Rotationer

Introduktion

Rotationer findes overalt: Jorden roterer omkring Solen, Jorden roterer omkring sig selv, et hoved kan rotere om halsen, og vores øjne roterer i øjenhulerne afhængigt af hvad vi ønsker at se på. Derfor er det måske ikke overraskende, at rotationer også spiller en stor rolle indenfor computergrafik. Det kunne f.eks. være at man ønsker at rotere et billede, eller at en karakter i et computerspil drejer hovedet, og hele synsfeltet også skal roteres.

Rent matematisk er der forskellige måder at beskrive rotationer på, og i denne workshop skal vi se nærmere på dette. Først betragter vi rotationer i planen, hvor man kan anvende rotationsmatricer og translationer til at beskrive en rotation omkring et vilkårligt punkt. Efterfølgende betragter vi rotationer i rummet. I rummet roterer man omkring en akse (linje) i stedet for et punkt. Vi skal se på, hvordan man kan rotere vha. såkaldte Euler-rotationer og kvaternioner.

Delopgave 1

I to dimensioner kan en rotation af punktet (x, y) omkring origo med en vinkel θ (mod uret) beskrives ved hjælp af en lineær transformation

$$T_\theta(\mathbf{x}) = R_\theta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Hvis man ønsker at rotere omkring et vilkårligt punkt P med stedvektor $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x}_0$ bliver det lidt mere kompliceret.

(i) Argumenter for at rotationen (mod uret) af punktet (x, y) med stedvektor $\mathbf{x}$ omkring $P = (x_0, y_0)$ med vinklen θ er givet ved

$$R_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 = R_\theta \mathbf{x} + (I - R_\theta)\mathbf{x}_0 \tag{1}$$

(ii) Hvad skal gælde for at afbildningen

$$T_{\theta,P}(\mathbf{x}) = R_\theta \mathbf{x} + (I - R_\theta)\mathbf{x}_0$$

er lineær?

(iii) Lad $\theta = \pi/4$ og lad $P = (1, 1)$. Bestem

$$T_{\theta,P}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Indenfor computergrafik anvender man ofte såkaldte homogene koordinater, hvor man identificerer ethvert punkt (x, y) i planen med punktet $(x, y, 1)$ i rummet. En fordel ved dette er at nogle afbildninger der ikke er lineære i kartesiske koordinater alligevel kan beskrives som lineære afbildninger i homogene koordinater.

(iv) Vis at matrix-vektorproduktet

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & (1-\cos(\theta))x_0 + \sin(\theta)y_0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & (1-\cos(\theta))y_0 - \sin(\theta)x_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en rotation af punktet $(x, y, 1)$ (i homogene koordinater) omkring punktet $P = (x_0, y_0, 1)$ (i homogene koordinater) med med vinkel θ.

Delopgave 2

I tre dimensioner roterer man ikke om punkter men om en vektor. I denne delopgave vil vi anvende almindelige (kartesiske) koordinater og ikke homogene koordinater da vi kun vil rotere om stedvektorer. Den klassiske tilgang til rotationer i tre dimensioner er ved at anvende de såkaldte Euler-rotationer, hvor man roterer omkring koordinatakserne. F.eks. kan man rotere omkring x-aksen med en vinkel θ_x, omkring y-aksen med en vinkel θ_y og omkring z-aksen med en vinkel θ_z vha. rotationsmatricerne

$$R_{x,\theta_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix},$$

$$R_{y,\theta_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix},$$

$$R_{z,\theta_z} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man kan også kombinere de tre rotationer ved at gange matricerne sammen. Man kan vise at dette også giver en rotationmatrix, men det er ikke altid klart hvilken akse der roteres omkring.

(i) Betragt matricen $R = R_{z,\theta_z} R_{y,\theta_y} R_{x,\theta_x}$. Argumenter for at vektoren $R\mathbf{x}$ fremkommer ved først at rotere $\mathbf{x}$ omkring x-aksen med en vinkel på

θ_x, derefter at rotere den resulterende vektor med en vinkel θ_y omkring y-aksen og til sidst at rotere vektoren der er fremkommet af de to første rotationer omkring z-asken med en vinkel θ_z.

(ii) Lad $\theta_x = \theta_y = \theta_z = \frac{\pi}{2}$. Bestem matricen

$$R = R_{z,\theta_z} R_{y,\theta_y} R_{x,\theta_x}$$

(iii) Vis at selvom R fra (ii) er sammensætningen af tre rotationer så er det faktisk bare en rotation om y-aksen med en vinkel på $\frac{\pi}{2}$.

