

## Applications linéaires, matrices, déterminants

### ✗ Exercice 1.

Soit  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  par

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Déterminer  $\ker(u)$ .

Allez à : [Correction exercice 1](#)

### ✗ Exercice 2.

Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$$

On appelle  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\beta' = (f_1, f_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Donner une base et la dimension de  $\ker(f)$  et une base et la dimension de  $\text{Im}(f)$ .

Allez à : [Correction exercice 2](#)

### ✗ Exercice 3.

Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie pour tout vecteur  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Donner une base de  $\ker(f)$ , en déduire  $\dim(\text{Im}(f))$ .
3. Donner une base de  $\text{Im}(f)$ .

Allez à : [Correction exercice 3](#)

### Exercice 4.

On considère l'application  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$$

1. Montrer que  $h$  est une application linéaire.
2. Montrer que  $h$  est ni injective ni surjective.
3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Allez à : [Correction exercice 4](#)

### Exercice 5.

Soit  $f$  l'application linéaire  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)$$

Et soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Calculer  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$  et  $f(e_3)$ .
2. Déterminer les coordonnées de  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$  et  $f(e_3)$  dans la base canonique.
3. Calculer une base de  $\ker(f)$  et une base de  $\text{Im}(f)$ .

Allez à : [Correction exercice 5](#)

### Exercice 6.

Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie pour tout vecteur  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.

2. Donner une base de  $\ker(f)$ , en déduire  $\dim(\operatorname{Im}(f))$ .

3. Donner une base de  $\operatorname{Im}(f)$ .

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7.

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie pour tout  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur  $a \in \mathbb{R}^3$ , non nul, tel que  $\ker(f) = \operatorname{Vect}(a)$ , déterminer un vecteur qui convient.

2. Soit  $b = e_1 + e_2$  et  $c = e_2 - e_3$

a. Calculer  $f(b)$  et  $f(c)$

b. En déduire que  $\{b, c\}$  est une base de  $\operatorname{Im}(f)$ .

On pourra utiliser une autre méthode.

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant  $\operatorname{Im}(f)$ .

4. A-t-on  $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$  ?

Allez à : [Correction exercice 7](#)

✗ Exercice 8.

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3; \quad u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3; \quad u(e_3) = 3f_1 - f_3 \quad \text{et} \quad u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3$$

1. Déterminer l'image par  $u$  dans vecteurs  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

2. Déterminer une base de  $\ker(u)$  et sa dimension de  $\ker(u)$ .

3. Déterminer une base de  $\operatorname{Im}(u)$  et sa dimension.

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9.

Soit  $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application définie pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$$

Soit  $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

1. Donner une base de  $\ker(u)$  et sa dimension.

2. Donner une base (La plus simple possible) de  $\operatorname{Im}(u)$  et sa dimension.

3. A-t-on  $\ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}^4$  ?

4. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ , en donner une base et sa dimension.

5. A-t-on  $\ker(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$  ?

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

On appelle  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

Soit  $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  qui, à un vecteur  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  associe le vecteur  $u(x) \in \mathbb{R}^4$  défini par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4, -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

On admettra que  $u$  est une application linéaire.

1. Déterminer une base du noyau de  $u$ .

2. Déterminer une base de l'image de  $u$ .

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant  $\operatorname{Im}(u)$ .

Allez à : [Correction exercice 10](#)

## Exercice 11.

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont l'image de la base canonique  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  est :

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2$$

$$f(e_2) = 8e_1 + 7e_2$$

$$f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3$$

1. Pour tout vecteur  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  déterminer  $f \circ f(x)$ .
2. En déduire que  $f$  est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer  $f^{-1}$ .

Allez à : [Correction exercice 11](#)

## Exercice 12.

Soit  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  définie pour tout  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  par

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
3. A-t-on  $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$  ?

Allez à : [Correction exercice 12](#)

## Exercice 13.

Soit l'application  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie pour tout  $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Déterminer une base de  $\ker(f)$ .
3. Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .

Allez à : [Correction exercice 13](#)

## Exercice 14.

Soit  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Déterminer une base de  $\ker(u)$  et une base de  $\text{Im}(u)$ .
3. A-t-on  $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$  ?

Allez à : [Correction exercice 14](#)

## Exercice 15.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$

Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$u(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3; \quad u(e_2) = e_2 - 3e_3; \quad u(e_3) = -2e_2 + 2e_3$$

1. Soit  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  un vecteur.  
Déterminer l'image par  $u$  du vecteur  $x$ . (Calculer  $u(x)$ ).
2. Soient  $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = 2x\}$  et  $F = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$   
Montrer que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer une base de  $E$  et une base de  $F$ .
4. Y a-t-il  $E \oplus F = \mathbb{R}^3$  ?

Allez à : [Correction exercice 15](#)

## Exercice 16.

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$

Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire telle que :

$$f(e_1) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3), f(e_2) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \text{ et } f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$$

Soient  $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$  et  $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$

1. Montrer que  $E_{-1}$  et  $E_1$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Montrer que  $e_1 - e_2$  et  $e_1 - e_3$  appartiennent à  $E_{-1}$  et que  $e_1 + e_2 + e_3$  appartient à  $E_1$ .
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de  $E_{-1}$  et de  $E_1$  ?
4. Déterminer  $E_{-1} \cap E_1$ .
5. A-t-on  $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$  ?
6. Calculer  $f^2 = f \circ f$  et en déduire que  $f$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

Allez à : [Correction exercice 16](#)

Exercice 17.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$

Soient

$$a = \frac{1}{3}(2, -2, 1); b = \frac{1}{3}(2, 1, -2); c = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$$

Soit  $\beta' = (a, b, c)$

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$u(e_1) = 3e_1 + e_2 - e_3$$

$$u(e_2) = e_1 + 7e_2$$

$$u(e_3) = -e_1 - e_3$$

1. Montrer que  $\beta'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , calculer  $u(x)$ .
3. Montrer que :

$$u(a) = 3a - 3c$$

$$u(b) = 3b + 3c$$

$$u(c) = -3a + 3b + 3c$$

Allez à : [Correction exercice 17](#)

Exercice 18.

Soit  $p$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  qui à tout vecteur  $u = (x, y, z)$  associe le vecteur

$$p(u) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z)$$

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $p^2 = p \circ p$ .

1. Montrer que  $p$  est une application linéaire.
2. Calculer  $p(e_1)$ ,  $p(e_2)$  et  $p(e_3)$ , puis  $p^2(e_1)$ ,  $p^2(e_2)$  et  $p^2(e_3)$ , que peut-on en déduire sur  $p^2(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^3$  ?
3. Donner une base de  $\text{Im}(p)$  et une base de  $\ker(p - \text{Id})$ , montrer que ces deux espaces vectoriels sont égaux.
4. Montrer que  $\ker(p) \oplus \text{Im}(p) = \mathbb{R}^3$

Allez à : [Correction exercice 18](#)

Exercice 19.

Soit  $E$  un espace vectoriel. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^2 = f \circ f = \text{Id}_E$ .

On pose  $E_1 = \ker(f - \text{Id}_E)$  et  $E_2 = \ker(f + \text{Id}_E)$

1. Soit  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ . Calculer  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$ .
2. Pour tout  $x \in E$  écrire  $x = \frac{f(x)+x}{2} - \frac{f(x)-x}{2}$  et montrer que  $E_1 \oplus E_2 = E$
3. On suppose que  $E$  est de dimension finie et que  $f \neq \pm \text{Id}_E$ . Soit  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une base de  $E$  telle que :  $E_1 = \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$  et  $E_2 = \text{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$  calculer  $f(v_i)$  dans la base  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

Allez à : [Correction exercice 19](#)

Exercice 20.

Soit  $\beta = (e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $u(e_1) = e_1 + e_2$  et tel que  $\dim(\ker(u)) = 1$

1. Déterminer  $u(e_2)$  en fonction d'un paramètre  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Déterminer l'image d'un vecteur  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  en fonction de  $a$ .
3. Déterminer une base du noyau de  $\ker(u)$ .

Allez à : [Correction exercice 20](#)

Exercice 21.

Soit  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application définie pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

On appelle  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par  $f$ . En déduire la dimension de  $\text{im}(f)$ .
2. Déterminer la dimension de  $\ker(f)$  et en donner une base.

Allez à : [Correction exercice 21](#)

Exercice 22.

Soit  $u$  l'application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  par :

$$u(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

1. Montrer que  $u$  est une application linéaire.
2. Déterminer les dimensions de  $\text{Im}(u)$  et de  $\ker(u)$ .

Allez à : [Correction exercice 22](#)

Exercice 23.

Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ ,  $E$  étant un espace vectoriel de dimension  $n$  avec  $n$  pair.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

- (a)  $u^2 = O_E$  (où  $O_E$  est l'application linéaire nulle) et  $n = 2 \dim(\text{Im}(u))$
- (b)  $\text{Im}(u) = \ker(u)$

Allez à : [Correction exercice 23](#)

Exercice 24.

Question de cours

Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  vers  $E$ .

Montrer que :  $u$  est injective si et seulement si  $\ker(u) = \{0_E\}$ .

Allez à : [Correction exercice 24](#)

Exercice 25.

Soit  $u: E \rightarrow E$  une application linéaire et  $\lambda$  un réel.

1. Soit  $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$ . Calculer  $u(x)$  pour  $x \in E_\lambda$   
Montrer que  $E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , montrer que  $u(F)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. Si  $\lambda \neq 0$ , montrer que  $u(E_\lambda) = E_\lambda$

Allez à : [Correction exercice 25](#)

Exercice 26.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension respectives  $n$  et  $p$

Soit  $u: E \rightarrow F$  une application linéaire

1. Montrer que si  $n < p$  alors  $u$  n'est pas surjective.
2. Montrer que si  $n > p$  alors  $u$  n'est pas injective.

Allez à : [Correction exercice 26](#)

Exercice 27.

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application linéaire

Montrer que :

$$\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = f(\ker(f^2))$$

Allez à : [Correction exercice 27](#)

Exercice 28.

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)$$

Allez à : [Correction exercice 28](#)

Exercice 29.

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  un espace vectoriel.

1. Montrer que  $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ .
2. Montrer que  $\operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Im}(u)$ .

Allez à : [Correction exercice 29](#)

Exercice 30.

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- (i)  $\ker(u) \cap \operatorname{im}(u) = \{0_E\}$
- (ii)  $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Allez à : [Correction exercice 30](#)

Exercice 31.

Soit  $u: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , une application linéaire,  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  et  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^q$ .

1.  $p = 3, q = 2$

$$u(e_1) = f_1 + 2f_2, u(e_2) = 2f_1 - f_2 \text{ et } u(e_3) = -f_1 + f_2$$

- a) Déterminer l'image d'un vecteur  $x = (x_1, x_2, x_3)$  par  $u$ .
- b) Déterminer la matrice de  $u$  de la base  $\underline{e}$  dans la base  $\underline{f}$ .
- c) Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

2.  $p = 3$  et  $q = 3$ , dans cette question  $\underline{e} = \underline{f}$

$$u(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3, u(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \text{ et } u(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

- a) Déterminer l'image d'un vecteur  $x = (x_1, x_2, x_3)$  par  $u$ .
- b) Déterminer la matrice de  $u$  de la base  $\underline{e}$  dans la base  $\underline{e}$ .
- c) Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

Allez à : [Correction exercice 31](#)

Exercice 32.

Soit  $u: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , une application linéaire,  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  et  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^q$ .

1.  $p = 2, q = 3$

$$A = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer l'image d'un vecteur  $x = (x_1, x_2)$  par  $u$ .
  - Déterminer l'image de la base  $\underline{e}$  (c'est-à-dire  $u(e_1)$  et  $u(e_2)$ ).
  - Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .
2.  $p = 4, q = 4$ , dans cette question  $\underline{e} = \underline{f}$

$$A = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

- Déterminer l'image d'un vecteur  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  par  $u$ .
- Déterminer l'image de la base  $\underline{e}$  (c'est-à-dire  $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$  et  $u(e_4)$ ).
- Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

Allez à : [Correction exercice 32](#)

### Exercice 33.

Soit  $u: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , une application linéaire,  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  et  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^q$ .

1.  $p = 3$  et  $q = 3$  dans cette question  $\underline{e} = \underline{f}$ . Soit  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

(On admet que  $u$  est une application linéaire).

- Déterminer l'image de la base  $\underline{e}$  (c'est-à-dire  $u(e_1), u(e_2)$ , et  $u(e_3)$ ).
  - Déterminer la matrice de  $u$  de la base  $\underline{e}$  dans la base  $\underline{e}$ .
  - Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .
2.  $p = 3$  et  $q = 3$  dans cette question  $\underline{e} = \underline{f}$ . Soit  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

(On admet que  $u$  est une application linéaire).

- Déterminer l'image de la base  $\underline{e}$  (c'est-à-dire  $u(e_1), u(e_2)$ , et  $u(e_3)$ ).
- Déterminer la matrice de  $u$  de la base  $\underline{e}$  dans la base  $\underline{e}$ .
- Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

Allez à : [Correction exercice 33](#)

### Exercice 34.

Soit  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathbb{R}^3$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

- Déterminer une base du noyau de  $f$ .
- Déterminer une base de l'image de  $f$ . Quel est le rang de  $A$  ?

Allez à : [Correction exercice 34](#)

### Exercice 35.

Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allez à : [Correction exercice 35](#)

## Exercice 36.

Soit la matrice  $A$  de définie par :  $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que  $A$  est inversible et calculer son inverse  $A^{-1}$ .
2. En déduire  $A^n$ , pour tout  $n$  entier.

Allez à : [Correction exercice 36](#)

## Exercice 37.

Soit  $A$  la matrice de définie par :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^2$ .
2. Trouver un polynôme  $P$  de degré 2 tel que  $P(A) = 0$ .
3. En déduire  $A^{-1}$ .
4. Retrouver  $A^{-1}$  par une autre méthode.

Allez à : [Correction exercice 37](#)

## Exercice 38.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ . Calculer  $A^3 - A^2 + A - I$ .
2. Exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A^2$ ,  $A$  et  $I$ .
3. Exprimer  $A^4$  en fonction de  $A^2$ ,  $A$  et  $I$ .

Allez à : [Correction exercice 38](#)

## Exercice 39.

Soit  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer  $(A - 2I)^3$ , puis en déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$  en fonction de  $I$ ,  $A$  et de  $A^2$ .

Allez à : [Correction exercice 39](#)

## Exercice 40.

A tout nombre réel  $t$  on associe la matrice :  $M(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) & \text{sh}(t) \\ \text{sh}(t) & \text{ch}(t) \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit des matrices  $M(t_1)$  et  $M(t_2)$ , où  $t_1$  et  $t_2$  sont deux réels quelconques.
2. Montrer que  $M(t)$  est inversible, et déterminer  $M^{-1}(t)$ .

Allez à : [Correction exercice 40](#)

## Exercice 41.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$

Soit  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  dont on donnera une base  $a$ .
2. Soient  $b = (0,1,1)$  et  $c = (1,1,2)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer  $u(b)$  et  $u(c)$ .



3. Montrer que  $\beta' = (a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Déterminer la matrice de passage  $P$  de  $\beta$  à  $\beta'$ .
5. Calculer  $P^{-1}$ .
6. Déterminer la matrice  $D$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .
7. Donner la relation entre  $A, P$  et  $D$ .

Allez à : [Correction exercice 41](#)

#### Exercice 42.

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$  et  $\beta = (e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\beta$ .
3.
  - a) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
  - b) En déduire que  $f$  est inversible.
  - c) Déterminer  $f^{-1}$  dans la base  $\beta$ , en déduire  $A^{-1}$ .
4. Montrer que  $A = RH$ .

Où  $H$  est la matrice d'une homothétie dont on donnera le rapport et  $R$  est la matrice d'une rotation dont on donnera l'angle.

Soient  $a = e_1 + e_2$  et  $b = e_1 - e_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . On pose  $\beta' = (a, b)$ .

5. Montrer que  $\beta' = (a, b)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
6. Calculer  $f(a)$  et  $f(b)$ .
7. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\beta'$ .

Allez à : [Correction exercice 42](#)

#### Exercice 43.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soient  $a = e_1 - e_2 + e_3$ ,  $b = 2e_1 - e_2 + e_3$  et  $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que  $\beta' = (a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer la matrice de passage  $P$  de  $\beta$  à  $\beta'$ . Calculer  $P^{-1}$ .
3. Déterminer la matrice  $R$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .
4.
  - a) Calculer  $P^{-1}AP$  en fonction de  $R$
  - b) Calculer  $R^4$
  - c) En déduire les valeurs de  $A^{4n}$ .

Allez à : [Correction exercice 43](#)

#### Exercice 44.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $u$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$$

$$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$$

$$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$$

1. Déterminer la matrice de  $u$  dans la base canonique.

- Montrer que  $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que la dimension de  $E$  est 1 et donner un vecteur non nul  $a$  de  $E$ .
- Montrer que  $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Donner une base  $(b, c)$  de  $F$ .
- Montrer que  $\beta' = (a, b, u(b))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Montrer que  $E \oplus F = \mathbb{R}^3$ .
- Déterminer la matrice  $R$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .

Allez à : [Correction exercice 44](#)

#### Exercice 45.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $u$  l'application linéaire qui à un vecteur  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  associe le vecteur

$$u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$$

- Déterminer la matrice  $A$  de  $u$  dans la base canonique.
- Déterminer une base  $(a, b)$  de  $\ker(u - Id)$ .
- Donner un vecteur  $c$  tel que  $\ker(u) = \text{vect}(c)$ .
- Montrer que  $\beta' = (a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer la matrice  $D$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .
- Montrer que  $\text{Im}(u) = \ker(u - Id)$ .
- Montrer que  $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$ .

Allez à : [Correction exercice 45](#)

#### Exercice 46.

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3)$  par

$$u(x) = (-10x_1 + 3x_2 + 15x_3, -2x_1 + 3x_3, -6x_1 + 2x_2 + 9x_3)$$

- Déterminer la matrice  $A$  de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer la dimension du noyau et de l'image de  $u$ . On donnera un vecteur directeur  $a$  de  $\ker(u)$ .
- A-t-on  $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$  ?
- Déterminer un vecteur  $b$  tel que  $a = u(b)$ .
- Montrer que  $E_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , déterminer un vecteur directeur de  $E_{-1}$  que l'on notera  $c$ .
- Montrer que  $\beta' = (a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer la matrice  $A'$  de  $u$  dans la base  $\beta'$  et donner la relation reliant  $A$  et  $A'$ .

Allez à : [Correction exercice 46](#)

#### Exercice 47.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice par rapport à la base  $\beta$  est :  $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit  $\beta' = (a, b, c, d)$  une famille de  $\mathbb{R}^4$  définie par :

$$a = e_1 - e_2, b = e_1 - e_2 - e_3, c = 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4 \text{ et } d = -e_1 + 2e_2$$

- Montrer que  $\beta' = (a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
- Calculer  $f(a)$ ,  $f(b)$ ,  $f(c)$  et  $f(d)$  et les exprimer dans la base  $\beta' = (a, b, c, d)$ .
- Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\beta'$ .

Allez à : [Correction exercice 47](#)

#### Exercice 48.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$a = (-1, 1, 0, -1)$ ,  $b = (1, -2, -1, 1)$ ,  $c = (-2, 3, 1, -1)$  et  $d = (2, -1, 0, 1)$

1. Montrer que  $\beta' = (a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Donner la matrice de passage  $P$  de  $\beta$  à  $\beta'$ . Calculer  $P^{-1}$ .
3. Calculer  $u(a)$ ,  $u(b)$ ,  $u(c)$  et  $u(d)$  dans la base  $\beta'$ .
4. Déterminer la matrice  $T$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .
5. Calculer  $N = T + I$ , puis  $N^4$  et en déduire  $(A + I)^4$ .

Allez à : [Correction exercice 48](#)

Exercice 49.

Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique,  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ , est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre vecteurs

$a = -2e_1 - e_2 - e_3 - e_4$ ;  $b = e_2 - e_4$ ;  $c = 2e_1 + e_3 + e_4$ ;  $d = 3e_1 + e_3 + 2e_4$

1. Montrer que  $\beta' = (a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Calculer  $u(a)$ ,  $u(b)$ ,  $u(c)$  et  $u(d)$  dans la base  $\beta' = (a, b, c, d)$
3. En déduire la matrice  $D$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .
4. Déterminer la matrice  $P$  de passage de  $\beta$  à  $\beta'$ .
5. Calculer  $P^{-1}$ .
6. Calculer  $P^{-1}AP$ .

Allez à : [Correction exercice 49](#)

Exercice 50.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose  $a = e_1 + e_2 + e_3$ ,  $b = e_1$ ,  $c = u(b)$  et  $d = u^2(b)$ .

1. Montrer que  $\beta' = (a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Donner la matrice de passage  $P$  de  $\beta$  à  $\beta'$ . Calculer  $P^{-1}$ .
3. Calculer  $u(a)$ ,  $u(b)$ ,  $u(c)$  et  $u(d)$  dans la base  $\beta'$ .
4. Déterminer la matrice  $N$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .
5. Calculer  $N^4$  et en déduire  $A^4$ .
6. Donner une base de  $\ker(u)$
7. Donner une base de  $\text{Im}(u)$ .

Allez à : [Correction exercice 50](#)

Exercice 51.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur  $a$  non nul tel que  $\ker(u) = \text{vect}(a)$
2. Déterminer un vecteur  $b$  tel que  $a = u(b)$
3. Déterminer un vecteur  $c$  tel que  $u(c) = -c$
4. Soit  $d = (-1, 0, 0, -1)$ , montrer que  $\beta' = (a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$
5. Calculer  $u(d)$  dans la base  $\beta'$ .
6. Déterminer la matrice  $T$  de  $u$  dans  $\beta'$ .
7. Quel est le rang de  $A$ .
8. Soit  $f = 2e_1 - e_2 - e_3 + e_4 = (2, -1, -1, 1)$   
Calculer  $u(f)$ ,  $u^2(f)$ ,  $u^3(f)$  et on admettra que  $\beta'' = (f, u(f), u^2(f), u^3(f))$  est une base de  $\mathbb{R}^4$
9. Calculer  $u^4(f)$  et montrer que  $u^4(f) = -2u^3(f) - u^2(f)$   
En déduire la matrice  $C$  de  $u$  dans la base  $\beta''$ .
10. Montrer que  $C$  et  $T$  sont deux matrices semblables (c'est-à-dire qu'il existe une matrice  $R$ , inversible, telle que  $T = R^{-1}CR$ )

Allez à : [Correction exercice 51](#)

#### Exercice 52.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$

Soit  $u$  l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Donner une base  $(a, b)$  de  $\ker(u)$ .
2. Donner un vecteur  $c$  qui engendre  $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = x\}$
3. Déterminer un vecteur  $d \in \ker((u - id)^2)$  et  $d \notin \ker(u - id)$ , on pourra calculer  $(A - I)^2$ , en déduire que  $d$  vérifie  $u(d) = \lambda c + d$ , où  $\lambda$  est un réel qui dépendra du vecteur  $d$  que vous avez choisi.
4. Montrer que  $\beta' = (a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
5. Déterminer la matrice  $T$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ . (en fonction de  $\lambda$ )

Allez à : [Correction exercice 52](#)

#### Exercice 53.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$

Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base  $\beta$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur  $a$  qui engendre le noyau de  $u$ .
2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = \lambda x\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .
3. Trouver un vecteur directeur  $b$  de  $E_{-1}$ . Déterminer une base  $(c, d)$  de  $E_1$ .
4. Montrer que  $\beta' = (a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
5. Déterminer la matrice de  $u$  dans la base  $\beta'$ .

