Содержание

1. Постановка задачи

При решении научных и инженерно-технических задач часто бывает необходимо математически описать какую-либо динамическую систему. Лучше всего это делать в виде дифференциальных уравнений (ДУ) или системы дифференциальных уравнений. Наиболее часто они такая задача возникает при решении проблем, связанных с моделированием кинетики химических реакций и различных явлений переноса (тепла, массы, импульса) – теплообмена, перемешивания, сушки, адсорбции, при описании движения макро- и микрочастиц.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n-го порядка называется следующее уравнение, которое содержит одну или несколько производных от искомой функции y (x) :

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0,$$

здесь y (n) обозначает производную порядка n некоторой функции y (x), x – это независимая переменная.

В ряде случаев дифференциальное уравнение можно преобразовать к виду, в котором старшая производная выражена в явном виде. Такая форма записи называется уравнением, разрешенным относительно старшей производной (при этом в правой части уравнения старшая производная отсутствует) :

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Именно такая форма записи принята в качестве стандартной при рассмотрении численных методов решения ОДУ.

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно функции y (x) и всех ее производных.

Например, ниже приведены линейные ОДУ первого и второго порядков

$$y' - x^3 y = \ln x \quad \frac{\cos x}{x} y'' - x^3 y = \frac{1}{1+x^2} + 2$$

Решением обыкновенного дифференциального уравнения называется такая функция y (x), которая при любых x удовлетворяет этому уравнению в определенном конечном или бесконечном интервале. Процесс решения дифференциального уравнения называют интегрированием дифференциального уравнения.

Общее решение ОДУ n-го порядка содержит n произвольных констант C1, C2, …, Cn

$$y = f(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Это очевидно следует из того, что неопределенный интеграл равен первообразной подынтегрального выражения плюс константа интегрирования

$$\int g(x)dx = G(x) + C$$

Так как для решения ДУ n-го порядка необходимо провести n интегрирований, то в общем решении появляется n констант интегрирования.

Частное решение ОДУ получается из общего, если константам интегрирования придать некоторые значения, определив некоторые дополнительные условия, количество которых позволяет вычислить все неопределенные константы интегрирования.

Точное (аналитическое) решение (общее или частное) дифференциального уравнения подразумевает получение искомого решения (функции y (x)) в виде выражения от элементарных функций. Это возможно далеко не всегда даже для уравнений первого порядка.

Численное решение ДУ (частное) заключается в вычислении функции y (x) и ее производных в некоторых заданных точках $x_1, x_2, \ldots, x_N$, лежащих на определенном отрезке. То есть, фактически, решение ДУ n-го порядка вида получается в виде следующей таблицы чисел (столбец значений старшей производной вычисляется подстановкой значений в уравнение) :

X	y	y'		$y^{(n-1)}$
x_1	$y(x_1)$	$y'(x_1)$	...	$y^{(n-1)}(x_1)$
x_2	$y(x_2)$	$y'(x_2)$	...	$y^{(n-1)}(x_2)$
x_N	$y(x_N)$	$y'(x_N)$	...	$y^{(n-1)}(x_N)$

Например, для дифференциального уравнения первого порядка таблица решения будет представлять собой два столбца – x и y.

Множество значений абсцисс $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ в которых определяется значение функции, называют сеткой, на которой определена функция y (x). Сами координаты при этом называют узлами сетки. Чаще всего, для удобства, используются равномерные сетки, в которых разница между соседними узлами постоянна и называется шагом сетки или шагом интегрирования дифференциального уравнения

$$h = x_i - x_{i-1} \text{ или } x_i = x_{i-1} + h, \ i = 1, \ldots, N$$

Для определения частного решения необходимо задать дополнительные условия, которые позволят вычислить константы интегрирования. Причем таких условий должно быть ровно n. Для уравнений первого порядка – одно, для второго – 2 и т. д. В зависимости от способа их задания при решении дифференциальных уравнений существуют три типа задач:

Задача Коши (начальная задача) : Необходимо найти такое частное решение дифференциального уравнения, которое удовлетворяет определенным начальными условиям, заданным в одной точке:

$$(x_0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)})$$

то есть, задано определенное значение независимой переменной (x0), и значение функции и всех ее производных вплоть до порядка (n-1) в этой точке. Эта точка (x0) называется начальной. Например, если решается ДУ 1-го порядка, то начальные условия выражаются в виде пары чисел (x0, y0)

$$x_0, y_0 = y(x_0)$$

Такого рода задача встречается при решении ОДУ, которые описывают, например, кинетику химических реакций. В этом случае известны концентрации веществ в начальный момент времени (t = 0), и необходимо найти концентрации веществ через некоторый промежуток времени (t). В качестве примера можно так же привести задачу о теплопереносе или массопереносе (диффузии), уравнение движения материальной точки под действием сил и т. д.

Краевая задача. В этом случае известны значения функции и (или) ее производных в более чем одной точке, например, в начальный и конечный момент времени, и необходимо найти частное решение дифференциального уравнения между этими точками. Сами дополнительные условия в этом случае называются краевыми (граничными) условиями. Естественно, что краевая задача может решаться для ОДУ не ниже 2-го порядка. Ниже приведен пример ОДУ второго порядка с граничными условиями (заданы значения функции в двух различных точках) :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = y + \sin x \qquad 0 \le x \le 1 \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$$

2. Методы Адамса

2.1 Методы Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона

В настоящее время методы Адамса являются одними из перспективных численных методов интегрирования для решения задачи Коши. Доказано, что при применении многошаговых численных методов Адамса для решения задачи Коши до 12 порядка область устойчивости уменьшается. При дальнейшем увеличении порядка область устойчивости, а также точность метода возрастает. Кроме того, при одинаковой точности для многошаговых методов на одном шаге интегрирования требуется меньше вычислений правых частей дифференциальных уравнений, чем в методах Рунге-Кутты. К достоинствам методов Адамса относится и то обстоятельство, что в них легко меняется шаг интегрирования и порядок метода.

