UFR-MI
Licence 1 :MIAGE
Année académique $2022 - 2023$

Fiche de TD de Structures algébriques

Lois de composition internes sur un ensemble

Exercice 0 **:** Sur l'intervalle $I = [-2, -1] \cup [1, 2]$, donner au moins 4 lois de composition internes.

Exercice 1 **:** Soit $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

1. Combien de lois de composition internes y a -t-il sur E ?
2. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E, qui soit commutative.
3. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E, qui admette 0 pour élément **neutre**.
4. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E, qui soit commutative , admette l'élément 0 comme élément neutre, et telle chaque l'élément admette pour symétrique son propre opposé.
5. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E définie par : $a \star b = Max\{a, b\}$.
6. Combien de lois de composition internes y a-t-il sur E qui soient commutatives et admettent un élément neutre.

Exercice 2 **:** Etudier les lois de composition internes suivantes :

1. $*$ définie sur $\mathbb{Q}$ comme suit : $a * b = \dfrac{a+b}{2}$
2. $\oplus$ définie sur $\mathbb{Z}$ comme suit : $a \oplus b = (a-1)(b-1) + 1$
3. La loi de composition interne $\vee$ définie sur $\mathbb{N}^\star$ par : $a \vee b = PPCM(a, b)$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto z\bar{z}$

1. Montrer que f est une application bien définie.
2. Montrer que f est un homomorphisme pour la multiplication sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
3. Donner quelques parties stables de $\mathbb{C}$.
4. Montrer que si A est une partie stable de $\mathbb{C}$, alors $f(A)$ est une partie stable de $\mathbb{R}$.
5. Montrer que si B est une partie stable de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(B)$ est une partie non vide.
6. Montrer que $f^{-1}(B)$ est une partie stable de $\mathbb{C}$.

Groupes et sous-groupes

Exercice 4 :

1. Ecrire la table de $(S_3, \circ)$ où $A = \{1, 2, 3\}$
   Déterminer tous ses sous-groupes.
2. Ecrire la table de $(\mathcal{P}(A), \triangle)$. où $A = \{1, 2, 3\}$
   Déterminer tous ses sous-groupes.
3. Pour tout entier naturel n, on considère l'ensemble
   $$U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$$
   Montrer que U_6 et U_5 sont des sous-groupes du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$

Exercice 5 : .(Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$)

1. Montrer que l'ensemble des multiples d'un entier a qu'on note $a\mathbb{Z}$, est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ contenant a.
2. Montrer que parmi tous les sous-groupes H de $(\mathbb{Z}, +)$ contenant a, le sous-groupe $a\mathbb{Z}$ en est le plus petit (au sens de l'inclusion $\subseteq$)
3. Comparer $a\mathbb{Z}$ à $(-a)\mathbb{Z}$.
4. Montrer que tout sous-groupe K de $(\mathbb{Z}, +)$ est égal à un $m\mathbb{Z}$ avec $m \in \mathbb{N}$.
5. Calculer $12\mathbb{Z}+512\mathbb{Z}$, $12\mathbb{Z}+512\mathbb{Z}+15\mathbb{Z}$, $18\mathbb{Z}\cap 24\mathbb{Z}$, $1013\mathbb{Z}\cap 612\mathbb{Z}\cap 169\mathbb{Z}$.
6. Trouver le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ contenant la paire $\{21, 114\}$.

Groupes quotients

Exercice : 6 : . Soient G le groupe quotient $\dfrac{\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}}$.

1. Quels sont les cardinaux possibles des différents sous-groupes de G ?.
2. Déterminer **tous les sous-groupes de** G.
3. Avec l'inclusion, ordonner ces sous-groupes.

Exercice : 7 : Soient $A = \{a\ ,b\ ,c\}$ et le groupe $(\mathcal{P}(A), \triangle)$. où $\triangle$ est la loi différence symétrique.

1. Déterminer $\mathcal{P}(A)$.
2. Quels sont les cardinaux possibles des sous-groupes de $\mathcal{P}(A)$?.
3. $\mathcal{H} = \{\varnothing, \{a\},\ \{b, c\},\ A\}$ est-il un sous-groupe de $\mathcal{P}(A)$?
4. Déterminer le groupe quotient $\dfrac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$, puis la table de sa loi.

La structure d'anneau.

