UFHB
Année 2022-2023

Session 1

Licence 1 : MIAGE
Examen : Suites et fonctions dérivables

Durée : 2 h 00 mn

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité des fonctions f et g de la variable réelle x définies par

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = |x+1| - |x-1|.$$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x} - 1\right)\sin x}{x^2 + x^3} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(\tan(x))^4}{\cos(3x^2) - 1}.$$

Exercice 3

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$.

Exercice 4

1. Donnez la définition de suites adjacentes
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

   Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 5

1. Enoncer avec précision le théorème des accroissements finis.
2. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a \leqslant b < \dfrac{\pi}{2}$ on a

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leqslant \tan b - tan a \leqslant \frac{b-a}{\cos^2 b}.$$