На практике широко используются два типа методов Адамса – явные и неявные. Явные методы известны как методы Адамса-Бэшфорта, неявные – как методы Адамса-Мултона.

Рассмотрим применение численных методов для решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0. \qquad (2.1)$$

При решении задачи (2. 1) с помощью одношаговых методов значение yn+1 зависит только от информации в предыдущей точке xn. Можно предположить, что можно добиться большей точности, если использовать информацию о нескольких предыдущих точках xn, xn-1... xn-k. На этой идее основаны многошаговые методы.

Большинство многошаговых методов возникает на основе следующего подхода. Если подставить в уравнение (2. 1) точное решение y (x) и проинтегрировать уравнение на отрезке [xn, xn+1], то получим:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx . \qquad (2.2)$$

Заменяя в формуле (2. 2) функцию f (x, y (x)) интерполяционным полиномом P (x), получим приближенный метод

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x)dx . \qquad (2.3)$$

Для того, чтобы построить полином P (x), предположим, что yn, yn-1... yn-k – приближения к решению в точках xn, xn-1... xn-k. Полагаем, что узлы xi расположены равномерно с шагом h. Тогда fi=f (xi, yi), (i=n, n-1.. n-k) – есть приближения к f (x, y (x)) в точках xn, xn-1... xn-k.

В качестве P (x) возьмем интерполяционный полином степени, k удовлетворяющий условиям

$$P(x_i) = f_i , \ \ (i = n, n-1, \ldots, n-k) .$$

Если проинтегрировать этот полином явно, то получим следующий метод:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x)dx . \qquad (2.4)$$

При k=0 полином P (x) – есть константа, равная fn, и формула (2. 4) превращается в обычный метод Эйлера.

При k=1 полином P (x) является линейной функцией, проходящей через точки (xn-1, fn-1) и (xn, fn), т. е.

$$P(x) = -\frac{x - x_n}{h} f_{n-1} + \frac{x - x_{n-1}}{h} f_n . \qquad (2.5)$$

Интегрируя этот полином от xn до xn+1, получим двухшаговый метод

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) , \qquad (2.6)$$

который использует информацию в двух точках xn и xn+1.

Если k=2, то P (x) представляет собой квадратичный полином, интерполирующий данные (xn-2, fn-2), (xn-1, fn-1) и (xn, fn). Можно показать, что соответствующий метод имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) . \qquad (2.7)$$

Если k=3, то соответствующий метод определяется формулой

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) . \qquad (2.8)$$

При k=4 имеем

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}) . \quad (2.9)$$

Отметим, что метод (2. 7) является трехшаговым, (2. 8) – четырехшаговым и (2. 9) – пятишаговым. Формулы (2. 6) - (2. 9) известны как методы Адамса-Бэшфорта. Метод (2. 6) имеет второй порядок точности, поэтому его называют методом Адамса-Бэшфорта второго порядка.

Аналогично, методы (2. 7), (2. 8) и (2. 9) называются соответственно методами Адамса-Бэшфорта третьего, четвертого и пятого порядков.

Продолжая этот процесс, используя все большее число предыдущих точек, а также интерполяционный полином более высокой степени, получим методы Адамса-Бэшфорта сколь угодно высокого порядка.

Многошаговые методы порождают трудности, которых не возникает при использовании одношаговых методов. Эти трудности становятся понятными, если, например, обратиться к методам Адамса-Бэшфорта пятого порядка (2. 9).

В задаче (2. 1) задано начальное значение y0 но при n=0 для счета по формуле (2. 9) необходима информация в точках x-1, x-2, x-3, x-4, которая естественно отсутствует. Обычный выход из данной ситуации заключается в использовании какого-либо одношагового метода того же порядка точности, например метода Рунге-Кутты, до тех пор, пока не будет получено достаточно значений для работы многошагового метода. Или же можно на первом шаге использовать одношаговый метод, на втором – двухшаговый и так далее, пока не будут получены все стартовые значения. При этом существенно, чтобы эти стартовые значения были вычислены с той же степенью точности, с какой будет работать окончательный метод. Поскольку стартовые методы имеют более низкий порядок точности, вначале приходится считать с меньшим шагом и использовать больше промежуточных точек.

Вывод методов (2. 6) - (2. 9) основан на замене функции f (x, y) интерполяционным полиномом P (x). Известно, что имеет место теорема, доказывающая существование и единственность интерполяцион ного полинома. Если узлы x0, x1… xn различны, то для любых f0, f1… fn существует единственный полином P (x) степени не выше n такой, что P (xi) =fi, i=0, 1,.. n.

Хотя интерполяционный полином является единственным, имеется несколько способов представления этого полинома. Чаще всего используются полиномы Лагранжа, но и они оказываются неудобными, если к набору данных нужно добавить (или удалить из него) какой-либо узел. В этом случае имеется другое представление интерполяционного полинома. Это представление Ньютона

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h}\nabla f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}\nabla^2 f_0 + \ldots \\
\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!h^n}\nabla^n f_0,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\nabla f_i = f_{i+1} - f_i, \\
&\nabla^2 f_0 = \nabla f_1 - \nabla f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0, \\
&\nabla^3 f_0 = \nabla^2 f_1 - \nabla^2 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\nabla^n f_0 = f_n - \binom{n}{1} f_{n-1} + \binom{n}{2} f_{n-2} - \ldots + (-1)^n f_0, \\
&\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}.
\end{aligned}
$$

Полином Pn+1 (x) можно записать в виде

$$
P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!h^{n+1}}\nabla^{n+1} f_0. \tag{2.11}
$$

Представление интерполяционного полинома в виде (2. 11) в ряде случаев бывает особенно полезным для практики.

