T.D. Chap.1

2019-2020.

Exercice 1

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -21 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

1°) Calculer si cela est possible $A - B$; $3C$; A^2 ; AB ; BC ; BA.

2°) Échelonner les matrices A, B, C et ensuite les échelonner réduire en déterminant le rang de chacune.

3°) A l'aide de déterminant extrait des matrices A, B, C confirmer le rang des matrices A, B, C d'après 2°).

Correction de l'exo.1

1) $A - B$ impossible car A est carrée d'ordre 3 et B est de type $(4, 3)$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -21 & 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$3C = 3 \times \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -21 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 3 & 6 \\ 18 & 0 & 6 & 9 \\ 12 & -63 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 16 & 10 \\ 8 & 13 & 8 \\ 10 & 19 & 12 \end{bmatrix}$$

AB impossible car A a 3 colonnes alors que B à 4lignes.

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -21 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -9 & 13 & 17 \\ 48 & -45 & 25 & 27 \\ 2 & 21 & -3 & 0 \\ 26 & -57 & 19 & 16 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 & 12 \\ 8 & 35 & 24 \\ 6 & -4 & -4 \\ 0 & 22 & 16 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -8 \\ 0 & 11 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 4L_1 \\ L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$

$$A \simeq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix}$$

Ici A est échelonnée.

$$A \simeq \begin{bmatrix}1&3&2\\0&-11&-8\\0&0&0\end{bmatrix} \simeq \begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & C_2-3C_1 & C_3-2C_1\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-11&-8\\0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A \simeq \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{8}{11}\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{array}{c}\\ -\frac{1}{11}L_2\\ \\ \end{array}$$

$$A \simeq \begin{array}{c}\begin{array}{cc} & C_3-\frac{8}{11}C_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\end{array} \text{ Ici } A \text{ est échelonnée réduite} \Rightarrow rg\,(A)=2.$$

$$B = \begin{bmatrix}4&2&1\\6&2&3\\0&1&-1\\2&1&3\end{bmatrix} \simeq \begin{array}{c}\begin{array}{ccc} C_3 & C_2-2C_3 & C_1-4C_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0\\3&-4&-6\\-1&3&4\\3&-5&-10\end{bmatrix}\end{array} \simeq$$

$$B \simeq \begin{array}{c}\begin{array}{cc} & 2C_3-3C_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0\\3&-4&0\\-1&3&-1\\3&-5&-5\end{bmatrix}\end{array} \text{ Ici } B \text{ est échelonnée.}$$

$$B \simeq \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&3&-1\\0&-5&-5\end{bmatrix}\begin{array}{c}\\ L_2-3L_1\\ L_3+L_1\\ L_4-3L_1\end{array} \simeq \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\0&0&-5\end{bmatrix}\begin{array}{c}\\ -\frac{1}{4}L_2\\ L_3-3L_2\\ L_4+5L_1\end{array}$$

$$B \simeq \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{array}{c}\\ -\frac{1}{4}L_2\\ -L_3\\ L_4-5L_3\end{array} \text{ Ici } B \text{ est échelonnée réduite} \Rightarrow rg\,(B)=3.$$

$$C = \begin{bmatrix}4&3&1&2\\6&0&2&3\\4&-21&5&3\end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix}4&3&1&2\\0&-9&1&0\\0&-24&4&1\end{bmatrix}\begin{array}{c}\\ 2L_2-3L_1\\ L_3-L_1\end{array}$$

$$C \simeq \begin{bmatrix}4&3&1&2\\0&-9&1&0\\0&0&8&9\end{bmatrix}\begin{array}{c}\\ \\ 9L_3-24L_2\end{array} \qquad \text{Ici } C \text{ est échelonnée}$$

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \frac{1}{4}C_1 \quad C_2-\frac{3}{4}C_1 \quad C_3-\frac{1}{4}C_1 \quad C_4-\frac{2}{4}C_1 \end{array}$$

$$C \simeq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{9}C_2 \quad C_3-\frac{1}{9}C_2$$

$$C \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{8}C_3 \quad C_4-\frac{9}{8}C_3$$

$$C \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{Ici } C \text{ est échelonnée réduite} \Rightarrow rg\,(C) = 3.$$

3)

(i) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang\,(A) \leq 2$ et

comme $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \Rightarrow rang\,(A) = 2.$

(ii) comme B est de type $(4,3)$ alors $rang\,(B) \leq 3$

Avec $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et comme $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

alors $rang\,(B) = 3.$

(iii) comme C est de type $(3,4)$ alors $rang\,(C) \leq 3$

Avec $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -21 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ et comme $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 4 & -21 & 5 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$

alors $rang\,(C) = 3.$

Exercice 2

Montrer que les matrices suivantes : $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

sont équivalentes en déterminant une matrice P carrée d'ordre 4 inversible et une matrice Q carrée d'ordre 3 inversible telles que : $PAQ = R$

(Indication : On pourra s'aider de ce qui a été fait au cours pour déterminer le rang d'une certaine matrice donnée).

Il faudra prouver l'inversibilité de P et Q à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes des matrices mises en jeu.

