Universidad de Alcalá

Sistemas de Control Inteligente

Tema 2. Introducción al Control Discreto

Luis Miguel Bergasa
Cristina Losada Gutiérrez
Marta Marrón Romera
Elena López Guillén

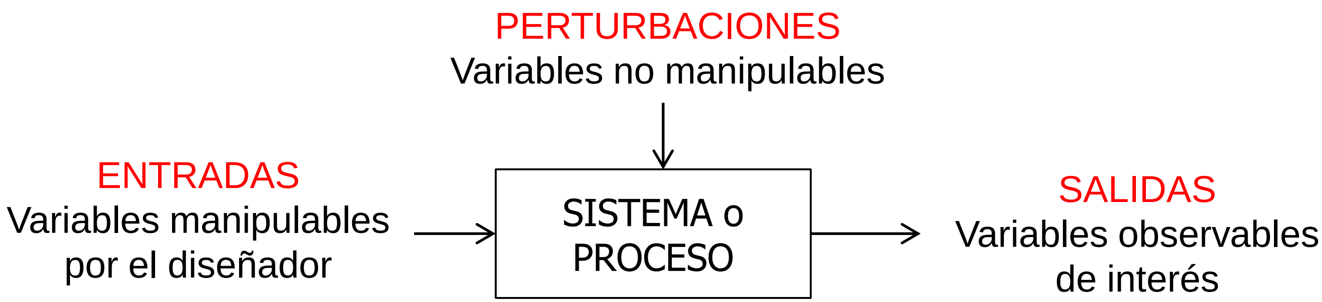
Departamento
de Electrónica

Índice

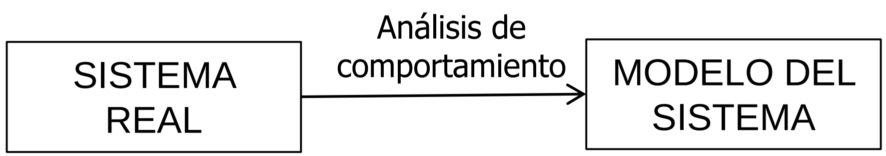
1. **Concepto de sistema dinámico**
2. **Revisión de tipos de sistemas**
3. **Modelos en el dominio del tiempo: ecuaciones diferenciales y en diferencias**
4. **Herramientas matemáticas: transformada Z**
5. Modelos en el dominio transformado: función de transferencia y matriz de transferencia
6. Diagramas de bloques y su simplificación
7. Sistemas muestreados
8. Modelos discretos de sistemas muestreados

1. Concepto de Sistema Dinámico

SISTEMA o PROCESO: es toda realidad en la que interactúan variables de diferentes tipos para producir señales observables.



MODELO DE UN SISTEMA: descripción matemática del mismo que permite predecir su comportamiento sin necesidad de experimentar sobre él.



Utilidad:

- Mejorar la comprensión del sistema
- Realizar simulaciones
- Punto de partida para diseñar controladores

2. Revisión de Tipos de Sistemas

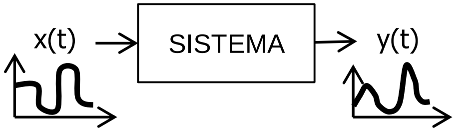
x(t) → SISTEMA → y(t)

LINEALES Si al aplicar $x_1(t)$ la salida es $y_1(t)$… … y al aplicar $x_2(t)$ la salida es $y_2(t)$… entonces al aplicar $ax_1(t) \pm bx_2(t)$, la salida es $ay_1(t) \pm by_2(t)$ Permiten aplicar SUPERPOSICIÓN	**NO LINEALES** No cumplen la condición de linealidad
INVARIANTES Si al aplicar x(t) la salida es y(t)… entonces al aplicar x(t-T), la salida es y(t-T) La salida es la misma independientemente del momento en que se aplica la entrada	**VARIANTES** No cumplen la condición de invarianza
CAUSALES La salida nunca precede a la entrada	**NO CAUSALES** No cumplen la propiedad de causalidad
ESTABLES Ante entradas acotadas, sólo producen salidas acotadas	**INESTABLES** No cumplen condición de estabilidad
ESTÁTICOS La salida actual sólo depende del valor de la entrada en el tiempo actual	**DINÁMICOS** La salida actual depende de la entrada y del momento en que se aplicó ("evolucionan" ante la aplicación de una entrada)
CONTINUOS (en tiempo continuo) Las señales de entrada y salida pueden cambiar en cualquier instante de tiempo	**DISCRETOS (en tiempo discreto)** Las señales de entrada y salida sólo cambian en instantes de tiempo periódicos

Universidad de Alcalá

3. Modelos en el dominio del tiempo: ecuaciones diferenciales y en diferencias

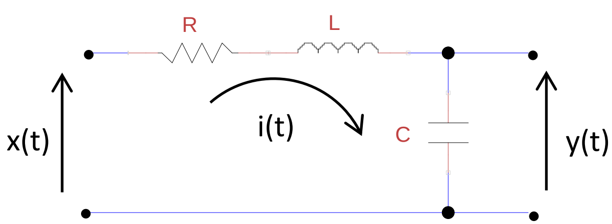
3.1. Modelos de sistemas en TIEMPO CONTINUO



- El estudio físico de sistemas dinámicos en tiempo continuo permite obtener las **ECUACIONES DIFERENCIALES** que modelan su comportamiento (aplicable a sistemas eléctricos, mecánicos, de fluidos, térmicos, etc.)
- La TEORÍA CLÁSICA DE CONTROL se centra en el estudio de sistemas lineales e invariantes (LTI), que se describen mediante **ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES E INVARIANTES** (con coeficientes constantes). Esto permite recurrir a la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones, y utilizar funciones de transferencia como modelos en el dominio transformado que simplifican el estudio de los sistemas.
- Existen otros tipos de modelos derivados de las ecuaciones diferenciales, como los **MODELOS EN EL ESPACIO DE ESTADOS** que utiliza la TEORÍA MODERNA DE CONTROL.

3. Modelos en el dominio del tiempo: ecuaciones diferenciales y en diferencias

* Ejemplo de obtención de la ecuación diferencial lineal e invariante de un sistema eléctrico:



$$x(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt$$

Utilizando el operador derivada D:

$$x(t) = \left[\ R + LD + \frac{1}{CD}\ \right] \cdot i(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{x(t)}{R + LD + \frac{1}{CD}}$$

$$y(t) = \frac{1}{CD} \cdot i(t) = \frac{x(t)}{CLD^2 + RCD + 1}$$

$$CLD^2 y(t) + RCDy(t) + y(t) = x(t)$$

$$CLy''(t) + RCy'(t) + y(t) = x(t)$$

En una ecuación diferencial aparecen la entrada, la salida, y sus derivadas

Conocida la entrada x(t), permite obtener la salida y(t), despejándola de la ecuación diferencial

La resolución de ecuaciones diferenciales es matemáticamente tediosa, pero el uso de la **TRANSFORMADA DE LAPLACE** facilita la tarea

3.2. Modelos de sistemas en TIEMPO DISCRETO

En un sistema discreto las señales (SECUENCIAS) son función del número de muestra k:

Los sistemas en tiempo discreto se describen mediante **ECUACIONES EN DIFERENCIAS.**

Para sistemas LTI se utilizan **EC. EN DIFERENCIAS LINEALES E INVARIANTES** (con coeficientes constantes) cuya expresión genérica es:

$$\boxed{y(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot x(k-i) - \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot y(k-j)}$$

En una ecuación en diferencias la salida actual y(k) es función de la entrada actual x(k) y de entradas y salidas anteriores x(k-i) e y(k-j)

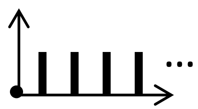
Estas ecuaciones pueden resolverse fácilmente mediante el uso de la <u>transformada Z.</u>

La teoría moderna de control utiliza también **MODELOS EN EL ESPACIO DE ESTADOS** para representar los sistemas en tiempo discreto.