Allez à : [Correction exercice 53](#)

## Exercice 54.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \text{Mat}_{\beta}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose  $a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2e_4$ ,  $a_2 = e_2 + e_3$ ,  $a_3 = e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4$  et  $c = -e_1 - e_2 - e_3$ .  
On pose  $F = \text{Vect}(a_1, a_2, a_3)$ .

1. Montrer que  $\beta' = (a_1, a_2, a_3, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$  et donner la matrice  $P$  de passage de  $\beta$  à  $\beta'$ .
2. Déterminer la matrice  $D$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in F$ ,  $u(x) \in F$  en déduire que  $v: F \rightarrow F$  définie par  $v(x) = u(x)$  est un endomorphisme de  $F$ , déterminer la matrice de  $v$  dans la base  $\beta_a = (a_1, a_2, a_3)$ .
4. Montrer que  $\mathbb{R}^4 = F \oplus \text{Vect}(c)$ .
5. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^4$  il existe un unique couple de vecteurs  $(f, g) \in F \times \text{Vect}(c)$  tels que :  $x = f + g$ , calculer  $u(x)$ .

Allez à : [Correction exercice 54](#)

## Exercice 55.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A - \lambda I$  ne soit pas inversible. Déterminer alors  $\ker(A - \lambda I)$ .
2. Soit  $a = (-3, 1, 2)$ , calculer  $u(a)$ .
3. Déterminer  $b \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u(b) = a - b$ , puis  $c \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u(c) = b - c$ .
4. Montrer que  $\beta' = (a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
5. Déterminer  $T = \text{mat}_{\beta'}(u)$ .
6. Montrer que  $(T + I)^3 = O$  (la matrice nulle). En déduire  $(A + I)^3$ .
7. Déterminer  $A^{-1}$  en fonction de  $A^2$ ,  $A$  et  $I$ .

Allez à : [Correction exercice 55](#)

## Exercice 56.

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On considère l'application linéaire  $f$  définie par

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3; f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3; f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

On note  $f^2 = f \circ f$ .

1. Déterminer la matrice de  $f$  dans  $\beta$ .
2. Montrer que  $E_1 = \ker(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$  et que  $N_{-1} = \ker(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer  $a, b$  deux vecteurs tels que  $E_1 = \text{Vect}(a)$  et  $N_{-1} = \text{Vect}(b, f(b))$ . A-t-on  $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$  ?
4. Montrer que  $\beta' = (a, b, f(b))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
5. On appelle  $\beta' = (a, b, f(b))$ , quelle est la matrice de  $f$  dans  $\beta'$ .
6. Quelle est la matrice de  $f^2$  dans  $\beta'$  ?

Allez à : [Correction exercice 56](#)

## Exercice 57.

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

Partie I

Soit  $e_2 = (0, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$

1. Calculer  $u(e_2)$ ,  $u^2(e_2)$  et  $u^3(e_2)$  et montrer que  $\beta' = (e_2, u(e_2), u^2(e_2), u^3(e_2))$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Calculer  $u^4(e_2)$  dans la base en fonction de  $u^2(e_2)$  et  $e_2$ . Déterminer la matrice  $C$  de  $u$  dans la base  $\beta'$

Partie II

3. Déterminer un vecteur  $a \in \mathbb{R}^4$  tel que  $u(a) = a$  dont la première composante est 1.
4. Soit  $b = (1, -1, 0, 1)$  et  $c = e_1 - e_3 + e_4$ , montrer que  $u(b) = a + b$  et que  $u(c) = -c$ .
5. Déterminer un vecteur  $d \in \mathbb{R}^4$  tel que  $u(d) = c - d$ .
6. Montrer que  $\beta'' = (a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
7. Déterminer la matrice  $T$  de  $u$  dans la base  $\beta''$ .

Partie III

8. Montrer que les matrices  $T$  et  $C$  sont semblables.

Allez à : [Correction exercice 57](#)

Exercice 58.

Soit  $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$  l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  ? On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto (X + 1)P' \end{aligned}$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Montrer que la matrice  $A$  de  $f$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que  $\mathcal{B}' = (1, X + 1, (X + 1)^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
4. Trouver la matrice  $B$  de  $f$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}'$ .
5. Calculer  $A^2$ ,  $A^3$  et  $B^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
6. Déterminer le rang de  $f$ .
7. Trouver une base de l'image de  $f$ .
8. Trouver une base de noyau de  $f$ .

Allez à : [Correction exercice 58](#)

Exercice 59.

Soit  $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  défini par  $u(P) = P + (1 - X)P'$

Soit  $\beta = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer la matrice de  $u$  dans  $\beta$ .
3. Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

Allez à : [Correction exercice 59](#)

Exercice 60.

Soit  $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ , l'application définie pour tout polynôme de  $\mathbb{R}_2[X]$  par :

$$u(P) = 2P - (X - 1)P'$$

Soit  $\beta = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

- Déterminer la matrice  $A$  de  $u$  dans  $\beta$ .
- Déterminer le noyau de  $u$ . On notera  $P_2$  un vecteur directeur du noyau.
- Donner une base de l'image de  $u$ .
- Déterminer un polynôme  $P_1$  tel que  $u(P_1) = P_1$ .
- Montrer que  $\beta' = (1, P_1, P_2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- Déterminer la matrice  $D$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .

Allez à : [Correction exercice 60](#)

Exercice 61.

Soit  $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  définie par  $f(P) = P - (X - 2)P'$

- Montrer que  $f$  est une application linéaire
- Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
- Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $(1, X, X^2)$ .
- Montrer que  $\beta' = (1, X - 2, (X - 2)^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- Déterminer la matrice de passage  $P$  de  $\beta$  à  $\beta'$ . Calculer  $P^{-1}$ .
- Quelle est la matrice de  $f$  dans la base  $\beta'$ .

Allez à : [Correction exercice 61](#)

Exercice 62.

Soit  $\beta = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$

Soit  $u$  l'application qui à un polynôme de  $\mathbb{R}_2[X]$  associe le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  définie par :

$$u(P) = 2XP - X^2P'$$

- Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- Déterminer la matrice  $A$  de  $u$  dans la base canonique.
- Déterminer la dimension de  $\ker(u)$ .
- Déterminer une base et la dimension de  $\text{Im}(u)$

Allez à : [Correction exercice 62](#)

Exercice 63.

Soit  $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  une application définie pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  par

$$u(P) = P + (1 - X)P' + 2P''$$

On appelle  $P_1 = 1 - X, P_2 = 1$  et  $P_3 = 1 + 2X - X^2$

On appelle  $\beta = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\beta' = (P_1, P_2, P_3)$

- Montrer que  $u$  est une application linéaire.
- Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- Déterminer la matrice  $A$  de  $u$  dans la base canonique.
- Montrer que  $\beta'$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- Déterminer la matrice  $D$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .

Allez à : [Correction exercice 63](#)

Exercice 64.

Soit  $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  définie par

$$u(P) = \frac{1}{2}(1 - X^2)P'' + XP' - P$$

- Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$
- Déterminer une base  $(P_1, P_2)$  de  $\ker(u)$ .
- Déterminer  $P_3$  tel que  $\text{Im}(u) = \text{Vect}(P_3)$ .
- Montrer que  $(P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

5. Déterminer la matrice de  $u$  dans la base  $(P_1, P_2, P_3)$ .

Allez à : [Correction exercice 64](#)

Exercice 65.

Soit  $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$  l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  ? On considère l'application

$$f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \mapsto f(P)$$

$$\text{Où } f(P)(X) = P(X+1) - P(X) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 - (a_0 + a_1X + a_2X^2)$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Montrer que la matrice  $A$  de  $f$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que  $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)(X-2))$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
4. Trouver la matrice  $B$  de  $f$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}'$ .

Allez à : [Correction exercice 65](#)

Exercice 66.

Partie I

Soit  $g$  une application de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$g(P) = (P(-1), P(1))$$

1. Montrer que  $g$  est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et déterminer l'image de  $g$ .

Partie II

Soit  $h$  une application linéaire de  $\mathbb{R}_1[X]$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$h(P) = (P(-1), P(1))$$

3. Montrer que  $h$  est bijective.

Allez à : [Correction exercice 66](#)

Exercice 67.

Soit  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

Soient  $a$  et  $b$  les fonctions définies par :

$$a(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad b(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On pose  $H = \text{Vect}(a, b)$  et  $F = \{f \in H, f(\ln(2)) = 0\}$

1. Déterminer la dimension de  $H$
2. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $H$ .
3. Quelle est la dimension de  $F$  ?
4. Soit  $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie pour  $f \in H$  par

$$\varphi(f) = (f(-\ln(2)), f(\ln(2)))$$

- a) Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire
- b) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme.

Allez à : [Correction exercice 67](#)

Exercice 68.

Soit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices à coefficient dans  $\mathbb{R}$  à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

Soit  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . C'est-à-dire les matrices qui vérifient  ${}^tA = -A$ .



Soit  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . C'est-à-dire les matrices qui vérifient  ${}^tA = A$ .

1. Montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Pour toutes matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que  $\frac{A+{}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et que  $\frac{A-{}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .
3. En déduire que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
4. A-t-on  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?
5. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , décomposer  $A$  en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Allez à : [Correction exercice 68](#)

Exercice 69.

Soit  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices à deux lignes et deux colonnes.

Soit  $\phi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définie pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par

$$\phi(A) = A - {}^tA$$

1. Rappeler la dimension de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer le noyau de  $\phi$ , quel est sa dimension ?
3. Déterminer l'image de  $\phi$ . En déduire que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et une matrice  $J$ , à déterminer tel que  $\phi(A) = \lambda J$ .

Allez à : [Correction exercice 69](#)

Exercice 70.

1. Calculer  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$
- 2.

a) Calculer  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$

b) Montrer que  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$ , puis calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Allez à : [Correction exercice 70](#)

Exercice 71.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

1. Calculer  $\Delta = \det(A)$
2. Déterminer les valeurs de  $a, b, c$  et  $d$  qui annule  $\Delta$ .

Allez à : [Correction exercice 71](#)

Exercice 72.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Première partie

Soit  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application linéaire.

$\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$

La matrice de  $u$  dans la canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $A$ .

1. Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}^3$ , un vecteur non nul, tel que  $\ker(u) = \text{Vect}(a)$ .
2. Déterminer un vecteur  $b \in \mathbb{R}^3$  tel que  $a = u(b)$ .
3. Montrer que  $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , donner un vecteur non nul  $c \in E$ .
4. Montrer que  $\beta' = (a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
5. Déterminer la matrice  $T$  de  $u$  dans la base  $\beta'$ .
6. Donner la relation entre  $A$ ,  $T$  et la matrice de passage, notée  $Q$ , de  $\beta$  à  $\beta'$ .

## Deuxième partie

Soit  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Soit  $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'application linéaire définie par :

$$f(P) = (2 + X + X^2)P - (1 + 2X + X^2 + X^3)P' + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4)P''$$

1. Calculer  $f(1)$ ,  $f(X)$  et  $f(X^2)$  et en déduire que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Donner la matrice  $B$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
3. On pose  $P_0 = 1 + X + X^2$ ,  $P_1 = 1 + X$  et  $P_2 = 2 + X + X^2$   
Montrer que  $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
4. Déterminer la matrice  $T'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
5. Donner la relation entre  $B$ ,  $T'$  et la matrice, notée  $Q'$ , de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

## Troisième partie

Montrer que  $A$  et  $B$  sont deux matrices semblables.

Allez à : [Correction exercice 72](#)

## Exercice 73.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

Soit  $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est  $A$ .

1. Montrer que si  $v$  est un endomorphisme de  $E$ , un espace vectoriel de dimension  $n$  alors  
$$\ker(v) \subset \ker(v^2) \subset \dots \subset \ker(v^n)$$
2. Déterminer une base de  $\ker(u + id_{\mathbb{R}^4})$ , de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$ , de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$  et de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^4)$ .  
Donner l'entier  $p$  tel que  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^p) = \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^{p+1})$
3.
  - a) Donner un vecteur non nul  $a$  qui engendre  $\ker(u + id_{\mathbb{R}^4})$ .
  - b) Donner un vecteur  $b$  vérifiant  $a = (u + id_{\mathbb{R}^4})(b)$ .  
Puis montrer que  $(a, b)$  est une base de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$
  - c) Donner un vecteur  $c$  vérifiant  $b = (u + id_{\mathbb{R}^4})(c)$ .  
Puis montrer que  $(a, b, c)$  est une base de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$
  - d) exprimer  $u(b)$  et  $u(c)$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
4. soit  $d = (1, 1, 0, 1)$ , calculer  $u(d)$ .
5. Montrer que  $\beta' = (a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
6. Donner la matrice,  $T$ , de  $u$  dans la base  $\beta'$  et donner la relation entre  $A$ ,  $T$  et la matrice de passage  $P$  de  $\beta$  à  $\beta'$ .

7. Calculer  $(T + I)^3(T - I)$  et en déduire  $(A + I)^3(A - I)$

Allez à : [Correction exercice 73](#)

Exercice 74.

Première partie :

Soit  $g$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que  $\ker(g) \subset \ker(g^2) \subset \ker(g^3)$
2. On suppose que  $g^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$  et que  $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \ker(g^3)$ 
  - a) Déterminer  $\dim(\ker(g))$  et  $\dim(\ker(g^2))$
  - b) Montrer que  $\text{Im}(g) \subset \ker(g^2)$ , puis que  $\text{Im}(g) = \ker(g^2)$ .

Deuxième partie :

Soit  $g$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $g^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$  et que  $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \ker(g^3)$

3. Soit  $a \in \ker(g)$ , un vecteur non nul, montrer qu'il existe  $b \in \mathbb{R}^3$  tel que  $g(b) = a$ . Montrer que  $b \in \ker(g^2)$  et en déduire que  $(a, b)$  est une famille libre.
4. Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}^3$  tel que  $g(c) = b$ , montrer que alors  $(a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
5. Déterminer la matrice de  $g$  dans la base  $(a, b, c)$ .

Troisième partie :

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Montrer que  $f + Id$  vérifie les hypothèses de la seconde partie.
7. Déterminer  $a, b$  et  $c$  tels que :  $a \in \ker(f + Id)$ ,  $(f + Id)(b) = a$  et  $(f + Id)(c) = b$ .
8. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $(a, b, c)$ .

Allez à : [Correction exercice 74](#)

## CORRECTIONS

Correction exercice 1.

1. Soient  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  et  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , et soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels.

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) = (X_1, X_2, X_3)$$

Donc

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= (X_1 + X_2 + X_3, 2X_1 + X_2 - X_3) \\ &= ((\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3), 2(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &\quad - (\lambda x_3 + \mu y_3)) \\ &= (\lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3), \lambda(2x_1 + x_2 - x_3) + \mu(2y_1 + y_2 - y_3)) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3, 2y_1 + y_2 - y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $u$  est linéaire.

2.

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 - 2L_1 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $x = (2x_3, -3x_3, x_3) = x_3(2, -3, 1)$ , si on pose  $a = (2, -3, 1)$

$$\ker(u) = \text{Vect}(a)$$

Allez à : [Exercice 1](#)

## Correction exercice 2.

1. Soient  $u = (x, y, z)$  et  $u' = (x', y', z')$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et soient  $\lambda$  et  $\lambda'$  deux réels

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') &= (\lambda x + \lambda' x' + \lambda y + \lambda' y' + \lambda z + \lambda' z', -(\lambda x + \lambda' x') + 2(\lambda y + \lambda' y') + 2(\lambda z + \lambda' z')) \\ &= (\lambda(x + y + z) + \lambda'(x' + y' + z'), \lambda(-x + 2y + 2z) + \lambda'(-x' + 2y' + 2z')) \\ &= \lambda(x + y + z, -x + 2y + 2z) + \lambda'(x' + y' + z', -x' + 2y' + 2z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') \end{aligned}$$

Donc  $f$  est linéaire.

2.

$$\begin{aligned} u = (x, y, z) \in \ker(u) &\Leftrightarrow (x + y + z, -x + 2y + 2z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \\ &u = (0, -z, z) = z(0, -1, 1) \end{aligned}$$

On pose  $a = (0, -1, 1)$ ,  $a$  est une base de  $\ker(f)$ .

$$\text{Im}(u) = \text{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

$$f(e_1) = (1, -1) = f_1 - f_2, f(e_2) = (1, 2) = f_1 + 2f_2 \text{ et } f(e_3) = (1, 2) = f_1 + 2f_2$$

$$\text{Im}(u) = \text{vect}(f_1 - f_2, f_1 + 2f_2, f_1 + 2f_2) = \text{vect}(f_1 - f_2, f_1 + 2f_2)$$

$f_1 - f_2$  et  $f_1 + 2f_2$  ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre de  $\text{Im}(f)$ , comme c'est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ , c'est une base de  $\text{Im}(f)$  et donc  $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ . Remarque  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ .

Allez à : **Exercice 2**

## Correction exercice 3.

1.

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') &= (-2(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z'), (\lambda x + \lambda' x') - 2(\lambda y + \lambda' y') \\ &\quad + (\lambda z + \lambda' z'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - 2(\lambda z + \lambda' z')) \\ &= (\lambda(-2x + y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z'), \lambda(x - 2y + z) + \lambda'(x' - 2y' + z')) \\ &= \lambda(-2x + y + z, x - 2y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z', x' - 2y' + z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') \end{aligned}$$

Donc  $f$  est linéaire.

2.

$$\begin{aligned} u \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (-2x + y + z, x - 2y + z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \\ &u = (z, z, z) = z(1, 1, 1) \end{aligned}$$

Donc  $\ker(f) = \text{Vect}(a)$  avec  $a = (1, 1, 1)$ .

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(\text{Im}(f)) = 3 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

3. Donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ . Une base est  $((1, 0), (0, 1))$

Allez à : **Exercice 3**

## Correction exercice 4.

1. Soit  $u = (x, y)$  et  $u' = (x', y')$ ,  $\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y')$

$$\begin{aligned} h(\lambda u + \lambda' u') &= (\lambda x + \lambda' x' - (\lambda y + \lambda' y'), -3(\lambda x + \lambda' x') + 3(\lambda y + \lambda' y')) \\ &= (\lambda(x - y) + \lambda'(x' - y'), \lambda(-3x + 3y) + \lambda'(-3x' + 3y')) \\ &= \lambda(x - y, -3x + 3y) + \lambda'(x' - y', -3x' + 3y') = \lambda h(u) + \lambda' h(u') \end{aligned}$$

Donc  $h$  est linéaire.

2.  $h(1,1) = (0,0) = h(0,0)$  et pourtant  $(1,1) \neq (0,0)$  donc  $h$  n'est pas injective.

On va montrer que  $(1,0)$  n'a pas d'antécédent. Supposons qu'il existe  $u = (x, y)$  tel que  $(1,0) =$

$$h(u) \Leftrightarrow (1,0) = (x - y, -3x + 3y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - y \\ 0 = -3x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ x = y \end{cases}, \text{ c'est impossible}$$

donc  $h$  n'est pas surjective.

$h$  est un endomorphisme donc  $h$  est injectif si et seulement si  $h$  est surjectif. Ici,  $h$  n'est pas injectif donc  $h$  n'est pas surjectif.

3.  $u = (x, y) \in \ker(h) \Leftrightarrow (x - y, -3x + 3y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$

Donc  $u = (x, x) = x(1,1)$ ,  $(1,1)$  est un vecteur non nul qui engendre  $\ker(h)$ , c'est une base de  $\ker(h)$

$$h(e_1) = (1 - 0, -3 \times 1 + 3 \times 0) = (1, -3) = e_1 - 3e_2 \text{ et}$$

$$h(e_2) = ((0 - 1, -3 \times 0 + 3 \times 1) = (-1, 3) = -e_1 + 3e_2$$

$$\text{Im}(h) = \text{Vect}(h(e_1), h(e_2)) = \text{Vect}(e_1 - 3e_2, -e_1 + 3e_2) = \text{Vect}(e_1 - 3e_2)$$

$e_1 - 3e_2$  est un vecteur non nul qui engendre  $\text{Im}(h)$ , c'est une base de  $\text{Im}(h)$ .

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

1.  $f(e_1) = (1, 2, 0) = 1 \times e_1 + 2e_2 + 0 \times e_3$   
 $f(e_2) = (0, 1, -1) = 0 \times e_1 + 1 \times e_2 - 1 \times e_3$   
 et  $f(e_3) = (-1, -3, 2) = -1 \times e_1 - 3e_2 + 2e_3$

2. Les coordonnées de  $f(e_1)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  sont  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de  $f(e_2)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  sont  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de  $f(e_3)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  sont  $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

- 3.

$$u = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 - 2L_1 \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Première méthode :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

Puis on regarde si la famille  $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$  est libre.

$$\begin{aligned} \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \alpha_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} &\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'agit du même système que ci-dessus donc  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Cette famille est libre et elle engendre

$\text{Im}(f)$  c'est une base de  $\text{Im}(f)$ , on en conclut que  $\dim(\text{Im}(f)) = 3$  et que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ .

Deuxième méthode (plus compliquée) :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_1 - 3e_2 + 2e_3) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_1 - 3e_2 + 2e_3 + e_1 + 2e_2) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_2 + 2e_3) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3 - e_2 + 2e_3, -e_2 + 2e_3) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2 + 2e_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2 + 2e_3 - 2e_3) \\
&= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2) \\
&= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_3, e_2) = \text{Vect}(e_1, e_3, e_2) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)
\end{aligned}$$

Donc une base de  $\text{Im}(f)$  est  $(e_1, e_2, e_3)$  et bien sur  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ .

Troisième méthode :

Avec le théorème du rang,  $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , comme  $\dim(\ker(f)) = 0$ ,  $\dim(\text{Im}(f)) = 3$  donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$  et une base de  $\text{Im}(f)$  est  $(e_1, e_2, e_3)$ .

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

1.

$$\begin{aligned}
\lambda u + \lambda' u' &= (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') \\
f(\lambda u + \lambda' u') &= (-2(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z'), (\lambda x + \lambda' x') - 2(\lambda y + \lambda' y') \\
&\quad + (\lambda z + \lambda' z'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - 2(\lambda z + \lambda' z')) \\
&= (\lambda(-2x + y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z'), \lambda(x - 2y + z) \\
&\quad + \lambda'(x' - 2y' + z'), \lambda(x + y - 2z) + \lambda'(x' + y' - 2z')) \\
&= \lambda(-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) \\
&\quad + \lambda'(-2x' + y' + z', x' - 2y' + z', x' + y' - 2z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u')
\end{aligned}$$

Donc  $f$  est linéaire.