Correction de l'exo.2

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

La matrice A a été échelonné à ligne canonique, j'ai fait les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée $\left[\begin{array}{c|c} A & I_4 \end{array}\right]$.

Ici $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc P est inversible.

$$C_3 - \tfrac{1}{2}C_1 + \tfrac{1}{2}C_2$$

Aussi a-t-on : $\left[\begin{array}{c} R\prime \\ \hline I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

La matrice R' a été échelonné à colonne canonique, j'ai fait les opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice augmentée $\left[\begin{array}{c} R\prime \\ \hline I_3 \end{array}\right]$.

où $R' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et avec

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc Q est inversible.

De là, évaluons

$$PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$. Ainsi A et R sont équivalentes.

Exercice 3

Les matrices : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

Correction de l'exo.3

On a : $tr\,(A) = 1 + (-2) + 3 = 2 \neq 0 = tr\,(B) \Rightarrow A$ et B ne peuvent être semblables.

Exercice 4

Montrer que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

est un diviseur de zèro sur $\mathcal{M}_3\ (\mathbb{R})$ et

trouver une matrice B non nulle telle que $AB = 0$.

Correction de l'exo.4

On sait que $A.Com\,({}^tA) = A.\left({}^tCom\,(A)\right) = Com\,({}^tA)\,.A = \left({}^tCom\,(A)\right).A = \det\,(A)\,.I_n$

Pour toute matrice A carrée d'ordre n.

Donc toutes les fois que $A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ où $\mathbb{K}$ est un corps et que $\left({}^tCom\,(A)\right) \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ avec $\det\,(A) = 0$, alors A est un diviseur de zèro sur $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{K})$ et alors $B = \left({}^tCom\,(A)\right) = Com\,({}^tA)$.

En ce qui nous concerne : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$ et $\det\,(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0$

$Com\,(A) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 34 & -17 & 17 \\ 12 & -6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \left({}^tCom\,(A)\right) = Com\,({}^tA) = \begin{bmatrix} -2 & 34 & 12 \\ 1 & -17 & -6 \\ -1 & 17 & 6 \end{bmatrix}$

Évaluons $A.\left({}^tCom\,(A)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 34 & 12 \\ 1 & -17 & -6 \\ -1 & 17 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

de là $B = \left({}^tCom\,(A)\right) = Com\,({}^tA) = \begin{bmatrix} -2 & 34 & 12 \\ 1 & -17 & -6 \\ -1 & 17 & 6 \end{bmatrix}$.

Exercice 5

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer $(A + I)^3$ où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3\ (\mathbb{R})$.

2. En déduire :

a) L'expression de A^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Que A est inversible. Donner son inverse.

c) Une extension de A^n où $n \in \mathbb{Z}^*$.

Correction de l'exo. 5

1. Calculons $(A+I_3)^3$

$$A+I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A+I_3)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A+I_3)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. a) $A = (A+I_3) - I_3$

$$\Rightarrow A^n = ((A+I_3) - I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A+I_3)^k (-I_3)^{n-k} \,; \forall n \in \mathbb{N}, \text{car } (A+I_3)(-I_3) = (-I_3)(A+I_3)$$

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k (A+I_3)^k (-I_3)^{n-k} \,; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$A^n = (-1)^n C_n^0 (A+I_3)^0 + (-1)^{n-1} C_n^1 (A+I_3) + (-1)^{n-2} C_n^2 (A+I_3)^2 \,; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$A^n = (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} C_n^1 (A+I_3) + (-1)^{n-2} C_n^2 (A+I_3)^2 \,; \forall n \in \mathbb{N}$$

comme $(A+I_3) \neq 0_{M_3(\mathbb{R})} \Rightarrow (A+I_3)^0 = I_3$

$$A^n = (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} n (A+I_3) + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} (A+I_3)^2 \,; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$A^n = (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-1)^{n-1} n \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1} n & (-1)^{n-1} n \\ -(-1)^{n-1} n & (-1)^n - \frac{1}{2}(-1)^{n-2} n(n-1) & -\frac{1}{2}(-1)^{n-2} n(n-1) \\ (-1)^{n-1} n & \frac{1}{2}(-1)^{n-2} n(n-1) & (-1)^n + \frac{1}{2}(-1)^{n-2} n(n-1) \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$$

b) $(A+I_3)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

$\Leftrightarrow A(A^2 + 3A + 3I_3) = -I_3 \Leftrightarrow A(-A^2 - 3A - 3I_3) = I_3$

$\Rightarrow A$ est inversible d'inverse $A^{-1} = -(A^2 + 3(A+I_3))$.