Методы Адамса-Бэшфорта используют уже известные значения в точках xn, xn-1... xn-k. При построении интерполяционного полинома можно использовать и точки xn, xn, xn-1... xn-k. При этом возникает класс неявных m -шаговых методов, известных как методы Адамса-Мултона.

Если k=0, то P (x) – линейная функция, проходящая через точки (xn, fn) и (xn+1, fn+1), и соответствующий метод

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) \qquad (2.12)$$

является методом Адамса-Мултона второго порядка.

При k=1, 2, 3 получаем соответствующие методы

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}), \qquad (2.13)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}), \qquad (2.14)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}) \; (2.15)$$

третьего, четвертого и пятого порядков аппроксимации. Соотношения (2. 12) - (2. 15) содержат искомые значения yn+1 неявно, поэтому для их реализации необходимо применять итерационные методы.

На практике обычно не решают непосредственно уравнений (2. 12) - (2. 15), а используют совместно явную и неявную формы, что приводит к методу прогноза и коррекции.

Например, для метода Адамса второго порядка, используя обозначения $f_n^{(\gamma)} = f(x_n, y_n^{(\gamma)})$, где γ – номер итерации, имеем для γ=1 следующую схему вычислений:

$$\begin{aligned}
&\text{P: } y_{n+1}^{(0)} = y_n^{(1)} + \frac{h}{2}(3f_n^{(1)} - f_{n-1}^{(1)}), \\
&\text{E: } f_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}), \\
&\text{C: } y_{n+1}^{(1)} = y_n^{(1)} + \frac{h}{2}(f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(0)}), \\
&\text{E: } f_{n+1}^{(1)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(1)}).
\end{aligned} \qquad (2.16)$$

Этот процесс называют методом PECE (P означает применение предсказывающей формулы, C – применение исправляющей формулы, E – вычисление функции f). Можно сократить процесс вычисления, отбросив последнюю формулу. Это приводит к так называемому методу PEC.

Рассмотрим второй метод решения уравнений (2. 12) - (2. 15). Формулы (2. 12) - (2. 15) можно переписать в виде

$$y_{n+1} = \frac{h\beta_1}{\alpha_1} f(x_{n+1}, y_{n+1}) + g_n, \ \beta_1 \neq 0, \qquad (2.17)$$

где gn содержит известные величины. Доказано, что если $h < \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{1}{L}$, где L – константа Липшица, то существует единственное решение уравнения (2. 17), которое можно получить с помощью итерационного процесса

$$y_{n+1}^{(\gamma+1)} = \frac{h\beta_1}{\alpha_1} f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(\gamma)}) + g_n, \qquad (2.18)$$

где $y_{n+1}^{(0)}$ - произвольно.

Итерации в выражении (2. 18) продолжаются до тех пор, пока не будет достигнута сходимость. При этом число вычислений функции f меняется от точки к точке и может быть достаточно велико.

С другой стороны, если уменьшить величину h, то сходимость может быть достигнута за фиксированное число итераций. Этот метод называется исправлением до сходимости.

На первый взгляд может показаться, что явный многошаговый метод является самым простым методом с точки зрения вычислений. Однако на практике явные методы используются очень редко. Неявный метод Адамса-Мултона является более точным, чем явный метод Адамса-Бэшфорта. Например, вычислительная схема для метода Адамса-Мултона 5-го порядка имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\text{P: } y_{n+1}^{(p)} = y_n + \frac{h}{720}(1901 f_n - 2774 f_{n-1} + 2616 f_{n-2} - 1274 f_{n-3} + 251 f_{n-4}),\\
&\text{E: } f_{n+1}^{(p)} = f(x_{n+1} y_{n+1}^{(p)}),\\
&\text{C: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(251 f_{n+1}^{(p)} + 646 f_n - 264 f_{n-1} + 106 f_{n-2} - 19 f_{n-3}),\\
&\text{E: } f_{n+1} = f(x_{n+1} y_{n+1}).
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Методы Адамса до пятого порядка включительно могут быть использованы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, не требующих высокой степени точности.

Как и в случае с методом Адамса-Бэшфорта, при использовании метода Адамса-Мултона важным вопросом является вопрос выбора оптимального соотношения шага интегрирования и порядка метода. Следует отметить, что при создании эффективных алгоритмов и программ увеличение порядка метода является более предпочтительным по сравнению с уменьшением шага интегрирования.

Для решения более сложных задач необходимо применять методы Адамса более высокого порядка. В таблице 2. 1 приведены значения коэффициентов для методов Адамса. В первой строке указан порядок метода; во второй – значения коэффициентов Ck для соответствующего порядка k; в последующих строках – пары коэффициентов Bkj и Mkj для методов Адамса-

Бэшфорта и Адамса-Мултона соответственно. Тогда, с учетом данных таблицы 2. 14, коэффициенты βj в выражении

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

для метода Адамса-Бэшфорта k-го порядка могут быть найдены из соотношения

$$\beta_j = \frac{B_{kj}}{C_k},$$

а для метода Адамса-Мултона k-го порядка по аналогичной формуле

$$\beta_j = \frac{M_{kj}}{C_k}.$$

2		3		4		5		6		7	
2		12		24		720		1 440		60 480	
3	1	23	5	55	9	1 901	251	4 277	475	198 721	19 087
-1	1	-16	8	-59	19	-2 774	646	-7 923	1 427	-447 288	65 112
		5	-1	37	-5	2 616	-264	9 982	-798	705 549	-46 461
				-9	1	-1 274	106	-7 298	482	-688 256	37 504
						251	-19	2 877	-173	407 139	-20 211
								-475	27	-134 472	6 312
										19 087	-863

