Chapitre 1

MATRICES

1.1 Présentation des matrices de type (p, q) sur un corps $\mathbb{K}$ commutatif

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif.
Comme exemples de corps commutatifs, vous avez : $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$.
Définition p et q étant deux entiers, $p \geq 1, q \geq 1$,
une **matrice** $p \times q$ ou de type (p, q) est, par définition, un tableau rectanglaire de scalaires(ou nombres) appartenant à $\mathbb{K}$, rangés horizontalement ou verticalement, où une rangée horizontale est appelée **ligne** et une rangée verticale est appelée **colonne**. Les rangées figurent dans **deux parenthèses** ou deux **crochets** et la matrice est désignée par une lettre majuscule. Le nombre de rangées horizontales est le nombre de lignes p et le nombre de rangées verticales est le nombre de colonnes q.
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

une matrice à p lignes et q colonnes d'éléments $a_{ij} \in \mathbb{K}$; l'élément a_{ij} s'appelle **terme**, **coefficient** ou **composante** de la matrice A ; l'indice i correspond à la ligne de a_{ij} , l'indice j à la colonne de a_{ij}. On emploie aussi la notation

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}.$$

Ceci est la $2^{ème}$ ligne : $a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2q}$; la $4^{ième}$ colonne est : $\begin{matrix} a_{14} \\ a_{24} \\ \vdots \\ a_{p4} \end{matrix}$.

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, on peut écrire une matrice suivant ses lignes : $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{bmatrix}$; $1 \leq i \leq p$,

ou suivant ses colonnes : $A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_q \end{bmatrix}$; $1 \leq j \leq q$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & \pi & \frac{7}{21} & -9 & -11 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 8 & 9 & 15 \\ -4 & 75 & -\frac{1}{3} & -7\pi & i & 5+i \end{bmatrix} \text{ c'est une matrice de type } (4,6)$$

Ici l'élément $a_{14} = 4$, $a_{22} = \pi$, $a_{35} = 9$, $a_{33} = 0$, $a_{43} = -\dfrac{1}{3}$, $a_{46} = 5 + i$.

1.2 Quelques matrices de type (p, q)

a) Matrice uniligne : $p = 1$, q quelconque

$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \end{bmatrix}$.

M est de type $(1, q)$.

Exemple

$M = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 & 78 \end{bmatrix}$ de type $(1, 4)$

b) Matrice unicolonne : $q = 1$, p quelconque $M = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix}$.

M est de type $(p, 1)$.

Exemple

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ est de type } (6,1)$$

c) Matrice nulle de type (p, q)

C'est la matrice à p lignes et q colonnes dont les composantes sont toutes nulles.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, elle est de type $(3, 2)$.

d) Matrice carrée d'ordre $n = p = q$

C'est une matrice à n lignes et n colonnes, les termes a_{ii} sont les éléments **diagonaux** et forment **la diagonale principale**.L'autre diagonale du tableau carré s'appelle la *contre diagonale principale.*

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \frac{8}{3} \\ -9 & \frac{4}{7} & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ c'est une matrice carrée d'ordre 3 et les éléments diagonaux sont : $a_{11} = 1$; $a_{22} = \dfrac{4}{7}$; $a_{33} = 3$. Les éléments de la contre diagonale principale sont : $a_{31} = 0$; $a_{22} = \dfrac{4}{7}$; $a_{13} = \dfrac{8}{3}$.

e) Matrice diagonale

C'est une matrice carrée telle que tous les termes en dehors de la diagonale principale sont nuls.

Exemples :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

f) Matrice unité(ou identité) d'ordre n

C'est la matrice diagonale d'ordre n telle que tous les termes de la diagonale principale sont égaux à 1 (et les autres nuls). On la note I_n .

Exemples

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

g) Matrice triangulaire supérieure :

C'est une matrice carrée telle que tous les termes en-dessous de la diagonale principale sont nuls($a_{ij} = 0$ si $i > j$).

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$

h) Matrice triangulaire inférieure :

C'est une matrice carrée telle que tous les termes au-dessus de la diagonale principale sont nuls($a_{ij} = 0$ si $i < j$).

Exemple : $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 & -9 \end{bmatrix}.$

i) Matrice en bloc

C'est une matrice de type (m, n) dans laquelle on trouve des matrices bien établies.