3. Modelos en el dominio del tiempo: ecuaciones diferenciales y en diferencias

* <u>Ejemplo</u>: Supóngase el siguiente sistema discreto:

x(k) → SISTEMA → y(k)



¿Cómo obtenemos la salida y(k) si la entrada aplicada es x(k)={0,1,1,1,1,...}

Ec. en diferencias: $y(k) = 3x(k) + 2x(k-1) - y(k-1)$

Varias formas de obtener y(k):

1. Ir dando valores a k en la ecuación en diferencias desde k=0 (<u>resolver</u>)

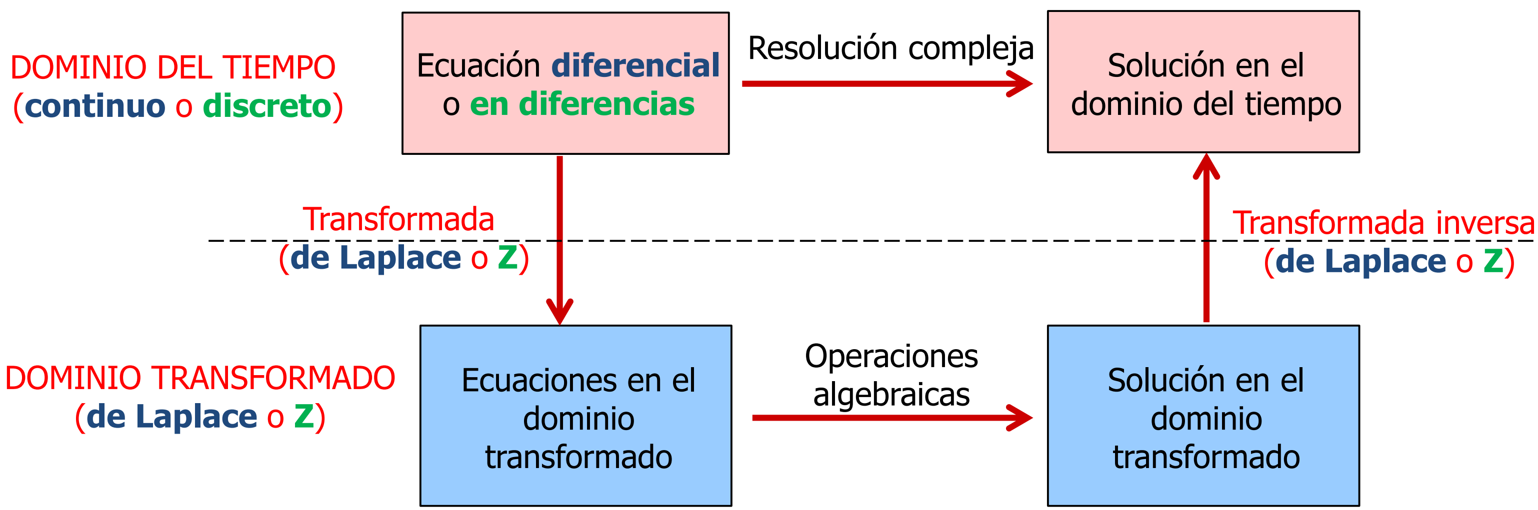
   Se obtiene y(k)={0,3,2,3,2,...} ¡Solo permite calcular un número finito de los primeros valores de la secuencia!

2. Resolver la ecuación en diferencias. Matemáticamente tedioso.

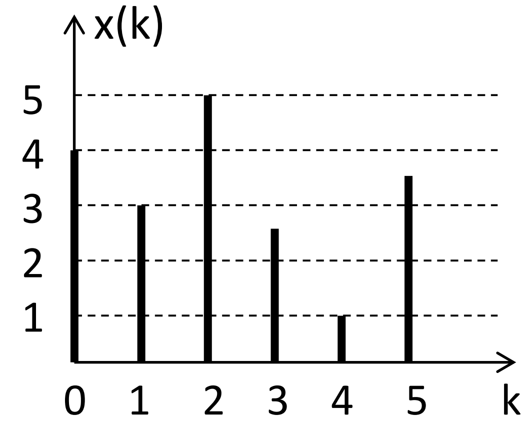
3. Utilizar la **TRANSFORMADA Z**, de la misma manera que se utiliza la transformada de Laplace para sistemas continuos.

4.1. Utilidad de los dominios transformados

Para sistemas (continuos o discretos) LINEALES e INVARIANTES, el uso de dominios transformados (Laplace o Z) convierte las ecuaciones diferenciales o en diferencias en ecuaciones algebraicas más sencillas de resolver.



4.2. Revisión de la Transformada Z



a) Aspectos previos sobre secuencias discretas

La secuencia de la figura puede representarse de diferentes formas:

1. Gráficamente (figura)
2. Indicando los valores de las muestras entre llaves: $x(k)=\{ 4, 3, 5, 2.5, 1, 3.5, \ldots \}$
3. Como suma ponderada (superposición) de secuencias impulso (delta $\delta(k)$) desplazadas: $x(k)=4\delta(k)+3\delta(k-1)+5\delta(k-2)+2.5\delta(k-3)+\delta(k-4)+3.5\delta(k-5)+\ldots$
4. Indicando valores concretos de la secuencia:

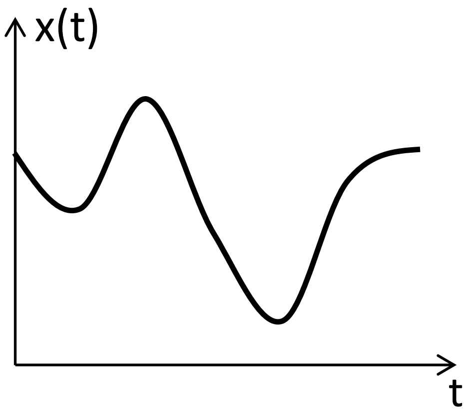
   Ej: $x(0)=4;$ $x(1)=3;$ $x(4)=1;$

Algunas secuencias responden a <u>expresiones paramétricas en función de k</u> que permiten calcular directamente el valor de cualquier muestra (<u>expresión en forma cerrada de x(k)</u>). Ejs: $x(k)=5^k$; $x(k)=3k+\mathrm{sen}(10k\pi)$

Universidad de Alcalá

4. Herramientas matemáticas: transformada Z

Muchas secuencias discretas se obtienen por MUESTREO de señales continuas:

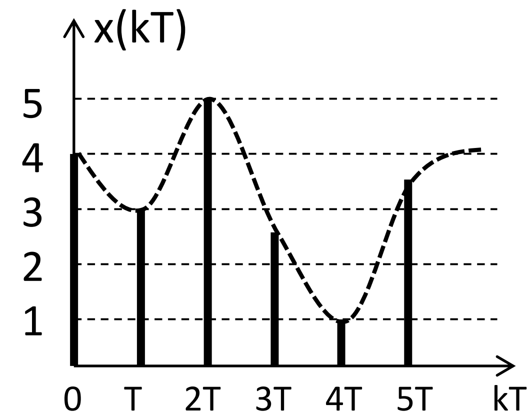


Señal en tiempo continuo
x(t)

