Interseccion Maxima

Daniel Bustos

30/04/2024

Sea $G = (E, V)$ un grafo conexo. Queremos ver que todo par de caminos simples de longitud máxima de G tienen un vértice en común.

Supongamos dos caminos $P = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ y $Q = w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ de misma longitud tal que todos sus vértices son distintos entre sí.

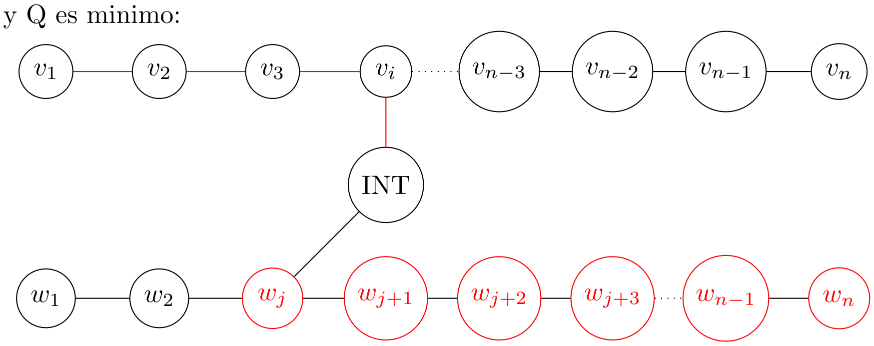
Supongamos que $|P| = |Q|$ con esta siendo la longitud máxima posible de camino simple en G.

Observemos que como G es conexo, se cumple que debe existir un camino entre todos los vértices. Este no necesariamente es simple. Pero podemos arreglar esto más adelante.

Tomemos el camino C, que va desde v_1 hasta w_n, este es de la forma

$$C = v_1, \ldots, v_i, \ldots, w_j, \ldots, w_n$$

LLamemos INT a los nodos intermedios , supongamos que este camino entre P y Q es minimo:



¿Cuánto mide C? Llamemos a #INT la cantidad de vértices intermedios, que pueden ser 1 o más. Entonces, usando que $|P| = |Q| = n$:

Ya que la longitud de los caminos es la misma, podemos sin perdida de generalidad plantear que si w_j , esta antes de la mitad($w_{n/2}$), decir que en C estan incluidos $w_j, w_{j+1}, w_{j+2}, ...w_n$. Analogamente si w_{j-2} esta por detras de la mitad, podemos decir que en C estan incluidos los vertices $w_1, w_2, w_3, ..w_j$. Es claro que este mismo argumento puede hacerse para v_i

Por lo tanto, podemos siempre agarrar las mitades mas grandes de P y Q respectivamente sin importar cuales son los puntos de conexion en cada camino.

Llamemos ParteP y ParteQ a las respectivas partes de estos camino incluidas en C. Sabiendo que$|P| = |Q| = n$ la longitud de C debe ser siempre estrictamente mayor a :

$$|C| = |ParteP| + |ParteQ| + \#INT \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \#INT = n + \#INT$$

Entonces $|C| > n = |P| = |Q|$ ya que $\#INT > 0$

Observemos que $\#INT > 0$, ya que de otro modo C seria tambien camino maximo de longitud n, compartiendo vertices con P y Q. Pero planteamos antes que esto no podria ocurrir. Por lo tanto necesariamente $\#INT > 0$

¿Es C simple? Si! P y Q no tienen elementos en común y cualquier elemento intermedio no pertenece a ninguno de los dos: Ademas dentro de INT no hay repetidos, ya que dijimos que INT es minimo. Entonces es simple.

Observemos que construimos un nuevo camino mayor a P y Q simple, pero P y Q eran máximos. ¡Absurdo!

Por lo tanto, el absurdo provino de suponer que P y Q eran los caminos de longitud maxima. Así que vale lo que queríamos probar.