1 Arte Conexo

Daniel Bustos

1.1 a)

Sea $G = (V, E)$ un grafo, con $|V| = n$.
Sea $P(n) :=$ Si un grafo tiene más de $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ aristas $\rightarrow$ es conexo.

Caso Base: $P(1)$ = Tenemos 1 vértice, con 0 aristas: Se falsea el antecedente, luego $P(1)$ es verdadero.

Paso inductivo: **H.I**: Supongamos que existe un n_0 tal que para todo Grafo con n_0 vértices que tenga más de $\frac{(n_0-1)\cdot(n_0-2)}{2}$ aristas $->$ es conexo.

Q.V.Q: $P(n_0) -> P(n_0 + 1)$

Tenemos un grafo G con $n_0 + 1$ vértices, queremos probar que si tiene más de $\frac{n_0\cdot(n_0-1)}{2}$ aristas $->$ es conexo.

- Si tiene menor o igual a la cantidad de aristas pedida, entonces se falsea el antecedente, haciendo verdadera a la propiedad:

- **Observemos** que no puede haber ningun vertice de grado 0 en G. Probemoslo rapidamente por el absurdo: Supongamos $\exists v \in V d(v) = 0$
  Podemos considerar el grafo $G - \{v\}$ que tendra n_0 vertices y la misma cantidad de aristas que G, ya que d(v) = 0. Dado que tiene n_0 vertices, $G - \{v\}$ podra tener como maximo :$\binom{n_0}{2} = \frac{(n_0)\cdot(n_0-1)}{2}$ aristas.

  Pero dijimos que $G-\{v\}$ tiene estrictamente mas de esa cantidad!(Recordemos G y $G - \{v\}$ tienen la misma cantidad de aristas). Luego no puede existir en G un vertice de grado 0.

- Si hay un nodo v de grado 1, podemos considerar el grafo $G - v$. Este tiene n_0 nodos y $\frac{n_0\cdot(n_0-1)}{2} - 1$ aristas. Observemos que:

$$\frac{n_0 \cdot (n_0 - 1)}{2} - 1 > \frac{(n_0 - 1) \cdot (n_0 - 2)}{2}$$

  Luego tenemos un grafo que cumple la H.I por lo tanto es $G - \{v\}$ es conexo . Como $G - \{v\}$ es subgrafo de G y conexo, dado que el vertice v tiene mas de grado 0, G debe ser conexo tambien.Por lo tanto es verdadero $P(n_0 + 1)$ en este caso.

- ¿Hasta qué grado de nodo podemos remover, tal que siga valiendo la desigualdad de la H.I.? Plantemos la desigualdad. Sea a el grado mayor del nodo que podemos sacar.

$$
\begin{aligned}
&\frac{n_0 \cdot (n_0 - 1)}{2} - a > \frac{(n_0 - 1) \cdot (n_0 - 2)}{2} \\
&\leftrightarrow \left(\frac{n_0^2}{2} - \frac{n_0}{2} - a\right) > \left(\frac{n_0^2}{2} - \frac{2n_0}{2} - \frac{n_0}{2} + \frac{2}{2}\right) \\
&\leftrightarrow -\frac{n_0}{2} - a > -\frac{3}{2} n_0 + 1 \\
&\leftrightarrow n_0 - a > 1 \\
&\leftrightarrow n_0 - 1 > a
\end{aligned}
$$

Luego podemos sacar nodos de hasta grado $n_0 - 2$, y generarnos un Grafo de n_0 vertices que cumpla la desigualdad, haciendo valer la H.I y por ende demostrando que G es conexo a partir del mismo razonamiento que hicimos antes.

- ¿Pero qué pasa si todos los nodos tienen grado $n_0 - 1$? ¡Fácil! Si todos los nodos tienen grado $n_0 - 1$, entonces el grafo es conexo por definición, ya que es completo (todos están conectados con todos).

Luego vimos que $P(n_0 + 1)$ vale para todos los casos. Por lo tanto $P(n)$ vale $\forall n \geq 0$.

1.2 b)

Sea $G = (V, E)$ un grafo ($|V| = n$) tal que: $|E| \geq 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas. Queremos ver que si tiene esa cantidad de aristas entonces es biconexo.

Sabemos por el inciso (a) que $\forall G'$ si $|E'| > \frac{(n-1)(n-2)}{2} \rightarrow G'$ es conexo.

Q.V.Q: G es biconexo.

Supongamos que G no es biconexo $\rightarrow \exists v \in V$ tal que v es articulación ($G - v$ tiene mas partes conexas que G).

Por la propiedad de (a) sabemos que necesariamente G es conexo ya que:

$$|E| \geq 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Luego se debe cumplir que $G - v$ tiene al menos dos partes conexas o lo que es lo mismo, $G - v$ no puede ser conexo.

¿Qué grado debe tener v para que se cumpla esto? Sabemos que el grafo $G - v$ tiene $n - 1$ vertices , luego debe cumplir que:

$$|E(G - v)| \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

Ya que de otra forma seria conexo por la propiedad (a).

Veamos ahora si esto es en efecto posible:

$$|E(G - v)| = |E| - d(v) \geq 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d(v) \leq (Q.V.Q) \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$\leftrightarrow 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d(v) \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$\leftrightarrow 2 + \frac{n^2}{2} - n - \frac{n}{2} + 1 - d(v) \leq \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} - n + 3$$

$$\leftrightarrow 3 - \frac{3n}{2} - d(v) \leq -\frac{5n}{2} + 3$$

$$\leftrightarrow 3 + n - d(v) \leq 3$$

$$\leftrightarrow n \leq d(v) \text{ ABS!!!}$$

Ya que el grado de un nodo tiene como cota superior $n - 1$, llegamos a un absurdo. Luego v no puede existir, es decir G no tiene articulación.

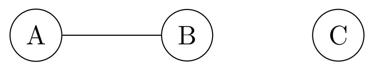
Por lo tanto, G es biconexo, probando lo que queríamos demostrar.

1.3 c)

Probemos que es imposible por contraejemplo:

1er caso) sea $c(n) < 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ tal que $\forall G$ grafos con $n \geq n_0$ que tenga al menos $c(n)$ aristas sea conexo. Sabemos que c(n) debe ser : $c(n) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

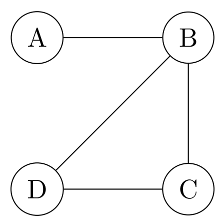
Si $n = 3$: $c(3) \leq 1$. Pero podemos dibujar el grafo:



que tiene una arista, sin embargo claramente no es conexo.Luego c(n) no puede existir

2do caso) sea $c(n) < 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ tal que $\forall G$ grafos con $n \geq n_0$ que tenga al menos $c(n)$ aristas sea biconexo.
Sabemos que c(n) debe ser : $c(n) \leq 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Si $n = 3$: $c(3) \leq 4$ pero podemos dibujar el grafo:



que claramente es conexo, pero B es un vértice de articulación, luego no es biconexo y c(n) no puede existir