Soient $M \in M_r\ (\mathbb{K})$, $N \in M_{rs}(\mathbb{K})$, $P \in M_s\ (\mathbb{K})$ et $Q \in M_{sr}\ (\mathbb{K})$ alors $A = \begin{bmatrix} M & N \\ Q & P \end{bmatrix}$ est en bloc par exemple.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{bmatrix} \text{ où } M = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 20 \\ 0 & 1 & 25 \end{pmatrix} \text{ et alors } A = \begin{bmatrix} & M & \\ N & & Q \end{bmatrix}.$$

j) Transposée d'une matrice :

On appelle transposée de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}$ la matrice $A' = \left(a'_{ij}\right)_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ q \\ 1\leq\ j\ \leq\ p}}$ où $a'_{ij} = a_{ji}$.

La transposée de A est notée $({}^tA)$; c'est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A et vice versa.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$; $\quad ({}^tA) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \\ 1+i & -8 \end{bmatrix}$.

k) Opposée d'une matrice :

C'est la matrice obtenue en prenant l'opposée de chaque terme :

$$si\ A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} \quad (-A) = (-a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}.$$

Exemple : soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$; on a : $(-A) = \begin{bmatrix} -(-1) & -2 & -(1+i) \\ -4 & -(-6) & -(-8) \end{bmatrix}$

ainsi $(-A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -(1+i) \\ -4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

1.3 OPERATIONS SUR LES MATRICES

1.3.1 Somme de deux matrices de même type

On définit la matrice $C = A + B$, de type (p, q), **somme** des deux matrices de type (p, q), par ses coefficients : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q$.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1+i \\ -3 & 1 & i \end{bmatrix}$,

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & -1+1 & 1-i+(-1+i) \\ -3+(-3) & -1+i+1 & 2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & i & 2+i \end{bmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -(-1) & -(1-i) \\ -(-3) & -(-1+i) & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3.2 Egalité de deux matrices de même type

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p \\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}$, de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont **égales** si $A - B = 0_{M_{pq}}(\mathbb{K})$.

Contre-exemple

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, on a :

$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc $A \neq B$.

Remarques

1)Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^tA) \in M_{qp}(\mathbb{K})$ et $({}^t({}^tA)) = A$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si on a : $({}^tA) = A$, on dit que A est une matrice **symétrique.**

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $({}^tA) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$.

3)Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si on a : $({}^tA) = -A$, on dit que A est une matrice **antisymétrique.**

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $({}^tA) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -A$

On a ainsi une loi de composition interne : **l'addition,** qui fait de **l'ensemble** $M_{pq}(\mathbb{K})$ **des matrices** $p \times q$ **un groupe commutatif.** L'élément neutre est la matrice dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls dite **matrice nulle** $0_{M_{pq}(\mathbb{K})}$.

La matrice opposée à $A = (a_{ij})$ est la matrice $(-A)$ de coefficients $(-a_{ij})$.

Remarque

Soient A, $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^t(A+B)) = ({}^tB) + ({}^tA)$.

1.3.3 Multiplication par un scalaire d'une matrice

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice λA est par définition, la matrice de coefficient λa_{ij}, où $A = (a_{ij})$. C'est le produit du scalaire λ par la matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ noté λA.

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1+2i & 1-i \\ -3 & -1+i & 0 \end{bmatrix}$;

$2A = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times (-1+2i) & 2(1-i) \\ 2 \times (-3) & 2(-1+i) & 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2+4i & 2-2i \\ -6 & -2+2i & 0 \end{bmatrix}$.

Remarque

La multiplication"." d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ par une matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ est telle que $\lambda A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on dit que la multiplication "." est une loi de composition **externe** dans $M_{pq}(\mathbb{K})$ car l'opérande $\lambda \in \mathbb{K}$ mais pas à $M_{pq}(\mathbb{K})$.

Propriétés de la multiplication par un scalaire d'une matrice

(i) $1.A = A$, pour tout élément $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$.1 étant l'élément neutre de $(\mathbb{K}^*, \times)$.
(ii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$, pour tout élément $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
(iii) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$.
(iv) $(\alpha+\beta) A = \alpha A + \beta A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, pour tout élément $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$.
Ainsi l'addition qui fait de l'ensemble $M_{pq}(\mathbb{K})$ des matrices de type (p, q) un groupe commutatif en association avec la loi de composition externe
(qui est la multiplicationon d'un scalaire par une matrice) vérifiant les propriétés sus-mentionnées fait de $M_{pq}(\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque

