Chapitre 3

RÉSOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINÉAIRES

Définition
De maniére générale, on appelle équation linéaire d'inconnues x_1 ; ... ; x_n (une combinaison linéaire des x_1 ; ... ; x_n égaliant b)
toute égalité de la forme : $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b \Leftrightarrow (E)$
où $a_1; ... ; a_n$ et b sont des nombres(réels ou complexes)
Il importe d'insister ici que ces équations linéaires sont implicites, c'est-à-dire qu'elles décrivent des relations entre les inconnues, mais ne donnent pas directement les valeurs que peuvent prendre ces inconnues. Résoudre une équation signifie donc la rendre explicite, c'est-à-dire rendre plus apparentes les valeurs que les inconnues peuvent prendre.
Une solution de l'équation linéaire (E) est un n-uple $(s_1; ....; s_n)$ de valeurs respectives des inconnues x_1 ; ... ; x_n qui satisfont l'équation (E).
Autrement dit : $a_1s_1 + ... + a_ns_n = b$.

Exemple
$-2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9$ est une équation linéaire d'inconnues x_1, x_2, x_3.

Définition
Un ensemble **fini** d'équations linéaires d'inconnues x_1 ; ... ; x_n s'appelle un système d'équations linéaires d'inconnues x_1 ; ... ; x_n.

Exemple
Le système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

admet comme solution
$x_1 = -18; x_2 = -6; x_3 = 1$.
Par contre
$x_1 = 7 ; x_2 = 2 ; x_3 = 0$
ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système.

Définition
Un système d'équations est dit incompatible ou inconsistant s'il n'admet pas de solutions, c'est-à-dire que l'ensemble solution c'est l'ensemble vide.

Exemple
Le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

est clairement incompatible donc $S_{\mathbb{R}^2} = \{\} = \varnothing$.

Définition

Soient $n, m \geq 1$.

On appelle système de m équations à n inconnues tout système (S) de la forme :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\,x_1 \;+ a_{12}\,x_2 \;+ ... + a_{1n}\,x_n & = & b_1\ (E_1) \\ a_{21}\,x_1 \;+ a_{22}\,x_2 \;+ ... + a_{2n}\,x_n & = & b_2\ (E_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 \;+ a_{m2}\,x_2 \;+ ... + a_{mn}\,x_n & = & b_m\ (E_m) \end{cases},$$

où a_{ij} , b_i sont des scalaires donnés ; x_1 , x_2 , ..., x_n sont des inconnues et (E_i) la i-ième équation de (S) ; $\forall 1 \leq i \leq m$.

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est la matrice associée à (S)(dite aussi la matrice de (S)).

Il est à noter que la j-ième colonne de A est composée des coéfficients de l'inconnue x_j dans les différentes équations du système de la première équation(E_1) à la dernière équation(E_m) ; $\forall 1 \leq j \leq n$.

Les $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont les seconds membres de (S) , et (S) est dit *homogène* si $b_i = 0$ $\forall 1 \leq i \leq m$.

Ecriture matricielle de (S).

Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Alors $(S) \Longleftrightarrow AX = B$.

Exemples

1)Considérons le système linéaire

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 7 \end{cases}$$

Sa matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix};$$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Alors $(S) \Longleftrightarrow AX = B$

2)Considérons le système linéaire homogène

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

Sa matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix};$$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors $(S) \Leftrightarrow AX = B = 0_{M_{31}(\mathbb{R})}$.

3.1 Résolution du système (S) avec la matrice augmentée

Je rappelle le système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\, x_1 \ + a_{12}\, x_2 \ + ... + a_{1n}\, x_n & = \ b_1 \\ a_{21}\, x_1 \ + a_{22}\, x_2 \ + ... + a_{2n}\, x_n & = \ b_2 \\ \vdots & \vdots \ \ \vdots \\ a_{m1}\, x_1 \ + a_{m2}\, x_2 \ + ... + a_{mn}\, x_n & = \ b_m \end{cases}.$$

Définition

Nous obtenons la matrice augmentée associée au système (S) en adjoingnant à la dernière colonne de la matrice du système A une colonne constituée des b_i, les seconds membres des équations de (S).

De là :

La matrice augmentée associée au système (S) est alors :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Exemple

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

Sa matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array}\right].$$

La méthode de base pour résoudre un système d'équations linéaires est de remplacer le système par un autre, plus simple, ayant le même ensemble de solutions.

Ceci se fait par une succession d'opérations, appelées opérations élémentaires : qui consiste à : au choix

(1) multiplier une équation par une constante non nulle ;

(2) permuter deux équations ;

(3) ajouter un multiple d'une équation à une autre équation.

Les opérations (1), (2) et (3) ne changent pas l'ensemble des solutions.

Elles correspondent à des opérations élémentaires sur les **lignes** de la matrice augmentée.

