

Analyse Factorielle des Correspondances Multiples AFCM

Prof. Mustapha RACHDI

Université Grenoble Alpes
UFR SHS, BP. 47
38040 Grenoble cedex 09
France

Bureau : C08 au Bât. Michel Dubois
e-mail : mustapha.rachdi@univ-grenoble-alpes.fr



Introduction et principe

- L'analyse factorielle des correspondances multiples (AFCM) est la généralisation de l'AFC à plus de deux tableaux constitués par les indicatrices d'une variable qualitative.
- L'AFCM utilise la généralisation de l'AC, c'est-à-dire de l'ACG.
- L'AFCM est donc à une constante $\frac{1}{V}$ près, l'ACG de V tableaux constitués chacun par les indicatrices d'une variable qualitative (cf. Chapitre 3).
- L'AFCM peut aussi s'écrire comme l'AFC d'un tableau particulier (cf. paragraphes suivants).
- Les règles d'interprétation des résultats de l'AFC peuvent donc encore s'appliquer lorsqu'on dispose de plus de deux variables qualitatives.

- Le but de l'Analyse Factorielle des Correspondances Multiple (AFCM), comme celui de l'AFC, est de détecter des liens entre variables qualitatives, et de positionner les individus par rapport à ces liens.
- La méthode AFC vue dans le chapitre précédent ne traite formellement que du lien entre 2 variables.
- La méthode AFCM permet de généraliser cette étude à autant de variables qualitatives que l'on souhaite.

Précautions avant de passer de 2 à plus de deux variables

- Cette généralisation ne se fait pas sans un minimum de précautions, en raison,
 - d'une part, du fait que dès que l'on a plus de deux variables, on est confronté aux problèmes d'interactions entre ces variables,
 - et, d'autre part, de la non possibilité de généralisation de tous les aspects de l'interprétation d'une AFC.
- Nous allons illustrer les problèmes d'interaction avec la présentation du paradoxe de Simpson.

Le paradoxe de Simpson

Exemple 1 : Barouf à Bombach

- Au cours d'un débat télévisé sur "la femme et les études scientifiques", on aborde la question de la réussite au bac S au cours de l'année précédente.
- Un premier participant fait état d'un dossier qui fournit les statistiques ville par ville. A propos de la ville de Bombach, on y trouve les résultats suivants :

	Résultats au bac S		
	+ (succès)	- (échec)	Total
Garçons	24	36	60
Filles	36	24	60

- Conclusion : les filles réussissent mieux que les garçons : la différence est de 20 points en faveur des filles.

Le paradoxe de Simpson

Exemple 1 : Barouf à Bombach

- De ce tableau, on déduit les proportions de réussite pour les garçons et pour les filles : Garçons : $24/60 = 40\%$, Filles : $36/60 = 60\%$. Mais un deuxième participant fait état d'un dossier plus détaillé, qui fournit les résultats lycée par lycée.
- Dans la ville de Bombach, les lycéens sont répartis en deux lycées : Anastase et Bénédicte, et les statistiques relatives à chacun de ces deux lycées figurent ci-dessous.

	Anastase		
	Résultats au bac S		
	+ (succès)	- (échec)	Total
Garçons	15	35	50
Filles	1	9	10

	Bénédicte		
	Résultats au bac S		
	+ (succès)	- (échec)	Total
Garçons	9	1	10
Filles	35	15	50

- Notons que bien entendu, en ajoutant case à case les deux tableaux, on retrouvera le tableau précédent. Or, de chacun de ces deux tableaux, on déduit les proportions de réussite suivantes :
Anastase : Garçons : $15/50 = 30\%$, Filles : $1/10 = 10\%$;
Bénédicte : Garçons : $9/10 = 90\%$, Filles : $35/50 = 70\%$.

Le paradoxe de Simpson

Exemple 1 : Barouf à Bombach

- **Conclusion** : à l'intérieur de chaque lycée, les garçons réussissent mieux que les filles, la différence des pourcentages est la même dans les deux lycées : 20 points en faveur des garçons (donc valeur opposée à la valeur globale obtenue plus haut) ¹.

1. Cet exercice sur les proportions est extrait du polycopié "Documents de cours de statistique. Procédures statistiques fondamentales". Enseignement de statistique de H. Rouanet pour le C1 de psychologie générale, licence de psychologie, Université Paris V.

Le paradoxe de Simpson

Exemple 2 : la criminalité en Floride

- Il s'agit de 4764 homicides jugés en Floride de 1973 à 1979. Ces données ont été publiées dans le New-York Times du 11 mars 1979. Elles ont été maintes fois utilisées par les statisticiens (cf site internet <http://www.cict.fr/personnel/stpierre/expose-16-01-98/expose.html>).
- On dispose des données sous forme de tableau de contingence complète.

		sentence	
		peine de mort	autre peine
meurtrier	victime		
	blanc	72	2074
	noir	0	111
noir	blanc	48	239
	noir	11	2209

- Calculer les pourcentages de peine de mort chez les meurtriers blancs et chez les meurtriers noirs, toutes victimes confondues, puis en distinguant les victimes noires et les victimes blanches. Conclure.

Le tableau des données brutes

- Le premier tableau qui vient à l'idée est celui des données brutes, indiquant pour chaque individu les valeurs des variables qualitatives.
- Exemple d'un tel tableau : une enquête commandée par une cave coopérative auprès de viticulteurs de la région Languedoc-Roussillon a été menée dans le but de mieux connaître les attentes de ces derniers du point de vue des services de cette coopérative.
- Nous sélectionnons un sous-échantillon de 154 viticulteurs de telle manière qu'il n'y ait pas de données manquantes. Le tableau suivant rassemble les variables :
 - région : région de production du vin
 - statut : statut juridique (EARL, EI=exploitation individuelle, GAEC, SCEA)
 - adhérent : A=adhérent à la cave coopérative, P=prospect, c'est-à-dire non adhérent
 - valorisation : circuit de distribution de la production
 - vin : principale catégorie de vin produit.

Les différents types de tableaux

Le tableau des données brutes : Dans la première colonne figure un numéro du viticulteur (identificateur)

no	Région	statut	adhérent	valorisation	vin
1	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
2	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
3	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
4	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave coopérative	ACC
5	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Mixte	SCOA
6	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
7	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
8	CARCASSONNE	GAEG	A	Cave coopérative	VDP
9	CARCASSONNE	SCOA	A	Cave coopérative	VDP
10	CARCASSONNE	GAEG	A	Cave coopérative	VDP
11	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
12	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
13	CARCASSONNE	GAEG	A	Cave coopérative	VDP
14	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
15	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave coopérative	ACC
16	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
17	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
18	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
19	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
20	NARBONNE-HERAULT	GAEG	P	Cave coopérative	VDP
21	NARBONNE-HERAULT	SCOA	A	Cave coopérative	VDP
22	MINERVOIS-COBIERRES	SCOA	A	Cave coopérative	VDP
23	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
24	NARBONNE-HERAULT	SCOA	A	Cave particulière	ACC
25	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
26	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave particulière	ACC
27	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
28	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave particulière	ACC
29	NARBONNE-HERAULT	P	A	Cave particulière	ACC
30	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
31	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
32	NARBONNE-HERAULT	EI	P	Cave coopérative	VDP
33	NARBONNE-HERAULT	SCOA	A	Cave particulière	VDP
34	NARBONNE-HERAULT	SCOA	A	Cave coopérative	VDP
35	MINERVOIS-COBIERRES	SCOA	A	Cave particulière	ACC
36	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
37	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave particulière	VDP
38	NARBONNE-HERAULT	GAEG	A	Cave particulière	VDP
39	NARBONNE-HERAULT	GAEG	P	Cave particulière	VDP
40	CARCASSONNE	EI	P	Cave particulière	VDP
41	CARCASSONNE	P	SCOA	Cave particulière	VDP
42	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
43	CARCASSONNE	EI	P	Cave coopérative	VDP
44	BRAM	EI	A	Cave coopérative	ACC
45	NARBONNE-HERAULT	SCOA	A	Cave coopérative	VDP
46	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
47	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave particulière	ACC
48	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave particulière	ACC
49	NARBONNE-HERAULT	SCOA	P	Cave particulière	ACC
50	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave particulière	ACC
51	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave particulière	ACC
52	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave particulière	ACC
53	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave particulière	VDP
54	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave particulière	VDP
55	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave particulière	VDP
56	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave particulière	VDP
57	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Mixte	SCOA
58	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Mixte	SCOA
59	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
60	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Mixte	SCOA
61	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave particulière	VDP
62	MINERVOIS-COBIERRES	SCOA	A	Cave coopérative	ACC
63	MINERVOIS-COBIERRES	SCOA	A	Cave particulière	ACC
64	MINERVOIS-COBIERRES	SCOA	A	Cave particulière	ACC
65	MINERVOIS-COBIERRES	SCOA	A	Cave particulière	ACC
66	MINERVOIS-COBIERRES	P	A	Cave particulière	ACC
67	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
68	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
69	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
70	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
71	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave coopérative	ACC
72	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave coopérative	ACC
73	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave coopérative	VDP
74	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave coopérative	VDP
75	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	VDP
76	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Mixte	SCOA
77	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave coopérative	ACC
78	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave particulière	ACC
79	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	ACC
80	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave coopérative	ACC
81	MINERVOIS-COBIERRES	P	A	Cave particulière	ACC
82	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave particulière	ACC
83	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave particulière	ACC
84	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave particulière	ACC
85	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave particulière	ACC
86	BRAM	EI	A	Cave coopérative	ACC-VDOGS
87	MINERVOIS-COBIERRES	SCOA	A	Cave particulière	ACC
88	MINERVOIS-COBIERRES	SCOA	A	Cave particulière	ACC
89	MINERVOIS-COBIERRES	SCOA	A	Cave particulière	ACC
90	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave particulière	ACC
91	MINERVOIS-COBIERRES	P	A	Cave particulière	ACC
92	MINERVOIS-COBIERRES	P	A	Cave particulière	ACC
93	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave particulière	ACC
94	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave particulière	ACC

