Probabilidad

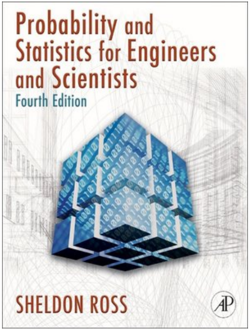
Estadística, Grado en Sistemas de Información

Constantino Antonio García Martínez

Universidad San Pablo Ceu

Contenidos

References



S. Ross. Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists. Chapter 3.

C.D. Barr, D.M. Diez, M. Çetinkaya-Rundel. OpenIntro Statistics. Chapter 2.

Definición de probabilidad

Espacio muestral

La probabilidad nos permite enfrentarnos a experimentos en los que los resultados son inciertos $\rightarrow$ **experimentos aleatorios**. Definimos...

Ejemplo: Espacio muestral

Espacio muestral Ω: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

- Lanzamiento de un dado de 6 caras:

Espacio muestral

La probabilidad nos permite enfrentarnos a experimentos en los que los resultados son inciertos $\rightarrow$ **experimentos aleatorios**. Definimos...

Ejemplo: Espacio muestral

Espacio muestral Ω: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lanzamiento de 2 dados de 6 caras:

Espacio muestral

La probabilidad nos permite enfrentarnos a experimentos en los que los resultados son inciertos $\rightarrow$ **experimentos aleatorios**. Definimos...

Ejemplo: Espacio muestral

Espacio muestral Ω: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lanzamiento de 2 dados de 6 caras:
  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (2, 1), ..., (6, 6)\} = S \times S$ siendo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- En un experimento que determina el sexo de un feto:

La probabilidad nos permite enfrentarnos a experimentos en los que los resultados son inciertos $\to$ **experimentos aleatorios**. Definimos...

Ejemplo: Espacio muestral

Espacio muestral Ω: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lanzamiento de 2 dados de 6 caras: $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (2, 1), ..., (6, 6)\} = S \times S$ siendo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- En un experimento que determina el sexo de un feto: $\Omega = \{\text{Masculino}, \text{Femenino}\}$.
- El tiempo hasta el siguiente fallo de un componente mecánico:

La probabilidad nos permite enfrentarnos a experimentos en los que los resultados son inciertos $\rightarrow$ **experimentos aleatorios**. Definimos...

Ejemplo: Espacio muestral

Espacio muestral Ω: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

- Lanzamiento de un dado de 6 caras: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lanzamiento de 2 dados de 6 caras: $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (2, 1), ..., (6, 6)\} = S \times S$ siendo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- En un experimento que determina el sexo de un feto: $\Omega = \{\text{Masculino}, \text{Femenino}\}$.
- El tiempo hasta el siguiente fallo de un componente mecánico: $\Omega = (0, \infty)$.

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \rightarrow$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento" $= A =$

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \rightarrow$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento"$= A = \{1\} \times S$,

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \rightarrow$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento"$= A =\{1\} \times S$,
  "Sacar un 2 en el primer lanzamiento- $B =$

Eventos

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \to$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento"$= A =\{1\} \times S$,
  "Sacar un 2 en el primer lanzamiento- $B = \{2\} \times S$,

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \rightarrow$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento" $= A = \{1\} \times S$,
  "Sacar un 2 en el primer lanzamiento- $B = \{2\} \times S$,
  "Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento-

Eventos

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \rightarrow$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento" $= A = \{1\} \times S$,
  "Sacar un 2 en el primer lanzamiento- $B = \{2\} \times S$,
  "Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento- $A \cup B = \{1, 2\} \times S$,

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \to$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento" $= A =\{1\} \times S$,
  "Sacar un 2 en el primer lanzamiento- $B = \{2\} \times S$,
  "Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento- $A \cup B = \{1, 2\} \times S$,
  "Sacar un 1 y un 2 en el primer lanzamiento-

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \rightarrow$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento"$= A =\{1\} \times S$,
  "Sacar un 2 en el primer lanzamiento- $B = \{2\} \times S$,
  "Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento- $A \cup B = \{1, 2\} \times S$,
  "Sacar un 1 y un 2 en el primer lanzamiento- $A \cap B =$

Ejemplo: Eventos
Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \to$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento" $= A = \{1\} \times S$,
  "Sacar un 2 en el primer lanzamiento- $B = \{2\} \times S$,
  "Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento- $A \cup B = \{1, 2\} \times S$,
  "Sacar un 1 y un 2 en el primer lanzamiento- $A \cap B = \emptyset$ (Decimos que A y B son **mutuamente excluyentes**).
- Determinación del sexo de un feto:

