Delopgave 1

(I)

Givet er $r(t)\begin{bmatrix} a\cdot\cos(t)+x_0 \\ b\cdot\sin(t)+y_0 \end{bmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$, vi ved udfra en eclipse at $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

Vi kan indsætte $r(t)$'s x og y værdierne i formlen og der efter redicere for at få idiot formlen.

$$\frac{(a\cdot\cos(t)+x_0-x_0)^2}{a^2}+\frac{(b\cdot\sin(t)+x_0-x_0)^2}{b^2}=1$$

her fra kan vi ophæve pantecerne for som giver os:

$$\frac{a^2\cdot\cos(t)^2+x_0^{\,2}-x_0^{\,2}}{a^2}+\frac{b^2\cdot\sin(t)^2+x_0^{\,2}-x_0^{\,2}}{b^2}=1,$$

$$\frac{a^2\cdot\cos(t)^2}{a^2}+\frac{b^2\cdot\sin(t)^2}{b^2}=1,$$

$$\cos(t)^2+\sin(t)^2=1,$$

her efter reducere vi og får:

$\cos(t)^2+\sin(t)^2=1$ som er idiotformlen

(II)

Vi ved for en vector funtion at længden af den er hastigheden og givet ved $V(t)=r'(t)$
og faten er givet ved:$v(t)=||V(t)||$

$$r(t) := \begin{bmatrix} a\cdot\cos(t)+x_0 \\ b\cdot\sin(t)+y_0 \end{bmatrix}:$$

Vi finder nu $V(t)$

$r'(t)$

$$\begin{bmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

nu kan faten findes
$v(t) = \|r'(t)\|$:

vi ved at længden af en vector er $\|v\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$v(t) := \sqrt{(-a\cdot\sin(t))^2+(b\cdot\cos(t))^2}$$

$$v := t \mapsto \sqrt{a^2 \cdot \sin(t)^2 + b^2 \cdot \cos(t)^2} \qquad \textbf{(2)}$$

