UnionVsJunta

a)

Queremos demostrar que: G es un grafo unión $\leftrightarrow$ G es disconexo. Probemos la ida y la vuelta:

G es un grafo unión $\rightarrow$ G es disconexo:
Como G es un grafo unión, existe G_1 y G_2 tales que $G = G_1 \cup G_2$. Por la definición de la operación unión en grafos (poner todos los vértices y aristas de cada uno en un solo grafo , sin unirlos entre sí), no existe ningún camino que conecte vértices de G_1 a G_2 en G. Luego, G tiene dos partes conexas, lo que lo vuelve disconexo.
G es disconexo $\rightarrow$ G es un grafo unión:
Como G es un grafo disconexo, este tiene más de una parte conexa. Sea n la cantidad de partes conexas. Podemos asignarle a cada i-ésima parte conexa como un G_i grafo, hasta cubrir todas las partes. Definamos a G' grafo como $G' = G_2 \cup ... \cup G_n$. Redefinamos a G ahora como $G = G_1 \cup G'$. Se observa que G es claramente un grafo unión. $\square$

b)

Queremos demostrar que: G es un grafo junta $\leftrightarrow$ $\overline{G}$ es un grafo unión. Probemos la ida y la vuelta:
G es un grafo junta $\rightarrow$ $\overline{G}$ es un grafo unión:
Por ser G junta, existen G_1 y G_2 grafos tal que:

$$G = G_1 + G_2$$

Entonces:

$$\overline{G} = \overline{G_1 + G_2}$$

Como la operación + nos conecta todos los vértices de G_1 con los de G_2, al tomar el complemento, claramente estas dos partes son ahora disconexas, dejándonos a $\overline{G}$ como disconexo. Como probamos en (a), esto nos dice que $\overline{G}$ es un grafo unión.
$\overline{G}$ es un grafo unión $\rightarrow$ G es un grafo junta:
Por ser $\overline{G}$ unión, existen G_1 y G_2 grafos tal que:

$$\overline{G} = G_1 \cup G_2$$

Tomemos ahora el complemento de $\overline{G}$:

$$\overline{\overline{G}} = G = \overline{G_1 \cup G_2}$$

Ignorando las nuevas conexiones formadas entre G_1 y G_2, llamemos G_1' y G_2' al grafo resultante de tomar conjugado y restarle las conexiones entre ambos. Luego, ahora vale que:

$$G = G_1' + G_2'$$

Luego, G es un grafo junta. $\square$

c)

Queremos demostrar que G es un grafo junta $\leftrightarrow$ $\overline{G}$ es disconexo.

Probemos la ida y la vuelta:

G es un grafo junta $\rightarrow$ $\overline{G}$ es disconexo:

Como G es un junta, por el enunciado (b) tenemos que $\overline{G}$ es unión. Luego, por el enunciado (a), $\overline{G}$ es disconexo.

$\overline{G}$ es disconexo $\rightarrow$ G es un grafo junta:

Al ser $\overline{G}$ disconexo, por el enunciado (a), $\overline{G}$ es unión. Luego, por el enunciado (b), $\overline{\overline{G}} = G$ es junta. $\square$