Bipartito o Ciclo

Daniel Bustos

May 7, 2024

Sea $G = (V, E)$ con $|V| = n$. Queremos probar que: $\forall v \in V$, $G - v$ es bipartito $\leftrightarrow G$ es bipartito o ciclo impar.

Probemos la ida:

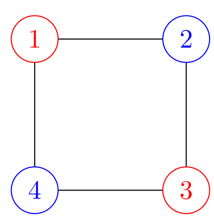
$\forall v \in V$, $G - v$ es bipartito $\rightarrow$ G es bipartito o ciclo impar.

Probémoslo por el contrarrecíproco.

G no es bipartito ni es ciclo impar $\rightarrow \exists v \in V : G - v$ no es bipartito

Supongamos que G no es bipartito ni ciclo impar. Esto nos deja dos casos:

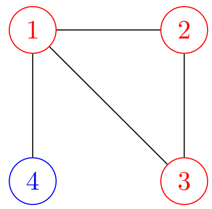
- Si es ciclo par, podemos tomar los vértices impares, y los impares por separado. Dentro de cada uno de estos no hay relaciones, por lo tanto, G es bipartito, lo cual es absurdo porque dijimos que G no lo era. Luego, este caso no puede ocurrir. Por ejemplo:



  Se observa que podemos tomar las biparticiones $\{1, 3\}$ y $\{2, 4\}$ respectivamente.

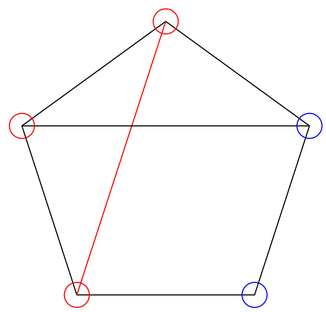
- G no es ciclo: En este caso debemos usar algo un poco mas potente. Usaremos el siguiente teorema :
  Un grafo G no es bipartito $\leftrightarrow \exists$ un ciclo impar en G
  A partir de esto podemos tomar otros dos subscuentes casos

- Ciclo impar con cosas sueltas afuera:



En este caso podemos tomar remover algun vértices de afuera y como claramente nos sigue quedando un ciclo impar, entonces es bipartito por el teorema anterior.

- Ciclo impar sin nada afuera, pero aristas internas extras



Tomemos una arista interna de este grafo. Observemos que a partir de esta podemos definir al menos dos ciclos con las demas vertices de G. Uno del "lado izquierdo" de la arista y otro del "derecho". Veamos que alguno de estos dos ciclos debe ser impar, contando cuantos nodos pueden tener estos dos ciclos:

Sabemos que nuestro grafo tiene $2k+1$(cantidad impar) de nodos, para algún $k \in \mathbb{N}_0$. Después de elegir la arista que nos da nuestras dos particiones, llamemos $C1$ y $C2$ a los ciclos que se nos forman.

La cantidad de vértices, tanto en $C1$ y $C2$, son los vértices de la arista que elegimos más los demas vertices del grafo, que esten en cada lado respectivamente. Llamemos v y w a estos dos vértices, luego la cantidad de vértices en $C1$ y $C2$ es:

$$|V(C1)| = 2 + |C1 - \{v, w\}|, \quad |V(C2)| = 2 + |C2 - \{v, w\}|$$

Por como construimos a C1 y C2 debe cumplirse que la cantidad de vértices en nuestro grafo G es: $|V(G)| = |V(C2)| + |V(C1)| - 2$.
OBS: *debemos restarle 2 , ya que de otra manera estariamos contando los vertices que nos generan nuestra particion de manera repetida*

Como sabemos que $|V(G)|$ es un número impar, necesariamente **uno y solo uno de nuestros dos ciclos debe tener cantidad impar de vértices**. De otro modo G tendría cantidad par de vértices, y dijimos que G es un ciclo impar con aristas adicionales. Por lo tanto, en este caso de grafo, podemos siempre tomar un vértice de nuestra "partición par" de ciclos, y nos sigue quedando un ciclo impar en G, que por el teorema, nos dice que es bipartito.

Habiendo visto que en todos los casos se cumple, queda demostrada la ida

Probemos la vuelta:

G **es bipartito o ciclo impar.** $\rightarrow \forall v \in V$**,** $G - v$ **es bipartito**

- **Si G es ciclo impar** sus aristas son de la forma:

$$\forall 0 < i < n,\ v_i \in V(g) : (v_i, v_{i+1}) \in E(G) \wedge (v_n, v_0) \in E(G)$$

Luego , podemos tomar cualquier vertice y removerlo. Generandonos las biparticiones de los v_i pares, y v_i' y impares, que por ser ciclo G original ciclo impar, necesariamente no estan conectados entre si. Como podemos remover cualquier vertice y esto vale, se cumple lo que queriamos ver.

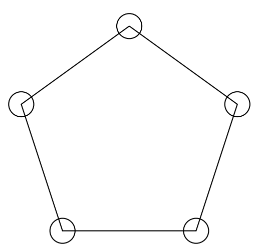


Figure 1: *
Grafo original: Ciclo Impar

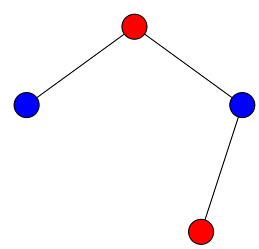


Figure 2: *
Grafo con vertice removido

Veamos ahora el otro caso

- **Si G es bipartito** tenemos nuestras dos biparticiones V1 y V2. Como ningun elemento de V1 o V2 esta relacionado con elementos de su mismo grupo, podemos perfectamente remover cualquier vertice del grafo, y las biparticiones siguen valiendo, ya que removiendo vertices es claro que no apareceran ningunas conexiones nuevas entre ninguno dos vertices, en particular entre ninguno de las biparticiones.

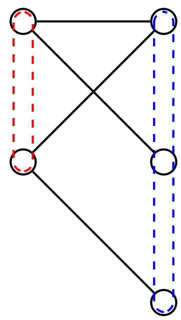


Figure 3: Grafo con nodo menos

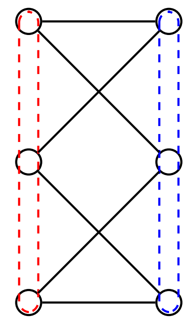


Figure 4: Grafo Bipartito

Habiendo visto que vale en todos los casos, queda probada la vuelta □