

14. Kruskal Prioridad Q

Sea $q : V(G) \rightarrow Z$ una función inyectiva para un grafo G . Demostrar que G tiene un único árbol generador mínimo si y solo si el algoritmo de Kruskal con prioridad q retorna el mismo árbol que el algoritmo de Kruskal con prioridad $-q$.

IDA:

Si tiene un único árbol generador mínimo, el algoritmo de Kruskal retorna siempre ese árbol, indistinto de la prioridad.

Vuelta:

El algoritmo de Kruskal con prioridad q retorna el mismo árbol que el algoritmo de Kruskal con prioridad $-q \implies G$ tiene un único árbol generador mínimo.

Probemos que esto quiere decir que tiene todos los pesos distintos. Para así usar el inciso b del ejercicio anterior (Si todos los pesos son distintos entonces hay un único AGM).

Supongamos que hay dos iguales, llamémoslas a y b con $q(a) > q(b)$. En la prioridad q , Kruskal siempre toma b en la primera iteración. Luego, si usamos $-q$, Kruskal toma b , pero como los árboles resultantes son iguales, necesariamente a y b son tomados en ambos ordenes.