no	Région	statut	adhérent	valorisation	vin
95	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave coopérative	ACC
96	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave coopérative	ACC
97	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave coopérative	ACC
98	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave coopérative	ACC
99	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave coopérative	ACC
100	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave coopérative	ACC
101	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave coopérative	ACC
102	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	VDP
103	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	VDP
104	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	VDP
105	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave coopérative	VDP
106	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	VDP
107	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	VDP
108	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	VDP
109	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	VDP
110	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave particulière	ACC
111	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave coopérative	VDP
112	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
113	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
114	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
115	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
116	NARBONNE-HERAULT	EI	P	Cave coopérative	VDP
117	NARBONNE-HERAULT	GAEG	A	Cave coopérative	VDP
118	NARBONNE-HERAULT	P	SCOA	Cave particulière	ACC
119	NARBONNE-HERAULT	EI	P	Cave coopérative	VDP
120	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
121	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave particulière	ACC
122	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
123	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
124	NARBONNE-HERAULT	EI	P	Cave particulière	VDP
125	NARBONNE-HERAULT	EI	P	Cave particulière	VDP
126	NARBONNE-HERAULT	SCOA	A	Cave particulière	VDP
127	NARBONNE-HERAULT	SCOA	A	Cave particulière	VDP
128	NARBONNE-HERAULT	SCOA	A	Cave particulière	VDP
129	NARBONNE-HERAULT	SCOA	A	Cave particulière	VDP
130	NARBONNE-HERAULT	SCOA	A	Cave particulière	VDP
131	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
132	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
133	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
134	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
135	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
136	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
137	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
138	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
139	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
140	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
141	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
142	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
143	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
144	CARCASSONNE	EI	A	Cave particulière	ACC
145	CARCASSONNE	EI	A	Cave particulière	ACC
146	CARCASSONNE	EI	A	Cave particulière	ACC
147	CARCASSONNE	EI	A	Cave particulière	ACC
148	CARCASSONNE	GAEG	A	Cave particulière	ACC
149	CARCASSONNE	EI	P	Cave particulière	ACC
150	CARCASSONNE	EI	P	Cave particulière	ACC
151	CARCASSONNE	EI	P	Cave particulière	ACC
152	CARCASSONNE	EI	P	Cave particulière	ACC
153	CARCASSONNE	EI	A	Cave particulière	ACC
154	CARCASSONNE	EI	A	Cave particulière	ACC
155	CARCASSONNE	EI	A	Cave particulière	ACC
156	CARCASSONNE	EI	A	Cave particulière	ACC
157	CARCASSONNE	EI	A	Cave particulière	ACC
158	BRAM	GAEG	A	Cave particulière	ACC
159	BRAM	GAEG	A	Cave particulière	ACC
160	BRAM	GAEG	A	Cave particulière	ACC
161	BRAM	EI	A	Cave particulière	ACC
162	BRAM	EI	A	Cave particulière	ACC
163	BRAM	GAEG	A	Cave particulière	ACC
164	BRAM	EI	A	Cave particulière	ACC
165	NARBONNE-HERAULT	EI	P	Cave particulière	ACC
166	NARBONNE-HERAULT	EI	P	Cave particulière	ACC
167	NARBONNE-HERAULT	EI	P	Cave particulière	ACC
168	NARBONNE-HERAULT	GAEG	A	Cave particulière	ACC
169	NARBONNE-HERAULT	GAEG	A	Cave particulière	ACC
170	NARBONNE-HERAULT	EI	P	Cave particulière	ACC
171	NARBONNE-HERAULT	GAEG	A	Cave particulière	ACC
172	NARBONNE-HERAULT	EI	P	Cave particulière	ACC
173	CARCASSONNE	EI	A	Cave particulière	ACC
174	MINERVOIS-COBIERRES	EI	A	Cave particulière	ACC
175	BRAM	EI	A	Cave particulière	ACC
176	BRAM	GAEG	A	Cave particulière	ACC
177	BRAM	EI	A	Cave particulière	ACC
178	BRAM	EI	A	Cave particulière	ACC
179	BRAM	GAEG	A	Cave particulière	ACC
180	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave particulière	ACC
181	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave particulière	ACC
182	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave particulière	ACC
183	MINERVOIS-COBIERRES	GAEG	A	Cave particulière	ACC
184	MINERVOIS-COBIERRES	EI	P	Cave particulière	ACC
185	CARCASSONNE	EI	P	Mixte	VDP

Les différents types de tableaux

Le tableau de données brut

- Un extrait du tableau précédent est le suivant :

no	région	statut	adhérent	valorisation	vin
1	MINERVOIS-CORBIERES	EI	A	Cave coopérative	AOC
2	MINERVOIS-CORBIERES	EI	A	Cave coopérative	AOC
3	MINERVOIS-CORBIERES	EI	A	Cave coopérative	AOC
5	MINERVOIS-CORBIERES	GAEC	A	Cave coopérative	AOC
7	MINERVOIS-CORBIERES	EARL	A	Mixte	AOC
8	CARCASSONNE	EARL	A	Cave coopérative	VDP
9	CARCASSONNE	EI	A	Cave coopérative	VDP
10	CARCASSONNE	GAEC	A	Cave coopérative	VDP
11	CARCASSONNE	SCEA	A	Cave coopérative	AOC
12	CARCASSONNE	EI	P	Cave coopérative	VDP
15	MINERVOIS-CORBIERES	GAEC	A	Cave coopérative	VDP
16	MINERVOIS-CORBIERES	EI	A	Cave coopérative	AOC
17	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
18	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
19	NARBONNE-HERAULT	EI	A	Cave coopérative	VDP
21	NARBONNE-HERAULT	GAEC	P	Cave coopérative	VDP
22	MINERVOIS-CORBIERES	SCEA	A	Cave coopérative	AOC
25	NARBONNE-HERAULT	EARL	A	Cave coopérative	AOC

Les différents types de tableaux

Le tableau disjonctif complet

- C'est un tableau dans lequel chaque ligne correspond à un individu, et chaque colonne à une modalité. Les cases du tableau contiennent 1 si l'individu de la ligne prend la modalité de la colonne, et 0 sinon.
- Un extrait du tableau disjonctif complet issu du tableau de données précédent est le suivant :

no	BRAM	CARC	MC	NH	EARL	EI	GAEC	SCEA	A	P	Mixte	Coop	Part	VDQS	AO-VDQS	AOC	VDP
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
7	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
8	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
9	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
185	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1

- Ces deux tableaux contiennent l'information la plus complète qui soit (information par individu). Le second est une " quantification " du premier, c'est l'avantage qu'il présente. On remarquera qu'il occupe plus de place que le précédent.
- Exercice : quelles valeurs ont les sommes des lignes ? Des colonnes ?

Le tableau des données groupées

- Quand l'identité des individus n'est pas d'intérêt, ou quand on n'aura pas besoin d'identifier les individus par la suite, on peut simplifier le tableau en comptant le nombre d'individus correspondant à chaque profil. Le tableau précédent peut ainsi être simplifié comme ci-dessous.

région	statut	adhérent	valorisation	vin	Effectif
BRAM	EARL	A	coop	AO-VDQS	3
BRAM	EARL	A	coop	AOC	1
BRAM	EARL	A	part	AOC	1
BRAM	EI	A	mixte	AO-VDQS	1
BRAM	EI	A	coop	AO-VDQS	1
BRAM	EI	A	coop	VDP	3
BRAM	GAEC	A	coop	AOC	1
BRAM	GAEC	A	coop	VDP	3
CARC	EARL	A	mixte	AOC	1
CARC	EARL	A	mixte	VDP	1
CARC	EARL	A	coop	VDP	3
CARC	EARL	P	mixte	VDP	1
CARC	EI	A	coop	VDQS	4
CARC	EI	A	coop	AOC	3
CARC	EI	A	coop	VDP	4
CARC	EI	A	part	AO-VDQS	1
CARC	EI	A	part	AOC	2
CARC	EI	P	coop	AOC	3
CARC	EI	P	coop	VDP	3
CARC	EI	P	part	VDP	2
CARC	GAEC	A	coop	VDP	2
CARC	SCEA	A	coop	AOC	1
CARC	SCEA	P	part	VDP	1
MC	EARL	A	mixte	AOC	1
MC	EARL	A	coop	AOC	2

Le tableau des données groupées

- Mais sa présentation peut être optimisée, en créant un tableau dans lequel les noms des modalités des variables ne sont pas répétés. C'est ce que l'on fait dans le paragraphe qui suit.