2.

$$\begin{aligned}
u \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) = (0, 0, 0) \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ 2L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \\
u &= (z, z, z) = z(1, 1, 1)
\end{aligned}$$

Donc  $\ker(f) = \text{Vect}(a)$  avec  $a = (1, 1, 1)$ .

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(\text{Im}(f)) = 3 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

3.

Première méthode

$$f(e_1) = (-2, 1, 1) \quad \text{et} \quad f(e_2) = (1, -2, 1)$$

Sont deux vecteurs de l'image de  $f$ , ils ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre de vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Deuxième méthode

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= (-2, 1, 1); f(e_2) = (1, -2, 1) \text{ et } f(e_3) = (1, 1, -2) \\
\text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))
\end{aligned}$$

$(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ , le problème est de savoir si cette famille est libre.

Soit on fait « comme d'habitude », c'est-à-dire que l'on écrit qu'une combinaison linéaire de ces trois vecteurs est nulle

$$\begin{aligned}
\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) &= 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \lambda_1(-2, 1, 1) + \lambda_2(1, -2, 1) + \lambda_3(1, 1, -2) = (0, 0, 0) \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ 2L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc pour tout  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_3 f(e_1) + \lambda_3 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Si on prend  $\lambda_3 = 1$

$$f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), -f(e_1) - f(e_2)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

$f(e_1)$  et  $f(e_2)$  ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ , c'est une base de  $\text{Im}(f)$ .

Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

1.

$$u = (x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 4z = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4x - 4z = 0 \\ 5x - 3x - 4z = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{x}{2} \\ y = x \end{cases}$$

$$\text{Donc } u = \left(x, x, \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}(2, 2, 1)$$

On pose alors  $a = (2, 2, 1)$  et  $\ker(f) = \text{Vect}(a)$

2.

a.  $b = (1, 1, 0)$  donc

$$f(b) = (6 \times 1 - 4 \times 1 - 4 \times 0, 5 \times 1 - 3 \times 1 - 4 \times 0, 1 - 1) = (2, 2, 0) = 2(1, 1, 0) = 2b$$

$c = (0, 1, -1) = e_2 - e_3$  donc

$$f(c) = (6 \times 0 - 4 \times 1 - 4 \times (-1), 5 \times 0 - 3 \times 1 - 4 \times (-1), 0 - 1) = (0, 1, -1) = c$$

b.

Première méthode

$$b = \frac{1}{2}f(b) = f\left(\frac{b}{2}\right) \in \text{Im}(f) \quad \text{et} \quad c = f(c) \in \text{Im}(f)$$

Comme  $b$  et  $c$  ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre de  $\text{Im}(f)$ .

D'autre part, d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc  $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ , une famille libre à deux éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 est une base.

Deuxième méthode

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc  $\dim(\text{Im}(f)) = 2$  par conséquent les trois vecteurs  $f(e_1), f(e_2)$  et  $f(e_3)$  sont liés

$$f(e_1) = (6, 5, 1) = 6e_1 + 5e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_2) = (-4, -3, -1) = -4e_1 - 3e_2 - e_3$$

Ne sont pas proportionnels donc ils forment une famille libre de  $\text{Im}(f)$ , qui est de dimension 2, il s'agit d'une base de  $\text{Im}(f)$ .

Il reste à montrer que  $b \in \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$  et que  $c \in \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$

On cherche  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$b = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2)$$

Cette égalité équivaut à

$$\alpha(6, 5, 1) + \beta(-4, -3, -1) = (1, 1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha - 4\beta = 1 \\ 5\alpha - 3\beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\beta - 4\beta = 1 \\ 5\beta - 3\beta = 1 \\ \alpha = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

On cherche  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$c = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2)$$

Cette égalité équivaut à

$$\alpha(6,5,1) + \beta(-4,-3,-1) = (0,1,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha - 4\beta = 0 \\ 5\alpha - 3\beta = 1 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(\beta - 1) - 4\beta = 0 \\ 5(\beta - 1) - 3\beta = 1 \\ \alpha = \beta - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = 6 \\ 2\beta = 6 \\ \alpha = \beta - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

Comme  $b$  et  $c$  ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre de  $Im(f)$ , donc une base puisque la dimension de  $\dim(Im(f)) = 2$

Troisième méthode (variante de la deuxième méthode)

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc  $\dim(Im(f)) = 2$ , par conséquent les trois vecteurs  $f(e_1), f(e_2)$  et  $f(e_3)$  sont liés

$$f(e_1) = (6,5,1) = 6e_1 + 5e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_2) = (-4,-3,-1) = -4e_1 - 3e_2 - e_3$$

Ne sont pas proportionnels donc ils forment une famille libre de  $Im(f)$ , qui est de dimension 2, il s'agit d'une base de  $Im(f)$ .

On va chercher une ou plusieurs équations caractérisant  $Im(f)$

$$u = (x, y, z) \in Vect(f(e_1), f(e_2)) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta$$

$$\in \mathbb{R}, \alpha(6,5,1) + \beta(-4,-3,-1) = (x, y, z) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} L_1 & 6\alpha - 4\beta = x \\ L_2 & 5\alpha - 3\beta = y \\ L_3 & \alpha - \beta = z \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta$$

$$\in \mathbb{R}, \begin{cases} L_1 & 6\alpha - 4\beta = x \\ L_2 & 2\beta = 6y - 5x \\ L_3 & -2\beta = 6z - x \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} L_1 & 6\alpha - 4\beta = x \\ L_2 & 2\beta = 6y - 5x \\ L_3 + L_2 & 0 = -6x + 6y + 6z \end{cases}$$

Donc une équation caractérisant  $Im(f)$  est  $x - y - z = 0$

Alors évidemment  $b \in Im(f)$  et  $c \in Im(f)$  car leurs composantes vérifient cette équation et on finit comme dans la seconde méthode.

$$3. \quad u = (x, y, z) \in Vect(f(e_1), f(e_2)) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha(6,5,1) +$$

$$\beta(-4,-3,-1) = (x, y, z) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} L_1 & 6\alpha - 4\beta = x \\ L_2 & 5\alpha - 3\beta = y \\ L_3 & \alpha - \beta = z \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in$$

$$\mathbb{R}, \begin{cases} L_1 & 6\alpha - 4\beta = x \\ L_2 & 2\beta = 6y - 5x \\ L_3 & -2\beta = 6z - x \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} L_1 & 6\alpha - 4\beta = x \\ L_2 & 2\beta = 6y - 5x \\ L_3 + L_2 & 0 = -6x + 6y + 6z \end{cases} \quad \text{Donc une équation}$$

caractérisant  $Im(f)$  est  $x - y - z = 0$

$$4. \quad 2 - 2 - 1 = -1 \text{ donc } a \notin Im(f) = Vect(b, c), \{b, c\} \text{ est libre donc } \{a, b, c\} \text{ est libre et à 3 vecteurs par conséquent c'est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ donc } \ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3.$$

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

$$1. \quad u(x) = u(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3) + x_4u(e_4)$$

$$= x_1(f_1 - f_2 + 2f_3) + x_2(2f_1 + f_2 - 3f_3) + x_3(3f_1 - f_3) + x_4(-f_1 - 2f_2 + 5f_3)$$

$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4)f_1 + (-x_1 + x_2 - 2x_4)f_2 + (2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4)f_3$$

2.



$$\begin{aligned}
x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \\ L_3 \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \\ L_3 - 2L_1 \begin{cases} -7x_2 - 7x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2(-x_3 + x_4) + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$x = (-x_3 - x_4, -x_3 + x_4, x_3, x_4) = x_3(-1, -1, 1, 0) + x_4(-1, 1, 0, 1)$$

Si on pose  $a = (-1, -1, 1, 0)$  et  $b = (-1, 1, 0, 1)$ , ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, et comme il engendre  $\ker(u)$  ils forment une base de  $\ker(u)$ , et  $\dim(\ker(u)) = 2$

3. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

Donc  $\dim(\operatorname{Im}(u)) = 2$ ,  $u(e_1)$  et  $u(e_2)$  ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base à deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, c'est une base.

Allez à : **Exercice 8**

Correction exercice 9.

1.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Donc  $x = (0, x_3, x_3, 0) = x_3(0, 1, 1, 0)$ , si on pose  $a = e_2 + e_3$  alors  $\ker(u) = \operatorname{vect}(a)$  et donc la dimension de  $\ker(u)$  est 1.

2.

$$u(e_1) = (1, 0, 1, 0) = e_1 + e_3; \quad u(e_2) = (-1, 0, 1, 0) = -e_1 + e_3;$$

$$u(e_3) = (1, 0, -1, 0) = e_1 - e_3; \quad u(e_4) = (0, 0, 0, 1, 1) = e_3 + e_4$$

$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_3, -e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_3 + e_4) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_3 + e_4)$$

Car  $u(e_2) = -u(e_3)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(u) &= \operatorname{Vect}(e_1 + e_3, e_1 - e_3 + e_1 + e_3, e_3 + e_4) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_3, 2e_1, e_3 + e_4) \\
&= \operatorname{Vect}(e_3, e_1, e_3 + e_4) = \operatorname{Vect}(e_3, e_1, e_4)
\end{aligned}$$

Cette famille est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre (et génératrice) donc c'est une base de  $\operatorname{Im}(u)$

Autre méthode, d'après le théorème de rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(u)) = 3$$

Par conséquent  $(e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_3 + e_4)$  est une famille génératrice à trois vecteurs dans un espace de dimension trois, c'est une base et donc  $\dim(\operatorname{Im}(u)) = 3$ .

3. Comme  $\dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^4)$

Le tout est de savoir si  $a = e_2 + e_3$  appartient à  $\operatorname{Im}(u)$ , si c'est le cas  $\ker(u) \subset \operatorname{Im}(u)$  et il n'y a pas de somme directe et sinon  $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$  et il y a somme directe.

Soit on montre que  $(e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_3 + e_4)$  est libre et donc une base de  $\mathbb{R}^4$  puisqu'il s'agit d'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 et on a

$$\ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}^4$$

Soit

$$\ker(u) + \operatorname{Im}(u) = \operatorname{vect}(e_1, e_3, e_4, e_2 + e_3) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$$

Ce qui montre que  $\ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}^4$ .

4.  $0 + 0 - 0 + 0 = 0$  donc  $0_{\mathbb{R}^4} \in E$ .

Soient  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$  et  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E$ , on a

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = 0$$

Pour tout  $\lambda$  et  $\mu$  réels

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_3 + \mu y_3) + (\lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 - x_3 + x_4) + \mu(y_1 + y_2 - y_3 + y_4) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $\lambda x + \mu y \in E$  donc  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$ , on a  $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$  donc  $x_1 = -x_2 + x_3 - x_4$

$$x = (-x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1)$$

On pose  $b = (-1, 1, 0, 0)$ ,  $c = (1, 0, 1, 0)$  et  $d = (-1, 0, 0, 1)$ , la famille  $(a, b, c)$  engendre  $E$

$$\begin{aligned} \alpha b + \beta c + \gamma d = 0_{\mathbb{R}^4} &\Leftrightarrow \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(1, 0, 1, 0) + \gamma(-1, 0, 0, 1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce que signifie que  $(b, c, d)$  est une famille libre. Par conséquent  $(b, c, d)$  est une base de  $E$ .

5.  $\ker(u) = \text{Vect}(a)$  avec  $a = e_2 + e_3 = (0, 1, 1, 0)$  donc  $0 + 1 - 1 + 0 = 0$  ce qui montre que  $a \in E$ , autrement dit  $\ker(u) \subset E$ , on n'a pas :  $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^4$

Allez à : **Exercice 9**

Correction exercice 10.

1.

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ L_2 \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ L_3 \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ L_4 \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ L_2 - L_1 \begin{cases} 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ L_3 + L_1 \begin{cases} 0 = 0 \\ L_4 + L_1 \begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = -x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_3 + 2x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = -x_3 \end{cases} \\ &x = (x_3, x_3, x_3, -x_3) = x_3(1, 1, 1, -1) \end{aligned}$$

$\ker(u)$  est la droite engendrée par  $e_1 + e_2 + e_3 - e_4$

2.

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) &= \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)) \\ u(e_1) &= (1, 1, -1, -1) \\ u(e_2) &= (-1, 2, 1, 1) \\ u(e_3) &= (2, -1, -2, -1) \\ u(e_4) &= (2, 2, -2, -1) \end{aligned}$$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

Ce qui entraîne que

$$\dim(\text{Im}(u)) = 3$$

Première méthode

On regarde si la famille  $(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4))$  est libre

$$\begin{aligned} \alpha u(e_1) + \beta u(e_2) + \gamma u(e_3) + \delta u(e_4) = 0_{\mathbb{R}^4} &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ L_2 & \alpha + 2\beta - \gamma + 2\delta = 0 \\ L_3 & -\alpha + \beta - 2\gamma - 2\delta = 0 \\ L_4 & -\alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ L_2 - L_1 & 3\beta - 3\gamma = 0 \\ L_3 + L_1 & 0 = 0 \\ L_4 + L_1 & \gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ \beta = \gamma \\ \delta = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \gamma \\ \delta = -\gamma \end{cases} \end{aligned}$$

La famille n'est pas libre, pour  $\gamma = 1$ , cela donne la relation

$$u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) - u(e_4) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Soit

$$u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) = u(e_4)$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) = \text{vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)) &= \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_1) + u(e_2) + u(e_3)) \\ &= \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) \end{aligned}$$

Comme  $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$  est une famille génératrice à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base.

Deuxième méthode

$$e_1 + e_2 + e_3 - e_4 \in \ker(u)$$

Par conséquent

$$u(e_1 + e_2 + e_3 - e_4) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Ce qui entraîne que

$$u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) - u(e_4) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Et on conclut de la même façon.

3.

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) &\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, x \\ &= \alpha u(e_1) + \beta u(e_2) + \gamma u(e_3) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= \alpha(1, 1, -1, -1) + \beta(-1, 2, 1, 1) + \gamma(2, -1, -2, -1) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \\ &\in \mathbb{R}^3, \begin{cases} L_1 & \alpha - \beta + 2\gamma = x_1 \\ L_2 & \alpha + 2\beta - \gamma = x_2 \\ L_3 & -\alpha + \beta - 2\gamma = x_3 \\ L_4 & -\alpha + \beta - \gamma = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} L_1 & \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = x_1 \\ L_2 - L_1 & 3\beta - 3\gamma = -x_1 + x_2 \\ L_3 + L_1 & 0 = x_1 + x_3 \\ L_4 + L_1 & \gamma + \delta = x_1 + x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} L_1 & \alpha - \beta + 2\gamma + 2\delta = x_1 \\ L_2 - L_1 & 3\beta - 3\gamma = -x_1 + x_2 \\ L_3 + L_1 & \gamma + \delta = x_1 + x_4 \\ L_4 + L_1 & 0 = x_1 + x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $\text{Im}(u) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_3 = 0\}$

Allez à : **Exercice 10**

Correction exercice 11.

1. La matrice de  $f \circ f$  dans la base  $\beta$  est  $\text{Mat}_{\beta}(f) \times \text{Mat}_{\beta}(f)$

$$\text{Or } \text{Mat}_{\beta}(f) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ donc } \text{Mat}_{\beta}(f^2) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

2. Il existe  $g$  telle que  $g \circ f = \text{Id}$  donc  $f$  est bijective et  $f^{-1} = g$ .

Allez à : **Exercice 11**

Correction exercice 12.

1. Soit  $u = (x, y, z, t)$ ,  $u' = (x', y', z', t')$  deux vecteurs et  $\lambda$  et  $\lambda'$  deux réels.

$$\begin{aligned}
f(\lambda u + \lambda' u) &= f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t') \\
&= (\lambda x + \lambda' x' - 2(\lambda y + \lambda' y'), \lambda x + \lambda' x' - 2(\lambda y + \lambda' y'), 0, \lambda x + \lambda' x' - (\lambda y + \lambda' y') \\
&\quad - (\lambda z + \lambda' z') - (\lambda t + \lambda' t')) \\
&= (\lambda(x - 2y) + \lambda'(x' - 2y'), \lambda(x - 2y) + \lambda'(x' - 2y'), 0, \lambda(x - y - z - t) \\
&\quad + \lambda'(x' - y' - z' - t')) \\
&= \lambda(x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t) + \lambda'(x' - 2y', x' - 2y', 0, x' - y' - z' - t') \\
&= \lambda f(u) + \lambda' f(u')
\end{aligned}$$

$f$  est bien linéaire.

2. Soit  $u = (x, y, z, t) \in \ker(u)$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y - z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ t = y - z \end{cases}$$

Donc

$$u = (2y, y, z, y - z) = y(2, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, -1)$$

$a = (2, 1, 0, 1)$  et  $b = (0, 0, 1, -1)$  sont deux vecteurs non colinéaires (qui forment donc une famille libre) qui engendrent  $\ker(f)$  ils forment une base de  $\ker(f)$ .

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$$

Si on appelle  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ ,  $f(e_1) = (1, 1, 0, 1)$  et  $f(e_3) = (0, 0, 0, -1)$  sont deux vecteurs non proportionnels de  $\operatorname{Im}(f)$ , ils forment donc une famille libre à deux éléments dans un espace de dimension 2, c'est une base de  $\operatorname{Im}(f)$ .

3. On a  $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$  si et seulement si  $(a, b, f(e_1), f(e_3))$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

$$\det(a, b, f(e_1), f(e_3)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$(a, b, f(e_1), f(e_3))$  est une base de  $\mathbb{R}^4$  donc  $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^4$ .

Allez à : **Exercice 12**

Correction exercice 13.

1. Soient  $u = (x, y, z, t)$  et  $u' = (x', y', z', t')$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ . Soient  $\lambda$  et  $\lambda'$  deux réels.

$$\begin{aligned}
\lambda u + \lambda' u' &= \lambda(x, y, z, t) + \lambda'(x', y', z', t') = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t') \\
f(\lambda u + \lambda' u') &= f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t') \\
&= ((\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y'), (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') \\
&\quad + (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t')) \\
&= (\lambda(x + y) + \lambda'(x' + y'), \lambda(z + t) + \lambda'(z' + t'), \lambda(x + y + z + t) \\
&\quad + \lambda'(x' + y' + z' + t')) \\
&= \lambda(x + y, z + t, x + y + z + t) + \lambda'(x' + y', z' + t', x' + y' + z' + t') \\
&= \lambda f(u) + \lambda' f(u')
\end{aligned}$$

$f$  est linéaire.

- 2.

$$\begin{aligned}
u \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x + y, z + t, x + y + z + t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ t = -z \end{cases} \Leftrightarrow u = (x, -x, z, -z) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, -1)
\end{aligned}$$

On pose  $a = (1, -1, 0, 0)$  et  $b = (0, 0, 1, -1)$ ,  $a$  et  $b$  engendrent  $\ker(f)$ , d'autre part ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, finalement  $(a, b)$  est une base de  $\ker(f)$ .

3.

Première méthode

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$$

$$f(e_1) = (1, 0, 1); f(e_2) = (1, 0, 1); f(e_3) = (0, 1, 1); f(e_4) = (0, 1, 1)$$

Comme  $f(e_1) = f(e_2)$  et  $f(e_3) = f(e_4)$ 

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_3))$$

$f(e_1)$  et  $f(e_3)$  ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est génératrice de  $\text{Im}(f)$ , c'est une base de  $\text{Im}(f)$ .

Deuxième méthode

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow 2 + \dim(\text{Im}(f)) = 4 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

Ensuite on cherche deux vecteurs non proportionnels de  $\text{Im}(f)$ , par exemple  $f(e_1)$  et  $f(e_3)$ , ils forment une famille libre dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. Soient  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et  $y = (y_1, y_2, y_3)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels.

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$$

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= (-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3), -(\lambda x_1 + \mu y_1) + \lambda x_3 \\ &\quad + \mu y_3, -2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3)) \\ &= (\lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + 4y_3], \lambda[-x_1 + x_3] \\ &\quad + \mu[-y_1 + y_3], \lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + 4y_3]) \\ &= \lambda(-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3) \\ &\quad + \mu(-2y_1 + 4y_2 + 4y_3, -y_1 + y_3, -2y_1 + 4y_2 + 4y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

Donc  $u$  est linéaire.

2. Soit  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u)$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  ses coordonnées dans la base canonique.

$$\begin{aligned} x \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \\ x &= \left(x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{2}(2, -1, 2) \end{aligned}$$

$a = (2, -1, 2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$  est un vecteur non nul qui engendre  $\ker(u)$ , c'est une base de  $\ker(u)$ .

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(\text{Im}(u)) = 3 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 2$$

$u(e_1) = -2e_1 - e_2 - 2e_3 = (-2, -1, -2)$  et  $u(e_2) = 4e_1 + 4e_3 = (4, 0, 4)$ , ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de  $\text{Im}(u)$  qui est de dimension 2,  $(u(e_1), u(e_2))$  est une base de  $\text{Im}(u)$ .

3.  $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (a, u(e_1), u(e_2))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Il est presque évident que

$$u(e_1) + u(e_3) = a$$

Sinon on calcule  $\alpha a + \beta u(e_1) + \gamma u(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$  et on s'aperçoit que  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$  et  $\gamma = -1$  est une solution non nulle.

$(a, u(e_1), u(e_2))$  n'est pas une base, donc on n'a pas  $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$

Allez à : Exercice 14

## Correction exercice 15.

1.

$$\begin{aligned}
 u(x) &= u(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 u(e_1) + x_2 u(e_2) + x_3 u(e_3) \\
 &= x_1(2e_1 + e_2 + 3e_3) + x_2(e_2 - 3e_3) + x_3(-2e_2 + 2e_3) \\
 &= 2x_1 e_1 + (x_1 + x_2 - 2x_3)e_2 + (3x_1 - 3x_2 + 2x_3)e_3 \\
 &= (2x_1, x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3)
 \end{aligned}$$

$$2. f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = 2 \times 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E$$

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ , alors  $u(x) = 2x$  et  $u(y) = 2y$

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda(2x) + \mu(2y) = 2(\lambda x + \mu y)$$

Donc  $\lambda x + \mu y \in E$  et  $E$  est un sous-espace-vectoriel de  $\mathbb{R}^3$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in F$$

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $F$ , alors  $u(x) = -x$  et  $u(y) = -y$

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda(-x) + \mu(-y) = -(\lambda x + \mu y)$$

Donc  $\lambda x + \mu y \in F$  et  $F$  est un sous-espace-vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

3.

$$x \in E \Leftrightarrow u(x) = 2x \Leftrightarrow (2x_1, x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) = 2(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } x = (x_1, x_1, x_3) = x_1(1, 1, 0) = x_1(e_1 + e_2)$$

$e_1 + e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ , il s'agit d'une base de  $E$ .

$$x \in F \Leftrightarrow u(x) = -x \Leftrightarrow (2x_1, 3x_1 - x_2, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) = -(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -x_1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\text{Donc } x = (0, x_3, x_3) = x_3(0, 1, 1) = x_3(e_2 + e_3)$$

$e_2 + e_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ , il s'agit d'une base de  $F$ .

