PROBABILITÉS-STATISTIQUE
COURS ET EXERCICES

Table des matières

Chapitre 1

Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire a pour but de dénombrer les différentes dispositions que l'on former à partir d'ensembles finis d'éléments.

1. Principes fondamentaux

1.1. Principe de multiplication

Ce principe est à la base des techniques de denombrement. Il permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences, i.e. en une suite d'expériences partielles, réalisées l'une après l'autre.

Principe : Supposons qu'une expérience est la succession de r sous-expériences. Supposons de plus que la première sous-expérience peut produire n_1 résultats, et pour chaque résultat de la première sous-expéience, il y a n_2 résultats possibles pour la deuxième sous-expérience ; pour chaque résultat des deux premières sous-expériences, il y en a n_3 pour la troisième, etc. Alors, le nombre total de résultats de l'expérience complète est le produit

$$n_1 \times n_2 \times ... \times n_r.$$

Interprétation avec les ensembles :
Si $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_r$ (produit cartesien),
alors $Card(E) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times ... \times Card(E_r)$.

Exemple 1 : On considère trois villes : Abidjan, Agboville et Akoupé et On suppose qu'il y a 5 chemins différents pour aller d'Abidjan à Agboville et 3 chemins pour aller d'Agboville à Akoupé. Combien de chemins différents y a t il pour aller d'Abidjan à Akoupé en passant par Agboville ?

Exemple 2 : Supposons qu'une plaque d'immatriculation contenant deux lettres distinctes suivies de trois chiffres dont le premier est différent de zéro. Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

Exemple 3 : Nous désirons former un comité de 3 personnes dont 1 président, 1 secrétaire et 1 trésorier à partir d'une classe de 20 élèves. Combien de comités différents est-il possible de faire ?

1.2. Principe d'addition

Il permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en des sous-expériences mutuellement exclusives.

Principe : Supposons qu'une expérience se décompose en r sous-expériences mutuellement exclusives. Si la $i-me$ sous-expérience a n_i résultats possibles (avec $i = 1, 2, ..., r$), alors le nombre total de résultats de l'expérience complète est la somme

$$n_1 + n_2 + ... + n_r.$$

Interprétation avec les ensembles :
Si $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_r$ avec $E_i \cap E_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$ (partition),
alors $Card(E) = Card(E_1) + Card(E_2) + ... + Card(E_r)$.

Exemple 4 : On considère trois villes : Abidjan, Agboville et Adzopé. On suppose qu'il y a 5 chemins différents pour aller d'Abidjan à Agboville et 3 chemins pour aller d'Abidjan à Adzopé. Combien de chemins différents y a t il pour aller d'Abidjan à l'une des deux autres villes ?

Exemple 5 : En plus des conditions de l'exemple 1 et 4, on suppose qu'il y a 2 chemins pour aller d'Adzopé à Akoupé et 4 chemins directs d'Abidjan à Akoupé. Combien de chemins différents y a t il pour aller d'Abidjan à Akoupé ?

2. Permutations

Une permutation de n éléments est un réarrangement ordonné de ces n éléments.

Notation : La fonction "factorielle" est la fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ qui a tout $n \in \mathbb{N}$ associe $n! = n(n..1) \times ... \times 2 \times 1$.

On a : $0! = 1$ et $n! = n(n-1)!$.

• Lorsque ces n éléments sont distincts, on parle de permutations sans répétitions. Dans ce cas le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

Remarque : Une permutation de n éléments distincts est une application bijective d'un ensemble E à n éléments dans lui-même.

• Si parmi ces n éléments, certains sont semblables, on parle de permutations avec répétitions.

Le nombre de permutations de n éléments dont n_1 sont semblables, n_2 sont semblables, ..., n_r sont semblables est

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_r!}$$

avec $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$.

Exemples :

- Le nombre d'applications d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de r éléments distincts $\{a_1, .., a_r\}$ qui envoient exactement n_1 éléments dans a_1, n_2 éléments dans a_2,..., n_r éléments dans a_r est égal à

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_r!}.$$

3. Arrangements

• Un arragement sans répétitions de p éléments parmi n est une permutation de p éléments distincts pris parmi n éléments distincts ($p \leq n$).

Remarque :

(i) Les éléments sont pris sans répétition et sont ordonnés.

(ii) Un arragement sans répétitions de p éléments parmi n est une application injective de $\{1, 2, ..., p\}$ dans un ensemble F à n éléments.

On note A_n^p le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments parmi n. On a

$$A_n^p = n(n-1) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Propriétés :

(i) $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$

(ii) $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$

Exemples :

- Si E et F sont des ensembles finis tels que $Card(E) = p$ et $Card(F) = n$, alors le nombre d'applications injectives de E dans F est $A_n^p = n(n-1) \times ... \times (n-p+1)$ si $p \leq n$ et 0 sinon.

- Le nombre de tirages différents sans remise de p boules dans une urne contenant n boules toutes discernables est égal à $A_n^p = n(n-1) \times ... \times (n-p+1)$ si $p \leq n$ et 0 sinon.

- Le nombre de façons de placer p objets distincts dans n cases discernables, chaque case pouvant contenir au plus 1 objet est $A_n^p = n(n-1) \times ... \times (n-p+1)$ si $p \leq n$ et 0 sinon.

• Un arragement avec répétitions (possibles) de p éléments parmi n est une disposition ordonnée de p éléments avec autant de répétitions que l'on souhaite.