vi har

$$v(t) = \sqrt{-a^2 \cdot \sin(t)^2 + b^2 \cdot \cos(t)^2}$$

vi kan ud fra idiot formlen få at $\cos^2(t) = 1 - \sin(t)^2$

$$v(t) = \sqrt{(-a)^2 \cdot \sin(t)^2 + b^2 \cdot \left(1 - \sin(t)^2\right)}$$

$$v(t) = \sqrt{(-a)^2 \cdot \sin(t)^2 + b^2 \cdot 1 - b^2 \sin(t)^2}$$

$$v(t) = \sqrt{(-a)^2 \cdot \sin(t)^2 + b^2 - b^2 \sin(t)^2}$$

$$v(t) = \sqrt{\left((-a)^2 - b^2\right) \cdot \sin(t)^2 + b^2}$$

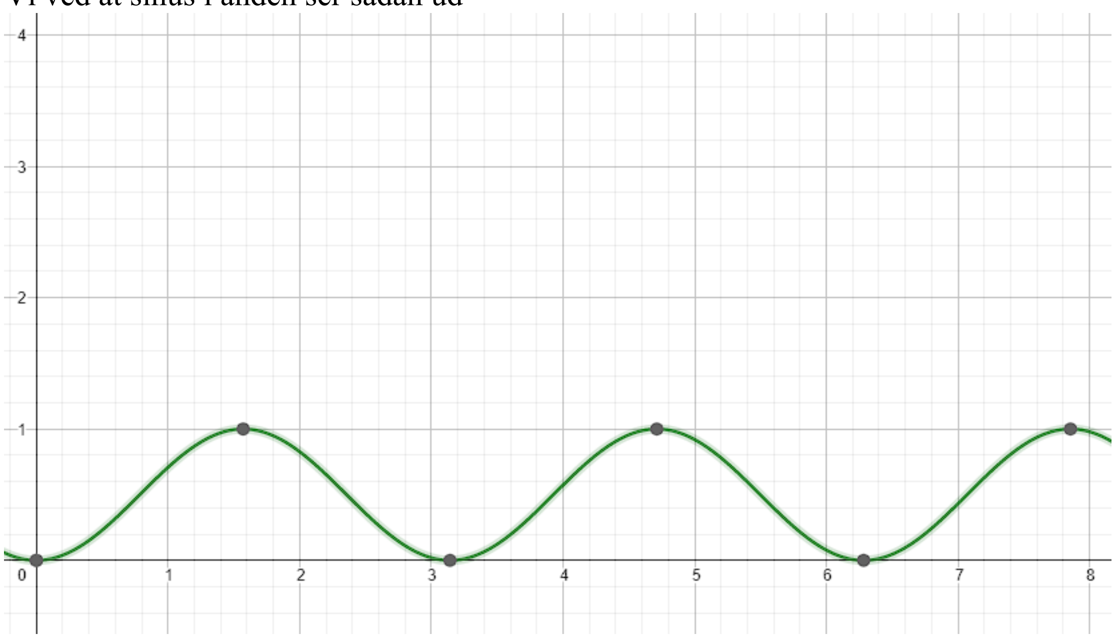
$$v(t) = \sqrt{\left(a^2 - b^2\right) \cdot \sin(t)^2 + b^2}$$

(III)

For at få farten ved vi at :

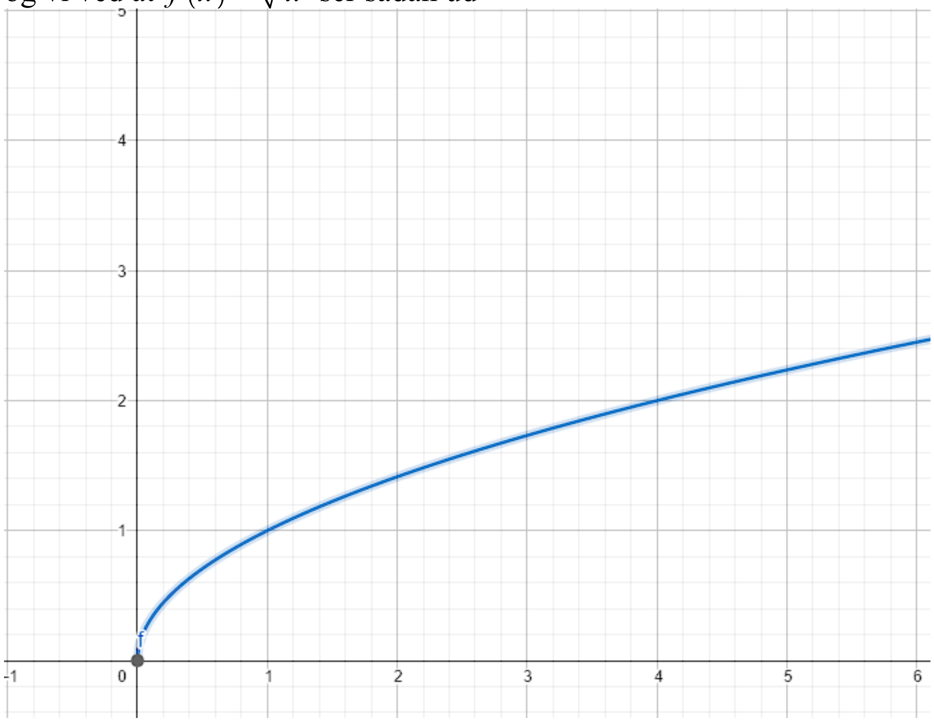
$$v(t) = \sqrt{\left(a^2 - b^2\right)\sin^2(t) + b^2}$$

Vi ved at sinus i anden ser sådan ud



hvor den er lavest 0 og højest 1.