Soient $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^t(\lambda A)) = \lambda({}^tA)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.3.4 Produit de deux matrices

Le produit de matrices est **sous condition :**
$A \times B$ est **possible** si le nombre de colonnes de A est **égal** au nombre de lignes de B.
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$,

on pose : $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i \leq m \\ 1\leq j \leq p}} \in M_{m,p}(\mathbb{K})$, où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$
(on dit que l'on fait li-col, c'est-à-dire ligne par colonne) est le produit de la matrice A par B. En fait pour obtenir le terme c_{ij} de la matrice $A \times B = AB$, on multiplie les composantes de la $i^{ème}$ ligne de A par celles de la $j^{ème}$ colonne de B dans l'ordre et on fait la somme des différents produits.

On a symboliquement du point de vu des types de matrices

$$(m,n)(n,p) = (m,p).$$

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix};$$

$$A \times B = AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1\times 3 + 3 \times 1 & -1 \times (-1) + 3 \times (-3) & -1 \times 2 + 3 \times 4 & -1 \times 1 + 3 \times 7 \\ -4 \times 3 + 1 \times 1 & -4 \times (-1) + 1 \times (-3) & -4 \times 2 + 1 \times 4 & -4 \times 1 + 1 \times 7 \\ 0 \times 3 + 2 \times 1 & 0 \times (-1) + 2 \times (-3) & 0 \times 2 + 2 \times 4 & 0 \times 1 + 2 \times 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -8 & 10 & 20 \\ -11 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 8 & 14 \end{bmatrix}.$$

$B \times A$ n'est pas un produit possible car le nombre de colonnes de B égalant 4 n'est pas égal au nombre de lignes de A qui est 3.

Remarque

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

on a : $AB = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -15 & 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 & -20 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} = BA.$

Ainsi le **produit** de matrices **n'est pas commutatif**.

Définition

Quand on a deux matrices carrées A et B telles que $A \times B = B \times A$ on dit que A et B commutent(ou permutent).

Exemple

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, on constate que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = BA$$

Ainsi A et B commutent mais le produit de matrices n'est pas commutatif. Aussi A et B sont dites commutantes(permutantes).

Remarques

1.Formule du binôme de Newton

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, commutant(permutant) e.i. $A \times B = B \times A$, on a :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \complement_n^k A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \complement_n^k B^{n-k} A^k;$$

$$n \geq 1,\; n \in \mathbb{N},\; \complement_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $A \neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$, on a $A^0 = I_n$.

Propriétés

1. $A(B+C) = AB + AC$, $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall B, C \in M_{np}(\mathbb{K})$; ceci est la distributivité à gauche de la multiplication par rapport à l'addition.
2. $(A+B)C = AC + BC$, $\forall A, B \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall C \in M_{np}(\mathbb{K})$; ceci est la distributivité à droite de la multiplication par rapport à l'addition.

Vu 1) et 2) la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{np}(\mathbb{K})$,
$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
4. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$,$\forall B \in M_{np}(\mathbb{K})$,$\forall C \in M_{pr}(\mathbb{K})$,
$(AB)C = A(BC) = ABC$; ceci est l'associativitité de la multiplication des matrices.
5. $({}^t(AB)) = ({}^tB)({}^tA)$, $\forall A \in M_{pn}(\mathbb{K})$, $\forall B, \in M_{nq}(\mathbb{K})$.
6. $I_p.A = A = A.I_n$, $\forall A \in M_{pn}(\mathbb{K})$, I_P, I_n sont unitées d'ordre resp. p, n.

1.4 Trace d'une matrice carrée

Définition

Etant donné $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n (nombre de lignes = nombre de colonnes=n), on définit une application tr de $M_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$ nommée **trace** telle que $tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

$M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de type (n,n), dites aussi matrices carrée d'ordre n.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & 11 & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 74 & 9 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$,

alors $tr(A) = 7 + (-5) + (-3) + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 1 = \dfrac{\pi - 2}{2} = tr({}^tA)$.

Propriété

Etant données deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$,

i) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

ii) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$; $\lambda \in \mathbb{K}$.

iii) $tr(AB) = tr(BA)$.

iv) $tr(A) = tr({}^tA)$.

Je rappelle que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Preuve

iii) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ki} B_{ik} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ik} A_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} \\ &= tr(BA). \end{aligned}$$

iv) $tr({}^tA) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} A_{kk} = tr(A)$.