MC	EARL	P	part	AOC	2
MC	EI	A	mixte	AOC	2
MC	EI	A	mixte	VDP	1
MC	EI	A	coop	AOC	18
MC	EI	A	coop	VDP	4
MC	EI	P	coop	AOC	11
MC	EI	P	part	AOC	2
MC	GAEC	A	coop	AOC	5
MC	GAEC	A	coop	VDP	3
MC	GAEC	A	part	AOC	1
MC	SCEA	A	coop	AOC	3
MC	SCEA	A	part	AOC	4
MC	SCEA	P	coop	AOC	1
NH	EARL	A	coop	AOC	2
NH	EARL	A	part	AOC	1
NH	EI	A	coop	AOC	1
NH	EI	A	coop	VDP	15
NH	EI	A	part	AOC	1
NH	EI	P	coop	AOC	1
NH	EI	P	coop	VDP	6
NH	EI	P	part	VDP	2
NH	GAEC	A	coop	VDP	4
NH	GAEC	P	coop	VDP	2
NH	GAEC	P	part	AOC	1
NH	GAEC	P	part	VDP	2
NH	SCEA	A	coop	VDP	2
NH	SCEA	A	part	AOC	1
NH	SCEA	A	part	VDP	1
NH	SCEA	P	part	AOC	2
NH	SCEA	P	part	VDP	1

Le tableau de contingence complète

- Ce tableau contient les mêmes informations qu'un tableau de données groupées, mais dans une présentation plus synthétique.

		A									P					
		mixte			Coop			part			mixte		coop		part	
		AO-VDQS	AOC	VDP	AO-VDQS	AOC	VDP	AO-VDQS	AOC	VDP	AOC	VDP	AOC	VDP	AOC	VDP
BRAM	EARL	0	0	0	3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	EI	1	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	GAEC	0	0	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	SCEA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CARC	EARL	0	1	1	0	0	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	EI	0	0	0	4	3	4	1	2	0	0	0	3	3	0	2
	GAEC	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	SCEA	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
MC	EARL	0	1	0	0	2	0	0	0	1	1	0	0	1	2	0
	EI	0	2	1	0	18	4	0	0	0	0	0	11	0	2	0
	GAEC	0	0	0	0	5	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	SCEA	0	0	0	0	3	0	0	4	0	0	0	1	0	0	0
NH	EARL	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	EI	0	0	0	0	1	15	0	1	0	0	0	1	6	0	2
	GAEC	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	2	1	2
	SCEA	0	0	0	0	0	2	0	1	1	0	0	0	0	2	1

- que valent les sommes des lignes ? des colonnes ?
- Remarque 1 : quand il n'y a pas beaucoup d'individus et beaucoup de modalités de variables, ce tableau risque d'être plus volumineux que celui des données groupées, voire celui des données brutes.

Le tableau de contingence complète

- Remarque 2 : parfois, les données se présentent uniquement sous forme de données groupées ou de tableau de contingence complète. C'est le cas lorsqu'elles ont été recueillies par estimation. Par exemple, le tableau suivant restitue le tonnage transporté par bateaux selon les types de bateaux. Les données n'ont jamais été recueillies tonne par tonne, mais des estimations ont été faites pour arriver à ces valeurs. Elles concernent le trafic annuel par bateaux.

typenavire	pétrolier				Vraquier				classique				porte-conteneur				autre			
	age0-4ans	age5-9ans	age10-14ans	age+15ans	age0-4ans	age5-9ans	age10-14ans	age+15ans	age0-4ans	age5-9ans	age10-14ans	age+15ans	age0-4ans	age5-9ans	age10-14ans	age+15ans	age0-4ans	age5-9ans	age10-14ans	age+15ans
developpe	8.2663	10.8381	35.3615	37.3822	9.8878	22.9562	13.9673	22.3339	2.7760	5.6231	6.2637	9.0634	2.3403	3.2238	2.9373	3.4387	3.5265	6.3835	4.8880	7.5218
libimatr	12.2924	6.6584	23.7653	59.7205	6.0698	19.6879	15.9526	36.1074	2.8525	4.6824	7.8847	11.4906	1.7933	1.4574	1.0836	1.0836	1.9359	2.7843	2.7724	4.4573
e-orienta	1.1820	1.6390	2.3718	2.6870	1.8158	4.2036	4.4323	3.8461	1.7035	2.2447	2.9771	8.9949	0.2268	0.2761	0.1504	0.1684	0.7751	0.8127	0.9150	2.8796
asiesocia	0.2817	0.3955	0.6420	1.3895	0.5569	1.7889	1.7045	4.3878	0.2794	0.8294	1.7548	5.8668	0.1682	0.5349	0.0485	0.3268	0.0250	0.0793	0.3607	0.6214
endevelop	3.8131	5.9002	11.0779	19.3462	11.1607	20.1013	12.7208	16.0211	1.1571	3.6598	8.9073	13.1860	1.1545	0.8751	1.1832	0.8956	0.6014	2.2941	2.4488	3.2478

- Sur ce dernier tableau, on est aussi confronté au problème de l'unité dans laquelle on mesure les quantités dénombrées. Les unités sont ici exprimées en millions de tonnes de port en lourd (MTPL). Si l'on change d'unité de comptage, on change certainement la valeur de la statistique du khi-deux. Mais ce qui est rassurant, c'est qu'on ne changera pas les interprétations descriptives des liens éventuels entre les variables.

Le tableau de contingence complète : Extrait

typenavire	pétrolier				Vraquier					
Typepays immatriculation	age0- 4ans	age5- 9ans	age10- 14ans	age +15ans	age0- 4ans	age5- 9ans	age10- 14ans	age +15ans	age0- 4ans	age 9a
developpe	8.2663	10.8381	35.3615	37.3822	9.8878	22.9562	13.9673	22.3339	2.7760	5.6
libimmatr	12.2924	6.6584	23.7653	59.7205	6.0698	19.6879	15.9526	36.1074	2.8525	4.6
e-orienta	1.1820	1.6390	2.3718	2.6870	1.8158	4.2036	4.4323	3.8461	1.7035	2.2
asiapacria	0.2817	0.2055	0.6420	1.3805	0.5560	1.7880	1.7045	4.3878	0.2704	0.8

Le tableau de Burt

- C'est le tableau qui sera utilisé comme un tableau de contingence. Utilisé par Burt dans un article de 1950 dans British Journal of Psychology, ce tableau a gardé le nom de celui qui l'a utilisé dans les premières fois. L'AFCM a été introduite plus tôt, en 1941, par Guttman, dont on a cité le nom à la fin du chapitre sur l'AFC (effet Guttman).
- Ce tableau est un “ super tableau de contingence ”, construit comme une juxtaposition de plusieurs tableaux de contingence. Les lignes et les colonnes correspondent chacune à une modalité de variable, et à l'intersection d'une ligne et d'une colonne se trouve l'effectif des individus qui prennent conjointement la modalité de la ligne et celle de la colonne. Exemple des données de l'enquête :

Le tableau de Burt

	BRAM	CARC	MC	NH	EARL	EI	GAEC	SCEA	A	P	mixte	coop	part	AO-VDQS	AOC	VDP
BRAM	14	0	0	0	5	5	4	0	14	0	1	12	1	5	3	6
CARC	0	32	0	0	6	22	2	2	22	10	3	23	6	5	10	17
MC	0	0	63	0	8	38	9	8	45	18	5	48	10	0	53	10
NH	0	0	0	45	3	26	9	7	28	17	0	33	12	0	10	35
EARL	5	6	8	3	22	0	0	0	17	5	5	12	5	3	12	7
EI	5	22	38	26	0	91	0	0	61	30	4	77	10	7	44	40
GAEC	4	2	9	9	0	0	24	0	19	5	0	20	4	0	8	16
SCEA	0	2	8	7	0	0	0	17	12	5	0	7	10	0	12	5
A	14	22	45	28	17	61	19	12	109	0	7	88	14	10	52	47
P	0	10	18	17	5	30	5	5	0	45	2	28	15	0	24	21
mixte	1	3	5	0	5	4	0	0	7	2	9	0	0	1	5	3
coop	12	23	48	33	12	77	20	7	88	28	0	116	0	8	53	55
part	1	6	10	12	5	10	4	10	14	15	0	0	29	1	18	10
AO-VDQS	5	5	0	0	3	7	0	0	10	0	1	8	1	10	0	0
AOC	3	10	53	10	12	44	8	12	52	24	5	53	18	0	76	0
VDP	6	17	10	35	7	40	16	5	47	21	3	55	10	0	0	68

- Exercice : que valent les sommes des lignes ? des colonnes ?

Comparaison des résultats de l'AFC et de l'AFCM lorsque $p = 2$, et conséquences dans les différences d'interprétation

- L'AFCM est une AFC simple opérée soit sur le tableau disjonctif complet, soit sur le tableau de Burt.
- Dans le premier cas, les lignes sont les individus de départ et les colonnes sont les modalités.
- L'AFC positionne donc ces deux informations.
- Dans le second cas, les lignes et les colonnes sont égales aux modalités des variables.
- On n'a donc plus d'informations sur les comportements individuels, mais seulement sur les liens entre modalités.

