Chapitre 2

CALCUL DE DÉTERMINANTS

Le déterminant est un simple **scalaire**(nombre) calculé à partir des éléments d'une matrice **carrée**. Ce scalaire est nul si la matrice carrée en question est non inversible.

2.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On appelle **déterminant de A** le nombre **ad − bc**.

On note **dét A** ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Exemple

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 4 = -14$

2.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. On appelle déterminant de A le nombre
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$.

On note $\det A$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2.2.1 Calcul d'un déterminant d'ordre 3 par la méthode de Sarrus

On complète par les deux premières colonnes la suite de la troisième colonne (ou par les deux premières lignes la suite de la troisième ligne) et on fait les produits 3 à 3 parallèlement à la **diagonale principale** et les produits 3 à 3 parallèlement à la **contre-diagonale principale** ensuite, on **somme** en comptant les produits parallèles à la diagonale principale positivement et ceux de la contre-diagonale principale négativement.

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$.

Ou $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$.

Remarque : La méthode de Sarrus ne s'applique qu'au déterminant d'**ordre 3**.

2.2.2 Calcul du déterminant par le développement suivant une ligne ou une colonne.

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq n}$ pour l'élément a_{ij} , X_{ij} le déterminant obtenu en éliminant la ligne et la colonne de a_{ij} est son **mineur ;** le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j}\, X_{ij}$ est son **cofacteur.**

Remarque

Pour tout a_{ij} élément de A matrice carrée,

Si$(i + j)$ est paire X_{ij} et C_{ij} sont égaux sinon ils sont opposés l'un à l'autre.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Quand on élimine la ligne et la colonne de a_{11} , on obtient X_{11} son mineur qui est : $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ et son cofacteur est :

$C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = X_{11}$.

quand on élimine la ligne et la colonne de a_{12} , on obtient X_{12} son mineur qui est : $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ et son cofacteur est :

$C_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -X_{12}$

quand on élimine la ligne et la colonne de a_{13} , on obtient X_{13} son mineur qui est : $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ et son cofacteur est :

$C_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = X_{13}$.

Methode

Developpement suivant la $1^{ère}$ ligne pour calculer $\det A$;

on a : $\det A = a_{11} \times C_{11} + a_{12} \times C_{12} + a_{13} \times C_{13}$.

Ainsi :

$$\det A = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}\,(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}\,(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

$$+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}\right)$$
$$=\left(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\right)$$
$$-\left(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12}\right).$$

$\det A$ s'obtient aussi par le développement suivant une colonne,

développons $\det A$ suivant la $2^{ième}$ colonne de A qui est : $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, on a :

$$\det A = a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\times(-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+a_{32}\times(-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$
$$=\left(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\right)$$
$$-\left(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12}\right)$$
$$\det A = a_{12}\times C_{12}+a_{22}\times C_{22}+a_{32}\times C_{32}.$$

Exemples pratiques

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ développons suivant la $2^{ème}$ ligne.

$$\det A = 3\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$=-3\left(-2\times5-4\times3\right)-1\times\left(-1\times4-(-1)\times(-2)\right)$$
$$=-3\left(-22\right)-(-6)=72.$$

En développant $\det A$ suivant la $1^{ère}$ligne on a :

$$\det A = (-1)\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-2)\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$
$$+3\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=72.$$

C'est plus long à calculer.

Développons $\det B$ suivant la $1^{ère}$ ligne :

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-5)\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$=-5\times\left(-4\times(-2)-(-1)\times2\right)=-50.$$

Développons $\det B$ suivant la $1^{ère}$ colonne

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$=(-4)\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=-\left(-4\right)\times\left(0\times0-(-2)\times(-5)\right)+2\left(0\times2-(-1)\times(-5)\right)$$
$$=-40-10=-50.$$

Le calcul de $\det B$ avec le développement suivant la $2^{ième}$ ligne

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-4) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+2 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4)\,(10) - (10) + 0 = -50.$$

C'est plus long à effectuer que les précédents.

Remarques

(i) Quand l'on a choisi une ligne ou une colonne suivant laquelle le calcul du déterminant d'une matrice sera développé, **le déterminant est égal à la somme des produits de chaque élément de ladite ligne ou colonne par son cofacteur**.

(ii) En choisissant une colonne ou une ligne où il y a plus de **zéros**, on a moins de termes dans le développé.

(iii) Par cette méthode du développement suivant une ligne ou une colonne, on constate que dans le déveppé l'**ordre** de la matrice dont on calcule le déterminant **s'abaisse**.