Remarque : Un arragement avec répétitions de p éléments parmi n est une application de $\{1, 2, ..., p\}$ dans un ensemble F à n éléments.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments parmi n est n^p.

Exemples :

- Si E et F sont des ensembles finis tels que $Card(E) = p$ et $Card(F) = n$, alors le nombre d'applications de E dans F est n^p.

- Le nombre de tirages différents de p boules dans une urne contenant n boules toutes discernables est égal à n^p lorsque les tirages sont non exhaustifs (i.e. avec remise après chaque tirage).

- Le nombre de façons de placer p objets distincts dans n cases discernables, chaque case pouvant contenir éventuellement plusieurs objets est n^p.

4. Combinaisons

• Une combinaison sans répétitions de p éléments pris dans un ensemble à n éléments distincts ($p \leq n$) est un sous-ensemble à p éléments de cet ensemble.

Remarque : Les éléments sont pris sans répétition et ne sont pas ordonnés.

Exemple : Les combinaison sans répétitions de 2 éléments pris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ sont : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$.

Le nombre de combinaisons (sans répétitions) de p éléments parmi n est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$ qui est appelé coefficient binomial. On a

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemples :

- Si E est un ensemble fini tels que $Card(E) = n$, alors le nombre de parties de E ayant p éléments est C_n^p.

- Le nombre d'applications d'un ensemble de n éléments dans l'ensemble $\{a_1, a_2\}$ ($a_1 \neq a_2$) qui envoient exactement p éléments dans a_1 et les autres dans a_2 est égal C_n^p.

- Le nombre de façons de placer p objets indiscernables dans n cases discernables, chaque case pouvant contenir au plus 1 objet est C_n^p si $p \leq n$ et 0 sinon.

Propriétés :

(i) $C_n^0 = C_n^n = 1$

(ii) $C_n^p = C_n^{n-p}$

(iii) Formule de récurrence (Triangle de Pascal) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

(iv) Formule de Binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$

En particulier, $2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$ (Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments).

• Une combinaison avec répétitions (possibles) de p éléments pris dans un ensemble à n éléments distincts est une disposition non ordonnée de p éléments avec possibilité de répétitions.

Exemple : Les combinaison avec répétitions (possibles) de 2 éléments pris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ sont : $\{1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 4\}$.

Le nombre de combinaisons avec répétitions de p éléments parmi n est noté K_n^p ou $(\binom{n}{p})$.
On a

$$K_n^p = (\tbinom{n}{p}) = C_{n+p-1}^p.$$

Exemples :

- Le nombre de façons de placer p objets indiscernables dans n cases discernables, chaque case pouvant contenir éventuellement plusieurs objets est C_{n+p-1}^p.

ANALYSE COMBINATOIRE : EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués.

1. Formuler cette situation en terme d'ensembles et leurs cardinaux
2. Déterminer l'ensemble représentant les femmes célibataires non syndiquées. Puis déterminer son cardinal.

Exercice 2

Une enquête sur la lecture de trois revues X, Y et Z portant sur un échantillon de 1000 personnes, donne les résultats suivants :

- 16% lisent X, 10% lisent Y , 12% lisent Z ;
- 7% lisent Y et Z, 4% lisent X et Z, 3% lisent X et Y ;
- 1% lisent les trois revues.

1. Parmi ces 1000 personnes, combien ne lisent aucune de ces revues ?
2. Parmi ces 1000 personnes, combien lisent exactement deux de ces revues ?

Exercice 3

On considère 8 cartes dont 4 rouges et 4 noires. On rappelle qu'il a 4 types de cartes : pique, coeur, carré et trefle et on suppose qu'on a (3 pique, 2 coeur, 2 carré et 1 trefle).
De combien de façon peut-on ordonner 8 cartes :

1. si on considère que toutes les cartes sont différentes ?
2. si on identifie les cartes même types ?
3. si on identifie les cartes rouges entre elles et noires entre elles ?

Exercice 4

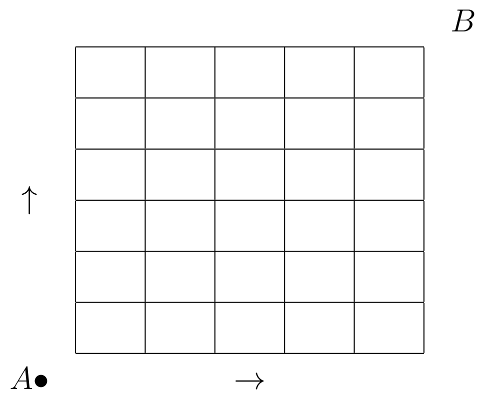
A	$\rightarrow$			
	$\downarrow$			
	$\downarrow$			
	$\downarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	
			$\downarrow$	
			$\downarrow$	$\rightarrow$B

Pas possibles : $\rightarrow \downarrow$

Combien y a-t-il de trajets possibles pour arriver à B partant de A.

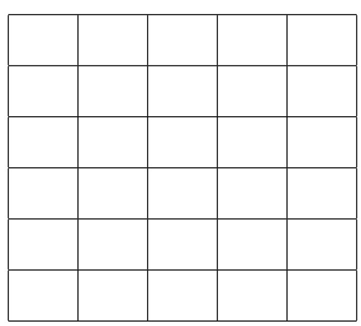
Exercice 5

On considère un pion qui évolue sur la grille ci-dessous. À l'instant initial, le pion est en A. A chaque seconde, il se déplace sur la grille en suivant les arêtes, d'un pas vers le haut ou bien d'un pas vers la droite.