MUESTREO periódico

t=KT

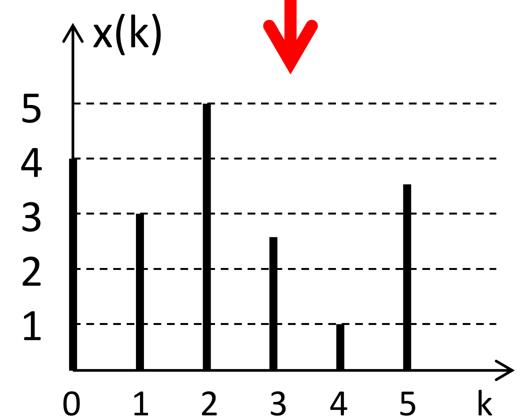
(T= periodo de muestreo)



Señal **MUESTREADA** en tiempo discreto
x(kT)

El nombre de la señal mantiene información sobre el periodo de muestreo T

Una vez en el plano discreto podemos prescindir de la información de T, y llamamos a la secuencia x(k)



x(kT) y x(k) son la misma secuencia discreta

b) Definición de transformada Z

Secuencia en el dominio del tiempo discreto k $\quad x(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \quad$ Transformada Z de x(k)

z es una variable compleja (se habla de PLANO Z)

Para secuencias causales (no existen para k<0), se utiliza la TRANSFORMADA Z UNILATERAL:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k}$$

La región del plano Z para la que X(z) converge se denomina REGIÓN DE CONVERGENCIA (ROC). Para señales causales, la ROC es el exterior del círculo que contiene a todos los polos de X(z). No suele especificarse.

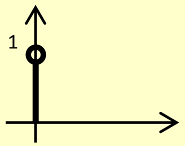
Para secuencias típicas, encontramos TABLAS DE TRANSFORMADAS.

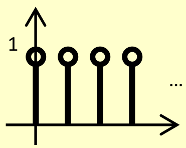
4. Herramientas matemáticas: transformada Z

c) Transformada Z de secuencias típicas

Las más importantes:

Kronecker delta:



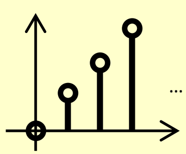


x(k)	X(z)
Impulso unitario $\delta(k)$	1
Escalón unitario u(k)	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
k	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$
a^k	$\frac{1}{1-a \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$
...	...

Todas las secuencias son CAUSALES (no existen para k<0).

Para remarcarlo, habitualmente se multiplican por la secuencia escalón.

Ej: $x(k)=k \cdot u(k)$



(ver más en tablas de transformadas – Tabla 13.1 Dorf)
Sistemas de Control Moderno, - Richard C. Dorf & Robert H. Bishop

MUY ÚTIL: Existen tablas que presentan de forma combinada la transformada de Laplace de señales típicas, y la transformada Z de las secuencias que se obtienen al muestrearla.

4. Herramientas matemáticas: transformada Z

Para la asignatura utilizaremos la tabla 2-1 del libro "Sistemas de Control en Tiempo Discreto" (K.Ogata):

Transformada de Laplace de la señal continua

Señal continua

Secuencia discreta obtenida por MUESTREO de la señal continua

Transformada Z de la secuencia discreta (aparece T como una constante en las expresiones)

t=kT

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ or $x(k)$	$X(z)$
1.	—	—	Kronecker delta $\delta_0(k)$ 1 $k=0$ 0 $k\neq 0$	1
2.	—	—	$\delta_0(n-k)$ 1 $n=k$ 0 $n\neq k$	z^{-k}
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$

4. Herramientas matemáticas: transformada Z

d) Propiedades importantes de la transformada Z

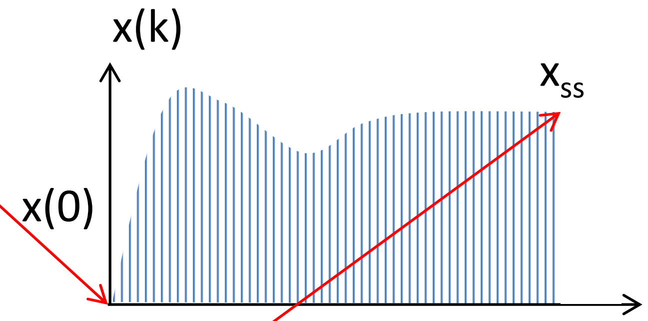
	Operación dominio tiempo	Resultado dominio Z
Escalado:	$A \cdot x(k)$	$A \cdot X(z)$
Linealidad (superposición):	$x_1(k) \pm x_2(k)$	$X_1(z) \pm X_2(z)$
Desplazam. en el tiempo:	$x(k-n)$ (retardo de n muestras)	$X(z) \cdot z^{-n}$
Convolución en el tiempo:	$x(k) \circledast y(k)$	$X(z) \cdot Y(z)$

(ver más en tablas de propiedades – Tabla 13.2 Dorf)
Sistemas de Control Moderno, - Richard C. Dorf & Robert H. Bishop

e) Teoremas importantes de la transformada Z

Teorema del valor inicial: permite calcular el valor inicial de la secuencia a partir de su transformada.

$$\boxed{x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)}$$



Teorema del valor final: permite calcular el valor final de secuencias estables a partir de su transformada. La secuencia es estable si $(1\text{-}z^{-1})\cdot X(z)$ presenta todos los polos dentro del círculo unidad del plano Z.

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} x(k) = x_{ss} = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \cdot X(z)}$$

4. Herramientas matemáticas: transformada Z

f) Transformada Z inversa

Transformada Z $X(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x(k)$ Secuencia en el dominio del tiempo discreto

Definición: $$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\cdot z^{k-1}\cdot dz$$

(donde c es una curva que envuelve a todos los polos de $X(z)z^{k-1}$)

En la práctica, se recurre a otros métodos más sencillos:

1. Si X(z) es una serie finita de potencias de z^{-1}, el cálculo es directo:

   Ej: $X(z)=1+3z^{-2}+2z^{-3}+4z^{-5}$ → $x(k)=\delta(k)+3\delta(k-2)+2\delta(k-3)+4\delta(k-5)$

2. Si X(z) es un cociente de polinomios de z o z^{-1} (X(z)=N(z)/D(z)):
   - Podemos calcular varios términos del cociente, para obtener un número finito de las primeras muestras de x(k) – **método de división directa**
   - Podemos **expandir en fracciones parciales y aplicar tablas** para obtener una expresión en forma cerrada de x(k) (igual que en Laplace)

4. Herramientas matemáticas: transformada Z

Ejemplos:

Ej 1: **MÉTODO DE LA DIVISIÓN DIRECTA.**
Obtener las 5 primeras muestras de la secuencia x(k) cuya transformada Z es: $X(z) = \dfrac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}$

PASOS:
1. Expresar X(z) como cociente de polinomios en z^{-1}
2. Realizar la división, calculando el número de términos necesarios.
3. Realizar la transformada inversa de la serie de potencias de z^{-1} obtenida.

SOLUCIÓN: x(k)={0, 10, 17, 18.4, 18.68, … }

Ej 2: **EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES**
Obtener la expresión cerrada de la secuencia x(k) cuya transformada Z es: $X(z) = \dfrac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}$

PASOS:
1. Expandir X(z) en fracciones parciales
2. Expresar el resultado en z^{-1} para poder relacionar los términos con las tablas
3. Realizar la transformada inversa utilizando las tablas.

