Proyecto #2: La ecuación del calor
Curso: Computación Científica en Python

M.Sc. Dayron Chang Dominguez

27 de julio de 2022

La ecuación del calor

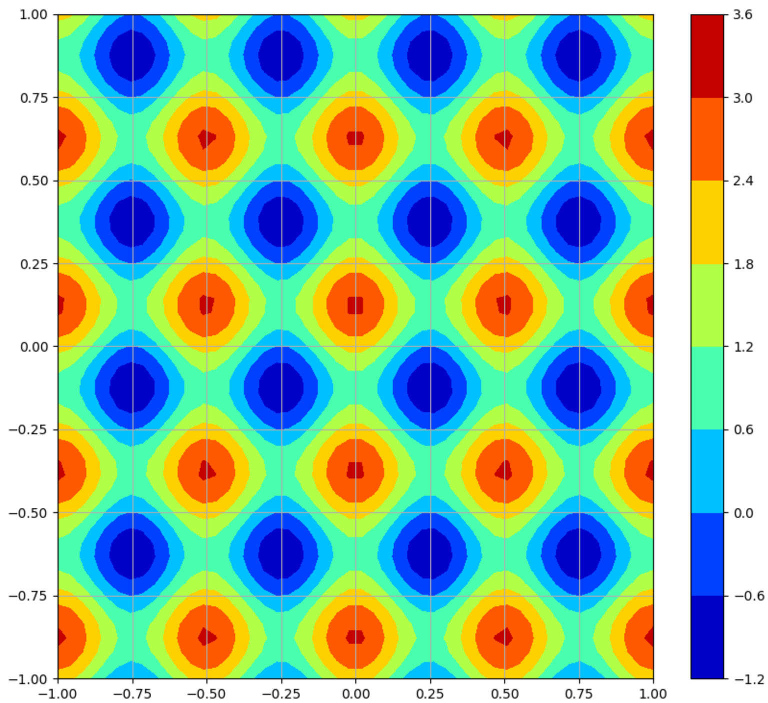

Figura 1: Condiciones iniciales de temperatura en una plancha metálica.

La ecuación del calor es una ecuación diferencial en derivadas parciales que describe la distribución del calor en una región a lo largo del transcurso del tiempo. Se define como sigue:

$$\frac{du}{dt} - D\Delta u = 0 \tag{1}$$

Problema

Se tiene una plancha metálica de un tamaño de 2×2 cm. La misma contiene aislante en sus bordes por lo que la temperatura externa no puede afectar la placa ni viceversa. El coeficiente de difusión de este material es $D = 1{,}01e-5m^2/s$. La misma tiene un estado inicial de temperatura. ¿Cuál sería el estado de la temperatura pasado un tiempo T?

Tareas

1. Cree una rejilla de 2×2 cm donde $\Delta x = \Delta y = 0{,}01$ la cual estará centrada en el origen de coordenadas $(0,0)$.

2. Cree una discretización del intervalo de tiempo $t \in [0,T]$ con un paso temporal $\Delta t = \frac{r\Delta x^2}{D}$ donde $r = 0{,}2$ es el coeficiente de estabilidad CFL.

3. Establezca las condiciones iniciales a partir de la siguiente función:

$$f_0(x,y) = 1 + \sin(2\pi\Delta t)\left(\cos(4\pi x) + \sin(4\pi y)\right). \tag{2}$$

4. Cree las matrices A y B correspondientes al método de Crank-Nicolson:

$$A = \begin{bmatrix} L & -rI & & & \\ -\frac{r}{2}I & L & -\frac{r}{2}I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{r}{2}I & L & -\frac{r}{2}I \\ & & & -rI & L \end{bmatrix} \tag{3}$$

,

$$L = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -\frac{r}{2} & 1+2r & -\frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{r}{2} & 1+2r & -\frac{r}{2} \\ & & & -r & 1+2r \end{bmatrix} \tag{4}$$

,

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} Q & rI & & & \\ \frac{r}{2}I & Q & \frac{r}{2}I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{r}{2}I & Q & \frac{r}{2}I \\ & & & rI & Q \end{bmatrix} \tag{5}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ \frac{r}{2} & 1-2r & \frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{r}{2} & 1-2r & \frac{r}{2} \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix} \tag{6}$$

5. Implemente el código restante para resolver la ecuación (1). Al tratarse de un método implícito entonces en cada iteración se resuelve el sistema:
$$Au^{n+1} = Bu^n \tag{7}$$

6. Después de cada iteración cree una figura en 3 dimensiones correspondiente a la solución n-ésima y sálvela en una carpeta local llamada 'resultados' utilizando la función *plt.savefig* contenida en el módulo "Matplotlib.pyplot".

   Al final de la simulación la distribución de la temperatura debe ser uniforme en toda la placa metálica.