1. Combien de temps met le pion pour arriver en B ?
2. Combien de chemins différents peut-il emprunter pour y arriver ?

Exercice 6



Combien de rectangles peut-on former ?

Exercice 7

Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires.

1. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ?
2. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller :
   (a) s'il est tout en noir ?
   (b) si une seule pièce est noire sur les trois ?

Exercice 8

Supposons qu'une plaque d'immatriculation contenant deux lettres distinctes suivies de trois chiffres dont le premier est différent de zéro. Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

Exercice 9

Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1. Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
2. Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?
3. Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

Exercice 10

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire.
2. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
3. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire s'il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte
4. Reprendre les questions précédentes si on suppose que deux boulangeries ne peuvent fermer le même jour.

Exercice 11

Demontrer par pure combinatoire, les propriétés suivantes :

1. (i) $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$

   (ii) $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$
2. (i) $C_n^p = C_n^{n-p}$

   (ii) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (Formule de récurrence : Triangle de Pascal)

   (iii) $C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p$

   (vi) De façon générale : $C_n^p = \sum_{i=0}^{k} C_k^i C_{n-k}^{p-i}$

   (v) $A_n^p = p!C_n^p$

Exercice 12

On considère la fonction $f(x) = (1+x)^n$.

1. Montrer que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$
2. A l'aide de f, calculer les sommes suivantes :

   $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$; $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$; $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$; $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k$; $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$

Exercice 13

Une urne contient 20 boules distinctes dont 8 rouges, 5 noires et 7 blanches. On tire succecivement sans remise un lot de 10 boules.

1. Combien de lots différents de 10 boules, peut-on tirer ?

2. Combien de lots différents de 10 boules dont 5 rouges, 2 noires et 3 blanches, peut-on tirer ?

Exercice 14

Une télévision privée décide d'opter pour le système de "programme à péage" en utilisant des décodeurs commandés par des codes à huit chiffres.

1. Donner le nombre d'abonnés potentiels puis le nombre d'abonnés avec des codes de chiffres différents.
2. Déterminer le nombre de codes à deux chiffres différents dont l'un est utilisé une fois.
3. Même question avec trois chiffres différents, dont deux sont utilisés une fois.

Exercice 15

Une association comprend six membres dont quatre hommes et deux femmes. Elle veut former un comité de trois personnes dont un président, un secrétaire et un trésorier.

1. Quel est le nombre total de comités possibles ?
2. Quel est le nombre de comités comportant les deux sexes que peut-elle former ?
3. Déterminer le nombre de comités dans lesquels le président est un homme.
4. Même question si elle veut former un comité de trois responsabilités dont un poste de président, un poste de secrétaire et un poste de trésorier.

Exercice 16

On répartit n objets ($n \geq 3$) discernables dans trois cases numérotés 1,2,3.

Déterminer le nombre de dispositions

1. qui laissent au moins une case vide.
2. qui ne laissent aucune case vide.
3. telles que la case numéro 1 contient un seul objet.
4. telles que la case numéro 1 contient un seul objet et la case numéro 2 deux objets.
5. Repondre aux questions 1) et 2) si les objets étaient indiscernables.

Chapitre 2

Notions de probabilités

Le but de ce chapitre est d'introduire les bases mathématiques utiles à la modélisation des phénomènes aléatoires. Ainsi, l'objectif visé est de donner un sens mathématique à la notion de "hasard".

1. Généralités

1.1. Expérience aléatoire

$\diamond$ Une expérience ou un phénomène est dit aléatoire si on ne peut prévoir d'avance le résultat et qui répétée dans les même conditions peut donner lieu à des résultats différents.

Exemples

- Le lancer d'un dé à six faces.
- Le lancer d'une pièce de monnaie.
- Le tirage d'un numéro parmi n numéros.

$\diamond$ L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire est bien déterminé avant sa réalisation, i.e. avant l'épreuve. Cet ensemble est appelé l'espace fondamental ou l'univers de l'expérience. On le note en général Ω.

Exemples

- Pour le lancer d'un dé à six faces numéroté de 1à 6, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Pour le lancer d'une pièce de monnaie, $\Omega = \{P, F\}$.

$\diamond$ Tout résultat d'une expérience aléatoire s'appelle aussi une éventualité. On note ω le résultat obtenu lors de la réalisation d'une expérience aléatoire.

1.2. Événements

$\diamond$ Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produit ou non. On les appelle événements. Ils sont représentés par les sous-ensembles de l'univers Ω.

Exemple

Pour le lancer d'un dé à six faces numéroté de 1à 6, "obtenir un nombre pair", "obtenir plus de 4" sont des événements possibles.
Notons A l'événement "obtenir un nombre pair" et B l'événement "obtenir plus de 4".
A est décrit par les éventualités 2,4 et 6. On écrit : $A = \{2, 4, 6\}$.
B est décrit par les éventualités 5 et 6. On écrit : $B = \{5, 6\}$.

$\diamond$ Tout événement formé d'une seule éventualité est appelé événement élémentaire.

1.3. Langage des événements

$\diamond$ On dit qu'un événement A s'est réalisé si le résultat observé de l'expérience est un élément de A.

$\diamond$ Tout événement qui n'est jamais réalisé est dit événement impossible, il correspond à l'ensemble vide $\emptyset$. Exemple, "obtenir un nombre négatif", dans un lancer de dé est un événement impossible à réaliser.

