4

I denne delopgave betragter vi en af beholderens sider. Dette er enten en linje eller en plan, alt efter om vi arbejder i 2 eller 3 dimensioner. Bemærk dog at modellen i Matlab kun er todimensionel, selvom de formler vi beskæftiger os med i denne delopgave også gælder i højere dimensioner.

Siden (hvad enten det er en linje eller en plan) er karaktiseret ved en normalvektor $\mathbf{n}$ og et punkt, givet ved stedvektoren $\mathbf{x}_0$, som er indeholdt i linjen/planen. Et punkt beskrevet med stedvektoren $\mathbf{x}$ ligger på/i linjen/planen, hvis det er en løsning til *linjens/planens ligning*

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0. \tag{13}$$

Dette er afbildet i Figur 2. Vi vil antage, at $\mathbf{n}$ har længde 1. I de følgende opgaver betragter vi en bold med centrum $\mathbf{x}$ og radius r.



Figur 2: Venstre: Skitse af en plan/linje der indeholder punktet med stedvektor $\mathbf{x}_0$. Højre: Skitse af en plan/linje der ikke indeholder punktet med stedvektor $\mathbf{x}_0$

(i) Brug delopgave 3 (i) og (ii) til at argumentere for at $((\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ er parallel med $\mathbf{n}$, og står vinkelret på linjen/planen. Se også Figur 2.

(ii) Argumenter for at afstanden fra $\mathbf{x}$ til linjen/planen er lig $|(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n}|$ og brug dette til at beskrive en algoritme der udfra $\mathbf{x}$, $\mathbf{n}$ og r afgør om bolden er kollideret med siden.

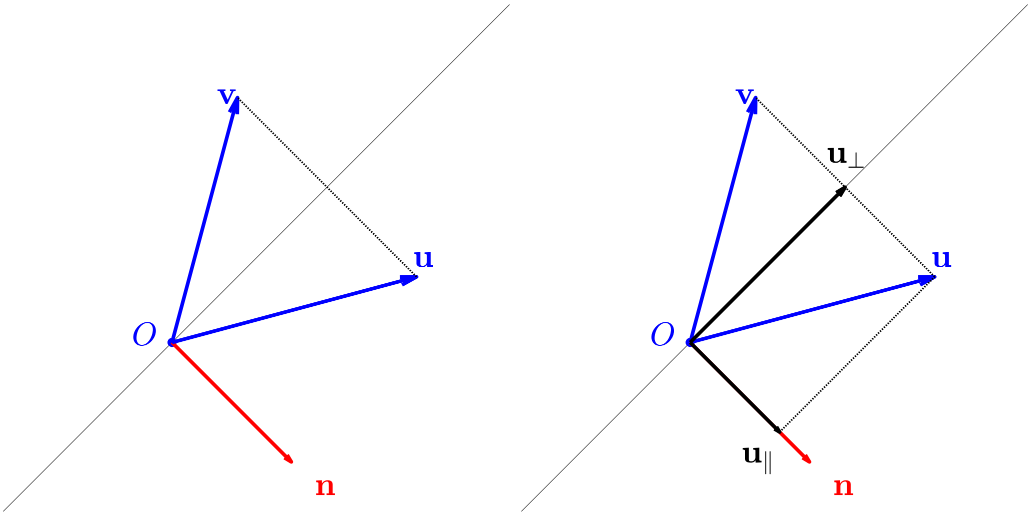
Når en af boldene rammer en af beholderens sider, siger fysikkens love at boldens hastighedsvektor bliver spejlet i siden. I de nedenstående opgaver skal vi undersøge spejlinger nærmere. Vi betrager en side, (en linje eller en plan) der har normalvektor $\mathbf{n}$. Vi antager at linjen/planen går gennem origo, og at $\mathbf{n}$ har længde 1. Spejlingen af en (sted)vektor $\mathbf{u}$ i linjen/planen med normalvektor $\mathbf{n}$ er afbildet i Figur 3. Igen bruger vi delopgave 3 (i) og (ii) til at skrive $\mathbf{u}=\mathbf{u}_{\parallel}+\mathbf{u}_{\perp}$ i to dele; $\mathbf{u}_{\parallel}$ der er parallel med $\mathbf{n}$ og $\mathbf{u}_{\perp}$, som står vinkelret på $\mathbf{n}$. Vi har altså at

$$\mathbf{u}_{\parallel}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n},\quad \mathbf{u}_{\perp}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_{\parallel}.$$

Dette er også afbildet i Figur 3. Bemærk at $\mathbf{u}_{\perp}$ ligger på/i linjen/planen da den står vinkelret på $\mathbf{n}$.

(iii) Argumenter ud fra Figur 3 for at den reflekterede vektor $\mathbf{v}$ er givet ved

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}-2\mathbf{u}_{\parallel}=\mathbf{u}-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$



Figur 3: Vektoren $\mathbf{u}$ spejles i linjen/planen med normalvektor $\mathbf{n}$. Bemærk at den resulterende vekor her kaldes $\mathbf{v}$.

(iv) Lad R være afbildningen defineret ved

$$R\mathbf{u} = \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Altså er R afbildningen, der reflekterer $\mathbf{u}$ i linjen/planen med normalvektor $\mathbf{n}$. Vis at R er lineær, dvs. vis at $R(c\mathbf{u}) = cR\mathbf{u}$ for enhver konstant c, samt at $R(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = R\mathbf{u} + R\mathbf{v}$ for ethvert valg af vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

(v) Hvilke vektorer opfylder ligningen $R\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

(vi) Vis at $\|R\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$. Hvad betyder dette resultat for farten af en bold før og efter en kollision med en side? Hint: brug delopgave 1(iii).