

# Interseccion Maxima

Daniel Bustos

30/04/2024

Sea  $G = (E, V)$  un grafo conexo. Queremos ver que todo par de caminos simples de longitud máxima de  $G$  tienen un vértice en común.

Supongamos dos caminos  $P = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  y  $Q = w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  de misma longitud tal que todos sus vértices son distintos entre sí.

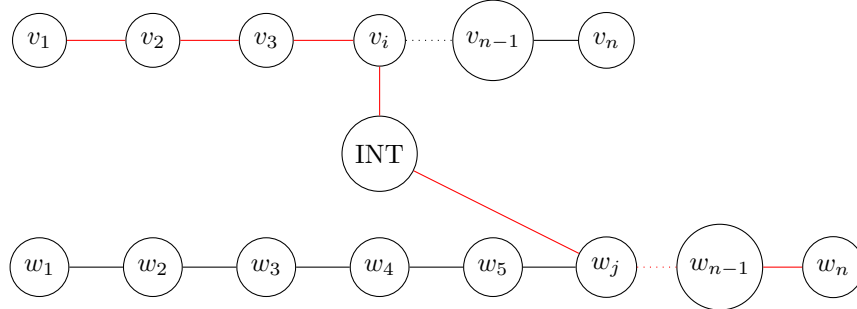
Supongamos que  $|P| = |Q|$  con esta siendo la longitud máxima posible de camino simple en  $G$ .

Observemos que como  $G$  es conexo, se cumple que debe existir un camino entre todos los vértices. Este no necesariamente es simple. Pero podemos arreglar esto más adelante.

Tomemos el camino  $C$ , que va desde  $v_1$  hasta  $w_n$ , este es de la forma

$$C = v_1, \dots, v_i, \dots, w_j, \dots, w_n$$

con  $v'_i$  el punto que se conecta a  $w_j$ . Llamemos INT a los nodos intermedios en la conexión:



¿Cuánto mide  $C$ ? Llamemos a  $\#INT$  la cantidad de vértices intermedios, que pueden ser 0 o más. Entonces, usando que  $|P| = |Q| = n$ :

Ya que la longitud de los caminos es la misma. Sabemos que:

$$i + (n - j) + 1 = n + 1$$

Luego la longitud total de  $C$  es:

$$|C| = n + 1 + \#INT$$

Entonces  $|C| > n = |P| = |Q|$  ya que  $\#INT \geq 0$   
 ¿Es  $C$  simple? Si!  $P$  y  $Q$  no tienen elementos en común y cualquier elemento intermedio no pertenece a ninguno de los dos. Entonces es simple.

Observemos que construimos un nuevo camino mayor a  $P$  y  $Q$  simple, pero  $P$  y  $Q$  eran máximos. ¡Absurdo!

Por lo tanto, el absurdo provino de suponer que  $P$  y  $Q$  no tenían ningún vértice en común. Así que vale lo que queríamos probar.