Árbol Maximin es Arbol Generador Maximo

Daniel Bustos

May 27, 2024

Demostrar que T es un árbol maximin de $G \leftrightarrow T$ es un árbol generador máximo de G. Concluir que todo grafo conexo G tiene un árbol maximin que puede ser computado con cualquier algoritmo para computar árboles generadores máximos.

T es un árbol maximin de $G \implies T$ es un AGMax

Sabemos que $\text{bwd}_T(v, w) = \text{bwd}_G(v, w) \ \forall \ v, w \in V(G)$, con $\text{bwd}(v, w)$ el máximo mínimo peso entre todos los posibles caminos dentro del grafo entre v y w.

Q.V.Q. T es AGMax, es decir, la suma de sus pesos es máxima y genera a G.

Sea T' el AGMax que tenga más aristas en común con T. Por ser T y T' árboles, ambos tienen $n - 1$ aristas.

Sea vw una arista en T que no está en T' y llamemos P al único camino que conecta a v y w en T. Sea xy la arista de menor peso en P.

Sabemos que por ser maximin, todo camino tiene necesariamente menor o igual valor mínimo entre todo par de vértices. Consideremos el árbol $T' - xy$, que necesariamente tiene dos partes conexas. Si ahora le agregamos la arista vw, volvemos a formar un árbol conexo, ya que esta arista nos une dos elementos en particiones distintas, y tenemos nuevamente $n - 1$ aristas. Miremos el costo de $T' - \{xy\} \cup \{vw\}$. Ahora vale que:

$$c(T') - c(xy) + c(vw) \leq c(T') \leftrightarrow c(vw) \leq c(xy)$$

Consideremos ahora los dos casos:

- Si $c(vw) < c(xy)$: Tenemos un absurdo, ya que xy es la arista de menor peso en el camino que conecta a v y w en T. Como vw era parte de un camino en un árbol maximin, tenemos que necesariamente $c(xy) < c(vw)$.
- Si $c(vw) = c(xy)$: Entonces tenemos que este nuevo árbol $T' - \{xy\} \cup \{vw\}$ es AGMmax, pero esto es absurdo ya que comparte más aristas con T que T' y es AGMmax. Luego el absurdo provino de suponer que existía una arista distinta, dándonos que T es AGMax por ser minimax.