Université F.H.B. **Année : 2021-2022**
MATHS-INFO/MIAGE

Examen Espaces vectoriels
& Applications linéaires
L1
$1^{ère}$ session
1h 30'.

EXERCICE 1

Pour chaque affirmation suivante, répondre par **VRAI** ou **FAUX**

NB : Un bonus de **+0,25** est accordé pour une réponse justifiée

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;

2. Une base de $F = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ est $\{(1, 0, 0)\,;(1, 0, 1)\}$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ est une application linéaire ;

4. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x)$ est une application linéaire.

5. Moyennant la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée, il y a une infinité de matrices associée à l'endomorphisme identité $id_{\mathbb{R}^3}$ de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 2

$$(\sum) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{cases},\ \forall\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Les variables $x_1,\ x_2,\ x_3$ sont ordonnées naturellement. Trianguler le système d'équations $(\sum)$ à l'aide de l'algorithme de Gauss. Quelles sont les variables libres de ce système ?

2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ constitué par les solutions du système $(\sum)$. Résoudre le système $(\sum)$ et donner une base de F.

3. Soient $v_1 = (1; 1; 1)$, $v_2 = (-1; 2; 1)$, et $v_3 = (1; 0; 3)$. On désigne par $G =< v_1, v_2, v_3 >$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2, v_3. Donner une base de G.

4. On considère l'application linèaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a. Déterminer $f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3)$ les images respectives de e_1, e_2, e_3, de la base canonique β de $\mathbb{R}^3$ en fonction des éléments de β.

b. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ l'image de f.

c. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Posons $(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$.
Préciser l'expression de (y_1, y_2, y_3) à l'aide de (x_1, x_2, x_3).

d. Déterminer une base de $\ker(f)$ le noyau de f.

e. Déterminer l'intersection de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

f. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$? Justifier.

Proposition de résolution
Examen Espaces vectoriels
& Applications linéaires
L1
$1^{ère}$ session(2021-2022)

EXERCICE 1

1. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; **VRAI**,
car $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=0\}=\{(0,y,z);y,z\in\mathbb{R}\}=<(0,1,0);(0,0,1)>\subset\mathbb{R}^3$
alors E est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Une base de $F=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\}$ est $\{(1,0,0);(1,0,1)\}$ FAUX
car $(1,0,1)\notin F$.

3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(x+y,xy)$ est une application linéaire ; **FAUX**,
car xy n'est pas une combinaison linéaire des coordonnées x et y.

4. $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,(x,y)\mapsto(x+y,x-y,2x)$ est une application linéaire. **VRAI**,
$g(x,y)=(x+y,x-y,2x)$ on a bien que les expressions $x+y,x-y$, et $2x$ sont combinaisons linéaires des coordonnées x et y.

5. Moyennant la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée, il y a une infinité de matrices associée à l'endomorphisme identité $id_{\mathbb{R}^3}$ de $\mathbb{R}^3$. **FAUX**
Il y a une seule matrice et c'est la matrice unité : I_3.

EXERCICE 2

1) $$(\sum)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3&=0\\ x_1+2x_2&=0\\ x_1+x_2+3x_3&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&2&0\\1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&2&0\\1&1&3\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&3&-1\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&3&-1\\0&0&8\end{bmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\3L_3-2L_2\end{matrix}\Rightarrow$$
$$(\sum)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3&=0\\ x_1+2x_2&=0\\ x_1+x_2+3x_3&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ 3x_2-x_3=0\\ 8x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$$
Les variables $x_1,\ x_2,\ x_3$ sont toutes libres.

2) D'après 1) $F=\{(0,0,0)\}=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ ainsi F étant le singleton vecteur nul, il n'a pas de base.

3) $G=<v_1,v_2,v_3>\subset\mathbb{R}^3$ soit B la matrice associée à la famille $\gamma=\{v_1,v_2,v_3\}$
alors $$B=A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&2&0\\1&1&3\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$\Rightarrow rg(B)=rg(A)=3=\dim<v_1,v_2,v_3>=\dim\mathbb{R}^3$
On a alors $G=\mathbb{R}^3$ et une base de G est exactement la famille $\gamma=\{v_1,v_2,v_3\}$;
une autre base de G est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4)
a) $f(e_1)=e_1+e_2+e_3,\ \ f(e_2)=-e_1+2e_2+e_3,\ f(e_3)=e_1+3e_3$.
b) Comme le rang de A est 3, alors f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$,
donc $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$
c) $(y_1,y_2,y_3)=f(x_1,x_2,x_3)$
$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&2&0\\1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_2+x_3\\x_1+2x_2\\x_1+x_2+3x_3\end{bmatrix}$$

Ainsi $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$.

d) Comme f est un automorphisme alors $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc $\ker(f)$ n'a pas de base.

e) $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

f) Nous n'avons pas $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, car deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriels sont supplémentaires s'ils sont respectivement différents du singleton vecteur nul de l'espace vectoriel en question.