Exercice 8 **:** . On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est **un sous-anneau** du corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
2. Si $z = a + b\sqrt{5}$, on note $\widehat{z} = a - b\sqrt{5}$. Montrer que
$$\widehat{z_1 + z_2} = \widehat{z_1} + \widehat{z_2}, \quad \widehat{z_1 \cdot z_2} = \widehat{z_1} \cdot \widehat{z_2}, \text{ et } \quad z \cdot \widehat{z} \in \mathbb{Z}$$
3. Montrer que si z est inversible alors $\widehat{z}$ est inversible et $z\widehat{z} \in \{-1, 1\}$.
4. Donner 19 éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Exercice 9 **: L'anneau des matrices carrées.** .

Soit

$$\mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2.
2. Est-il intègre ?
3. Déterminer 14 éléments inversibles de $\mathcal{C}$.

4. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{I} = \{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \}$$

est un idéal de $\mathcal{C}$.

Exercice 10 **:** On considère le produit cartésien de l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ par lui-même : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On rappelle que

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \textbf{ et } (a, b) \cdot (a', b') = (a \cdot a', b \cdot b')$$

On considère les deux parties de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ suivantes

$$I = \{(n, n), \textbf{avec } n \in \mathbb{Z}\} \textbf{ et } J = \{(n, 3m), \textbf{avec } (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que I est stable pour $+$ et pour $\cdot$.
2. I est-il un idéal de l'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
3. Montrer que J est un idéal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

L'anneau quotient $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

Exercice 11 **:** On considère l'anneau quotient $A = \dfrac{\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}}$.

1. Quels sont les restes par la division euclidienne par 24, de -2023 et de 17^{2023} ?
2. A est-il commutatif, unitaire , intègre. ?
3. Déterminer $\mathcal{U}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A.
4. Résoudre dans A l'équation

$$x^2 + \dot{12}x + \dot{23} = \dot{0}$$

Exercice 12 **:** .

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes de congruence suivants ;

$$\begin{cases} x & \equiv & 11 \mod (117) \\ x & \equiv & -6 \mod (23) \end{cases}, \quad \begin{cases} x & \equiv & 1 \mod (117) \\ x & \equiv & 1 \mod (23) \\ x & \equiv & -1 \mod (11) \end{cases}$$

Applications

Exercice 13 **:** .

M Yao, 25 ans et sa soeur aînée Shiso Sali, vivent tous les deux à l'étranger. M. Yao qui vit au Canada vient voir sa famille en CI chaque 3 ans, alors que sa soeur qui vit au Japon avec son époux, vient rendre visite chaque 5 ans. Sali a rendu visite en 2011 et son frère en 2012.

Donner les années où ils se sont vus ou se verront avant leur 100 ans.

Polynômes et fractions rationnelles.

Exercice 14 **:** .

1. Trouver un polynôme $P(X)$ de degré 5 tel que
$$1 \text{ soit racine triple et } -2 \text{ racine double.}$$
2. Construire un polynôme $Q(X)$ de degré 3 tel que
$$Q(2) = 0,\ Q(3) = 0 \text{ et } Q(4) = 4$$

Exercice 15 **:** .

1. — Effectuer la **division euclidienne** de X^6+2X^5+1, par X^2+X+1.
   — Effectuer la **division suivant les puissances croissantes** de
   $X^6 + 2X^5 + 1$, par $X^2 + X + 1$ à **l'ordre** 3.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :
$$\frac{X^6 + 2X^5 + 1}{(X^2 + X + 1)^2}$$
3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles :
$\dfrac{1}{X^6 - 1}$, $\dfrac{X + 1}{(1 + X + X^2)X^6}$, $\dfrac{X^6}{(X - 1)(X - 2)^3}$

Exercice : 16 .

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur $\mathbb{K}$.

1. Ecrire les tables de l'addition et de la multiplication de $\mathbb{K}$.
2. Dans $\mathbb{K}[X]$, effectuer la division euclidienne de
$$X^8 + X^7 + X + \bar{1} \text{ par } X^3 + X + \bar{1}.$$
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, effectuer la **division suivant les puissances croissantes** de
$$X^8 + X^7 + X + \bar{1} \text{ par } X^3 + X + \bar{1} \text{ à } \textbf{l'ordre } 5.$$