Un árbol generador T de un grafo G es v-geodésico si la distancia entre v y w en T es igual a la distancia entre v y w en G para todo $w \in V(G)$. Demostrar que todo árbol BFS de G enraizado en v es v-geodésico.

Probémoslo: Si T es un árbol BFS de G enraizado en $v \to T$ es v-geodésico.

Hagamos inducción en las distancias a la raíz v. Vamos a usar (pero no demostrar) el siguiente lema:

Lema: Sea T un árbol BFS desde raíz de un (di)grafo G. Si el nivel de v es menor al nivel de w en T, entonces v se procesó antes que w por BFS.

Ahora si empecemos la inducción:

$P(n) :=$ Para todo nodo a distancia n de la raíz v en T, su distancia en G es igual a su distancia en T: $d_T(v, v') = n \to d_G(v, v') = n$.

Caso base: $P(0)$, vale trivialmente, ya que la distancia en BFS a la raíz es 0, ya que es el primer nodo en ser procesado.

Paso Inductivo: H.I. : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n' \leq n_0$ vale $P(n')$. **Q.V.Q.** $P(n_0) \to P(n_0 + 1)$.

Consideremos el camino $P = v, v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$. Sabemos por H.I. que el nodo v_n está en el nivel n del árbol BFS, cuando BFS mira este vértice, toma a todos sus vecinos, dentro de los cuales debe estar v_{n+1}.