Introduktion

Når man skal modellere virkeligheden, er det vigtigt, at man har en forståelse for de fysiske love, der gælder for det man vil modellere. I et computerspil vil man f.eks. ofte gerne have, at diverse objekter "opfører sig" som i virkeligheden, og det kan man kun, hvis man kan oversætte de matematiske formler bag fysikkens love til computerens verden.

Vi vil i denne opgave modellere solsystemet udfra Kelpers love. Johannes Kepler fremsatte fra 1609 til 1619 tre love, der beskriver planeters bevægelser i solsystemet. Disse tre love udbyggede det kopernikanske system baseret på observationer af Tycho Brahe. Keplers tre love formuleres i dag ofte som:

1. Planetbanerne er ellipser med Solen i det ene brændpunkt.
2. Forbindelseslinien fra Solen til en given planet overstryger lige store arealer i lige store tidsrum
3. Kvadratet på omløbstiden i banen er proportionalt med den halve storakse i tredje potens.

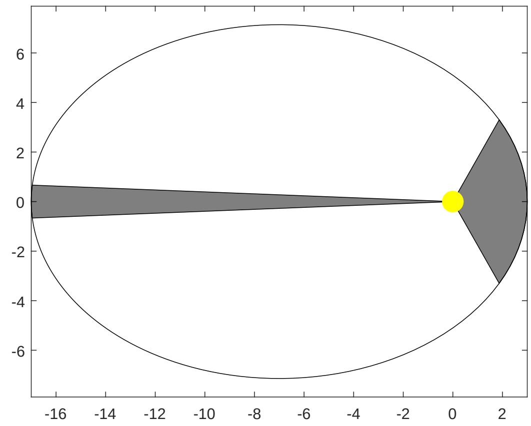
I denne workshop skal vi modellere solsystemet (med varierende præcision) udfra Keplers love. Bemærk, at Keplers anden lov medfører, at planeter bevæger sig hurtigere når de er tæt på Solen, sammenlignet med når de er langt fra Solen. I Figur 1 kan man f.eks. se en planet med en elliptisk bane. De to grå arealer er lige store, og fra Keplers 2. lov følger det at planeten med den givne bane tilbagelægger de tilsvarende stykker af ellipsen på samme tid. Keplers love gælder for alle objekter der roterer omkring Solen, dette gælder også for eksempelvis Pluto og Halleys komet.

Hvis man vil have en mere præcis model af solsystemet, så kan man anvende Newtons love. På den måde kan man tage højde for de indbyrdes krafter mellem planeter.

I denne workshop skal i arbejde med Matlabfilerne `solsystemet.m` og `trapezreglen.m`. Disse filer skal bruges til at besvare spørgsmålene i workshoppen. Derudover er de to modeller der betragtes indeholdt i Matlabfilerne hhv. `model1.m` samt `solar_system.m`, `Sun.m`, `Planet.m`, `Comet.m` og `newtons_method.m`.

Delopgave 1

I denne delopgave skal vi se nærmere på en 2D-model af solsystemet, som opfylder Keplers første lov dvs. planeterne bevæger sig i elliptiske baner, og solen er placeret i et af ellipsens brændpunkt. Koden for modellen findes i



Figur 1: En planetbane, samt arealet der overstrykes af forbindelseslinjen mellem planeten og Solen i det samme tidsrum.

Matlab-filen `model1.m` og når koden køres, får man en fin lille animation af planeternes, Plutos og Halleys komets baner omkring Solen. Vi skal i denne delopgave undersøge, hvordan denne model er bygget op.

En ellipse i planen med centrum i (x_0, y_0), halve storeakse a og halve lilleakse b (hvor $a \geq b > 0$) er typisk beskrevet som alle punkter (x, y), der opfylder ligningen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Ellipsens brændpunkter er givet ved $(x_0 \pm \sqrt{a^2-b^2}, y_0)$.

