Chapitre 1

Comparaison des fonctions - Développements limités

1.1 Comparaison locale des fonctions

On veut comparer des fonctions « quand x tend vers a ». Ici a pourra être un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Nous convenons ici que toutes les fonctions considérées sont définies au moins

- si $a \in \mathbb{R}$: sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a ;
- si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) : sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$).

On dit qu'une telle fonction f vérifie une propriété P ***au voisinage de*** $a \in \mathbb{R}$ lorsqu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que, pour tous les x de $I \cap D_f$, $f(x)$ vérifie P.
Dans le cas où $a = \pm\infty$, la définition est similaire avec un intervalle I de la forme $]M, +\infty[$ (resp. $]-\infty, M[$).

1.1.1 Fonctions équivalentes

Définition 1.1. *Soit f et g deux fonctions. On dit que $f(x)$* est équivalent à *$g(x)$* quand *x* tend vers *a quand il existe une fonction h telle que $f = gh$ et que $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a, ceci revient à dire que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*
On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

On n'oubliera pas de toujours préciser en quel point les fonctions sont équivalentes, ou du moins de le garder toujours présent à l'esprit.
Voici quelques exemples d'équivalents classiques :

$$\begin{array}{ccc}
e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x & \ell n\,(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x & ((1+x)^\alpha - 1) \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \\
\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x & \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x & (\cos x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2/2 \\
\sinh x \underset{x\to 0}{\sim} x & \tanh x \underset{x\to 0}{\sim} x & (\cosh x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} x^2/2
\end{array}$$

Exercice. Vérifier toutes ces équivalences à l'aide de la définition du nombre dérivé ou de la règle de l'Hospital. Comme illustration de la mise en garde sur la nécessité de préciser en quel point les équivalences ont lieu, vérifier également qu'aucune des équivalences ci-dessus n'a lieu quand x tend vers $+\infty$, sauf la troisième pour une seule valeur de α : préciser laquelle.

Voici quelques propriétés de l'équivalence.

Proposition 1.2. *1. L'équivalence de fonctions est une relation d'équivalence :*

- *$f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ (réflexivité)*
- *$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ entraîne $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ (symétrie)*
- *$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ entraînent $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ (transitivité).*

2. *Si* $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ *et* $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$*, alors* $(f_1f_2)(x) \underset{x\to a}{\sim} (g_1g_2)(x)$.
3. *Si* $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ *et* $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$*, et si* $g_2(x)$ *ne s'annule pas au voisinage de* a *(sauf peut-être en* a*), alors* $(f_1/f_2)(x) \underset{x\to a}{\sim} (g_1/g_2)(x)$.

Démonstration : Contentons nous ici de vérifier la troisième propriété. On suppose que $f_i(x) = h_i(x)g_i(x)$ avec $\lim_{x\to a} h_i(x) = 1$, pour $i = 1, 2$. Si $g_2(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f_2(x) = h_2(x)g_2(x)$ non plus. On a $(f_1/f_2)(x) = (h_1/h_2)(x) \times (g_1/g_2)(x)$, avec $\lim_{x\to a}(h_1/h_2)(x) = 1$. □

Exercice. Vérifier les autres propriétés de la proposition.

Exercice. Montrer que si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f(x)^n \underset{x\to a}{\sim} g(x)^n$.

Il faut **se méfier des sommes** : si on a $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, on n'a pas forcément $(f_1+f_2)(x) \underset{x\to a}{\sim} (g_1+g_2)(x)$. Par exemple on a $-x^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^3+x$ et $x^3+x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$, mais on n'a pas $x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$! !

On ne peut pas non plus **composer des équivalents**. Par exemple, on a $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$, mais e^x n'est pas équivalent à e^{x+1} quand x tend vers $+\infty$!

