

## 0.1 a)

Sea  $G = (V, E)$  un grafo, con  $|V| = n$ .

Sea  $P(n) :=$  Si un grafo tiene más de  $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$  aristas  $\rightarrow$  es conexo.

**Caso Base:**  $P(1)$  = Tenemos 1 vértice, con 0 aristas: Se falsea el antecedente, luego  $P(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo: H.I:** Supongamos que existe un  $n_0$  tal que para todo Grafo con  $n_0$  vértices que tenga más de  $\frac{(n_0-1) \cdot (n_0-2)}{2}$  aristas  $\rightarrow$  es conexo.

**Q.V.Q:**  $P(n_0) \rightarrow P(n_0 + 1)$

Tenemos un grafo  $G$  con  $n_0 + 1$  vértices, queremos probar que si tiene más de  $\frac{n_0 \cdot (n_0 - 1)}{2}$  aristas  $\rightarrow$  es conexo.

- Si tiene menor o igual a la cantidad de aristas pedida, entonces se falsea el antecedente, haciendo verdadera a la propiedad:
- Si hay un nodo  $v$  de a lo sumo grado 1, podemos considerar el grafo  $G - v$ .  $G - v$  tiene  $n_0$  nodos y  $\frac{n_0 \cdot (n_0 - 1)}{2} - 1$  aristas. Observemos que:

$$\frac{n_0 \cdot (n_0 - 1)}{2} - 1 > \frac{(n_0 - 1) \cdot (n_0 - 2)}{2}$$

Luego tenemos un grafo que cumple la H.I., entonces es verdadero  $P(n_0 + 1)$ .

- ¿Hasta qué grado de nodo podemos remover, tal que siga valiendo la desigualdad de la H.I.? Plantemos la desigualdad. Sea  $a$  el grado mayor del nodo que podemos sacar.

$$\begin{aligned} \frac{n_0 \cdot (n_0 - 1)}{2} - a &> \frac{(n_0 - 1) \cdot (n_0 - 2)}{2} \\ \Leftrightarrow \left( \frac{n_0^2}{2} - \frac{n_0}{2} - a \right) &> \left( \frac{n_0^2}{2} - \frac{2n_0}{2} - \frac{n_0}{2} + \frac{2}{2} \right) \\ \Leftrightarrow -\frac{n_0}{2} - a &> -\frac{3}{2}n_0 + 1 \\ \Leftrightarrow n_0 - a &> 1 \\ \Leftrightarrow n_0 - 1 &> a \end{aligned}$$

Luego podemos sacar nodos de hasta grado  $n_0 - 2$ , y generarnos un Grafo de  $n_0$  vertices que cumpla la desigualdad, haciendo valer la H.I.

- ¿Pero qué pasa si todos los nodos tienen grado  $n - 1$ ? ¡Fácil! Si todos los nodos tienen grado  $n - 1$ , entonces el grafo es conexo por definición, ya que es completo (todos están conectados con todos).

Luego vimos que  $P(n_0 + 1)$  vale para todos los casos. Por lo tanto  $P(n)$  vale  $\forall n \geq 0$ .

## 0.2 b)

Sea  $G = (V, E)$  un grafo ( $|V| = n$ ) tal que:  $|E| \geq 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  aristas. Queremos ver que si tiene esa cantidad de aristas entonces es biconexo.

Sabemos por el inciso (a) que  $\forall G'$  si  $|E'| > \frac{(n-1)(n-2)}{2} \rightarrow G'$  es conexo.

**Q.V.Q:**  $G$  es biconexo.

Supongamos que  $G$  no es biconexo  $\rightarrow \exists v \in V$  tal que  $v$  es articulación ( $G - v$  tiene mas partes conexas que  $G$ ).

Por la propiedad de (a) sabemos que necesariamente  $G$  es conexo ya que:

$$|E| \geq 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Luego se debe cumplir que  $G - v$  tiene al menos dos partes conexas o lo que es lo mismo,  $G - v$  no puede ser conexo.

¿Qué grado debe tener  $v$  para que se cumpla esto? Sabemos que el grafo  $G - v$  tiene  $n - 1$  vertices, luego debe cumplir que:

$$|E(G - v)| \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

Ya que de otra forma seria conexo por la propiedad (a).

Veamos ahora si esto es en efecto posible:

$$\begin{aligned} |E(G - v)| &= |E| - d(v) \geq 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d(v) \leq (Q.V.Q) \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d(v) \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 + \frac{n^2}{2} - n - \frac{n}{2} + 1 - d(v) \leq \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} - n + 3 \\ &\Leftrightarrow 3 - \frac{3n}{2} - d(v) \leq -\frac{5n}{2} + 3 \\ &\Leftrightarrow 3 + n - d(v) \leq 3 \\ &\Leftrightarrow n \leq d(v) \text{ ABS!!!} \end{aligned}$$

Ya que el grado de un nodo tiene como cota superior  $n - 1$ , llegamos a un absurdo. Luego  $v$  no puede existir, es decir  $G$  no tiene articulación.

Por lo tanto,  $G$  es biconexo, probando lo que queríamos demostrar.

### 0.3 c)

Probemos que es imposible por contraejemplo:

**1er caso)** sea  $c(n) < 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  tal que  $\forall G$  grafos con  $n \geq n_0$  que tenga al menos  $c(n)$  aristas sea conexo. Sabemos que  $c(n)$  debe ser :  $c(n) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Si  $n = 3$ :  $c(3) \leq 1$ . Pero podemos dibujar el grafo:

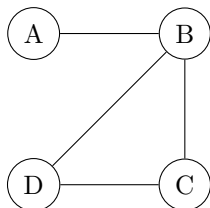


que tiene una arista, sin embargo claramente no es conexo. Luego  $c(n)$  no puede existir

**2do caso)** sea  $c(n) < 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  tal que  $\forall G$  grafos con  $n \geq n_0$  que tenga al menos  $c(n)$  aristas sea biconexo.

Sabemos que  $c(n)$  debe ser :  $c(n) \leq 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Si  $n = 3$ :  $c(3) \leq 4$  pero podemos dibujar el grafo:



que claramente es conexo, pero B es un vértice de articulación, luego no es biconexo.