4.

$$\dim(E) + \dim(F) = 1 + 1 = 2$$

Donc il n'y a pas somme directe.

Allez à : **Exercice 15**

## Correction exercice 16.

1. Soient  $u, u'$  deux vecteurs de  $E_{-1}$ , alors  $f(u) = -u$  et  $f(u') = -u'$ . Soient  $\lambda, \lambda'$  deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda(-u) + \lambda'(-u') = -(\lambda u + \lambda' u')$$

La première égalité car  $f$  est linéaire, la seconde car  $u$  et  $u'$  sont dans  $E_{-1}$ ,

La troisième montre que  $\lambda u + \lambda' u' \in E_{-1}$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, la seconde égalité montre que  $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$ .

$E_{-1}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

Soient  $u, u'$  deux vecteurs de  $E_1$ , alors  $f(u) = u$  et  $f(u') = u'$ . Soient  $\lambda, \lambda'$  deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda u + \lambda' u'$$

La première égalité car  $f$  est linéaire, la seconde car  $u$  et  $u'$  sont dans  $E_1$ ,

La seconde montre que  $\lambda u + \lambda' u' \in E_1$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, cela montre aussi que  $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$ .

$E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

2.

$$f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2)$$

Donc  $e_1 - e_2 \in E_{-1}$

$$f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) = -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3)$$

Donc  $e_1 - e_3 \in E_{-1}$

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Donc  $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$

3. Les vecteurs  $e_1 - e_2$  et  $e_1 - e_3$  ne sont pas proportionnels, ils forment une famille de  $E_{-1}$ , donc la dimension de  $E_{-1}$  est supérieur ou égal à 2.

$E_1$  a un vecteur non nul, donc sa dimension est supérieur ou égal à 1.

4. Soit  $u \in E_{-1} \cap E_1$ ,  $f(u) = -u$  et  $f(u) = u$  donc  $-u = u$ , ce qui signifie que le seul vecteur de  $E_{-1} \cap E_1$  est le vecteur nul.

$$E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

5.

$$\dim(E_{-1} + E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) - \dim(E_{-1} \cap E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) \geq 2 + 1 = 3$$

Comme

$$E_{-1} + E_1 \subset \mathbb{R}^3$$

On a

$$\dim(E_{-1} + E_1) \leq 3$$

Finalement

$$\dim(E_{-1} + E_1) = 3$$

Remarque : cela entraîne que  $\dim(E_{-1}) = 2$  et  $\dim(E_1) = 1$

L'intersection de ces sous-espaces vectoriels étant réduit au vecteur nul on a

$$E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$$

6. On peut calculer  $f^2(e_1)$ ,  $f^2(e_2)$  et  $f^2(e_3)$  pour s'apercevoir que ces vecteurs valent respectivement  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ . Mais c'est long.

Autre méthode

D'après la question précédente  $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

(Une base de  $E_{-1}$  collée à une base de  $E_1$  donne une base de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si  $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$ ).

Tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, il suffit de montrer que  $f^2(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$ ,  $f^2(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$  et que  $f^2(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

Là, j'ai fait long, en fait il suffit de montrer les égalités ci-dessous

$$f^2(e_1 - e_2) = f(f(e_1 - e_2)) = f(-(e_1 - e_2)) = -f(e_1 - e_2) = -(-(e_1 - e_2)) = e_1 - e_2$$

Car  $e_1 - e_2 \in E_{-1}$

$$f^2(e_1 - e_3) = f(f(e_1 - e_3)) = f(-(e_1 - e_3)) = -f(e_1 - e_3) = -(-(e_1 - e_3)) = e_1 - e_3$$

Car  $e_1 - e_3 \in E_{-1}$

$$f^2(e_1 + e_2 + e_3) = f(f(e_1 + e_2 + e_3)) = f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Car  $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$

Par conséquent  $f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$

Cela montre que  $f^{-1} = f$  et que  $f$  est bijective.

Remarque :

Avec les matrices on retrouve ce résultat plus facilement.

Allez à : **Exercice 16**

Correction exercice 17.

1.

$$\alpha a + \beta b = \gamma c = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma = 0 \\ -\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{2}{3}\gamma = 0 \\ \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ 2L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ -\beta + 3\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$(a, b, c)$  est une famille libre à trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

2.

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 u(e_1) + x_2 u(e_2) + x_3 u(e_3) \\ &= x_1 (3e_1 + e_2 - e_3) + x_2 (e_1 + 7e_2) + x_3 (-e_1 - e_3) \\ &= [3x_1 + x_2 - x_3]e_1 + [x_1 + 7x_2]e_2 + [-x_1 - x_3]e_3 \\ &= (3x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 7x_2, -x_1 - x_3) \end{aligned}$$

3.  $a = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$  donc

$$u(a) = \frac{1}{3}(3 \times 2 - 2 - 1, 2 + 7 \times (-2), -2 - 1) = \frac{1}{3}(3, -12, -3) = (1, -4, -1)$$

$$3a - 3c = 3 \times \frac{1}{3}(2, -2, 1) - 3 \times \frac{1}{3}(1, 2, 2) = (2, -2, 1) - (1, 2, 2) = (1, -4, -1)$$

On a bien  $u(a) = 3a - 3c$

$b = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$  donc

$$u(b) = \frac{1}{3}(3 \times 2 + 1 - (-2), 2 + 7, -2 - (-2)) = \frac{1}{3}(9, 9, 0) = (3, 3, 0)$$

$$3b + 3c = 3 \times \frac{1}{3}(2, 1, -2) + 3 \times \frac{1}{3}(1, 2, 2) = (2, 1, -2) + (1, 2, 2) = (3, 3, 0)$$

On a bien  $u(b) = 3b + 3c$

$c = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$  donc

$$u(c) = \frac{1}{3}(3 + 2 - 2, 1 + 7 \times 2, -1 - 2) = \frac{1}{3}(3, 15, -3) = (1, 5, -1)$$

$$\begin{aligned} -3a + 3b + 3c &= -3 \times \frac{1}{3}(2, -2, 1) + 3 \times \frac{1}{3}(2, 1, -2) + 3 \times \frac{1}{3}(1, 2, 2) \\ &= -(2, -2, 1) + (2, 1, -2) + (1, 2, 2) = (1, 5, -1) \end{aligned}$$

On a bien  $u(c) = -3a + 3b + 3c$

Allez à : **Exercice 17**

Correction exercice 18.

1. Soient  $u = (x, y, z)$  et  $u' = (x', y', z')$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et deux réels  $\lambda$  et  $\lambda'$

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') = (X, Y, Z)$$



$$\begin{aligned}
p(\lambda u + \lambda' u') &= (2X + Y + 2Z, Y, -X - Y - Z) \\
&= (2(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + 2(\lambda z + \lambda' z'), \lambda y + \lambda' y', -(\lambda x + \lambda' x') - (\lambda y + \lambda' y') \\
&\quad - (\lambda z + \lambda' z')) \\
&= (\lambda(2x + y + 2z) + \lambda'(2x' + y' + 2z'), \lambda y + \lambda' y', \lambda(-x - y - z) \\
&\quad + \lambda'(-x' - y' - z')) \\
&= \lambda(2x + y + 2z, y, -x - y - z) + \lambda'(2x' + y' + 2z', y', -x' - y' - z') \\
&= \lambda p(u) + \lambda' p(u')
\end{aligned}$$

Donc  $p$  est linéaire.

2.

$$p(e_1) = (2, 0, -1) = 2e_1 - e_3; p(e_2) = (1, 1, -1) = e_1 + e_2 - e_3 \text{ et } p(e_3) = (2, 0, -1) = 2e_1 - e_3 = p(e_1)$$

$$p^2(e_1) = p(2e_1 - e_3) = 2p(e_1) - p(e_3) = 2e_1 - e_3 = p(e_1)$$

$$p^2(e_2) = p(e_1 + e_2 - e_3) = p(e_1) + p(e_2) - p(e_3) = p(e_2)$$

$$p^2(e_3) = p(2e_1 - e_3) = 2p(e_1) - p(e_3) = p(e_3)$$

Donc pour tout  $u \in \mathbb{R}^3$ ,  $p^2(u) = p(u)$  et alors  $p^2 = p$ .

3.

$$\text{im}(p) = \text{Vect}(p(e_1), p(e_2), p(e_3)) = \text{Vect}(p(e_1), p(e_2))$$

$(p(e_1), p(e_2))$  est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, de plus elle engendre  $\text{im}(p)$ , c'est une base de  $\text{im}(p)$

$$u \in \ker(p - \text{Id}) \Leftrightarrow (p - \text{Id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow p(u) = u \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = x \\ y = y \\ -x - y - z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y = y \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + y + 2z = 0 \Leftrightarrow x = -y - 2z$$

$$u = (x, y, z) \in \ker(p - \text{Id}) \Leftrightarrow \exists y, z \in \mathbb{R}, u = (-y - 2z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) = y(-e_1 + e_2) + z(-2e_1 + e_3)$$

$(-e_1 + e_2, -2e_1 + e_3)$  est une famille de deux vecteurs non proportionnels, c'est une famille libre qui engendre  $\ker(p - \text{Id})$  c'est une base de  $\ker(p - \text{Id})$

Les composantes de  $p(e_1) = (2, 0, -1)$  et de  $p(e_2) = (1, 1, -1)$  vérifient l'équation  $2x + y + z = 0$  qui caractérise  $\text{Im}(p)$  donc  $\ker(p - \text{Id}) \subset \text{Im}(p)$  et comme ces deux espaces vectoriels sont de même dimension, ils sont égaux.

4. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(p)) + \dim(\text{Im}(p)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

Si  $u \in \ker(p) \cap \text{im}(p) = \ker(p) \cap \ker(p - \text{Id})$  alors  $p(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$  et  $p(u) = u$  donc  $u = 0_{\mathbb{R}^3}$ , ce qui montre que  $\ker(p) \cap \text{im}(p) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ , finalement on a

$$\ker(p) \oplus \text{Im}(p) = \mathbb{R}^3$$

Allez à : **Exercice 18**

Correction exercice 19.

$$1. \text{ Soit } x_1 \in E_1, (f - \text{id})(x_1) = 0_E \Leftrightarrow f(x_1) - x_1 = 0_E \Leftrightarrow f(x_1) = x_1$$

$$\text{Soit } x_2 \in E_2, (f + \text{id})(x_2) = 0_E \Leftrightarrow f(x_2) + x_2 = 0_E \Leftrightarrow f(x_2) = -x_2$$

$$2. \text{ On pose } x_1 = \frac{f(x) + x}{2} \text{ et } x_2 = -\frac{f(x) - x}{2}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{f(x) + x}{2}\right) = \frac{1}{2}(f^2(x) + f(x)) = \frac{1}{2}(x + f(x)) = x_1$$

Donc, d'après la première question,  $x_1 \in E_1$ .

De même

$$f(x_2) = f\left(-\frac{f(x) - x}{2}\right) = -\frac{1}{2}(f^2(x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(x - f(x)) = -x_2$$

Donc, d'après la première question,  $x_2 \in E_2$ .

Comme  $x = x_1 + x_2$ , on a  $E_1 + E_2 = E$

Il reste à montrer que  $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Si  $x \in E_1 \cap E_2$  alors  $f(x) = x$  et  $f(x) = -x$  donc  $x = -x$  ce qui montre que  $x$  est le vecteur nul.

On a  $E_1 \oplus E_2 = E$ .

3.  $f(v_i) = v_i$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $f(v_i) = -v_i$  pour  $r + 1 \leq i \leq n$

Remarque :

La matrice de  $f$  dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 19**

Correction exercice 20.

1. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(u)) = 2 - 1 = 1$$

Par conséquent  $u(e_1)$  et  $u(e_2)$  sont proportionnels et alors

$$u(e_2) = au(e_1) = ae_1 + ae_2$$

- 2.

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) = x_1(e_1 + e_2) + a(x_1e_1 + x_2e_2) \\ &= (x_1 + ax_2)e_1 + (x_2 + ax_2)e_2 = (x_1 + ax_2, x_2 + ax_2) \end{aligned}$$

- 3.

$$u(e_2) = au(e_1) \Leftrightarrow u(e_2) - au(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow u(e_2 - ae_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$e_2 - ae_1$  est un vecteur non nul de  $\ker(u)$  et  $\ker(u)$  est une droite, donc il s'agit d'une base de  $\ker(u)$ .

Allez à : **Exercice 20**

Correction exercice 21.

- 1.

$$f(e_1) = 1$$

$$f(e_2) = 1$$

$$f(e_3) = 1$$

$$f(e_4) = 1$$

Donc

$$\operatorname{Im}(f) = \{1\} \text{ et } \dim(\operatorname{Im}(f)) = 1$$

2. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 3$$

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) &\Leftrightarrow x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

On pose  $a = (-1, 1, 0, 0)$ ,  $b = (-1, 0, 1, 0)$  et  $c = (-1, 0, 0, 1)$

$(a, b, c)$  est une famille génératrice de  $\ker(f)$  avec trois vecteurs et  $\dim(\ker(f)) = 3$  donc  $(a, b, c)$  est une base de  $\ker(f)$ .

Allez à : **Exercice 21**

Correction exercice 22.

1. Soit  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  et  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \lambda' x') &= (\lambda x_1 + \lambda' x'_1) + (\lambda x_2 + \lambda' x'_2) + \cdots + (\lambda x_n + \lambda' x'_n) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \lambda'(x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n) = \lambda u(x) + \lambda' u(x') \end{aligned}$$

Donc  $u$  est linéaire

$$2. \quad u(e_1) = u(e_2) = \dots = u(e_n) = 1 \text{ donc } \dim(\text{Im}(u)) = 1$$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = n - 1$$

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

Supposons (a)

Si  $y \in \text{Im}(u)$  alors il existe  $x \in E$   $y = u(x)$  alors  $u(y) = u^2(x) = 0_E$  alors  $y \in \text{Ker}(u)$

Donc  $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + \frac{n}{2} = n \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = \frac{n}{2}$$

$\text{Im}(u) \subset \ker(u)$  et ces deux espaces ont la même dimension, donc ils sont égaux.

Supposons (b)

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim E \Leftrightarrow 2 \dim(\text{Im}(u)) = n \Leftrightarrow 2 \text{rg}(u) = n$$

Pour tout  $x \in E$ ,  $u(x) \in \text{Im}(u)$  donc  $u(x) \in \ker(u)$  donc  $u(u(x)) = 0_E$  donc  $u^2 = 0_E$ .

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

Si  $u$  est injective alors si  $x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F \Leftrightarrow u(x) = u(0_E) \Rightarrow x = 0_E$  car  $u$  est injective, ce qui montre que  $\ker(u) = \{0_E\}$ .

Si  $\ker(u) = \{0_E\}$  alors  $u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x) - u(y) = 0_F \Leftrightarrow u(x - y) = 0_F \Rightarrow x - y = 0_E$  car  $\ker(u) = \{0_E\}$ , et donc  $x = y$  ce qui montre que  $u$  est injective.

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

$$1. \quad (u - \lambda \text{id}_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$$

$$u(0_E) = 0_E = \lambda \times 0_E \Rightarrow 0_E \in E_\lambda$$

Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux vecteurs de  $E_\lambda$ , on a  $u(x_1) = \lambda x_1$  et  $u(x_2) = \lambda x_2$

Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux réels.

$$u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Donc  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E_\lambda$

$E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

$$2. \quad F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ donc } 0_E \in F \text{ par conséquent } u(0_E) = 0_E \in u(F)$$

Pour tout  $x_1$  et  $x_2$  dans  $F$ . Pour tout  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  réels. On a  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$

Soient  $y_1$  et  $y_2$  dans  $u(F)$ , il existe  $x_1$  et  $x_2$  dans  $F$  tels que  $y_1 = u(x_1)$  et  $y_2 = u(x_2)$

Alors

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Car  $u$  est linéaire, donc

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in u(F)$$

Car  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$ .

Par conséquent  $u(F)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

$$3. \quad \text{Si } x \in E_\lambda \text{ alors } x = \frac{1}{\lambda} u(x) = u\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in u(E_\lambda) \text{ donc } E_\lambda \subset u(E_\lambda)$$

Si  $y \in u(E_\lambda)$  il existe  $x \in E_\lambda$  tel que  $y = u(x)$  donc  $y = \lambda x \in E_\lambda$ , ce qui montre que  $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Finalement

$$u(E_\lambda) = E_\lambda$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

- Supposons que  $u$  soit surjective, alors  $Im(u) = F$  par conséquent  $\dim(Im(u)) = p$  et d'après le théorème du rang

$$\dim(ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(ker(u)) + p = n \Leftrightarrow \dim(ker(u)) = n - p < 0$$

Ce qui n'est pas possible, donc  $u$  n'est pas surjective.

- Supposons que  $u$  soit injective, alors  $ker(u) = \{0_E\}$  par conséquent  $\dim(ker(u)) = 0$  et d'après le théorème du rang, comme  $Im(u) \subset F$  entraîne que  $\dim(Im(u)) < p$

$$\dim(ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(Im(u)) = n \Leftrightarrow n = \dim(Im(u)) < p$$

Ce qui n'est pas possible, donc  $u$  n'est pas injective.

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

Soit  $y \in ker(f) \cap im(f)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ , et  $f(y) = 0_E$

Donc  $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0_E$  donc  $x \in ker(f^2)$ , comme  $y = f(x)$ ,  $y \in f(ker(f^2))$

On a montré que

$$ker(f) \cap im(f) \subset f(ker(f^2))$$

Soit  $y \in f(ker(f^2))$ , il existe  $x \in ker(f^2)$  tel que  $y = f(x)$ , ce qui montre que  $y \in Im(f)$  et comme  $f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E$  on a  $y \in ker(f)$

On a montré que

$$f(ker(f^2)) \subset ker(f) \cap im(f)$$

Et donc

$$ker(f) \cap im(f) = f(ker(f^2))$$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

Soit  $y \in f(ker(g \circ f))$ , il existe  $x \in ker(g \circ f)$  tel que  $y = f(x)$

Donc  $y \in Im(g)$ ,

D'autre part  $x \in ker(g \circ f)$  donc  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$ , par conséquent  $g(y) = g(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$ , ce qui montre que  $y \in ker(g)$ .

On a donc  $y \in ker(g) \cap Im(f)$ , on a montré que

$$f(ker(g \circ f)) \subset ker(g) \cap Im(f)$$

Soit  $y \in ker(g) \cap Im(f)$

$y \in Im(f)$  donc il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $y = f(x)$

$y \in ker(g)$  donc  $g(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$

On en déduit que  $0_{\mathbb{R}^n} = g(y) = g(f(x))$ , ce qui montre que  $x \in ker(g \circ f)$  et comme  $y = f(x)$  cela montre que  $y \in f(ker(g \circ f))$ .

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

- Soit  $x \in ker(u)$ ,  $u(x) = 0_E$ , donc  $u^2(x) = u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$  donc  $x \in ker(u^2)$ , ce qui montre que

$$ker(u) \subset ker(u^2)$$

- Soit  $y \in im(u^2)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = u^2(x) = u(u(x))$ , autrement dit il existe  $x' = u(x)$  tel que  $y = u(x')$ , ce qui montre que  $y \in im(u)$ .

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

Supposons que  $\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}$  et montrons que  $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Si  $x \in \ker(u)$  alors  $u(x) = 0_E$  alors  $u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$  alors  $x \in \ker(u \circ u)$

Cela montre que  $\ker(u) \subset \ker(u \circ u)$

Si  $x \in \ker(u \circ u)$  alors  $u(u(x)) = 0_E$ , on pose  $y = u(x) \in \text{Im}(u)$  et comme  $u(y) = 0_E$ ,  $y \in \ker(u) \cap \text{im}(u)$ , d'après (i)  $y = 0_E$  et donc  $u(x) = 0_E$  ce qui signifie que  $x \in \ker(u)$

Cela montre que  $\ker(u \circ u) \subset \ker(u)$  et finalement  $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Supposons que  $\ker(u) = \ker(u \circ u)$  et montrons que  $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$

Soit  $y \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$  et  $u(y) = 0_E$ , cela entraîne que  $u(u(x)) = 0_E$ , autrement dit  $x \in \ker(u \circ u)$ , d'après (ii)  $x \in \ker(u)$  donc  $y = u(x) = 0_E$ , cela montre bien que

$$\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}$$

Allez à : **Exercice 30**

Correction exercice 31.

1.

a)

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 u(e_1) + x_2 u(e_2) + x_3 u(e_3) \\ &= x_1(f_1 + 2f_2) + x_2(2f_1 - f_2) + x_3(-f_1 + f_2) \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3)f_1 + (2x_1 - x_2 + x_3)f_2 = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + x_3) \end{aligned}$$

b)

$$A = \text{Mat}_{\underline{e}}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$$

c)

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \Leftrightarrow AX &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \times \frac{3}{5}x_3 - x_3 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{5}x_3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_3 \\ x_2 = \frac{3}{5}x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $x = \left(-\frac{1}{5}x_3, \frac{3}{5}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{5}(-1, 3, 5)$ , on en déduit que  $\ker(u) = \text{Vect}(a)$  avec  $a = (-1, 3, 5)$ .

On en déduit que  $\dim(\ker(u)) = 1$  et d'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 2$$

Or  $\text{Im}(u)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  donc  $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^2$ .

Une autre méthode est d'écrire que :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$$

Puis, avec le théorème du rang, de dire que la dimension de cet espace est 2, il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires dans  $\text{Im}(u)$ , soit par exemple  $(u(e_1), u(e_2))$  ou  $(u(e_1), u(e_3))$  ou encore  $(u(e_2), u(e_3))$ , pour trouver une base (libre plus le bon nombre de vecteurs égal base). Mais je pense que si on ne remarque pas que  $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^2$  on a raté quelque chose parce que cela signifie que  $u$  est surjective.

2.

a) Soit  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{aligned}
u(x) &= u(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 u(e_1) + x_2 u(e_2) + x_3 u(e_3) \\
&= x_1(3e_1 + 2e_2 + 2e_3) + x_2(2e_1 + 3e_2 + 2e_3) + x_3(2e_1 + 2e_2 + 3e_3) \\
&= (3x_1 + 2x_2 + 2x_3)e_1 + (2x_1 + 3x_2 + 2x_3)e_2 + (2x_1 + 2x_2 + 3x_3)e_3 \\
&= (3x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + 3x_3)
\end{aligned}$$

b) Histoire de changer de méthode je ne vais pas faire comme dans le 1.

Les coordonnées de  $u(x)$  dans la base  $\underline{e}$  sont

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = AX$$

Où

$$A = \text{Mat}_{\underline{e}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned}
x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) &\Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 3L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 5L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc  $\ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

On peut utiliser le théorème du rang, mais je vais faire plus théorique (pour rire),  $u$  est un endomorphisme dont le noyau est réduit au vecteur nul est une injection, c'est donc une bijection, donc  $u$  est surjective et  $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$ .

Allez à : **Exercice 31**

Correction exercice 32.