L'usage des équivalents (quand x tend vers a) permet de calculer certaines limites (en a). Par exemple, $x^2\left((1+x)^3-1\right) \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \times 3x = 3x^3$ et $\sin x\,.(1-\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} x \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$, et donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left((1+x)^3-1\right)}{\sin x(1-\cos x)} = 6.$$

Remarques.
- Deux fonctions équivalentes en a ont nécessairement le même signe sur un voisinage de a.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

1.1.2 Fonction négligeable devant une autre, dominée par une autre

Définition 1.3. *On dit que* $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ quand x tend vers a *s'il existe une fonction* ϵ*, telle que* $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ *et que* $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ *au voisinage de* a*. Si* g *ne s'annule pas au voisinage de* a*, sauf peut-être en* a*, ceci revient à dire que* $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = 0$*. On note* $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ *(on lit « f(x) est un petit o de g(x) »).*

La notation $f(x) = o(g(x))$ est un **abus de notation** (si on a aussi $h(x) = o(g(x))$, ce n'est pas pour cela que $f(x) = h(x)$). Mais elle est employée couramment. Comme cette notation risque d'induire en erreur, on a intérêt en cas de doute à revenir à l'écriture $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

Donnons quelques exemples. • $x^m = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ si et seulement si $m > n$.
• $x^m = \underset{x\to+\infty}{o}(x^n)$ si et seulement si $m < n$. • $\ell n\,(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice. Montrer que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

Définition 1.4. *On dit que* $f(x)$ est dominé par $g(x)$ quand x tend vers a *quand il existe une constante réelle* $K > 0$ *telle que* $|f(x)| \leq K\,|g(x)|$ *au voisinage de* a*. On écrit* $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ *(on lit « f(x) est un grand O de g(x) »).*

La notation $f(x) = O(g(x))$ est encore un abus.
Quelques exemples : $x\sin(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(x)$; $2x^3+15x^2 = \underset{x\to 0}{O}(x^2)$ et $2x^3+15x^2 = \underset{x\to+\infty}{O}(x^3)$.
On a aussi : $f(x) = \underset{x\to a}{O}(1) \Longleftrightarrow f$ est bornée au voisinage de a.

Exercice. Démontrer les propriétés suivantes (tout a lieu quand $x \to a$).

1. Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) = O(g(x))$.
2. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) = O(g(x))$.
3. Si $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) = O(h(x))$
4. Si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.
5. Si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors $(f_1 + f_2)(x) = o(g(x))$.
6. Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, alors $(f_1 f_2)(x) = o(g_1 g_2)(x)$.

Une erreur à ne pas faire : si $f(x) = o(g_1(x))$ et $f(x) = o(g_2(x))$ quand $x \to a$, on ne peut pas en déduire que $f(x) = o((g_1 + g_2)(x))$ quand $x \to a$. Par exemple, prendre $f(x) = x^3$, $g_1(x) = x^2 + x^3$, $g_2(x) = -x^2$ quand $x \to 0$.

Les notations o et O sont appelées notations de Landau (Edmund Landau (1877–1938), mathématicien allemand)

1.2 Développements limités

1.2.1 Formule de Taylor avec reste de Young

Théorème 1.5. *Soit a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. Soit f une fonction réelle définie et $n-1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. On suppose que f a une dérivée n-ième $f^{(n)}(a)$ en a. Alors, pour $a + h \in I$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,h^n + h^n \epsilon(h) \qquad \textit{avec} \qquad \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

Ou encore,

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x) \qquad \textit{avec} \qquad \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0.$$

Le « reste » $h^n \epsilon(h)$ s'appelle reste de Young, et la formule du théorème est la *formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en a*. Avec la notation du petit o, le reste peut aussi s'écrire $\underset{h \to 0}{o}(h^n)$ ou $\underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$. A l'ordre 1, la formule s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h) \quad \text{avec} \; \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

C'est simplement écrire que f a pour dérivée $f'(a)$ en a. La formule de Taylor avec reste de Young en a donne des renseignements sur le comportement de la fonction quand la variable tend vers a, comme la formule pour la dérivée en a qu'elle généralise.

Démonstration : Posons, pour $x \in I$,

$$g(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,(x-a)^{n-1}.$$

(g n'est autre que le polynôme de Taylor de f en a à l'ordre $(n-1)$.)

