

Estudio del péndulo con mecánica de Lagrange

DANIEL ROBERTO GARCIA MIRANDA

Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés

Junio del 2025

Resumen

En esta práctica se construyeron un péndulo físico simple y uno doble, a los cuales se realizaron 3 tipos de análisis de movimiento. El primero consistió en medir los tiempos de media oscilación con sensores IR, previamente programados en Arduino, con estos se estimó las posiciones y velocidades angulares de los péndulos simples y se observó su comportamiento. El análisis siguiente consistió en calcular sus ecuaciones de movimiento con el formalismo lagrangiano, para resolverlas numéricamente utilizando Simulink-MATLAB, esto para ambos péndulos con condiciones iniciales diferentes. Por último utilizando el software Tracker, se analizó un video del movimiento del péndulo doble con condiciones iniciales de 0° y 90° , para comparar las posiciones y velocidades con los de la simulación.

I. Introducción

I. Mecánica Lagrangiana

La formulación más general de la ley de los sistemas mecánicos es el principio de mínima acción (o principio de Hamilton). Según este principio, todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Siendo q_i y \dot{q}_i las coordenadas y velocidades generalizadas [2].

Dado un sistema mecánico descrito por N coordenadas generalizadas dinámicas nombradas como $q_k(t)$, con $k = 1, 2, \dots, N$, definimos la acción $S[q_k(t)]$ como un funcional de la integral temporal de la lagrangiana, desde un tiempo inicial t_a hasta un tiempo final t_b :

$$S[q_k(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

Se entiende que la partícula empieza en alguna posición definida $(q_1, q_2, \dots)_a$ en un tiempo t_a y termina en alguna posición $(q_1, q_2, \dots)_b$ en

un tiempo t_b . Luego proponemos que, las trayectorias $q_k(t)$ donde S es estacionaria, es decir cuando:

$$\delta S[q_k(t)] = \delta \int_{t_a}^{t_b} dt L(q_k, \dot{q}_k, t) = 0$$

los $q_k(t)$ satisfacen la ecuación de movimiento del sistema descrito por las condiciones de contorno t_a y t_b . Esta proposición fue enunciada por el irlandés matemático y físico William Rowan Hamilton (1805-1865), y es conocida como el principio de Hamilton.

Del principio de Hamilton se deduce las N ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Estas son las ecuaciones de movimiento del sistema [1].

II. Simulink Matlab

Simulink es un entorno de diagramas de bloques para simulación multidominio y diseño basado en modelos. Ofrece soporte para el diseño

en nivel de sistema, la simulación, la generación automática de código, y las pruebas de verificación continuas de sistemas embebidos. Proporciona un editor gráfico, bibliotecas de bloques personalizables y solvers para modelar y simular sistemas dinámicos. Se integra con MATLAB, lo que permite incorporar algoritmos de MATLAB en modelos y exportar los resultados de simulación a MATLAB para posterior análisis.

III. Tracker

Tracker es una herramienta gratuita de análisis y modelado de video basada en el framework Java OSP. Esá diseñada para su uso en la enseñanza de la física. Su uso principal es en el análisis de video, puede combinar videos y modelarlos por computadora.

En esa práctica se montó un péndulo físico simple y uno doble, con los cuales, se analizó su movimiento con diferentes condiciones iniciales. Con sensores IR y arduino, se registró periodos de oscilaciones de diferentes puntos del péndulo, con simulink se simuló su trayectoria y con Tracker graficó su movimiento exacto.

II. Metodología

El péndulo doble se construyó sobre un soporte ya armado, se desarrollo un circuito conformado por un emisor y receptor IR con Arduino, esto para registrar el periodo de media oscilación de dos puntos del péndulo, el superior y el inferior, figura 1



Figura 1: Montaje experimental, se muestra el péndulo, puede ser doble o simple, en el punto más alto (donde esta el eje de rotación) y en el punto más bajo, se coloca el sensor.

El programa en Arduino toma la señal digital que proviene del receptor, bajo cierto preescalado en el programa cuenta las señales digitales con 1MHz de frecuencia (Arduino nativo cuenta con 16MHz). Y nos arroja el número de señales digitales recibidas; cuando el péndulo no está pasando sobre el sensor, el receptor recibe la señal del emisor, y cuando el péndulo pasa, el receptor ya no recibe la señal del emisor. De esta forma se distinguen estos dos tiempos T1 y T2, cuya suma es la de medio periodo de oscilación T.