Les valeurs propres

- Considérant l'exemple traité dans le chapitre AFC, la série des valeurs propres issues de l'AFC et de celles issues de l'AFCM sont les suivantes :

rappel tableau de contingence :						valeurs propres AFC ($r=c=4 \rightarrow 3$ axes)	valeurs propres AFCM ($r+c-2=6$ axes)
CSP/HEB	CAMP	HOTEL	LOCA	RESI	Total	$\lambda_1=0,098243$ (86,855%)	$\mu_1 = (1 + \lambda_1)/2 = 0,6567$ (21,89%)
AGRI	239	155	129	0	523	$\lambda_2=0,013863$ (12,256%)	$\mu_2 = (1 + \lambda_2)/2 = 0,5589$ (18,63%)
CADR	1003	1556	1821	1521	5901	$\lambda_3=0,0010054$ (0,889%)	$\mu_3 = (1 + \lambda_3)/2 = 0,5159$ (17,20%)
INAC	682	1944	967	1333	4926		$\mu_i = (1 - \lambda_{7-i})/2$, sans intérêt
OUVR	2594	1124	2176	1038	6932		$\sum_{i=1}^6 \mu_i = (r+c)/2 - 1 = 3$.
Total	4518	4779	5093	3892	18282	$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 0,113114$	

- De façon plus générale, les liens entre les valeurs propres issues de l'AFC et celles issues de l'AFCM sont :
 - lorsque $p = 2$: pour $i = 1, \dots, \min(r, c) - 1$, $\mu_i = (1 + \lambda_i)/2$,
 - pour $i = \min(r, c)$, $\mu_i = 1/2$,
 - pour $i = \max(r, c), \dots, r + c - 2$, $\mu_i = (1 + \lambda_{r+c-1-i})/2$.

- Pour faciliter la généralisation de 2 à p variables, nous remplacerons r et c par m_1 et m_2 , de sorte que les nombres de modalités des variables X_1, X_2, \dots, X_p seront m_1, m_2, \dots, m_p .
- Les valeurs propres sont au nombre de $m_1 + \dots + m_p - p$, et leur somme égale $(m_1 + \dots + m_p - p)/p$.
- On voit avec ces propriétés que l'utilisation des valeurs propres ne pourra plus se faire de la même façon en AFCM qu'en AFC. Nous pouvons mettre en comparaison les éléments d'interprétation à partir des valeurs propres de l'AFC et de l'AFCM.

analyse	AFC	AFCM
somme des valeurs propres	égale $n\chi^2$, donc est utilisée pour évaluer l'importance du lien entre les deux variables.	égale $(m_1 + \dots + m_p - p)/p$. Est donc uniquement dépendante du nombre de variables et du nombre total de modalités. Ne peut servir à évaluer l'importance du lien entre les variables.
nombre de valeurs propres=nombre d'axes	avec $\min(r,c)-1$ axes, on restitue 100% de l'inertie, c'est-à-dire du lien entre les 2 variables	pour $p=2$, on a vu que le nombre d'axes pouvait être le double d'avec la méthode AFC, sur les mêmes données. Bien sûr, les seules 3 premières apportent 100% de l'information, les autres sont des "redondances".
pourcentage d'inertie apporté par les axes	il égale le pourcentage du lien apporté par l'axe, donc le pourcentage de l'information à laquelle on s'intéresse	n'égale plus le pourcentage d'information; on ne peut s'en servir pour savoir quel pourcentage du lien on a expliqué.
choix du nombre d'axes à retenir	méthode de Kaiser adaptée, ou méthode de l'éboulis	la méthode de Kaiser ne peut plus convenir, puisque la moyenne des valeurs propres ne dépend pas de l'importance de l'information totale; la méthode de l'éboulis seule convient, à condition de ne faire le choix qu'avec la première moitié, voire les $[k/p]$ premiers axes, où k est le nombre total d'axes ($[x]$ dénote la partie entière de x).

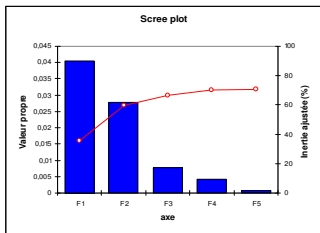
Exemple : les valeurs propres obtenues avec les données de viticulture sont les suivantes :

Valeurs propres et pourcentages d'inertie :											
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11
Valeur propre	0,361	0,333	0,271	0,252	0,220	0,178	0,166	0,134	0,111	0,099	0,075
Inertie (%)	16,421	15,157	12,296	11,446	9,981	8,072	7,560	6,091	5,049	4,518	3,410
% cumulé	16,421	31,577	43,873	55,320	65,300	73,372	80,932	87,023	92,072	96,590	100,000
Inertie ajustée	0,041	0,028	0,008	0,004	0,001						
Inertie ajustée (%)	35,526	24,330	6,793	3,669	0,523						
% cumulé	35,526	59,855	66,648	70,318	70,841						

- A l'aide des remarques faites ci-dessus, faire un choix du nombre d'axes à retenir.
- En tenant compte de cette correction, on utilise une formule ajustée pour mieux rendre compte de l'inertie (l'information) restituée par les facteurs

$$\lambda_{ajust} = \left[\left(\frac{p}{p-1} \right) \left(\lambda - \frac{1}{p} \right) \right]^2$$

- Uniquement pour les facteurs dont la v.p. est supérieure à la moyenne des v.p. (les autres facteurs ne sont pas intéressants) $\lambda > \frac{1}{p}$. On veut donner plus d'importance aux v.p. sélectionnées.



Les résultats pour les modalités

Coordonnées principales (Variables) :					Contributions (Variables) :									Cosinus carrés (Variables) :					
	F1	F2	F3	F4	F5		Poids	Poids (relatif)	F1	F2	F3	F4	F5		F1	F2	F3	F4	F5
BRAM	1.993	-0.178	0.477	1.402	0.413	BRAM	14	0.018	0.200	0.002	0.015	0.142	0.014	BRAM	0.397	0.003	0.023	0.197	0.017
CARC	0.502	-0.095	0.556	-1.165	0.326	CARC	32	0.042	0.029	0.001	0.048	0.224	0.020	CARC	0.066	0.002	0.081	0.356	0.028
MC	-0.315	0.819	-0.603	0.192	-0.111	MC	63	0.082	0.022	0.165	0.110	0.012	0.005	MC	0.069	0.465	0.252	0.026	0.009
NH	-0.536	-1.024	0.300	0.123	-0.204	NH	45	0.058	0.046	0.184	0.019	0.004	0.011	NH	0.119	0.433	0.037	0.006	0.017
EARL	0.924	0.846	1.095	0.128	-1.061	EARL	22	0.029	0.067	0.061	0.127	0.002	0.146	EARL	0.142	0.119	0.200	0.003	0.188
EI	0.020	-0.072	-0.374	-0.546	0.267	EI	91	0.118	0.000	0.002	0.061	0.140	0.038	EI	0.001	0.007	0.202	0.430	0.103
GAEC	0.009	-0.836	-0.391	1.284	-0.725	GAEC	24	0.031	0.000	0.065	0.018	0.204	0.075	GAEC	0.000	0.129	0.028	0.304	0.097
SCEA	-1.316	0.469	1.136	0.943	0.967	SCEA	17	0.022	0.106	0.015	0.105	0.078	0.094	SCEA	0.215	0.027	0.160	0.110	0.116
A	0.307	0.025	-0.140	0.263	0.069	A	109	0.142	0.037	0.000	0.010	0.039	0.003	A	0.228	0.002	0.047	0.167	0.011
P	-0.744	-0.061	0.339	-0.636	-0.166	P	45	0.058	0.089	0.001	0.025	0.094	0.007	P	0.228	0.002	0.047	0.167	0.011
mixte	1.118	1.504	0.928	-0.847	-2.399	mixte	9	0.012	0.040	0.079	0.037	0.033	0.306	mixte	0.078	0.140	0.053	0.045	0.357
coop	0.161	-0.178	-0.412	-0.019	0.098	coop	116	0.151	0.011	0.014	0.094	0.000	0.007	coop	0.079	0.097	0.517	0.001	0.029
part	-0.991	0.246	1.359	0.341	0.352	part	29	0.038	0.102	0.007	0.257	0.017	0.021	part	0.228	0.014	0.428	0.027	0.029
AO-VDQS	2.465	0.186	0.973	-0.110	1.845	AO-VDQS	10	0.013	0.218	0.001	0.045	0.001	0.201	AO-VDQS	0.422	0.002	0.066	0.001	0.236
AOC	-0.333	0.789	-0.248	0.119	0.068	AOC	76	0.099	0.030	0.184	0.022	0.006	0.002	AOC	0.108	0.606	0.060	0.014	0.004
VDP	0.010	-0.909	0.134	-0.117	-0.347	VDP	68	0.088	0.000	0.219	0.006	0.005	0.048	VDP	0.000	0.653	0.014	0.011	0.095

- Ils se déclinent comme pour toute analyse factorielle, en coordonnées, contributions, et cosinus carrés. Une des différences avec l'AFC est que les modalités de TOUTES les variables figurent dans un même tableau, alors qu'avec 2 variables, l'AFC nous donnait une série de tableaux pour les modalités lignes, et une autre série pour les modalités colonnes.
- Signalons des propriétés que l'on retrouve aussi pour toutes les analyses factorielles vues, à savoir que les coordonnées des modalités sont centrées, les moyennes étant à calculer en pondérant par les effectifs, que l'on retrouve dans la colonne des Poids). Chaque ensemble des coordonnées d'une même variable est centré (à vérifier).

