Problemas de modelado II: asignación

6. En el pueblo de Asignasonia las fiestas de casamiento son muy peculiares y extrañamente frecuentes. Las invitaciones a la fiesta nunca son personales sino familiares: cada persona invitada asiste siempre con todos sus familiares solteros, a quienes se les reservan mesas especiales de solteros. Además, hay una regla no escrita que establece un límite c_{ij} a la cantidad de solteros de la familia i que pueden sentarse en la mesa j. Esta forma de festejar es la que, aparentemente, aumenta la cantidad de casamientos futuros. Desafortunadamente, el esfuerzo que implica mantener viva esta tradición está llevando a que varias parejas eviten el compromiso marital. Es por esto que la intendencia de Asignasonia requiere un algoritmo que resuelva el problema de asignación de los solteros a sus mesas.

   a) Proponer un modelo de flujo que, dados los conjuntos $F = \{f_1, \dots, f_{|F|}\}$, $M = \{m_1, \dots, m_{|M|}\}$ y $C = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq |F|, 1 \leq j \leq |M|\}$, determine una asignación que respete las tradiciones sabiendo que:

      - La familia i está formada por f_i personas solteras.
      - La mesa j tiene m_j lugares disponibles para solteros.
      - En la mesa j solo pueden sentarse c_{ij} solteros de la familia i.

   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

   c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

Definimos una red de flujo, con fuente s y sumidero t. Conectamos a todos los familiares f_i con todas las mesas m_j con capacidad c_{ij}. Conectamos la fuente s con todas las familias con capacidad f_i respectivamente. Luego conectamos todas las mesas al sumidero t con capacidad m_j respectivamente.

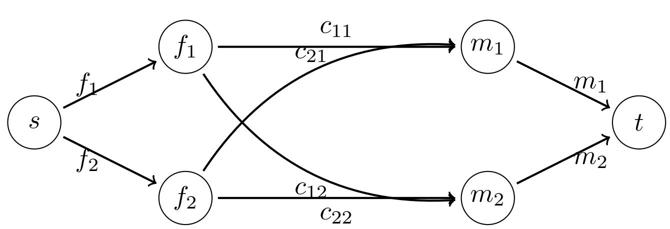

Figure 1: Modelo de Red con 2 familias y 2 mesas

Dado un flujo máximo, el flujo entrante a cada mesa representa la cantidad de personas que se van a sentar ahí. En particular, viendo de donde vienen podemos saber de qué familia es. Para que todos se puedan sentar debería ocurrir que las aristas que van de la fuente a las familias deben estar saturadas.

Complejidad Edmonds-Karp: $O(nm^2)$.
Hay $\Theta(\binom{|F|+|M|}{2} + |F| + |M|) = \Theta(F^2 + FM + M)$ aristas.
Vertices: $\Theta(|F| + |M| + 2)$.
Entonces, la complejidad final es de $O((|F| + |M| + 2) \cdot (F^2 + FM + M)^2)$.