Con otro programa en Python se extrajeron estos datos del puerto serial. En total se hicieron diferentes pruebas para diferentes valores iniciales, como: péndulo simple a 30, 45, 60 grados; péndulo doble con ambos a 45 grados y el de arriba a 0° y el segundo a 90°.

En Simulink, se introducen las ecuaciones de movimiento del sistema, calculadas con el formalismo lagrangiano, para simular las trayectorias de los péndulos.

Y por último, mientras se realizaban las pruebas, se grabó cada una para analizar las coordenadas del péndulo, de manera que podamos comparar las coordenadas con las predichas por los datos y las simuladas.

III. Análisis de resultados

El resultado de calcular las ecuaciones de movimiento mediante lagrangianas, para el péndulo

simple es:

$$\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + \frac{Mgl}{I} \sin(\theta) = 0$$

Donde M es la masa del péndulo físico, g la gra-

vedad, l la distancia del centro de masa al eje de rotación, I la inercia y B el amortiguamiento, para las simulaciones se tomará uno muy bajo, ya que nos interesa observar las oscilaciones de los péndulos.

Para el péndulo doble, las ecuaciones de movimiento son:

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 = -m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\theta_1) - c_1\dot{\theta}_1$$

$$m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 = m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2gl_2 \sin(\theta_2) - c_2\dot{\theta}_2$$

Con c1 y c2 como las constantes de amortiguamiento.

Estas ecuaciones se las coloca en simulink, para el péndulo simple, solamente se despeja $\dot{\theta}$ y mediante integradores se calcula θ y $\dot{\theta}$, figura 2 y código 1:

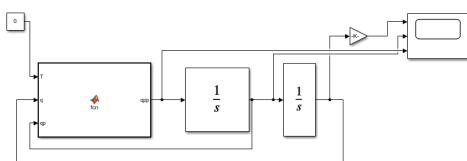


Figura 2: Diagrama de bloques en simulink, los integradores nos devuelven θ y $\dot{\theta}$ y las salidas se visualizan en el scope.

Para el péndulo doble se escribieron las ecua-

ciones como matrices y vectores, el vector resultado nos devuelve $\ddot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_1$, y $\ddot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_2$. Con un integrador, veremos las coordenadas y velocidades generalizadas, figura 3 y código 2:

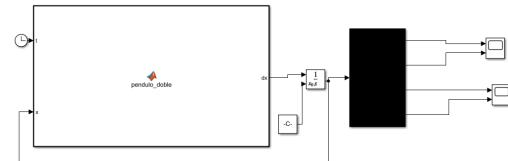


Figura 3: Diagrama de bloques para el péndulo doble, solo hay un integrador con condiciones iniciales, las salidas van a dos scopes, uno para cada par de coordenada y velocidad generalizada.

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\theta_1) - c_1\dot{\theta}_1 \\ m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2gl_2 \sin(\theta_2) - c_2\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, utilizando los tiempos T1 y T2 de los sensores IR, graficaremos estos tiempos en función del tiempo. Con el periodo $T=T_1+T_2$ reconstruiremos la posición y velocidad angular utilizando la solución del péndulo simple $\theta = \theta_0 \sin(wt)$.

Se utilizó tracker para analizar el video del

péndulo doble con valores iniciales $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 90$, ya que, a comparación de los demás, éste no presenta comportamientos senoidales y puede llegar a presentar comportamientos caóticos.

En total, con las simulaciones, reconstrucciones con los datos y tracker, se obtuvieron las siguientes figuras:

I. Péndulo simple a 30°

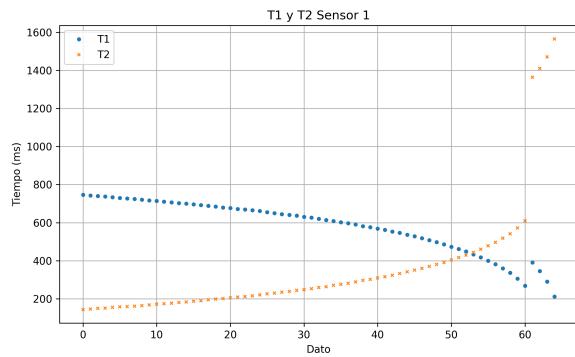


Figura 4: Comparación de los tiempos T1 y T2 para el sensor superior.