SOLUCIÓN: $x(k)=[18.75 - 8.75\cdot(0.2)^{k-1}]\cdot u(k-1)$

g) Ejemplo de resolución de una ecuación en diferencias utilizando la transformada Z

Trabajo personal: resolver la cuestión planteada en la diapositiva de la pg. 7 utilizando la transformada Z.

PASOS A SEGUIR :

1. Sustituir la entrada x(k) en la ecuación en diferencias.
2. Pasar la expresión al dominio Z.
3. Resolver (despejar) Y(z) en el dominio Z.
4. Realizar la transformada Z inversa para obtener y(k).

Solución: $y(k)=[2.5 + 0.5(-1)^k] \cdot u(k)$

Índice

1. Concepto de sistema dinámico
2. Revisión de tipos de sistemas
3. Modelos en el dominio del tiempo: ecuaciones diferenciales y en diferencias
4. Herramientas matemáticas: transformada Z
5. **Modelos en el dominio transformado: función de transferencia y matriz de transferencia**
6. **Diagramas de bloques y su simplificación**
7. Sistemas muestreados
8. Modelos discretos de sistemas muestreados

5. Modelos en el dominio transformado: función de transferencia

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA (FT): permite modelar directamente en el dominio transformado (Laplace o Z) el comportamiento de sistemas dinámicos <u>lineales e invariantes</u>, siempre que partan del reposo (<u>condiciones iniciales nulas</u>).

x(t) → [SISTEMA CONTINUO con FT H(s)] → y(t)

x(k) → [SISTEMA DISCRETO con FT H(z)] → y(k)

Dos formas de definirla:

1. Cociente entre la transformada de la salida y la de la entrada:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

2. Transformada de la respuesta impulsiva del sistema h(t) o h(k) (respuesta cuando en la entrada se aplica un impulso unitario x(t)=δ(t) o x(k)= δ(k))

$$H(s) = \mathcal{L}\left[h(t)\right] \qquad H(z) = \mathcal{Z}\left[h(k)\right]$$

5. Modelos en el dominio transformado: matriz de transferencia

La FT sólo permite modelar **sistemas SISO** (Single Input – Single Output)

Para **sistemas MIMO** (Multiple Input – Multiple Output) lineales e invariantes, podemos aplicar superposición para obtener la **MATRIZ DE TRANSFERENCIA.**

[NOTA: Las siguientes expresiones son válidas tanto para sistemas continuos como para discretos, por lo que para generalizarlas, se han eliminado las variables **t** o **k** del nombre de las señales y **s** o **z** de sus transformadas]

FT's entre cada salida y entrada suponiendo el resto de entradas nulas:

$$G_{ij} = \left.\frac{Y_i}{X_j}\right|_{(\forall x \neq x_j)=0} \;;$$

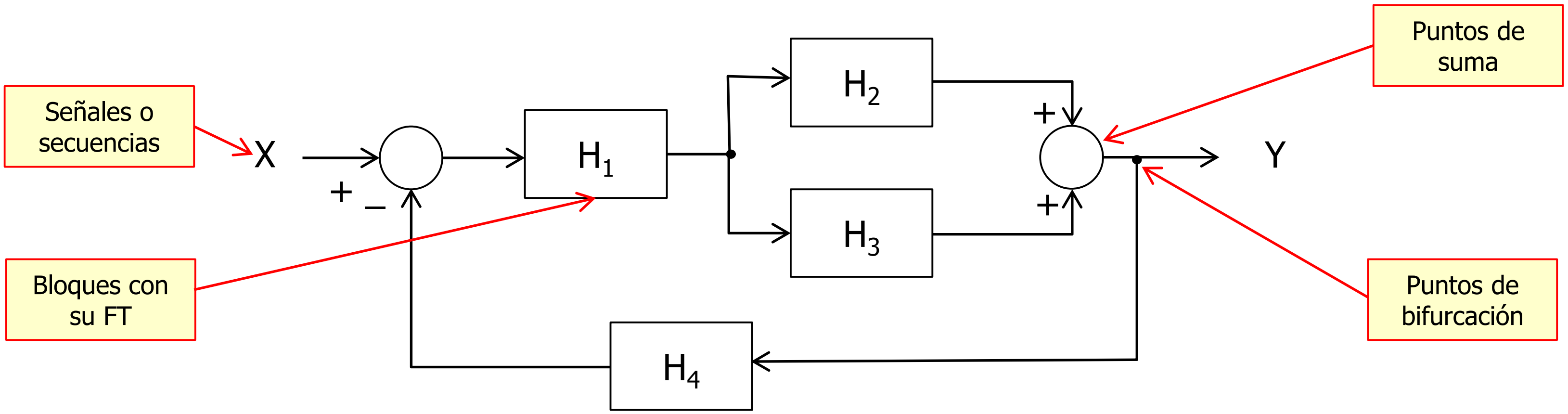
Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE TRANSFERENCIA del sistema, que engloba las funciones de transferencia individuales entre cada entrada y salida

6. Diagramas de bloques y su simplificación

Los sistemas de control complejos (continuos o discretos) se representan mediante diagramas de bloques, cada uno de ellos con su FT (NOTA: de nuevo excluimos las variables *s* y *z* de los nombres de las señales y las funciones de transferencia, para dar generalidad)

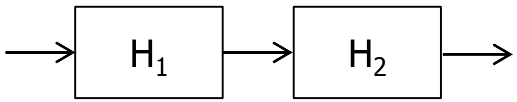


Métodos para obtener la FT total del sistema $H_{TOT} = \dfrac{Y}{X}$:

1. Aplicar reglas de simplificación de diagramas de bloques (álgebra de bloques)
2. Regla de Mason (para diagramas de bloques más complejos)

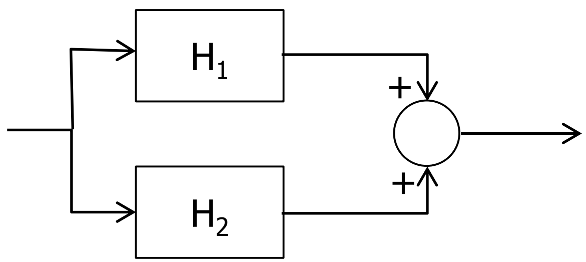
6.1. Reglas de simplificación de diagramas de bloques

a) Conexión en serie. Se multiplican las funciones de transferencia



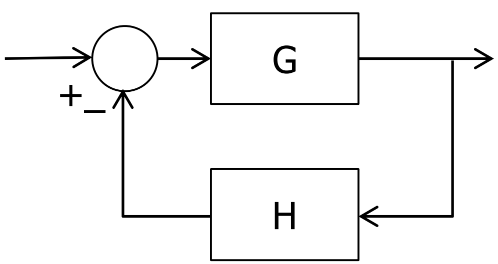
$$H_{TOT} = H_1 \cdot H_2$$

b) Conexión en paralelo. Se suman las funciones de transferencia



$$H_{TOT}(s) = H_1 + H_2$$

c) Conexión en realimentación (negativa para sistema estable)



$$H_{TOT} = \frac{G}{1 + G \cdot H}$$

FT o “ganancia” en lazo cerrado

Se define también la FT o “ganancia” en lazo abierto:

