UFHB
Licence 1
Semestre 1

Année 2022-2023
MIAGE

Activitité N°2 : Suites et fonctions dérivables

A rendre le mercredi 23 novembre 2022 à 9 heures

Exercice 1 Déterminer un développement limité généralisé, au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 1, par rapport à $\frac{1}{x}$ de

$$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptôte oblique et préciser la position de cette asymptôte par rapport à la courbe.

Exercice 2
Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$.

Exercice 3

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$.
2. a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)\sqrt[3]{x^3+5x+2}}{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

Exercice 4

1. Enoncer avec précision le théorème des accroissemments finis.
2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

   $$\forall x > 0 \qquad \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

   En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a

   $$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

3. Monter que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

   $$u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

   est équivalente à la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $w_n = \ln n$.
   En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.
4. On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = u_n - \ln n$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n \in [0,\, 1]$.
   b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement monotone.
   c) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.