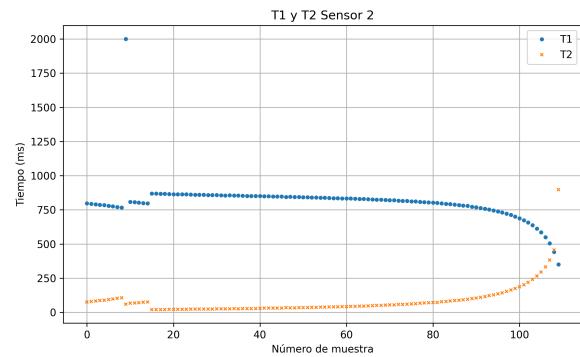


Figura 5: Comparación de los tiempos T1 y T2 para el sensor inferior.

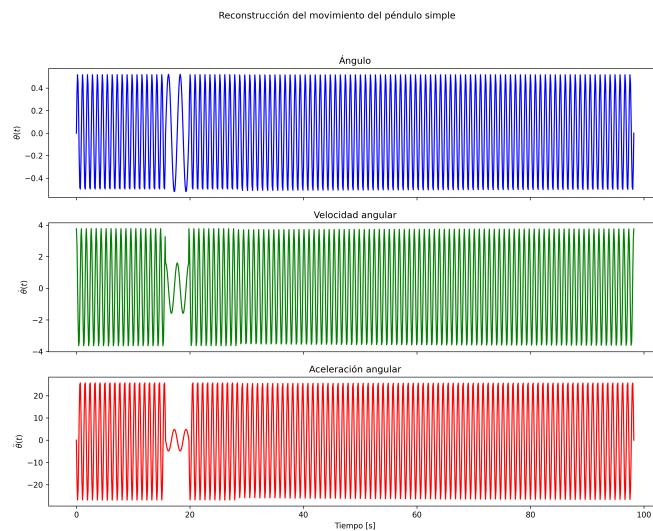


Figura 6: Ángulo, velocidad angular y aceleración angular calculadas con los períodos.

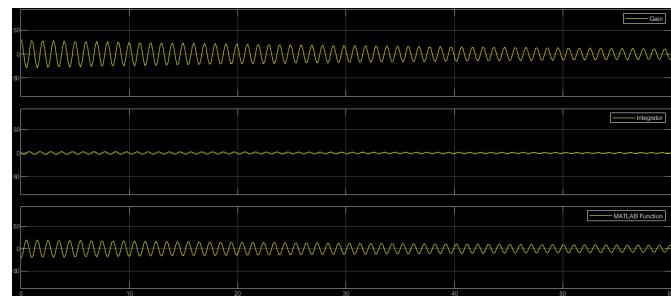


Figura 7: Ángulo, velocidad angular y aceleración angular calculadas con la simulación.

II. Péndulo simple a 45°

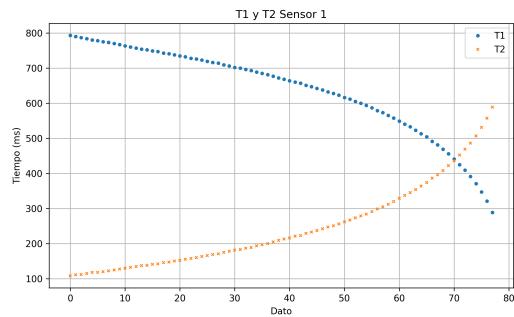


Figura 8: Comparación de los tiempos T1 y T2 para el sensor superior.

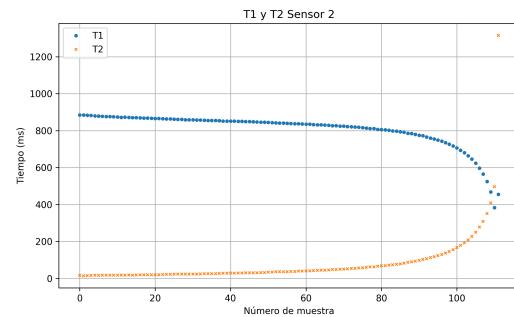


Figura 9: Comparación de los tiempos T1 y T2 para el sensor inferior.