Remarques

1)$(M_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif .
L'élément unité se note I_n . Ainsi $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $AI_n = I_nA = A$.
2) Avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{M_2(\mathbb{C})}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq 0_{M_2(\mathbb{C})}$; on a :
$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ donc
$(M_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau **non intègre**.

1.5 Matrices inversibles

Définition
$A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
B est appelée **l'inverse** de A et se note $B = A^{-1} \neq \dfrac{1}{A}$ qui n'existe pas.
(B et A sont des matrices carrées **de même ordre**).
Exemple
Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ on a : $AB = BA = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Ainsi A est inversible d'inverse B et inversement ou A et B sont inverses l'une de l'autre.
Proposition
le produit de matrices inversibles est inversible.
Proposition
L'ensemble $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles est un groupe multiplicatif appelé le groupe linéaire.

1.6 Matrices équivalentes et matrices semblables

Définitions
i) Deux matrices $A,\ B \in M_{pq}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** s'ils existent $P \in M_p(\mathbb{K})$ inversible et $Q \in M_q(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PBQ \Leftrightarrow P^{-1}AQ^{-1} = B$.
ii) Deux matrices $A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = P^{-1}BP \Leftrightarrow PA = BP \Leftrightarrow PAP^{-1} = B \Leftrightarrow AP^{-1} = P^{-1}B$
ce qui entrainera que $tr(A) = tr(B)$.
Exemples
i) Soient $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Soit $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ avec $P' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
On constate que $PP' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Aussi $P'P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$

Soit $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On constate que $QQ' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

et $Q'Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = Q'$

Aussi $PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$

$PAQ = R$.

On a bien $PAQ = R$ avec $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible, $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ et $Q \in M_4(\mathbb{R})$ inversible donc A et R sont équivalentes.

ii) Soient $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$

avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ et $P' = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

On a : $PP' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aussi $P'P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$

On constate que :

$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} = D.$

donc M et D sont sont semblables.
Remarque
Deux matrices semblables **sont équivalentes.** Mais deux matrices équivalentes ne sont pas nécessairement semblables, il suffit qu'elles ne soient pas carrées.

1.7 Opérations élémentaires sur les matrices

Définition
Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$. On appelle *opérations élémentaires* sur A l'une des transformations suivantes :
1. Ajouter à une colonne(resp. ligne) de A le produit par un élément de $\mathbb{K}^*$ d'une **autre** colonne(resp. ligne) : on parle de **transvection** sur les colonnes (resp. lignes) de A.
Exemple
soit $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ en faisant $C_1' = C_1 + (-2)\,C_3$ on a :
$$B' = \begin{bmatrix} 3+(-2)\times 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1+(-2)\times 4 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -7 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$
Evidemment on a B équivalente à B', ce qui se note : $B \sim B'$
qui se lit B équivalente à B'.
2. Permuter les colonnes(resp. lignes) de A.
Exemple
$$\text{soit } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ permutons } L_1 \text{ et } L_3 \text{, on a :}$$
$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Evidemment on a A équivalente à A', ce qui se note : $A \sim A'$
qui se lit A équivalente à A'.
3. Multiplier une colonne(resp. ligne) de A par un élément de $\mathbb{K}^*$: on parle de **dilatation** ou d'**affinité** sur A.
Exemple
$$\text{soit } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ faisons } 4L_2 \text{ , on a :}$$
$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -16 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Evidemment on a A équivalente à A', ce qui se note : $A \sim A'$
qui se lit A équivalente à A'.
Définition
Les matrices $E_{ij} \in M_{pq}(\mathbb{K})$ tels que $a_{ij} = 1$ et $a_{rs} = 0$, si $r \neq i$ ou $s \neq j$, sont les matrices élémentaires de $M_{pq}(\mathbb{K})$.
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$,on a $A = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq i \leq p \\ 1\leq j \leq q}} a_{ij}E_{ij}$.

Exemples

$$E_{23}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\in M_{34}(\mathbb{R}),\ E_{42}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\in M_{42}(\mathbb{R})$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&a_{12}\\0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\a_{21}&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0&0\\0&a_{22}\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\a_{31}&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&a_{32}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}=a_{11}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}+a_{12}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}+a_{21}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$+a_{22}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}+a_{31}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix}+a_{32}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}+a_{31}E_{31}+a_{32}E_{32}$$

$$A=\sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ 3\\1\leq\ j\ \leq\ 2}}a_{ij}E_{ij}\in M_{32}(\mathbb{R})$$

1.8 Les opérations élémentaires sur les matrices avec les matrices élémentaires

D'abord, il est nécessaire de savoir que $\forall E_{ij},\ E_{kl}\in M_p(\mathbb{K})$, on a : $E_{ij}.E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$, où $\delta_{jk}=\begin{cases}1 \text{ si } j=k\\0 \text{ si } j\neq k\end{cases}$.

