Cazador de Ciclos

Daniel Bustos

a)

Queremos probar que :
Si todos los vértices de un digrafo D tienen grado de salida mayor a 0 $\rightarrow$ D tiene un ciclo.

Supongamos que todos los vértices de un digrafo D tienen grado de salida mayor a 0. Luego podemos tomar un vértice v_1, avanzar hacia otro v_2, de ahí avanzar a v_3 etc. En algún momento, como el grafo es finito, debe ocurrir que haya un ciclo. Esto se puede demostrar fácilmente por el absurdo:
Supongamos un digrafo D finito tal que para todo $v \in V$, $d(v) > 0$ y D no tenga ciclos. Entonces podemos tomar v y avanzar hacia v' con $v' \neq v$. Como no hay ciclos, pero $d(v') \neq 0$ necesariamente debemos podemos avanzar hacia v'' con $v'' \neq v' \neq v$, y así infinitamente. Luego D tendría infinitos vértices. ¡Absurdo!.

b)

Queremos probar que un digrafo D es acíclico $\leftrightarrow$ D es trivial o D tiene un vértice con $d_{\text{out}} = 0$ tal que $D - \{v\}$ es acíclico.

Probemos la ida: **D es acíclico $\rightarrow$ D es trivial o D tiene un vértice con $d_{\text{out}} = 0$ tal que $D - \{v\}$ es acíclico.**

Si D es acíclico, debe tener al menos un vértice v que tenga grado 0, de otra manera sería cíclico por la propiedad de (a). Ahora podemos perfectamente remover a v de D ya que sacar un vértice de grado 0 claramente no genera un ciclo, $D - \{v\}$ sigue siendo acíclico.

Ahora la vuelta

D es trivial o D tiene un vértice con $d_{\text{out}} = 0$ tal que $D - \{v\}$ es acíclico $\rightarrow$ D es acíclico.

- Si D es trivial, es claro que D es acíclico.
- Si D tiene un vértice con $d_{\text{out}} = 0$ tal que $D - \{v\}$ es acíclico , podemos simplemente volver a agregar a v. Como $D - \{v\}$ era aciclico y $D - \{v\} \cup \{v\} = D$, y agregar un vertice de grado 0 claramente no nos genera un ciclo nuevo, podemos decir que D es aciclico

$\square$