UFHB/ UFR-MI / 2022-2023 /Licence 1 MIAGE

Durée: **2 heures / NB: la clarté de la rédaction sera notée!**

EXAMEN - Session 2 - Éléments de logique mathématique

Exercice 1 (4 points)
Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad + n + 1$$

Exercice 2 (8 points)
1) Rappeler la définition d'une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E.

On définit dans $\mathbb{R}$, la relation binaire suivante: $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$.

2) Montrer que cette relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

3) Justifier que cette relation binaire $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$.

4) Déterminer de façon explicite la classe d'équivalence de π pour cette relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Exercice 3 (8 points)
Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$.
Pour exprimer que l'entier naturel x divise l'entier naturel y, on écrit x/y.

Écrire en utilisant $\forall$, $\exists$ et des symboles mathématiques éventuels, les assertions suivantes:

(1) Tout entier naturel n supérieur ou égal à deux admet au moins un diviseur premier.

(2) Les éléments de A ont un diviseur premier commun.

(3) Les éléments de A n'ont aucun diviseur premier commun.

(4) Certains élements de l'ensemble A sont divisibles par trois.

(5) A est une partie finie de $\mathbb{N}$.

(6) A est une partie infinie de $\mathbb{N}$.