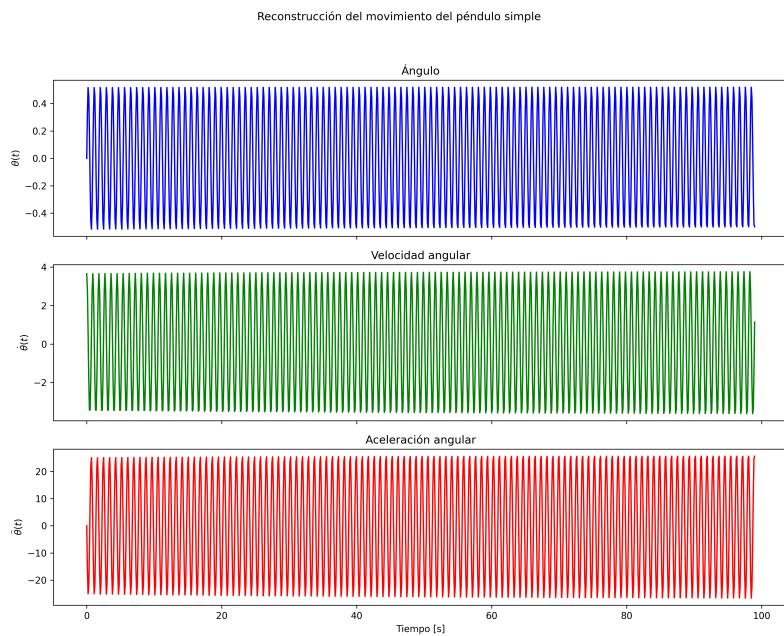


Figura 10: Ángulo, velocidad angular y aceleración angular calculadas con los períodos.

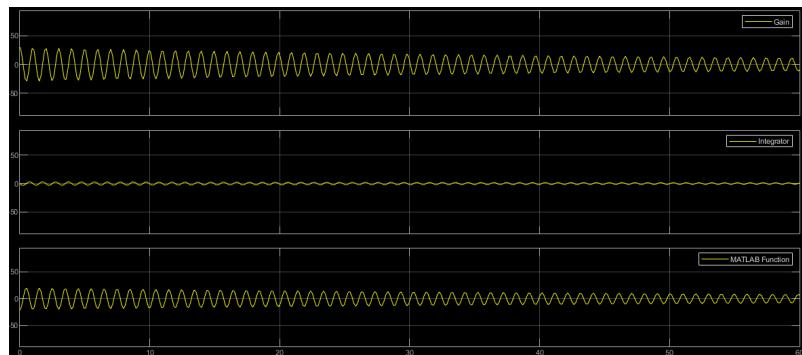


Figura 11: Ángulo, velocidad angular y aceleración angular calculadas con la simulación.

III. Péndulo simple a 60°

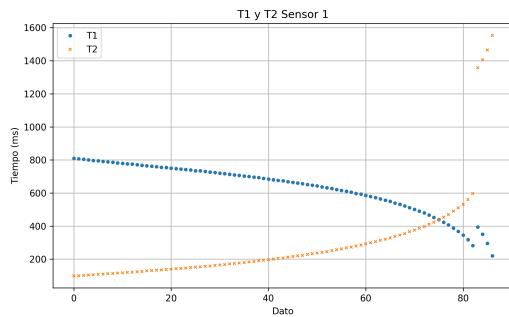


Figura 12: Comparación de los tiempos T1 y T2 para el sensor superior.

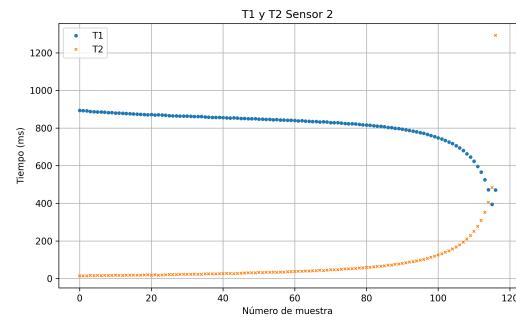


Figura 13: Comparación de los tiempos T1 y T2 para el sensor inferior.

