

Equilibrio Digrafo

Daniel Bustos

27/4/2024

Sea $D = (E, V)$ un grafo.
Queremos probar que

$$\sum_{v \in V} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V} d_{\text{out}}(v) = |E(D)|.$$

Probemos por inducción. Sea $P(n)$ la propiedad anterior con $n = |E(D)|$.
Caso base: $|E(D)| = 0$. Como no hay aristas, vale la propiedad:

$$\sum_{v \in V} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V} d_{\text{out}}(v) = |E(D)| = 0.$$

Paso inductivo: Hipótesis Inductiva (H.I): Vale que si $|E(D)| \leq n_0$, entonces vale $P(n)$.

Si $|E(D)| = n_0 + 1$, podemos tomar una arista cualquiera, sacársela y llamemos D' al grafo resultante. Luego $|E(D')| = n_0$. Por lo tanto, vale la H.I:

$$\sum_{v \in V} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V} d_{\text{out}}(v) = |E(D')|.$$

Observemos que al ser un grafo dirigido, sacar una arista implica restar uno a la suma de los grados de entrada y restar uno a la de salida, luego vale que:

$$\sum_{v \in V} d_{\text{in}}(v) + 1 = \sum_{v \in V} d_{\text{out}}(v) + 1 = |E(D')| + 1 = |E(D)|.$$

Que era lo que queríamos ver, luego $P(n)$ vale para todo $n \geq 0$.