$$H_{lazo} = G \cdot H$$

Universidad de Alcalá

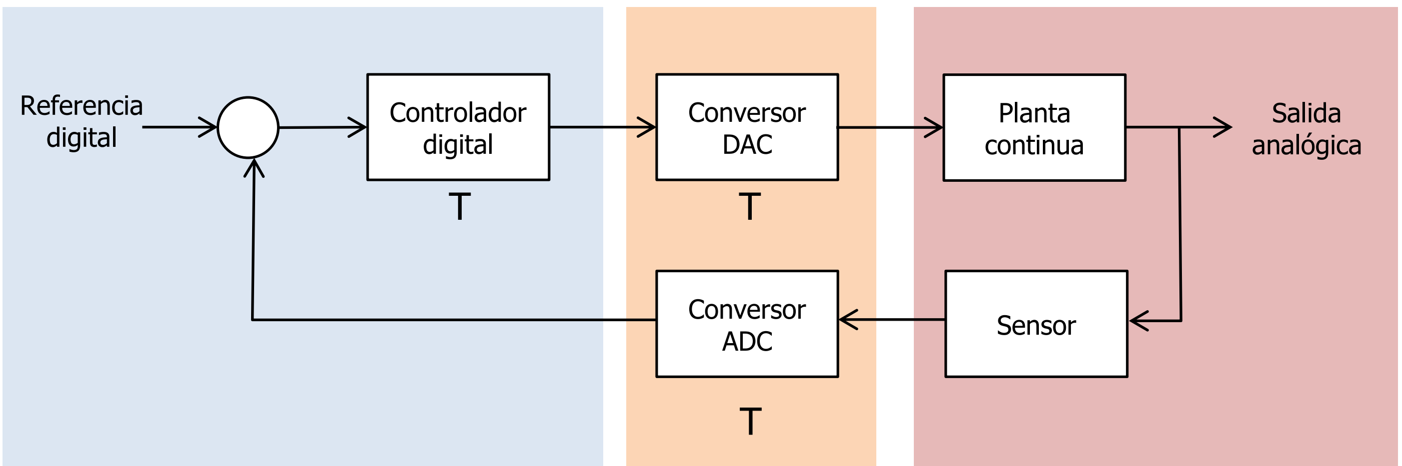
Índice

1. Concepto de sistema dinámico
2. Revisión de tipos de sistemas
3. Modelos en el dominio del tiempo: ecuaciones diferenciales y en diferencias
4. Herramientas matemáticas: transformada de Laplace y transformada Z
5. Modelos en el dominio transformado: función de transferencia y matriz de transferencia
6. Diagramas de bloques y su simplificación
7. **Sistemas muestreados**
8. **Modelos discretos de sistemas muestreados**

7. Sistemas Muestreados

En la práctica suele ser habitual que en un sistema de control COEXISTAN procesos y señales analógicos con procesos y secuencias digitales. Esto obliga a que además existan bloques de conversión de datos (analógico/digital –ADC- y digital/analógico-DAC)

Un ejemplo típico se muestra en la siguiente figura:



El controlador y los conversores trabajan sincronizados con el mismo **PERIODO DE MUESTREO T**

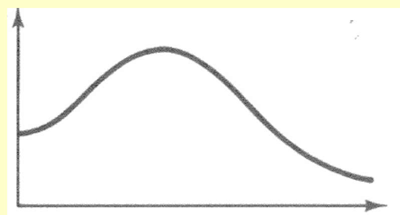
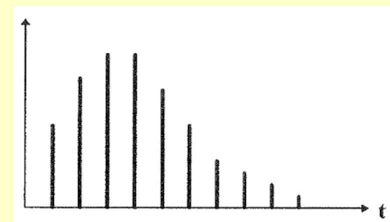
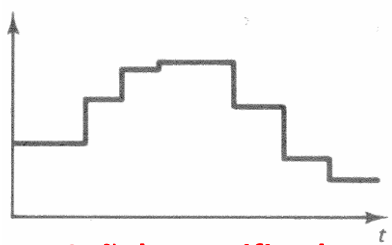
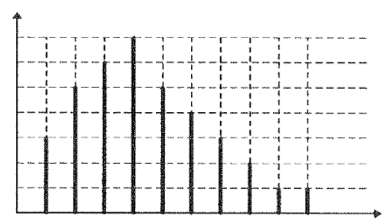
El controlador actualmente tiende a implementarse sobre dispositivos digitales (microprocesadores, microcontroladores, etc.)

Necesidad de bloques de conversión

La planta y el sensor suelen ser generalmente procesos continuos

7. Sistemas Muestreados

En este tipo de sistemas de control "mixtos", aparecen diferentes tipos de señales a lo largo del lazo:

		Según el eje de tiempos	
		CONTINUO	DISCRETO
Según el eje de amplitudes	CONTINUO	 Señal analógica	 Señal muestreada
	DISCRETO	 Señal cuantificada	 Señal digital

Nosotros sólo estudiamos la discretización en el eje de tiempos.

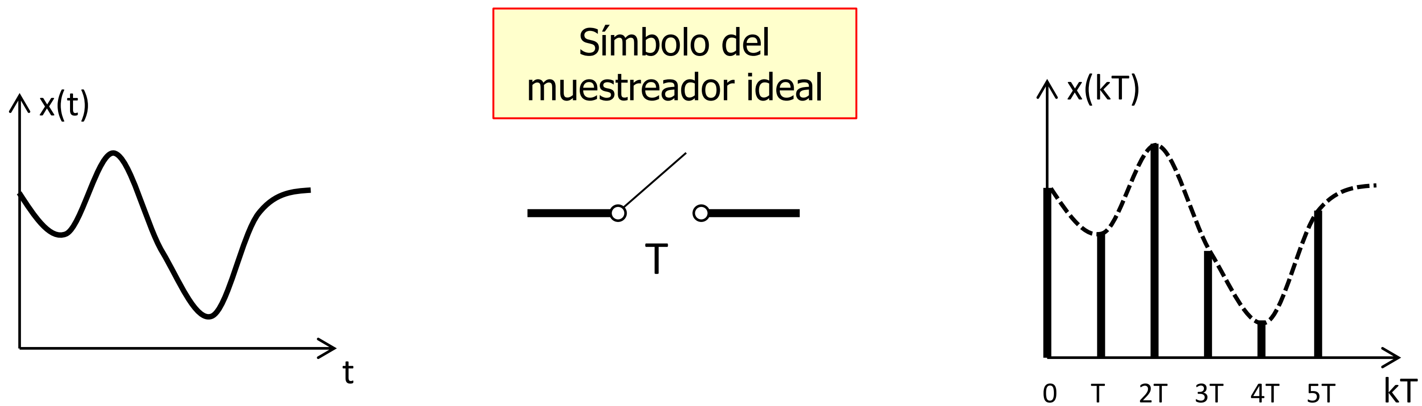
A los sistemas que contienen bloques y sistemas tanto en TIEMPO CONTINUO como en TIEMPO DISCRETO se les denomina **SISTEMAS MUESTREADOS**.

7. Sistemas Muestreados

7.1. Conversión de datos

Para el estudio de los sistemas de control muestreados, se utilizan modelos ideales de los procesos de conversión A/D y D/A.

a) Conversión A/D. El muestreador ideal.