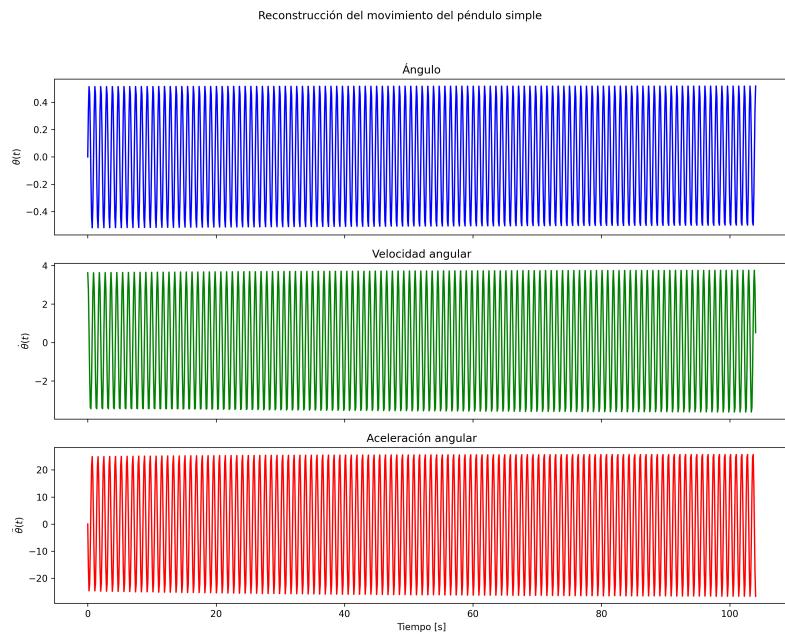


Figura 14: Ángulo, velocidad angular y aceleración angular calculadas con los períodos.

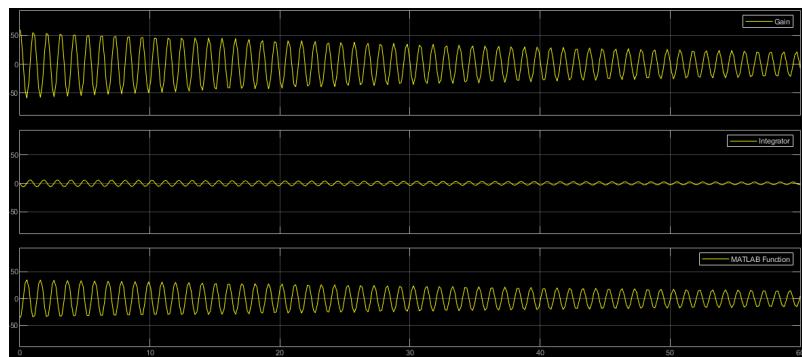


Figura 15: Ángulo, velocidad angular y aceleración angular calculadas con la simulación.

iv. Péndulo doble ambos a 45  

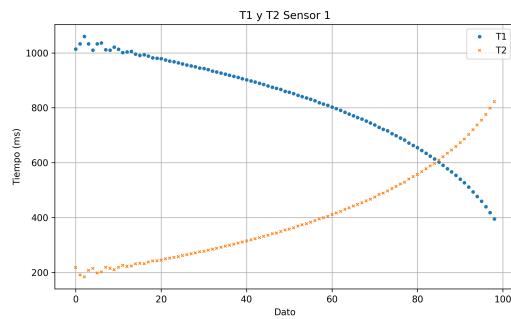


Figura 16: Comparación de los tiempos T1 y T2 para el sensor superior.

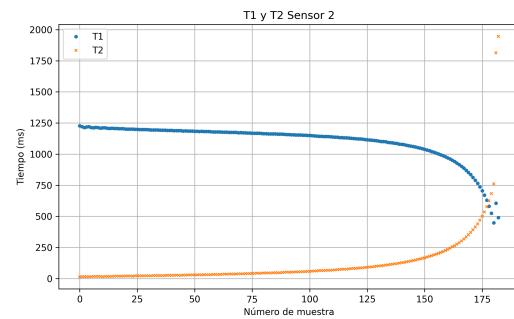


Figura 17: Comparación de los tiempos T1 y T2 para el sensor inferior.