Ces opérations sont les suivantes :

(1) multiplier une ligne par une constante non nulle ;

(2) permuter deux lignes ;

(3) ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Exemple

Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système est :
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array}\right]$, on va chercher à échellonner réduire la matrice
du système en faisant des opérations élémentaires sur les **lignes**
(que sur les lignes qui représentent les équations) de la matrice
augmentée ; on a :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{3}L_2 \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - 4L_3 \\ L_2 - 3L_3 \\ \\ \end{array}.$$

ce qui donne matriciellement : $(S) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

D'où $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2, 4, -1)\}$.
Nous remarquons que les opérations élémentaires peuvent être faites
uniquement sur la matrice augmentée pour revenir à la fin au système
d'équations. C'est ce que nous avons fait.
On obtient ainsi l'unique solution du système : $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ et $x_3 = -1$.
Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2; 4; -1)\}$.
Remarque très importante
Quand on finit de résoudre une équation ou un systéme d'équations,
il faut toujours donné l'ensemble solution clairement.
Proposition
Etant donné un sytème (S) de matrice A et de matrice **augmentée** M,
le système est compatible
(c'est-à-dire n'admet pas l'ensemble vide comme solution) ssi
le rang de A est égal au rang de M i.e. $rg\,(A) = rg\,(M)$.

3.2 Méthode de résolution d'un système de Cramer

Définition
Le système (S) est dit de Cramer si $m = n$ et si $\det A \neq 0$. C'est dire que dans le système (S) le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues ; aussi A est ici la matrice du système (S).

3.2.1 Résolution d'un système de Cramer par l'inversion de la matrice associée au système

Théorème
Tout système de Cramer (S) admet une solution unique $X = A^{-1}B$.
Exemple

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 1 \\ -x - y + z &= 0 \end{cases}$$

La matrice associée à (Σ) est $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

et $\det(A) = 3 \neq 0$; c'est donc un système de Cramer.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

on a alors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ -2 \end{bmatrix}.$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; -2 \right) \right\}.$

3.2.2 Résolution d'un système de Cramer par des déterminants

Soit $(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + ... + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + ... + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + ... + a_{nn}\,x_n &= b_n \end{cases},$

un système de n équations à n inconnues de Cramer.
On appelle déterminant du système (Σ) le nombre $\Delta = \det A$, où A est la matrice associée a (Σ).
On appelle déterminant de x_i le nombre Δ_{x_i} égal au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i^{ème}$ colonne par les éléments respectifs des seconds membres c'est-à-dire b_1 , b_2 , ..., b_n .
Théorème
(Σ) étant de Cramer, l'unique solution dans $\mathbb{K}^n$ est : $\left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; ....; \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} \right).$

Exercice

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 1 \\ -x - y + z &= 0 \end{cases}.$$

Réponse

La matrice associée à (Σ) est $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \text{ (je rappelle que j'ai fait } \mathrm{col}_3 + \mathrm{col}_2\text{)}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7\,;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6\,;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{3}\,;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{3}\,;\ \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2$$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; -2 \right) \right\}$.

3.3 Résolution d'un système avec le rang de la matrice associée connu

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, la matrice de (S), et soit $r = rgA$.

1^{er} cas : $m = r < n$,

$(S) \Leftrightarrow (S') \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = \underbrace{b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + a_{1r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{1n}x_n)}_{c_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r & = \underbrace{b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + a_{2r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{2n}x_n)}_{c_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mr}x_r & = \underbrace{b_m - (a_{mr+1}x_{r+1} + a_{mr+2}x_{r+2} + \ldots + a_{mn}x_n)}_{c_m(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)} \end{cases}$$

Soit $A' = (a_{ij})_{1 \leq i,\ j \leq r}$ avec $r = rgA'$ donc $\det A' \neq 0$

(s') est un système de Cramer qu'on doit résoudre avec les $(x_{r+i})_{1 \leq i \leq (n-r)}$ comme inconnues secondaires(c'est-à-dire des paramètres).

$2^{ème}$ cas : $r < m$ (voir système échelonné à la suite).

Définition(rappel)

On appelle opérations élémentaires dans un système ;

les opérations de l'une des formes suivantes :

a) Echanger deux lignes du système.

b) Multiplier une ligne par une constante non nulle.

c) Rajouter à une ligne du système un multiple d'une autre ligne du système. (une ligne ici est une équation du système)

Remarque

Les opérations élémentaires transforment un système en un système équivalent. On peut donc transformer un système linéaire par une succession d'opérations élémentaires en un système échelonné.

