

Durée: 2 h 15 mn / NB: la clarté de la rédaction sera notée!

EXAMEN - Session 1 - Éléments de logique mathématique

Exercice 1

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence la propriété suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 10^n - (-1)^n \text{ est divisible par } 11$$

Exercice 2

Soit $E = [1, 3]$.

(a) Donner un exemple d'application $g : E \rightarrow E$, différente de l'application identité de E , non injective et non surjective.

(b) Donner un exemple d'application $f : E \rightarrow E$, différente de l'application identité de E , injective et non bijective.

Exercice 3

On définit dans \mathbb{R} , la relation binaire suivante: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$.

- 1) Montrer que cette relation binaire \mathcal{R} est une relation d'équivalence dans \mathbb{R} .
- 2) Justifier que cette relation binaire \mathcal{R} n'est pas une relation d'ordre dans \mathbb{R} .
- 3) Déterminer de façon explicite la classe d'équivalence de 0 pour cette relation d'équivalence \mathcal{R} .

Exercice 4

Soit \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers et soit A une partie non vide de \mathbb{N} .
Pour exprimer que l'entier naturel x divise l'entier naturel y , on écrit x/y .

Écrire en utilisant \forall, \exists et des symboles mathématiques éventuels, les assertions suivantes:

- (1) A est un singleton.
- (2) A est une partie infinie de \mathbb{N} .
- (3) Tout entier naturel n supérieur ou égal à deux admet un diviseur premier.
- (4) Les éléments de A ont un diviseur premier commun.
- (5) Les éléments de A n'ont aucun diviseur premier commun.
- (6) Certains éléments de l'ensemble A sont divisibles par trois.