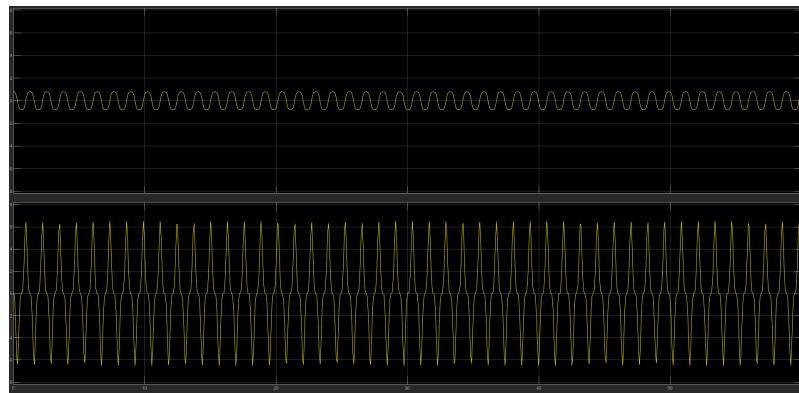


Figura 18: \'ngulo y velocidad angular calculadas con la simulación para el pendulo inferior.

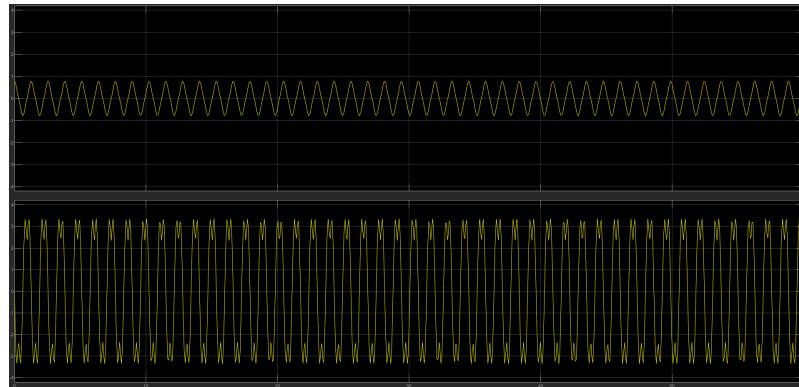


Figura 19: \'ngulo y velocidad angular calculadas con la simulación para el pendulo superior.

v. Péndulo doble, el primero a 0° y el segundo a 90°

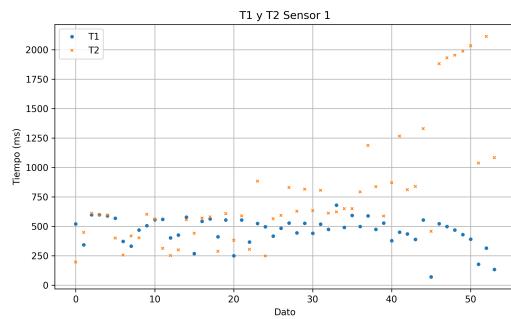


Figura 20: Comparación de los tiempos T1 y T2 para el sensor superior.

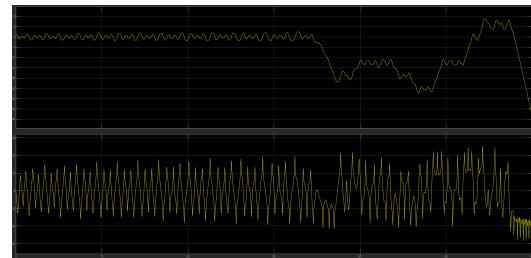


Figura 22: Ángulo, velocidad angular y aceleración angular calculadas con la simulación para el péndulo inferior.

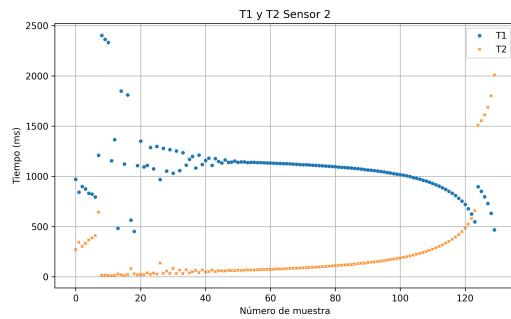


Figura 21: Comparación de los tiempos T1 y T2 para el sensor inferior.