8		9		10	
120 960		3 628 800		7 257 600	
434 241	36 799	14 097 247	1 070 017	30 277 247	2 082 753
-1 152 169	139 849	-43 125 206	4 467 094	-104 995 189	9 449 717
2 183 877	-121 797	95 476 786	-4 604 594	265 932 680	-11 271 304
-2 664 477	123 133	-139 855 262	5 595 358	-454 661 776	16 002 320
2 102 243	-88 547	137 968 480	-5 033 120	538 363 838	-17 283 646
-1 041 723	41 499	-91 172 642	3 146 338	-444 772 162	13 510 082
295 767	-11 351	38 833 486	-1 291 214	252 618 224	-7 394 032
-36 799	1 375	-9 664 106	312 874	-94 307 320	2 687 864
		1 070 017	-33 953	20 884 811	-583 435
				-2 082 753	57 281

11		12	
479 001 600		958 003 200	
2 132 509 567	134 211 265	4 527 766 399	262 747 265
-8 271 795 124	656 185 652	-19 433 810 163	1 374 799 219
23 591 063 805	-890 175 549	61 633 227 185	-2 092 490 673
-46 113 029 016	1 446 205 080	-135 579 356 757	3 828 828 885
63 716 378 958	-1 823 311 566	214 139 355 366	-5 519 460 582
-63 176 201 472	1 710 774 528	-247 741 639 374	6 043 521 486
44 857 168 434	-1 170 597 042	211 103 573 298	- 4 963 166 514
-22 329 634 920	567 450 984	-131 365 867 290	3 007 739 418
7 417 904 451	-184 776 195	58 189 107 627	-1 305 971 115
-1 479 574 348	36 284 876	-17 410 248 271	384 709 327
134 211 265	-3 250 433	3 158 642 445	-68 928 781
		-262 747 265	5 675 265

15		16	
31 384 184 832 000		62 708 369 664 000	
173 233 498 598 849	8 164 168 737 599	362 555 126 427 073	16 088 129 229 375
-960 122 866 404 112	50 770 967 534 864	-2 161 567 671 248 849	105 145 058 757 073
3 966 421 670 215 481	-102 885 148 956 217	9 622 096 909 515 337	-230 992 163 723 849
-11 643 637 530 577 472	251 724 894 607 936	-30 607 373 860 520 569	612 744 541 065 337
25 298 910 337 081 429	-499 547 203 754 837	72 558 117 072 259 733	-1 326 978 663 058 069
-41 825 269 932 507 728	781 911 618 071 632	-131 963 191 940 828 581	2 285 168 598 349 733
53 471 026 659 940 509	-963 605 400 824 733	187 463 140 112 902 893	-3 129 453 071 993 581
-53 246 738 660 646 912	934 600 833 490 944	-210 020 588 912 321 949	3 414 941 728 852 893
41 280 216 336 284 259	-710 312 834 197 347	186 087 544 263 596 643	-2 966 365 730 265 699
-24 704 503 655 607 728	418 551 804 601 264	-129 930 094 104 237 331	2 039 345 879 546 643
11 205 849 753 515 179	-187 504 936 597 931	70 724 351 582 843 483	-1 096 355 235 402 331
-3 728 807 256 577 472	61 759 426 692 544	-29 417 910 911 251 819	451 403 108 933 483
859 236 476 684 231	-14 110 480 969 927	9 038 571 752 734 087	-137 515 713 789 319
-122 594 813 904 112	1 998 759 236 336	-1 934 443 196 892 599	29 219 384 284 087
8 164 168 737 599	-132 282 840 127	257 650 275 915 823	-3 867 689 367 599
		-16 088 129 229 375	240 208 245 823

Формулы для предикторно-корректорных методов Адамса с 6-го по по 14-ый порядок имеют следующий вид:

6 порядок:

$$\text{P:}\ \ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{1440}(4277 \cdot f_n - 7923 \cdot f_{n\text{-}1} + 9982 \cdot f_{n-2} -$$
$$- 7298 \cdot f_{n-3} + 2877 \cdot f_{n-4} - 475 \cdot f_{n-5}),$$
$$\text{E:}\ \ f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$
$$\text{C:}\ \ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{1440}(475 \cdot f_{n+1} + 1427 \cdot f_n - 798 \cdot f_{n-1} +$$
$$+ 482 \cdot f_{n-2} - 173 \cdot f_{n-3} + 27 \cdot f_{n-4});$$

7 порядок:

$$\text{P: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{60480}(198721 \cdot f_n - 447288 \cdot f_{n-1} + 705549 \cdot f_{n-2} -$$
$$- 688256 \cdot f_{n-3} + 407139 \cdot f_{n-4} - 134472 \cdot f_{n-5} - 19087 \cdot f_{n-6}),$$
$$\text{E: } f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$
$$\text{C: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{60480}(19087 \cdot f_{n+1} + 65112 \cdot f_n - 46461 \cdot f_{n-1} +$$
$$+ 37504 \cdot f_{n-2} - 20211 \cdot f_{n-3} + 6312 \cdot f_{n-4} - 863 \cdot f_{n-5});$$

8 порядок:

$$\text{P: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{120960}(434241 \cdot f_n - 1152169 \cdot f_{n-1} + 2183877 \cdot f_{n-2} -$$
$$- 2664477 \cdot f_{n-3} + 2102243 \cdot f_{n-4} - 1041723 \cdot f_{n-5} + 295767 \cdot f_{n-6} -$$
$$- 36799 \cdot f_{n-7}),$$
$$\text{E: } f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$
$$\text{C: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{120960}(36799 \cdot f_{n+1} + 139849 \cdot f_n - 121797 \cdot f_{n-1} +$$
$$+ 123133 \cdot f_{n-2} - 88547 \cdot f_{n-3} + 41499 \cdot f_{n-4} - 11351 \cdot f_{n-5} +$$
$$+ 1375 \cdot f_{n-6});$$