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \to$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento"$=A=\{1\} \times S$,
  "Sacar un 2 en el primer lanzamiento- $B = \{2\} \times S$,
  "Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento- $A \cup B = \{1, 2\} \times S$,
  "Sacar un 1 y un 2 en el primer lanzamiento- $A \cap B = \emptyset$ (Decimos que A y B son **mutuamente excluyentes**).
- Determinación del sexo de un feto:
  M = "Masculino", F = "Femenino",

Eventos

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \to$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento"$= A =\{1\} \times S$,
  "Sacar un 2 en el primer lanzamiento- $B = \{2\} \times S$,
  "Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento- $A \cup B = \{1, 2\} \times S$,
  "Sacar un 1 y un 2 en el primer lanzamiento- $A \cap B = \emptyset$ (Decimos que A y B son **mutuamente excluyentes**).
- Determinación del sexo de un feto:
  M = "Masculino", F = "Femenino",
  "Masculino o Femenino- $M \cup F = \Omega$ (**suceso seguro**)
  LLamamos a M^c el **complemento** de M.
- Falla antes de 5 horas:

Ejemplo: Eventos

Evento: cualquier subconjunto de $\Omega \rightarrow$ Situaciones interesantes que queremos estudiar.

- Lanzamiento de dos dados de 6 caras:
  "Sacar un 1 en el primer lanzamiento" $= A = \{1\} \times S$,
  "Sacar un 2 en el primer lanzamiento- $B = \{2\} \times S$,
  "Sacar un 1 o un 2 en el primer lanzamiento- $A \cup B = \{1, 2\} \times S$,
  "Sacar un 1 y un 2 en el primer lanzamiento- $A \cap B = \emptyset$ (Decimos que A y B son **mutuamente excluyentes**).
- Determinación del sexo de un feto:
  M = "Masculino", F = "Femenino",
  "Masculino o Femenino- $M \cup F = \Omega$ (**suceso seguro**)
  LLamamos a M^c el **complemento** de M.
- Falla antes de 5 horas:
  $F = (0, 5)$.

Álgebra de los eventos

- Decimos que A implica a B si $A \subseteq B$.
- Si $A \subset B$ y $B \subset A \rightarrow A = B$
- Leyes conmutativas:

$$E \cup F = F \cup E \qquad E \cap F = F \cap E.$$

- Leyes asociativas :

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) \qquad (E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$$

- Leyes distributivas:

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (E \cap G)$$

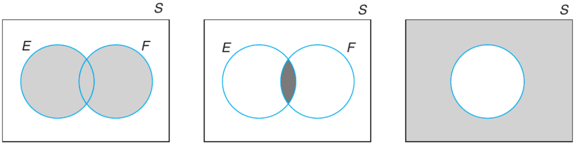
$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (E \cup G)$$

- Leyes de Morgan:

$$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$$

$$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$$

Diagramas de Venn

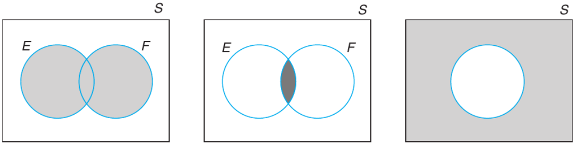


(a) Shaded region: $E \cup F$ (b) Shaded region: EF (c) Shaded region: E^c

Ejercicio: Diagramas de Venn

Prueba la primera ley distributiva usando los diagramas de Venn.

Diagramas de Venn



(a) Shaded region: $E \cup F$ (b) Shaded region: EF (c) Shaded region: E^c

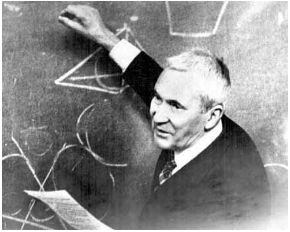
Ejercicio: Diagramas de Venn
Prueba la primera ley distributiva usando los diagramas de Venn.

Ejercicio: Diagramas de Venn
Prueba la primera ley de Morgan usando diagramas de Venn.

La **probabilidad de un evento** es un número que describe cómo de habitual/raro es que el evento ocurra.

Interpretación frecuentista: si la probabilidad de un evento E es p, y repites el experimento muchas veces, la proporción de veces que ocurre el evento será p.

Axiomas de Kolmogorov.



