

UNIVERSITÉ FÉLIX HOUPOUET-BOIGNY
UFR MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Examen de la première session du Logiciel R

MIAGE (L1)	Durée du sujet : 2 heures
LOGICIEL R	Année 2022-2023
	Documents non autorisés
Juin 2023	Outils informatiques autorisées

Les 3 exercices sont indépendants. Rédiger avec soin.

EXERCICE 1 1. Créer une fonction qui pour un couple donné $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$, évalue le maximum de l'erreur commise lorsque l'on approche la loi binomiale par la loi de Poisson

$$M_{np} = \max_{k=0, \dots, n} |P(X_n = k) - P(Y_n = k)|$$

où X_n suit une loi binomiale de paramètre (n, p) et Y_n suit une loi de poisson de paramètre np .

2. Pour $p = 1/2$, donner un code R qui représente graphiquement l'erreur en fonction de n .
3. Pour $n = 40$, donner un code R qui représente graphiquement l'erreur en fonction de p .

EXERCICE 2 (Sans utiliser les boucles FOR)

1. On se donne $x = (x_1, \dots, x_n)$ une séquence de longueur n .
(a) Construire une fonction qui a pour paramètre d'entrée x et retourne le scalaire

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

- (b) Donner le code R qui construit une fonction qui a pour paramètre x et retourne le vecteur (S_1, \dots, S_n) .
 - (c) Donner le code R qui représente graphiquement (S_1, \dots, S_n) pour le vecteur x constitué de nombres aléatoires indépendamment suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
2. Soit $N = (N_{ij})$ une matrice. On note N_i la somme des termes de la i -ème ligne, N_j la somme des termes de la j -ème colonne et n la somme de la matrice. Construire une fonction qui retourne la quantité suivante

$$\sum_i \sum_j \frac{N_{ij} - \frac{N_i N_j}{n}}{\frac{N_i N_j}{n}}. \quad (1)$$

3. Pour la matrice N suivante,

$$N = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

donnez la valeur de la somme (1).

EXERCICE 3 Pour $n = 100$, $p = 0.5$,

1. Simuler un échantillon de n variables aléatoires de Bernoulli, de paramètre p ;
 - (a) en utilisant la fonction `rbinom`
 - (b) en utilisant la fonction `runif`
 - (c) en utilisant la fonction `sample`
2. Calculer les fréquences de 0 et de 1 dans l'échantillon,
 - (a) en utilisant la fonction `sum`
 - (b) en utilisant la fonction `which`
 - (c) en utilisant la fonction `table`
3. Représenter les fréquences de 0 et de 1 par un diagramme en barres (fonction `barplot`). Représenter par un double diagramme en barre, les fréquences empiriques de 0 et de 1 en bleu et les probabilités théoriques $(1-p)$ et p en rouge.
4. Utiliser votre échantillon pour simuler n parties d'un jeu de pile et face où la probabilité de gagner 1 euro est p , la probabilité de perdre 1 euro est $1-p$. Calculer les valeurs successives de la fortune d'un joueur dont la fortune initiale est nulle (fonction `cumsum`).

1.

a) `rbinom(x, n, p)`

b) `runif(100, 0, 1)`

c)

`sample(c(0,1), 100, replace = true, prob = c(1-0.5, 0.5))`

Yann 4/27