On vérifie que $g(a) = f(a)$ et que $g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

Fixons $x \in I \backslash \{a\}$ (que devient la formule pour $x = a$?) et posons, pour $t \in I$,

$$\Phi(t) = f(t) - g(t) - A\,(t-a)^n \text{ où } A \text{ est une constante (vis à vis de } t).$$

La fonction Φ est $n-1$ fois dérivable sur I. On constate que $\Phi(a) = \Phi'(a) = \ldots = \Phi^{(n-1)}(a) = 0$. On choisit alors A en sorte que $\Phi(x) = 0$ ce qui revient alors à poser $A = \dfrac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n}$. D'après le théorème de Rolle (Que dit ce théorème ? Quelles en sont les hypothèses ? Sont-elles vérifiées ici ?), il existe c_1 entre a et x tel que $\Phi'(c_1) = 0$. De nouveau d'après le théorème de Rolle, il existe c_2 entre a et c_1 tel que $\Phi''(c_2) = 0$. En continuant ainsi, on trouve c_{n-1}, entre a et x, tel que $\Phi^{(n-1)}(c_{n-1}) = 0$. Comme

$$\Phi^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a) - A\, n!(t-a),$$

on obtient

$$\frac{f^{(n-1)}(c_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{(c_{n-1}-a)} = An!.$$

Quand x tend vers a, c_{n-1} qui est coincé entre a et x tend vers a. Comme $f^{(n-1)}$ est dérivable en a, on a alors $A.n! \xrightarrow[x\to a]{} f^{(n)}(a)$ ce qui permet d'écrire

$$A = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\epsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \epsilon_1(x) = 0.$$

En reportant dans l'expression choisie de A, on obtient bien

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \epsilon(x) = \frac{\epsilon_1(x)}{n!} \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

□

Les hypothèses que l'on a données visent à avoir un énoncé le plus général possible. Dans la pratique, on a souvent à écrire une formule de Taylor-Young en a pour une fonction f qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert contenant a. Dans ce cas, les hypothèses du théorème 1.5 sont bien sûr vérifiées.

Exemples. En $a = 0$, la formule de Taylor avec reste de Young s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Pour $f : x \longmapsto e^x$ (qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$), on a $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout k, et la formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit :

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ .}$$

Pour $f : x \longmapsto \sin x$, les valeurs en 0 de la fonction et de ses dérivées successives sont $0, 1, 0, -1$ et puis on recommence. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $2n$ en 0 s'écrit

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).}$$

Pour $f : x \longmapsto \cos x$, les valeurs en 0 de la fonction et de ses dérivées successives sont $1, 0, -1, 0$ et puis on recommence. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $2n+1$ en 0 s'écrit

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\ .}$$

Soit α un nombre réel. Alors $f(x) = (1+x)^\alpha$ définit une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, et $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\ .}$$

1.2.2 Développements limités

Définition 1.6. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant a. On dit que f admet un* ***développement limité à l'ordre*** n ***en*** a *s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que*

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \epsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n$ s'appelle la ***partie régulière*** *de ce développement limité.*

Remarques.
• Un développement limité de f à l'ordre n nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui « se comporte comme f à l'ordre n » au voisinage de a, dans le sens que la différence entre $f(a+h)$ et ce polynôme en h est négligeable devant h^n quand h tend vers 0.
• Si la fonction f est $n-1$ fois dérivable sur un intervalle contenant a et a une dérivée n-ième en a, la formule de Taylor-Young nous donne un développement limité à l'ordre n, avec $a_0 = f(a)$ et $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ pour $1 \leq k \leq n$.
• Réciproquement, on peut se demander si un développement limité est toujours donné par une formule de Taylor-Young, c.-à-d. si une fonction qui a un développement limité à l'ordre n en a a une dérivée n-ème en a. C'est vrai à l'ordre 1, et dans un développement limité