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p\\1\leq\ j\ \leq\ q}}\in M_{pq}(\mathbb{K})$, alors $A=\sum\limits_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p\\1\leq\ j\ \leq\ q}}a_{ij}E_{ij}$, et $\forall E_{kl}\in M_p(\mathbb{K})$,

$$E_{kl}.A=\sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p\\1\leq\ j\ \leq\ q}}a_{ij}E_{kl}E_{ij}=\sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p\\1\leq\ j\ \leq\ q}}a_{ij}\delta_{li}E_{kj}$$

$$=\sum_{1\leq\ j\ \leq\ q}a_{lj}E_{kj}=\begin{bmatrix}&&0&&\\a_{l1}&a_{l2}&\cdots&a_{l(q-1)}&a_{lq}\\&&0&&\end{bmatrix}\longleftarrow k^{ième}\text{ ligne}.$$

Aussi $\forall E_{kl}\in M_q(\mathbb{K})$,

$$AE_{kl}=\sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p\\1\leq\ j\ \leq\ q}}a_{ij}E_{ij}E_{kl}=\sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p\\1\leq\ j\ \leq\ q}}a_{ij}\delta_{jk}E_{il}$$

$$=\sum_{1\leq\ i\ \leq\ p}a_{ik}E_{il}=\begin{bmatrix}&a_{1k}&\\&a_{2k}&\\0&\vdots&0\\&a_{(p-1)k}&\\&a_{pk}&\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\uparrow\\ l^{i\grave{e}me}\text{ colonne}\end{array}$$

de là, on comprend ce qui suit :
Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$. On appelle *opérations élémentaires* sur A l'un des produits suivants :

1.a.Soit $r \neq s$, $A(I_q + \lambda E_{rs})$, $E_{rs} \in M_q(\mathbb{K})$, c'est ajouter à la colonne s de A le produit par un élément λ de $\mathbb{K}^*$ de la colonne r, on parle de **transvection** sur les colonnes de A.

b).Soit $r \neq s$, $(I_p + \lambda E_{rs})A$, $E_{rs} \in M_p(\mathbb{K})$, c'est ajouter à la ligne r de A le produit par un élément λ de $\mathbb{K}^*$ de la ligne s, on parle de **transvection** sur les lignes de A.

2.a.Soit $r \neq s$, $(I_p - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr})A$, $E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_p(\mathbb{K})$, c'est permuter les lignes r et s de A.

b) Soit $r \neq s$, $A(I_q - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr})$, $E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_q(\mathbb{K})$, c'est permuter les colonnes r et s de A.

3.a. $(I_p + (\lambda - 1)E_{rr})A$, $E_{rr} \in M_p(\mathbb{K})$, c'est multiplier la ligne r de A par un élément λ de $\mathbb{K}^*$: on parle de **dilatation** ou d'**affinité** sur A.

b. $A(I_q + (\lambda - 1)E_{rr})$, $E_{rr} \in M_q(\mathbb{K})$, c'est multiplier la colonne r de A par un élément λ de $\mathbb{K}^*$: on parle de **dilatation** ou d'**affinité** sur A.

Pratiquement, cela se fait aisément en augmentant la matrice A par la matrice identité de même nombre de lignes que A, à la suite de la dernière colonne de A, quand l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes, à la fin des opérations sur les lignes, on obtient à la place de la matrice identité, la matrice **L** par laquelle, il faudra multiplier par A, comme suit :
L.**A** pour avoir la transformation obtenue de A.
En ce qui concerne les opérations sur les colonnes, on augmente la matrice A par la matrice identité de même nombre de colonnes que A, à la suite de la dernière ligne de A, à la fin des opérations sur les colonnes, on obtient à la place de la matrice identité, la matrice **C** par laquelle, il faudra multiplier par A, comme suit :
AC pour avoir la transformation obtenue de A.

Remarque

Les matrices L et C supra, sont dites matrices produit de matrices d'opérations élémentaires sur A.

