

UFR-MI
Licence 1 Miage :
Année académique 2022 – 2023

Examen de Structures algébriques : session 2
2-heures

Exercice 1 : (8-points) Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto z + \bar{z}$

1. Montrer que g est une application bien définie.
2. Montrer que g est **un homomorphisme** du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.
3. Dire si les parties suivantes sont des parties stables de $(\mathbb{C}, +)$.

$$\mathbb{C}^+ = \{a + ib, (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2\}, A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}, \\ B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, A \cap \mathbb{C}^+, B \cap \mathbb{C}^+.$$

4. Soit B une partie de \mathbb{R} . Rappeler la définition de l'**image réciproque** $g^{-1}(B)$ de B par g .
5. Montrer que si B est **une partie stable** de \mathbb{R} , alors $g^{-1}(B)$ est une partie non vide.

Exercice 2 : (6-points)

Soient A l'anneau quotient $\frac{\mathbb{Z}}{31\mathbb{Z}}$.

1. Déterminer **tous les sous-groupes** du groupe additif $(A, +)$.
2. Déterminer le groupe multiplicatif $\mathcal{U}(A)$ de l'anneau A .
3. Déterminer le cardinal de $\mathcal{U}(A)$, **puis les cardinaux possibles de ses sous-groupes**.

Exercice 3 : (6-points)

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, effectuer la **division** suivant les puissances croissantes de

$$X^2 - 1, \text{ par } X^2 - X + 1 \text{ à l'ordre } 6.$$

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fractions rationnelle :

$$\frac{(X^9 - X^8 + X^7) + (X^2 - 1)}{(1 - X + X^2)X^6}$$