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

on a toujours $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$. Mais ceci ne va plus à l'ordre 2. Considérons par exemple la fonction $f : x \longmapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x)$. où l'on pose $f(0) = 0$.
f a un développement limité à l'ordre 2 en 0 : $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$. En effet, on a $x^3 \sin(1/x) = x^2 . x \sin(1/x)$ avec $|x \sin(1/x)| \leq |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. On vérifie d'autre part que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x) = 1 + x(2 - \cos(1/x)) + 3x^2 \sin(1/x), \text{ et } f'(0) = 1$$

et f n'a donc pas de dérivée seconde en 0 car

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x) - 1}{x} = 2 - \cos(1/x) + 3x \sin(1/x)$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Exemple. Pour tout réel $x \neq 1$ on a $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ (souvenez vous de la somme des termes d'une suite géométrique...) et on en déduit le développement limité en 0

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).}$$

Introduisons une notation qui sera utile pour la suite. Si P est un polynôme, on désignera par $T_k(P)$ (le ***tronqué*** de P au degré k) le polynôme obtenu à partir de P en ne conservant que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à k. Par exemple $T_4(x - x^3/3 + 2x^5) = x - x^3/3$.

Proposition 1.7. *1) Un développement limité, lorsqu'il existe, est unique.*
2) Si f a un développement limité à l'ordre n en a, de partie régulière P, et si $k \leq n$, alors f a aussi un développement limité à l'ordre k, dont la partie régulière est le tronqué $T_k(P)$.

Démonstration : 1) Si on a

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \epsilon(h) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + h^n \varphi(h),$$

avec $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$, alors, pour tout k de $\{0, 1, \cdots, n\}$

$$\frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \cdots + (a_n - b_n)h^n}{h^k} = h^{n-k}(\varphi(h) - \varepsilon(h))$$

ce qui, en donnant successivement à k les valeurs $0, 1, \cdots, n$ et en faisant tendre h vers 0, entraîne $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$ et donc aussi $\epsilon(h) = \varphi(h)$.

2) Avec les mêmes notations, $f(a+h) = a_0+a_1h+\cdots+a_kh^k+[a_{k+1}h^{k+1}+\cdots+a_nh^n+o(h^n))]$, et le terme entre crochet est $h^k[a_{k+1}h + \cdots + a_nh^{n-k} + o(h^{n-k}))] = \underset{x\to 0}{o}(h^k)$. □

Voici maintenant une remarque dont il est utile de se souvenir pendant les calculs

Proposition 1.8. *La partie régulière du développement limité en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) est un polynôme pair (resp. impair), c.-à-d. qu'il ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de la variable.*

Démonstration : Si f est paire et si, en 0

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

alors en changeant x en $-x$ on obtient

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1x + \cdots - a_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

d'où par unicité du dévelopement limité, $a_1 = -a_1, \ldots, a_{2n+1} = -a_{2n+1}$ et donc

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

□

Par exemple, la partie régulière du développement limité de $\sin x$ en 0 ne contient que des puissances impaires.

1.2.3 Opérations sur les développements limités

Dans tout ce paragraphe, nous ne considérerons que des développements limités en 0.

Proposition 1.9 (Somme et produit)**.** *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités **au même ordre** n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n),$$

alors $f + g$ et fg ont aussi un développement limité à l'ordre n en 0 et on a :

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n)\\ (fg)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (\sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i})x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité de la somme est la somme des parties régulières de chacun des développements limités, et celle du produit est le tronqué au degré n du produit des parties régulières (tous les développements limités étant au même ordre n).

Démonstration : Le premier point est clair puisque $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$ (et oui, il s'agit bien d'un abus d'écriture !).

Pour le produit, on écrit $f(x) = A(x) + o(x^n)$ et $g(x) = B(x) + o(x^n)$ et on a alors $f(x)g(x) = A(x)B(x) + [A(x) + B(x) + o(x^n)]o(x^n)$ et on conclut en remarquant que d'une part $A(x)B(x) = T_n[A(x)B(x)] + o(x^n)$ et d'autre part $[A(x) + B(x) + o(x^n)]o(x^n) = o(x^n)$ (toujours pour x tendant vers 0). $\square$

Exemples.