Définition

Les matrices :

1. $(I_q + (\lambda - 1)E_{rr})$, $E_{rr} \in M_q(\mathbb{K})$;
2. $(I_p + (\lambda - 1)E_{rr})$, $E_{rr} \in M_p(\mathbb{K})$;
3. $r \neq s$, $(I_q - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr})$, $E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_q(\mathbb{K})$;
4. $r \neq s$, $(I_p - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr})$, $E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_p(\mathbb{K})$;
5. $r \neq s$, $(I_p + \lambda E_{rs})$, $E_{rs} \in M_p(\mathbb{K})$;
6. $r \neq s$, $(I_q + \lambda E_{rs})$, $E_{rs} \in M_q(\mathbb{K})$

sont dites matrices d'opérations élémentaires. En somme,

Définition

Toute matrice par laquelle, on multiplie une matrice A pour obténir une matrice semblable à A est une matrice produit de matrices d'opérations élémentaires sur A.

Proposition(preuve avec le chapitre II)

$\det((I_q + \lambda E_{rs})) = \det((I_p + \lambda E_{rs})) = 1 \neq 0$,
$\det(I_p - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr}) = \det(I_q - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr}) = -1 \neq 0$,
$\det(I_p + (\lambda - 1)E_{rr}) = \det(I_q + (\lambda - 1)E_{rr}) = \lambda \neq 0$ car $\lambda \in K^*$, donc

Toute matrice d'opération élémentaire est inversible.
Proposition
Toute matrice carrée inversible est le produit de matrices d'opérations élémentaires.
Preuve
il suffit de se souvenir que toute matrice A carrée inversible est équivalente à la matrice identité de même ordre que A, moyennant des opérations élémentaires.

1.9 Matrices échelonnées

Définitions
i) Une matrice est **échelonnée** si :
• le nombre de zéros commençant une ligne(resp. colonne) croît strictement ligne par ligne(resp. colonne par colonne)jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros ou qu'il n'ait plus de ligne(resp. colonne).
ii) Elle est **échelonnée réduite à ligne canonique** si en plus :
• le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut 1 ;
• et c'est le seul élément non nul de sa colonne.
iii) Elle est **échelonnée réduite à colonne canonique** si en plus :
• le premier coefficient non nul d'une colonne (non nulle) vaut 1 ;
• et c'est le seul élément non nul de sa ligne.
iv) Elle est **échelonnée réduite** quand elle est à la fois échelonnée réduite à ligne et colonne canoniques.
v) **Echélonner réduire une matrice** A c'est lui trouver une matrice échélonnée réduite A' qui lui soit équivalente.
Lemme
Les opérations élémentaires sur les matrices servent à échelonner des matrices et les éléments non nuls d'une ligne ou (resp.d'une colonne) qui permette d'avoir des zéros sur les lignes qui suivent ou (resp.les colonnes qui suivent) sont appelés **pivots.**
Exemples
i) $A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ ceci est une matrice échelonnée. Les différents pivots sont : $-4;\ 1;\ -7;\ -3.$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ celle-là est une matrice échelonnée réduite.

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque

Une matrice A est inversible si et seulement si, échelonnée reduite elle est équivalente à une matrice **identité** de même ordre que A.

1.9.1 Inversion d'une matrice par les opérations élémentaires sur les matrices

Exemples
I) Avec opérations élémentaires sur les lignes :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

On augmente la matrice A de la matrice unité de même nombre de ligne que A à la suite de la dernière colonne de A comme suit :

$$\left[\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}}_{A} \Bigg| \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \right] = M \text{ et l'on cherchera à échelonner réduire la matrice } A$$

Ceci étant, déroulons :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ \\ -\frac{2}{3}L_3 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 - \frac{1}{2}L_3 \\ \end{array}.$$

Comme l'échelonnage de la matrice A sous la réduite à donner la matrice identité, alors la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

II) Avec opérations élémentaires sur les colonnes

On augmente la matrice A de la matrice unité de même nombre de colonne que A à la suite de la dernière ligne de A comme suit :

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = N \text{ et l'on cherchera à échelonner la matrice } A \text{ sous}$$

la forme échelonné réduite

Ceci étant, déroulons :

$$
\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\approx
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \mathrm{C}_2\text{-}\mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_3\text{-}\mathrm{C}_1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ \hline\hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}
\approx
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{C}_1+\frac{1}{2}\mathrm{C}_2 & -\frac{1}{2}\mathrm{C}_2 & \mathrm{C}_3\text{-}\frac{1}{2}\mathrm{C}_2 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \hline\hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}
$$

$$
\approx
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1+\frac{1}{3}C_3 & C_2+\frac{1}{3}C_3 & -\frac{2}{3}C_3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline\hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \end{array}
\Rightarrow A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right].
$$