Les contributions des modalités

- Une autre différence est que c'est la somme des contributions des modalités de toutes les variables qui égale 100% (ou 1, dans nos sorties), alors qu'en AFC, il fallait additionner les contributions des modalités d'une seule variable pour avoir 100%.
- La moyenne des contributions de toutes les modalités est donc $1/(m_1 + \dots + m_p)$.
- Dans l'exemple que nous suivons, les modalités contribuant plus que la moyenne sont relevées dans le tableau suivant, avec répartition dans le tableau selon les signes des coordonnées.

signes coordonnées	-	+
axe 1	SCEA, P, part	BRAM, EARL, AO-VDQS
axe 2	NH, GAEC, VDP	MC, mixte, AOC

- L'axe 1 est construit sur la base du fait que les viticulteurs de BRAM sont plutôt en EARL, produisent plus fréquemment que les autres de l'AO-VDQS, et sont moins fréquemment des SCEA, P, et part.
- L'axe 2 est construit sur la base du fait que les viticulteurs de NH sont plutôt en GAEC, produisent plus fréquemment que les autres du VDP et moins de l'AOC, sont peu en valorisation mixte, contrairement à ceux du MC.

Les contributions des modalités

Coordonnées principales (Variables) :						
	F6	F7	F8	F9	F10	F11
région-BRAM	1,120	0,441	0,236	-1,001	0,988	0,388
région-CARC	-0,521	-1,161	-0,218	-0,169	0,089	0,273
région-MC	0,073	-0,024	0,076	0,005	-0,055	-0,496
région-NH	-0,080	0,722	-0,024	0,425	-0,294	0,379
statut-EARL	0,204	0,248	-1,360	0,090	-0,320	-0,162
statut-EI	0,082	0,257	0,148	0,117	0,264	0,004
statut-GAEC	0,335	-1,360	0,475	0,253	-0,343	0,145
statut-SCEA	-1,175	0,223	0,296	-1,100	-0,513	-0,018
adhérent-A	-0,421	0,029	-0,059	0,171	0,120	0,000
adhérent-P	1,019	-0,069	0,144	-0,413	-0,290	-0,001
valorisation-Mixte	-0,849	0,545	2,037	-0,107	0,007	0,293
valorisation-coop	-0,011	0,032	-0,179	-0,163	-0,171	0,038
valorisation-part	0,306	-0,295	0,084	0,685	0,682	-0,243
vin-AO-VDQS	0,586	0,160	0,867	0,850	-1,349	-0,513
vin-AOC	0,102	-0,051	-0,097	0,089	0,016	0,428
vin-VDP	-0,200	0,033	-0,019	-0,225	0,181	-0,402

Les cosinus carrés des modalités

- De la même manière que dans les analyses précédentes, ils sont égaux au rapport entre le carré de la coordonnée sur l'axe et la somme des carrés de toutes les coordonnées, pour une modalité donnée. Pour les retrouver, il faut disposer des coordonnées sur tous les axes.
- Pour les cosinus carrés, la moyenne est, comme dans toutes les analyses factorielles vues, $1/(\text{nb d'axes})$. C'est le calcul du nombre d'axes qui change d'une analyse à l'autre.

Cosinus carrés (Variables) :					
	F1	F2	F3	F4	F5
BRAM	0,397	0,003	0,023	0,197	0,017
CARC	0,066	0,002	0,081	0,356	0,028
MC	0,069	0,465	0,252	0,026	0,009
NH	0,119	0,433	0,037	0,006	0,017
EARL	0,142	0,119	0,200	0,003	0,188
EI	0,001	0,007	0,202	0,430	0,103
BAEC	0,000	0,129	0,028	0,304	0,097
SCEA	0,215	0,027	0,160	0,110	0,116
A	0,228	0,002	0,047	0,167	0,011
P	0,228	0,002	0,047	0,167	0,011
nixte	0,078	0,140	0,053	0,045	0,357
coop	0,079	0,097	0,517	0,001	0,029
part	0,228	0,014	0,428	0,027	0,029
AO-VDQS	0,422	0,002	0,066	0,001	0,236
AOC	0,108	0,606	0,060	0,014	0,004
/DP	0,000	0,653	0,014	0,011	0,095

Les cosinus carrés des modalités

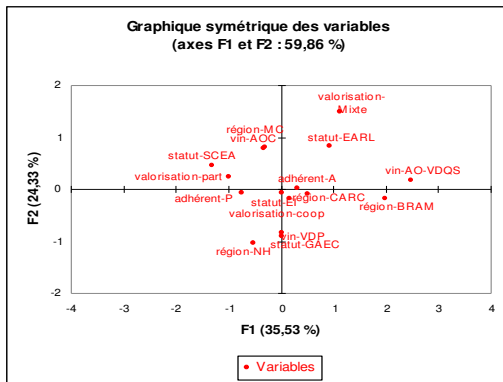
- Le tableau qui suit indique les modalités qui sont reconstituées plus que la moyenne, et les signes des coordonnées de ces modalités.

signes coordonnées	-	+
axe 1	NH, SCEA, P, part, AOC	BRAM, EARL, A, AO-VDQS
axe 2	NH, GAEC, coop, VDP	MC, EARL, mixte, AOC

- On peut remarquer que, pour les 2 premiers axes, toutes les modalités qui contribuent sont aussi bien représentées/reconstituées.
- Sur l'axe 1, on peut ajouter par rapport à ce qui a été dit avec les contributions que les viticulteurs du NH ont un profil voisin de ceux en SCEA, et produisent plutôt de l'AOC. A l'opposé, les viticulteurs de BRAM sont plutôt Adhérents.
- Sur l'axe 2, les viticulteurs du NH en GAEC sont aussi souvent en coop, ils s'opposent en cela à ceux du MC qui sont plutôt en EARL.

Graphique et interprétation

- On remarque que les modalités ne sont pas toutes bien reconstituées. Il manque l'interprétation des modalités Carcassonne et EI. Cela signifie que les viticulteurs de Carcassonne, ainsi que ceux qui sont EI (entreprise individuelle, les plus nombreux), ont les profils les plus près de la moyenne.
- Le nuage des modalités ci-contre est relativement "rond", on ne voit pas d'effet Guttman, ni de modalité ayant de caractéristique vraiment atypique.



Les résultats pour les individus, lorsqu'ils sont présents

- Lorsque l'on ne connaît des données qu'un tableau de données groupées, les résultats précédents sont les seuls que nous aurons à analyser. D'autres résultats numériques et graphiques existent (cf sorties SPAD, XLSTAT, ...), mais nous ne les analyserons pas systématiquement.
- Lorsque l'on connaît les profils de chaque individu, on peut avoir, en plus des résultats des modalités, ceux de ces individus. C'est le cas dans l'exemple que nous suivons. Une utilité de l'analyse de ces individus est dans l'intérêt qu'a la position de ces individus par rapport à celle des modalités (comme dans l'analyse des positions comparées des modalités lignes et colonnes en AFC).

Les résultats pour les individus, lorsqu'ils sont présents

- D'autre part, même si l'analyse individuelle n'a pas d'intérêt propre, la connaissance de la position de ces individus permet de détecter des individus atypiques, et permet d'opérer une classification de ces individus.
- La classification, que nous verrons dans le prochain chapitre, regroupe les individus en classes qu'on cherche à avoir les plus "homogènes". Cette mise en classes a plusieurs desseins. Le premier est une simplification de la lecture des profils possibles d'individus. Les autres buts dépendent du contexte dans lequel l'étude a été faite. Par exemple, en marketing, on peut isoler des "segments" de marché en choisissant les classes dont le profil correspond à des critères préalablement choisis.

Contributions des individus

Mais revenons aux résultats pour les individus, qui, dans l'exemple, sont dans le tableau qui suit.

Coordonnées principales (Observations)										Contributions (Observations)										Cosinus carrés (Observations)									
										Positive (add. relatif)																			
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									
F										F										F									