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))^2 = 1 - x^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{24}\right) x^4 + o(x^5) \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\end{aligned}$$

Quand on fait le produit des parties régulières (ou qu'on élève au carré, comme ici), il n'est bien entendu pas besoin de calculer les termes dont le degré dépasse l'ordre du développement limité. Il est bon aussi de se souvenir d'éventuelles propriétés de parité (par exemple dans le cas d'un carré). Ici, on aurait aussi pu utiliser $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.

Il se peut que l'on gagne des ordres dans le développement limité du produit. Par exemple, pour avoir le développement limité de $\sin^3 x$ à l'ordre 6, on peut faire

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = x^3 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^3 \\ &= x^3 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^6)\end{aligned}$$

Il est quelquefois utile, comme ici, de mettre des puissances de x en facteur, en se souvenant que $o(x^{d+e}) = x^d o(x^e)$ (toujours quand x tend vers 0, bien sûr).

Conséquence. La partie régulière du développement limité de la partie paire d'une fonction f (définie comme $(f(x) + f(-x))/2$) est la partie paire de la partie régulière du développement limité de $f(x)$. De même pour la partie impaire. En partant de e^x, ceci nous donne

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})\end{aligned}}$$

Proposition 1.10 (Substitution)**.** *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités **au même ordre** n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n),$$

***et si g(0)=0** alors $f(g(x))$ a un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière s'obtient en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans*

$$a_0 + a_1(b_1 x + \cdots + b_n x^n) + \cdots + a_n(b_1 x + \cdots + b_n x^n)^n.$$

Autrement dit, si $A(x)$ est la partie régulière du développement limité de $f(x)$ et $B(x)$ ($B(0) = 0$) celle de $g(x)$, alors la partie régulière du développement limité de $f(g(x))$ est le tronqué $T_n(A(B(x)))$.

Démonstration : Comme $B(0) = 0$, on peut écrire $B(x) = xB_1(x)$ où B_1 est un polynôme. Mais alors $\underset{x\to 0}{o}(g(x)^n) = g(x)^n \epsilon(g(x)) = x^n.[B_1(x) + \underset{x\to 0}{o}(1)]^n \epsilon(g(x))$ avec $\lim_{X\to 0} \epsilon(X) = 0$ et donc $\underset{x\to 0}{o}(g(x)^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

Par ailleurs, pour tout $k \leq n$, on a $g(x)^k = (B(x) + o(x^n))^k = B(x)^k + o(x^n)$. Donc

$$f(g(x)) = A(B(x) + o(x^n)) + o(g(x)^n) = A(B(x)) + o(x^n) = T_n(A(B(x))) + o(x^n).$$

$\square$

Il faut bien prendre garde à la condition $g(0) = 0$ quand on substitue. La démonstration montre qu'elle est nécessaire pour garder un contrôle sur le reste après substitution. Par exemple, pour calculer le développement limité de $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3, si on écrit

$$e^{\cos x} = 1 + (1 - x^2/2) + \frac{(1 - x^2/2)^2}{2!} + \frac{(1 - x^2/2)^3}{3!} + o(x^3) = \frac{8}{3} - \frac{5}{4}x^2 + o(x^3),$$

ON A TOUT FAUX ! En effet, $\cos 0 = 1 \neq 0$. Le calcul correct est

$$e^{\cos x} = e\left(e^{\cos x - 1}\right) = e(1 + (-x^2/2) + o(x^3)) = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3).$$

On constate ici que l'on gagne même en précision : on a déjà le développement limité à l'ordre 3 en substituant $\cos x - 1$ dans le développement limité à l'ordre 1 de e^x. Ceci vient du fait que $\cos x - 1 = O(x^2)$ quand $x \to 0$. Dans le même ordre d'idée, la partie régulière du développement limité de $f(x^2)$ à l'ordre $2n + 1$ en 0 s'obtient en substituant x^2 à x dans la partie régulière du développement limité de $f(x)$ à l'ordre n.