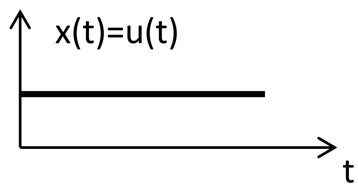


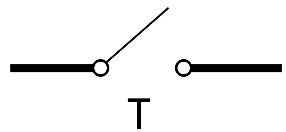
Parámetro = **Periodo de muestreo (T)**

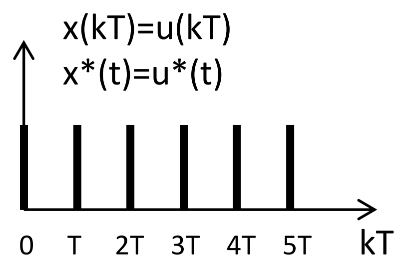
<u>¿Cómo se escoge T?</u> En un sistema de control **no es suficiente con cumplir el "teorema de muestreo de Nyquist"**. Hay que sobremuestrear la señal para tener más información de su dinámica.

7. Sistemas Muestreados

<u>Conceptos importantes</u> (los vemos sobre el ejemplo de muestreo de un escalón continuo, pero es generalizable a cualquier señal)







ENTRADA DEL MUESTREADOR

- Es una señal <u>en tiempo continuo</u>
  Como tal, se define su transformada de Laplace X(s): $X(s) = \frac{1}{s}$

Se observa que las transformadas coinciden si se hace $z=e^{sT}$. Esto sucede para cualquier señal.
IMPORTANTE: Esto nos da la **relación entre los planos o variables s y z:**

$$\boxed{z = e^{sT}}$$

SALIDA DEL MUESTREADOR

- Podemos considerarla una <u>secuencia en tiempo discreto</u> **x(kT)=x(k).** En tal caso, se define su transformada Z:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

- Podemos considerarla también como una <u>señal en tiempo continuo</u> **x*(t)** ("señal muestreada") **.** En tal caso, se define su transformada de Laplace:

$$X(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

7. Sistemas Muestreados

Utilizamos una <u>"nomenclatura" especial para la operación de muestreo</u>:

$\boxed{Z\{X(s)\}}$

¿Transformada Z de una transformada de Laplace?
Esta operación no existe como tal (sólo transformada Z de secuencias)
Pero utilizamos esta nomenclatura para "resumir" la función de un muestreador, del modo que se indica a continuación:

$$X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) \xrightarrow{\text{MUESTREO}} x(kT) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \boxed{X(z)=Z\{X(s)\}}$$

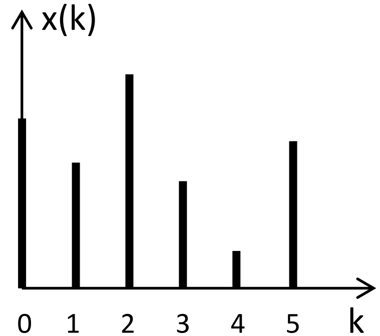
En el ejemplo del escalón de la diapositiva anterior: $Z\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$

La forma más sencilla de calcular esta operación es mediante TABLAS:

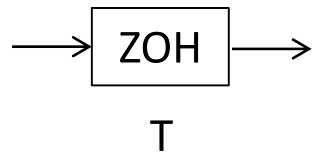
	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ or $x(k)$	$X(z)$
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$

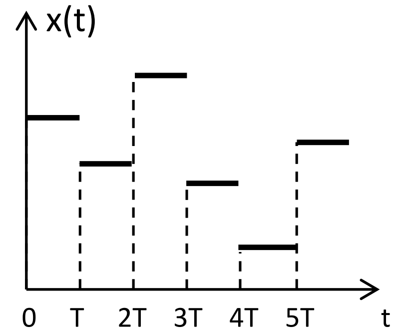
7. Sistemas Muestreados

b) Conversión D/A. El mantenedor de orden cero (Zero Order Hold- ZOH)



Símbolo del ZOH

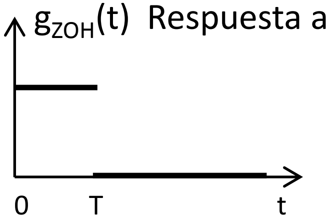




Mantiene constante el valor de cada muestra hasta el siguiente periodo de muestreo T.

Para las mismas muestras de entrada, la señal de salida depende de T.

Este bloque TIENE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN LAPLACE (ya que la entrada puede considerarse un tren de impulsos en tiempo continuo). Puede calcularse como la transformada de Laplace de su respuesta al impulso:



Respuesta al impulso de un ZOH

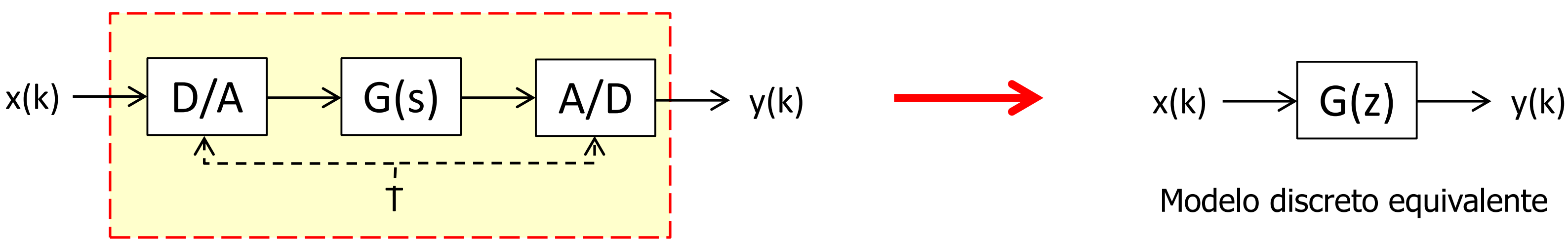
$$g_{ZOH}(t) = u(t) - u(t-T)$$

$$\boxed{G_{ZOH}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}}$$

8. Modelos Discretos de Sistemas Muestreados

¿**Cómo se modelan los sistemas muestreados**, en los que existen bloques continuos, discretos y de conversión?

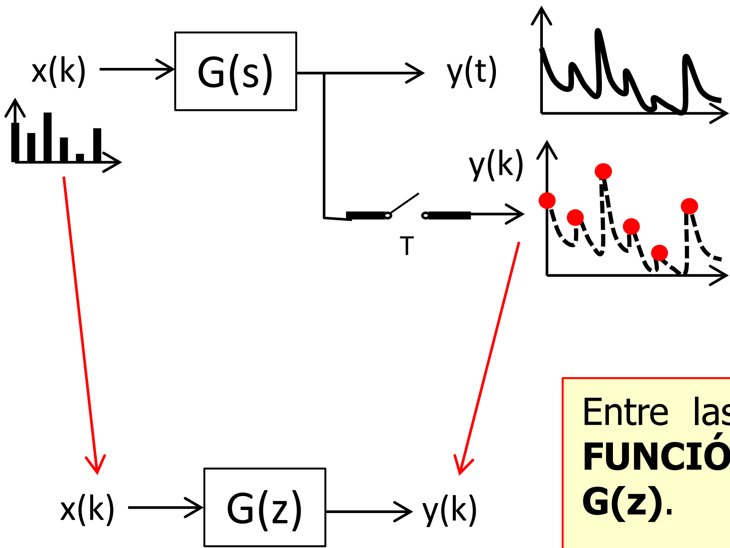
- OBJETIVO: Obtener, en el caso de que exista, un <u>modelo equivalente del sistema en el dominio discreto</u>.
- REGLA GENERAL: Entre dos puntos cualesquiera de un lazo de control en los que existan muestras (secuencias discretas) es posible encontrar una función de transferencia discreta equivalente.
- EJEMPLO TÍPICO:



Modelo discreto equivalente

8.1. Equivalente discreto de un sistema continuo con entrada muestreada

Supóngase un sistema continuo a cuya entrada llega una señal muestreada (secuencia discreta). Ésta puede proceder de un bloque discreto o de un conversor A/D (muestreador).



