UNISAT
Licence 1 / Groupe D
Semestre 1

Année 2017-2018
Maths - Info
Eco - Stat

Devoir surveillé d'Analyse 1

Durée : 02 heures

EXERCICE 1.

1. Montrer que $\forall (a,\ b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \dfrac{a^2}{a+b} \geq \dfrac{3a-b}{4}$.
2. En déduire que $\forall (a,\ b,\ c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ \dfrac{a^2}{a+b} + \dfrac{b^2}{b+c} + \dfrac{c^2}{c+a} \geq \dfrac{a+b+c}{2}$.

EXERCICE 2.
Montrer que pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n on a :

1. $E(x+1) = E(x) + 1$.
2. $E(x+n) = E(x) + n$.

EXERCICE 3.
Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On définit

$$-A = \{-a \mid a \in A\}.$$

Montrer que :

1. $-A$ est non vide et minorée.
2. $\inf(-A) = -\sup A$.
3. $A \cup B$ est non vide et minorée.
4. $\inf(A \cup B) = \inf\{\inf A,\ \inf B\}$.

EXERCICE 4.
Soit f la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Déterminer l'ensemble de définition de f.

EXERCICE 5.
Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$