Proposition 1.11 (Quotient)**.** *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités **au même ordre** n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n),$$

***et si g(0)≠0** alors f/g a aussi un développement limité à l'ordre n.*

Démonstration : Sous ces hypothèses, il suffit d'écrire

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{b_0}\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{b_1}{b_0}x + \cdots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)\right)}$$

puis d'utiliser le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1+X}$ et les propositions précédentes. □

Exemple. Calcul du développement limité à l'origine de $\tan x$ à l'ordre 6. On se souvient que tan est impaire (il y aura des termes en x, x^3 et x^5 uniquement).
On écrit $\tan x = \sin x . \dfrac{1}{\cos x}$ avec $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)$ et $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$.
On a alors $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)}$. On part alors du développement de $\dfrac{1}{1-X}$ en 0 à l'ordre 2 $\dfrac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^2\varepsilon(X)$ et on applique le théorème de substitution : $\dfrac{1}{\cos x} = T_4\left(1 + (\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}) + (\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24})^2\right) + o(x^4) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$. Par parité, ce développement est aussi un développement à l'ordre 5. Enfin, on utilise le théorème sur le produit pour obtenir $\tan x = T_5\left((x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!})(1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24})\right) + o(x^5)$.
On obtient finalement la formule (qu'il n'est pas mauvais de connaître par coeur)

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)}$$

Proposition 1.12 (Intégration)**.** *Si f a un développement limité à l'ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

et si F est une primitive de f définie sur un intervalle ouvert contenant 0 ($F' = f$), alors $F(x)$ a un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0, qui est

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité à l'ordre $n+1$ d'une primitive est une primitive de la partie régulière du développement limité à l'ordre n.

Démonstration : Posons

$$B(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \qquad G(x) = F(x) - B(x).$$

G est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0,

$$G'(x) = f(x) - (a_0 + \cdots + a_n x^n) = o(x^n) = x^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$, et $G(0) = 0$. Donc, d'après le théorème des accroissement finis, $G(x) = xG'(\theta x)$ avec θ dépendant de x, $0 < \theta < 1$. Ainsi

$$G(x) = x(\theta x)^n \epsilon(\theta x) = x^{n+1}\theta^n \epsilon(\theta x) = o(x^{n+1}),$$

car $\lim_{x\to 0} \theta^n \epsilon(\theta x) = 0$. Au total,

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

□

Exemples. • Ainsi, de $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ on obtient par intégration

$$\boxed{\ell n\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).}$$

• De $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$ on tire par intégration

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).}$$

Exercice. Calculer le développement limité à l'ordre 5 de arcsin en 0.

Corollaire 1.13 (Dérivation)**.** *Si f a un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

si f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 et si sa dérivée f' a un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0, celui-ci est : $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$.

Démonstration : On écrit le développement limité $f'(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$, et on utilise la proposition précédente qui nous donne

$$f(x) = f(0) + b_0 x + \frac{b_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n}x^n + o(x^n),$$

et on identifie pour conclure avec $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$. □

On est obligé dans l'énoncé de mettre comme hypothèse l'existence du développement limité de f' à l'ordre $n-1$. Ceci ne vient pas automatiquement, comme le montre l'exemple donné plus haut d'une fonction qui a un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais qui n'est pas deux fois dérivable. Sa dérivée n'a pas de dérivée en 0, ce qui veut dire qu'elle n'a pas de développement limité d'ordre 1.

Application des Développements limités

Calculer des limites.

Généralement sont des limites de forme indéterminée. Il est toujours possible, avec un changement de variable, de se ramener à une limite quand x tends vers 0.

Exemples.

(1) Calculer $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}). \tan(x)$.

On voit que cette limite est de la forme indéterminée $0.\infty$. On pose $X = x - \frac{\pi}{2}$, pour se ramener à une limite quand X tends vers 0. Alors on a

$$(x - \frac{\pi}{2}). \tan(x) = X \tan(X + \frac{\pi}{2}) = X \frac{\sin(X + \frac{\pi}{2})}{\cos(X + \frac{\pi}{2})} = X \frac{1}{\tan(X)}.$$

On connait le DL de $\tan(X)$ en 0

$$\tan(X) = X + \frac{X^3}{3} + X^3 \varepsilon(X),$$

en remplçant on a

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}). \tan(x) = \lim_{X \to 0} X \frac{1}{\tan(X)} = \lim_{X \to 0} \frac{1}{1 + \frac{X^2}{3} + X^2 \varepsilon(X)} = 1.$$

(2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}})$.

