

Examen (session 1)**Durée : 2 h 30 mn**

–

Exercice 1 (2 points)

Enoncer le théorème de Rolle.

Exercice 2 (6 points)Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f (sans préciser l'ensemble de dérivabilité de f).

Exercice 3 (6 points)On considère la fonction f définie par $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1. Donner le développement limité en 0, à l'ordre 2, de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.
2. En déduire la limite quand x tend vers 0 de $f(x)$.

Exercice 4 (6 points)Soit $(u_n)_n$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Déterminer, pour tout entier n , l'expression de u_n en fonction de n .
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.