Unicidad Digrafos

Daniel Bustos

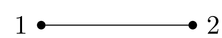
30/04/2024

Sean $G_2 = K_2$ y $G_{n+1} = \overline{G_n \cup K_1}$ para todo $n \geq 2$. Queremos demostrar que G_n tiene un único par de vértices de igual grado. (Denotamos K_i para referirnos al grafo completo de i vértices)

Probémoslo por inducción:

Sea $P(n) :=$ El grafo G_n como definido anteriormente tiene un único par de vértices de igual grado.

Caso base $n = 2$:

El completo de dos vértices es de la siguiente forma: 

Solo hay 2 vértices, cada uno con grado 1. Vale $P(2)$.

Paso inductivo:

H.I: Existe n tal que el grafo G_n tiene un único par de vértices de igual grado. Mostraremos $P(n) \to P(n+1)$.

Sabemos por la definición original que:

$$G_{n+1} = \overline{G_n \cup K_1}$$

¿Cómo afecta al grado de cada vértice el conjugado? Observemos que para cada vértice v_i, con grado $d(v_i)$, al momento de tomar el conjugado el vértice perderá sus conexiones preexistentes y ganará tantas como no tenía antes respecto de los n vértices más una arista adicional por la conexión con el único vértice de K_1. En otras palabras:

$$\overline{d(v_i \ \cup \ K_1)} = n - 1 - d(v_i) + 1 = n - d(v_i)$$

A partir de esta propiedad se observa que dos vértices w y v tienen la misma cantidad de vértices al conjugar si solo si:

$$\overline{d(w \ \cup \ K_1)} = \overline{d(v \ \cup \ K_1)} \ \leftrightarrow \ n - 1 - d(v) = n - 1 - d(w) \ \leftrightarrow \ d(w) = d(v)$$

Esto solo puede pasar si $w = v$ o su grado era el mismo antes del conjugado. Se separa en dos casos:

1) Si no hay ningún vértice en G_n que tenga grado 0, por H.I hay solo 2 vértices que tienen el mismo grado y estos mismos serán los únicos que seguirían teniendo mismo grado luego de realizar la operación $\overline{G_n \cup K_1}$ por lo recien visto.

2) Si hay un vértice de G_n que tenga grado 0, ya no vale $P(n+1)$ ya que ,por lo visto anteriormente, el vértice de K_1 (de grado 0 originalmente) tendrá grado n luego de conjugar, lo mismo para cualquier otro vértice de grado 0 en G_n, además de que tenemos la pareja adicional que nos da la H.I.

Veamos ahora por otra inducción que no es posible que haya vértices en G_n con grado 0.

Sea $P'(n) :=$ No hay vértices de grado 0 en G_n para todo $n \geq 2$.

Caso base, $n = 2$:
Para este caso $G_2 = K_2$ y el completo 2 tiene solo dos vértices de grado 1. Luego vale $P'(2)$.

Paso inductivo:
H.I: Existe un n tal que vale que no hay vértices de grado 0 en G_n.
Mostraremos $P'(n) \to P'(n+1)$.

Sabemos que $G_{n+1} = \overline{G_n \cup K_1}$ y que el grado de cada vértice luego de conjugar en esta unión está dado por la fórmula:

$$\overline{d(v_i \ \cup \ K_1)} = n - d(v_i)$$

Veamos que no puede ser 0 el grado:

$$\overline{d(v_i \ \cup \ K_1)} = 0 \leftrightarrow n - d(v_i) = 0 \leftrightarrow n = d(v_i)$$

Esto es absurdo ya que los vértices que pertenecían a G_n podían tener grado $n-1$ como máximo, y el unico vértice perteneciente a K_1 tiene siempre grado 0 inicialmente. Luego vale el paso inductivo.
Vimos que vale $P'(n)$ para todo $n \geq 2$. Como esto nos dice que el caso 2 en la demostración de $P(n+1)$ es imposible, vale el paso inductivo de $P(n)$.
Por lo tanto, vale lo que queríamos demostrar originalmente.