UNISAT
Année 2020-2021

Durée
2 h 00

Licence 1

Examen d'Analyse 1
(Fonctions réelles d'une variable réelle)
session 1

Exercice 1 (5 points)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

1. Ecrire à l'aide des symboles mathématiques usuels ($\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$) les phrases suivantes :
   a) $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$
   b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Enoncer avec précision le théorème des accroissements finis et montrer à l'aide de ce résultat que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$ on a
$$a < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < b.$$

Exercice 2 (5 points) Calculer mes limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)^2}{\cos(2x)-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} (x^3-1)\ln(2x^2+x-3).$$

Exercice 3 (4 points)
Soit $f\ :]0,\ +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction f définie par
$$f(x) = 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right),$$
où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ désigne la partie entière de t.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t-1 < E(t) \leqslant t$.
2. En déduire que pour tout $x > 0$, on a $x > f(x) \geqslant 0$.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
4. Etudier la continuité de f en 1.

Exercice 4 (6 points)
Soit les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour u_0 et u_1 fixés dans $\mathbb{R}$ par
$$u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} \quad \text{et} \quad v_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n.$$
On pose $\alpha = \dfrac{2v_0}{3}$.

1. Pour tout entier n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
   Que peut-on en déduire pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Pour tout entier n, donner une relation entre v_0, u_n et u_{n+1}.
3. Montrer que la suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
4. En déduire pour tout entier n, l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
5. Calculer la limite, lorsqu'elle existe, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.