og vi ved at $f(x) = \sqrt{x}$ ser sådan ud



Så vi kan bare kigge på hvornår det der er under kvadratroden er størts og som vi så oven over så er $f(x) = \sin(x)^2$ størst når

vi ved at den største værdi er 1 så vi kan regne t ud ved

$1 = \sin(t)$

$$1 = \sin(t) \quad (3)$$

$solve(1 = \sin(t), t)$

$$\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

når t er lig $\frac{\pi}{2}$

(IV)

(V)

$a^3 = cT^2$

$\log(a^3) = \log(cT^2)$

isoler for log a

Vi ved at :

1. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
3. $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$

$$3 \cdot \log(a) = 2 \cdot \log(cT)$$

$$3 \cdot \log(a) = 2 \cdot \log(Tc)$$

$$3 \cdot \log(a) = 2 \cdot \log(T) + \log(c)$$

$$\frac{3 \cdot \log(a)}{3} = \frac{(2 \cdot \log(T) + \log(c))}{3}$$

$$\log(a) = \frac{2}{3} \cdot \log(T) + \frac{\log(c)}{3}$$

$$\log(a) = \frac{2}{3}\log(t) + \frac{\log(c)}{3}$$

Delopgave 2

(I)

I denne opgave skal der vises vis man kender a og e kan man beskrive b og så skal der agrumenteres ellipsen brandpunkter kan beskrives ved hjælp af $\pm ae$ og for at $0 \leq e < 1$, hvis $e = 0$ så er ellipsen faktisk en cirkel med radius a og jo tætter e er på 1 jo mere fladtrykt er ellipsen

For at vise at man kan bruge e istedet for b skal vi først vise man kan få b uf fra a og e

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

og vi ville genre vise at:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

for at kunne starte her skal vi først finde e^2 som vi kan gå ud fra er

$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

Hvis vi så kigger på højre side af formel og ersatter e^2

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$
$$b = a\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$$
$$b = a\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}$$

$$b = a\,\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2}}$$

$$b = a\,\frac{b}{a}$$
$$b = b$$

Da $b = b$ må det betyde at man kan bruge e istedet for b

Det næste vi ville vise er at ellipsen brandpunkter kan beskrives ved hjælp af $\pm\, ae$. for at vise dette tagers der udgangspunkt i en ellipse med centrum i (0,0)

$$a \cdot e = a \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

for at kunne komme vider kan vi beskrive $a = \sqrt{a^2}$ da kvadratroden går op med i anden

$$a \cdot e = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$
$$a \cdot e = \sqrt{a^2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$$
$$a \cdot e = \sqrt{a^2 \cdot 1 - a^2 \cdot \frac{b^2}{a^2}}$$
$$a \cdot e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Som er det samme som er beskrivet i delopgave 1 Ellipsens br\032ndpunkter er givet ved $\left(x_0 \pm \sqrt{a^2 - b^2}, y_0\right)$. med dette kan vi beskrive at ellipsen brændpunkter kan beskrives ved hjælp af $\pm\, ae$ hvis vi tager udgangs punk at ellipsen centrum er i (0,0)

Det sidste der ville vises er at hvis $0 \leq e < 1$, hvis $e = 0$ så er ellipsen faktisk en cirkel med radius a og jo tætter e er på 1 jo mere fladtrykt er ellipsen

Hvis vi nu kigger på formel for E

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Vi antager jo at $a \geq b > 0$ og hvis a er det samme som be så står der jo