Contributions des individus

117	-0.016	-1.012	-0.195	0.611	-0.474	-0.179	0.267	0.106	0.276	-0.322	0.117	117	1	0.006	0.000	0.020	0.001	0.010	0.007	117	0.000	0.520	0.019	0.190	0.114
118	-1.304	0.145	0.110	0.355	0.434	0.084	0.260	0.220	-0.188	-0.253	0.398	118	1	0.006	0.031	0.000	0.030	0.003	0.006	118	0.466	0.006	0.338	0.034	0.052
119	0.362	-0.777	-0.005	-0.476	-0.150	-0.384	0.478	0.038	-0.156	-0.197	0.014	119	1	0.006	0.002	0.012	0.000	0.006	0.001	119	0.092	0.423	0.000	0.169	0.016
120	-0.013	-0.747	-0.189	-0.110	-0.050	-0.299	0.526	0.073	0.194	0.063	0.014	120	1	0.006	0.000	0.011	0.001	0.000	0.000	120	0.000	0.545	0.035	0.114	0.002
124	-0.749	-0.895	0.669	0.396	-0.465	0.655	-0.473	0.361	0.439	0.041	-0.083	124	1	0.006	0.010	0.016	0.011	0.004	0.006	124	0.177	0.253	0.141	0.050	0.068
125	-0.013	-0.747	-0.189	-0.110	-0.050	-0.299	0.526	0.073	0.194	0.063	0.014	125	1	0.006	0.000	0.011	0.001	0.000	0.000	125	0.000	0.545	0.035	0.114	0.002
126	-0.013	-0.747	-0.189	-0.110	-0.050	-0.299	0.526	0.073	0.194	0.063	0.014	126	1	0.006	0.000	0.011	0.001	0.000	0.000	126	0.000	0.545	0.035	0.114	0.002
127	-0.746	-0.630	0.766	-0.393	-0.042	0.539	0.318	0.182	0.353	0.044	-0.192	127	1	0.006	0.010	0.008	0.011	0.003	0.000	127	0.250	0.179	0.025	0.050	0.001
128	-0.362	-0.777	-0.005	-0.476	-0.150	-0.384	0.478	0.038	-0.156	-0.197	0.014	128	1	0.006	0.002	0.012	0.000	0.006	0.001	128	0.092	0.423	0.000	0.169	0.016
129	-0.840	-0.413	1.072	0.619	0.357	-0.748	-0.348	0.152	0.027	-0.111	-0.207	129	1	0.006	0.013	0.003	0.028	0.010	0.004	129	0.214	0.052	0.349	0.116	0.039
131	0.333	-0.426	-0.091	-0.632	0.176	0.508	0.397	-0.179	-0.162	0.306	-0.063	131	1	0.006	0.002	0.004	0.000	0.010	0.001	131	0.085	0.139	0.006	0.060	0.024
133	0.633	-0.108	0.474	-0.363	-0.391	0.450	-0.402	-1.004	-0.178	-0.064	-0.182	133	1	0.006	0.007	0.000	0.005	0.003	0.005	133	0.170	0.005	0.095	0.056	0.065
136	1.150	-0.046	0.232	-0.629	-1.112	-0.135	0.339	0.303	-0.483	-0.665	-0.144	136	1	0.006	0.024	0.000	0.001	0.010	0.037	136	0.336	0.001	0.014	0.101	0.315
137	1.150	-0.046	0.232	-0.629	-1.112	-0.135	0.339	0.303	-0.483	-0.665	-0.144	137	1	0.006	0.024	0.000	0.001	0.010	0.037	137	0.336	0.001	0.014	0.101	0.315
138	1.150	-0.046	0.232	-0.629	-1.112	-0.135	0.339	0.303	-0.483	-0.665	-0.144	138	1	0.006	0.024	0.000	0.001	0.010	0.037	138	0.336	0.001	0.014	0.101	0.315
139	0.829	-0.454	-0.121	0.392	0.213	0.271	0.388	0.069	0.661	0.876	0.021	139	1	0.006	0.012	0.004	0.000	0.004	0.001	139	0.270	0.081	0.006	0.060	0.018
140	1.150	-0.046	0.232	-0.629	-1.112	-0.135	0.339	0.303	-0.483	-0.665	-0.144	140	1	0.006	0.024	0.000	0.001	0.010	0.037	140	0.336	0.001	0.014	0.101	0.315
142	0.838	1.063	0.843	-0.599	-1.279	-0.705	-0.191	0.163	0.048	-0.056	-0.607	142	1	0.006	0.013	0.022	0.017	0.009	0.048	142	0.128	0.205	0.130	0.065	0.296
143	0.219	0.162	-0.237	-0.537	0.353	-0.365	-0.438	-0.222	0.027	-0.201	0.543	143	1	0.006	0.007	0.001	0.001	0.007	0.004	143	0.038	0.021	0.045	0.230	0.095
144	-0.165	0.309	0.444	-0.394	0.462	-0.214	-0.599	-0.077	0.538	0.742	0.337	144	1	0.006	0.000	0.002	0.005	0.004	0.006	144	0.013	0.047	0.096	0.076	0.104
146	0.333	-0.426	-0.091	-0.632	0.176	0.508	0.397	-0.179	-0.162	0.306	-0.063	146	1	0.006	0.002	0.004	0.000	0.010	0.001	146	0.085	0.139	0.006	0.060	0.024
147	0.219	0.162	-0.237	-0.537	0.353	-0.365	-0.438	-0.222	0.027	-0.201	0.543	147	1	0.006	0.001	0.001	0.001	0.007	0.004	147	0.038	0.021	0.045	0.230	0.095
148	0.329	-0.690	0.097	0.098	-0.248	0.388	-1.190	0.003	0.080	-0.078	0.043	148	1	0.006	0.002	0.009	0.000	0.000	0.002	148	0.048	0.212	0.004	0.004	0.027
149	-0.131	0.133	-0.053	-0.896	0.253	0.319	-0.487	-0.111	-0.323	-0.059	-0.542	149	1	0.006	0.000	0.000	0.000	0.021	0.002	149	0.010	0.011	0.002	0.483	0.039
150	-0.017	-0.455	0.093	-0.990	0.076	0.179	-0.448	-0.068	-0.512	-0.046	-0.064	150	1	0.006	0.000	0.004	0.000	0.025	0.000	150	0.000	0.122	0.005	0.575	0.003
151	-0.131	0.133	-0.053	-0.896	0.253	0.319	-0.487	-0.111	-0.323	-0.059	-0.542	151	1	0.006	0.000	0.000	0.000	0.021	0.002	151	0.010	0.011	0.002	0.483	0.039
152	-0.131	0.133	-0.053	-0.896	0.253	0.319	-0.487	-0.111	-0.323	-0.059	-0.542	152	1	0.006	0.000	0.000	0.000	0.021	0.002	152	0.010	0.011	0.002	0.483	0.039
153	-0.131	0.133	-0.053	-0.896	0.253	0.319	-0.487	-0.111	-0.323	-0.059	-0.542	153	1	0.006	0.000	0.000	0.000	0.021	0.002	153	0.010	0.011	0.002	0.483	0.039
154	0.333	-0.426	-0.091	-0.632	0.176	0.508	0.397	-0.179	-0.162	0.306	-0.063	154	1	0.006	0.002	0.004	0.000	0.010	0.001	154	0.085	0.139	0.006	0.060	0.024
156	0.766	0.100	0.913	-0.485	-1.220	0.015	-0.497	-0.445	-0.993	-0.124	-0.350	156	1	0.006	0.011	0.000	0.020	0.006	0.044	156	0.124	0.002	0.176	0.050	0.315
157	0.952	-0.475	0.989	-0.693	-1.456	-0.849	-0.150	0.208	-0.144	-0.049	0.001	157	1	0.006	0.016	0.004	0.023	0.012	0.063	157	0.164	0.041	0.177	0.087	0.348
159	0.711	-0.131	-0.274	1.215	-0.033	0.534	-0.448	-0.208	-0.398	0.398	0.730	159	1	0.006	0.009	0.000	0.002	0.038	0.000	159	0.147	0.005	0.022	0.433	0.005
161	1.946	-0.243	0.767	-0.682	-0.528	-0.702	-0.271	-0.582	-0.464	-0.114	-0.582	161	1	0.006	0.019	0.000	0.000	0.014	0.042	161	0.000	0.026	0.017	0.105	0.016
161	1.646	-0.075	0.202	0.934	-1.149	-0.644	-0.504	-0.553	-0.019	-0.095	-0.060	161	1	0.006	0.049	0.000	0.001	0.004	0.039	161	0.524	0.001	0.028	0.030	0.258
162	1.964	0.508	0.717	0.065	0.083	-0.246	-0.702	-1.764	0.018	0.018	0.126	162	1	0.006	0.069	0.005	0.012	0.000	0.000	162	0.464	0.031	0.062	0.001	0.001
163	0.825	-0.719	-0.127	1.121	-0.210	0.390	-0.405	-0.248	-0.578	0.491	0.124	163	1	0.006	0.012	0.010	0.000	0.032	0.001	163	0.195	0.148	0.005	0.361	0.013
164	0.632	0.598	0.978	0.898	-0.068	-0.622	-0.182	-0.653	0.021	-0.942	0.300	164	1	0.006	0.007	0.007	0.023	0.021	0.000	164	0.092	0.082	0.220	0.182	0.001
165	0.476	-0.189	-0.152	0.382	0.027	0.528	-0.437	0.003	0.033	-0.035	0.621	165	1	0.006	0.004	0.001	0.011	0.000	0.000	165	0.000	0.026	0.017	0.105	0.016
166	-0.016	-1.012	-0.195	0.611	-0.474	-0.179	0.267	0.106	0.276	-0.322	0.117	166	1	0.006	0.000	0.020	0.001	0.010	0.007	166	0.000	0.520	0.019	0.190	0.114
167	-0.400	-0.309	0.774	-0.846	-0.185	-0.325	-0.605	0.076	-0.003	0.587	-0.265	167	1	0.006	0.003	0.002	0.014	0.018	0.001	167	0.064	0.038	0.240	0.287	0.014
168	-0.016	-1.012	-0.195	0.611	-0.474	-0.179	0.267	0.106	0.276	-0.322	0.117	168	1	0.006	0.000	0.020	0.001	0.010	0.007	168	0.000	0.520	0.019	0.190	0.114
169	-0.863	-0.307	0.523	-0.490	-0.289	-0.798	-0.517	0.318	-0.624	-0.143	-0.157	169	1	0.006	0.013	0.002	0.007	0.006	0.002	169	0.239	0.030	0.088	0.077	0.027
170	0.362	-0.777	-0.005	-0.476	-0.150	-0.384	0.478	0.038	-0.156	-0.197	0.014	170	1	0.006	0.002	0.012	0.000	0.006	0.001	170	0.092	0.423	0.000	0.169	0.016
171	-0.366	-1.042	-0.011	0.253	-0.574	0.504	-0.313	-0.217	-0.074	-0.582	0.116	171	1	0.006	0.002	0.021	0.000	0.002	0.010	171	0.057	0.458	0.000	0.027	0.139
172	-0.209	0.305	0.910	0.388	-0.332	0.053	-0.320	-0.796	0.876	0.129	0.293	172	1	0.006	0.001	0.002	0.020	0.004	0.003	172	0.015	0.033	0.292	0.053	0.039
173	-0.165	0.309	0.444	-0.394	0.462	-0.214	-0.599	-0.077	0.538	0.742	0.337	173	1	0.006	0.000	0.002	0.005	0.004	0.006	173	0.013	0.047	0.096	0.076	0.104
174	-0.786	-0.596	0.182	-0.211	0.175	-0.761	-0.004	-0.84	-0.290	-0.38	-0.223	174	1	0.006	0.011	0.007	0.023	0.014	0.000	174	0.012	0.081	0.023	0.113	0.001
175	0.829	-0.454	-0.121	0.392	0.213	0.271	0.388	0.069	0.661	0.876	0.021	175	1	0.006	0.012	0.004	0.000	0.004	0.001	175	0.270	0.081	0.005	0.060	0.018
176	0.825	-0.719	-0.127	1.121	-0.210	0.390	-0.4																		