2.3 Calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n supérieur ou égal à 3

On se ramène à des calculs de déterminants d'ordre inférieur à n en développons suivant une ligne ou une colonne.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

développons suivant la $4^{ème}$ colonne ; $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \left[2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right]$$
$$= 4\,[2\,(1-8) - 5\,(1+6)] = 4\,(-14 - 35)$$
$$= 4\,(-49) = -196.$$

Aussi $\det A$ avec le développement suivant la deuxième ligne de A sera bien long à écrire en effet :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 2 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix}-1&0&0\\-3&2&0\\4&5&0\end{vmatrix}+4\times(-1)^{2+4}\times\begin{vmatrix}-1&0&2\\-3&2&-1\\4&5&-1\end{vmatrix}.$$

Théorème
Soit $A=(a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}$.
Déterminant de A développé par rapport à la i-ième ligne :

$\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+...+a_{in}C_{in}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}C_{ik}.$

Déterminant de A développé par rapport à la j-ième colonne :

$\det(A)=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+...+a_{nj}C_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}C_{kj}.$

Remarque
Pour développer suivant les lignes ou les colonnes, il vaut mieux choisir celles qui renferment le plus de zéros pour réduire le nombre de calculs.

2.4 Propriétés des déterminants

1) (i) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$(commutatif).
Alors on a : $\det(AB)=\det A\times\det B$
$(\det(AB)=\det A\times\det B=\det B\times\det A=\det(BA))$.
Exemple

Soit $A=\begin{bmatrix}-1&-2&3\\3&0&1\\-1&4&5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0&-5\\-4&-1&2\\2&-2&0\end{bmatrix}$

on a : $AB=\begin{bmatrix}-1&-2&3\\3&0&1\\-1&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-5\\-4&-1&2\\2&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&-4&1\\2&-2&-15\\-6&-14&13\end{bmatrix}$

$\det(AB)=\begin{vmatrix}14&-4&1\\2&-2&-15\\-6&-14&13\end{vmatrix}=-3600$

on sait ausi que $\det A=72$ et $\det B=-50$ et $\det A\times\det B=72\times(-50)=-3600$
on a bien $\det(AB)=\det A\times\det B$.
(ii) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall A\in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(\lambda A)=\lambda^{ordre(A)}\det A=\lambda^n\det A$.
Exemple

$$det\left(2\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}\right)=2^3\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

2) Le déterminant d'une matrice triangulaire, en particulier celui d'une matrice diagonale, est égal au produit des éléments diagonaux
(c'est-à-dire des éléments de la diagonale principale).
Par conséquent le déterminant d'une matrice unité est égale à 1.
Exemples

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$;

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times (-2) = -6.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-1) \times (-5) = 30.$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

3) Le déterminant ne change pas quand on **ajoute** à une *ligne* une combinaison des **autres** *lignes* ; en particulier, on peut remplacer une ligne par la somme de toutes les lignes ou encore ajouter à une ligne λ multiplié par une autre ligne où λ est un scalaire non nul.

(Dans la propriété **3**) en remplacant ligne(s) par colonne(s), on a le même résultat).

Exemple

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$, en ajoutant à la $3^{ème}$ ligne, deux fois la $1^{ère}$ ligne, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$, je développe par rapport à la $2^{ème}$ colonne,

$$\det A = -(-2) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 2(33+3) = 72.$$

Remarque

Il est plus intéressant de faire des manipulations (légitimes) qui font apparaître des zéros dans le déterminant afin d'en faciliter le calcul(voir supra).

4) Le déterminant d'une matrice dont une ligne ou une colonne est formée de zéros est un déterminant nul. Le déterminant d'une matrice dont une ligne(resp. une colonne) est une combinaison des autres lignes (resp. des autres colonnes) est un déterminant nul.Aussi si deux lignes(resp.deux colonnes) sont proportionnelles dans un déterminant, le déterminant est nul.

Exemple

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$, car la $2^{ème}$ colonne est égale à deux fois la $1^{ère}$ colonne.

5) Le déterminant est linéaire en ses lignes et colonnes respectivement.
(pour ne pas dire multilinéaire suivant les lignes ou les colonnes)
Cela signifie : étant donnée A une matrice carrée d'ordre n ; on a :

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} ; 1 \leq i \leq n.$$

(i) $\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i + C_i' & \cdots & C_n \end{bmatrix} =$
$\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i' & \cdots & C_n \end{bmatrix}$

$$\text{ou } (i') \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i + L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Exemples

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & a+b & b^2 \\ a & a-b^2 & b \\ a^2 & a^3+b & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & b & b^2 \\ a & -b^2 & b \\ a^2 & b & ab \end{vmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ un corps.

$$(i') \begin{vmatrix} 2-b^2 & a+b & b^2+b \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b^2 & b & b \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ un corps.

