**UNISAT** **Année : 2019 / 2020**

*–Licence 1* ***Fonctions réelles d'une variable réelle (Devoir surveillé)***

***Durée : 2 h 00***

–

---

**Exercice 1** **(3 points)**

Traduiser à l'aide des quantificateurs et des connecteurs logiques les assertions suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$,
   où $(u_n)$ est une suite et $l$ un nombre réel.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,
   où $f$ est une fonction.

**Exercice 2** **(6 points)**

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Montrer que $f$ est dérivable sur son ensemble de définition et donner l'expression de sa dérivée.
3. Déterminer le développement limité en $0$ à l'ordre $3$ de $f(x)$.

**Exercice 3** **(6 points)**

Calculer les limites en $0$ des fonctions $f$, $g$ et $h$ définies par

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{3\sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt{1+x} - 1}{x^2} \text{ et } h(x) = x(2+x)\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}.$$

**Exercice 4** **(5 points)**

1. Enoncer avec précision le théorème des accroissements finis.
2. A l'aide de ce théorème, montrer que : $\forall (a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 < a \leq b < \dfrac{\pi}{2}$, on a
$$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}.$$