Unicidad Digrafo

Josefina Negrotto, redaccion: Daniel Bustos

27 de abril de 2024

Sea $G = (E, V)$ un grafo orientado, con cada vértice un grado distinto de salida. Formalmente:

$$\forall v \in V, w \in V, v \neq w \Rightarrow d_{out}(v) \neq d_{out}(w)$$

Podemos ordenarlos por orden creciente:

$$d_{out}(v_1) < d_{out}(v_2) < \ldots < d_{out}(v_n)$$

Observación: Como el grado máximo de salida es $n-1$ y el mínimo 0, como todos deben ser distintos, vale que $d_{out}(v_i) = i - 1$.

Observemos que para el vértice v_n debe tener grado de entrada 0, ya que está relacionado con todos los demás, y (por ser grafo orientado) si existe la relación $v_n \to v_i$ no existe la relación $v_i \to v_n$. Entonces $d_{in}(v_n) = 0$. Análogamente $d_{in}(v_{n-1}) = 1$, ya que solo puede recibir del grafo v_n.

Fácilmente se ve que el grado de $d_{in}(v_i) = n - i$. (Podemos probarlo por inducción)

Luego para todo vértice $v \in V$ vale que $d_{in}(v_i) + d_{out}(v_i) = n - i + i - 1 = n - 1$. Entonces viendo el grafo subyacente (el grafo direccionado convertido a grafo normal) Todos los vértices son universales. Luego el único grafo con n nodos que cumple lo pedido es el grafo completo, dándonos la unicidad.

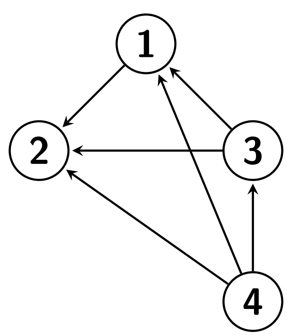

Figure 1: Digrafo: (1,2)(3,1)(3,2)(4,1)(4,2)(4,3) .
Es facil ver que el grafo adyacente es completo