9 порядок:

$$\text{P: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3628800}(14097247 \cdot f_n - 43125206 \cdot f_{n-1} +$$
$$+ 95476786 \cdot f_{n-2} - 139855262 \cdot f_{n-3} + 137968480 \cdot f_{n-4} -$$
$$- 91172642 \cdot f_{n-5} + 38833486 \cdot f_{n-6} - 9664106 \cdot f_{n-7} + 1070017 \cdot f_{n-8}),$$
$$\text{E: } f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$
$$\text{C: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3628800}(1070017 \cdot f_{n+1} + 4467094 \cdot f_n - 4604594 \cdot f_{n-1} +$$
$$+ 5595358 \cdot f_{n-2} - 5033120 \cdot f_{n-3} + 3146338 \cdot f_{n-4} - 1291214 \cdot f_{n-5} +$$
$$+ 312874 \cdot f_{n-6} - 33953 \cdot f_{n-7});$$

10 порядок:

$$P:\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{7257600}(30277247 \cdot f_n - 104995189 \cdot f_{n-1} + 265932680 \cdot f_{n-2} -$$
$$- 454661776 \cdot f_{n-3} + 538363838 \cdot f_{n-4} - 444772162 \cdot f_{n-5} +$$
$$+ 252618224 \cdot f_{n-6} - 94307320 \cdot f_{n-7} + 20884811 \cdot f_{n-8} + 2082753 \cdot f_{n-9}),$$

$$E:\ f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$C:\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{7257600}(2082753 \cdot f_{n+1} + 9449717 \cdot f_n - 11271304 \cdot f_{n-1} +$$
$$+ 16002320 \cdot f_{n-2} - 17283646 \cdot f_{n-3} + 13510082 \cdot f_{n-4} - 7394032 \cdot f_{n-5} +$$
$$+ 2687864 \cdot f_{n-6} - 583435 \cdot f_{n-7} + 57281 \cdot f_{n-8});$$

11 порядок:

$$P:\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{479001600}(2132509567 \cdot f_n - 8271795124 \cdot f_{n-1} +$$
$$+ 23591063805 \cdot f_{n-2} - 46113029016 \cdot f_{n-3} + 63716378958 \cdot f_{n-4} -$$
$$- 63176201472 \cdot f_{n-5} + 448571684342 \cdot f_{n-6} - 22329634920 \cdot f_{n-7} +$$
$$+ 7417904451 \cdot f_{n-8} - 1479574348 \cdot f_{n-9} + 134211265 \cdot f_{n-10}),$$

$$E:\ f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$C:\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{479001600}(134211265 \cdot f_{n+1} + 656185652 \cdot f_n -$$
$$- 890175549 \cdot f_{n-1} + 1446205080 \cdot f_{n-2} - 1823311566 \cdot f_{n-3} +$$
$$+ 1710774528 \cdot f_{n-4} - 1170597042 \cdot f_{n-5} + 567450984 \cdot f_{n-6} -$$
$$- 184776195 \cdot f_{n-7} + 36284876 \cdot f_{n-8} - 3250433 \cdot f_{n-9});$$

12 порядок:

$$\text{P: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{958003200}(4527766399 \cdot f_n - 19433810163 \cdot f_{n-1} +$$
$$+ 61633227185 \cdot f_{n-2} - 135579356757 \cdot f_{n-3} + 214139355366 \cdot f_{n-4} -$$
$$- 247741639374 \cdot f_{n-5} + 211103573298 \cdot f_{n-6} - 131365867290 \cdot f_{n-7} +$$
$$+ 43738008052 \cdot f_{n-8} - 2959148696 \cdot f_{n-9} + 3158642445 \cdot f_{n-10} -$$
$$- 262747265 \cdot f_{n-11}),$$

$$\text{E: } f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$\text{C: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{958003200}(262747265 \cdot f_{n+1} + 1374799219 \cdot f_n -$$
$$- 2092490673 \cdot f_{n-1} + 3828828885 \cdot f_{n-2} - 5519460582 \cdot f_{n-3} +$$
$$+ 6043521486 \cdot f_{n-4} - 4963166514 \cdot f_{n-5} + 3007739418 \cdot f_{n-6} -$$
$$-993831540 \cdot f_{n-7} + 72569752 \cdot f_{n-8} - 68928781 \cdot f_{n-9} +$$
$$+ 5675265 \cdot f_{n-10});$$

13 порядок:

$$\text{P: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2615348736000}(13064406523627 \cdot f_n -$$
$$- 61497552797274 \cdot f_{n-1} + 214696591002612 \cdot f_{n-2} -$$
$$- 524924579905150 \cdot f_{n-3} + 932884546055895 \cdot f_{n-4} -$$
$$- 1233589244941764 \cdot f_{n-5} + 1226443086129408 \cdot f_{n-6} -$$
$$- 915883387152444 \cdot f_{n-7} + 467688867888675 \cdot f_{n-8} - 16287141898620 \cdot f_{n-9} +$$
$$+ 55060974662412 \cdot f_{n-10} - 9160551085734 \cdot f_{n-11} + 703604254357 \cdot f_{n-12}),$$

$$\text{E: } f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$\text{C: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2615348736000}(703604254357 \cdot f_{n+1} +$$
$$+ 3917551216986 \cdot f_n - 6616420957428 \cdot f_{n-1} +$$
$$+ 13465774256510 \cdot f_{n-2} - 21847538039895 \cdot f_{n-3} +$$
$$+ 27345870698436 \cdot f_{n-4} - 26204344465152 \cdot f_{n-5} + 19058185652796 \cdot f_{n-6} -$$
$$- 9492570755235 \cdot f_{n-7} + 3211186823420 \cdot f_{n-8} - 1092096992268 \cdot f_{n-9} +$$
$$+ 2268078814386 \cdot f_{n-10} - 13695779093 \cdot f_{n-11});$$

