

with(plots) :
with(Student[LinearAlgebra]) :

Workshop 4

Delopgave 1

1.1

Antagelserne ovenfor betyder, at bolden ikke har nogen acceleration. Brug integralregning til at vise at $X(t) = x_0 + t \cdot v_0$ så længe bolden ikke kolliderer med noget.

Vi kan at: $\vec{x}'(t) = \vec{v}(t) \rightarrow \vec{v}'(t) = \vec{a}(t)$ hvor at $\vec{a}(t)$ er vores accelerations vektor som vi har fået givet er 0.

Vi kan nu finde $\vec{v}(t)$ ved at tage integralet af $\vec{a}(t)$ fra 0 til tiden t .

$$\int_0^t \vec{a}(t) dt + \vec{v}_0 = \vec{v}_0$$

Det fortæller os at vores hastighed er konstant.

Vi kan nu tage integralet af \vec{v}_0 for at begynde at finde x_0
ved at tage integralet kan vi sige at

$$\int_0^t \vec{v}(s) ds = [\vec{x}(s)]_{s=0}^{s=t} = x(t) - x(0) :$$

$$\int_0^t \vec{v}(s) ds = \int_0^1 \vec{v}_0 ds = [s \cdot \vec{v}_0]_{s=0}^{s=t} = t \cdot \vec{v}_0 + 0 \cdot \vec{v}_0 = t \cdot \vec{v}_0 :$$

$$x(t) - \vec{x}(0) = \int_0^t \vec{v}(s) ds = t \cdot \vec{v}_0 \Rightarrow x(t) = \vec{x}(0) + t \cdot \vec{v}_0 = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}_0 :$$

plusser med $\vec{x}(0)$ på begge sider for at få: $\vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}_0$: til sidst.

1.2

Algoritme for hvornår boldene rammer hindanden:

Hvis længden mellem de to vektore er større end de to radiuser lig hindanden har boldene ikke ramt hindanden, men hvis aftanden mellem vektorene er det samme som radiuserne lig hindanden er der en kollision, og hvis aftenden er mindre er skær boldene hinanden.

setning vi får gevet senere

$$(r_1 + r_2)^2 < \|x_2(0) - x_1(0)\|^2$$

$$(r_1 + r_2)^2 > \|x_2(\Delta t) - x_1(\Delta t)\|^2$$

Bestem en formel for det tidspunkt i intervaller $[0, \Delta t]$, hvor boldene kolliderer.

Bliver ikke nævnt i videoen og er mærkeligt at forstå om det er en del af opgaven.

1.3

Prikprodukt

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2(x \cdot y)$$

Vi kan starte med at opgæve " $\| \cdot \|$ "

$(x \pm y) \cdot (x \pm y) = x \cdot x + y \cdot y \pm 2(x \cdot y)$ Det her kan vi gøre fordi vi ved at længden af en vektor i anden er det samme som at tage prikproduktet af en vektor med sig selv. $2(x \cdot y)$ Kan omskrives til

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$|\vec{a}|^2 = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Kilde: <https://www.webmatematik.dk/lektioner/matematik-b/vektorer-i-2d/skalarprodukt>

Vi kan reducere setningen til at blive til: $(x \pm y) \cdot (x \pm y) = x^2 + y^2 \pm 2x \cdot y$

Vi kan også reducere vensre side af lighedstegnet: $x^2 + y^2 \pm 2x \cdot y = x^2 + y^2 \pm 2x \cdot y$

1.4

Hvis ligningen går op; med at radiuserne sammelagt i anden er det samme som afstanden mellem de to boldes centrum i anden er der en kollision. ligningen er afhængi af t til at bestemme tidspunktet de kolliderer, hvis $t = 0$ forexemple, kan det være ligningen ikke går op. Ligningen kan kun gå op hvis t er det rigtige tal.