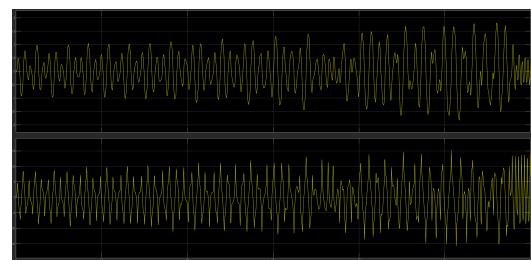


Figura 23: Ángulo, velocidad angular y aceleración angular calculadas con la simulación para el péndulo superior.

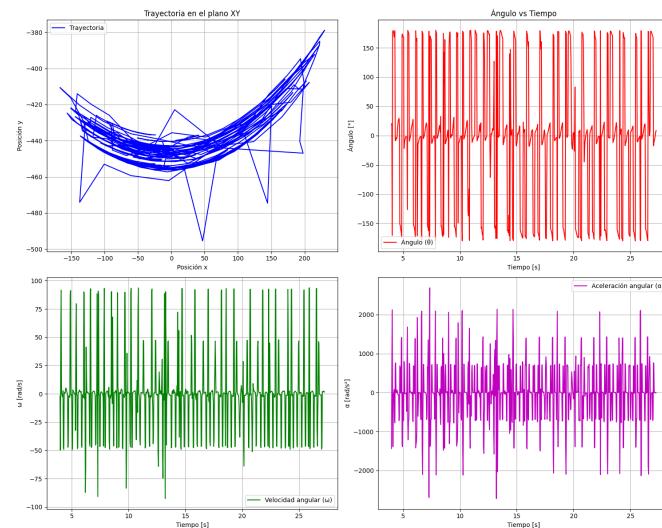


Figura 24: Trayectorias medidas con Tracker, se muestra la trayectoria total del péndulo superior, su ángulo, velocidad y aceleración angular.

En las figuras 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16 y 17, se muestra que T1 va disminuyendo y T2 va en aumento, se intersectan en un punto siempre, aunque, debido al ancho de los péndulos, en algunas graficas no se logra ver la continuación de las curvas. En cambio, las gráficas correspondientes al péndulo doble, figuras 20 y 21, no muestran ese comportamiento, el sensor superior no tiene parecido alguno, mientras que el inferior se asemeja algo a las demás, esto debido al comportamiento casi caótico del péndulo doble a estas condiciones iniciales.

Los gráficos de las simulaciones y los estimados de los datos, muestran el comportamiento regular de cualquier péndulo, figuras 6, 7, 10, 11, 14 y 15 muestran el comportamiento descrito. Pero, las simulaciones del péndulo doble con angulo inicial de 45 grados, muestra comportamiento periódico pero no senoidal, en la figura 18 se ve que la posición angular no parece del todo senoidal, pero su velocidad si es muy diferente, se ven cambios abruptos antes de llegar a los picos. La figura 19 muestran que los picos de amplitud en los ángulos y velocidades no son senoidales, el ángulo es como una especie de onda triangular con puntas suaves y la velocidad tiene una pequeña oscilación en cada pico. Sin embargo, no parece nada caótico.

Por último, el péndulo doble con condiciones iniciales de 0 y 90 grados, muestra comportamientos diferentes a todos los demás, las simulaciones, figuras 22 y 23, ya no muestran comportamientos similares a una onda senoidal o siquiera periódica a lo largo del tiempo, comparandolas con las gráficas de Tracker, figura 24, la cual describe el comportamiento del péndulo superior, tienen mucha similitud en ambas gráficas, la del ángulo y de la velocidad angular.

IV. Conclusiones

Esta práctica fue realizada con fines de observar y aprender sobre modelado físico, las simula-

ciones en Simulink dan paso al planteo de sistemas dinámicos mucho más complejos y extensos que tengan que ser resueltos numéricamente.

El péndulo simple y doble se lo estudia con frecuencia en materias como física básica 2 y mecánica clásica, el primero es un sistema dinámico muy fundamental que aparece con frecuencia en diversas ramas de la física. En cambio, el péndulo doble es un sistema dinámico complejo, los parámetros iniciales se pueden modificar de manera que tenga comportamiento de un sistema acoplado (ángulo pequeño, masas iguales, longitudes iguales), para tener una solución analítica de las ecuaciones de movimiento. Pero en el caso menos ideal, las condiciones iniciales impuestas, 45° Y 90° , son valores que descartan completamente la aproximación de ángulo pequeño, y sumado a que las barras no eran iguales, las ecuaciones de movimiento solamente se pueden resolver de forma analítica. Exitosamente, se obtuvo los mismos gráficos del ángulo y la velocidad angular de parte de las simulaciones y del video analizado con Tracker.