(i) Vis at ellipsen i (1) kan beskrives vha. den parametriske kurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} a\cos(t) + x_0 \\ b\sin(t) + y_0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{2}$$

(ii) Bestem hastighedsvektoren for $\mathbf{r}$ i (1), og vis at farten er givet ved

$$v(t) = \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2(t) + b^2}. \tag{3}$$

(iii) For hvilke værdier af t er farten størst?

(iv) I Matlab-filen `model1.m` er der lavet en simpel model af solsystemet i 2d, hvor planetbanerne, samt banen for Pluto og Halleys komet er givet ved parametriske kurver på formen

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} a\cos\left(\frac{t}{T}\right) - \sqrt{a^2-b^2} \\ b\sin\left(\frac{t}{T}\right) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

hvor T er planetens omløbstid i år. Leg lidt med filen, og argumenter for at modellen opfylder Keplers første lov. Brug (ii), (iii) og Figur 1 til at argumentere for at modellen ikke opfylder Keplers anden lov.

(v) Keplers tredje lov siger, at alle planeterne opfylder, at

$$a^3 = cT^2,$$

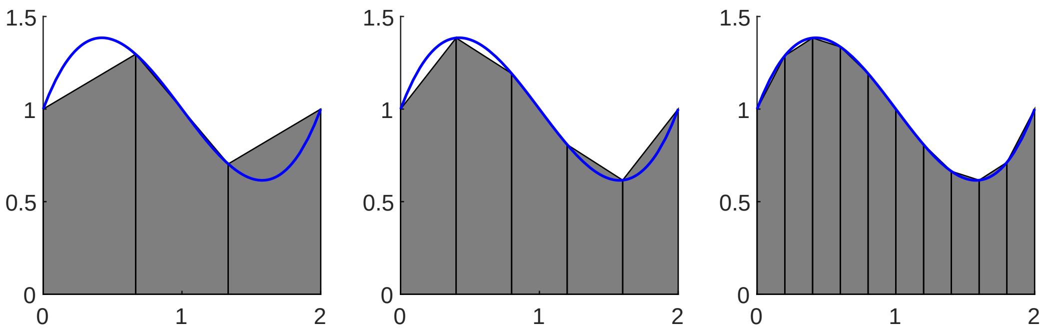
hvor T er planetens omløbstid, a er den halve storeakse og c er en konstant. Ved at anvende Newtons love kan man vise at proportionalitetskonstanten c er (tilnærmelsesvis) den samme for alle planeterne. Argumenter for, at hvis man plotter punkterne (T, a) i et dobbelt logaritmisk koordinatsystem, så ligger punkterne (tilnærmelsesvis) på en ret linje med forskrift

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{\log(c)}{3}.$$

Plot punkterne (T, a) i et dobbelt logaritmisk koordinatsystem i Matlab for at verificere, at de ligger på en ret linje.

Delopgave 2

I denne delopgave skal vi se på en alternativ måde at beskrive en ellipse på. Derudover vil vi undersøge en metode til at bestemme, hvor langt planeterne bevæger sig på en omgang rundt om Solen.



Figur 2: Trapezreglen anvendt til at approksimere $\int_0^2 x^3 - 3x^2 + 2x + 1\,dx$ med ligefordelte punkter og $N = 3, 5, 10$ (fra venstre mod højre).

(i) I stedet for at beskrive en ellipse vha. a og b, kan man også vælge at anvende a sammen med excentriciteten

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \tag{5}$$

Vis, at $b = a\sqrt{1-e^2}$ og at ellipsens brændpunkter kan beskrives som $(\pm ae, 0)$. Argumenter efterfølgende for at $0 \leq e < 1$, at hvis $e = 0$ så er ellipsen faktisk en cirkel med radius a, samt at jo tættere e er på 1, jo mere fladtrykt er ellipsen.