Para cualquier evento E del espacio Ω se verifica:

1. $P(E) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Para cualquier secuencia de sucesos mutuamente exclusivos E_1, $E_2, \ldots$ (esto es, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Teoremas de la probabilidad

1. Si $E_1 \subset E_2$ entonces $P(E_1) \leq P(E_2)$ y $P(E_2 - E_1) = P(E_2) - P(E_1)$.
2. Para todo evento E, $0 \leq P(E) \leq 1$.
3. $P(\emptyset) = 0$.
4. $P(E^c) = 1 - P(E)$.
5. Fórmulas de inclusión-exclusión:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-2} S_{n-1} + (-1)^{n-1} S_n,$$

   con $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cdots \cap E_{i_k})$

   5.1 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
   5.2 $P(E \cup F \cup G) =$
   $P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G)$

Ejercicio: Teoremas de la probabilidad

Usa diagramas de Venn y ejemplos concretos para comprender la intuición de los teoremas 1, 4, y 5.1.

Ejercicio: Aplicación de la probabilidad

El 28 % de los hombres que viven en Springfield fuma cigarrillos, el 6 % fuma puros y el 3 % fuma tanto cigarrillos como puros. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no fume? Si definimos la **cuota a favor** de un evento E como $P(E)/P(E^c)$, ¿Cuál es la cuota de que una persona no fume?

Asignación de probabilidad en espacios finitos equiprobables

Espacios con resultados equiprobables

Si un espacio muestral Ω consta de un número finito de resultados E_1, $E_2, \ldots, E_n$, entonces:

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1,$$

donde $E_i = \{e_i\}$ son eventos elementales. Si suponemos que cada los eventos elementales son equiprobables, deducimos que

$$P(E_i) = \frac{1}{n}.$$

Regla de Laplace:
Si un evento cualquiera E consta de h eventos sencillos:

$$P(E) = \frac{h}{n} = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos totales}}.$$

Ejercicio: Regla de Laplace
Lanzamos un dado. ¿Cuál es la probabilidad de un 2 o un 3? Formaliza tu razonamiento y usa la regla de Laplace.

En algunos casos es posible la enumeración directa de los casos favorables para obtener las probabilidades, sin embargo, no siempre es posible...

Ejemplo: Regla de Laplace
¿Cuál es la probabilidad de obtener una mano de tres espadas y dos copas de una baraja española?

Ejercicio: Regla de Laplace

Lanzamos un dado. ¿Cuál es la probabilidad de un 2 o un 3? Formaliza tu razonamiento y usa la regla de Laplace.

En algunos casos es posible la enumeración directa de los casos favorables para obtener las probabilidades, sin embargo, no siempre es posible...

Ejemplo: Regla de Laplace

¿Cuál es la probabilidad de obtener una mano de tres espadas y dos copas de una baraja española? Es decir, hay que contar el número de maneras distintas que hay de obtener tres espadas y dos copas...

Necesitamos desarrollar una *manera sofisticada de contar* → **análisis combinatorio**

Asignación de probabilidad en espacios finitos equiprobables

Análisis combinatorio: patrones usuales

Ejemplo: Método constructivo/algorítmico

¿Cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes pueden formarse con las letras A, E , I, L, M, N, P, de forma que haya una vocal en la primera posición?

Ejemplo: Método constructivo/algorítmico

¿Cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes pueden formarse con las letras A, E , I, L, M, N, P, de forma que haya una vocal en la primera posición? Vamos a formar todas las palabras posibles rellenando

$$\_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_$$

Ejemplo: Método constructivo/algorítmico

¿Cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes pueden formarse con las letras A, E , I, L, M, N, P, de forma que haya una vocal en la primera posición? Vamos a formar todas las palabras posibles rellenando

$$\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_$$

La primera posición tiene que ser una vocal, por lo que hay 3 posibles elecciones (A, E, I):

$$\underbrace{\_\_\_}_{3}\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_$$

Ejemplo: Método constructivo/algorítmico

¿Cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes pueden formarse con las letras A, E , I, L, M, N, P, de forma que haya una vocal en la primera posición? Vamos a formar todas las palabras posibles rellenando

$$\_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_$$

La primera posición tiene que ser una vocal, por lo que hay 3 posibles elecciones (A, E, I):

$$\underbrace{\_\_\_}_{3} \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_$$

La segunda letra puede ser cualquiera, siempre que sea distinta a la primera. Esto nos deja 6 posibles opciones.

