CajaCircular

Nuevamente tenemos a n clientes de un supermercado $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ y queremos asignarle a cada uno una caja para hacer la fila. Esta vez, las cajas están ordenadas en forma circular, numeradas de la 1 a la M y se encuentran separadas por pasillos. Entre la caja M y la 1 hay una valla que impide pasar de una a la otra. Durante el proceso de asignación algunos clientes se pelean entre sí y son separados por seguridad. Si dos clientes c_i y c_j se pelean, los guardias les dicen que tienen que ponerse en las cajas que se encuentren separadas por al menos $K_{ij} > 0$ pasillos intermedios en ambos sentidos del círculo, para que no se vuelvan a pelear. Notar que cuando seguridad separa una pelea naturalmente hay un cliente que queda en un número de caja más bajo y el otro en un número de caja más alto. Con la restricción de no volver a acercarse y la valla entre las cajas M y 1 ese orden ya no puede cambiar. ¿Será posible asignarlos a todos?

En este ejercicio una pelea nos implica dos restricciones. Aquí las cajas son un sistema circular, así que tenemos que enfrentar el problema de las distancias usando aritmética modular.

Sea x_i y x_j dos clientes peleados, tal que x_j quedó en una caja de mayor numeración que x_i. Para pedir que estén a una distancia mayor a K_{ij} en nuestro sistema circular se debe cumplir lo siguiente:

$$x_j - x_i \geq K_{ij} \wedge M - (x_j - x_i) \geq K_{ij}$$

$$\leftrightarrow -K_{ij} \geq x_i - x_j \wedge M - K_{ij} \leq x_j - x_i$$

Pedido esto, podemos volver a plantear el sistema igual que antes, usando la inecuación con nuestro z imaginario, para que todos los clientes estén entre 1 y M.

Sea m_1 la cantidad de pelas. Miremos como nos queda el grafo:

$$\text{vertices} = \#\{z, c_0, c_1, \ldots, c_n\} = n + 2 = O(n)$$

$$\text{aristas} = 2m_1 + n \leq O(n^2)$$

Complejidad de Bellman-Ford $= O(V \cdot E) = O(2nm_1 + n^2) \leq O(n^3)$