Ejercicio 1, S-T eficientes, Daniel Bustos

Dado un digrafo D con pesos $c : E(D) \to \mathbb{N}$ y dos vértices s y t, decimos que una arista $v \to w$ es *st-eficiente* cuando $v \to w$ pertenece a algún camino mínimo de s a t. Sea $d(\cdot, \cdot)$ la función que indica el peso de un camino mínimo entre dos vértices.

a. Demostrar que $v \to w$ es st-eficiente $\leftrightarrow$ $d(s, v) + c(v \to w) + d(w, t) = d(s, t)$

Ida:

Si $v \to w$ es st-eficiente, entonces pertenece a un camino mínimo. Podemos tomar ese camino y reescribir su costo total como:

$$d(s, v) + c(v \to w) + d(w, t) = d(s, t)$$

Vuelta:

Si $d(s, v) + c(v \to w) + d(w, t) = d(s, t)$, luego por definición pertenece a un camino mínimo, ya que la distancia es la misma. Entonces, $v \to w$ es st-eficiente.

b. Algoritmo para encontrar el camino mínimo que no use aristas st-eficientes

Usando el inciso anterior, proponga un algoritmo eficiente que encuentre el mínimo de los caminos entre s y t que no use aristas st-eficientes. Si dicho camino no existe, el algoritmo retorna $\perp$.

Algoritmo:

1. Ejecutamos el algoritmo de Dijkstra con raíz en s . Luego sobre de nuevo con raíz en t sobre el grafo transpuesto.

2. Usando la fórmula anterior, iteramos por todas las aristas y verificamos si son o no st-eficientes dado que los algoritmos previos nos dicen las distancias d(s,v) y d(t,v) para un vertice v cualquiera. Las que no lo son, las incluimos en otro grafo con la misma cantidad de vértices.

3. Ejecutamos Dijkstra sobre este otro grafo, con raíz en s, y retornamos el camino mínimo.

Observemos que este camino podría no existir, ya que tal vez los únicos caminos en el grafo original son mínimos, dejándonos sin aristas no st-eficientes.

Complejidad : $3 * \Theta(m + n * log(n)) \ + 2 * (\ n + \ m) = \Theta(m + n * log(n))$

Ejemplo con gráficos

A continuación, se presentan gráficos para ejemplificar la idea:

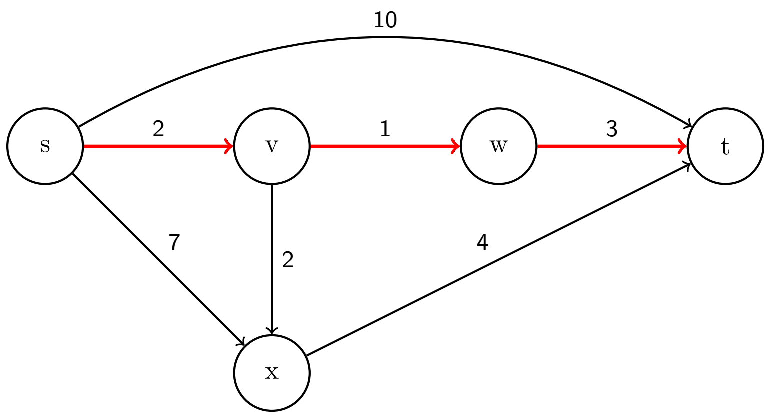

Figure 1: Camino mínimo original (aristas rojas)

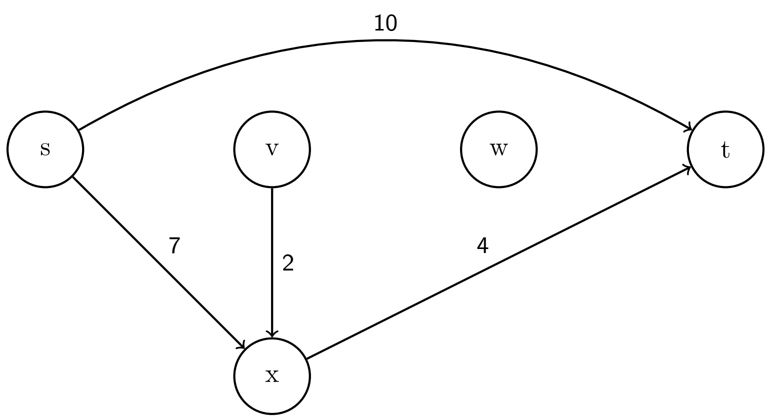

Figure 2: Nuevo grafo sin aristas st-eficientes

En el primer gráfico (1), las aristas rojas representan el camino mínimo original que es st-eficiente. En el segundo gráfico (2), se muestran las aristas del nuevo grafo que no son st-eficientes, y sobre el cual se debe ejecutar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino mínimo.