$$\underbrace{\_\_\_}_{3} \ \underbrace{\_\_\_}_{6} \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_$$

Ejemplo: Método constructivo/algorítmico

¿Cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes pueden formarse con las letras A, E , I, L, M, N, P, de forma que haya una vocal en la primera posición? Vamos a formar todas las palabras posibles rellenando

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$

La primera posición tiene que ser una vocal, por lo que hay 3 posibles elecciones (A, E, I):

$$\underbrace{\underline{\quad}}_{3}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$

La segunda letra puede ser cualquiera, siempre que sea distinta a la primera. Esto nos deja 6 posibles opciones.

$$\underbrace{\underline{\quad}}_{3}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{6}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$

Procediendo de forma similar:

$$\underbrace{\underline{\quad}}_{3}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{6}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{5}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{4}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{3},$$

por lo que hay $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$ palabras distintas.

Patrones usuales

Veamos ahora algunos de los patrones más repetidos en combinatoria. *No siempre es recomendable tratar de reducir un problema a un patrón. Generalmente, es preferible emplear el método constructivo*.

Ejemplo: Permutaciones
¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse en fila 5 personas?

Veamos ahora algunos de los patrones más repetidos en combinatoria. *No siempre es recomendable tratar de reducir un problema a un patrón. Generalmente, es preferible emplear el método constructivo*.

Ejemplo: Permutaciones

¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse en fila 5 personas?

$$\underbrace{\underline{\quad}}_{5}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{4}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{3}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{2}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{1},$$

y por tanto, el número de ordenaciones distintas es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Veamos ahora algunos de los patrones más repetidos en combinatoria. *No siempre es recomendable tratar de reducir un problema a un patrón. Generalmente, es preferible emplear el método constructivo.*

Ejemplo: Permutaciones
¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse en fila 5 personas?

$$\underbrace{\_\_}_{5}\ \underbrace{\_\_}_{4}\ \underbrace{\_\_}_{3}\ \underbrace{\_\_}_{2}\ \underbrace{\_\_}_{1},$$

y por tanto, el número de ordenaciones distintas es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Este patrón es tan habitual que se ha definido una notación especial:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Donde $n!$ se lee **factorial de n**. Por convenio se asume que $0! = 1$.

Permutaciones (ordenar personas en fila)
n objetos pueden ordenarse en fila de $n!$ maneras distintas.

Veamos ahora algunos de los patrones más repetidos en combinatoria. *No siempre es recomendable tratar de reducir un problema a un patrón. Generalmente, es preferible emplear el método constructivo*.

Ejemplo: Permutaciones
¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse en fila 5 personas?

$$\underbrace{\_\_}_{5}\ \underbrace{\_\_}_{4}\ \underbrace{\_\_}_{3}\ \underbrace{\_\_}_{2}\ \underbrace{\_\_}_{1},$$

y por tanto, el número de ordenaciones distintas es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Este patrón es tan habitual que se ha definido una notación especial:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Donde $n!$ se lee **factorial de n**. Por convenio se asume que $0! = 1$.

Permutaciones (ordenar personas en fila)
n objetos pueden ordenarse en fila de $n!$ maneras distintas. Llamamos a este patrón **permutación**, ya que una permutación es la variación de la posición de los elementos de un conjunto.

Permutaciones con repetición

Cuando los objetos no son todos distintos, tenemos un nuevo patrón.

Ejemplo: Permutaciones con repetición
¿Cuántas “palabras” distintas pueden formarse a partir de PEPPER?

Permutaciones con repetición

Cuando los objetos no son todos distintos, tenemos un nuevo patrón.

Ejemplo: Permutaciones con repetición

¿Cuántas "palabras" distintas pueden formarse a partir de PEPPER? Si todas las letras fuesen distintas, habría $6! = 720$ formas distintas de reordenar la palabra PEPPER. En este supuesto, una posible permutación sería:

$$\underline{\;P_1\;}\ \underline{\;P_2\;}\ \underline{\;P_3\;}\ \underline{\;E_1\;}\ \underline{\;E_2\;}\ \underline{\;R_1\;}\ ,$$

Permutaciones con repetición

Cuando los objetos no son todos distintos, tenemos un nuevo patrón.