1.

a) Les coordonnées du vecteur  $u(x)$  dans la base  $\underline{f}$  sont :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Donc  $u(x) = (x_1, -x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)$

b)  $u(e_1) = f_1 - f_2 + f_3$  et  $u(e_2) = 2f_2 + f_3$

c)

$$\begin{aligned}
x \in \ker(u) &\Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc  $\ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2))$$

$u(e_1)$  et  $u(e_2)$  sont deux vecteurs non proportionnels donc il forme une famille libre de  $\text{Im}(u)$ , cette famille étant génératrice, c'est une base de  $\text{Im}(u)$ .

Remarque :

Ici le théorème du rang ne sert pas à grand-chose.

Dans ce cas  $\text{Im}(u)$  est un plan de  $\mathbb{R}^3$ .

2.

a) Les coordonnées du vecteur  $u(x)$  dans la base  $\underline{e}$  sont :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 \end{pmatrix}$$

$$u(x) = (x_1 + 2x_3 - x_4, -x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4)$$

b)

$$u(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4, u(e_2) = 2e_2 - e_3 + 3e_4, u(e_3) = 2e_1 + e_3 + 7e_4 \text{ et } u(e_4) = -e_1 - e_2 - 5e_4.$$

c)

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_2 \\ L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}$$

Un vecteur de  $\ker(u)$  s'écrit  $x = (-2x_3 + x_4, -x_3 + x_4, x_3, x_4) = x_3(-2, -1, 1, 0) + x_4(1, 1, 0, 1)$  si on pose  $a = (-2, -1, 1, 0)$  et  $b = (1, 1, 0, 1)$  alors

$$\ker(u) = \text{Vect}(a, b)$$

$a$  et  $b$  ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de  $\ker(u)$ , c'est une famille génératrice de  $\ker(u)$  et donc une base de  $\ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow 2 + \dim(\text{Im}(u)) = 4 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 2$$

D'autre part :

$u(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4, u(e_2) = 2e_2 - e_3 + 3e_4$  sont deux vecteurs non proportionnels de  $\text{Im}(u)$ ,  $(u(e_1), u(e_2))$  est une famille libre à deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, c'est une base de  $\text{Im}(u)$ .

Remarque :

$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4))$  ne sert à rien dans cette question.

Allez à : **Exercice 32**

Correction exercice 33.

1.

a)

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0) \Rightarrow u(e_1) = (1, 2, 3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ e_2 &= (0, 1, 0) \Rightarrow u(e_2) = (1, 0, 1) = e_1 + e_3 \\ e_3 &= (0, 0, 1) \Rightarrow u(e_3) = (0, -1, -1) = -e_2 - e_3 \end{aligned}$$

b)

$$A = \text{Mat}_{\underline{e}}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

c)

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$$

$$x = (-x_2, x_2, -2x_2) = x_2(-1, 1, -2)$$

$$a = (-1, 1, -2), \ker(u) = \text{Vect}(a).$$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 3 - 1 = 2$$

Il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires (qui forment donc une famille libre) dans  $\text{Im}(u)$ , par exemple :  $u(e_1)$  et  $u(e_2)$  (on aurait pu prendre  $u(e_1)$  et  $u(e_3)$  ou  $u(e_2)$  et  $u(e_3)$ ).

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2))$$

Il est totalement inutile de chercher une relation entre  $u(e_1)$ ,  $u(e_2)$  et  $u(e_3)$  car le théorème du rang donne la dimension de l'image de  $u$ .

2.

a)

$$e_1 = (1, 0, 0) \Rightarrow u(e_1) = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3$$

$$e_2 = (0, 1, 0) \Rightarrow u(e_2) = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3$$

$$e_3 = (0, 0, 1) \Rightarrow u(e_3) = (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

b)

$$\text{Mat}_{\underline{e}}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$c) \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$$

Un vecteur de  $\ker(u)$  est de la forme  $x = (x_1, -x_1, x_3) = x_1(1, -1, 0) + (0, 0, 1)x_3$

Si on pose  $a = (1, -1, 0)$  et  $b = (0, 0, 1)$ ,  $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(a, b)$

$a$  et  $b$  sont deux vecteurs non proportionnels de  $\text{Ker}(u)$ , cette famille engendre  $\ker(u)$  il s'agit donc d'une base de  $\ker(u)$ . Pour l'image, pas besoin du théorème du rang, on pose  $c = (1, 1, 1)$

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(c, c, 0_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(c)$$

$\text{Im}(u)$  est la droite engendrée par  $c$ .

Allez à : **Exercice 33**

Correction exercice 34.

$$1. \text{ soit } x \in \mathbb{R}^4 \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ ses coordonnées dans la base canonique.}$$

$$x \in \ker(f) \Leftrightarrow AX = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -4x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{matrix} L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x = (-3x_3, x_3, x_3, 0) = x_3(-3, 1, 1, 0)$$

On pose  $a = (-3, 1, 1, 0)$   $\ker(f) = \text{Vect}(a)$ , c'est une base de  $\ker(f)$ .

2. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

Donc

$$\dim(\text{Im}(f)) = 3$$



Comme

$$\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$$

On a

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$$

Et

$$\text{rg}(A) = 3$$

Allez à : [Exercice 34](#)

Correction exercice 35.

$A$  est la matrice d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^5$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \ker(A) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -3x_3 - x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_4 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -3x_4 - x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -(-4x_4 - x_5) - 2x_4 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -4x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = -4x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_4, -4x_4 - x_5, x_4, x_4, x_5) = x_4(1, -4, 1, 1, 0) + x_5(0, -1, 0, 0, 1)$$

Les vecteurs  $(1, -4, 1, 1, 0)$  et  $(0, -1, 0, 0, 1)$  ne sont pas proportionnels et ils engendrent le noyau, donc  $\ker(A)$  est de dimension 2.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = 5$$

Ce qui montre que  $\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = 3$ .

Allez à : [Exercice 35](#)

Correction exercice 36.

1.

$$\begin{aligned} Y = AX &\Leftrightarrow AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 - 8x_2 - 12x_3 = y_1 \\ 12x_1 - 7x_2 - 12x_3 = y_2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 13L_2 - 12L_1 \\ 2L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 13x_1 - 8x_2 - 12x_3 = y_1 \\ 5x_2 - 12x_3 = 13y_2 - 12y_1 \\ -x_2 + 2x_3 = 2y_3 - y_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} 5L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} 13x_1 - 8x_2 - 12x_3 = y_1 \\ 5x_2 - 12x_3 = 13y_2 - 12y_1 \\ -2x_3 = 10y_3 - 5y_2 + 13y_2 - 12y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = y_1 + 8x_2 + 12x_3 \\ 5x_2 = 13y_2 - 12y_1 + 12x_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = y_1 + 8x_2 + 12(6y_1 - 4y_2 - 5y_3) \\ 5x_2 = 13y_2 - 12y_1 + 12(6y_1 - 4y_2 - 5y_3) = 60y_1 - 35y_2 - 60y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = 73y_1 - 48y_2 - 60y_3 + 8(12y_1 - 7y_2 - 12y_3) \\ x_2 = 12y_1 - 7y_2 - 12y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = 169y_1 - 104y_2 - 156y_3 \\ x_2 = 12y_1 - 7y_2 - 12y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13y_1 - 8y_2 - 12y_3 \\ x_2 = 12y_1 - 7y_2 - 12y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} = A$$

Le mieux aurait été de changer les rôles de  $x_1$  et  $x_3$  dans le premier système.

$$2. \quad A^2 = I \text{ donc } A^{2n} = (A^2)^n = I^n = I \text{ et } A^{2n+1} = A^{2n}A = A.$$

Allez à : **Exercice 36**

Correction exercice 37.

1. et 2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I \text{ donc } P(X) = X^2 - X - 2$$

$$3. \quad A^2 - A = 2I \Leftrightarrow A(A - I) = 2I \Leftrightarrow A \times \frac{A-I}{2} = I \text{ donc } A^{-1} = \frac{A-I}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases}$$

Ici il y a un problème pour appliquer le pivot de Gauss parce qu'il n'y a pas de termes en  $x_1$  dans la première ligne, il y a deux façons d'arranger ce problème, soit on intervertit  $x_1$  et  $x_2$  soit on intervertit la ligne 1 avec une ligne où il y a un  $x_1$ , c'est ce que nous allons faire.

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 - x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ -2x_3 = -y_1 - y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + y_2 \\ x_2 = -x_3 + y_1 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3\right) + y_2 \\ x_2 = -\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3\right) + y_1 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 37**

Correction exercice 38.

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$2. A^3 - A^2 + A - I = O \Leftrightarrow A(A^2 - A + I) = I \text{ donc } A^{-1} = A^2 - A + I$$

$$3. A^3 = A^2 - A + I \text{ donc } A^4 = A(A^2 - A + I) = A^3 - A^2 + A = (A^2 - A + I) - A^2 + A = I$$

Allez à : **Exercice 38**

Correction exercice 39.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^3 = (A - 2I)(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui entraîne que

$$A^3 - 3 \times 2A^2 + 3 \times 2^2A - 2^3I = O$$

Car  $A$  et  $I$  commutent.

Ce qui équivaut à

$$A^3 - 6A^2 + 12A - 8I = O$$

Soit encore

$$A^3 - 6A^2 + 12A = 8I$$

Puis en divisant par 8 et en mettant  $A$  en facteur

$$A \left( \frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I \right) = I$$

Ce qui montre que  $A$  est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I$$

Allez à : **Exercice 39**

Correction exercice 40.

1.

$$M(t_1)M(t_2) = \begin{pmatrix} \text{ch}(t_1) & \text{sh}(t_1) \\ \text{sh}(t_1) & \text{ch}(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}(t_2) & \text{sh}(t_2) \\ \text{sh}(t_2) & \text{ch}(t_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{ch}(t_1)\text{ch}(t_2) + \text{sh}(t_1)\text{sh}(t_2) & \text{ch}(t_1)\text{sh}(t_2) + \text{sh}(t_1)\text{ch}(t_2) \\ \text{sh}(t_1)\text{ch}(t_2) + \text{ch}(t_1)\text{sh}(t_2) & \text{sh}(t_1)\text{sh}(t_2) + \text{ch}(t_1)\text{ch}(t_2) \end{pmatrix}$$

$$\text{ch}(t_1)\text{ch}(t_2) + \text{sh}(t_1)\text{sh}(t_2) = \frac{e^{t_1} + e^{-t_1}}{2} \frac{e^{t_2} + e^{-t_2}}{2} + \frac{e^{t_1} - e^{-t_1}}{2} \frac{e^{t_2} - e^{-t_2}}{2}$$

$$= \frac{e^{t_1+t_2} + e^{t_1-t_2} + e^{-t_1+t_2} + e^{-t_1-t_2}}{4} + \frac{e^{t_1+t_2} + e^{t_1-t_2} + e^{-t_1+t_2} + e^{-t_1-t_2}}{4}$$

$$= \frac{2e^{t_1+t_2} + 2e^{-(t_1+t_2)}}{4} = \text{ch}(t_1 + t_2)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(t_1)\operatorname{ch}(t_2) + \operatorname{ch}(t_1)\operatorname{sh}(t_2) &= \frac{e^{t_1} - e^{-t_1}}{2} \frac{e^{t_2} + e^{-t_2}}{2} + \frac{e^{t_1} + e^{-t_1}}{2} \frac{e^{t_2} - e^{-t_2}}{2} \\
&= \frac{e^{t_1+t_2} + e^{t_1-t_2} - e^{-t_1+t_2} - e^{-t_1-t_2}}{4} + \frac{e^{t_1+t_2} - e^{t_1-t_2} + e^{-t_1+t_2} - e^{-t_1-t_2}}{4} \\
&= \frac{2e^{t_1+t_2} - 2e^{-(t_1+t_2)}}{4} = \operatorname{sh}(t_1 + t_2)
\end{aligned}$$

Donc  $M(t_1)M(t_2) = M(t_1 + t_2)$

2.  $\det(M(t)) = \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1 \neq 0$  donc la matrice est inversible.

Or  $M(t)M(-t) = M(0) = I$  donc  $(M(t))^{-1} = M(-t)$

Allez à : **Exercice 40**

Correction exercice 41.

1.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\} = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) - x = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{x \in \mathbb{R}^3, (u - Id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\
&= \ker(u - Id_{\mathbb{R}^3})
\end{aligned}$$

Donc  $E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned}
x \in E_1 &\Leftrightarrow u(x) = x \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = x_1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_3 \\ 2x_3 + 2x_3 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent  $x = (x_3, x_3, x_3) = x_3(1, 1, 1)$ , on pose  $a = (1, 1, 1)$  c'est une base de  $E_1$ .

2. Les coordonnées de  $u(b)$  dans la base canonique sont

$$AX_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -X_b$$

Donc  $u(b) = -e_1 - e_2 = -b$

Les coordonnées de  $u(c)$  dans la base canonique sont

$$AX_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -X_c$$

Donc  $u(b) = -e_1 - e_2 - 2e_3 = -c$

3.

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ce qui montre que  $(a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

4.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. On pose  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
PX' &= X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x'_1 + x'_3 = x_1 \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = x_2 \\ x'_1 + x'_2 + 2x'_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} x'_1 + x'_3 = x_1 \\ x'_2 = -x_1 + x_2 \\ x'_3 = -x_2 + x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = -x'_3 + x_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ x'_2 = -x_1 + x_2 \\ x'_3 = -x_2 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6.

$$D = \begin{pmatrix} u(a) & u(b) & u(c) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

7.  $D = P^{-1}AP$

Allez à : **Exercice 41**

Correction exercice 42.

1. Soient  $x = (x_1, x_2)$  et  $x' = (x'_1, x'_2)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  et soient  $\lambda$  et  $\lambda'$  deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \lambda' x') &= f(\lambda x_1 + \lambda' x'_1, \lambda x_2 + \lambda' x'_2) = (\lambda x_1 + \lambda' x'_1 - (\lambda x_2 + \lambda' x'_2), \lambda x_1 + \lambda' x'_1 + (\lambda x_2 + \lambda' x'_2)) \\ &= (\lambda(x_1 - x_2) + \lambda'(x'_1 - x'_2), \lambda(x_1 + x_2) + \lambda'(x'_1 + x'_2)) \\ &= \lambda(x_1 - x_2, x_1 + x_2) + \lambda'(x'_1 - x'_2, x'_1 + x'_2) = \lambda f(x) + \lambda' f(x') \end{aligned}$$

$f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  donc  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.

a)  $x \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_1 + L_2 \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Donc  $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

On en déduit que  $f$  est injective, comme de plus,  $f$  est un endomorphisme,  $f$  est surjective et donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ . (On aurait pu aussi invoquer le théorème du rang)

b) Du a) on tire que  $f$  est bijective et donc inversible (cela signifie la même chose).

c)

$$y = f(x) \Leftrightarrow (y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \Leftrightarrow (y_1, y_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_1 + y_2 = 2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - y_1 \\ x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - y_1 \\ x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$$

Donc  $f^{-1}(y_1, y_2) = (\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2, -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2)$ , ou, en changeant les rôles de  $x$  et de  $y$  :

$$f^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)$$

Et  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. La matrice d'une homothétie est de la forme  $H = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = hI$  et la matrice d'une rotation d'angle  $\alpha$

est de la forme  $R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ . Alors  $RH = h \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} h \cos(\alpha) & -h \sin(\alpha) \\ h \sin(\alpha) & h \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Donc  $\begin{cases} h \cos(\alpha) = 1 \\ h \sin(\alpha) = 1 \end{cases}$ , donc  $(h \cos(\alpha))^2 + (h \sin(\alpha))^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow h^2 = 2 \Leftrightarrow h = \sqrt{2} \text{ ou } h = -\sqrt{2}$

$$\text{Si } h = -\sqrt{2} \text{ alors } \begin{cases} \cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ donc } \alpha = \frac{5\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi.$$

$$\text{Si } h = \sqrt{2} \text{ alors } \begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ donc } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi.$$

$$5. \det(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ donc } (a, b) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.$$

$$6. \text{ Les coordonnées de } f(a) \text{ dans la base } (e_1, e_2) \text{ sont } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ donc } f(a) = 2e_2 = a + b$$

$$\text{Les coordonnées de } f(b) \text{ dans la base } (e_1, e_2) \text{ sont } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } f(b) = 2e_1 = a - b$$

$$7. \text{Mat}_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 42**

Correction exercice 43.

1.

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = C_3 - C_2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 2) = -1 \neq 0$$

Donc  $(a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$

2.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 \\ L_2 \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = y_2 \\ L_3 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 \\ L_2 + L_1 \begin{cases} x_2 = y_1 + y_2 \\ L_3 + L_2 \begin{cases} -x_3 = y_2 + y_3 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 + y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_2 - y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2y_1 - 2y_2 + 2y_2 + 2y_3 + y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_2 - y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_2 - y_3 \end{cases}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Les coordonnées de  $u(a)$  dans la base  $\beta$  sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $u(a) = a$

Les coordonnées de  $u(b)$  dans la base  $\beta$  sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $u(b) = c$

Les coordonnées de  $u(c)$  dans la base  $\beta$  sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc  $u(c) = -b$

Par conséquent

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

a)

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} R^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ R^4 &= R^2 R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

c)  $R = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PRP^{-1}$

$$A^4 = PRP^{-1}PRP^{-1}PRP^{-1}PRP^{-1} = PR^4P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

Donc

$$A^{4n} = (A^4)^n = I^n = I$$

Allez à : **Exercice 43**

Correction exercice 44.

$$1. A = \text{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2. u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ donc } 0_{\mathbb{R}^3} \in E$$

Soient  $x \in E$  et  $y \in E$  et  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels,  $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda x + \mu y$ , donc  $\lambda x + \mu y \in E$ ,  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3) \in E &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = x_1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1: -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ L_2: x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ L_3: -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1: -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4L_2 + L_1: -3x_2 = 0 \\ 2L_3 - L_1: x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Une base de  $E$  est le vecteur  $a = (1, 0, 1)$  et bien sur  $\dim(E) = 1$ .

3. Il est clair que le vecteur nul est dans  $F$ .

Soient  $x \in F$  et  $y \in F$  et  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3),$$

$$\begin{aligned} -2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 2(\lambda x_2 + \mu y_2) + 3(\lambda x_3 + \mu y_3) &= \lambda(-2x_1 + 2x_2 + 3x_3) + \mu(-2y_1 + 2y_2 + 3y_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $\lambda x + \mu y \in F$ .  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in F \Leftrightarrow x = \left(x_2 + \frac{3}{2}x_3, x_2, x_3\right) = x_2(1, 1, 0) + \frac{x_3}{2}(3, 0, 2)$$

On pose  $b = (1, 1, 0)$  et  $c = (3, 0, 2)$

$(b, c)$  est une famille génératrice de  $F$  formée de deux vecteurs non proportionnels, cette famille est donc libre.

Une base de  $F$  est  $(b, c)$ .

4.  $u(b)$  a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(a, b, u(b)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0$$

Donc  $(a, b, u(b))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

On aurait pu montrer que la famille est libre, et dire qu'une famille libre à 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 est une base.

5.  $\dim(E) + \dim(F) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

$(1, 0, 1) \notin F$  car  $-2 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 1 = 1 \neq 0$  donc  $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc  $E \oplus F = \mathbb{R}^3$ .

6.  $u(u(b))$  a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $u(u(b)) = -b$

$$mat_{\beta'}(u) = \begin{matrix} & u(a) & u(b) & u(u(b)) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ u(b) \end{matrix} \end{matrix}$$

Allez à : **Exercice 44**

Correction exercice 45.

1. Les coordonnées de  $u(x)$  dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de  $u$  dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  les coordonnées d'un vecteur  $x = (x_1, x_2, x_3)$  dans la base canonique

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u - Id) \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - 2x_3$$

Donc  $x = (x_2 - 2x_3, x_2, x_3) = x_2(1, 1, 0) + x_3(-2, 0, 1)$

On pose  $a = (1, 1, 0)$  et  $b = (-2, 0, 1)$ ,  $(a, b)$  est une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, qui engendrent  $\ker(u - Id)$ , c'est une base de  $\ker(u - Id)$ .

3. Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  les coordonnées d'un vecteur  $x = (x_1, x_2, x_3)$  dans la base canonique



$$\begin{aligned}
 x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) &\Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc  $x = (-x_3, 2x_3, x_3)$ , si on pose  $c = (-1, 2, 1)$  alors  $\ker(u) = \text{Vect}(c)$

4.

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - (-2 + 1) = -1 \neq 0$$

En développant par rapport à la première colonne, donc  $(a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

5.  $u(a) - a = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow u(a) = a$ , de même  $u(b) = b$  et  $u(c) = 0_{\mathbb{R}^3}$  donc

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. D'après la matrice de  $u$  dans la base  $\beta'$ ,  $\text{Im}(u) = \text{Vect}(a, b) = \ker(u - \text{Id})$

7. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Il reste à montrer que l'intersection de  $\ker(u)$  et de  $\text{Im}(u)$  est le vecteur nul.

$$\begin{aligned}
 x \in \ker(u) \cap \text{Im}(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \ker(u) \\ x \in \text{Im}(u) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \ker(u) \\ x \in \ker(u - \text{Id}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ u(x) - x = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ u(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow x \\
 &= 0_{\mathbb{R}^3}
 \end{aligned}$$

On a donc  $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$ .

Allez à : **Exercice 45**

Correction exercice 46.

1.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}
 x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) &\Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 + 15x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{matrix} 5L_2 - L_1 \\ L_3 - 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 + 15x_3 = 0 \\ 12x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + 15x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\
 x &= \left(\frac{3}{2}x_3, 0, x_3\right) = \frac{x_3}{2}(3, 0, 2)
 \end{aligned}$$

On pose  $a = (3, 0, 2)$  et alors  $\ker(u) = \text{Vect}(a)$  et  $\dim(\ker(u)) = 1$

D'après le théorème du rang,  $\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 2$

3. Le problème est de savoir si  $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$  car  $\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3)$

Première méthode :

On cherche une base de  $\text{Im}(u)$  (ce qui revient à choisir deux des trois vecteurs parmi  $u(e_1), u(e_2)$  et  $u(e_3)$  car ces vecteurs sont deux à deux non proportionnels et que la dimension de l'image de  $u$  est 2, puis de montrer que ces trois vecteurs forment une base de  $\mathbb{R}^3$ , c'est long, on passe)

Deuxième méthode

D'après la matrice, il est clair que  $a = u(e_2)$ , comme  $\ker(u) = \text{Vect}(a)$  on a  $\ker(u) \subset \text{Im}(u)$  et donc  $\ker(u) \cap \text{Im}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ , ce qui montre que l'on n'a pas  $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$ .

4.

