Problema 5

Sea G un digrafo con pesos positivos que tiene dos vértices especiales s y t. Decimos que una arista $e \in E(G)$ es crítica para s y t cuando $d_G(s,t) < d_{G-e}(s,t)$. Diseñar un algoritmo eficiente que, dado G, determine las aristas de G que son críticas para s y t. Demostrar que el algoritmo es correcto. **Ayuda**: pensar en el subgrafo P de G que está formado por las aristas de caminos mínimos de G (el grafo de caminos mínimos).

Idea del algoritmo

Iteramos por todas las aristas; aquellas que no satisfacen la propiedad del ejercicio 1 (sea vw una arista, es s-t eficiente $\leftrightarrow d(s,v)+c(v,w)+d(w,t)$) las descartamos, dejándonos un grafo P donde las únicas aristas son aquellas pertenecientes a caminos mínimos.

Ahora necesitamos encontrar las aristas "puente" del grafo subyacente P_{sub} de nuestro digrafo P. Podemos hacerlo utilizando el algoritmo del ejercicio 2 de la guía anterior, con complejidad $O(n+m)$. Estas serán nuestras aristas críticas para s y t.

Algoritmo

Algorithm 1 Determinar las aristas críticas para s y t

1: Ejecutar Dijkstra desde s y desde t en el grafo transpuesto.
2: Construir el grafo P con las aristas vw que son s-t eficientes.
3: Encontrar las aristas puente en el grafo subyacente P_{sub}.
4: **return** Todas las aristas puente como aristas críticas.

Demostración

Es claro que las aristas críticas existen únicamente dentro del conjunto de aristas pertenecientes a caminos mínimos, ya que remover cualquier otra no cambia la distancia. Ya probamos que el criterio del ejercicio 1 nos sirve para identificarlas. Luego, solo debemos probar la afirmación de que considerar las aristas puente del subyacente a P es equivalente a encontrar las críticas. En rigor:

La arista vw es crítica en $G \leftrightarrow vw$ es puente en P_{sub}.

Ida

La arista vw es crítica en $G \implies vw$ es puente en P_{sub}.

Probémoslo por el contrarrecíproco: vw no es puente en $P_{\text{sub}} \implies vw$ no es crítica en G.

Como vw no es puente en P_{sub}, removerla no aumenta las partes conexas. Consideremos el efecto de la remoción en G, que nos deja dos posibilidades:

- Existe un camino desde v hasta w direccionado, en cuyo caso, como sabíamos que valía $d(s,v) + c(v,w) + d(w,t)$, y existe un camino de todas aristas s-t eficientes, entonces vale que ese camino respeta esta misma propiedad. Luego, vw no era crítica.

- Existe un camino desde v hasta w *únicamente sin considerar las direcciones*, en cuyo caso, como este camino existe, y sus aristas también pertenecen a un camino de s a t mínimo que no utiliza a vw, necesariamente no ha cambiado la distancia.

Vuelta

vw es puente en $P_{\text{sub}} \implies$ La arista vw es crítica en G.

Como vw forma parte de un camino de s a t en P, si esta fuese puente, quiere decir que al removerla tenemos dos partes conexas, una que incluye a s y otra que incluye a t. Como no hay manera de alcanzar una a la otra en P, quiere decir que los únicos caminos restantes son aquellos que están en G pero no en P, que por definición de P son necesariamente mayores a los mínimos o no existentes. Luego, vw es crítica en G