Licence 1 de MIAGE

TD : Suites et fonctions dérivables

Exercice 1 Répondre par Vrai ou Faux

1. La somme de deux nombres irrationnels est un irrationnel.
2. La somme d'un nombre irrationnel et d'un nombre rationnel est un irrationnel.
3. Entre deux nombres réels distincts, il existe toujours un rationnel.
4. Entre deux nombres rationnels distincts, il existe toujours un irrationnel.
5. L'ensemble des irrationnels est un intervalle de $\mathbb{R}$.
6. Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
7. Si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure M, alors tout réel m strictement inférieur à M appartient à A.

Exercice 2 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On pose

$$-A = \{-x \,:\, x \in A\}.$$

1. Si A est majorée, $-A$ est minorée et on a

$$\inf(-A) = -\sup A;$$

2. si A est minorée, $-A$ est majorée et on a

$$sup(-A) = -inf A.$$

3. si $A \subset \mathbb{R}_+^*$ alors

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}.$$

Exercice 3 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble

$$A + B = \{x + y \,:\, x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Montrer que :

1. si A et B sont majorées alors
   - $A + B$ est majorée et on a

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B;$$

   - $A \cup B$ est majorée et on a

$$\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$$

2. si A et B sont minorées alors
   - $A+B$ est minorée et on a

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B;$$

   $A \cup B$ est minorée et on a

$$\inf(A \cup B) = \inf(\inf A,\, \inf B).$$

Exercice 4 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f, g, h et i suivantes :

$$f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right) \quad h(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}} \quad i(x) = \arcsin(1-x^2).$$

Exercice 5 Les fonctions f et g suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad g(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 6

1. Montrer que l'application f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si g est une application continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0,$$

   alors g est bornée.

Exercice 7 Montrer que $\forall (a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$ on a

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}.$$

Exercice 8 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1. Etudier la dérivabilité de f.
2. Montrer que f définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.