14 порядок:

$$
\begin{aligned}
\text{P: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{5230697472000}(&27511554976875 \cdot f_n - \\
&-140970750679621 \cdot f_{n-1} + 537247052515662 \cdot f_{n-2} - \\
&-1445313351681906 \cdot f_{n-3} + 2854429571790805 \cdot f_{n-4} - \\
&-4246767353\,305755 \cdot f_{n-5} + 4825671323\,488452 \cdot f_{n-6} - \\
&-4204551925\,534524 \cdot f_{n-7} + 2714966599\,199577 \cdot f_{n-8} - \\
&-1314403303\,476255 \cdot f_{n-9} + 5055861411\,96430 \cdot f_{n-10} - \\
&-1261749726\,81906 \cdot f_{n-11} + 1938285359\,3787 \cdot f_{n-12} - \\
&-1382741929\,621 \cdot f_{n-13}),
\end{aligned}
$$

$$
\text{E: } f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),
$$

$$
\begin{aligned}
\text{C: } y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{5230697472000}(1382741929621 \cdot f_{n+1} + \\
&+8153167962181 \cdot f_n - 15141235084110 \cdot f_{n-1} + \\
&+33928990133618 \cdot f_{n-2} - 61188680131285 \cdot f_{n-3} + \\
&+86180228689563 \cdot f_{n-4} - 94393338653892 \cdot f_{n-5} + \\
&+80101021029180 \cdot f_{n-6} - 50473628803161 \cdot f_{n-7} + \\
&+23915977698335 \cdot f_{n-8} - 9181635605134 \cdot f_{n-9} + \\
&+2268078814386 \cdot f_{n-10} - 345457086395 \cdot f_{n-11} + \\
&24466579093 \cdot f_{n-12}).
\end{aligned}
$$

15 порядок:

P: $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{31384184832000}(173\ 233\ 498\ 598\ 849 \cdot f_n -$

$-960\ 122\ 866\ 404\ 112 \cdot f_{n\text{-}1} +$

$+3\ 966\ 421\ 670\ 215\ 481 \cdot f_{n-2} - 11\ 643\ 637\ 530\ 577\ 472 \cdot f_{n-3} +$

$+25\ 298\ 910\ 337\ 081\ 429 \cdot f_{n-4} - 41\ 825\ 269\ 932\ 507\ 728 \cdot f_{n-5} +$

$+53\ 471\ 026\ 659\ 940\ 509 \cdot f_{n-6} - 53\ 246\ 738\ 660\ 646\ 912 \cdot f_{n-7} +$

$+41\ 280\ 216\ 336\ 284\ 259 \cdot f_{n-8} - 24\ 704\ 503\ 655\ 607\ 728 \cdot f_{n-9} +$

$+11\ 205\ 849\ 753\ 515\ 179 \cdot f_{n-10} - 3\ 728\ 807\ 256\ 577\ 472 \cdot f_{n-11} +$

$+859\ 236\ 476\ 684\ 231 \cdot f_{n-12} - 122\ 594\ 813\ 904\ 112 \cdot f_{n-13} +$

$+8\ 164\ 168\ 737\ 599 \cdot f_{n-14})$

E: $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$,

C: $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{31\ 384\ 184\ 832\ 000}(8\ 164\ 168\ 737\ 599 \cdot f_{n+1} +$

$+50\ 770\ 967\ 534\ 864 \cdot f_n - 102\ 885\ 148\ 956\ 217 \cdot f_{n-1} +$

$+251\ 724\ 894\ 607\ 936 \cdot f_{n-2} - 499\ 547\ 203\ 754\ 837 \cdot f_{n-3} +$

$+781\ 911\ 618\ 071\ 632 \cdot f_{n-4} - 963\ 605\ 400\ 824\ 733 \cdot f_{n-5} +$

$+934\ 600\ 833\ 490\ 944 \cdot f_{n-6} - 710\ 312\ 834\ 197\ 347 \cdot f_{n-7} +$

$+418\ 551\ 804\ 601\ 264 \cdot f_{n-8} - 187\ 504\ 936\ 597\ 931 \cdot f_{n-9} +$

$+\cdot 61\ 759\ 426\ 692\ 544 f_{n-10} - 14\ 110\ 480\ 969\ 927 \cdot f_{n-11} +$

$+1\ 998\ 759\ 236\ 336 \cdot f_{n-12} - 132\ 282\ 840\ 127 \cdot f_{n-13})$.

16 порядок:

P: $$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{62768369664000}(362\ 555\ 126\ 427\ 073 \cdot f_n -$$
$$-2\ 161\ 567\ 671\ 248\ 849 \cdot f_{n\text{-}1} + 9\ 622\ 096\ 909\ 515\ 337 \cdot f_{n-2} -$$
$$-30\ 607\ 373\ 860\ 520\ 569 \cdot f_{n-3} + 72\ 558\ 117\ 072\ 259\ 733 \cdot f_{n-4} -$$
$$-131\ 963\ 191\ 940\ 828\ 581 \cdot f_{n-5} + 187\ 463\ 140\ 112\ 902\ 893 \cdot f_{n-6} -$$
$$-210\ 020\ 588\ 912\ 321\ 949 \cdot f_{n-7} + 186\ 087\ 544\ 263\ 596\ 643 \cdot f_{n-8} -$$
$$-129\ 930\ 094\ 104\ 237\ 331 \cdot f_{n-9} + 70\ 724\ 351\ 582\ 843\ 483 \cdot f_{n-10} -$$
$$-29\ 417\ 910\ 911\ 251\ 819 \cdot f_{n-11} + 9\ 038\ 571\ 752\ 734\ 087 \cdot f_{n-12} -$$
$$-1\ 934\ 443\ 196\ 892\ 599 \cdot f_{n-13} + 257\ 650\ 275\ 915\ 823 \cdot f_{n-14} -$$
$$-16\ 088\ 129\ 229\ 375 f_{n-13}),$$