$\diamond$ Tout événement qui est toujours réalisé est dit événement certain, il correspond à l'ensemble Ω. Exemple, dans un lancer de dé "obtenir moins de 7" ou "obtenir plus de 0" sont des phrases équivalentes correspondant toutes deux à un événement toujours réalisé, soit à à l'ensemble Ω.

$\diamond$ A chaque événement A correspond son événement contraire "non A" noté $\overline{A}$.
L'événement $\overline{A}$ est réalisé si, et seulement si, A n'est réalisé.

L'événement certain et l'événement impossible sont contraires l'un de l'autre.

On considère deux événements A et B.

$\diamond$ On dit que l'événement "A et B", noté $A \cap B$, s'est réalisé si le résultat observé de l'expérience est un élément de A et de B, i.e. si A et B sont réalisés au cours de la même expérience aléatoire.

$\diamond$ Les événements A et B sont dits incompatibles ou disjoints s'ils ne peuvent pas se produire simultanément au cours de la même expérience aléatoire. Autrement dit A et B sont incompatibles si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.
Deux événements contraires sont incompatibles : $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

$\diamond$ On dit que l'événement "A ou B", noté $A \cup B$, s'est réalisé si le résultat observé de l'expérience est un élément de A ou de B, i.e. si l'un au moins des deux événements A ou B est réalisé au cours de la même expérience aléatoire.
Remarque : Pour tout événement A, on a, $\overline{A} = C_{\Omega}A$, $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

⋄ De même, on définit les événements :

− La différence : $A \backslash B = A \cap \overline{B}$. Remarque : $A \backslash B = A \backslash A \cap B$.
L'événement $A \backslash B$ est réalisé si, et seulement si, A est réalisé et B ne l'est pas.

− La différence symétrique : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
L'événement $A \Delta B$ est réalisé si, et seulement si, l'un et l'un seulement des deux événements A et B est réalisé.

⋄ On dit que A implique B si la réalisation de A entraine la réalisation de B. Autrement dit A implique B si, et seulement si, $A \subset B$.

1.4. Espace probabilisable

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On considère $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un ensemble de parties de Ω.

Définition 2.1. *Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω si*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire (i.e. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$),

(iii) $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable (i.e. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Longrightarrow \cup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$).

Exemples
- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu appelée tribu triviale.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.
- Pour tout $A \subset \Omega$, $\left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ est une tribu. C'est la tribu engendrée par l'événement A, c-à-d la plus petite tribu sur Ω contenant A. On la note $\sigma(A)$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ formé d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{F}$ est appelé un espace probabilisable.

Définition 2.2. *On appelle tribu borélienne la tribu définie sur $\mathbb{R}$ et qui contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$. On la note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.*

1.5. Système complet d'événements

Dans cette partie, I désigne une partie de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$

Définition 2.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. On appelle système complet d'événements toute famille $\{A_i, i \in I\}$ d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux incompatibles tels que $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.*

Exemple

Pour tout $A \subset \Omega$, $\left\{A, \overline{A}\right\}$ est un système complet d'événements.

2. Notion de probabilité

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. Soit $A \subset \Omega$. On répète l'expérience n fois. Soit n_A le nombre de réalisation de A. Soit $f_n(A)$ la fréquence de réalisation de A. Alors

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} \text{ et } 0 \leq f_n(A) \leq 1.$$

On a

(i) $f_n(\Omega) = 1$

(ii) Si A et B sont deux événement incompatibles alors $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$

On montre que lorsque n tend vers l'infini, $f_n(A)$ converge vers une quantité $P(A)$ qui sera appelée probabilité de l'événement A.

Définition 2.4. *Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Soit $\mathcal{F}$ une tribu définie sur Ω. On appelle probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, toute application $P: \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ telle que*

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux incompatibles on a

$$P(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n).$$

La quantité $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'événement A et le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace probabilisé.

Exemple : **Probabilité uniforme**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini c'est à dire tel que Ω est fini. On suppose que tous les événements élémentaires ont la même probabilité ce qui s'énonce en disant qu'on a l'hypothèse d'équiprobabilité. Sous cette hypothèse, la probabilité d'un événement A est alors donnée par

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{Nb de cas favorables à } A}{\text{Nb de cas possibles}}.$$

Cette probabilité est dite uniforme sur Ω. Notons qu'il est impossible d'avoir l'hypothèse d'équiprobabilité sur un espace probabilisable non fini.

Propriété 2.1. *Toute probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie les propriétés suivantes :*

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- *Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$*
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- *Formule de Poincaré :*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{k=3}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}),$$

soit

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I\subset[[1,n]],|I|=k} P(\bigcap_{i\in I} A_i).$$

- *Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, on a*

$$P(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

- *Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, on a*

$$P(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Définition 2.5. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.*

- *Si A est un événement de probabilité nulle, on dit que A est négligeable.*
- *Soit $\mathcal{P}$ une propriété. Si $A = \{\omega \in \Omega / \omega$ vérifie $\mathcal{P}\}$ et $P(A) = 1$, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie presque sûrement (p.s.).*

Remarque : Ces notion dependent de P.

$\star$ Détermination d'une probabilité sur un espace probabilisable dénombrable.

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ un ensemble et $(p_i)_{i\in I}$ une famille de nombre réels. Soit P une application sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour tout $i \in I, P(\{\omega_i\}) = p_i$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que P soit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est que :

$$\begin{cases} \forall\ i \in I,\ p_i \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i\in I} p_i = 1. \end{cases}$$

P est alors unique et on a pour tout événement A, $P(A) = \displaystyle\sum_{i\in I/\omega_i\in A} p_i$.