## Première méthode

On pose  $X_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  les coordonnées de  $a$  et de  $b$  dans la base canonique et on résout le système

$$u(b) = a \Leftrightarrow AX_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

C'est long

## Deuxième méthode

On remarque que  $u(e_2) = a$  donc un vecteur  $b$  qui vérifie  $u(b) = a$  est par exemple  $b = e_2$

## Remarque :

Ce n'est pas le seul mais l'énoncé demande « un vecteur  $b$  tel que  $u(b) = a$  »

5.  $u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}$  donc  $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$

Soit  $x_1 \in E_{-1}$  et  $x_2 \in E_{-1}$ , on a  $u(x_1) = -x_1$  et  $u(x_2) = -x_2$ , alors pour tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  on a

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) = \lambda_1 (-x_1) + \lambda_2 (-x_2) = -(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

Donc

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in E_{-1}$$

Et  $E_{-1}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$

## Autre méthode :

$E_{-1} = \ker(u + id)$  donc  $E_{-1}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

On pose  $X_c = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  les coordonnées de  $c$  dans la base canonique

$$\begin{aligned} u(c) = -c \Leftrightarrow AX_c = -X_c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 + 15x_3 = -x_1 \\ -2x_1 + 3x_3 = -x_2 \\ -6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = -x_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 + 3x_2 + 15x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -6x_3 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \\ &x = (2x_3, x_3, x_3) = x_3(2, 1, 1) \end{aligned}$$

On prend  $c = (2, 1, 1)$  et on a  $E_{-1} = \text{Vect}(c)$

6.

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(3, 0, 2) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(2, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$(a, b, c)$  est une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

7.

$$u(a) = 0_{\mathbb{R}^3}, u(b) = a, u(c) = -c$$

Donc

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP$$

Où

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Correction exercice 47.

$$1. \det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la dernière ligne.}$$

Puis  $\det(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ , de nouveau en développant par rapport à la dernière ligne. Ce déterminant est non nul donc  $(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

2.

Les coordonnées de  $f(a)$  dans la base  $\beta$  sont :

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(a) = -3e_1 + 3e_2 = -3(e_1 - e_2) = -3a$$

Les coordonnées de  $f(b)$  dans la base  $\beta$  sont :

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(b) = -3e_1 + 3e_2 + 3e_3 = -3(e_1 - e_2 - e_3) = -3b$$

Les coordonnées de  $f(c)$  dans la base  $\beta$  sont :

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(c) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Les coordonnées de  $f(d)$  dans la base  $\beta$  sont :

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(d) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$3. \text{Mat}_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allez à : [Exercice 47](#)

## Correction exercice 48.

$$1. \det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ en additionnant } C_3 + C_2$$

Puis en développant par rapport à la troisième ligne :

$$\det(a, b, c, d) = -(-1) \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 + C_1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Donc  $(a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

$$2. P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
X = PX' \Leftrightarrow PX' = X &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} -x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + 2x'_4 = x_1 \\ x'_1 - 2x'_2 + 3x'_3 - x'_4 = x_2 \\ -x'_2 + x'_3 = x_3 \\ -x'_1 + x'_2 - x'_3 + x'_4 = x_4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 \\ L_4 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} -x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + 2x'_4 = x_1 \\ -x'_2 + x'_3 + x'_4 = x_1 + x_2 \\ -x'_2 + x'_3 = x_3 \\ -x'_2 + 2x'_3 = x_2 + x_4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} -x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + 2x'_4 = x_1 \\ -x'_2 + x'_3 + x'_4 = x_1 + x_2 \\ -x'_4 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ x'_3 - x'_4 = -x_1 + x_4 \end{cases}
\end{aligned}$$

$L_3$  donne  $x'_4 = x_1 + x_2 - x_3$

$L_4$  donne  $x'_3 = -x_1 + x_4 + x'_4 = x_2 - x_3 + x_4$

$L_2$  donne  $x'_2 = x'_3 + x'_4 - x_1 - x_2 = x_2 - x_3 + x_4 + x_1 + x_2 - x_3 - x_1 - x_2 = x_2 - 2x_3 + x_4$

$L_1$  donne

$$\begin{aligned}
x'_1 &= x'_2 - 2x'_3 + 2x'_4 - x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 - 2(x_2 - x_3 + x_4) + 2(x_1 + x_2 - x_3) - x_1 \\
&= x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Les coordonnées de  $u(a)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  sont :  $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc  $u(a) = e_1 - e_2 + e_4 = -(e_1 + e_2 - e_4) = -a$

Les coordonnées de  $u(b)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  sont :  $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc  $u(b) = -2e_1 + 3e_2 + e_3 - 2e_4 = a - b$

Les coordonnées de  $u(c)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  sont :  $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc  $u(c) = 3e_1 - 5e_2 - 2e_3 + 2e_4 = b - c$

Les coordonnées de  $u(d)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  sont :  $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc  $u(d) = -4e_1 + 4e_2 + e_3 - 2e_4 = c - d$

4.

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned}
 T = P^{-1}AP &= (P^{-1}A)P = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 N &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Et } N^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Comme  $A = P^{-1}TP$ ,  $A + I = PTP^{-1} + PIP^{-1} = P(T + I)P^{-1} = PNP^{-1}$ Donc  $(A + I)^4 = PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1} = PN^4P^{-1} = POP^{-1} = O$ , la matrice nulle.Allez à : [Exercice 48](#)

Correction exercice 49.

1.

$$\begin{aligned}
 \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^4} &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} -2\alpha + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma + \delta = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma + 2\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 - L_1 \\ 2L_3 - L_1 \\ 2L_4 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} -2\alpha + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ 2\beta - 2\gamma - 3\delta = 0 \\ -\delta = 0 \\ -2\beta + \delta = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base de  $\mathbb{R}^4$ .2. Les coordonnées de  $u(a)$  dans  $\beta$  sont

$$AX_a = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2X_a$$

Donc  $u(a) = 2a$ Les coordonnées de  $u(b)$  dans  $\beta$  sont

$$AX_b = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2X_b$$

Donc  $u(b) = 2b$ Les coordonnées de  $u(c)$  dans  $\beta$  sont

$$AX_c = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_c$$

Donc  $u(c) = -c$

Les coordonnées de  $u(c)$  dans  $\beta$  sont

$$AX_d = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -X_d$$

Donc  $u(d) = -d$

3.

$$D = \text{Mat}_{\beta'}(u) = \begin{pmatrix} u(a) & u(b) & u(c) & u(d) \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

4.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{aligned} Y = PX &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} -2x_1 & + 2x_3 + 3x_4 = y_1 \\ L_2 \begin{cases} -x_1 + x_2 & = y_2 \\ L_3 \begin{cases} -x_1 & + x_3 + x_4 = y_3 \\ L_4 \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = y_4 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} -2x_1 & + 2x_3 + 3x_4 = y_1 \\ 2L_2 - L_1 \begin{cases} 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -y_1 + 2y_2 \\ 2L_3 - L_1 \begin{cases} -x_4 = -y_1 + 2y_3 \\ 2L_4 - L_1 \begin{cases} -2x_2 & + x_4 = -y_1 + 2y_4 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

D'après  $L_3$

$$x_4 = y_1 - 2y_3$$

Ce que l'on remplace dans  $L_4$

$$-2x_2 + y_1 - 2y_3 = -y_1 + 2y_4 \Leftrightarrow -2x_2 = -2y_1 + 2y_3 + 2y_4 \Leftrightarrow x_2 = y_1 - y_3 - y_4$$

On remplace ces deux résultats dans  $L_2$

$$\begin{aligned} 2(y_1 - y_3 - y_4) - 2x_3 - 3(y_1 - 2y_3) &= -y_1 + 2y_2 \Leftrightarrow -2x_3 = 2y_2 - 4y_3 + 2y_4 \\ \Leftrightarrow x_3 &= -y_2 + 2y_3 - y_4 \end{aligned}$$

Et enfin on remet le tout dans  $L_1$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2(-y_2 + 2y_3 - y_4) + 3(y_1 - 2y_3) &= y_1 \Leftrightarrow -2x_1 = -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 \\ \Leftrightarrow x_1 &= y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \\ x_2 = y_1 - y_3 - y_4 \\ x_3 = -y_2 + 2y_3 - y_4 \\ x_4 = y_1 - 2y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP &= P^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Allez à : [Exercice 49](#)

Correction exercice 50.

1.  $c = u(b) = u(e_1) = e_1 + e_2$ , voir la matrice.

Les coordonnées de  $d = u(c)$  dans la base  $\beta$  sont :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la quatrième colonne.

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

En développant par rapport à la troisième ligne.

Donc  $(a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

2.  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = PX' \Leftrightarrow PX' = X \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = x_1 \\ x'_1 + x'_3 + x'_4 = x_2 \\ x'_1 + x'_4 = x_3 \\ x'_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'_2 = x_1 - x'_1 - x'_3 - x'_4 = x_1 - (x_3 - x_4) - (x_2 - x_3) - x_4 \\ x'_3 = x_2 - x'_1 - x'_4 = x_2 - x_3 \\ x'_1 = x_3 - x'_4 = x_3 - x_4 \\ x'_4 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = x_3 - x_4 \\ x'_2 = x_1 - x_2 \\ x'_3 = x_2 - x_3 \\ x'_4 = x_4 \end{cases}$$

Donc  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Les coordonnées de  $u(a)$  dans la base  $\beta$  sont  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc  $u(a) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$u(b) = c$ , on a aussi  $u(b) = e_1 + e_2$  c'est donné par la deuxième colonne de la matrice, on en aura besoin plus tard.

$$u(c) = u(u(b)) = u^2(b) = d,$$

$$\begin{aligned}
 u(d) &= u(u^2(b)) = u^2(u(b)) = u^2(e_1 + e_2) = u(u(e_1) + u(e_2)) = u(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \\
 &= u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) + u(e_4) = e_1 = a
 \end{aligned}$$

Il suffit de faire la somme des quatre colonnes pour trouver les coordonnées de  $u(d)$  dans la base  $\beta$ .

4.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or  $A = PNP^{-1}$  donc  $A^4 = (PNP^{-1})^4 = PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1} = PN^4P^{-1} = O$

6. Soit  $x \in \mathbb{R}^4$ , il s'exprime sous la forme  $x = x'_1a + x'_2b + x'_3c + x'_4d$  dans la base  $\beta'$  ?

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow NX' = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_4 \\ 0 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $x = x'_1a$ ,  $\ker(u)$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $a$ .

7.  $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(a), u(b), u(c), u(d)) = \text{Vect}(0_{\mathbb{R}^4}, c, d, a) = \text{Vect}(a, c, d)$

$(a, c, d)$  est une famille (car  $(a, b, c, d)$  est libre) et génératrice de  $\text{Im}(u)$ , c'est une base de  $\text{Im}(u)$ .

Allez à : **Exercice 50**

Correction exercice 51.

1. Soit  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(u)$

$$u(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$x = (0, 0, x_4, x_4) = x_4(0, 0, 1, 1)$$

On pose  $a = (0, 0, 1, 1)$

2. On cherche les vecteurs  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  tels que  $a = u(x)$

$$u(x) = a \Leftrightarrow AX = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = 1 + x_3 \end{cases}$$

On prend un  $x_3$  quelconque,  $x_3 = 0$  par exemple

On pose  $b = (-1, 1, 0, 1)$

3. Première méthode

En regardant la matrice, il est clair que  $u(e_3) = -e_3$ , donc  $c = e_3$  convient

Deuxième méthode

On cherche les vecteurs  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  tels que  $u(x) = -x$

$$u(x) = -x \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = -x_1 \\ 0 = -x_2 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = -x_3 \\ -x_1 = -x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = x_1 \\ x_4 = 2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_4 = 0$$

$$x = (0, 0, x_3, 0) = x_3(0, 0, 1, 0) = x_3e_3$$



4.

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

En développant par rapport à la première ligne

Par conséquent  $\beta'$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .5. Les coordonnées de  $u(d)$  dans la base  $\beta$  sont

$$AX_d = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_c - X_d$$

Donc

$$u(d) = c - d$$

6. On en déduit que

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Le rang de  $A$  est le même que celui de  $T$ , la matrice  $T$  a trois colonnes libres, (les seconde, troisième et quatrième) donc son rang est 3, donc le rang de  $A$  est 3.

8.

Les coordonnées de  $u(f)$  dans la base  $\beta$  sont

$$AX_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc  $u(f) = -e_1 - 2e_3 - 2e_4$ Les coordonnées de  $u^2(f)$  dans la base  $\beta$  sont

$$A^2X_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $u^2(f) = e_1 + 2e_3 + e_4$ Les coordonnées de  $u^3(f)$  dans la base  $\beta$  sont

$$A^3X_f = A(A^2X_f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = A(AX_f) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc  $u^3(f) = -2e_1 - 4e_3 - 2e_4$ 

$$\det(f, u(f), u^2(f), u^3(f)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième ligne, puis en remplaçant la deuxième colonne par elle-même plus la première colonne et la troisième par elle-même moins la première colonne

$$\det(f, u(f), u^2(f), u^3(f)) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Donc  $(f, u(f), u^2(f), u^3(f))$  est une base de  $\mathbb{R}^4$

9.

Les coordonnées de  $u^4(f)$  dans la base  $\beta$  sont

$$A^4 X_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que  $u^4(f) = -2u^3(f) - u^2(f)$

$$C = \begin{matrix} & u(f) & u^2(f) & u^3(f) & u^4(f) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} & f \\ & u(f) \\ & u^2(f) \\ & u^3(f) \end{matrix}$$

10. Soit  $Q$  la matrice de passage de  $\beta$  à  $\beta''$

$$C = Q^{-1}AQ \Leftrightarrow A = QCQ^{-1}$$

D'autre part  $A = PTP^{-1}$

Donc

$$PTP^{-1} = QCQ^{-1}$$

Ce qui entraîne que

$$T = P^{-1}QCQ^{-1}P = (Q^{-1}P)^{-1}C(Q^{-1}P)$$

Soit  $R = Q^{-1}P$

Allez à : **Exercice 51**

Correction exercice 52.

1. Soit  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(u)$

$$\begin{aligned} u(x) \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $x = (x_4, x_3, x_3, x_4) = x_3(0,1,1,0) + x_4(1,0,0,1)$

On pose  $a = (0,1,1,0)$  et  $b = (1,0,0,1)$ , c'est deux vecteurs engendrent  $\ker(u)$  et ils ne sont proportionnels, ils forment une famille libre et génératrice de  $\ker(u)$ , c'est une base.

2. Soit  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_1$

$$\begin{aligned} u(x) \in E_1 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = x_2 \\ x_2 - x_3 = x_3 \\ x_1 - x_4 = x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_4 - 2x_3 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_4 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_1 = 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ -x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_1 = 2x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $x = (2x_4, 2x_4, x_4, x_4) = x_4 = (2, 2, 1, 1)$  par conséquent si on pose  $c = (2, 2, 1, 1)$  on a  $E_1 = \text{vect}(c)$

3. La matrice de  $\ker((u - id)^2)$  dans la base  $\beta$  est  $(A - I)^2$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker((u - id)^2) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 2x_4 - 3x_3 + x_4 = -x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$x = (-x_3 + 3x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) = x_3(-1, 1, 1, 0) + x_4(3, 1, 0, 1)$$

Le tout est de ne pas prendre  $x_3 = x_4$  sinon on retombe un vecteur proportionnel à  $(2, 2, 1, 1)$  on prend n'importe que quoi d'autre par exemple  $x_3 = 1$  et  $x_4 = 0$

Ensuite on regarde les coordonnées de  $d = (-1, 1, 1, 0)$  dans la base canonique soit  $AX_d$

$$AX_d = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -X_c + X_d$$

4.

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

En soustrayant la quatrième colonne avec la seconde

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Donc  $(a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

5.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 52**

Correction exercice 53.

1.

$$\begin{aligned}
x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(u) &\Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_4 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ 3x_4 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_4 \\ x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = -x_4 \end{cases} \\
x = (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_4, -x_4, 0, x_4) = x_4(-1, -1, 0, 1)
\end{aligned}$$

$a = (-1, -1, 0, 1)$  engendre  $\ker(u)$ .

2.  $u(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4} = \lambda 0_{\mathbb{R}^4}$ , donc  $0_{\mathbb{R}^4} \in E_\lambda$

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E_\lambda$ , on a  $u(x) = \lambda x$  et  $f(y) = \lambda y$

Par conséquent

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y) = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

Ce qui montre que  $\alpha x + \beta y \in E_\lambda$

$E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

3.

$$\begin{aligned}
x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_{-1} &\Leftrightarrow u(x) = -x \Leftrightarrow AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = -x_1 \\ x_1 + x_4 = -x_2 \\ x_3 = -x_3 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = -x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow L_2 + L_1 \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 = -2x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_4 = -2x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\
x = (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1, x_1, 0, -2x_1) = x_1(1, 1, 0, -2)
\end{aligned}$$

$b = (1, 1, 0, -2)$  engendre  $E_{-1}$ .

$$\begin{aligned}
x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_1 &\Leftrightarrow u(x) = x \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = x_1 \\ x_1 + x_4 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \{ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ L_2 \{ -3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \{ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ L_2 + 3L_1 \{ -2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\
x = (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_4, 0, x_3, x_4) = x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

On pose  $c = (0, 0, 1, 0)$  et  $d = (-1, 0, 0, 1)$ ,  $(c, d)$  engendrent  $E_1$ , de plus ils ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre, c'est une base de  $E_1$ .

4. Première méthode

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième colonne

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} L_1 & -1 & 1 & -1 \\ L_2 & -1 & 1 & 0 \\ L_3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 + L_3 & 0 & -1 & 0 \\ L_2 & -1 & 1 & 0 \\ L_3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

En développant par rapport à la troisième colonne

Donc  $(a, b, c, d)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

Deuxième méthode

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta - \delta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta - \delta = 0 \\ \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\delta = 0 \\ \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$(a, b, c, d)$  est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base.

5. D'après les questions précédentes on a

$$u(a) = 0_{\mathbb{R}^4}; u(b) = -b; u(c) = c \text{ et } u(d) = d$$

Donc

$$Mat_{\beta'}(u) = \begin{pmatrix} u(a) & u(b) & u(c) & u(d) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

Allez à : **Exercice 53**

Correction exercice 54.

1.

$$\begin{aligned} \det(a_1, a_2, a_3, c) &= \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 - C_1 & C_4 + C_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 & 2 & 1 & 3 \\ L_2 & 3 & 1 & 5 \\ L_3 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} L_1 & 2 & 1 & 3 \\ L_2 - L_1 & 1 & 0 & 2 \\ L_3 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$2. \text{ Les coordonnées de } u(a_1) \text{ dans la base } \beta \text{ sont } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } u(a_1) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2e_4 = a_1$$

$$\text{Les coordonnées de } u(a_2) \text{ dans la base } \beta \text{ sont } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } u(a_2) = e_2 + e_3 = a_2$$

$$\text{Les coordonnées de } u(a_3) \text{ dans la base } \beta \text{ sont } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } u(a_3) = e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4 = a_3$$

Les coordonnées de  $u(c)$  dans la base  $\beta$  sont  $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc  $u(c) = e_1 + e_2 + e_3 = -c$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.  $u(a_1) = a_1 \in F$ ,  $u(a_2) = a_2 \in F$  et  $u(a_3) = a_3 \in F$ ,  $(a_1, a_2, a_3)$  est une base de  $F$  donc pour tout  $x \in F$ ,  $u(x) \in F$ .

Pour tout  $x \in F$ ,  $v(x) = u(x) \in F$ , et  $v$  est linéaire donc  $v$  est un endomorphisme de  $F$ .

$$Mat_{(a_1, a_2, a_3)}(v) = \begin{pmatrix} u(a_1) & u(a_2) & u(a_3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}$$

4.  $(a_1, a_2, a_3)$  est une base de  $F$ ,  $(c)$  est une base de  $Vect(c)$ , et  $(a_1, a_2, a_3, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ , donc  $\mathbb{R}^4 = F \oplus Vect(c)$

5. Par définition de la somme directe, pour tout  $x \in \mathbb{R}^4$  il existe un unique  $f \in F$  et un unique  $g \in Vect(c)$  tel que  $x = f + g$ .

$$u(x) = u(f + g) = u(f) + u(g) = f - g$$

Allez à : **Exercice 54**

Correction exercice 55.

1.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -10-\lambda & -3 & -12 \\ 5 & -\lambda & 7 \\ 6 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} &= (-10-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 7 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -3 & -12 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -3 & -12 \\ -\lambda & 7 \end{vmatrix} \\ &= (-10-\lambda)[- \lambda(7-\lambda) - 14] - 5[-3(7-\lambda) + 24] + 6(-21 - 12\lambda) \\ &= (-10-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 14) - 5(3 + 3\lambda) - 126 - 72\lambda \\ &= -10\lambda^2 + 70\lambda + 140 - \lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda - 15 - 15\lambda - 126 - 72\lambda \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda + 1)^3 \end{aligned}$$

Si  $\lambda = -1$  alors  $A - \lambda I = A + I$  n'est pas inversible.

Soit  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  ses coordonnées dans la base canonique.

$$\begin{aligned} x \in \ker(u + id) &\Leftrightarrow X \in \ker(A + I) \Leftrightarrow (A + I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow L_2 - L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2}x_3 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $x = \left(-\frac{3}{2}x_3, \frac{1}{2}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{2}(-3, 1, 2)$

Donc  $\ker(A + I)$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

2.  $(u + Id)(a) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow u(a) + a = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow u(a) = -a$

3. Si on pose  $X_a = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  où  $X_b$  sont les coordonnées de  $b$  dans la base canonique alors

$$\begin{aligned} u(b) = a - b &\Leftrightarrow AX_b = X_a - X_b \Leftrightarrow (A + I)X_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow L_2 - L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2}x_3 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_3 + 1 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Si on prend  $x_3 = 0$  on a pour solution  $b = (0, 1, 0)$ .

Si on pose  $X_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $X_c = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  où  $X_c$  sont les coordonnées de  $c$  dans la base canonique alors

$$\begin{aligned} u(c) = b - c &\Leftrightarrow AX_c = X_b - X_c \Leftrightarrow (A + I)X_c = X_b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow L_2 - L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2}x_3 + \frac{3}{2} + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2} \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Si on prend  $x_3 = 1$  on a pour solution  $c = (-1, -1, 1)$ .

4.  $\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$  donc  $(a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

5.  $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6.  $(T + I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , par de simple calculs on trouve que  $(T + I)^3 = O$ .

$$(A + I)^3 = (PTP^{-1} + PIP^{-1})^3 = (P(T + I)P^{-1})^3 = P(T + I)^3P^{-1} = O$$

7.  $(A + I)^3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 + 3A + I = O \Leftrightarrow A(-3A^2 - 3A - 3I) = I$

Donc  $A^{-1} = -3A^2 - 3A - 3I$

Allez à : **Exercice 55**

1.