3.4 Systèmes échelonnés ou Méthode du pivot

On dit qu'un système est échelonné si et seulement si tous les coefficients figurant en-dessous de la diagonale sont nuls.
Cela revient à dire que $\forall i > j,\ \ a_{ij}\ = 0$.
Autant dire qu'un système échelonné se présente sous l'une des trois formes suivantes :
(a) Si $m = n$
(un tel système est dit carré et l'on dit d'un système carré échelonné qu'il est trigonal).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dans ce premier cas il est facile de résoudre le système lorsque tous les termes diagonaux sont non nuls. on utilise
l'*algorithme de la remontée* :
la dernière équation donne en effet la valeur $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$,
puis l'avant-dernière ligne donne la valeur
$x_{n-1}\ = \dfrac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1}\ - a_{(n-1)n}\ x_n\right)$ et, plus généralement,
on obtient : $x_k\ = \dfrac{1}{a_{kk}}\left(b_k\ - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\ \ x_j\right)$,
ce qui permet de calculer les x_k successifs par ordre décroissant de l'indice k. Le système admet une unique solution, et cela quel que puisse être le second membre.
Un système ayant cette propriété s'appelle un *système de Cramer*.
Si, au cours de cet algorithme, on trouve un coefficient diagonal nul dans une ligne, par exemple la ligne k, alors on ne peut pas trouver la valeur de x_k .
La ligne correspondante introduit une *condition de compatibilité*.
Si cette condition n'est pas vérifiée, le système n'admet pas de solutions ; si au contraire cette condition est vérifiée, toute solution de x_k convient et l'on peut poursuivre l'algorithme. Il y a alors une infinité de solutions, paramétrées par la valeur de x_k .
Cette situation peut d'ailleurs se rencontrer plusieurs fois au cours de la remontée, induisant une discussion plus approfondie.
On voit par là l'intérêt des systèmes triangulaires dont les coefficients diagonaux sont non nuls.
(b) Si $m < n$: on a :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{mm}x_m & = b_m \end{cases}.$$

Dans ce cas, on fixe arbitrairement les valeurs des variables x_{m+1} à x_n .
On est alors ramené au cas précédent, simple à résoudre lorsque tous

les coefficients diagonaux sont non nuls, nécessitant une discussion sinon.
(c) Si $m > n$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{22}x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{nn}x_n & = b_n \\ & & 0 & = b_{n+1} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & = b_m \end{array}\right. .$$

Dans ce cas les dernières lignes donnent directement des conditions de compatibilité.
Lorsqu'elles sont vérifiées, on se ramène au cas ci-dessus. D'où, là encore, l'intérêt de l'obtention de coefficients diagonaux non nuls.
Exemple

Soit $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lc} 2x - y - z = \ 1 & (E_1) \\ 3x + 4y - 2z = 0 & (E_2) \\ 3x - 2y + 4z = -1 & (E_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lc} 2x - y - z = \ 1 & (E_1) \\ 6y - 6z = 1 & (E_2 - E_3) \\ y - 11z = 5 & (3E_1 - 2E_3) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x - y - z = \ 1 & (E_1) & \Rightarrow x = \frac{1}{10} \\ 6y - 6z = 1 & (E_2\ ) & \Rightarrow y = -\frac{19}{60} \\ -60z = 29 & (6E_3 - E_2) & \Rightarrow z = -\frac{29}{60} \end{array}\right. .$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\dfrac{1}{10}; -\dfrac{19}{60}; -\dfrac{29}{60}\right)\right\}$.

3.5 Calcul de l'inverse d'une matrice par la résolution de systèmes

3.5.1 Une première méthode(mais souvent fastidieuse)

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}$ une matrice inversible, $B = (x_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}$ son inverse, alors $AB = I_n$.
Pour trouver la $1^{ère}$ colonne de B, on résoud le système :

$$A \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour trouver la $j^{ème}$ colonne de B,on résoud le système :

$$A \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{jj} \\ x_{(j+1)j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{seule la } j^{ème} \text{ coordonnée est égale à 1.}$$

3.5.2 Une deuxième méthode

Exercice :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Réponse

$\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible ; soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$,

puisque que si A est inversible on a : $(S) \Leftrightarrow AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \Leftrightarrow (S')$.

$$(S) \Leftrightarrow AX = Y \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 - x_2 & = & y_2 \\ x_1 - x_3 & = & y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 & = & \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$$

La matrice associée à (S') est l'inverse de A donc :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Exercice

Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ est inversible et calculer son inverse par trois méthodes différentes.

Proposition de correction

Inversion de A si possible à l'aide de trois méthodes :

$1^{ère}$ Méthode

Calculons le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow A \text{ est inversible et}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times com\,({}^tA) = \frac{1}{\det A} \times ({}^t comA)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$({}^tA) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow com\,({}^tA) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times com\,({}^tA) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

$2^{ième}$ Méthode :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -L_1 \\ L_2 + 2L_1 \\ \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 + \frac{2}{5}L_2 \\ \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -L_3 \end{array} \quad \Rightarrow A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

$3^{ième}$ Méthode :

Soit le système : $AX = Y \Leftrightarrow A \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right] = Y$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -x + 2y = x' \\ 2x + y = y' \\ 5y - z = z' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' \\ z = 2x' + y' - z' \end{array}\right. \Leftrightarrow (S')$$

La matrice du systme (S') est $\left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$ c'est donc l'inverse de A c'est-à-dire A^{-1}. Car avec
$AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$.