0.1 a

Sea $G = (V, E)$ un grafo, con $|V| = n$.
Sea $P(n)$:= Si un grafo tiene más de $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ aristas $\to$ es conexo.

Caso Base: $P(1)$ = Tenemos 1 vértice, con 0 aristas: Se falsea el antecedente, luego $P(1)$ es verdadero.

Paso inductivo: **H.I**: Supongamos que existe un n_0 tal que para todo Grafo con n_0 vértices que tenga más de $\frac{(n_0-1)\cdot(n_0-2)}{2}$ aristas $->$ es conexo.

Q.V.Q: $P(n_0)-> P(n_0+1)$

Tenemos un grafo G con n_0+1 vértices, queremos probar que si tiene más de $\frac{n_0\cdot(n_0-1)}{2}$ aristas $->$ es conexo.

- Si tiene menor o igual a la cantidad de aristas pedida, entonces se falsea el antecedente, haciendo verdadera a la propiedad:

- Si hay un nodo v de a lo sumo grado 1, podemos considerar el grafo $G-v$. $G-v$ tiene n_0 nodos y $\frac{n_0\cdot(n_0-1)}{2}-1$ aristas. Observemos que:

  $$\frac{n_0\cdot(n_0-1)}{2}-1 > \frac{(n_0-1)\cdot(n_0-2)}{2}$$

  Luego tenemos un grafo que cumple la H.I., entonces es verdadero $P(n_0+1)$.

- ¿Hasta qué grado de nodo podemos remover, tal que siga valiendo la desigualdad de la H.I.? Plantemos la desigualdad. Sea a el grado mayor del nodo que podemos sacar.

  $$\begin{aligned}
  &\frac{n_0\cdot(n_0-1)}{2}-a > \frac{(n_0-1)\cdot(n_0-2)}{2}\\
  &\leftrightarrow \left(\frac{n_0^2}{2}-\frac{n_0}{2}-a\right) > \left(\frac{n_0^2}{2}-\frac{2n_0}{2}-\frac{n_0}{2}+\frac{2}{2}\right)\\
  &\leftrightarrow -\frac{n_0}{2}-a > -\frac{3}{2}n_0+1\\
  &\leftrightarrow n_0-a > 1\\
  &\leftrightarrow n_0-1 > a
  \end{aligned}$$

  Luego podemos sacar nodos de hasta grado n_0-2, y generarnos un Grafo de n_0 vertices que cumpla la desigualdad, haciendo valer la H.I.

- ¿Pero qué pasa si todos los nodos tienen grado $n-1$? ¡Fácil! Si todos los nodos tienen grado $n-1$, entonces el grafo es conexo por definición, ya que es completo (todos están conectados con todos).

Luego vimos que $P(n_0+1)$ vale para todos los casos. Por lo tanto $P(n)$ vale $\forall n \geq 0$.

0.2 b

Sea $G = (V, E)$ un grafo ($|V| = n$) tal que: $|E| \geq 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas. Queremos ver que si tiene esa cantidad de aristas entonces es biconexo.

Sabemos por el inciso (a) que $\forall G'$ si $|E'| > \frac{(n-1)(n-2)}{2} \rightarrow G'$ es conexo.

Q.V.Q: G es biconexo.

Supongamos que G no es biconexo $\rightarrow \exists v \in V$ tal que v es articulación ($G - v$ tiene mas partes conexas que G).

Por la propiedad de (a) sabemos que necesariamente G es conexo ya que:

$$|E| \geq 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Luego se debe cumplir que $G - v$ tiene al menos dos partes conexas o lo que es lo mismo, G no puede ser conexo.

¿Qué grado debe tener v para realizar esto? Sabemos que el grafo $G - v$ tiene $n - 1$ vertices , luego debe cumplir que:

$$|E(G - v)| \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

Ya que de otra forma seria conexo por la propiedad (a).

Veamos ahora si esto es en efecto posible:

$$|E(G - v)| = |E| - d(v) \geq 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d(v) \leq (Q.V.Q) \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$\leftrightarrow 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d(v) \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$\leftrightarrow 2 + \frac{n^2}{2} - n - \frac{n}{2} + 1 - d(v) \leq \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} - n + 3$$

$$\leftrightarrow 3 - \frac{3n}{2} - d(v) \leq -\frac{5n}{2} + 3$$

$$\leftrightarrow 3 + n - d(v) \leq 3$$

$$\leftrightarrow n \leq d(v) \text{ ABS!!!}$$

Ya que el grado de un nodo tiene como cota superior $n - 1$, llegamos a un absurdo. Luego v no puede existir, es decir G no tiene articulación.

Por lo tanto, G es biconexo, probando lo que queríamos demostrar.