Sistemas de Restricciones de Diferencias

Daniel Bustos

8. Sistema de Restricciones de Diferencias

Un sistema de restricciones de diferencias (SRD) es un sistema S que tiene m inecuaciones y n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. Cada inecuación es de la forma $x_i - x_j \leq c_{ij}$ para una constante $c_{ij} \in \mathbb{R}$; por cada par i, j existe a lo sumo una inecuación (¿por qué?). Para cada SRD S se puede definir un digrafo pesado $D(S)$ que tiene un vértice v_i por cada incógnita x_i de forma tal que $v_j \to v_i$ es una arista de peso c_{ij} cuando $x_i - x_j \leq c_{ij}$ es una inecuación de S. Asimismo, S tiene un vértice v_0 y una arista $v_0 \to v_i$ de peso 0 para todo $1 \leq i \leq n$.

Antes de resolver, hagamos una pequeña observación:

Existe a lo sumo una ecuación $x_i - x_j \leq c_{ij}$, ya que si hubiese más de una, podríamos tomar aquella más "fuerte".

Por ejemplo:

$$(1) \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$$

En (1) como $x_1 - x_2 \leq 4 \implies x_1 - x_2 \leq 5$, podemos borrar la primera ecuación y el sistema es equivalente.

a Demostrar que si $D(S)$ tiene un ciclo de peso negativo, entonces S no tiene solución.

Realizar un ciclo en nuestro digrafo asociado, es equivalente a sumar todos los distintos terminos de nuestro sistema de ecuaciones Sea $C = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ nuestro ciclo, observemos que la primera arista equivale a: $x_2 - x_1$, luego sumarle la segunda arista equivale a

$$x_1 - x_2 + x_2 - x_3 = x_1 - x_3.$$

Los términos subsiguientes se van cancelando entre sí (salvo el x_1) hasta llegar al último, donde nos queda la ecuación $x_1 - x_1 = 0$. Como toda esta suma debe ser menor o igual a la suma de todos los pesos asociados, si tenemos que $\sum(C) < 0 \implies 0 \leq \sum(C)$ lo cual es absurdo, ya que un número negativo no puede ser mayor o igual a 0. Luego, si hay un ciclo negativo, el sistema no tiene solución, ya que es incompatible.

b.

Demostrar que si $D(S)$ no tiene ciclos de peso negativo, entonces $\{x_i = d(v_0, v_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ es una solución de $D(S)$. Acá $d(v_0, v_i)$ es la distancia desde v_0 a v_i en $D(S)$.

Veamos que es una solución. Sabemos que las distancias desde v_0 hacia los demás deben satisfacer lo siguiente: sea $(v_i, v_j) \in E$

$$d(v_0, v_j) \leq d(v_0, v_i) + w(v_i, v_j)$$

O lo que es equivalente:

$$d(v_0, v_j) - d(v_0, v_i) \leq w(v_i, v_j)$$

Como esto vale para dos vértices adyacentes cualesquiera, entonces lo planteado en la consigna es solución de nuestro sistema.

c.

A partir de los incisos anteriores, proponer un algoritmo que permita resolver cualquier SRD. En caso de no existir solución, el algoritmo debe mostrar un conjunto de inecuaciones contradictorias entre sí.

Podemos usar el algoritmo de bellman-ford para obtener las distancias en nuestro grafo. Ademas si hubiese un ciclo negativo, belman nos lo devuevle, y podemos a partir de los vertices que forman parte de el, reconstruir las inecuaciones contradictorias. Complejidad : $\Theta(n * m)$