On pose $X = \frac{1}{x}$. Alors on a $x \to +\infty$ ssi $X \to 0$.

On a

$$x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}) = \frac{1}{X^2} (e^X - e^{\frac{X}{1+X}}).$$

Il suffit de calculer le DL de $\frac{1}{X^2}(e^X - e^{\frac{X}{1+X}})$ à un certian ordre en 0. Comme $\frac{1}{X^2}$ figure on devine qu'on doit calculer un DL de $(e^X - e^{\frac{X}{1+X}})$ au moins à l'ordre 2. Calculons le DL à l'ordre 2. Le seul problème se pose pour la fonction $e^{\frac{X}{1+X}}$. Comme c'est une fonction composé on va utiliser la composition des DL. On a

$$\frac{X}{1+X} = X - X^2 + X^2 \varepsilon_1(X)$$

$$e^Y = 1 + Y + \frac{Y^2}{2} + Y^2 \varepsilon_2(Y)$$

En remplçant et après calcul on a

$$e^{\frac{X}{1+X}} = 1 + X - \frac{1}{2} X^2 + X^2 \varepsilon_3(X).$$

Donc $\frac{1}{X^2}(e^X - e^{\frac{X}{1+X}}) = \frac{1}{X^2}[1 + X + \frac{X^2}{2} - (1 + X - \frac{1}{2}X^2) + X^2 \varepsilon_4(X)] = 1 + \varepsilon_4(X)$, par conséquent $\lim_{x \to +\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}) = 1$.

Position de la courbe par rapport à une tangente.

On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon_1(x),$$

avec $n \geq 2$. Cela implique que f (où son plongement si f n'est pas définie en x_0), est continue et dérivable en x_0, avec $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$. Donc l'équation de la tangente est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$. Par conséquent le signe de $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ se déduit, au voisinage de x_0, du signe de

$$a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon_1(x).$$

Soit m le plus petit entier tel que $a_m \neq 0$. Alors on a

• si m est pair alors le signe de $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ est **localement** de même signe que a_m et on a

(1) si $a_m > 0$ alors $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \geq 0$ localement et donc la courbe est localement "au-dessus" de sa tangente.

(2) si $a_m < 0$ alors $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \leq 0$ localement et donc la courbe est localement "en-dessous" de sa tangente.

• si m est impair alors la courbe traverse la tangenet en $(x_0, f(x_0))$, c'est une tangenet d'inflexion.

Position de la courbe par rapport à une asymptote.

On suppose que f admet une asymptote d'équation $y = a_0x + a_1$. Pour trouver a_0 et a_1 on sait qu'on doit calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ qui doit être égale à a_0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - a_0x$ qui doit être égale à a_1.

Pour trouver a_0 et a_1 en utilisant la méthode des DL on calcule le DL à l'ordre 1 en 0 de la fonction $Xf(\frac{1}{X})$ (autrement dit en fait le changement de variable $X = \frac{1}{x}$).

Si $Xf(\frac{1}{X}) = a_0 + a_1X + X\varepsilon(X)$ en 0, en remplçant on a

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + a_1\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}),$$

au voisinage de $+\infty$. On voit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a_0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - a_0x = a_1$.

Pour connaitre la position de la courbe par rapport à l'asymptote, on doit calculer un DL d'ordre supérieur de $Xf(\frac{1}{X})$ en 0. Si

$$Xf(\frac{1}{X}) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n + X^n\varepsilon(X),$$

en 0, en remplçant on a

$$f(x) - a_0x + a_1 = a_2\frac{1}{x} + \cdots + a_n\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-1}}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$

Soit m le plus petit entier tel que $a_m \neq 0$. Alors

• si $a_m > 0$ alors $f(x) - (a_0x + a_1) \geq 0$ donc la courbe est "au-dessus" de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

• si $a_m < 0$ alors $f(x) - (a_0x + a_1) \leq 0$, donc la courbe est "en-dessous" de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.