Université Felix Houphouët Boigny
Année 2022-2023

Durée : 2 h 30 mn

Licence 1 de MIAGE
Devoir surveillé

Exercice 1 (3 points)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Traduire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$.
2. f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
3. f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (6 points)
On Considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et donner l'expression de la dérivée de f.
3. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f(x)$.

Exercice 3 (4 points)
Calculer les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} \qquad b) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\tan x}$$

Exercice 4 (3 points)
Soient A et B deux parties non vides et minorées de $\mathbb{R}$.
Montrer que $A \cup B$ est minorée et on a

$$\inf(A \cup B) = \inf(\inf A, \, \inf B).$$

Exercice 5 (4 points)

1. Enoncer avec précision le théorème des accroissements finis.
2. Montrer que si $x \geqslant 0$ alors $\ln(1+x) \leqslant x$.
   <u>Indication :</u> Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ sur $[0, x]$.