Durante todas las simulaciones se tomó un coeficiente de amortiguamiento bajo, ya que en el laboratorio se construyó el péndulo, de forma que no exista amortiguamiento crítico o sobre-amortiguamiento. Claramente se construyó para que oscile, así que en las ecuaciones de movimiento, el coeficiente que se introdujo es muy bajo o casi cero.

En general esta práctica contribuye significativamente al desarrollo de nuevas habilidades tecnológicas y científicas, que pueden ser aplicables a otros contextos de la ciencia y tecnología moderna, tanto el montaje experimental, la toma de datos y su análisis, requieren del conocimiento y habilidad de ramas importantes como la programación, electrónica y análisis físico-matemático. Se espera replicar las técnicas para el análisis de sistemas dinámicos más complejos.

V. Anexos

I. Códigos

```

1 function qpp = fcn(T,q,qp)
2
3 M=0.05714;
4 L=0.24;
5 g=9.81;
6 B=0.0001;
7
8 qpp = (-M*g*L*sin(q)-B*qp)/(M*L^2);
9
10 end

```

Listing 1: Función de aceleración angular para un péndulo simple

```

1 function dx = pendulo_doble(t, x)
2
3 % Par metros del sistema
4 m1 = 0.05714; m2 = 0.07; % Masas de los eslabones (kg)
5 l1 = 0.24; l2 = 0.195; % Longitudes de los eslabones (m)
6 g = 9.81; % Aceleraci n de la gravedad (m/s^2)
7 c1 = 0; % Coeficiente de amortiguaci n para theta1 (Nms/rad)
8 c2 = 0; % Coeficiente de amortiguaci n para theta2 (Nms/rad)
9 T1 = 0; % Torque aplicado al primer eslab n (Nm)
10 T2 = 0; % Torque aplicado al segundo eslab n (Nm)
11
12 % Estados del sistema
13 theta1 = x(1); % Posici n angular del primer eslab n (rad)
14 dtheta1 = x(2); % Velocidad angular del primer eslab n (rad/s)
15 theta2 = x(3); % Posici n angular del segundo eslab n (rad)
16 dtheta2 = x(4); % Velocidad angular del segundo eslab n (rad/s)
17
18 % Clculos intermedios (simplifican las ecuaciones)
19 delta = theta1 - theta2; % Diferencia angular entre los eslabones
20 s = sin(delta); % Seno de la diferencia angular
21 c = cos(delta); % Coseno de la diferencia angular
22
23 % Matriz de masa (A)
24 % A(1,1): (m1 + m2)*l1^2
25 % A(1,2): m2*l1*l2*cos(theta1 - theta2)
26 % A(2,1): m2*l1*l2*cos(theta1 - theta2)
27 % A(2,2): m2*l2^2
28 A = [ (m1 + m2)*l1^2, m2*l1*l2*c;
29 m2*l1*l2*c, m2*l2^2 ];
30
31
32 b = [ -m2*l1*l2*dtheta2^2*s - (m1 + m2)*g*l1*sin(theta1) + T1 - c1*
dtheta1;
m2*l1*l2*dtheta1^2*s - m2*g*l2*sin(theta2) + T2 - c2*dtheta2];
33

```

```
34 % Resolver el sistema lineal A * [ddtheta1; ddtheta2] = b
35 % Esto nos da las aceleraciones angulares ddtheta1 y ddtheta2
36 ddtheta = A \ b;
37
38
39
40 dx = zeros(4,1);
41 dx(1) = dtheta1;
42 dx(2) = ddtheta(1); % Aceleraci n angular del primer eslab n
43 dx(3) = dtheta2;
44 dx(4) = ddtheta(2); % Aceleraci n angular del segundo eslab n
45
46 end
```

Listing 2: Función de dinámica para el péndulo doble

Referencias

- [1] T. M Helliwell V. V. Sahakian. *Modern Classical Mechanics*. Cambridge University Press, 2021.
- [2] Landau y Lifshitz. *Mecanica, Segunda edición*. Editorial Reverté S.A., 1994.