UNISAT
Année 2021-2022

Durée
2 h 00

Licence 1

Examen d'Analyse 1
(Fonctions réelles d'une variable réelle)
session 1

Exercice 1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^x \ \text{ si } \ x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax + b \text{ si } \ x > 1.$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1.

Exercice 2

1. Enoncer avec précision le théorème des accroissemments finis.
2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0 \qquad \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

   En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$$

3. Monter que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

   est équivalente à la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $w_n = \ln n$.
   En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.
4. On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = u_n - \ln n$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n \in [0,\, 1]$.
   b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est strictemment monotone.
   c) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Exercice 3

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
2. a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)\sqrt[3]{x^3+5x+2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Exercice 4

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que lorsque x est au voisinage de l'infini, on peut écrire
$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
3. En déduire l'asymptôte de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de l'infini et la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptôte.

UNISAT
Année 2021-2022

Durée
2 h 00

Licence 1

Examen d'Analyse 1
(Fonctions réelles d'une variable réelle)
session 1

UNISAT
Année 2021-2022

Durée
2 h 00

Licence 1

Examen d'Analyse 1
(Fonctions réelles d'une variable réelle)
session 1