La salida del bloque continuo es una señal continua.

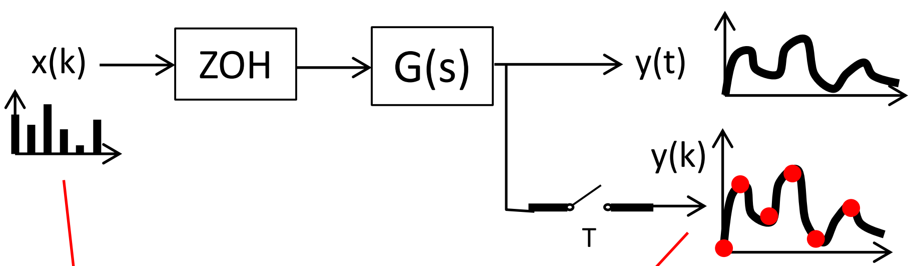
Si sólo nos interesan las muestras de la señal de salida, podemos poner un muestreador "ficticio" a la salida (no altera el funcionamiento del conjunto).

Entre las muestras de entrada y las de salida **EXISTE UNA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA EQUIVALENTE G(z)**.

Se puede demostrar que: $\boxed{G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}}$

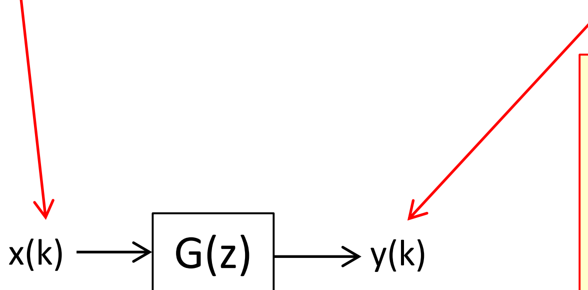
8.2. Equivalente discreto de un sistema continuo precedido por ZOH

Supóngase un sistema continuo precedido por un ZOH (conversor D/A) al cual le llega una señal muestreada (secuencia discreta).



De nuevo la salida es una señal continua…

… pero podemos quedarnos con las muestras poniendo el muestreador "ficticio".



Entre las muestras de entrada y las de salida **EXISTE UNA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA EQUIVALENTE G(z)**.

Como el ZOH es un bloque continuo en serie con G(s), tenemos:

$$G(z) = Z\{G_{ZOH}(s)\cdot G(s)\} = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot G(s)\right\} = Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} - Z\left\{\frac{G(s)\cdot e^{-sT}}{s}\right\} =$$

$$= Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} - z^{-1}\cdot Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \boxed{\left(1-z^{-1}\right)\cdot Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = G(z)}$$

Retardo T (una muestra)

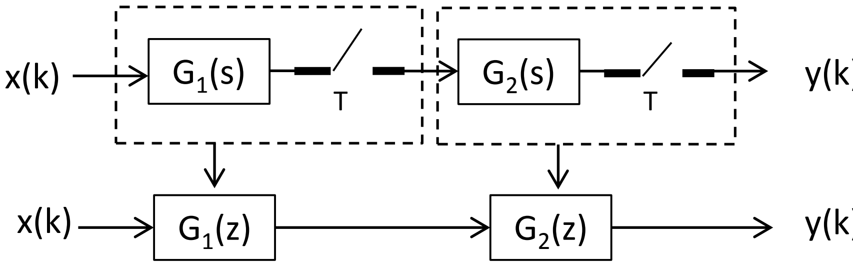
8.3. Conexión de sistemas muestreados

Conociendo las "estructuras" anteriores podemos estudiar conexiones más complejas:

a) Ejemplos de conexiones en serie

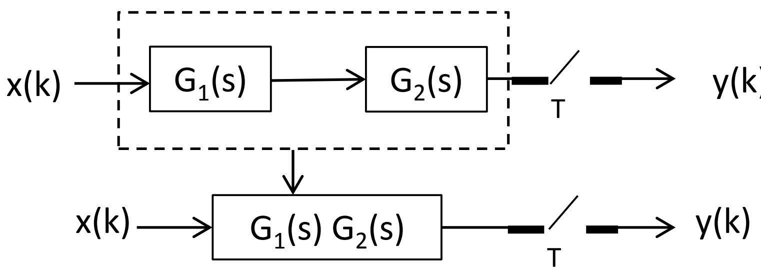
CON MUESTREADOR INTERCALADO:

$$G_{TOT}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1(z) \cdot G_2(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{G_2(s)\}$$



SIN MUESTREADOR INTERCALADO:

$$G_{TOT}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1G_2(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s) \cdot G_2(s)\}$$

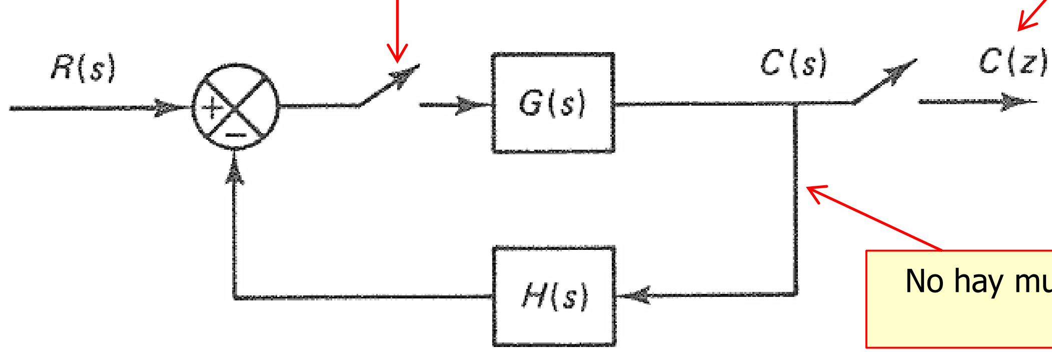


IMPORTANTE: Observar esta nomenclatura para indicar que primero se multiplican los sistemas continuos en Laplace, y después se calcula su transf Z

b) Ejemplos de conexiones en realimentación

Este muestreador se puede desplazar antes del restador (a sus dos entradas), con lo que la entrada R(s) se convierte en entrada muestreada (discreta) R(z)

La salida también es una señal muestreada (discreta), por lo que podemos asegurar que todo el sistema tiene **FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA EQUIVALENTE**