E: $$f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

C: $$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{62\ 768\ 369\ 664\ 000}(16\ 088\ 129\ 229\ 375 \cdot f_{n+1} +$$
$$+105\ 145\ 058\ 757\ 073 \cdot f_n - 230\ 992\ 163\ 723\ 849 \cdot f_{n-1} +$$
$$+612\ 744\ 541\ 065\ 337 \cdot f_{n-2} - 1\ 326\ 978\ 663\ 058\ 069 \cdot f_{n-3} +$$
$$+2\ 285\ 168\ 598\ 349\ 733 \cdot f_{n-4} - 3\ 129\ 453\ 071\ 993\ 581 \cdot f_{n-5} +$$
$$+3\ 414\ 941\ 728\ 852\ 893 \cdot f_{n-6} - 2\ 966\ 365\ 730\ 265\ 699 \cdot f_{n-7} +$$
$$+2\ 039\ 345\ 879\ 546\ 643 \cdot f_{n-8} - 1\ 096\ 355\ 235\ 402\ 331 \cdot f_{n-9} +$$
$$+451\ 403\ 108\ 933\ 483 \cdot f_{n-10} - 137\ 515\ 713\ 789\ 319 \cdot f_{n-11} +$$
$$+29\ 219\ 384\ 284\ 087 \cdot f_{n-12} - 3\ 867\ 689\ 367\ 599 \cdot f_{n-13} +$$
$$+240\ 208\ 245\ 823 \cdot f_{n-12}).$$

Формулы, приведенные выше, предпочтительнее использовать для практического применения решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянным шагом интегрирования. Если в процессе решения уравнения шаг интегрирования переменный, то для методов Адамса существуют специальные приемы для закладки новых начальных данных при смене шага интегрирования.

2.2 Форма записи метода Адамса при изменении шага интегрирования

Эффективность реализации методов Адамса зависит от того, с какой степенью точности можно предсказать поведение функции по ее предыдущим значениям fn, fn-1, …, fn-k+1. Эта информация имеет существенное значение для выбора шага и порядка.

Рассмотрим вариант формул Адамса с постоянным шагом. Получим разности по формулам

$$\nabla^0 f_n = f_n, \quad \nabla^i f_n = \nabla^{i-1} f_n - \nabla^{i-1} f_{n-1}.$$

В этом случае предсказывающая формула принимает вид

$$y_{n+1}^p = y_n + h\sum_{i=0}^{k} \gamma_i \nabla^i f_n, \tag{2.20}$$

где γi не зависит от k.

В алгоритме PkECk+1E исправляющая формула может быть записана в виде

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=0}^{k} \gamma_i^* \nabla_p^i f_{n+1}, \tag{2.21}$$

Причем ∇_p^i обозначает i -тую разностью назад, в которой за fn+1 принимается $f(x_{n+1}, y_{n+1}^p)$. Принимая во внимание, что имеет место равенство

$$\gamma_0^* = \gamma_0 = 1, \quad \sum_{i=0}^{k} \gamma_i^* = \gamma_k,$$

выражение (2. 21) можно упростить до вида

$$y_{n+1} = y_{n+1}^{p} + h\gamma_{k} \nabla_{p}^{k} f_{n+1}. \tag{2.22}$$

В случае алгоритма PkECkE в (2. 22) γk заменяется, на γk-1, что соответствует отбрасыванию одного члена в формуле (2. 21).

Для оценки погрешности можно использовать разности между этими двумя выражениями, т. е. оцениваемая погрешность задается соотношением

$$\varepsilon = h\gamma_{k}^{*} \nabla_{k}^{p} f_{n+1}.$$

Эта же оценка может быть использована для алгоритма PkECk+1 Если требование точности выполняется, то вычисляется f (xn+1, yn+1) и шаг завершается образованием исправленных разностей $\nabla^{i} f_{n+1}$.

Если требуется изменить длину шага h на h', то перед тем как за вершить шаг, обычно получают значения fn, fn-1, …, fn-k+1 с помощью полинома Pk, n, построенного по точкам fn, fn-1, …, fn-k+1. Таким образом

$$\bar{f}_{n-i} = P_{k,n}(x_n - ih'), \;\; i = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{2.23}$$

Имеется и другая возможность. В этом случае предыдущие значения запоминаются в виде

$$y_n, \; hy'_n, \ldots, h^k y_n^{(k)} / k!, \tag{2.24}$$

а коэффициенты разложения вычисляются по формуле

$$y_n^{(i)} = \left. \frac{d^{i-1} P_{k,n}(x)}{dx^{i-1}} \right|_{x=x_n}. \tag{2.25}$$

Достоинством формулы (2. 25) является упрощение процесса интерполяции при изменении шага, достигающееся умножением i -го коэффициента разложения (2. 24) на αi, причем $\alpha = \frac{h'}{h}$.

Приведем формулы записи методов Адамса с переменным шагом. Пусть fn, n-1, …, n-i обозначает i-тую разделенную разность f, определяемую следующей рекуррентной формулой:

$$f_{n,n-1,\dots,n-i} = \frac{f_{n,n-1,\dots,n-i+1} - f_{n-1,n-2,\dots,n-i}}{x_n - x_{n-i}}. \qquad (2.26)$$

Интерполяционный полином, выраженный через разделенные разности, имеет вид

$$P_{k,n}(x) = f_n + (x - x_n) f_{n,n-1} + \dots + (x - x_n)\dots(x - x_{n-k+2}) f_{n,n-1,\dots,n-k+1}. \quad (2.27)$$

Пусть gij есть j -кратный интеграл

$$g_{ij} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{x_n}^{x} \dots \int_{x_n}^{x} (x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_{n-i+1}) dx\dots dx, \qquad (2.28)$$

тогда алгоритм PkECk+1E запишется так:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}^{p} &= y_n + \sum_{i=0}^{k-1} g_{i1} f_{n,n-1,\ldots,n-i}, \\
f_{n+1}^{p} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}^{p}), \\
y_{n+1} &= y_{n+1}^{p} + g_{k1} f_{n+1,\ldots,n-k+1}^{p}, \\
f_{n+1} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}).
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

Обозначение $f_{n+1,\ldots,n-k+1}^{p}$ относится к разделенным разностям, образованным с помощью f_{n+1}^{p}.