Ejemplo: Permutaciones con repetición

¿Cuántas "palabras" distintas pueden formarse a partir de PEPPER? Si todas las letras fuesen distintas, habría $6! = 720$ formas distintas de reordenar la palabra PEPPER. En este supuesto, una posible permutación sería:

$$\underline{P_1}\ \underline{P_2}\ \underline{P_3}\ \underline{E_1}\ \underline{E_2}\ \underline{R_1}\ ,$$

Ahora bien, si eliminamos los subíndices de las Ps, estas serían idénticas y podríamos permutarlas entre sí sin alterar el resultado. Es decir, $P_1P_2P_3E_1E_2R_1$, $P_1P_3P_2E_1E_2R_1$, $P_2P_1P_3E_1E_2R_1$, $P_2P_3P_1E_1E_2R_1$ $P_3P_1P_2E_1E_2R_1$, $P_3P_2P_1E_1E_2R_1$, son indistinguibles y deberían contarse como un solo caso.

Cuando los objetos no son todos distintos, tenemos un nuevo patrón.

Ejemplo: Permutaciones con repetición

¿Cuántas "palabras" distintas pueden formarse a partir de PEPPER? Si todas las letras fuesen distintas, habría $6! = 720$ formas distintas de reordenar la palabra PEPPER. En este supuesto, una posible permutación sería:

$$\underline{\;P_1\;}\ \underline{\;P_2\;}\ \underline{\;P_3\;}\ \underline{\;E_1\;}\ \underline{\;E_2\;}\ \underline{\;R_1\;}\ ,$$

Ahora bien, si eliminamos los subíndices de las Ps, estas serían idénticas y podríamos permutarlas entre sí sin alterar el resultado. Es decir, $P_1P_2P_3E_1E_2R_1$, $P_1P_3P_2E_1E_2R_1$, $P_2P_1P_3E_1E_2R_1$, $P_2P_3P_1E_1E_2R_1$ $P_3P_1P_2E_1E_2R_1$, $P_3P_2P_1E_1E_2R_1$, son indistinguibles y deberían contarse como un solo caso.

Así pues, los $6!$=720 casos iniciales los podemos agrupar en grupos de $3! = 6$ que no presentan diferencias apreciables, quedando $6!/3! = 120$ casos. Razonando de forma análoga con las Es y la R quedaría finalmente

$$\frac{6!}{3!2!1!} = 60 \text{ casos.}$$

Permutaciones con repetición (PEPPER/MISSISSIPPI)
Una colección de n objectos clasificados en k clases de objetos idénticos entre sí, el primero con n_1 objectos, el segundo con n_2, ... se puede ordenar en fila de

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

formas distintas.

Ejemplo: Variaciones

¿De cuántas formas puede acabar el podio de una carrera en la que compiten 10 atletas?

Variaciones

Ejemplo: Variaciones

¿De cuántas formas puede acabar el podio de una carrera en la que compiten 10 atletas? Usando el método constructivo obtenemos

$$\underbrace{\underline{\text{Oro}}}_{10}\ \underbrace{\underline{\text{Plata}}}_{9}\ \underbrace{\underline{\text{Bronce}}}_{8}\,.$$

Variaciones (Podio)

Supón que tenemos n objetos diferentes y queremos ordenar r de estos en línea. El número de arreglos diferentes es

$$P(n,r) = V(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Nos referimos a esta expresión como el **número de variaciones de n objetos tomados de r en r**.

Ejemplo: Variaciones con repetición

¿Cuantas cadenas de 5 bits existen?

Ejemplo: Variaciones con repetición
¿Cuantas cadenas de 5 bits existen?

Usando el método constructivo obtenemos

$$\underbrace{\_\_}_{2}\ \underbrace{\_\_}_{2}\ \underbrace{\_\_}_{2}\ \underbrace{\_\_}_{2}\ \underbrace{\_\_}_{2},$$

por lo que existen 2^5 cadenas distintas.

Variaciones con repetición (bits)
El número de variaciones con repetición de r elementos tomados entre n es de n^r.

Ejemplo: Grupos de 3 números

¿Cuántos grupos de 3 números (sin importar el orden) pueden formarse a partir de *1, 2, 3, 4, 5*?

Ejemplo: Grupos de 3 números

¿Cuántos grupos de 3 números (sin importar el orden) pueden formarse a partir de *1, 2, 3, 4, 5*?