(ii)
$\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & \beta C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} = \beta \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix}$; $\beta \in \mathbb{K}$ un corps.

$$\text{ou } \big((ii)'\big) \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ \gamma L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \gamma \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} ;$$

$\gamma \in \mathbb{K}$ un corps.

Exemple

$$(ii)\ \det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 17\times 3 \\ 3 & 0 & 17\times 1 \\ -3 & 0 & 17\times 11 \end{vmatrix} = \det A = 17\times \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\left((ii)'\right) \begin{vmatrix} -23\times(-1) & -23\times(-2) & -23\times 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = (-23)\times \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

6) Le déterminant une forme **alternée :** cela signifie étant donnée A une matrice carrée d'oredre n à coeffients dans $\mathbb{K}$, $\det A \in \mathbb{K}$, et avec

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix};\ 1 \leq i,\ j \leq n.$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det A$$

$\det A = \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix}$
$\det A = -\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$
$\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} = -\det A\,;\ 1 \leq i,\ j \leq n.$

Tout ceci signifie que lorsqu'on permute deux lignes (ou deux colonnes) dans un déterminant le déterminant est changé en son opposé.

Exemple

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 72, \text{ mais } \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -72 = -\det A$$

car j'ai permuté la $2^{ième}$ et la $3^{ième}$ lignes.

7) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det({}^tA)$.

8) Soient $M \in M_r\ (\mathbb{K})$, $N \in M_{rs}(\mathbb{K})$ et $P \in M_s\ (\mathbb{K})$ alors $\begin{vmatrix} M & N \\ 0 & P \end{vmatrix} = |M|\,|P|$.

9) Soient $A_i\ \in M_{r_i}(\mathbb{K})$ où $1 \leq i \leq n$, alors $\begin{vmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} |A_i\ |$.

10) Si deux matrices $A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables, i.e. $A = P^{-1}BP$.
$\forall m \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, comme $(A + mI_n)^k = P^{-1}(B + mI_n)^k P$, alors
$rang\,(A + mI_n)^k = rang\,(B + mI_n)^k$,
$\det(A + mI_n)^k = \det(B + mI_n)^k$ et
$trace\,(A + mI_n)^k = trace\,(B + mI_n)^k$.

Remarque

1) Lorsque deux matrices carrées sont **semblables**, elles ont **nécessairement** les mêmes trace, rang et déterminant. Mais cela ne suffit pas pour être semblables.

2) Ausi est-il clair que deux matrices qui n'ont pas la même trace ou pas le même rang ou pas le même déterminant, ne peuvent être semblables.

Remarque

Voici deux matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

On a le rang de $A =$ au rang de $B = 1$, $\det(A) = \det(B) = 0$,
$tr\,(A) = tr\,(B) = 0$, mais A et B ne sont pas semblables car

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ce sont deux matrices inversibles et on a : $PAQ = B$, donc A et B sont équivalentes, mais seraient semblables si $P^{-1} = Q$, alors qu'avec

$$P \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times P = I_2, \text{ on a}$$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \neq Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, donc on peut conclure que A et B ne sont pas semblables, alors qu'elles ont le même rang, le même déterminant, et la même trace.

En résumé : Avoir le même rang , le même déterminant, et la même trace, pour des matrices carrés de même ordre, sont des conditions **nécessaires** pour qu'elles soient semblables, mais pas **suffisantes**.

2.5 Inverse d'une matrice carrée

Définition
Une matrice **carrée** A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice (carrée d'ordre n)
B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
B est alors appelée **inverse** de la matrice A.
Exemple
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. On vérifie que pour $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$, on a : $AB = BA = I_2$.
Donc A est inversible et B est inverse de la matrice A.
Définition
Etant données deux matrices A et B tel que $AB = BA$, on dit que A et B **commutent**.
Proposition
Deux matrices qui commutent sont **carrées** de **même ordre**.
Théorème
Une matrice **carrée** A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
Si A est inversible, son inverse est unique et inversible.
On la note A^{-1} et on a : $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$.
Exemple
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A = -2 \neq 0$ donc A est inversible, avec $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
on constate que : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
donc $A^{-1} = B$ et $\det B = \det A^{-1} = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{(-2)} = \dfrac{1}{\det A}$.
Proposition
Deux matrices A et B carrées de même ordre n tel que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$) sont **inversibles** et d'inverse l'une de l'autre.