Если значение $f_{n+1}^{*} = P_{k,n}(x_{n+1})$ находится экстраполяцией по формуле

$$f_{n+1}^{*} = \sum_{i=0}^{k-1} g_{i0} f_{n,n-1,\ldots,n-i}, \tag{2.30}$$

то полагая x = xn+1, из (2. 27) получаем

$$f_{n+1}^{p} = f_{n+1}^{*} + g_{k,0} f_{n+1,n,\ldots,n-k+1}^{p}. \tag{2.31}$$

Выразив $f_{n+1,\ldots,n-k+1}^{p}$ через $\left(f_{n+1}^{p} - f_{n+1}^{*}\right)/\, g_{k,0}$, исправленное значение в (2. 29) можно записать в виде

$$y_{n+1} = y_{n+1}^{p} + \frac{g_{k1}}{g_{ko}}\left(f_{n+1}^{p} - f_{n+1}^{*}\right). \tag{2.32}$$

Чтобы использовать PkECkE в (2. 32), следует заменить k на k-1. Разность между этими выражениями может быть использована для оценки погрешности

$$\varepsilon = (1/g_{k,0})(g_{k1} - (x_{n+1} - x_{n-k+1})g_{k-1,1})(f_{n+1}^{p} - f_{n+1}^{*}). \qquad (2.33)$$

Этот алгоритм зависит от эффективности метода вычисления переменных коэффициентов gij

Интегрируя по частям (2. 28), получим равенство

$$g_{ij} = (x_{n+1} - x_{n-i+1})g_{i-1,j} - ig_{i-1,j+1}. \qquad (2.34)$$

Так как $g_{0i} = (x_{n+1} - x_n)^j / j!$, то формулу (2. 34) можно использовать для вычисления искомых коэффициентов с помощью следующей треугольной таблицы.

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	g_{00}	g_{01}	g_{02}	g_{03}
1	g_{10}	g_{11}	g_{12}	
2	g_{20}	g_{21}		
3	g_{30}			

Согласно (2. 34), каждый элемент этой матрицы получается из двух элементов предыдущей строки.

Следует отметить, что если длина шага остается постоянной на протяжении s шагов, то коэффициенты gij при i<s будут постоян ными. С учетом этого свойства можно утверждать, что дополнительные затраты времени на вычисление переменных коэффициентов становятся несущественными при интегрировании большого числа уравнений, так как коэффициенты при постоянном шаге остаются неизменными.

3. Методы Адамса для уравнений более высокого порядка

Системы дифференциальных уравнений различных порядков можно интегрировать непосредственно без сведения к эквивалентной системе первого порядка.

Рассмотрим уравнение d -го порядка

$$y^{(d)} = f(x, y, y', \dots, y^{(d-1)})\,. \qquad (2.35)$$

Интегрируя (2. 35) (d- s) раз, получаем

$$y^{(s)}(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{d-1-s} \frac{h^i}{i!} y^{(s+i)}(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{x_n}^{x} \dots \int_{x_n}^{x} f\left(x, y(x), \dots, y^{(d-1)}(x)\right) dx \dots dx\,.$$

Заменяя функцию f (x, y (x), …, y (d-1) (x)) интерполяционным полиномом, получим явную формулу Адамса:

$$y_{n+1}^{(s)} = \sum_{i=0}^{d-1-s} \frac{h^i}{i!} y_n^{(s+i)} + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{x_n}^{x} \dots \int_{x_n}^{x} P_{k,n}(x) dx \dots dx\,. \qquad (2.36)$$

Рассмотрим алгоритм PkECk+1E, пользуясь разделенными разностями. Это наиболее распространенная форма использования методов Адамса

$$\begin{aligned}
& y_{n+1}^{(s)p}(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{d-1-s} \frac{h^i}{i!} y_n^{(s+i)} + \sum_{i=0}^{k-1} g_{i,d-s} f_{n,n-1,\dots,n-i}, \quad s = 0, 1, \dots, d-1, \\
& f_{n+1}^{p} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{p}, \dots, y_{n+1}^{(d-1)p}), \\
& y_{n+1}^{(s)} = y_{n+1}^{(s)p} + g_{k,d-s} f_{n+1,\dots,n-k+1}^{p}, \quad s = 0, 1, \dots, d-1, \\
& f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}, \dots, y_{n+1}^{(d-1)}). \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Следует отметить, что коэффициенты gij, совпадают с коэффициентами первого порядка, так как вычисляются одинаково.

В настоящее время отсутствуют теоретические аргументы в пользу сведения уравнений высокого порядка к системе уравнений первого порядка или, наоборот, в пользу непосредственного их интегрирования.

Вычислительное преимущество формул (2. 37) заключается в том, что требуется сформировать и обновлять на каждом шаге только одну таблицу разделенных разностей. Сведения к d уравнениям первого порядка потребовало бы d таблиц разностей.

4. Особенности метода Адамса

Преимущества метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутта:

экономичность;

наглядный контроль – по последним конечным разностям можно судить о точности результата.

Недостатком метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутта является его многошаговость, то есть то, что решение в следующей точке зависит от решения в нескольких предыдущих точках, и они должны быть равноотстоящими.

Достоинством многошаговых методов Адамса при решении ОДУ заключается в том, что в каждом узле рассчитывается только одно значение правой части ОДУ – функции f (x, y). К недостаткам можно отнести невозможность старта многошагового метода из единственной начальной точки, так как для вычислений по k-шаговой формуле необходимо знание значения функции в k узлах. Поэтому приходится (k-1) решение в первых узлах x1, x2, …, xk-1 получать с помощью какого-либо одношагового метода, например метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

Другой проблемой является невозможность изменения шага в процессе решения, что легко реализуется в одношаговых методах.