

# Bipartito o Ciclo

Daniel Bustos

May 7, 2024

Sea  $G = (V, E)$  con  $|V| = n$ . Queremos probar que:  $\forall v \in V, G - v$  es bipartito  $\leftrightarrow G$  es bipartito o ciclo impar.

Probemos la ida:

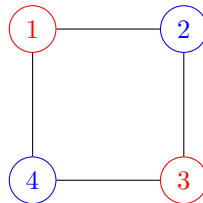
$\forall v \in V, G - v$  es **bipartito**  $\rightarrow G$  es **bipartito o ciclo impar**.

Probémoslo por el contrarrecíproco.

$G$  **no es bipartito ni es ciclo impar**  $\rightarrow \exists v \in V : G - v$  **no es bipartito**

Supongamos que  $G$  no es bipartito ni ciclo impar. Esto nos deja dos casos:

- Si es ciclo par, podemos tomar los vértices impares, y los impares por separado. Dentro de cada uno de estos no hay relaciones, por lo tanto,  $G$  es bipartito, lo cual es absurdo porque dijimos que  $G$  no lo era. Luego, este caso no puede ocurrir. Por ejemplo:



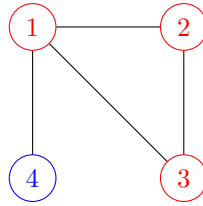
Se observa que podemos tomar las biparticiones  $\{1, 3\}$  y  $\{2, 4\}$  respectivamente.

- $G$  no es ciclo: En este caso debemos usar algo un poco más potente. Usaremos el siguiente teorema :

**Un grafo  $G$  no es bipartito  $\leftrightarrow \exists$  un ciclo impar en  $G$**

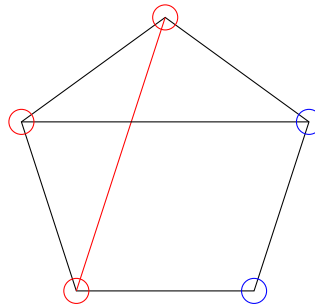
A partir de esto podemos tomar otros dos subsecuentes casos

- Ciclo impar con cosas sueltas afuera:



En este caso podemos tomar remover algun vértices de afuera y como claramente nos sigue quedando un ciclo impar, entonces es bipartito por el teorema anterior.

- Ciclo impar sin nada afuera, pero aristas internas extras



Tomemos una arista interna de este grafo. Observemos que a partir de esta podemos definir al menos dos ciclos con las demas vertices de  $G$ . Uno del "lado izquierdo" de la arista y otro del "derecho". Veamos que alguno de estos dos ciclos debe ser impar, contando cuantos nodos pueden tener estos dos ciclos:

Sabemos que nuestro grafo tiene  $2k + 1$ (cantidad impar) de nodos, para algún  $k \in \mathbb{N}_0$ . Después de elegir la arista que nos da nuestras dos particiones, llamemos  $C1$  y  $C2$  a los ciclos que se nos forman.

La cantidad de vértices, tanto en  $C1$  y  $C2$ , son los vértices de la arista que elegimos más los demas vertices del grafo, que esten en cada lado respectivamente. Llamemos  $v$  y  $w$  a estos dos vértices, luego la cantidad de vértices en  $C1$  y  $C2$  es:

$$|V(C1)| = 2 + |C1 - \{v, w\}|, \quad |V(C2)| = 2 + |C2 - \{v, w\}|$$

Por como construimos a  $C1$  y  $C2$  debe cumplirse que la cantidad de vértices en nuestro grafo  $G$  es:  $|V(G)| = |V(C2)| + |V(C1)| - 2$ .

**OBS:** debemos restarle 2, ya que de otra manera estaríamos contando los vertices que nos generan nuestra particion de manera repetida

Como sabemos que  $|V(G)|$  es un número impar, necesariamente **uno y solo uno de nuestros dos ciclos debe tener cantidad impar de vértices**. De otro modo  $G$  tendría cantidad par de vértices, y dijimos que  $G$  es un ciclo impar con aristas adicionales. Por lo tanto, en este caso de grafo, podemos siempre tomar un vértice de nuestra "partición par" de ciclos, y nos sigue quedando un ciclo impar en  $G$ , que por el teorema, nos dice que es bipartito.

Habiendo visto que en todos los casos se cumple, queda demostrada la ida  
 Probemos la vuelta:

**$G$  es bipartito o ciclo impar.  $\rightarrow \forall v \in V, G - v$  es bipartito**

- Si  $G$  es ciclo impar sus aristas son de la forma:

$$\forall 0 < i < n, v_i \in V(g) : (v_i, v_{i+1}) \in E(G) \wedge (v_n, v_0) \in E(G)$$

Luego , podemos tomar cualquier vertice y removerlo. Generandonos las biparticiones de los  $v_i$  pares, y  $v'_i$  y impares, que por ser ciclo  $G$  original ciclo impar, necesariamente no estan conectados entre si. Como podemos remover cualquier vertice y esto vale, se cumple lo que queriamos ver.

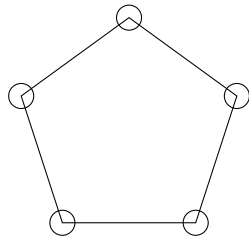


Figure 1: \*  
 Grafo original: Ciclo Impar

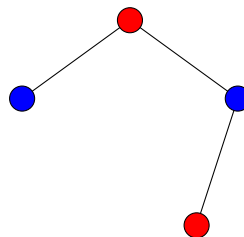


Figure 2: \*  
 Grafo con vertice removido

Veamos ahora el otro caso

- **Si  $G$  es bipartito** tenemos nuestras dos biparticiones  $V_1$  y  $V_2$ . Como ningun elemento de  $V_1$  o  $V_2$  esta relacionado con elementos de su mismo grupo, podemos perfectamente remover cualquier vertice del grafo, y las biparticiones siguen valiendo, ya que removiendo vertices es claro que no apareceran ningunas conexiones nuevas entre ninguno dos vertices, en particular entre ninguno de las biparticiones.

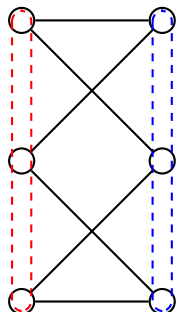


Figure 3: Grafo Bipartito

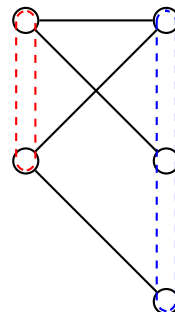


Figure 4: Grafo con un nodo menos

Habiendo visto que vale en todos los casos, queda probada la vuelta  $\square$