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_1) & f(e_3) \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

2. Soient  $x \in E_1$ ,  $(f - id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x) - x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x) = x$ 

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$$

Soient  $x, x'$  deux vecteurs de  $E_1$  donc  $f(x) = x$  et  $f(x') = x'$ , soient  $\lambda, \lambda'$  deux réels

$$f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x') = \lambda x + \lambda' x'$$

Cela entraîne que  $\lambda x + \lambda' x' \in E_1$ , par conséquent  $E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .Soient  $x \in N_{-1}$ ,  $(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f^2(x) + x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f^2(x) = -x$ 

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f^2(0_{\mathbb{R}^3}) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in N_{-1}$$

Soient  $x, x'$  deux vecteurs de  $N_{-1}$  donc  $f^2(x) = -x$  et  $f^2(x') = -x'$ , soient  $\lambda, \lambda'$  deux réels

$$f^2(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f^2(x) + \lambda' f^2(x') = \lambda(-x) + \lambda'(-x') = -(\lambda x + \lambda' x')$$

Cela entraîne que  $\lambda x + \lambda' x' \in N_{-1}$ , par conséquent  $N_{-1}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

Remarque :

On peut aller plus vite en remarquant que  $f + id_{\mathbb{R}^3}$  est une application linéaire et en invoquant le fait que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Et puis pareil pour  $f^2 + id_{\mathbb{R}^3}$ .

3.

$$\begin{aligned} x \in E_1 &\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 - x_3 = x_1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = x_2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 6x_3 = x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss (à l'étape d'avant ce n'était pas possible).

$$\begin{aligned} x \in E_1 &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x = (x_3, x_3, x_3) = x_3(1, 1, 1)$$

 $E_1$  est la droite vectoriel engendrée par le vecteur  $a = (1, 1, 1)$ ,  $E_1 = Vect(a)$ .

$$\begin{aligned} x \in E_1 &\Leftrightarrow f^2(x) = -x \Leftrightarrow A^2X = -X \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3 \\ x &= (x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1) \end{aligned}$$

On cherche un vecteur de  $N_{-1}$ , prenons  $x_2 = 1$  et  $x_3 = 0$  :  $b = (1, 1, 0) = e_1 + e_2$ 

$$f(b) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = 2e_2 + 3e_3 + 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 = 2e_1 - 3e_2 - 5e_3$$

Il faut vérifier que ce vecteur est bien dans  $N_{-1}$ ,  $x_1 - x_2 + x_3 = 2 - 3 + (-5) = 0$ , c'est bon,  $f(b) \in N_{-1}$  ensuite il faut montrer que  $(b, f(b))$  est une base de  $N_{-1}$ .  $\dim(N_{-1}) < 3$  or  $(b, f(b))$  est une famille libre (car  $b$  et  $f(b)$  ne sont pas proportionnels) dans un espace de dimension inférieur ou égale à 2, cela entraîne à la fois que  $\dim(N_{-1}) \geq 2$ , qu'alors  $\dim(N_{-1}) = 2$  et que  $(b, f(b))$  est une base de cet espace.



Il y a plusieurs méthode possible, la plus basique est de montrer que  $(a, b, f(b))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , on passe, c'est trop facile. Deuxième méthode, soit  $x \in E_1 \cap N_{-1}$ ,

$x \in E_1 \Leftrightarrow f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$  et  $x \in N_{-1} \Leftrightarrow f^2(x) = -x$ , cela entraine que  $-x = x \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$ , autrement dit  $E_1 \cap N_{-1} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Comme  $\dim(E_1) + \dim(N_{-1}) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ , on en déduit que  $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$ .

Remarque :

Sans rien faire de plus on peut en déduire que  $\beta'$  est une base.

4. Il faut d'abord calculer  $f(a), f(b)$  et  $f(f(b))$  dans la base  $(a, b, f(b))$

$f(a) = a$  car  $a \in E_1$ .

$f(b) = f(b)$  ça c'est sûr ! et  $f(f(b)) = f^2(b) = -b$

On en déduit la matrice de  $f$  dans la base  $(a, b, f(b))$

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) & f^2(b) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ f(b) \end{matrix}$$

5. Il faut calculer  $f^2(a), f^2(b)$  et  $f^2(f(b))$  dans la base  $(a, b, f(b))$

$$f^2(a) = f(f(a)) = f(a) = a$$

$$f^2(b) = -b$$

$$f^2(f(b)) = f^3(b) = f(f^2(b)) = f(-b) = -f(b)$$

Donc la matrice est

$$\begin{pmatrix} f^2(a) & f^2(b) & f^3(b) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ f(b) \end{matrix}$$

Autre méthode la matrice de  $f^2$  est la matrice de  $f$  au carré

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 56**

Correction exercice 57.

1. On appelle  $X_{e_2}$  les coordonnées de  $e_2$  dans la base canonique

Les coordonnées de  $u(e_2)$  dans la base canonique sont

$$AX_{e_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de  $u^2(e_2)$  dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de  $u^3(e_2)$  dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que  $(e_2, u(e_2), u^2(e_2), u^3(e_2))$  est libre

$$\alpha e_2 + \beta u(e_2) + \gamma u^2(e_2) + \delta u^3(e_2) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\beta - 4\gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ 4\gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\beta - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

$(e_2, u(e_2), u^2(e_2), u^3(e_2))$  est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base.

2.

Les coordonnées de  $u^4(e_2)$  dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $u^4(e_2) = -e_2 + 2u^2(e_2)$

$$C = \begin{matrix} & u(e_2) & u^2(e_2) & u^3(e_2) & u^4(e_2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & e_2 & u(e_2) & u^2(e_2) & u^3(e_2) \end{matrix}$$

3. On cherche les vecteurs  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  tels que  $u(x) = x$

$$u(x) = x \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ -3x_1 - 2x_3 + 2x_4 = x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \\ L_2 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \\ L_3 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -6x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ L_2 + 3L_1 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -6x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ L_3 - L_1 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -6x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = (x_1, 0, -x_1, 0) = x_1(1, 0, -1, 0)$$

4. Les coordonnées de  $u(b)$  dans la base canonique sont

$$AX_b = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_a + X_b$$

Les coordonnées de  $u(c)$  dans la base canonique sont

$$AX_c = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_c$$

Donc  $u(c) = -c$

5. On cherche les vecteurs  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  tels que  $u(x) = c - x$

$$\begin{aligned}
u(x) = c - x &\Leftrightarrow AX = X_c - X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 - x_1 \\ x_2 = -x_2 \\ -3x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 = 1 - x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -3(1 - x_3) - x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 = 1 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_4 = 2 - 2x_3 \\ x_1 = 1 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 1 - x_3 \\ x_1 = 1 - x_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Prenons  $x_3 = 0$  par exemple, alors  $d = (1, 0, 0, 1)$

6. On peut montrer que la famille  $\beta''$  est libre et rappeler qu'elle a 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 ou alors calculer le déterminant

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la seconde ligne

$$\det(a, b, c, d) = +(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Puis par rapport à la première ligne

$$\det(a, b, c, d) = - \left( \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = -(-1 - 0) = 1 \neq 0$$

Donc  $\beta''$  est une base.

7.

$$T = \begin{pmatrix} u(a) & u(b) & u(c) & u(d) \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

8. On pose

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de  $\beta$  à  $\beta'$ , on  $A = QCQ^{-1}$

Et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de  $\beta$  à  $\beta''$ , on a  $A = PTP^{-1}$

Donc

$$QCQ^{-1} = PTP^{-1}$$

Ce qui équivaut à

$$C = Q^{-1}PTP^{-1}Q = (P^{-1}Q)^{-1}T(P^{-1}Q)$$

Ce qui montre que  $C$  et  $T$  sont semblables.

Allez à : Exercice 57

Correction exercice 58.

1. Si  $\in \mathbb{R}_2[X]$ ,  $d^\circ(X+1)P' \leq 1+2-1=2$  donc  $f$  est bien une application de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .  
 $f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (X+1)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' = (X+1)(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') = \lambda_1(X+1)P_1' + \lambda_2(X+1)P_2' = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$   
 donc  $f$  est linéaire, c'est même un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2.

$$\begin{aligned} f(1) &= (X+1) \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 \\ f(X) &= (X+1) \times 1 = 0 = 1 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2 \\ f(X^2) &= (X+1) \times 2X = 0 = 0 \times 1 + 2 \times X + 2 \times X^2 \end{aligned}$$

Donc  $A = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$

3.  $\alpha + \beta(X+1) + \gamma(X+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta + 2\gamma)X + \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

Donc  $B'$  est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 ( $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ ), c'est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

4.

$$\begin{aligned} f(1) &= (X+1) \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 \\ f(X+1) &= (X+1) \times 1 = 0 = 0 \times 1 + 1 \times (X+1) + 0 \times (X+1)^2 \\ f((X+1)^2) &= (X+1) \times 2(X+1) = 0 = 0 \times 1 + 0 \times (X+1) + 2 \times (X+1)^2 \end{aligned}$$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} f(1) & f(X+1) & f((X+1)^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X+1 \\ (X+1)^2 \end{matrix}$$

5.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ A^3 &= AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si  $k > 0$ 

$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Et  $B^0 = I$ 

6.

La première colonne de la matrice  $A$  est nulle, donc le rang de  $A$  est inférieur ou égal à 2, les deux suivantes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de  $A$  est au moins 2.

$$rg(A) = rg(f) = 2$$

7.

$Im(f)$  est engendré par  $f(X) = 1 + X$  et  $f(X^2) = 2X + 2X^2$ , cette famille constitue une base de  $Im(f)$ .

8.

D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de  $f$  est 1, car

$$\dim(\ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$$

Or  $f(1) = 0$ , donc le noyau de  $f$  est la droite vectorielle engendrée par le « vecteur » 1. (C'est-à-dire le polynôme constant égale à 1).

Allez à : **Exercice 58**

Correction exercice 59.

1.

$$\begin{aligned} u(\alpha P + \beta Q) &= \alpha P + \beta Q + (1 - X)(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P + \beta Q + (1 - X)(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha(P + (1 - X)P') + \beta(Q + (1 - X)Q') = \alpha u(P) + \beta u(Q) \end{aligned}$$

Donc  $u$  est une application linéaire

$$d^\circ P \leq 2 \Rightarrow d^\circ u(P) \leq 2$$

Elle va de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$  il s'agit d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2.

$$\begin{aligned} u(1) &= 1 + (1 - X) \times 0 = 1 \\ u(X) &= X + (1 - X) \times 1 = 1 \\ u(X^2) &= X^2 + (1 - X) \times 2X = 2X - X^2 \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.  $P \in \ker(u)$

$$\begin{aligned} u(P) = 0 &\Leftrightarrow u(aX^2 + bX + c) = au(X^2) + bu(X) + cu(1) = a(2X - X^2) + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -aX^2 + 2aX + b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \end{cases} \\ P &= bX - b = b(X - 1) \end{aligned}$$

Donc  $\ker(u)$  est la droite vectorielle engendrée par le polynôme  $X - 1$ .

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(1), u(X), u(X^2)) = \text{Vect}(1, 1, 2X - X^2) = \text{Vect}(1, 2X - X^2)$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre (et génératrice) de  $\text{Im}(u)$  donc une base de  $\text{Im}(u)$ .

Allez à : **Exercice 59**

Correction exercice 60.

1. Si  $d^\circ P \leq 2$  alors  $d^\circ P' \leq 1$  et  $d^\circ(X - 1)P' \leq 2$  donc  $d^\circ u(P) \leq 2$

D'autre part

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= 2(\lambda P + \mu Q) - (X - 1)(\lambda P + \mu Q)' = 2(\lambda P + \mu Q) - (X - 1)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda(2P - (X - 1)P') + \mu(2Q - (X - 1)Q') = \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Cela montre que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2.

$$\begin{aligned} u(1) &= 2 \times 1 - (X - 1) \times 0 = 2; \\ u(X) &= 2X - (X - 1) \times 1 = X + 1; \\ u(X^2) &= 2X^2 - (X - 1) \times 2X = 2X \end{aligned}$$

Par conséquent

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit  $P = aX^2 + bX + c$

$$u(P) = au(X^2) + bu(X) + cu(1) = 2aX + b(1 + X) + 2c = (2a + b)X + b + 2c$$

Donc

$$u(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{b}{2} \\ c = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

Et

$$P = -\frac{b}{2}X^2 + bX - \frac{b}{2} = -\frac{b}{2}(X^2 - 2X + 1) = -\frac{b}{2}(X - 1)^2$$

Le noyau de  $u$  est la droite vectorielle engendrée par le polynôme  $P_2 = (X - 1)^2$

4. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

Donc

$$\dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker(u)) = 3 - 1 = 2$$

$u(1) = 2$  et  $u(X) = 1 + X$  sont deux polynômes non proportionnels de l'image de  $u$ , ils forment donc une famille libre dans un espace de dimension 2,  $(2, 1 + X)$  est une base de  $\operatorname{Im}(u)$ .

5. Soit  $P = aX^2 + bX + c$

$$u(P) = P \Leftrightarrow (2a + b)X + b + 2c = aX^2 + bX + c \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 2a + b = b \\ b + 2c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a = 0 \\ c = -b \end{cases}$$

$$P = bX - b = b(X - 1)$$

$$P_1 = X - 1$$

6.

$$\alpha + \beta(X - 1) + \gamma(X - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + \gamma + (\beta - 2\gamma)X + \gamma X^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$\beta'$  est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$

7.  $u(1) = 2 \times 1$ ,  $u(P_1) = P_1$  et  $u(P_2) = 0$ , donc

$$D = \begin{pmatrix} u(1) & u(P_1) & u(P_2) \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ P_1 \\ P_2 \end{matrix}$$

Allez à : **Exercice 60**

Correction exercice 61.

1. Soient  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ , soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) - (X - 2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 - (X - 2)(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') \\ &= \lambda_1 (P_1 - (X - 2)P_1') + \lambda_2 (P_2 - (X - 2)P_2') = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est linéaire.

2.  $f$  est un endomorphisme si l'image de  $\mathbb{R}_2[X]$  par  $f$  est  $\mathbb{R}_2[X]$ , autrement dit il faut que l'image d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 soit un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Première méthode

$$\begin{aligned} f(aX^2 + bX + c) &= aX^2 + bX + c - (X - 2)(2aX + b) \\ &= aX^2 + bX + c - (2aX^2 + bX - 4aX - 2b) = -aX^2 + 4aX + c - 2b \end{aligned}$$

C'est bon,  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  (parce qu'il est clair que  $f$  est linéaire d'après la première question).

Deuxième méthode

$$d^\circ P \leq 2 \Rightarrow d^\circ P' \leq 1$$

Donc

$$d^\circ (X - 2)P' \leq 1 + 1 = 2$$

Par conséquent

$$d^\circ f(P) \leq 2$$

Troisième méthode

Comme  $f(aX^2 + bX + c) = af(X^2) + bf(X) + cf(1)$ , il suffit de vérifier que  $d^\circ f(X^2) \leq 2$ ,  $d^\circ f(X) \leq 2$  et que  $d^\circ f(1) \leq 2$ , ce qui est le cas car

$$f(X^2) = X^2 - (X - 2) \times 2X = -X^2 + 4X;$$

$$\begin{aligned}f(X) &= X - (X - 2) \times 1 = 2; \\f(1) &= 1 - (X - 2) \times 0 = 1\end{aligned}$$

3.

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow -aX^2 + 4aX + c - 2b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 0 \\ 4a = 0 \\ c - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 2b \end{cases}$$

$$P = bX + 2b = b(X + 2)$$

Les polynômes de  $\ker(f)$  sont proportionnels au polynôme  $X + 2$ , il s'agit d'une droite vectorielle dont une base est le polynôme  $X + 2$ .

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) \Leftrightarrow 1 + \dim(\operatorname{Im}(f)) = 3 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$$

$$f(X^2) = -X^2 + 4X; f(X) = 2$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de  $\operatorname{Im}(f)$  qui est de dimension 2, c'est une base de  $\operatorname{Im}(f)$ .

Remarque :

$f(1) = 1$  est proportionnel au vecteur (polynôme)  $f(X) = 2$ .

4.

$$f(X^2) = 4X - X^2; f(X) = 2; f(1) = 1$$

Par conséquent

$$A = \operatorname{Mat}_{(1, X, X^2)}(f) = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{pmatrix}$$

5.

$$\alpha \times 1 + \beta(X - 2) + \gamma(X - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta X - 2\beta + \gamma X^2 - 4\gamma X + 4\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta - 4\gamma)X + \alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 4\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$\beta'$  est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base.

6.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & X - 2 & (X - 2)^2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{pmatrix}$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = y_1 \\ x_2 - 4x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 4x_3 + y_1 \\ x_2 = 4x_3 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2(y_2 + 4y_3) - 4y_3 + y_1 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

On rappelle que  $P^{-1}$  est la matrice de passage de  $\beta'$  à  $\beta$ , cela signifie que

$$1 = 1$$

$$X = 2 \times 1 + 1 \times (X - 2)$$

$$X^2 = 4 \times 1 + 4 \times (X - 2) + 1 \times (X - 2)^2$$

7.

$$\begin{aligned}
 f(1) &= 1 \\
 f(X-2) &= X-2 - (X-2) \times 1 = 0 \\
 f((X-2)^2) &= (X-2)^2 - (X-2) \times 2(X-2) = -(X-2)^2
 \end{aligned}$$

Donc

$$D = \text{Mat}_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} f(1) & f(X-2) & f((X-2)^2) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{matrix}$$

Deuxième méthode

On calcule

$$\begin{aligned}
 D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On trouve bien sûr le même résultat (cela fait partie du cours).

Allez à : [Exercice 61](#)

Correction exercice 62.

1. Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_2[X]$  et soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux réels.

$$\begin{aligned}
 u(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= 2X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) - X^2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' = 2X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) - X^2(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') \\
 &= \lambda_1(2XP_1 - X^2 P_1') + \lambda_2(2XP_2 - X^2 P_2') = \lambda_1 u(P_1) + \lambda_2 u(P_2)
 \end{aligned}$$

Donc  $u$  est linéaire.

Soit  $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ ,  $P' = 2aX + b$

$$\begin{aligned}
 u(P) &= 2X(aX^2 + bX + c) - X^2(2aX + b) = 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX - 2aX^3 - bX^2 = bX^2 + 2cX \\
 &\in \mathbb{R}_2[X]
 \end{aligned}$$

Donc  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2.  $u(1) = 2X$ ,  $u(X) = 2X^2 - X^2 = X^2$  et  $u(X^2) = 2X^3 - 2X^3 = 0$

Par conséquent

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} u(1) & u(X) & u(X^2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} \end{matrix}$$

3. Soit  $P = aX^2 + bX + c \in \ker(u)$ ,

$$u(P) = bX^2 + 2cX = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$$

Donc  $P = aX^2$ , une base de  $\ker(u)$  est  $X^2$  et  $\dim(\ker(u)) = 1$ .

4.

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(1), u(X), u(X^2)) = \text{Vect}(2X, X^2, 0) = \text{Vect}(2X, X^2) = \text{Vect}(X, X^2)$$

$(X, X^2)$  est une sous-famille d'une famille libre, c'est une famille libre et génératrice de  $\text{Im}(u)$  c'est une base de  $\text{Im}(u)$  et  $\dim(\text{Im}(u)) = 2$

Allez à : [Exercice 62](#)

Correction exercice 63.

1.

$$\begin{aligned}
 u(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + (1-X)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' + 2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'' \\
 &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + (1-X)(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') + 2(\lambda_1 P_1'' + \lambda_2 P_2'') \\
 &= \lambda_1(P_1 + (1-X)P_1' + 2P_1'') + \lambda_2(P_2 + (1-X)P_2' + 2P_2'') = \lambda_1 u(P_1) + \lambda_2 u(P_2)
 \end{aligned}$$

$u$  est une application linéaire.



2. Il est clair que le degré de  $u(P) = P + (1 - X)P' + 2P''$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 lorsque  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Par conséquent  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

3.

$$\begin{aligned} u(1) &= 1 \\ u(X) &= X + (1 - X) \times 1 = 1 \\ u(X^2) &= X^2 + (1 - X) \times 2X + 2 \times 2 = 4 + 2X - X^2 \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \alpha(1 - X) + \beta \times 1 + \gamma(1 + 2X - X^2) &= 0 \Leftrightarrow -\gamma X^2 + (-\alpha + 2\gamma)X + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette famille est libre, elle a trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

5.

$$\begin{aligned} u(1 - X) &= 1 - X + (1 - X) \times (-1) = 0 \\ u(1) &= 1 \\ u(1 + 2X - X^2) &= 1 + 2X - X^2 + (1 - X) \times (2 - 2X) + 2 \times (-2) = -1 - 2X + X^2 \\ &= -(1 + 2X - X^2) \end{aligned}$$

Donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 63**

Correction exercice 64.

1. Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels et  $P$  et  $Q$  deux polynômes

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{2}(1 - X^2)(\lambda P + \mu Q)'' + X(\lambda P + \mu Q)' - (\lambda P + \mu Q) \\ &= \frac{1}{2}(1 - X^2)(\lambda P'' + \mu Q'') + X(\lambda P' + \mu Q') - (\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda \left( \frac{1}{2}(1 - X^2)P'' + XP' - P \right) + \mu \left( \frac{1}{2}(1 - X^2)Q'' + XQ' - Q \right) = \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Donc  $u$  est linéaire

Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\begin{aligned} d^\circ P'' \leq 0 &\Rightarrow d^\circ(1 - X^2)P'' \leq 2 \\ d^\circ P' \leq 1 &\Rightarrow d^\circ X P' \leq 2 \end{aligned}$$

Donc

$$d^\circ u(P) \leq 2$$

Ce qui montre que  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  entraîne que  $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ . Donc  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2. Soit  $P = aX^2 + bX + c$

$$P \in \ker(u) \Leftrightarrow u(P) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - X^2)2a + X(2aX + b) - (aX^2 + bX + c) = 0 \Leftrightarrow a - c = 0$$

$$\text{Donc } P = aX^2 + bX + a = a(X^2 + 1) + bX$$

La famille  $(X^2 + 1, X)$  est une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, qui engendre  $\ker(u)$  donc c'est une base de  $\ker(u)$

3. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

$$\text{Donc } \dim(\text{Im}(u)) = 1$$

$$u(1) = -1$$

Donc  $\text{Im}(u)$  est la droite engendrée par le polynôme constant  $P_3 = 1$  (ou  $-1$  c'est pareil)

4.

$$\alpha(X^2 + 1) + \beta X + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha X^2 + \beta X + \alpha + \gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ce qui montre que  $(P_1, P_2, P_3)$  est une famille libre à trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, il s'agit donc d'une base de  $\mathbb{R}_2[X]$

5. On a  $u(P_1) = 0$ ,  $u(P_2) = 0$  et  $u(P_3) = -1$  donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 64**

Correction exercice 65.

1. Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X+1) - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X) \\ &= \lambda_1 P_1(X+1) + \lambda_2 P_2(X+1) - (\lambda_1 P_1(X+1) + \lambda_2 P_2(X+1)) \\ &= \lambda_1 (P_1(X+1) - P_1(X)) + \lambda_2 (P_2(X+1) - P_2(X)) = \lambda_1 f(P_1)(X) + \lambda_2 f(P_2)(X) \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que :

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1)(X) + \lambda_2 f(P_2)(X)$$

2.  $f$  est linéaire.

$$\begin{aligned} f(1)(X) &= 1 - 1 = 0 \\ f(X)(X) &= (X+1) - X = 1 \\ f(X^2) &= (X+1)^2 - X^2 = 1 + 2X \end{aligned}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

3.

$$\begin{aligned} \alpha \times 1 + \beta \times (X-1) + \gamma \times (X-1)(X-2) &= 0 \Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta - 3\gamma)X + (\alpha - \beta + 2\gamma) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathcal{B}'$  est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3 c'est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

4.

$$f(1)(X) = 0, f(X-1)(X) = (X-1+1) - (X-1) = 1 \text{ et}$$

$$\begin{aligned} f((X-1)(X-2))(X) &= (X-1+1)(X-2+1) - (X-1)(X-2) = X(X-1) - (X-1)(X-2) \\ &= (X-1)(X - (X-2)) = 2(X-1) \end{aligned}$$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} f(1) & f(X-1) & f((X-1)(X-2)) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X-1 \\ (X-1)(X-2) \end{matrix}$$

Allez à : **Exercice 65**

Correction exercice 66.

