UNIVERSITE **FHB** | Année
U.F.R.Maths-Info | 2021-2022

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL
MIAGE L1
Première Session
Durée : 1 H 30

EXERCICE 1 (5 points)

Pour chaque affirmation suivante, répondre par **VRAI** ou **FAUX**

NB : Un bonus de **+0.25** est accordé pour une réponse justifiée

1. $\forall A,\, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$;
2. $\forall A,\, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(BA)$;
3. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = p.\det(A)$;
4. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda.\det(A)$;
5. $\forall A \in M_{2n}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(-A) = \det(A)$

EXERCICE 2 (15 points)

Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, et $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. a. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, justifier puis déterminer son inverse.

b. Calculer $M = A - xI_3$.

c. Calculer $P(x) = det(M)$.

d. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

2. a. Calculer $-A^3 + 3A^2 + 16A + 12I_3$.

b. En déduire l'existence d'une matrice P telle que $AP = I_3$.

c. Donner une écriture de P sous forme de matrice.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) suivant :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x + 5y + 3z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

Courage, ça peut aller maintenant !

Proposition de résolution

EXAMEN DE CALCUL MATRICIEL

MIAGE L1

Première Session

(2021-2022)

EXERCICE 1

NB : Un bonus de +0,25 est accordé pour une réponse justifiée.

1. $\forall A,\, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$; **FAUX**

Car avec $\det\left(I_2 + (-I_2)\right) = 0 \neq \det I_2 + \det\left(-I_2\right) = 1 + 1 = 2$

2. $\forall A,\, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(BA)$; **VRAI,**

car la multiplication est commutative dans $\mathbb{R}$.

3. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = p.\det(A)$; **FAUX**,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left(A\right) = -1\,;$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left(A^2\right) = 1 \neq 2 \times \det\left(A\right) = 2 \times (-1) = -2$$

4. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda.\det(A)$; **FAUX**,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(2A\right) = -4 \neq -2 = 2 \times (-1) = 2 \times \det\left(A\right).$$

5. $\forall A \in M_{2n}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(-A) = \det(A)$ **VRAI**

car $\det(-A) = (-1)^{2n}\det(A) = \det(A)$.

EXERCICE 2

Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. a. La matrice A est-elle inversible ?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left(A\right) = 12 \Rightarrow A \text{ est inversible}$$

d'inverse : $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

b. Calculons $M = A - xI_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} -x-1 & 1 & 1 \\ 3 & 5-x & 3 \\ 1 & 1 & -x-1 \end{bmatrix},$$

c. Calculons $P(x) = det(M) = -x^3 + 3x^2 + 16x + 12 = -\left(x-6\right)\left(x+2\right)\left(x+1\right)$.

d. Résolvons l'équation $P(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-6)(x+2)(x+1) = 0 \Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \{6, -2, -1\}$.

2. a. Calculons :

$-A^3 + 3A^2 + 16A + 12I_3$

$$= -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^3 + 3\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^2 + 16\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-A^3 + 3A^2 + 16A + 12I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. On a

$-A^3 + 3A^2 + 16A + 12I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow A^3 - 3A^2 - 16A - 12I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$\Leftrightarrow A(A^2 - 3A - 16I_3) = 12I_3 \Leftrightarrow A\left(\dfrac{1}{12}(A^2 - 3A - 16I_3)\right) = I_3 = AP$

où $P = \dfrac{1}{12}(A^2 - 3A - 16I_3)$.

c. On a $P = \dfrac{1}{12}(A^2 - 3A - 16I_3)$

$$P = \frac{1}{12}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 16\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = A^{-1} \text{ car } P - A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}^3$:

le système (S) suivant :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3x + 5y + 3z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}\right)\right\}$.