2.5.1 Propriétés de la matrice inverse

Si A et B sont inversibles de même ordre, on a :
1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}.A^{-1}$, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
3. $\left({}^t\left(A^{-1}\right)\right) = \left({}^t(A)\right)^{-1}$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercice
Montrer que :
1. $A\left(I_n + A\right)^{-1} = \left(I_n + A\right)^{-1} A$, Si $\left(I_n + A\right)$ est inversible avec $A \in M_n(\mathbb{K})$.
2. $A\left(I_n + A\right)^{-1} + \left(I_n + A\right)^{-1} = I_n$, Si $\left(I_n + A\right)$ est inversible avec $A \in M_n(\mathbb{K})$.
3. $A\left(I_n + BA\right)^{-1} = \left(I_m + AB\right)^{-1} A$, si $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{nm}(\mathbb{K})$ avec $\left(I_n + BA\right)$ et $\left(I_m + AB\right)$ sont inversibles.
4. En déduire que : $\left(I_m + AB\right)^{-1} + A\left(I_n + BA\right)^{-1} B = I_m$.

Proposition de réponse.
1. $\left(I_n + A\right)\left(I_n + A\right)^{-1} = I_n \Rightarrow A\left(I_n + A\right)\left(I_n + A\right)^{-1} = A.I_n = A \Rightarrow$
$\left(A + A^2\right)\left(I_n + A\right)^{-1} = A \Leftrightarrow \left(I_n + A\right) A \left(I_n + A\right)^{-1} = A \Leftrightarrow$

$(I_n + A)^{-1} (I_n + A) A (I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1} A \Leftrightarrow$
$I_n.A (I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1} A \Leftrightarrow A (I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1} A.$
2. Evaluons : $(I_n + A)^{-1} + (I_n + A)^{-1} A = (I_n + A)^{-1} (I_n + A) = I_n.$
3. $(I_n + BA)(I_n + BA)^{-1} = I_n \Rightarrow A (I_n + BA)(I_n + BA)^{-1} = A.I_n = A$
$\Leftrightarrow (A.I_n + A (BA))(I_n + BA)^{-1} = A \Leftrightarrow (I_m.A + (AB) A)(I_n + BA)^{-1} = A$
$\Leftrightarrow (I_m + AB) A (I_n + BA)^{-1} = A \Leftrightarrow$
$(I_m + AB)^{-1} (I_m + AB) A (I_n + BA)^{-1} = (I_m + AB)^{-1} A \Leftrightarrow$
$(I_m A)(I_n + BA)^{-1} = (I_m + AB)^{-1} A \Leftrightarrow A (I_n + BA)^{-1} = (I_m + AB)^{-1} A.$
4. Evaluons $(I_m + AB)^{-1} + A (I_n + BA)^{-1} B = (I_m + AB)^{-1} + (I_m + AB)^{-1} AB$
d'après la question 3. De là, on a :

$$\begin{aligned}(I_m + AB)^{-1} + A (I_n + BA)^{-1} B &= (I_m + AB)^{-1} + (I_m + AB)^{-1} AB \\ &= (I_m + AB)^{-1} (I_m + AB) = I_m.\end{aligned}$$

2.5.2 Inversion d'une matrice par sa comatrice

Définition
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}$. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij}
le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} X_{ij}$
où X_{ij} est le déterminant obtenu en éliminant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A.
La matrice des cofacteurs de A est la matrice notée
$com\,(A) = \left((-1)^{i+j} X_{ij}\right)_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n} = (C_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}.$
appelée la **comatrice** de A. le determinant extrait X_{ij} est appelé le **mineur** de a_{ij}.
Exemple

$$\text{Avec } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$X_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On constate que $\forall 1 \leq i,\ j \leq n$, $C_{ij} = X_{ij}$ si $(i + j)$ est pair et
$C_{ij} = -X_{ij}$ si $(i + j)$ est impair.
Exemple pratique

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}. \text{ Notons } A = (a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ 3}.$$

Le cofacteur de $a_{11} = 1$ est $C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 9$, on a $X_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$

Le cofacteur de $a_{32} = -5$ est $C_{32} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$, on a $X_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.
Ainsi de suite.