c) Une extension de A^n où $n \in \mathbb{Z}^*$ reviendrait à évaluer :

$$(A^{-1})^n = (-(A^2 + 3(A+I_3)))^n \,; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(A^{-1})^n = (-(A^2 + 3(A+I_3)))^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times 3^k (A+I_3)^k (A^2)^{n-k} \,; \forall n \in \mathbb{N}$$

car $(A+I_3)A^2 = A^2(A+I_3)$

$$(A^{-1})^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{2} C_n^k \times 3^k (A+I_3)^k (A^2)^{n-k}$$

comme $(A+I_3) \neq 0_{M_3(\mathbb{R})} \Rightarrow (A+I_3)^0 = I_3$

$$(A^{-1})^n = (-1)^n \left[(A^2)^n + 3n (A+I_3) A^{n-1} + 3^2 \frac{n(n-1)}{2} (A+I_3)^2 A^{n-2} \right];\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(A^{-1})^n = (-1)^n \left[A^n \times A^n + 3n (A+I_3) A^n \times A^{-1} + 3^2 \frac{n(n-1)}{2} (A+I_3)^2 A^n \times A^{-2} \right];$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(A^{-1})^n = (-1)^n \begin{bmatrix} A^n \times A^n - 3n (A+I_3) A^n \times (A^2 + 3(A+I_3)) + \\ 3^2 \frac{n(n-1)}{2} (A+I_3)^2 A^n \times (A^2 + 3(A+I_3))^2 \end{bmatrix};\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(A^{-1})^n = (-1)^n \begin{bmatrix} A^n \times A^n - 3n (A+I_3) (A^{n+2} + 3A^{n+1} + 3A^n) + \\ 3^2 \frac{n(n-1)}{2} (A+I_3)^2 A^n \times (A^2 + 3(A+I_3))^2 \end{bmatrix};\ \forall n \in \mathbb{N}$$

C'est bon !

Exercice 6

Déterminer le rang des matrices suivantes et inverser celles qui sont inversibles (suivant les valeurs du paramètre réel a).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 2 \end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix},\quad A_3 = \begin{bmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Correction de l'exo. 6

(i) $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 2 \end{vmatrix} = a^2 + 2 \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, donc A_1 est de rang 2.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a^2+2} & -\frac{a}{a^2+2} \\ \frac{a}{a^2+2} & \frac{1}{a^2+2} \end{bmatrix},\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

(ii) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ donc A_2 est de rang 3

et $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A_2^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(iii) $A_3 = \begin{bmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{vmatrix} = -a^3 + 5a^2 - 7a + 3 = -(a-3)(a-1)^2$$

$\det(A_3) = 0 = -(a-3)(a-1)^2 \Rightarrow a \in \{3, 1\}$.

Pour $a = 3$, on a : $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang(A_3) = 2$

Pour $a = 1$, on a : $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow rang(A_3) = 2$

Aussi $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{3, 1\}$ on a $\det(A_3) \neq 0$ donc $rang(A_3) = 3$ et alors

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a^2-3a+8}{-a^3+5a^2-7a+3} & -\frac{a-11}{-a^3+5a^2-7a+3} & \frac{3a-1}{-a^3+5a^2-7a+3} \\ -\frac{a+2}{-a^3+5a^2-7a+3} & -\frac{-a^2+4a+2}{-a^3+5a^2-7a+3} & -\frac{2a-1}{-a^3+5a^2-7a+3} \\ \frac{2a-5}{-a^3+5a^2-7a+3} & \frac{3a-8}{-a^3+5a^2-7a+3} & \frac{a^2-3a+1}{-a^3+5a^2-7a+3} \end{bmatrix}.$$

(iv) $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_4) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

donc $rang(A_4) \leq 3$, aussi $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang(A_4) = 2$

et alors A_4 n'est point inversible.

(v) $A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang(A_5) = 3$

Aussi A_5 n'étant pas une matrice carrée, elle ne peut pas être inversible.

Exercice 7

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

1) Donner la transposée $({}^tM)$, de la matrice M.

2) Calculer $M.({}^tM)$ et $({}^tM).M$, ces deux matrices commutent-elles ?

3) Déterminer le déterminant de M en sachant qu'il est positif.

4) A quelle condition M est-elle inversible ? Donner sa matrice inverse.

Correction de l'exo.7

1) $M = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \Rightarrow ({}^tM) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}.$

2) $M.({}^tM) = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$

$$M.({}^tM) = \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

$$M.({}^tM) = (a^2+b^2+c^2+d^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)\, I_4.$$

$$({}^tM).M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

$$({}^tM).M = \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

$$({}^tM).M = (a^2+b^2+c^2+d^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)\, I_4.$$

donc $M.({}^tM) = ({}^tM).M = (a^2+b^2+c^2+d^2)\, I_4$

et alors les deux matrices M et $({}^tM)$ commutent.

3) le déterminant de M :

On a : $({}^tM).M = (a^2+b^2+c^2+d^2)\, I_4 \Rightarrow$

$\det(({}^tM).M) = \det((a^2+b^2+c^2+d^2)\, I_4) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$

$\det(({}^tM).M) = (\det(M))^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \Rightarrow \det(M) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$

4) M est inversible ssi $\det(M) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \neq 0 \Rightarrow (a,b,c,d) \neq (0,0,0,0).$

Ainsi $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ M est inversible.

Avec $\left({}^tM\right).M = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) I_4 \Rightarrow$

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\left({}^tM\right).$$