(ii) Buelængden af en parametrisk kurve fra t_0 til t er defineret ved

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(t)\| \, dt.$$

Vis vha. formlen for v i (3), at kurven $\mathbf{r}$ givet i (2) har buelængde givet ved

$$s(t) = a \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 + e^2 \sin^2(t) - e^2} dt, \tag{6}$$

(iii) Integralet i (6) kan kun udregnes eksakt når $e = 0$, dvs. når ellipsen faktisk er en cirkel. Derfor anvendes ofte numeriske metoder til dette. En sådan metode er trapezreglen. Med denne metode approksimeres $\int_a^b f(x)\,dx$ med størrelsen

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{2}(x_k - x_{k-1}), \tag{7}$$

hvor N er et positivt heltal og

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Dette kan ses illustreret i Figur 2. Argumenter for at hvert led i (7) er arealet af trapezen med hjørnepunkter $(x_{k-1}, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ og $(x_k, f(x_k))$, samt at hvis N er stor og punkterne x_k er lige fordelt (dvs at $x_k = a + k\frac{b-a}{N}$) så er (7) nok et fornuftigt estimat af $\int_a^b f(x)\,dx$. Hint: Se på Figur 2.

(iv) Implementer trapezreglen som en funktion i Matlab-filen `trapezreglen.m`. Funktionen skal skal tage input f, a, b og N og approksimere integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ ved at bruge trapezreglen med ligefordelte punkter.

Udregn efterfølgende længden som Jorden tilbagelægger i løbet af et år. Hvordan kan man kontrollere, at resultatet ikke er helt ude i hampen? Hint: Prøv at teste `trapezreglen(f,a,b,N)` med et integral der kan løses eksakt, f.eks. $\int_0^1 x^4\,dx$. Derudover gælder at Jordens excentricitet er ca. 0.0167, så afstanden Jorden tilbagelægger burde ikke være alt for langt væk fra en cirkel med radius a.

Delopgave 3

Vi vil udbygge modellen så den også stemmer overens med Keplers anden lov. Problemet med vores første model er (som vi så i delopgave 1(iii)-(iv)), at planeterne i virkeligheden bevæger sig med en anden hastighed, end man får ved at anvende parametriseringen i (4). Derfor skal vi parametrisere planeternes bane på en anden måde. Først og fremmest vil vi anvende den halve storeakse a og excentriciteten e til at definere ellipsen, da dette er kutymen indenfor astronomi. Vores mål i denne delopgave er, at bestemme en funktion E, der afhænger af tidsparameteren t således at hastigheden af kurven

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} a(\cos(E(t)) - e) \\ a\sqrt{1-e^2}\sin(E(t)) \end{bmatrix} \tag{8}$$

opfylder Keplers anden lov. I praksis er alle de størrelser vi arbejder med tidsafhængige. Altså er a og e også funktioner af t. Dette er en konsekvens af Newtons tyngdelov, da alle planeterne (og ikke kun solen) trækker i hinanden, og derved ændrer hinandens baner. For at simplificere vores notation vil vi derfor undlade at angive, at alle vores variabler afhænger af t.

Man kan ud fra Keplers anden lov vise, at for ethvert t skal funktionen E opfylde *Keplers ligning*

$$M = E - e\sin(E), \tag{9}$$

hvor M er en størrelse kaldet *middelanomalien*. Denne er også tidsafhængig og i praksis er det mulig at måle M. Vi skal blot antage, at M er givet (vores model tager udgangspunkt i metoden og det data som findes beskrevet hos NASAs Jet Propulsion Laboratory). Bemærk at både M og E i (9) er i radianer.