Opgave (iii) viser et af problemerne ved denne måde at rotere i tre dimensioner. Selvom man har udført tre rotationer, så svarer de i dette tilfælde til at der kun er udført en rotation[1]

I de næste opgaver vil vi antage at at $\theta_x = \frac{\pi}{4}$, $\theta_y = \frac{\pi}{2}$ og $\theta_z = -\frac{\pi}{4}$. Og betragte rotationsmatricen

$$R = R_{z,\theta_z} R_{x,\theta_x} R_{y,\theta_y} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

(iv) Argumenter for at en vektor $\mathbf{x}$ ligger på rotationsaksen for rotationsmatricen R hvis og kun hvis $\mathbf{x}$ løser ligningssystemet $(R - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(v) Vis at matricen $R - I$ har reduceret trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(vi) Konkluder at R er en rotation omkring linjen med parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

For at bestemme vinklen som R roterer med skal man først bestemme en vektor $\mathbf{y}$ som står vinkelret på $\mathbf{x}$. I vores eksempel kan man bruge $\mathbf{y} = [-1, 1, 0]^T$. Man kan så bestemme rotationsvinklen ved at bestemme vinklen mellem $\mathbf{y}$ og $R\mathbf{y}$ ved at bruge formlen $\cos\theta = \frac{\mathbf{y}\cdot R\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|\|R\mathbf{y}\|}$.

[1]Dette problem kaldes også *gimbal lock* og mere dybdegående forklaringer kan findes på nettet.

Delopgave 3

I praksis (f.eks. computergrafik eller flysimulationer) anvender man ofte kvaternioner til at udføre rotationer. En kvaternion kan beskrives som en vektor i $\mathbb{R}^4$, men for vores anvendelse er det nemmeste at definere en kvaternion q som et par bestående af en skalar s og en (søjle)vektor $\mathbf{v}$. Vi noterer dette som

$$q = [s, \mathbf{v}].$$

Vi identificerer en kvaternion på formen $q = [s, \mathbf{0}]$ som det reelle tal s og en kvaternion på formen $q = [0, \mathbf{v}]$ som den tredimensionelle vektor $\mathbf{v}$.

Selvom man ofte hører at det ikke giver mening at "gange vektorer sammen", så findes der en veldefineret måde at gange kvaternioner sammen: Hvis $q = [s, \mathbf{v}]$, $p = [r, \mathbf{u}]$ og k er en skalar så defineres

$$\begin{aligned} q + p &= [s + r, \mathbf{v} + \mathbf{u}] \\ kq &= [ks, k\mathbf{v}] \\ q^* &= [s, -\mathbf{v}] \\ qp &= [sr - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, s\mathbf{u} + r\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}]. \end{aligned}$$

kvaternionen q^* kaldes for den konjungerede af q og svarer på en måde til at transponere en vektor. Bemærk at $q^*q = [s^2 + \|\mathbf{v}\|^2, \mathbf{0}]$, hvilket betyder at q^*q er et ikke-negativt reelt tal. Hvor vi for vektorer definerer $\|v\|^2 = \mathbf{v}^T\mathbf{v}$ så definerer vi normen af q ved $|q|^2 = q^*q$. Bemærk også at $qq^* = q^*q$, samt at hvis $|q| \neq 0$, så opfylder $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}q^*$ at $q^{-1}q = qq^{-1} = 1$.

Husk at $\times$ betegner krydsproduktet, som for to vektorer $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ og $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ i $\mathbb{R}^3$ defineres ved

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}.$$

Husk at vektoren $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ står vinkelret på både $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, samt at hvis $\mathbf{y} = k\mathbf{x}$ for en konstant k, så er $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Krydsproduktet opfylder også følgende identiteter

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \times \mathbf{x} &= -\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \\ (k\mathbf{y}) \times \mathbf{x} &= \mathbf{y} \times (k\mathbf{x}) = k(\mathbf{y} \times \mathbf{x}), \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} &= \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z}, \\ (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} &= (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x})\mathbf{y} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y})\mathbf{x}. \end{aligned}$$

(i) Betragt kvaternionerne

$$q = \left[1, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right], \quad p = \left[1, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right]$$

Udregn qp og pq. Er $pq = qp$?

(ii) Vis at hvis $\|\mathbf{v}\| = 1$ og $s^2 + \lambda^2 = 1$, så er

$$q = [s, \lambda\mathbf{v}]$$

en enhedskvartanion, dvs. $|q| = 1$.

(iii) Lad $q = [s, \lambda\mathbf{v}]$ hvor $\|\mathbf{v}\| = 1$ og $s^2 + \lambda^2 = 1$. Lad yderligere $p = [0, \mathbf{u}]$. Vis at

$$qpq^{-1} = [0, 2\lambda^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v} + (s^2 - \lambda^2)\mathbf{u} + 2\lambda s(\mathbf{v}\times\mathbf{u})]$$

(iv) Antag at $s = \cos\frac{\theta}{2}$ og $\lambda = \sin\frac{\theta}{2}$. Vis at resultatet i den forrige opgave så bliver

$$qpq^{-1} = [0, (1-\cos(\theta))(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v} + \cos(\theta)\mathbf{u} + \sin(\theta)(\mathbf{v}\times\mathbf{u})].$$

Konkluder at qpq^{-1} er en vektor givet ved

$$(1-\cos(\theta))(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v} + \cos(\theta)\mathbf{u} + \sin(\theta)(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) \tag{2}$$

