Daniel Bustos, BFS raiz v es v-Geodesico

Un árbol generador T de un grafo G es v-geodésico si la distancia entre v y w en T es igual a la distancia entre v y w en G para todo $w \in V(G)$. Demostrar que todo árbol BFS de G enraizado en v es v-geodésico.

Probémoslo: Si T es un árbol BFS de G enraizado en $v \implies T$ es v-geodésico.

Hagamos inducción en las distancias a la raíz r. Vamos a usar (pero no demostrar) el siguiente lema:

Lema: Sea T un árbol BFS desde raíz de un (di)grafo G. Si el nivel de v es menor al nivel de w en T, entonces v se procesó antes que w por BFS.

Ahora si empecemos la inducción:

$P(n) :=$ Para todo nodo a distancia n de la raíz r en T, su distancia en G es igual a su distancia en T: $d_T(r, v') = n \leftrightarrow d_G(r, v') = n$.

Caso base: $P(0)$, vale trivialmente, ya que la distancia en BFS a la raíz es 0, ya que es el primer nodo en ser procesado.

Paso Inductivo: H.I. : $\exists l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall l' \leq l_0$ vale $P(l')$.

Q.V.Q. $P(l_0) \to P(l_0 + 1)$.

- Consideremos el camino minimo $P = r, v_1, v_2, \ldots, v_{l+1}$ en G. Sabemos que $d_G(r, v_{l+1}) = n+1$ y por H.I. que el nodo v_l está en el nivel l del árbol BFS.

- Cuando BFS mira este vértice, toma a todos sus vecinos, dentro de los cuales debe estar v_{l+1}, si no fue marcado por BFS, este lo toma y vale $P(l_0 + 1)$.

- Caso contrario quiere decir que el nodo ya fue marcado por BFS , lo que quiere decir que $\exists$ un vertice w con altura $< l_0$ tal que $v_{l_0+1} \in N(w)$. Como w cumple la H.I, quiere decir que $d_T(r, w) = d_G(r, w)$. Luego tenemos ya que $d_G(r, w) < l$ vale lo siguiente :

  $$d_G(r, w) + 1 = d_T(r, w) + 1(*) \leq l_0 + 1 = d_G(r, v_{l_{0+1}})$$

  Con la distancia $(*)$ representando $d_T(r, v_{l_0+1})$ cuando pasa por w. Ademas siempre vale que la distancia en el arbol T debe ser mayor o igual a la distancia en G, por el funcionamiento de BFS. Entonces se puede deducir lo siguiente:

  $$d_T(r, v_{l_0+1}) \leq v_{l_{0+1}} \wedge \ d_T(r, v_{l_0+1}) \geq v_{l_{0+1}}$$

  $$\implies d_T(r, v_{l_0+1}) = l_{0+1}$$

  Que es lo que queriamos ver $\square$

Figure 1: La distancia no cambia en ninguno de los nodos, sin necesariamente ser la raíz del árbol.

Veamos la falsedad de: Si T es v'-geodésico $\implies$ T es un árbol BFS de G enraizado en v'. Para el contraejemplo, tomemos el siguiente grafo: $(v, w)(w, z)$. Claramente, si construimos el árbol BFS desde cualquiera de los tres, siempre será $w/z/v$-geodésico, sin necesariamente ser la raíz. Esto demuestra que no vale la vuelta de la propiedad.