1.5

Vi kan starte med at skrive dem ud:

$$(r_1 + r_2)^2 = \|(x_2 + tv_2) - (x_1 + tv_1)\|^2 \text{ vi kan rykke lidt rundt nu for at få et bedre over blik.}$$

$$\|(x_2 - x_1) + (tv_2 - tv_1)\|^2 \text{ her fra kan vi flytte } t \text{ ud a parntesen så ligningen hedder:}$$

$$\|(x_2 - x_1) + t(v_2 - v_1)\|^2 \text{ Det er det samme for selv hvis } t \text{ er ude for parentesen bliver den ganget på begge tal.}$$

Ved at samligning den nuværende ligning med ligningen fra opgave 1.3, kan vi kalde $(x_2 - x_1)$ for vores x værdi og $t(v_2 - v_1)$ for vores y værdi.

Som vi kan se på højre side af ligheds teget i opgave 1.3, kan vi indsætte de x og y værdier vi har lavet.

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2(x \cdot y)$$

$$\|x_2 - x_1\|^2 + t\|v_2 - v_1\|^2 + 2t(x_2 - x_1) \cdot (v_2 - v_1)$$

1.6

Skal lige have lavet 1.5 først, men virker ret lige til

Vi kan nu gennem den tidligere opgave lave vores konstanter x og y om til andre variabler så det er nemere at læse som en anden grads ligning.

Først minuser vi med $(r_1 + r_2)^2$ på begge sider for at få lningen $= 0$

(vi) Hvis vi definerer $a = \|v_2 - v_1\|^2$, $b = 2(x_2 - x_1) \cdot (v_2 - v_1)$, og $c = \|x_2 - x_1\|^2 - (r_1 + r_2)^2$, så kan andengradsligningen i (4) skrives på den velkendte form

$$at^2 + bt + c = 0. \quad (5)$$

Vi skal i dette spørgsmål undersøge denne ligning nærmere.

a)

I ulighed (1) vises det at hvis $t = 0$ er $\|x_2 - x_1\|^2 > (r_1 + r_2)^2$ hvilket vil betyde at hvis der bliver minuset med $(r_1 + r_2)^2$ på begge sider før hen, at $0 < \|x_2 - x_1\|^2 \not\leq (r_1 + r_2)^2$
Hvilket går i mod ulighed (1)

Hvis v_2 og v_1 er $= 0$ vil det betyde at $v_2 = v_1$ hvilket vil give os en $\Delta t \cdot 0 = 0$ og efterlade os med ulighed (1) som vi fandt ud af er større end 0.

b)

hvis man isolere for b bliver den negativ. Hint: Alt andet er positivt

Vi ved fra opgave (a) at både c og a er større end 0 så hvis ligningen skal gå op, skal b være lavere end 0.

c)

diskriminanten

Vi kan starte med at gange pantecen ud:

$$b^2 - 4ac > 4a^2\Delta t + b^2 + 4a\Delta tb$$

Vi kan state med at dividere med $4a$ på begge sider for at få:

$$b^2 - c > a^2\Delta t + b^2 + \Delta tb \quad \text{Her fra kan vi minus med } b^2 \text{ og der efter } + c.$$

$$0 > a^2\Delta t + b\Delta t + c$$

d)

Diskriminaten skal være lavere eller lig 0 hvis enten a eller c er 0, så er diskriminaten lig b^2
 d kan ikke være negativ.

$$t = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e)

Vi ved at t kan være $=0$ men $\Delta t > t$

Tag kvadrat roden af begge sider og isoler fra t i (7)

Delopgave 2

Hastighed er u_1 og u_2 De nye hastigheder efter en kollision er givet ved v_1 og v_2

Vi ved også fra introduktionen til workshoppen at Kinetiske energi er bevaret og momentum er bevaret.

Vi har to partikler m_1 og m_2

2.1

Hvis $u_1 = v_1$ og $u_2 = v_2$ ville det betyde at partiklerne vil beholde deres hastighed og **retning**, ville betyde at de passere gennem hindanden, men det må de ikke.

2.2