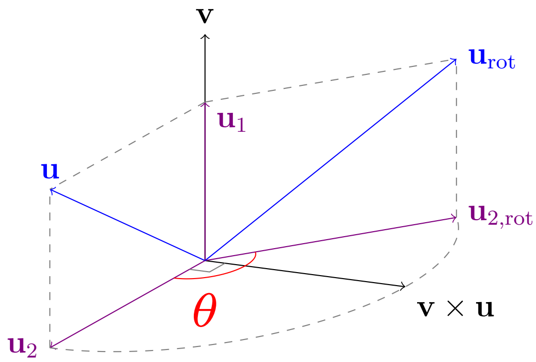
(v) Vi skal i denne delopgave indse at vektoren givet ved qpq^{-1} fra forrige opgave er $\mathbf{u}$ roteret med en vinkel θ omkring $\mathbf{v}$. Dette gøres i følgende trin

(a) Vis at $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u_2}$ hvor $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}$

(b) Vis at $\mathbf{u}_1$ er parallel med $\mathbf{v}$ og at $\mathbf{u}_2$ står vinkelret på $\mathbf{v}$ og $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$.

(c) Argumenter vha. (b) og Figur 1 for at vektoren $\mathbf{u}_{2,\mathrm{rot}} = \cos(\theta)\mathbf{u}_2 + \sin(\theta)(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$ svarer til en rotation af $\mathbf{u}_2$ omkring $\mathbf{v}$ med vinkel θ. Hint: Da $\mathbf{u}_2$ og $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ står vinkelrette kan man identificere $\mathbf{u}_2$-$\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ planen med xy-planen og bruge hvordan cos og sin er defineret.

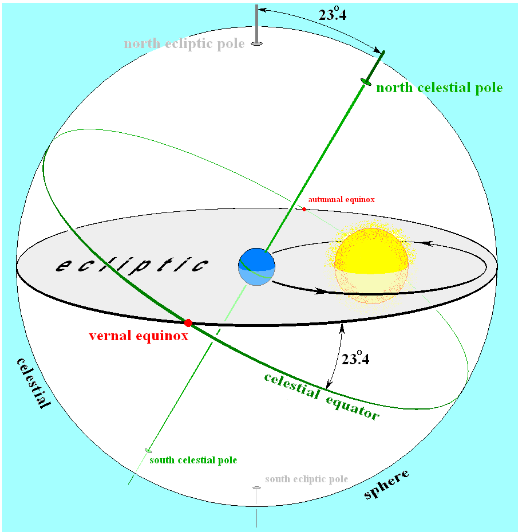
(d) Konkluder udfra Figur 1 at $\mathbf{u}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_{2,\mathrm{rot}}$ og vis vha. (2) at $\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ kan identificeres med kvaternionen qpq^{-1}.



Figur 1: Rotation om $\mathbf{v}$.

Delopgave 4

Jorden roterer omkring Solen, samtidig med at den roterer om sig selv. Der er en vinkel på omkring 23.4° mellem Jordens rotationsakse og normalvektoren til den plan som Jordens rotation omkring Solen foregår i. Dette kan ses i Figur 2. Vi skal i denne opgave skal bruge vores viden om rotationer til at modellere Jordens rotation om sig selv i Matlab.



Figur 2: Jordens rotation om Solen

Kommandoen `[X,Y,Z]=sphere;` gemmer x, y og z koordinaterne til punkterne på en kugle som 21×21 matricerne `X`, `Y`, og `Z`. Dette er vores model af Jorden. Det der svarer til den geografiske nordpol er placeret i punktet $(0, 0, 1)$. I den følgende opgave skal vi arbejde med Matlab-scriptet `rotation.m`.

(i) Brug rotationsmatricen R_{y,θ_y} til at rotere kuglen med en vinkel på $23.4°$ for at modellere rotationsaksens hældning.

(ii) Bestem enhedsvektoren $\mathbf{v}$ parallel med Jordens rotationsakse, dvs. udregn $R_{y,\theta_y}[0, 0, 1]^T$.

(iii) Hvis man betragter kvaternioner som vektorer i $\mathbb{R}^4$ så kan man beskrive produktet af kvaternioner ved hjælp af matrixmultiplikation: Hvis $q = [s, \mathbf{v}]$ og $p = [r, \mathbf{u}]$ så er gælder der at

$$qp = \begin{bmatrix} s & -\mathbf{v}_x & -\mathbf{v}_y & -\mathbf{v}_z \\ \mathbf{v}_x & s & -\mathbf{v}_z & \mathbf{v}_y \\ \mathbf{v}_y & \mathbf{v}_z & s & -\mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_z & -\mathbf{v}_y & \mathbf{v}_x & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix}, \quad pq = \begin{bmatrix} s & -\mathbf{v}_x & -\mathbf{v}_y & -\mathbf{v}_z \\ \mathbf{v}_x & s & \mathbf{v}_z & -\mathbf{v}_y \\ \mathbf{v}_y & -\mathbf{v}_z & s & \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_z & \mathbf{v}_y & -\mathbf{v}_x & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix},$$

Brug dette til at lave funktionerne

`left_multiplication(s,v)` og `right_multiplication(s,v)`

i Matlab og færdiggør koden i `rotation.m` som laver en animation af Jordens rotation om sin egen akse.