Université Félix Houphouët Boigny
UFR-MI
Licence 1 : Miage-GI
Année académique $2020 - 2021$

Corrigé du Devoir de Strutures algébriques :
($1h30$)

<u>Exercice 1</u> : (10-points).

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pour chacun des cas suivants, construire sur E

1. **une l.c.i(loi de composition interne) commutative, admettant 4 comme élément neutre. On a :**

$*$	1	2	3	4	5
1	1	2	2	1	3
2	2	3	5	2	5
3	2	5	5	3	4
4	1	2	3	4	5
5	3	5	4	5	3

2. **une l.c.i non commutative, admettant 2 comme élément neutre.**

$*$	1	2	3	4	5
1	1	1	2	1	4
2	1	2	3	4	5
3	2	3	5	3	4
4	1	4	3	4	5
5	3	5	4	5	3

3. **une l.c.i commutative, non associative, admettant 3 comme élément neutre.**

$*$	1	2	3	4	5
1	1	2	1	1	3
2	2	3	2	2	5
3	1	2	3	4	5
4	1	2	4	4	5
5	3	5	5	5	3

On a $(5 * 1) * 4 = 3 * 4 = 4$, alors que $5 * (1 * 4) = 5 * 1 = 3$. La loi $*$ n'est donc pas associative.

4. **Une l.c.i commutative, associative, admettant 1 comme élément neutre, et telle que chaque élément admette un symétrique.**

$*$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	1
3	3	4	5	1	2
4	4	5	1	2	3
5	5	1	2	3	4

<u>Exercice 2</u> : (10-points).

On considère l'anneau quotient $A = \dfrac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ et $A[X]$, l'anneau des polynômes à coefficients dans A.

1. **Ecrire les tables de l'addition et de la multiplication de l'anneau quotient A.**

$+$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$

,

$\times$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

2. **Effectuer dans $A[X]$, la division euclidienne de**
   $P(X) = X^5 + \dot{2}X^4 + \dot{3}X^3 + \dot{4}X + \dot{1}$ **par** $Q(X) = \dot{4}X^3 + X^2 + X + \dot{4}$.
   On a
   $$P(X) = (\dot{4}X^2 + \dot{2}X + \dot{3})Q(X) + \dot{4}X^2 + \dot{3}X + \dot{4}$$

3. **Effectuer dans $A[X]$, si possible, la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3, de**
   $P(X) = X^5 + \dot{2}X^4 + \dot{3}X^3 + \dot{4}X + \dot{1}$ **par** $Q(X) = \dot{4}X^3 + X^2 + X + \dot{4}$.
   On a :
   $$P(X) = (\dot{4} + \dot{4}X^2)Q(X) + X^3(\dot{3} + \dot{3}X)$$