Les contributions des individus

- Notons tout d'abord que la variance d'une composante principale égale la valeur propre de l'axe correspondant.
- Comme pour le calcul des autres contributions, la contribution d'un individu à l'inertie (ou variance) d'un axe s'obtient par le rapport entre la part qu'occupe cet individu dans le calcul de cette variance et la variance totale.
- Ainsi, si on note c_{ij} la coordonnée de l'individu i sur l'axe j , et λ_j la valeur propre j , on a :

$$\text{contr}(\text{ind}_i, \text{axe}_j) = c_{ij}^2 / (n\lambda_j).$$

Utilisation des contributions des individus

- On relèvera toujours les individus dont la contribution est la plus élevée. Le seuil choisi pour cela peut encore être la moyenne de ces contributions, qui égale $1/n$.
- Exemple : individus contribuant plus que la moyenne aux axes 1 et 2.
Moyenne = $1/n = 1/154 \approx 0,0065$.

signes coordonnées	-	+
axe 1	26, 30, 33, 39, 41, 49, 64, 65, 87, 89, 91, 100, 118, 124, 127, 129, 169, 174	8, 42, 44, 86, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 142, 156, 157, 159, 160, 161, 162, 164, 175, 176, 177, 178, 179, 185
axe 2	10, 17, 18, 19, 21, 27, 30, 31, 32, 38, 39, 46, 47, 50, 52, 107, 113, 114, 115, 116, 117, 119, 120, 124, 125, 126, 127, 128, 148, 163, 166, 168, 170, 171, 176, 179	7, 22, 35, 37, 54, 58, 60, 62, 64, 65, 76, 87, 89, 91, 100, 103, 142, 164, 174, 184

- Les individus côté négatif sur l'axe 1 ont contribué à la construction de cet axe par le fait qu'ils sont à majorité en SCEA, valorisation cave particulière, produisant de l'AOC, Prospects, et plutôt du NH. Ils ont contribué par leurs caractéristiques opposées à ceux du côté positif, beaucoup de BRAM, en EARL, Adhérents, et produisant de l'AO-VDQS.

Les cosinus carrés des individus

- Le calcul se fait toujours sur le même modèle, par le rapport entre la norme projetée sur l'axe et la norme totale.
- Utilisation des cosinus carrés. La moyenne des cosinus carrés égale toujours $1/(nb \text{ d'axes})$.
- Exemple : individus représentés/reconstitués plus que la moyenne sur les axes 1 et 2. Moyenne = $1/n = 1/11 = 0,0909$.

signes coordonnées	-	+
axe 1	22, 26, 29, 30, 32, 33, 35, 39, 41, 47, 49, 62, 64, 65, 66, 71, 77, 85, 87, 89, 91, 94, 95, 98, 99, 100, 116, 118, 119, 124, 127, 128, 129, 165, 169, 170, 174, 180, 182	8, 42, 44, 86, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 142, 156, 157, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 175, 176, 177, 178, 179, 185
axe 2	9, 10, 12, 17, 18, 19, 21, 27, 30, 31, 32, 34, 38, 39, 43, 45, 46, 47, 50, 52, 107, 113, 114, 115, 116, 117, 119, 120, 124, 125, 126, 127, 128, 131, 146, 148, 150, 154, 163, 166, 168, 170, 171, 176, 179	1, 2, 3, 7, 16, 22, 35, 36, 37, 54, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 75, 76, 77, 79, 85, 87, 88, 89, 91, 94, 95, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 105, 106, 109, 142, 164, 174, 180, 182, 184

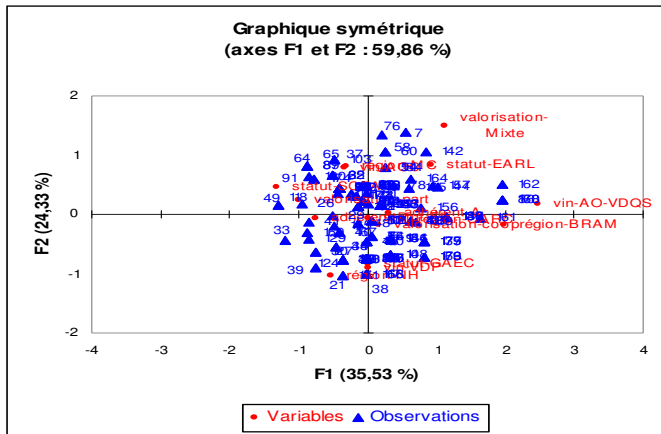
Interprétation des cosinus carrés

- Dans cet exemple, tous les individus contribuant fortement ont aussi un cosinus carré assez élevé pour que leur position soit interprétable.
- Sur l'axe 1, on a une séparation des viticulteurs plutôt du NH, SCEA, P, part et AOC, qui ont une coordonnée négative, des viticulteurs plutôt de BRAM, EARL, A et AO-VDQS. Ce sont des profils dominants. Il n'est pas du tout certain que tous les individus cités côté négatif aient toutes les caractéristiques citées, par exemple soient de NH.
- De même que tous les individus cités côté >0 ne sont pas forcément de BRAM, mais en tout cas ont un profil voisin de ceux de BRAM.
- De même, l'axe 2 oppose un groupe de viticulteurs cités côté <0 comme ayant des profils proches de ceux du NH, GAEC, coop et VDP, à un groupe de viticulteurs plutôt du MC, EARL, mixte et AOC.
- Rappel des variables citées sur ces deux axes (pour faciliter la lecture) :

signes coordonnées	-	+
axe 1	NH, SCEA, P, part, AOC	BRAM, EARL, A, AO-VDQS
axe 2	NH, GAEC, coop, VDP	MC, EARL, mixte, AOC

Visualisation du nuage de points

- Nuage “rond”, pas d’individu à comportement atypique.
- On peut même difficilement différencier ces individus sur le graphique pour en faire des groupes bien nets. Les cosinus carrés sont heureusement là pour aider à savoir quels individus interpréter sur chaque axe.



Quelques propriétés théoriques de l'AFCM

- Soit X_ν , le tableau disjonctif complet correspondant à la variable qualitative ν , pour $\nu = 1, \dots, p$.
- Le tableau X_ν comporte n lignes et m_ν colonnes.
- Notons $X = (X_1, \dots, X_\nu, \dots, X_p)$ le tableau juxtaposant les p tableaux disjonctifs complets. Le tableau X est de dimension (n, q) où $q = \sum_{\nu=1}^p m_\nu$.
- Les variables auxiliaires z^k sont les vecteurs propres successifs de $\frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^p P_\nu$. Elles s'écrivent $z^k = X u^k$, et :

Propriété

A chaque étape k , la variable z^k est centrée.

Propriété

Le facteur u^k est le vecteur propre d'ordre k de

$$\frac{1}{p} D^{-1} {}^t X X$$

D étant la matrice diagonale des fréquences absolues des modalités.

L'AFCM est l'AFC du tableau X .

- En pratique, effectuer l'AFC du tableau X n'est guère possible dès que le nombre d'individus devient important car la taille du tableau X rend difficile cette opération.
- Il est aussi préférable de mener les calculs à partir du tableau de Burt B , en utilisant le théorème suivant :

Propriété

L'AFC du tableau de Burt admet les mêmes composantes principales et les mêmes facteurs que l'AFC du tableau X . Les vecteurs propres sont égales au carré des valeurs propres de l'AFC du tableau X .

L'AFCM est l'AFC du tableau X

Lorsque $p = 2$, il équivaut, pour $k = 1, \dots, m_1$:

- d'effectuer l'AFC du tableau ${}^tX_1 X_2$, c'est-à-dire l'AC des tableaux X_1 et X_2 . Les valeurs propres sont alors égales à $R^2(z_1^k, z_2^k)$.
- d'effectuer l'AFC du tableau $X = (X_1, X_2)$. On obtient alors les valeurs propres $\frac{1}{2}(1 + R(z_1^k, z_2^k))$.
- d'effectuer l'AFC du tableau de BURT : $B = {}^t(X_1, X_2)(X_1, X_2)$. On obtient alors les valeurs propres $\frac{1}{4}(1 + R(z_1^k, z_2^k))^2$.

Dans ces trois cas, les graphiques obtenus sont identiques.