Remarque : La probabilité P sur un espace probabilisable dénombrable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des événements élémentaires.

3. Probabilités conditionnelles

Dans cette section, notre objectif est quantifier les chances de réalisation d'un événement lorsqu'on dispose d'informations sur le résultat de l'expérience sans le connaître.

Exemple. On lance succesuvement deux dés non pipés. On suppose qu'on a l'information suivante : " la somme des chiffres obtenus est 8". On cherche sous cette information à évaluer la chance que le premier chiffre du résultat obtenu soit pair.

3.1. Définition

Définition 2.6. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements tels que $PB) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, la quantité $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.*
Pour tout événement B tel que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle sachant B l'application notée $P(./B)$ ou P_B définie sur $\mathcal{F}$ et qui à tout élément A de $\mathcal{F}$ associe $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ qu'on note $P(A/B)$ ou $P_B(A)$.

3.2. Formule des probabilités composées

Soit $A_1, ..., A_n$ une famille d'événements tels que $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$. Alors, on a

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2/A_1) \times \mathrm{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \times ... \times P(A_n/A_1 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

Exemple :

3.3. Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Pour tout événement B, on a

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B/A_i).$$

Exemple :

3.4. Formule de Bayes ou probabilités des causes

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et B un événement de probabilité non nulle. Alors pour tout $i_0 \in I$ fixé, on a :

$$\mathrm{P}(A_{i_0}/B) = \frac{\mathrm{P}(A_{i_0})\mathrm{P}(B/A_{i_0})}{\displaystyle\sum_{i \in I} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B/A_i)}.$$

Exemple :

4. Indépendance d'événements

4.1. Indépendance de deux événements

Définition 2.7. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé. Soit* A *et* B *deux événements. On dit que* A *et* B *sont indépendants si* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque : Si A et B sont tels que $\mathrm{P}(A) \neq 0$ et $\mathrm{P}(B) \neq 0$, alors A et B sont indépendants si $\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A)$ et $\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)$. i.e. la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la chance de réalisation de l'autre.

Exemple :

Propriétés
(i) Les événements A et B sont indépendants si et seulement si les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.
(ii) Les événements A et B sont indépendants si et seulement si les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
(iii) L'événement certain est indépendant de tout événement.
(iv) L'événement impossible est indépendant de tout événement.
(v) Deux événements incompatibles en dehors de l'univers et de l'événement impossible ne sont pas indépendants.

4.2. Indépendance mutuellede n événements

Définition 2.8. *Soient* $A_1, ..., A_n$ n *événements d'un espace probababilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Les événements* $A_1, ..., A_n$ *sont dits mutuellement indépendants si pour tout* $k \in \{2, ..., n\}$ *et pour tout* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *avec* $i_1 < i_2 < ... < i_k$, *on a*

$$P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Remarque
L'indépendance mutuelle de n événements est décrite à l'aide de $\sum_{k=2}^{n} C_n^k = 2^n - n - 1$ relations.

Exemple A, B, C sont mutuellement indépendants si
(1) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
(2) $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
(3) $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
(4) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$
On a $\sum_{k=2}^{3} C_3^k = 2^3 - 3 - 1 = 4$ relations.

Exercices d'application

Questions de Cours

1. Donner la définition : (a) d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et (b) d'une probabilité $\mathbb{P}$.
2. Soit Ω l'univers de l'expériance aléatoire $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Comment appelle-on le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$?
3. Quand dit-on que l'expériance aléatoire $\mathcal{E}$ est équiprobable ? Dans ce cas, donner l'expression de $\mathbb{P}(A)$ pour tout événement A.

Exercice 1 Soient A, B, C trois événements d'un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. Exprimer en fonction de A, B, C les événements :
 - l'un au moins des trois événements se réalise
 - un et un seul des trois événements se réalise
 - deux au moins des trois événements se réalisent
 - deux exactement des trois événements se réalisent.

2. Montrer que si les événements A et $\overline{B} \cup C$ sont incompatibles, alors la réalisation de A entraîne celles de B et de $\overline{C}$.

Exercice 2 Dans chacune de situations décrites ci-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné.

1. Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard. A : " Les deux élèves sont des filles".
2. Dans un groupe de suisses et de belges, on discute avec une personne. B : "La personne est un homme belge".
3. Au restaurant, Luc prend un plat et un dessert. C : "Luc prend une viande et une glace".
4. A une loterie, Elise achète 3 billets. D : "L'un des billets au moins est gagnant", E : "Deux billets au maximum sont gagnants".

Exercice 3 Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note : A : "Tirer une boule blanche". B : "Tirer une boule ni blanche ni rouge". C : "Tirer une boule noire ou une boule rouge".

(1) A et B sont-ils incompatibles ? B et C sont-ils incompatibles ?

(2) Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Exercice 4 Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω tels que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ et $P(C) = \frac{1}{4}$.

1. On suppose que A, B et C sont deux à deux incompatibles. Calculer $P(A \cup B \cup C)$.
2. On suppose que A, B et C sont indépendants. Calculer $P(A \cup B \cup C)$.

Exercice 5 Une association comprend six membres dont quatre hommes et deux femmes. Elle veut former un comité de trois personnes dont un président, un secrétaire et un trésorier.

1. Quel est le nombre de comités possibles que l'on peut former ?
2. Quelle est la probabilité que le comités comporte les deux sexes ?
3. Quelle est la probabilité que le président du comité soit un homme ?
4. Quelle est la probabilité que M. Yao et Mme Konan ne siègent pas ensemble si le comité comprend au moins un homme et une femme ?

