6. Peso multiplicativo, Daniel Bustos

En muchas aplicaciones se necesita encontrar caminos de peso multiplicativo mínimo en un digrafo D pesado con una función positiva $c : E(G) \to \mathbb{R}^{>1}$. Formalmente, el peso multiplicativo de un camino $v_1, \ldots, v_k$ es la multiplicatoria de los pesos de sus aristas. Este tipo de caminos se buscan, por ejemplo, cuando los pesos de las aristas representan probabilidades de eventos independientes y se quiere encontrar una sucesión de eventos con probabilidad máxima/mínima. Modelar el problema de camino de peso multiplicativo mínimo como un problema de camino mínimo. Demostrar que el algoritmo es correcto. **Ayuda:** transformar el peso de cada arista usando una operación conocida que sea creciente y transforme cualquier multiplicatoria en una sumatoria

Idea del algoritmo:

Como lo que queremos buscar es minimizar el producto de los pesos, que son todos mayores a 1, podemos utilizar la función logaritmo sin problemas, ya que su dominio esta definido en el $(1, +\infty)$. Este cumple que $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$, lo que nos permite tomar los pesos como su valor logarítmico para alguna base que elijamos (en este caso base 10), y utilizar el algoritmo de Dijkstra normal sobre estos pesos. Luego, como sabemos que el logaritmo es biyectivo en $\mathbb{R}^{>1} \to \mathbb{R} > 0$, tenemos una función inversa para recuperar los valores que buscamos sobre este dominio y obtener asi el menor peso multiplicativo para cualquier vertice de nuestro grafo. En este caso, esta sería 10^x.

Demostración:

Sea $v_{\min}$ el mínimo peso multiplicativo de un camino dado desde v_1 hasta v_k, y $v_1, v_2, \ldots, v_k$ un camino cualquiera desde v_1 hasta v_k.

$$v_{\min} \leq \prod_{i=1}^{k} v_i$$

$$\leftrightarrow \textit{(el logaritmo es creciente, v's todos postivos)} \ \log(v_{\min}) \leq \log\left(\prod_{i=1}^{k} v_i\right)$$

$$\leftrightarrow \log(v_{\min}) \leq \log(v_1) + \log(v_2) + \ldots + \log(v_k) = \sum_{i=1}^{k} \log(v_i)$$

Y el algoritmo de Dijkstra nos obtiene el camino mínimo si modelamos el grafo con sus pesos logarítmicos. Luego podemos fácilmente obtener $v_{\min}$ ya que $10^{\log(v_{\min})} = v_{\min}$.