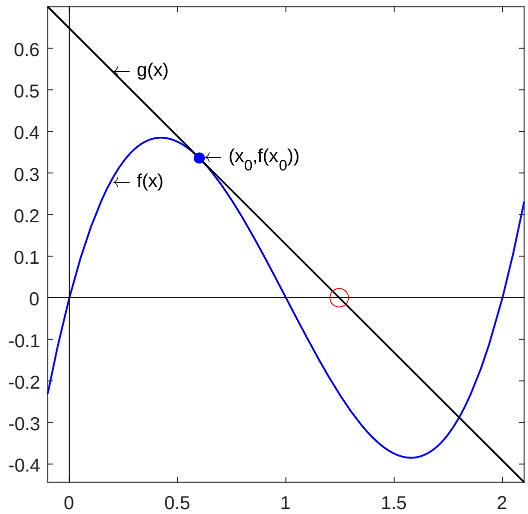
Den opdaterede model består af Matlabfilerne `solar_system.m`, `Sun.m`, `Planet.m`, `Comet.m` og `newtons_method.m`. Modellen er opbygget lidt anderledes end `model1.m`, men gør i bund og grund det samme, med undtagelse af, at Keplers ligning "løses" for at bestemme planeternes baner mere præcist. Det data modellen er baseret er gyldig fra ca. 3000 e.Kr. til ca. 3000 f.Kr. I Matlabfilen `solsystemet.m` kan man se et eksempel på, hvordan man tilføjer planeter til modellen og kører solsystemet. *Leg lidt med modellen og indse forskellene mellem de to modeller*. Forskellen kan tydeligst ses på Halleys komet da dennes bane har den største excentricitet.

Et mindre problem ved Keplers ligning er, at der ikke findes nogen formel for løsningen af ligningen. Men det betyder ikke, at der ikke findes en løsning.

Til at approksimere en løsning til Keplers ligning, bruger vores model Newtons metode. Med Newtons metode approksimerer man løsninger til ligninger på formen $f(x) = 0$, hvor f er en differentiabel funktion. Newtons metode går ud på, at man gætter på en løsning x_0, og efterfølgende iterativt udregner nye gæt ud fra tidligere gæt ved at bruge formlen

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \geq 1. \tag{10}$$

Newtons formel virker som regel (men ikke altid), hvis ens første gæt x_0 er tæt på en løsning til $f(x) = 0$ og f er tilstrækkelig "pæn".



Figur 3: Skitse af situationen i Delopgave 3(iii).

(i) Lad $f(x) = x^2 - 2$ og lad $x_0 = 2$. Udregn x_1, x_2 og x_3. Hvilket tal vil x_n nærme sig?

(ii) Lad $f(x) = x^3 - 2x + 2$ og lad $x_0 = 1$. Udregn x_1, x_2 og x_3. Nærmer x_n sig en løsning til ligningen $f(x) = 0$?

(iii) Lad f være en funktion, der er differentiabel i punktet x_0 og antag at $f'(x_0) \neq 0$. Lad $g(x)$ være funktionen, hvis graf er linjen, der tangerer grafen for f i punktet $(x_0, f(x_0))$. Bestem løsningen til ligningen $g(x) = 0$. Hint: Denne situation er skitseret i Figur 3. Den røde cirkel indikerer den skæring vi ønsker at bestemme.

(iv) Sammenlign svaret fra (iii) med (10). Brug dette sammen med Figur 3 til at give en geometrisk forklaring på, hvad der sker i Newtons metode.

(v) I praksis er det data vi har for M givet i grader, og derfor ønsker vi også at beskrive E i grader. Argumenter for at Keplers ligning så tager formen

$$\frac{\pi}{180}M = \frac{\pi}{180}E - e\sin\left(\frac{\pi}{180}E\right). \tag{11}$$

(vi) Argumenter for at en løsning til (11) kan findes ved at anvende Newtons metode på funktionen

$$f(E) = E - e^* \sin\left(\frac{\pi}{180}E\right) - M,$$

hvor E og M er angivet i grader og $e^* = \frac{180}{\pi}e$. Vis herefter, at Newtons metode for f er givet ved

$$E_n = E_{n-1} - \frac{E_{n-1} - e^* \sin\left(\frac{\pi}{180}E\right) - M}{1 - e\cos\left(\frac{\pi}{180}E\right)}.$$

I praksis anvender man ofte $E_0 = M + e\sin(M)$ som det første gæt. Man kan se en implementation af Newtons metode i filen `newtons_method.m`.