Exercice 6 On a melangé par inadvertance des graines de trois provenances différentes A, B et C. On a ainsi un ensemble de graines dont 30% provient de A et 25% de B. 5% des graines de A, 4% des graines de B et 10% des graines de C sont défectueuses. On choisit une graine au hasard ; elle est défectueuse. Quelle est la probbilité pour qu'elle provienne de B.

Exercice 7 Une urne contient neuf boules dont six rouges et trois noires.

1. On tire sans remise un lot de quatre boules.
   (a) Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins une boule noires ?
   (b) On suppose que chaque boule rouge tirée fait gagner 100 F et chaque boule noire tirée fait perdre 300 F. Quelle est la probabilité que le gain associé au lot soit nul ?
2. Mêmes si on tire avec remise.

Exercice 8 Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires.

1. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ?
2. Quelles sont les probabilités des événements suivants :
   (a) il est tout en noir ;
   (b) une seule pièce est noire sur les trois.

Exercice 9 Dans un lot de pièces fabriquées, il y a 5% de pièces défectueuses. On contrôle les pièces, mais le mécanisme de contrôle est aléatoire. Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité égale à 0,96 ; si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec probabilité 0,98. On choisit au hasard une pièce que l'on contrôle.

(1) Quelle est la probabilité que cette pièce soit refusée ?

(2) Quelle est la probabilité que cette pièce soit bonne, sachant qu'elle est refusée ?

(3) Quelle est la probabilité que cette pièce soit mauvaise sachant qu'elle est acceptée ?

(4) Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle (une bonne pièce est refusée ou une mauvaise est acceptée) ?

Exercice 10 On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. Il tire ensuite un jeton dans une urne choisie en fonction du résultat du dé. L'urne A est choisie quand le dé donne un chifre impair, l'urne B quand on obtient 2 ou 4 et l'urne C quand on obtient 6. Les urnes contiennent les jetons suivants :

- urne A : deux jetons rouges, trois jetons bleus ;
- urne B : deux jetons bleus, quatre jetons verts ;
- urne C : un jeton vert, un jeton rouge ;

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge par ce procédé ?
2. On obtient un jeton vert. Quelle est la probabilité que ce jeton soit issu de l'urne B ?
3. Est-ce que l'évènement «choisir dans l'urne C» et l'évènement «obtenir un jeton rouge» sont indépendants ? Justifiez votre réponse.

Exercice 11 Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec 5 clefs dont une seule est la bonne.

1. Quelle est la probabilité qu'il ouvre la porte à la 5ème tentative s'il essaie les clefs une à une sans utiliser deux fois la même ?
2. Lorsue le gardien est ivre, il melange toutes les clefs à chaque tentative. Quelle est la probabilité qu'il ouvre la porte à la 5ème tentative ?
3. Le gardien est ivre un jour sur trois. Sachant qu'un jour 5 tentatives ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le gardien ait été ivre ce jour là ?

Exercice 12 On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obeissant aux règles suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- si l'appareil fonctionne au temps $n-1$, il a la probabilité $1/4$ d'être en panne au temps n.
- si l'appareil est en panne au temps $n-1$, il a la probabilité $1/2$ d'être en panne au temps n.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir une relation entre p_n et p_{n-1}. En déduire p_n en fonction de p_0.

(2) Etudier la convergence de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Chapitre 3

Variables aléatoires

1. Généralités

Définition 3.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable. Soit* E *un ensemble muni d'une tribu* $\mathcal{B}$*. Une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *à valeurs dans* E *est une application*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \mathcal{B})$$

telle que

$$\forall\ B \in \mathcal{B}, \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \tag{3.1}$$

$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\}$ est l'image réciproque de B par X et est notée $\{X \in B\}$. La condition 3.1 est très importante pour la définition de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F})$ pour toute tribu $\mathcal{F}$ sur Ω. Mais elle est toujours réalisée si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dans ce cas, toute application de Ω dans $(E, \mathcal{B})$, i.e. toute application dont les valeurs dépendent du resultat d'une expérience aléatoire est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

$X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X.

Exemple 3.1. *Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé.*
Alors, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$.
Soit l'application X *:*

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & si \;\; \omega = 6 \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

On prend $E = \{0, 1\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, E\}$.
On a $X^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{F}_1$ *;* $X^{-1}(\{0\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{F}_1$ *;* $X^{-1}(\{1\}) = \{6\} \in \mathcal{F}_1$ *;* $X^{-1}(E) = \Omega \in \mathcal{F}_1$ *;*
Ainsi, X *est une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{F}_1)$.
Par contre, X *n'est une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{F}_2)$ *avec* $\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \{5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \Omega\}$, *car* $X^{-1}(\{0\}), X^{-1}(\{1\}) \notin \mathcal{F}_2$ *(la condition 3.1 n'est pas vérifiée).*

Dans la suite, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Proposition 3.1. *Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$. Alors l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$ définie par $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ est une probabilité. Cette probabilité est appelée loi de X.*

La variable aléatoire X est dite réelle si $E = \mathbb{R}$, muni de sa tribu borelienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Proposition 3.2. *Une application $X : \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est une variable aléatoire réelle ssi*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}(]-\infty, x]) = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

Définition 3.2. *Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle fonction de repartition de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

La fonction de répartition vérifie les importantes propriétés suivantes :

Propriété 3.1.