1.10 Rang d'une matrice

Proposition

Etant donnée une matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, à l'aide des opérations élémentaires sur A, A sera équivalente à une matrice de la forme suivante : $R = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r(q-r)} \\ 0_{(p-r)r} & 0_{(p-r)(q-r)} \end{bmatrix}$

où $r \leq \inf(p,q)$, I_r est la matrice unité d'ordre r et

0_{st} est la matrice identiquement nulle avec s lignes et t colonnes.

R est la matrice échelonnée réduite de A. On appelle l'entier r le rang de la matrice A et il se note $rg(A) = r = rg({}^tA)$.

Proposition

Deux matrices sont **équivalentes ssi** elles ont le même rang.

Preuve

Soient $A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$ de même rang, alors ils existent P_1, $P_2 \in GL_P(\mathbb{K})$ et $Q_1, Q_2 \in GL_q(\mathbb{K})$ telles que

$P_1AQ_1 = R = P_2BQ_2 \Longleftrightarrow P_2^{-1}P_1AQ_1Q_2^{-1} = B$ avec

$P_2^{-1}P_1 \in GL_P(\mathbb{K})$ et $Q_1Q_2^{-1} \in GL_q(\mathbb{K})$, ce qui veut dire que A et B sont équivalentes. $GL_P(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p inversibles.

R est la matrice échelonnée réduite à la fois de A et de B, définissant le même rang pour A et B.

Remarque

Toute opération élémentaire sur une matrice A, produit une matrice A' qui est équivalente à A. Donc $rg(A) = rg(A')$.

Proposition

Le rang d'une matrice échelonnée ou échelonnée reduite est égale au nombre de ses lignes non nulles(si l'échelonnage a été effectué avec les opérations élémentaires sur les lignes) ou au nombre de colonnes non nulles(si l'échelonnage a été effectué avec les opérations élémentaires sur les colonnes).

Remarque

Le rang de A est indépendante des opérations élémentaires ayant permis son échelonnage ou son échelonnage réduit.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, recherchons le rang de A.
Nous allons faire des opérations élémentaires sur les lignes de A en augmentant A de la matrice identité de même nombre de lignes que A, à la suite de la dernière colonne de A. Et on fait les opérations élémentaires sur la matrice augmentée. Ainsi d'entée, on a :

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{matrix}}_{A}\left|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3}\right.\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{12}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{matrix}\left|\begin{matrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{matrix}\right.\right] \begin{matrix} \frac{1}{5}L_1 \\ L_2 - \frac{3}{5}L_1 \\ L_3 - \frac{1}{5}L_1 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{R'}\left|\underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}}_{P}\right.\right] \begin{matrix} L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ \frac{5}{4}L_2 \\ L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{matrix}$$

Evaluons :

$$PA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc : $PA = R'$.

Définition

R' est dite matrice échélonnée à lignes canoniques de A car le premier terme non nul d'une ligne non nulle est 1.

Remarques

1.Le meilleur choix pour opérations élémentaires sur lignes ou colonnes d'une matrice de type (p, q) : il faut choisir de travailler sur les lignes si $p < q$ sinon sur les colonnes.

2. Quand on veut travailler avec deux éléments d'une même ligne, il faut opérer avec les colonnes.

3.Quand on veut travailler avec deux éléments d'une même colonne, il faut opérer avec les lignes.

4.On peut d'or et déjà compter le nombre de lignes non nulles de R' (parce qu'on a travaillé sur les lignes), et ce nombre est égal au rang de A. Il en serait de même si on avait travaillé sur les colonnes.

Suite de ce qui précède.
On continue les opérations élémentaires sur les colonnes cette fois-ci, en augmentant R' à la suite de sa troisième ligne par la matrice identité de même nombre de colonnes que R', c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} & & C_3\text{-}2C_1 & C_4\text{-}3C_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} & & C_3+3C_2 & C_4+4C_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ici on a : $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et on pose $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Evaluons :

$$PAQ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $PAQ = R$.

Ainsi ayant $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, avec $Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

on a : $QQ' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

de même $Q'Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Donc Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = Q'$.

Ayant $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, avec $P' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

on a :

$$PP' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de même $P'P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$.