Hay 5 formas de seleccionar el primer ítem, 4 de seleccionar el segundo y 3 de seleccionar el tercero. Por tanto, hay

$$5 \cdot 4 \cdot 3$$

formas de seleccionar un grupo de 3 en la que el orden sí importa. En este ejemplo, cada grupo concreto de 3 números, por ejemplo, *1*, *2* y *3* será contado 6 veces (todas las permutaciones): *123, 132, 213, 231, 312, 321*. Dado que para nosotros este debería ser un solo caso, dividimos $5 \cdot 4 \cdot 3$ entre $3!$:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

Fíjate que, dado que no nos importa el orden, la forma correcta de representar el resultado *123* (y sus permutaciones) es $\{1, 2, 3\}$.

Combinaciones (Puñado de números)
El número de subconjuntos distintos con r elementos que pueden extraerse de un conjunto de n elementos es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

donde $\binom{n}{r}$ recibe el nombre de **número combinatorio**. Los subconjuntos de tamaño r de un conjunto de n elementos suelen llamarse **combinaciones de r elementos tomados entre n**.

Patrones usuales en R

	Sin repetición	Con repetición
Con orden	Permutaciones/Variaciones (`utils.R: variaciones(n, k)`)	Permutaciones con rep. ($\frac{n!}{n1!\cdots nk!}$ con $n! =$ `factorial(n)`) Variaciones con rep. (`n ^ k`)
Sin orden	Combinaciones (`choose(n,k)`)	No las usaremos

Asignación de probabilidad en espacios finitos equiprobables

Análisis combinatorio: procedimiento constructivo/algorítmico

Para usar con éxito los patrones usuales **escribiremos de forma explícita un algoritmo que genere casos totales y otro que genere casos favorables**:

Ejemplo: Procedimiento constructivo/algorítmico
Se extraen tres cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una pareja (dos cartas del mismo valor)?

Asignación de probabilidad en espacios finitos equiprobables

Ejercicios

Ejercicio:
En un bar, cinco amigos han pedido tres cafés con leche y dos cañas. ¿De cuántas formas pueden repartirse las bebidas?

Ejercicio:
¿Cuál es la probabilidad de obtener una mano de tres espadas y dos copas de una baraja española?

Ejercicio:
¿De cuántas formas distintas pueden sentarse en 6 butacas consecutivas tres chicas y tres chicos, de forma que no haya dos chicas ni dos chicos consecutivos?

Ejercicio:
El próximo Enero vas a visitar las ciudades A, B, C, D. Si cada visita requiere un día ¿De cuántas formas distintas puedes programar tus viajes?

Ejercicio:
Durante el mes de Enero, deseas viajar a las ciudades A, B, C, D en este orden. ¿Cuántas formas distintas de viajar tienes?

Ejercicio:
¿Cuál es la probabilidad de sacar 25 caras en 50 tiradas de una moneda?

Ejercicio:
10 parejas de hermanos se han apuntado a fútbol. Si se hace un equipo de 8 personas al azar, cuál es la probabilidad de que no haya hermanos en el equipo.

Ejercicio:
10 tarjetas blancas y 15 tarjetas negras se barajan conjuntamente. Calcula la probabilidad de que la primera tarjeta blanca esté en la posición 5.

Ejercicios

Ejercicio:
Un alumno tiene 10 libros: 4 de mates, 3 de programación, 2 de historia y uno de inglés. ¿De cuántas formas se pueden ordenar los libros si el alumno quiere mantenerlos agrupados por temática?

Ejercicio:
En una urna hay 3 bolas rojas numeradas del 1 al 3 y 3 bolas negras numeradas del 1 al 3. Sacamos dos bolas, ¿Probabilidad de sacar dos treses o una bola negra y otra blanca?

Ejercicio:
Si hay n personas en una clase, ¿Cuál es la probabilidad de que ningún par de personas celebren el cumpleaños el mismo día? ¿Y la de que haya al menos una coincidencia? Calcula una tabla de la probabilidad de coincidencia para varios valores de n ¿Cuánto tiene que valer n para que la probabilidad sea mayor que $1/2$?

n	5.00	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00	40.00	45.00	50.00
P.coincidencia.	0.03	0.12	0.25	0.41	0.57	0.71	0.81	0.89	0.94	0.97

Simulaciones

Ulam y Von Neumann

Podemos explotar la capacidad de los ordenadores de sacar **números pseudoaleatorios** para simular probabilidades. Muchas veces nos referimos a estas técnicas como **métodos de Monte Carlo**.

Los métodos de Monte Carlo fueron inventados por Ulam y Von Neumann mientras trabajaban en el proyecto Manhattan. Su nombre está inspirado por los casinos de Monte Carlo.