(1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

(2) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

(3) *F_X est croissante (au sens large)*

(4) *F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{u \to x \\ >}} F_X(u) = F_X(x)$.*

Réciproquement, on prouve qu'une fonction vérifiant les propriétés précédentes est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire.
On a aussi les propriétés suivantes : $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - \lim_{\substack{u \to a \\ <}} F_X(u)$$

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \lim_{\substack{u \to b \\ <}} F_X(u) - F_X(a)$$

$$\mathbb{P}(a \leq X < b) = \lim_{\substack{u \to b \\ <}} F_X(u) - \lim_{\substack{u \to a \\ <}} F_X(u).$$

Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou denombrable, on dit que X est une variable discrète. Dans le cas contraire, on dit que X est une variable aléatoire continue.

2. Variables aléatoires réelles discrètes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle discrète (v.a.r.) définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$. $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, avec I une partie de $\mathbb{N}$.

Remarque : $\{X = x_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'événements appelé système complet associé à la v.a.r. X.

2.1. Loi de probabilité d'une v.a.r. discrète

La loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ de la v.a.r discrète X est déterminée par l'ensemble des couples (x_i, p_i) où $x_i \in X(\Omega)$ et $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

En pratique, pour déterminer la loi de X, on détermine les valeurs x_i susceptible d'être prises par X, puis les probabilités $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.
Si $I = [[1, n]]$ avec n petit, on représente souvent les résultats dans un tableau.

Exemple : Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On tire sans remise 3 boules. On note X le plus petit nombre tiré et Y le plus grand nombre tiré. Donner les lois de X et Y.

Exemple : On jette une pièce de monaie. On désigne par X le nombre de jets successifs necessaires pour obtenir le coté pile pour la première fois. Déterminer la loi de X.

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ et $\{(x_i, p_i), i \in I\}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ tels que $x_i \neq x_j,\ \forall\, i \neq j$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\{(x_i, p_i), i \in I\}$ soit la loi de probabilité d'une v.a.r. est que :

$$\begin{cases} \forall\, i \in I,\ p_i \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i \in I} p_i = 1. \end{cases}$$

2.2. Fonction de répartition d'une v.a.r. discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle discrète (v.a.r.) définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$. Alors sa fonction de répartition F_X est constante par morceaux et les points de discontinuité sont les x_i.

Plus précisement, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_i, ...\}$, où les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant et $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ la loi de X, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x)$, est définie par :

$$\begin{array}{lll} \forall\, x \in]-\infty, x_1[, & F_X(x) = & 0. \\ \forall\, k \geq 1,\ \forall\, x \in [x_k, x_{k+1}[, & F_X(x) = & p_1 + p_2 + ... + p_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i. \end{array}$$

- Si $X(\Omega)$ est fini et si x_n est la plus grande valeur, on a

$$\forall\, x \in [x_n, +\infty[, \quad F_X(x) = p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

- Si $X(\Omega)$ est infini

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1.$$

Exemple : On considère une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$. Déterminer sa fonction de répartition.

Connaissant, la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle discrète X, on peut réconstituer sa loi :

$$\forall\ x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{\substack{u \to x \\ <}} F_X(u).$$

En particulier, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_i, ...\}$, où les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant, alors

$$\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1),$$
$$\forall\ i \geq 2,\ \mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$$

Remarque : Il est parfois plus simple de déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle à partir de sa fonctionde répartion.

Exemple : On jette successivement et indépendamment sur une table deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note X_1 le premier nombre obtenu, X_2 le deuxième nombre obtenu et X le plus grand des deux nombres obtenus. Donner la loi de X.

3. Variables aléatoires réelles continue

On rappelle qu'une variable aléatoire réelle X est dite continue lorsqu'elle n'est pas discrète, autrement dit lorsque l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs possibles est un intervalle de $\mathbb{R}$ éventuellement $\mathbb{R}$ lui-même.

3.1. Fonction de répartition et densité de probabilité

Sa fonction de répartition F_X est continue.

La variable aléatoire réelle X est dite absolument continue si sa fonction de répartition F_X est absolument continue, c'est à dire s'il existe une fonction positive f_X telle que

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Ce qui revient à dire que F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\ x \in \mathbb{R},\ F'_X(x) = f_X(x)$.

Cette fonction f_X est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire absolument continue X.

Remarque : Une variable aléatoire réelle peut être ni discrète, ni absolument continue. Dans ce cas F_X est dérivable par morceaux.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit une densité de probabilité est que

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R} \\ f \text{ est continue par morceaux} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1. \end{cases}$$

Pour toute variable aléatoire (absolument) continue, on a :

✓ $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt.$

✓ $\mathbb{P}(X = a) = 0.$

Remarque : La loi d'une variable aléatoire réelle (absolument) continue est entièrement déterminée, soit par sa fonction de répartition, soit par sa densité de probabilité.

Exemple : On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle continue X dont on déterminera l'ensemble des valeurs possibles.

2) Montrer que la v.a. X est absolument continue et déterminer sa densité.

3) Calculer $\mathbb{P}(X < 1,5)$, $\mathbb{P}(0,5 < X \leq 1,5)$.

Exemple : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-2x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle continue X.

(On utilisera le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)dt$)

2) Déterminer sa fonction de répartition.

3) Calculer $\mathbb{P}(X > 1)$.