Comme on a : $PAQ = R$ et que P et Q sont des matrices carrées inversibles d'ordre respectif 3 et 4 on a bien A est équivalente à R et le rang de A est 2.

Proposition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si le rang de A est égal à n.

Proposition

Deux matrices carrées **semblables**, ont nécessairement
la même trace et le même rang.

Remarque

Voici deux matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

Le rang de $A =$ le rang de $B = 1$, mais elles ne sont pas semblables

car $tr\,(A) = 0 \neq 1 = tr\,(B)$, alors que si elles étaient semblables,
elles devraient avoir nécessairement la même trace.

Exercice 1

A l'aide des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, décrire l'ensemble des triplets réels (a, b, c) rendant le rang de la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ -1 & 2 & b & c \\ 2 & -1 & c & a \end{bmatrix}$ égal à 2.

Correction de l'exo. 1

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ -1 & 2 & b & c \\ 2 & -1 & c & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 3 & b+a & c+b \\ 0 & -3 & c-2a & a-2b \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 3 & b+a & c+b \\ 0 & 0 & b-a+c & a-b+c \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix}$$

Alors M serait de rang 2 si $\begin{cases} b-a+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Rightarrow 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow a = b$

Dés lors pour tout triplet $(a, a, 0)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ va entrainer que le rang de M est 2.

Exercice 2

1) Réduire à la forme échélonnée puis à la forme ligne canonique les matrices suivantes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Si pour $i = 1, 2$, B_i est la forme ligne canonique de A_i déterminer la matrice P_i telle que $B_i = P_i A_i$.

2) Réduire à la forme échélonnée puis à la forme colonne canonique les matrices précédentes.

Si pour $i = 1, 2$, C_i est la forme ligne canonique de A_i déterminer la matrice Q_i telle que $C_i = A_i Q_i$.

Correction de l'exo.2

1) On augmente la matrice A_1 à la suite de sa dernière colonne par la matrice I_4
car le nombre de lignes de A_1 est 4.
Aussi on échelonne réduire à ligne canonique la matrice A_1
avec les opérations élémentaires sur les lignes :

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -L_3 \\ L_2 + L_3 \\ L_1 + 2L_3 \\ \end{matrix}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_3 + 3L_2 \\ L_4 - 2L_2 \end{matrix}.$$

Evaluons :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \times A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

On refait la même chose pour A_2 ; on aura donc :

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_3 \\ L_2 + 2L_3 \\ L_1 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -23 & -28 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -9 & -10 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - 3L_2 \\ -L_2 \\ L_3 + 3L_2 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 + \frac{23}{29}L_3 \\ L_2 + \frac{9}{29}L_3 \\ \frac{1}{29}L_3 \end{array}.$$

Evaluons :

$$\begin{bmatrix} \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} \end{bmatrix} \times A_2 = \begin{bmatrix} \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $P_2 = \begin{bmatrix} \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} \end{bmatrix}$.

2) On augmente la matrice A_1 à la suite de sa dernière ligne par la matrice I_3 car le nombre de colonnes de A_1 est 3.

Aussi on échelonne réduire à colonne canonique la matrice A_1 avec les opérations élémentaires sur les colonnes :

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}C_1 & C_2+\frac{3}{2}C_1 & C_2+2C_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & 11 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline\hline \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\approx \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1-\frac{3}{11}C_2 & \frac{2}{11}C_2 & C_3-2C_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{11} & \frac{-3}{11} & 0 \\ \frac{-6}{11} & \frac{4}{11} & 0 \\ \hline\hline \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ \frac{-3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

.

Evaluons :

$$A_1 \times \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ -\frac{6}{11} & \frac{4}{11} & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi : $Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ -\frac{6}{11} & \frac{4}{11} & 0 \end{bmatrix}$.

On refait la même chose pour A_2 ; on aura donc :

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -C_4 & C_2+3C_4 & C_3+2C_4 & C_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 23 & 13 & -2 \\ -2 & 3 & 8 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\approx \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1-3C_4 & -\frac{1}{2}C_4 & C_3+\frac{13}{2}C_4 & C_2+\frac{23}{2}C_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & \frac{29}{2} \\ \hline\hline -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\approx \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1+\frac{10}{29}C_3 & C_2+\frac{1}{29}C_3 & \frac{2}{29}C_3 & C_4-C_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\hline -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Evaluons :

$$A_2 \times \begin{bmatrix} -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi $Q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{bmatrix}$ et $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.