Ejemplo: Simulaciones

¿Cuál es la probabilidad de sacar 25 caras en 50 tiradas de una moneda?

```
# Simulate one trial
trial = sample(0:1, 50, replace = TRUE)
# Check if the event has occurred (TRUE) or not (FALSE)
has_occurred = (sum(trial) == 25)

# A simulation involves repeating the previous setup a looooooot of times
# We can use a for loop or...
nb_sims = 50000
events = replicate(nb_sims, {
  trial = sample(0:1, 50, replace = TRUE)
  (sum(trial) == 25)
})
# Use Laplace rule: succesful events / total events
print(sum(events) / nb_sims)

## [1] 0.11526
```

Ejemplo: Simulaciones

Se extraen tres cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una pareja (dos cartas del mismo valor)?

```
sim_case = function() {
  cards = paste(c('H', 'C', "B", "O"), rep(1:10, each = 4))
  sample(cards, 3)
}

get_card_number = function(cards) {
  purrr::map_chr(strsplit(cards, split = " "), 2)
}

N = 5000
is_success = replicate(N, {
  cards = sim_case()
  numbers = get_card_number(cards)
  # Before table, use factor
  numbers = factor(numbers, levels = as.character(1:10))
  counts = table(numbers)
  any(counts == 2)
})

print(sum(is_success) / N)

## [1] 0.2206
```

Ejercicio: Simulaciones
En una urna hay 3 bolas rojas numeradas del 1 al 3 y 3 bolas negras numeradas del 1 al 3. Sacamos dos bolas, ¿Probabilidad de sacar dos treses?

Ejercicio: Simulaciones
En una urna hay 3 bolas rojas numeradas del 1 al 3 y 3 bolas negras numeradas del 1 al 3. Sacamos dos bolas, ¿Probabilidad de sacar dos treses o una bola negra y otra blanca?

```
## Pr =  0.60128
```

Ejercicio: Simulaciones

Se reparten 5 cartas de una baraja española (40 cartas con 4 palos distintos). ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres espadas y dos copas?

```
## [1] 0.00792
```

Probabilidad condicionada

Ejemplo:
El profesor saca un alumno al azar a la pizarra ¿Cuál es la probabilidad de que te toque? ¿Cuál es la probabilidad de que te toque sabiendo que el alumno afortunado se sienta en la primera fila?

Ejemplo:
Se tiran dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos dados sumen 8?

Ejemplo:
El profesor saca un alumno al azar a la pizarra ¿Cuál es la probabilidad de que te toque? ¿Cuál es la probabilidad de que te toque sabiendo que el alumno afortunado se sienta en la primera fila?

Ejemplo:
Se tiran dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos dados sumen 8? El número de casos favorables es 5: $(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$. Por tanto

$$P(\text{sumen } 8) = 5/36.$$

Ejemplo:
El profesor saca un alumno al azar a la pizarra ¿Cuál es la probabilidad de que te toque? ¿Cuál es la probabilidad de que te toque sabiendo que el alumno afortunado se sienta en la primera fila?

Ejemplo:
Se tiran dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos dados sumen 8? El número de casos favorables es 5: $(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$. Por tanto

$$P(\text{sumen } 8) = 5/36.$$

En la primera tirada sale un 3, ¿Cuál es la probabilidad de que los dos dados sumen 8? Sabiendo que el primer dado es 3, sólo hay un caso favorable: $(3,5)$ entre los 6 casos posibles $(3,1),(3,2),\cdots(3,6)$, por lo que

$$P(\text{sumen } 8 \mid \text{primera tirada es } 3) = 1/6.$$

Probabilidad condicionada
Del ejemplo anterior, y siguiendo la regla de Laplace, deducimos que:

$$P(B \mid A) = \frac{\text{nº de casos favorables de } B \text{ y } A}{\text{nº de casos favorables de } A}.$$

Si dividimos el numerador y denominador por el número de casos posibles:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Ejercicio: Probabilidad condicionada
Tenemos una muestras de transistores de los cuales 5 son totalmente defectuosos (fallan en cuento lo usamos), 10 son parcialmente defectuosos (aguantan un par de semanas en uso) y 25 son buenos. Cogemos un transistor al azar y lo probamos. ¿Cuál es la probabilidad de que el transistor sea bueno si no ha fallado inmediatamente?

Probabilidad condicionada

También podemos emplear la fórmula en sentido contrario:

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

Ejercicio: Probabilidad condicionada

Existe un 30 % de probabilidad de que tu empresa cree una nueva delegación en Toledo. Si es así, existe un 60 % de probabilidad de que te den el puesto de "informático jefe". ¿Cuál es la probabilidad de que seas elegido informático jefe en Toledo?

