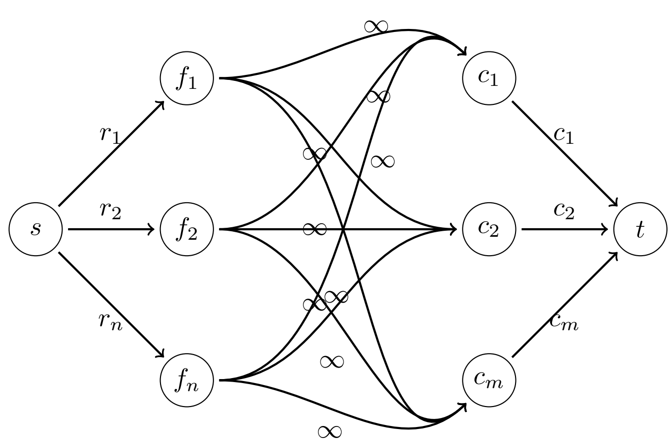
Asignacion del tablero

Sean $r_1, \ldots, r_m$ y $c_1, \ldots, c_n$ números naturales. Se quiere asignar los valores de las celdas de una matriz de $m \times n$ con números naturales de forma tal que la i-ésima fila sume r_i y la i-ésima columna sume c_i.

a) Modelar el problema de asignación como un problema de flujo

Pensamos en el siguiente grafo: el tablero nos define dos conjuntos bipartitos, el valor de una columna c_i solo depende del valor de las filas $f_1, f_2, \ldots, f_n$ en la posición de la columna. Eso nos define una relación entre las particiones. Podemos modelar estas relaciones como un grafo, teniendo a cada c_i y f_j como vértices en él, siendo las aristas las relaciones correspondientes. Observemos que cada columna se relaciona con todas las filas y viceversa. Luego podemos establecer nuestra fuente s y nuestro sumidero t. Las capacidades entre la fuente y las columnas son iguales a c_i para cada columna, y las de las filas al sumidero son r_j. Las capacidades de las aristas intermedias son infinitas (ya están acotadas por las capacidades que salen de la fuente).



Luego de obtener algun flujo máximo, podemos hacer las siguientes conclusiones:

- La asignacion pedida es posible $\iff$ las aristas de salida de la fuente y de entrada al sumidero están saturadas, ya que quiere decir que nuestra suma de valores es posible.
- Cada unidad de flujo de una arista (f_i, c_j) corresponde al valor que le daremos en el tablero a la posición (i, j) correspondiente (ya que la intersección entre una fila y una columna es una sola casilla).

Complejidad:

Podemos calcular la cantidad de aristas en nuestro grafo. Si tenemos n columnas y m filas, sabiendo que todos están conectados con todos, además de que todos están conectados a la fuente o el sumidero respectivamente, tenemos que

$$|E| := \binom{n+m}{2} + n + m = \frac{n^2 + 2nm + m^2 - n - m}{2} + n + m = \frac{n^2 + m^2}{2} + nm - \frac{n+m}{2}$$

$$|V| := n + m + 2$$

Entonces si la complejidad de Edmonds-Karp es de $O(\min(|V||E|^2, |V|F)) = O\left(\min\left((n^2 + m^2 + nm)^2 \cdot (n+m), (n+m) \cdot F\right)\right)$.