Deux autre propriétés de l'AFCM

Propriété

$\chi^2_{\nu\nu'}$, désignant le χ^2 entre la variable qualitative ν et la variable ν' , la somme S des valeurs propres non triviales de l'AFC du tableau de BURT est égale à :

$$S = \frac{1}{p^2} \sum_{\nu=1}^p (m_{\nu} - 1) + \frac{1}{p^2} \sum_{\nu=1}^p \sum_{\nu \neq \nu'} \frac{\chi^2_{\nu\nu'}}{n}$$

Propriété

A chaque étape k , les codages de chaque variable qualitative sont centrés, autrement dit, si $u_{\nu,j}^k$ désigne le codage de la modalité j de la ν -ème variable qualitative et si $f_{\nu,j}$ désigne la fréquence absolue de cette même modalité :

$$\sum_{j=1}^{m_{\nu}} f_{\nu,j} u_{\nu,j}^k = 0.$$

Les règles d'interprétation des résultats

L'AFCM étant une AFC particulière. Ses résultats s'interprètent comme ceux d'une AFC, à deux nuances près :

- l'une concernant l'inertie expliquée,
- l'autre concernant les contributions relatives.

Le pourcentage d'inertie expliquée

- Considérons l'AFC du tableau X juxtaposant les p tableaux disjonctifs complets.
- Les valeurs propres obtenues sont celles de l'ACG divisées par le nombre de tableaux, soit p .
- On sait que la somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice $\sum_{\nu=1}^p P_{\nu}$, donc égale à $p = \sum_{n=1}^p m_{\nu}$ (car la trace d'un projecteur est égale à son rang). La somme des valeurs propres de l'AFC de X est égale à $\frac{p}{V}$.
- La somme des valeurs propres non triviales est donc $\frac{p}{V} - 1$.
- Chacune des valeurs propres est inférieure à 1, et par conséquent, le pourcentage d'inertie expliquée à chaque étape est inférieur à $\frac{1}{\frac{p}{V} - 1}$.

- Considérons le tableau de contingence qui a été considéré dans le Chapitre 2.
- Il est équivalent d'effectuer l'AFC de ce tableau ou l'AFC du tableau X juxtaposant les tableaux disjonctifs complets X_1 et X_2 .

Les contributions relatives

- Comme en AFC, les contributions relatives de chacune des modalités sont calculées.
- Mais en AFCM, on calcule de plus les contributions relatives de chaque variable qualitative, en faisant la somme des contributions relatives de ses modalités.
- Ainsi, on met en évidence les variables qui contribuent fortement, ou au contraire celles qui contribuent peu, à la variance de l'axe.

- Les données décrivent trois variables qualitatives : le diplôme, le type de ménage et le lieu d'habitation.
- L'AFC effectuée ici est celle du tableau de BURT. Pour obtenir ce tableau de BURT, il suffit de connaître les trois tableaux de contingence croisant les trois variables deux à deux.

Table de données

	PS	CSE	CA1E	CA2E	CA3EP	FMP	AM
Com. rurale	548	918	605	753	497	129	288
Com. < 20000 hab.	204	384	206	230	144	62	75
Com. entre 20000 et 99999 hab.	251	335	187	246	133	83	38
Com. de plus de 100000 hab.	493	504	311	377	206	137	75
Banlieue de Paris	146	204	146	146	89	58	29
Paris	131	61	37	19	19	18	8

	SD	CEP DFEO	CAP BEP	BEPC	BACT	BACG	ES
Com. rurale	882	1016	917	337	140	135	311
Com. < 20000 hab.	286	280	292	147	48	78	174
Com. entre 20000 et 99999 hab.	208	212	263	160	63	109	258
Com. de plus de 100000 hab.	344	317	415	243	113	213	458
Banlieue de Paris	126	97	132	107	42	85	229
Paris	35	35	16	24	4	41	138

où :

Com. = commune,

hab = habitants,

PS = personne seule,

CSE = couple sans enfants,

CAjE = couple avec j enfant, avec $j = 1, 2$.

CA3EP = couple avec 3 enfants ou plus,

FMP = famille mono-parentale,

AM = autre ménage,

SD = sans diplôme,

BACT= bac technique

BACG = bac général,

et ES = études supérieures.

Les résultats numériques

Les pourcentages d'inertie expliquée sont :

	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5
Pourcentage de variance expliquée	10.9	9.3	6.9	6.7	6.8

Aides à l'interprétation

Les aides à l'interprétation pour les deux premières étapes :

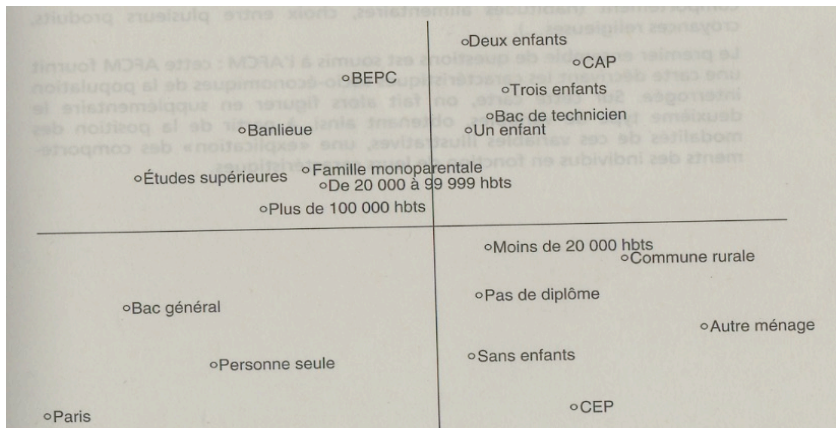
	Axe 1 Coordonnée	Axe 1 Qualité	Axe 1 Contribution	Axe 2 Coordonnée	Axe 2 Qualité	Axe 2 Contribution
PS	-0.59	0.23	10.4	-0.50	0.16	8.7
CSE	-0.11	0.01	0.5	-0.48	0.23	10.8
CA1E	0.10	0.01	0.3	0.32	0.06	2.9
CA2E	0.08	0.01	0.2	0.67	0.30	15.6
CA3EP	0.24	0.02	1.0	0.47	0.08	4.7
FMP	-0.35	0.02	1.0	0.23	0.01	0.5
AM	0.77	0.11	5.5	-0.40	0.03	1.7
Tot. var. 1			18.9			44.9

	Axe 1 Coordonnée	Axe 1 Qualité	Axe 1 Contribution	Axe 2 Coordonnée	Axe 2 Qualité	Axe 2 Contribution
SD	0.17	0.02	1.0	-0.32	0.07	3.7
CEP/DFEO	0.37	0.10	4.4	-0.73	0.39	20.4
CAP/BEP	0.42	0.14	6.1	0.59	0.27	13.9
BEPC	-0.16	0.01	0.5	0.54	0.10	5.8
BACT	0.21	0.01	0.3	0.33	0.02	0.9
BACG	-0.85	0.16	8.0	-0.34	0.03	1.5
ES	-0.81	0.37	17.3	0.22	0.03	1.5
Tot. var. 2			37.6			47.7

	Axe 1 Coord.	Axe 1 Qual.	Axe 1 Contr.	Axe 2 Coord.	Axe 2 Qual.	Axe 2 Contr.
Com. rurale	0.52	0.48	16.7	-0.11	0.02	0.9
Com. < 20000 hab.	0.18	0.01	0.7	-0.09	0.01	0.3
Com. entre 20000 et 99999 hab.	-0.27	0.03	1.6	0.18	0.02	0.9
Com. > 100000 hab.	-0.42	0.15	6.2	0.10	0.01	0.4
Banlieue de Paris	-0.55	0.08	4.1	0.34	0.03	1.9
Paris	-1.70	0.26	14.2	-0.72	0.04	3.0
Tot. var. 3			43.5			7.4

Graphiques

On obtient le graphique suivant pour les deux 1ères étapes



Interprétation des résultats

- L'interprétation des résultats se fait comme en AFC, à partir des modalités qui contribuent le plus à l'inertie.
- Pour le premier axe, ces modalités sont "Personne seule", "Etudes supérieures", "Paris" (ces trois modalités étant à gauche de l'axe) et "Commune rurale" (à droite de l'axe) : effectivement, par rapport à la moyenne de la population, les diplômés du Supérieur vivent plus souvent seuls, plus souvent à Paris et moins souvent en milieu rural.
- Pour le deuxième axe, les modalités qui contribuent le plus à l'inertie sont : "Sans enfants", "Deux enfants", "CAP" et "CEP". Le lieu d'habitation intervient très peu sur cet axe, où l'on retrouve en fait les phénomènes mis en évidence par le premier axe du tableau de contingence.

Utilisation de l'AFCM pour des enquêtes socio-économiques

- Souvent, lors d'une enquête socio-économique, deux types de questions sont posées : des questions portant sur les caractéristiques de l'individu interrogé (âge, profession, sexe, ...) et d'autres questions portant sur son comportement (habitudes alimentaires, choix entre plusieurs produits, croyances religieuses, ...)
- Le premier ensemble de questions est soumis à l'AFCM : cette AFCM fournit une carte décrivant les caractéristiques socio-économiques de la population interrogée. Sur cette carte, on fait alors figurer en supplémentaire le deuxième type de variables, obtenant ainsi, partir de la position des modalités de ces variables illustratives, une "explication" des comportements des individus en fonction de leurs caractéristiques.