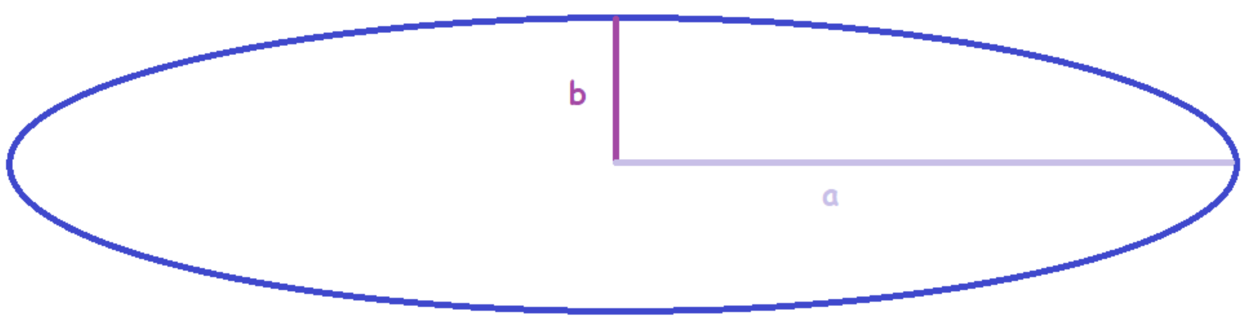
$e = \sqrt{1 - 1}$

$e = \sqrt{0}$

det må jo være det mindste e kan være. og hvis nu a > b så står der jo en brøke hvor $\frac{b^2}{a^2}$ må være et meget småt tal som trukket fra 1 må være noget der er lidt mindre end 1 men ikke ret meget som vi derefter tager kvardratroden af som stadig er mindre end 1 . Det ville sige at e altid er mindre end 1.

lad os nu kigge på hvis e er meget tæt på 1:

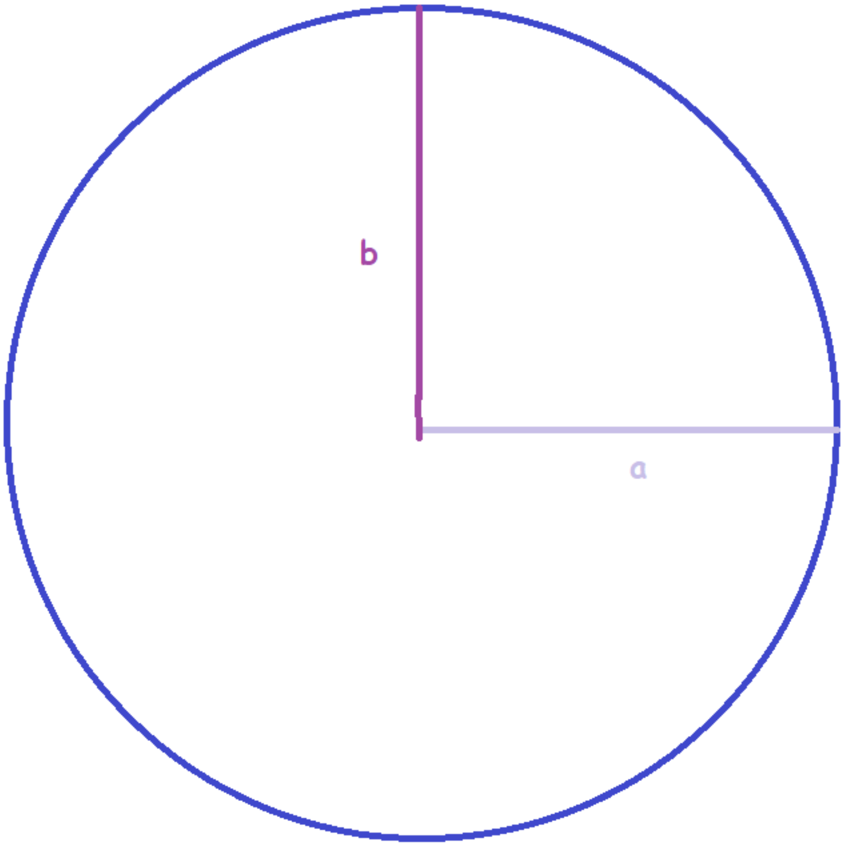
Det ville jo betyde at vores ellipse jo ville komme til at se sådan ud



Da a ville være kæmpe stort for at trække så lidt som muligt fra 1

Hvis vi nu kigger på hvor e er lig med 0

det betyder jo som vist oven over at a= b
Det ville jo sige vi har en ellipse hvor a og b er lige lange og vi bevæger os lige lagt ud



altså en perfekt cirkle....
Det kan også ses ved :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