1. Soient  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= ((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1), (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(-1)) \\ &= (\lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1), \lambda_1 P_1(-1) + \lambda_2 P_2(-1)) \\ &= \lambda_1 (P_1(1), P_1(-1)) + \lambda_2 (P_2(1), P_2(-1)) = \lambda_1 g(P_1) + \lambda_2 g(P_2) \end{aligned}$$

Donc  $h$  est linéaire.

2. Soit  $P \in \ker(g)$ ,  $(P(-1), P(1)) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$

Un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui s'annule en  $-1$  et en  $1$  est de la forme

$$P = (aX + b)(X + 1)(X - 1) = aX(X^2 - 1) + b(X^2 - 1)$$

$(X(X^2 - 1), X^2 - 1)$  forme une famille libre (car les polynômes ne sont pas proportionnels) qui engendre  $\ker(g)$ , c'est une base de  $\ker(g)$ .

Une base  $\mathbb{R}^3$  est  $(1, X, X^2, X^3)$

$$g(1) = (1, 1); g(X) = (-1, 1); g(X^2) = (1, 1); g(X^3) = (-1, 1)$$

L'image de  $g$  est engendré par  $(1, 1)$  et  $(-1, 1)$  (ces vecteurs ne sont pas proportionnels) ils forment donc une famille libre, bref c'est une base de  $\mathcal{Im}(g)$ , comme  $\mathcal{Im}(g) \subset \mathbb{R}^2$  et qu'ils ont la même dimension, on en déduit que  $\mathcal{Im}(g) = \mathbb{R}^2$ .

3. La linéarité de  $h$  est évidente (voir 1°)).

Soit  $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$  un vecteur de  $\ker(h)$ ,

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Le noyau de  $h$  est réduit au vecteur nul, de plus d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(h)) + \dim(\mathcal{Im}(h)) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) \Leftrightarrow \dim(\mathcal{Im}(h)) = 2$$

Donc  $\mathcal{Im}(h) = \mathbb{R}_1[X]$ , autrement dit  $h$  est surjective, finalement  $h$  est bijective.

Allez à : **Exercice 66**

Correction exercice 67.

- $a$  et  $b$  ne sont pas proportionnelles donc  $(a, b)$  est libre, de plus  $(a, b)$  est une famille génératrice de  $H$  donc c'est une base de  $H$ , d'où  $\dim(H) = 2$ .
- Soit  $\theta_{\mathbb{R}}$  l'application nulle,  $\theta_{\mathbb{R}}(\ln(2)) = 0$  donc  $\theta_{\mathbb{R}} \in F$   
Soient  $f_1 \in F$  et  $f_2 \in F$ , donc  $f_1(\ln(2)) = 0$  et  $f_2(\ln(2)) = 0$  et soient  $\lambda_1, \lambda_2$  deux réels  
 $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\ln(2)) = \lambda_1 f_1(\ln(2)) + \lambda_2 f_2(\ln(2)) = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 = 0$   
Donc  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in F$ ,  $F$  est un sous-espace-vectoriel de  $H$ .
- On rappelle que

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\ln(2)) &= \frac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4} \\ \operatorname{sh}(\ln(2)) &= \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} f \in H \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f = \lambda a + \mu b \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) \\ \lambda a(\ln(2)) + \mu b(\ln(2)) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) \\ \lambda \frac{5}{4} + \mu \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) \\ \lambda = -\frac{3}{5}\mu \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{3}{5}\mu a(x) + \mu b(x) \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, f = \mu(-\frac{3}{5}a + b)
\end{aligned}$$

$F$  est un espace de dimension 1 dont une base est  $-\frac{3}{5}a + b$ .

4.

a) Soient  $f_1 \in H$  et  $f_2 \in H$  et soient  $\lambda_1, \lambda_2$  deux réels.

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= ((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(-\ln(2)), (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\ln(2))) \\
&= (\lambda_1 f_1(-\ln(2)) + \lambda_2 f_2(-\ln(2)), \lambda_1 f_1(\ln(2)) + \lambda_2 f_2(\ln(2))) \\
&= \lambda_1 (f_1(-\ln(2)), f_1(\ln(2))) + \lambda_2 (f_2(-\ln(2)), f_2(\ln(2))) = \lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2)
\end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est une application linéaire.

b) Soit  $f \in \ker(\varphi)$ ,  $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x)$

$$\begin{aligned}
\varphi(f) = (0,0) &\Leftrightarrow (f(-\ln(2)), f(\ln(2))) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-\ln(2)) = 0 \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda a(-\ln(2)) + \mu b(-\ln(2)) = 0 \\ \lambda a(\ln(2)) + \mu b(\ln(2)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \frac{5}{4} - \mu \frac{3}{4} = 0 \\ \lambda \frac{5}{4} + \mu \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc  $f = \theta_{\mathbb{R}}$ , le noyau de  $\varphi$  est réduit au vecteur nul donc  $\varphi$  est injective, d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(H) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(\varphi)) = 2$$

Ce qui montre que  $\varphi$  est surjective, finalement  $\varphi$  est surjective donc bijective.

Allez à : **Exercice 67**

Correction exercice 68.

1. Soient  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels.

La matrice nulle  $O$  vérifie  ${}^tO = -O$

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB = \lambda(-A) + \mu(-B) = -(\lambda A + \mu B)$$

Donc  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soient  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels.

La matrice nulle  $O$  vérifie  ${}^tO = O$

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB = \lambda A + \mu B = \lambda A + \mu B$$

Donc  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$2. \quad {}^t\left(\frac{A+{}^tA}{2}\right) = \frac{1}{2}({}^tA + {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA + A) \text{ donc } \frac{A+{}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$${}^t\left(\frac{A-{}^tA}{2}\right) = \frac{1}{2}({}^tA - {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA) \text{ donc } \frac{A-{}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

3. Pour toute matrice  $A$  :

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

Donc  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

4. Soit  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  ${}^tA = -A$  et  ${}^tA = A$  donc  $A = -A$  d'où  $A = O$ .

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  entraîne que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

5.

$$A_s = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_a = \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$A$  est la somme de  $A_s \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et de  $A_a \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

Allez à : **Exercice 68**

Correction exercice 69.

1.  $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 2 \times 2 = 4$

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \ker(\phi)$

$$\phi(A) = O \Leftrightarrow A - {}^tA = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La famille de matrices

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  engendre  $\ker(\phi)$  et

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Montre que cette famille est libre, elle forme donc une base de  $\ker(\phi)$  et  $\dim(\ker(\phi)) = 3$

3. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{pmatrix} = (b-c) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent l'image de  $\phi$  est la droite engendrée par la matrice  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Im}(\phi)$  étant une droite, toute matrice de cette image est proportionnelle à  $J$ .

Allez à : **Exercice 69**

Correction exercice 70.

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b+c & a-b & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ b+c & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

2.

a)

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 - L_1 & L_3 - L_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & d-b \\ b^2 & c^2-b^2 & d^2-b^2 \end{vmatrix} = (c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ b^2 & c+b & d+b \end{vmatrix}$$

$$= (c-b)(d-b)(d-c)$$

b)

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) & (d-a)(d+a) \\ a^3 & (b-a)(b^2+ba+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) & (d-a)(d^2+da+a^2) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a & d+a \\ a^3 & b^2+ba+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a & d+a \\ a^3 & b^2+ba+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2+ba & c^2+ac & d^2+da \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 - aL_1 \\ L_3 - a^2L_1 \end{matrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} L_3 - aL_2 \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 70**

Correction exercice 71.

1.

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 - C_1 & C_3 - C_1 & C_4 - C_1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a & c-a \\ a & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \\
&= a(b-a) \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a(b-a) \begin{vmatrix} C_1 & C_2 - C_2 & C_3 - C_1 \\ b-a & c-b & c-b \\ b-a & c-b & d-b \end{vmatrix} \\
&= a(b-a) \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c-b & d-b \end{vmatrix} \\
&= a(b-a)(c-b)(d-c)
\end{aligned}$$

$$2. \quad \Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ a = b \\ \text{ou} \\ b = c \\ \text{ou} \\ c = d \end{cases}$$

Allez à : **Exercice 71**

Correction exercice 72.

Première partie

1.

$$\text{Soit } x = (x_1, x_2, x_3) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x \in \ker(u) &\Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \\
&x = (x_3, -x_3, x_3) = x_3(1, -1, 1)
\end{aligned}$$

On pose  $a = (1, -1, 1)$  et alors  $\ker(u) = \text{Vect}(a)$

2. On pose  $X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, X_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
u(b) = a &\Leftrightarrow AX_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 = 1 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 + 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On prend, par exemple  $x_3 = 0$  alors  $b = (1, 0, 0)$

3. Soient  $x \in E_1, x' \in E_1$  et  $\lambda$  et  $\lambda'$  deux réels

$$u(\lambda x + \lambda' x') = \lambda u(x) + \lambda' u(x') = \lambda x + \lambda' x'$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lambda x + \lambda' x' &\in E_1 \\
u(0_{\mathbb{R}^3}) &= 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1
\end{aligned}$$

Donc  $E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned}
x \in E_1 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = x_1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = x_2 \\ x_1 - x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \\
&x = (2x_3, -2x_3, x_3) = x_3(2, -2, 1)
\end{aligned}$$

Si on pose  $c = (2, -2, 1)$  alors  $E_1 = \text{Vect}(c)$ .

4.

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc  $(a, b, c)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

5.

$$\begin{aligned}
u(a) &= 0_{\mathbb{R}^3} \\
u(b) &= a \\
u(c) &= c
\end{aligned}$$

Donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.  $T = Q^{-1}AQ$

Deuxième partie

1.

$$\begin{aligned}
f(1) &= (2 + X + X^2) \times 1 - (1 + 2X + X^2 + X^3) \times 0 + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4) \times 0 \\
&= 2 + X + X^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(X) &= (2 + X + X^2)X - (1 + 2X + X^2 + X^3) \times 1 + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4) \times 0 \\
&= 2X + X^2 + X^3 - 1 - 2X - X^2 - X^3 = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(X^2) &= (2 + X + X^2)X^2 - (1 + 2X + X^2 + X^3) \times 2X + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4) \times 2 \\
 &= 2X^2 + X^3 + X^4 - 2X - 4X^2 - 2X^3 - 2X^4 - 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = -1 - X - X^2 \\
 f(\alpha + \beta X + \gamma X^2) &= \alpha f(1) + \beta f(X) + \gamma f(X^2) \in \mathbb{R}_2[X]
 \end{aligned}$$

Car  $f(1) \in \mathbb{R}_2[X]$ ,  $f(X) \in \mathbb{R}_2[X]$  et  $f(X^2) \in \mathbb{R}_2[X]$

2.

$$B = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

3. Les coordonnées de  $P_0 = 1 + X + X^2$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de  $P_1 = 1 + X$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de  $P_2 = 2 + X + X^2$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det(P_0, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

En développement par rapport à la troisième ligne.

Donc  $(P_0, P_1, P_2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

4.

Les coordonnées de  $f(P_0)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc  $f(P_0) = 0$

Les coordonnées de  $f(P_1)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc  $f(P_1) = 1 + X + X^2 = P_0$

Les coordonnées de  $f(P_2)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc  $f(P_2) = 2 + X + X^2 = P_2$

Donc

$$T' = \begin{pmatrix} f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{matrix} = T$$

5.  $T' = Q'^{-1}BQ'$

Troisième partie

$$Q'^{-1}BQ' = Q^{-1}AQ \Leftrightarrow QQ'^{-1}BQ'Q^{-1} = A \Leftrightarrow (Q'Q^{-1})^{-1}B(Q'Q^{-1}) = A$$

Donc  $A$  et  $B$  sont semblables.

Allez à : [Exercice 72](#)

Correction exercice 73.

- Si  $x \in \ker(v)$  alors  $v(x) = 0_E$ , alors  $v(v(x)) = v(0_E) = 0_E$  donc  $x \in \ker(v^2)$ , cela montre que  $\ker(v) \subset \ker(v^2)$ , de même si  $x \in \ker(v^2)$  alors  $v^2(x) = 0_E$ , alors  $v(v^2(x)) = v(0_E) = 0_E$  donc  $x \in \ker(v^3)$ , cela montre que  $\ker(v^2) \subset \ker(v^3)$  et ainsi de suite.



2. Soit  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  ses coordonnées dans la base canonique.

$$x \in \ker(u + id_{\mathbb{R}^4}) \Leftrightarrow (A + I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (x_1, 0, x_1, 0) = x_1(1, 0, 1, 0)$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2) \Leftrightarrow (A + I)^2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (x_1, x_2, x_1, 0) = x_1(1, 0, 1, 0) + x_2(0, 1, 0, 0)$$

$((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0))$  est une famille de vecteurs non proportionnels (donc libre)

qui engendrent  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$ , il s'agit d'une base de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$ .

$$(A + I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$x \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3) \Leftrightarrow (A + I)^3 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_4 = 0$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, 0) = x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$(e_1, e_2, e_3)$  est une famille (évidemment libre) qui engendre  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$ ,

c'est une base de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$ .

$$(A + I)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$x \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^4) \Leftrightarrow (A + I)^4 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_4 = 0$$

$$\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3) = \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^4)$$

$$p = 3$$

3.

a)  $a = (1, 0, 1, 0)$  et  $X_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) On pose  $b = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  et  $X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  ses coordonnées dans la base canonique

$$a = (u + id_{\mathbb{R}^4})(b) \Leftrightarrow (A + I)X_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

On prend, par exemple  $x_3 = 0$ ,  $b = (0, 1, 0, 0)$ .

$$(u + id_{\mathbb{R}^4})^2(b) = (u + id_{\mathbb{R}^4}) \circ (u + id_{\mathbb{R}^4})(b) = (u + id_{\mathbb{R}^4})(a) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Donc  $b \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$

D'autre part,  $a$  et  $b$  ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre d'un espace de dimension 2, c'est une base de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$ .

c) On pose  $c = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  et  $X_c = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  ses coordonnées dans la base canonique

$$b = (u + id_{\mathbb{R}^4})(c) \Leftrightarrow (A + I)X_c = X_b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 + 1 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

On prend, par exemple  $x_1 = 0$ ,  $c = (0, 0, 1, 0)$

$$x \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Les composantes de  $c$  ne vérifient pas  $\begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$  donc  $c \notin \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$ , de plus  $(a, b)$  est une famille libre de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$  par conséquent  $(a, b, c)$  est une famille libre, elle a trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension trois, c'est une base de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$ .

$$d) a = (u + id_{\mathbb{R}^4})(b) \Leftrightarrow a = u(b) + b \Leftrightarrow u(b) = a - b$$

$$b = (u + id_{\mathbb{R}^4})(c) \Leftrightarrow b = u(c) + c \Leftrightarrow u(c) = b - c$$

4. les coordonnées de  $d$  dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $u(d) = d$

5.  $x \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3) \Leftrightarrow x_4 = 0$

Les composantes de  $d$  ne vérifient pas  $x_4 = 0$  et  $(a, b, c)$  est une famille libre de  $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$  donc  $(a, b, c, d)$  est une famille libre, elle a quatre vecteurs donc c'est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

6.

$$T = \begin{pmatrix} u(a) & u(b) & u(b) & u(d) \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$T = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PTP^{-1}$$

7.

$$\begin{aligned} T + I &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (T + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (T + I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ T - I &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (T + I)^3(T - I) &= 0 \end{aligned}$$

$$A + I = PTP^{-1} + PIP^{-1} = P(T + I)P^{-1} \Rightarrow (A + I)^3 = P(T + I)^3P^{-1}$$

Et

$$A - I = P(T - I)P^{-1}$$

$$(A + I)^3(A - I) = P(T + I)^3P^{-1}P(T - I)P^{-1} = P(T + I)^3(T - I)P^{-1} = POP^{-1} = 0$$

Allez à : **Exercice 73**

Correction exercice 74.

1. Si  $u \in \ker(g)$  alors  $g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$  alors  $g(g(u)) = g(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$  donc  $u \in \ker(g^2)$ , cela montre que  $\ker(g) \subset \ker(g^2)$

Si  $u \in \ker(g^2)$  alors  $g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$  alors  $g(g^2(u)) = g(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$  donc  $u \in \ker(g^3)$ , cela montre que

$$\ker(g^2) \subset \ker(g^3)$$

2.

- a)  $g^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$  donc pour tout  $u \in \mathbb{R}^3$ ,  $g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ . Donc  $\text{Ker}(g^3) = \mathbb{R}^3$  et donc  $\dim(\text{Ker}(g^3)) = 3$   
 $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \ker(g^3)$  donc  $0 < \dim(\ker(g)) < \dim(\ker(g^2)) < \dim(\ker(g^3)) = 3$   
Donc  $\dim(\ker(g)) = 1$  et  $\dim(\ker(g^2)) = 2$

- b) Si  $v \in \text{Im}(g)$  alors il existe  $u \in \mathbb{R}^3$  tel que  $v = g(u)$  donc  $g^2(v) = g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ , donc  $\text{Im}(g) \subset \ker(g^2)$

D'après le théorème du rang :  $\dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = 3$  donc  $\dim(\text{Im}(g)) = 2$ . Comme  $\dim(\ker(g^2)) = 2$  aussi, on en déduit que  $\text{Im}(g) = \ker(g^2)$ .

3.  $a \in \ker(g) \subset \ker(g^2) = \text{Im}(g)$  donc il existe  $b \in \mathbb{R}^3$  tel que  $a = g(b)$ .  
 $g^2(b) = g(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$  donc  $b \in \text{Ker}(g^2)$ .

$$\lambda a + \mu b = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow g(\lambda a + \mu b) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda g(a) + \mu g(b) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \mu a = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \mu = 0$$

On remplace dans  $\lambda a + \mu b = 0_{\mathbb{R}^3}$ , d'où l'on tire que  $\lambda = 0$ . La famille  $(a, b)$  est libre.

4.  $b \in \ker(g^2) = \text{Im}(g)$  donc il existe  $c \in \mathbb{R}^3$  tel que  $b = g(c)$ .  
 $g^2(c) = g(b) = a \neq 0_{\mathbb{R}^3}$  donc  $c \notin \ker(g^2)$  or  $(a, b)$  est une famille libre de  $\ker(g^2)$  donc  $(a, b, c)$  est une famille libre à trois éléments dans  $\mathbb{R}^3$ , un espace de dimension 3, c'est une base.

$$5. \begin{matrix} g(a) & g(b) & g(c) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{matrix}$$

6. La matrice de  $f + Id$  dans la base canonique est :  $A + I = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

La matrice de  $(f + Id)^2$  dans la base canonique est :

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice de  $(f + Id)^3$  dans la base canonique est :

$$(A + I)^3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $(f + Id)^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ , par conséquent  $\ker((f + Id)^3) = \mathbb{R}^3$

$(A + I)^2 \neq O$  donc  $(f + Id)^2 \neq O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ , il existe donc un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $(f + Id)^2(x) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc  $\ker((f + Id)^2) \subsetneq \ker$ .

Autre méthode :

on détermine une base de  $\ker((f + Id)^2)$

$$x \in \ker((f + Id)^2) \Leftrightarrow (A + I)^2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x_1 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_3$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{3}{2}x_3, x_2, x_3\right) = \frac{3}{2}x_3(-1, 0, 2) + x_2(0, 1, 0)$$

$(-1, 0, 2)$  et  $(0, 1, 0)$  sont deux vecteurs non proportionnels, donc libre de  $\ker((f + Id)^2)$ , d'autre part ils engendrent  $\ker((f + Id)^2)$ , il s'agit d'une base de  $\ker((f + Id)^2)$ , et  $\dim(\ker((f + Id)^2)) = 2$

Donc  $\ker((f + Id)^2) \subsetneq \ker((f + Id)^3) = \mathbb{R}^3$

$$(A + I)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A + I) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $(0, 1, 0) \in \ker((f + Id)^2)$  et  $(0, 1, 0) \notin \ker(f + Id)$

Donc  $\ker(f + Id) \subsetneq \ker((f + Id)^2)$

Autre méthode :

On calcule la dimension de  $\ker(f + Id)$ .

$$\begin{aligned} x \in \ker(f + Id) &\Leftrightarrow (A + I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3L_2 - 5L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $x = (x_1, x_2, x_3) = (-3x_2, x_2, 2x_2) = x_2(-3, 1, 2)$ ,  $\ker(f + Id)$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(-3, 1, 2)$ .  $\dim(\ker(f + Id)) = 1$ , comme  $\ker(f + Id) \subset \ker((f + Id)^2)$  et que  $\dim(\ker(f + Id)) < \dim \ker((f + Id)^2)$ , on a  $\ker(f + Id) \subsetneq \ker((f + Id)^2)$

Il reste à montrer que  $\ker(f + Id) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ , on vient de montrer que  $\dim(\ker(f + Id)) = 1$ , donc c'est fini.

7. D'après la question précédente  $a = (-3, 1, 2)$

Soit  $b = (x_1, x_2, x_3)$  tel que  $(f + Id)(b) = a$

$$\begin{aligned}
(A + I)X_b = X_a &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3L_2 - 5L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ -2x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4(-2 + 2x_2) = 1 \\ x_3 = -2 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = -9 - 9x_2 \\ x_3 = -2 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 3x_2 \\ x_3 = -2 + 2x_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut prendre n'importe quelle valeur pour  $x_2$ , en général on prend 0, mais ici,  $x_2 = 1$  est plus adapté.

$b = (0, 1, 0)$  convient.

$$\begin{aligned}
(f + Id)(c) = b &\Leftrightarrow (A + I)X_c = X_b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3L_2 - 5L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4(3 + 2x_2) = 0 \\ x_3 = 3 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = -12 - 9x_2 \\ x_3 = 3 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 - 3x_2 \\ x_3 = 3 + 2x_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Je prends, par exemple  $x_2 = -1$ , on trouve alors  $x_1 = -1$  et  $x_3 = 1$  donc  $c = (-1, -1, 1)$

8. On rappelle que, choisit ainsi,  $(a, b, c)$  est une base.

$$(f + Id)(a) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(a) + a = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(a) = -a$$

$$(f + Id)(b) = a \Leftrightarrow f(b) + b = a \Leftrightarrow f(b) = a - b$$

$$(f + Id)(c) = b \Leftrightarrow f(c) + c = b \Leftrightarrow f(c) = b - c$$

Donc

$$Mat_{(a,b,c)}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 74