Fórmula de probabilidad total (Laplace)
Podemos expresar B como

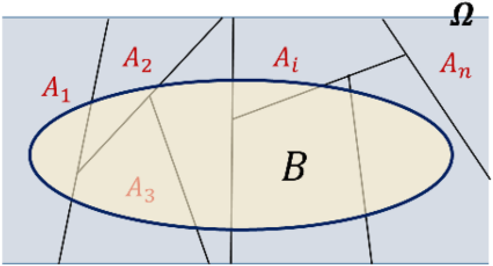
$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c).$$

$B \cap A$ y $B \cap A^c$ son mutuamente excluyentes, por lo que usando el Axioma 3:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(A)P(B \mid A) + P(A^c)P(B \mid A^c).$$

Ejercicio: Probabilidad condicionada
Existen dos urnas. La primera tiene dos bolas blancas y una negra; la segunda tiene una blanca y tres negras. Se lanza una moneda al aire. Si sale cara, se saca una bola de la primera urna; si sale cruz, se saca de la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola negra?

Podemos generalizar la **fórmula de probabilidad total** a particiones arbitrarias de un suceso B.



$$P(B) = P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n) \cdot P(A_n)$$

Thomas Bayes.

Fórmula de Bayes
Supón que B ocurre y que estamos interesados en determinar qué A_j ha ocurrido.

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{N} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

Thomas Bayes.

Fórmula de Bayes
Supón que B ocurre y que estamos interesados en determinar qué A_j ha ocurrido.

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{N} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

Ejercicio:
En el problema de las monedas y las urnas, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido cara la moneda si la bola extraída ha sido negra? ¿y si ha sido blanca?

Ejercicio: Probabilidad condicional con simulaciones

Existen dos urnas. Primera hay dos blancas y una negra. Segunda hay una blanca y tres negras. Se lanza una moneda, si cara, cogemos de la primera urna. ¿Probabilidad de cara si ha salido negra? Usa simulaciones.

Ejercicio:
Un estudiante está haciendo un test con m opciones. Un estudiante sabe la respuesta de una pregunta con probabilidad p. Si no sabe la respuesta, responde al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante supiese realmente la respuesta a una pregunta si la ha contestado correctamente?

Ejercicio:
Un laboratorio hace una prueba sanguínea para detectar una enfermedad. Dicho experimento detecta la enfermedad un 99 % de las veces si la enfermedad está realmente presente en la sangre. Sin embargo, también existen "falsos positivos": hay un 1 % de probabilidad de que a una persona sana se le detecte la enfermedad. Si solo el 0.5 % de la población padece la enfermedad, ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga realmente la enfermedad si el test ha salido positivo?

Independencia de sucesos

Independencia de sucesos

En los ejemplos de la sección anterior muestran que, en general $P(B \mid A)$ es distinto de $P(B)$. Sin embargo, es posible imaginar situaciones en las que el conocimiento de A no afecte a $P(B \mid A)$.

Ejemplo: Independencia de sucesos
Sea B el evento "sacar un 5 en la tirada de un dado" y A el evento "Hoy llueve". Parece lógico suponer que $P(B) = P(B \mid A)$.

Si $P(B) = P(B \mid A)$, se sigue que

$$P(B \cap A) = P(B)P(A).$$

Ejercicio: Independencia de sucesos
Demuestra que

$$P(B) = P(B \mid A) \leftrightarrow P(B \cap A) = P(B)P(A).$$

Independencia de sucesos
Dos sucesos B y A se dicen **independientes** si

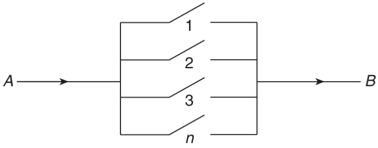
$$P(B \cap A) = P(B)P(A).$$

Ejercicio: Independencia de sucesos

Se lanza una moneda y un dado. ¿Son independientes los sucesos de obtener cara con la moneda y obtener más de 2 con el dado?

Ejercicio: Independencia de sucesos

Un sistema se dice en paralelo si funciona cuando al menos uno de sus componentes funciona.



Si la probabilidad de que el componente i-ésimo funcione es p_i, ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?

Ejercicio: Independencia de sucesos

Se tira 5 veces una moneda trucada con probabilidad de cara p. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras?