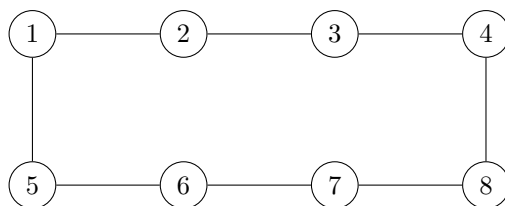


Sea  $G = (E, V)$  un grafo, con  $P$  y  $Q$  dos caminos distintos que nos llevan de  $v$  a  $w$ . Los notamos:

$$P = v_0, \dots, v_p \quad \text{y} \quad Q = w_0, \dots, w_q \quad \text{con} \quad v_0 = w_0 = v \quad \text{y} \quad v_p = w_q = w$$

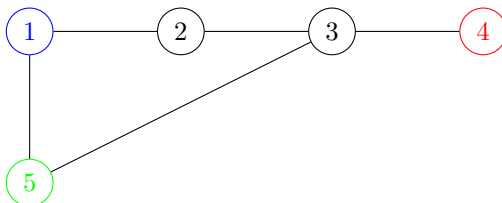
Observemos:

1. Si  $P$  y  $Q$  no comparten ningún vértice intermedio, entonces podemos generar un ciclo que va desde  $v$  hasta  $w$  por  $Q$ . Luego desde  $w$ , podemos volver a  $v$  a través de  $P$ , generándonos un ciclo. Por ejemplo:



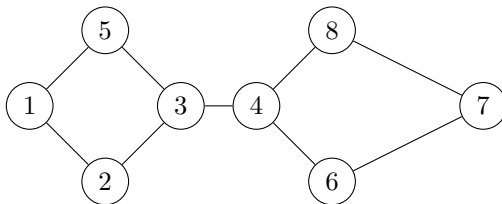
Aquí,  $P = 1, 2, 3, 4$  y  $Q = 1, 5, 6, 7, 8$ .

2. Si  $P$  y  $Q$  comparten algún vértice intermedio, tenemos dos casos:
  - (a) Si solo comparten un vértice intermedio, podemos generar el ciclo desde  $v_0$  hasta  $x$  y luego desde  $x$  hasta  $w$ . Generándonos así un ciclo. Por ejemplo:



Aquí,  $P = 1, 2, 3, 4$  y  $Q = 1, 5, 3, 4$ .

- (b) Si comparten más de un vértice intermedio, podemos tomar dos  $x$  y  $x'$  y generar un ciclo entre ellos. Por ejemplo:



Aquí,  $P = 1, 2, 3, 4, 8, 7$  y  $Q = 1, 5, 3, 4, 6, 7$ .

Ahora la demostración:

Sea  $G = (E, V)$  un grafo, con  $P$  y  $Q$  dos caminos distintos que nos llevan de  $v$  a  $w$ , tal que  $G$  no tenga ningún ciclo que contenga vértices de  $P$  o  $Q$ .

Los notamos:

$$P = v_0, \dots, v_p \quad \text{y} \quad Q = w_0, \dots, w_q \quad \text{con} \quad v_0 = w_0 = v \quad \text{y} \quad v_p = w_q = w$$

Como  $P$  y  $Q$  son distintos, deben tener al menos un vértice distinto, formalmente:

$$\exists v \in P \wedge v \notin Q \quad \vee \quad \exists v \in Q \wedge v \notin P$$

Supongamos que ningún vértice de  $P$  o  $Q$  pertenece al ciclo, entonces debe existir al menos un vértice  $v'$  distinto del origen y el final ( $v' \neq v_0 \neq w_0$  y  $v' \neq v_p \neq w_q$ ) que pertenezca tanto a  $P$  como a  $Q$  (de otra forma  $P$  y  $Q$  formarían un ciclo). Llamémoslo  $v'$  que cumple  $v' \in P \wedge v' \in Q$ .

Ahora podemos definir  $P' = (v', v'_1, \dots, v_p)$  y  $Q' = (v', w'_1, \dots, w'_q)$ . Claramente  $P' \subseteq P$  y  $Q' \subseteq Q$ .

¿Y ahora? Si los caminos son del todo distintos, entonces tenemos ya nuestro ciclo, pero como dijimos que  $G$  no contiene un ciclo con elementos de  $P$  y  $Q$ , podemos repetir la operación anterior. Es decir, debe existir un elemento  $v''$  que  $P'$  y  $Q'$  compartan, distinto del principio y el final, y repetimos.

¿Hasta cuántas veces podremos hacer esto? La cantidad máxima es  $\min(|P|, |Q|)$ , dado que (por hipótesis) ningún ciclo se puede formar con elementos de  $P$  y  $Q$ , entonces la única manera que esto se cumpla cada vez, es que  $P$  sea igual a  $Q$ ; pero esto es absurdo, ya que dijimos que  $P$  es distinto de  $Q$  por al menos un vértice.

Luego, dados  $P$  y  $Q$  en  $G$ , que cumplan todo lo pedido, debe existir un ciclo con elementos de  $P$  o elementos de  $Q$ .