4. Espérance d'une variable aléatoire

Définition 3.3. *Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle expérance mathématique de X la quantité si elle existe :*

$\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i),$ *si X est discret,*

$\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx,$ *si X est continu.*

Théorème 3.1. *Soit X une variable aléatoire réelle.*

- Si X est discret, $(P_i)_{i \in I}$ est la loi de X ssi pour toute fonction continue positive g,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

- Si X est continu, f_X est densité de X ssi pour toute fonction continue positive g,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Exemple 3.2. *Soit une v.a. de densité f_X de support D et φ une fonction bijective sur D. Déterminer la loi de $\varphi(X)$.*

Propriété 3.2. - $\mathbb{E}(\alpha g_1(X) + \beta g_2(X)) = \alpha\mathbb{E}(g_1(X)) + \beta\mathbb{E}(g_2(X))$.
- Si $g_1 \leq g_2$, alors $\mathbb{E}(g_1(X)) \leq \mathbb{E}(g_2(X))$.
- Si $g(X) = cst$, alors $\mathbb{E}(g(X)) = g(X)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(g_1(X)g_2(X)) = \mathbb{E}(g_1(X))\mathbb{E}(g_2(Y))$.

Définition 3.4. *Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle variance de X la quantité si elle existe :*

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Propriété 3.3. - $V(X) \geq 0$
- $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Définition 3.5. *Soit X une variable aléatoire réelle.*
- On Moment d'ordre $k \geq 1$ de X la quantité : $m_k = \mathbb{E}(X)^k$.
- On Moment centré d'ordre $k \geq 1$ de X la quantité : $\mu_k = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^k$.

Remarque 3.1. $\mathbb{E}(X) = m_1$ *et* $V(X) = \mu_2$.

Définition 3.6. *Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle ecart type de X la racine carrée de la variance V(X) : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.*

Chapitre 4

Lois de probabilités usuelles : Lois discretes finies

1. Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$

On appelle epreuve de Bernoulli, toute expérience aléatoire à deux issues, l'une est appelée succes et l'autre l'echec.

Exemples :

- Le jet d'une pièce de monnaie
- Le jet d'un dé cubique et l'observation d'une face marquée.
- Se présenter à un examen
- Dans une population subdivisée en deux parties, le tirage d'un individu.

Le résultat de cette expérience est représenté par une v.a. X, appélée v.a de Bernoulli, définie par :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si le choix de } \omega \text{ donne un succes} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $X(\Omega) = \{0, 1\}$. Si la probabilité du succès est p ($p = \mathbb{P}(succs)$), alors $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, ce qu'on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$.

• $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - p, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

• $\mathbb{E}(X) = p, \quad V(X) = p(1 - p)$

• $\varphi_X(t) = (1 - p) + pe^{it}, \quad G_X(s) = (1 - p) + ps$

2. Loi Binomial $\mathcal{B}(n, p)$

On effectue n répétitions indépendantes d'une epreuve de Bernoulli et on note X le nombre de fois où on a obtenu le succès. On définit ainsi une variable aléatoire X qui suit une loi Binomial de paramètres n et $p = \text{Prob(Succès)}$, caractérisé par

$$X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\} \text{ et pour tout } \quad k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

On écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$.

- $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 0 \\ (1-p)^n, & \text{si } \ 0 \leq x < 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}, & \text{si } \ k \leq x < k+1 \\ 1, & \text{si } \ x \geq n \end{cases}$
- $\mathbb{E}(X) = np, \quad V(X) = np(1-p)$
- $\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n, \quad G_X(s) = (1 - p + ps)^n.$

Remarque : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p) \Longleftrightarrow X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, avec $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$, $\forall\ i = 1, ..., n$ indépendantes.

Exemple : On lance dix fois dans les même conditions une pièce de monnaie, quelle est la probabilité d'obtenir 5 faces.

Le lancer d'une pièce de monnaie est une épreuve de Bernoulli. Le fait de lancer dix fois dans les même conditions la pièce constitue une répétition indépendante de la même épreuve. X=nombre de fois où l'on obtient face. Alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$, avec $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

3. Loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ ou $\mathcal{H}(N, Np, n)$

On effectue n tirage sans remise dans une urne contenant N objets dont Np objets A (p étant la proportion des objets A) et on note X le nombre d'objets A tirés. Alors X suit une loi Hypergéométrique de paramètres N, Np et n ou N, p et n, caractérisé par

$$X(\Omega) = \{\max(0, n - Nq), ..., \min(n, Np)\} \quad \text{avec} \quad Np \in \mathbb{N}, \ q = 1 - p$$

et pour tout

$$k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}.$$

On écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, Np, n)$.

- $\mathbb{E}(X) = np, \quad V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$

Exemple : Une urne contient 10 pièces dont 4 sont défectueuses. On y prend au hasard un lot de 5 pièces. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces non défectueuses contenues dans le lot.

1. Quel est l'ensemble des valeurs possibles de X ?
2. Donner la loi de probabilité de X
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.
4. Quelle est la probabilité que le lot ne contienne aucune pièce défectueuse ?

4. Loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$; $\mathcal{U}_{\{1,...,n\}}$

• $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{\{1,...,n\}}$ si $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$ et $\forall\ k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad p_X(x) = \dfrac{1}{n}1_{\{1,...,n\}}(x)$.

• $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 1 \\ \dfrac{k}{n}, & \text{si } \ k \leq x < k+1 \\ 1, & \text{si } \ x \geq n \end{cases}$

• $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n+1}{2}, \quad \mathbb{E}(X^2) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

Généralement : $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{\{a_1,...,a_n\}} \iff X(\Omega) = \{a_1, ..., a_n\}$ et $\forall\ k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
$\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.