La comatrice de A est donc $comA = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

2.5.3 Démonstration de la méthode d'inversion d'une matrice par sa comatrice

En reprenant la formule du déterminant de A développé par rapport à la i-ième ligne : $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$.
Remplaçons les a_{ij}, $\forall 1 \leq j \leq n$, par ceux d'une autre ligne, disons la k-ième ligne, avec $k \neq i$, nous obtenons :
$\det(A') = a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + ... + a_{kn}C_{in} = 0$, car A' n'est rien d'autre que la matrice A dans laquelle la i-ième ligne est remplacer par la k-ième ligne, avec $k \neq i$, donc A' a deux lignes identiques : la i-ième ligne et la k-ième ligne, avec $k \neq i$, ainsi $\det(A')$ développé suivant la i-ième ligne est :
$\det(A') = a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + ... + a_{kn}C_{in}$ et est égal à 0, car dans $\det(A')$, il y a deux lignes identiques.

En résumé,
on a : $a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + ... + a_{kn}C_{in} = \begin{cases} det(A) \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$.

Considérons la matrice des cofacteurs $com(A) = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & Cnn \end{bmatrix}$.

Evaluons $A.({}^tC) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & Cnn \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I_n.$$

car dans le produit $A.({}^tC)$, l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est :
$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + ... + a_{in}C_{jn} = \begin{cases} det(A) \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.
On a $({}^tC).A = A.({}^tC) = \det(A)\, I_n$.

Proposition
Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a :
$(\det A).I_n = A.com({}^tA) = com({}^tA).A = A({}^tcomA) = ({}^tcomA).A$
car $({}^tcomA) = com({}^tA)$.

Théorème
Si A est une matrice inversible alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times com({}^tA) = \frac{1}{\det A} \times ({}^tcom(A))$
où $({}^tA)$ désigne la transposée de A, $com({}^tA)$ désigne la comatrice de la transposée

de A et $({}^t com\,(A))$ désigne la transposée de la comatrice de A.

Remarque

En somme, si A est inversible d'ordre n, $(A^{-1})_{ji} = \dfrac{\det(A^{ij})}{\det A}$, où $1 \leq i, j \leq n$ et A^{ij} est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

Aussi $(A^{-1})_{ji} = \dfrac{\det(A^{ij})}{\det A} \Leftrightarrow (A^{-1})_{ij} = \dfrac{\det(A^{ji})}{\det A}$ avec $1 \leq i, j \leq n$ et A^{ji} est la matrice obtenue en supprimant la ligne j et la colonne i de A.

Définition

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matrice $({}^t comA) = com\,({}^t A)$ s'appelle la matrice **adjointe** de A.

Remarque

Soit une matrice inversible A, son inverse est notée $A^{-1} \neq \dfrac{1}{A}$ qui n'existe pas.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, A est -elle inversible ?

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2$, à la $1^{ère}$ colonne, j'ai fait la $1^{ère}$ colonne plus la $3^{ème}$ colonne afin d'avoir plus de zéro dans mon déterminant pour ne pas avoir beaucoup de termes à développer. Comme $\det A = 2 \neq 0$, alors A est inversible.

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \times com\,({}^t A) = \dfrac{1}{\det A} \times ({}^t com\,(A))$.

$({}^t A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$,

$com\,({}^t A) = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = ({}^t com\,(A))$.

$A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$.

2.6 Rang d'une matrice

Proposition

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$. On a $rgA \leq \min(n, m)$.

Si $m = n$, et que $rgA = n \Longleftrightarrow \det A \neq 0$.

Exemples

1)Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 15 & -1 & -8 & -7 \\ \pi & \frac{1}{2} & -71 & -45 & 0 & -17 \end{bmatrix}$; alors $rg\,(A) \leq 3$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi & -1 & 5 & 7 \\ 17 & 1 & 3 & 11 \\ \frac{1}{2} & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -36\pi - 99 \neq 0$

$\Rightarrow rg\,(A) = 4.$

Proposition

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ alors rgA est le plus grand entier naturel s qui est tel qu'on puisse extraire de A une matrice d'ordre s de déterminant $\neq 0$ (avec permutation des colonnes(resp. lignes) de A si necessaire).

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ comme $2 \geq \ rgA$,

donc $rgA = 2$.

Corollaire

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, $rg\,({}^tA) = rgA$.

Remarque

$rg\,(A) = 0 \Leftrightarrow$ toutes les composantes de la matrice A sont nulles.