(II)

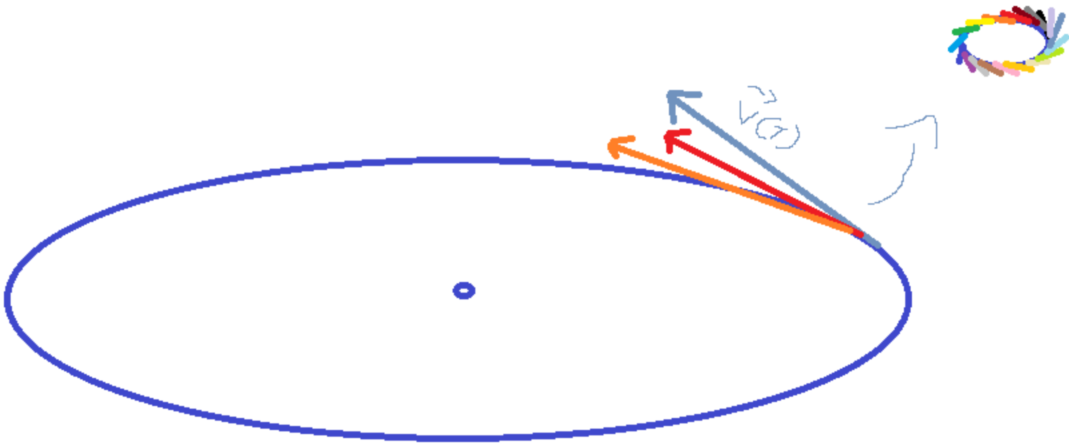
Buelængden af en parametrisk kurve fra t0 til t er defineret ved

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} (\| v(t) \|) \, dt$$

Vis vha. formlen for for tidliger opgaver at vi så for:

$$s(t) = a \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 + e^2 \sin(t)^2} \, dt$$

Vi kan finde ud af hvor langt man har bevægede sig på sådan kruve ved at intergræer ens hastighed da hastigheds vectoren længde fortæller os hvsi vi gøre det mange gange hvor lang cirkel buen er.



så hvis vi nu husker at formel for farten er

$$v(t) = \sqrt{(a^2 - b^2)\sin(t)^2 + b^2}$$

og ved at bruge den inde i formel må vi så få længden. det må jo betyde:

$$s(t) = a\int_{t_0}^{t} \sqrt{(a^2 - b^2)\sin(t)^2 + b^2}\ \mathrm{d}t$$

og det vi så gerne ville er at ersatte b med e så for vi

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(a^2 - \left(\sqrt{1 - e^2}\right)^2\right)\sin(t)^2 + \left(\sqrt{1 - e^2}\right)^2}\ \mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(a^2 - (1 - e^2))\sin(t)^2 + a^2(1 - e^2)}\ \mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(a^2 - (a^2(1 - e^2)))\sin(t)^2 + a^2(1 - e^2)}\ \mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(a^2 - (a^2 - a^2e^2))\sin(t)^2 + a^2 - a^2e^2}\ \mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(a^2 - a^2 + a^2e^2)\sin(t)^2 + a^2 - a^2e^2}\ \mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(a^2e^2)\sin(t)^2 + a^2 - a^2e^2}\, \mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2(e^2\sin(t)^2 + 1 - e^2)}\, \mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2(1 + e^2\sin(t)^2 - e^2)}\, \mathrm{d}t$$

vi kan derfetter trække a^2 ud fra formlen også for vi :

$$s(t) = \sqrt{a^2}\int_{t_0}^{t} \sqrt{(1 + e^2\sin(t)^2 - e^2)}\, \mathrm{d}t$$

som er lig:

$$s(t) = a\int_{t_0}^{t} \sqrt{1 + e^2\sin(t)^2}\, \mathrm{d}t$$

(III)

(IV)