

---

**Licence 1 : Maths- Info et Eco-Stat**  
**Examen : Fonctions réelles de la variable réelle**

**Durée : 2 h 00 mn**

---

**Exercice 1**

1. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .  
Ecrire à l'aide des symboles mathématiques usuels ( $\forall$ ,  $\exists$ ,  $\Rightarrow$ ) la phrase suivante :  
 $f(x)$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $-2$ .
2. Donner la définition d'une suite minorée.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par

$$f(x) = (x + 1)^{\frac{1}{x}}.$$

4. Enoncer, avec précision, le théorème de Rolle.

**Exercice 2**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 + x^3} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan(x))^2}{\cos(2x) - 1}.$$

**Exercice 3**

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de  $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$ .

**Exercice 4**

1. Donnez la définition de suites adjacentes
2. On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_0 = 2$  et  $v_0 = 4$  et pour tout  $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

- a) Déterminer  $u_1$  et  $v_1$ .
- b) Démontrer que pour tout  $n \geq 0$  on a

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

- c) Démontrer que  $(v_n - u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.  
En déduire que la suite  $(v_n - u_n)$  tend vers 0.
- d) Démontrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite.
- e) Démontrer que la suite  $(u_n + v_n)$  est constante.
- f) En déduire la limite des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

---

**Licence 1 : Maths- Info et Eco-Stat**  
**Examen : Fonctions réelles de la variable réelle**

**Durée : 2 h 00 mn**

---

---

**Licence 1 : Maths- Info et Eco-Stat**  
**Examen : Fonctions réelles de la variable réelle**

**Durée : 2 h 00 mn**

---