No hay muestreador entre G(s) y H(s), al recorrer la ganancia de lazo

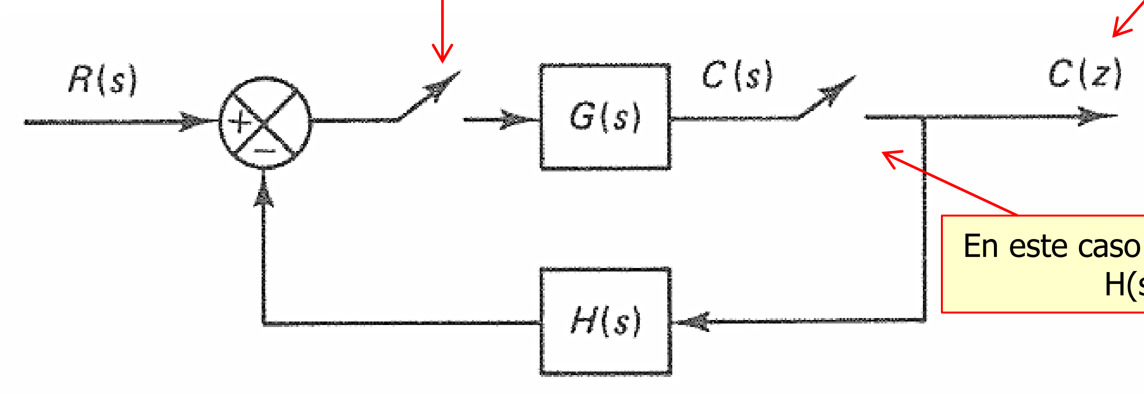
Aplicamos la regla general de conexiones en realimentación: $G_{TOT}(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_{trayecto\_directo}}{1+G_{lazo}}$

$$G_{TOT}(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{G(s)\}}{1+\mathcal{Z}\{G(s)\cdot H(s)\}}$$

8. Modelos Discretos de Sistemas Muestreados

Este muestreador se puede desplazar antes del restador (a sus dos entradas), con lo que la entrada R(s) se convierte en entrada muestreada (discreta) R(z)

La salida también es una señal muestreada (discreta), por lo que podemos asegurar que todo el sistema tiene **FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA EQUIVALENTE**



En este caso el muestreador se encuentra entre G(s) y H(s) al calcular la ganancia de lazo

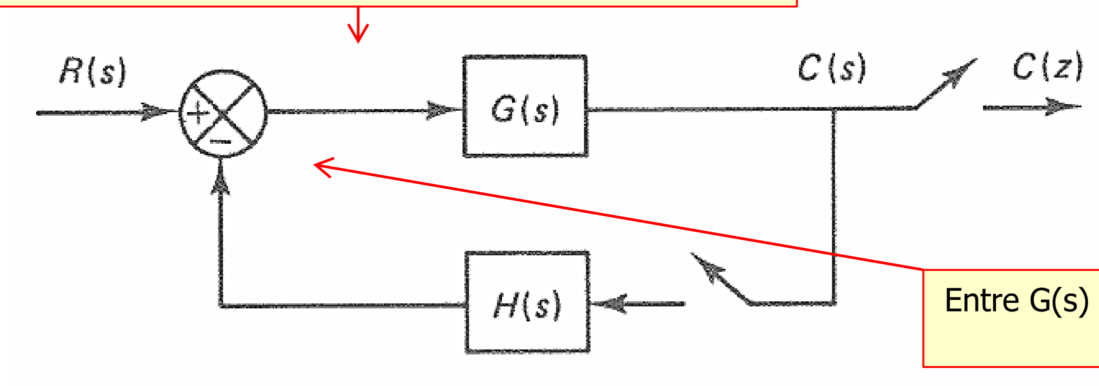
Aplicando de nuevo la regla general: $G_{TOT}(z) = \dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{G_{trayecto\_directo}}{1+G_{lazo}}$

$$G_{TOT}(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)\cdot H(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{G(s)\}}{1+\mathcal{Z}\{G(s)\}\cdot \mathcal{Z}\{H(s)\}}$$

8. Modelos Discretos de Sistemas Muestreados

No hay muestreador "asociado" a la entrada. La entrada continua entra directamente a un bloque continuo, por lo tanto no podremos separar sus muestras en la expresión final de C(z)

La salida sí que es muestreada. Pero como la entrada es continua, **NO EXISTE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA EQUIVALENTE.**
Pero siempre podemos calcular la expresión de C(z)



Entre G(s) y H(s) no existe muestreador intermedio en la zona del comparador

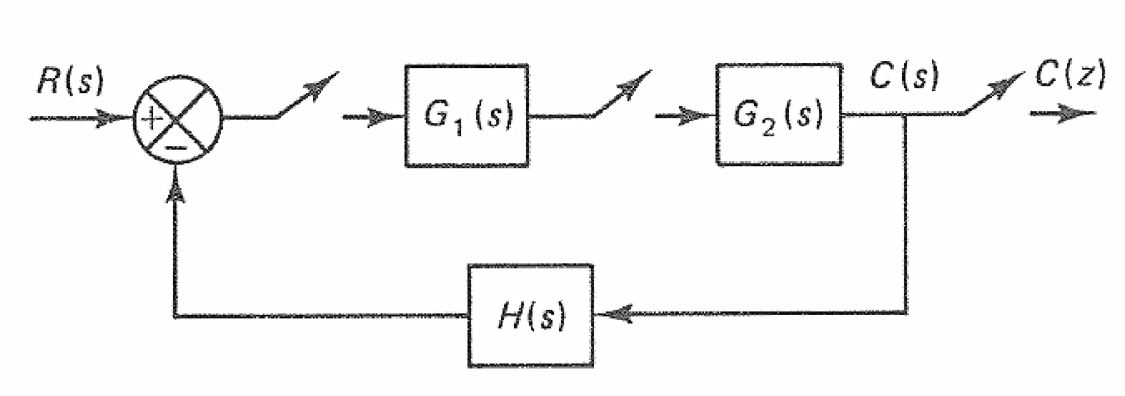
Por lo tanto, en este caso la expresión de C(z) es:

$$\boxed{C(z) = \frac{GR(z)}{1+GH(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{G(s)\cdot R(s)\}}{1+\mathcal{Z}\{G(s)\cdot H(s)\}}}$$

Para cada entrada particular R(s), hay que calcular la expresión completa al no existir FT discreta equivalente.

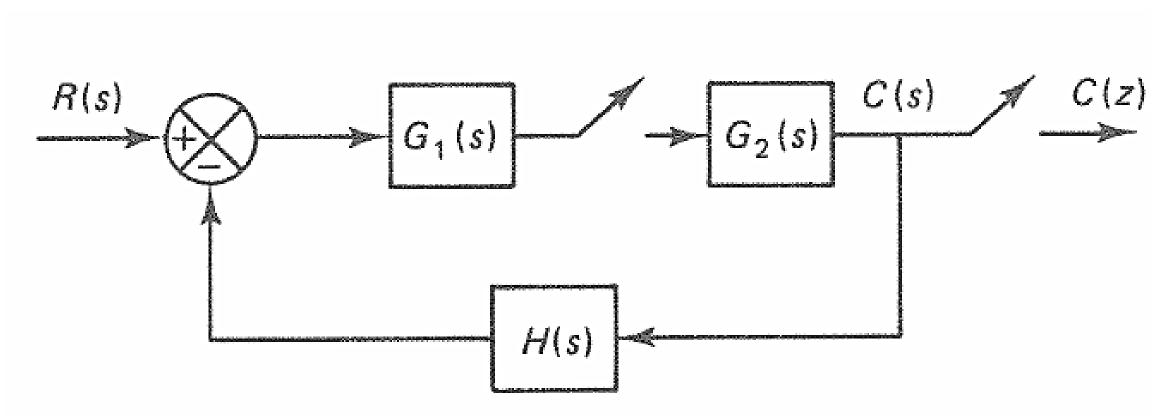
8. Modelos Discretos de Sistemas Muestreados

Más ejemplos (trabajo personal):



SOLUCIÓN: Sí existe FT discreta equivalente.

$$G_{TOT}(z) = \frac{G_1(z) \cdot G_2(z)}{1 + G_1(z) \cdot G_2H(z)}$$

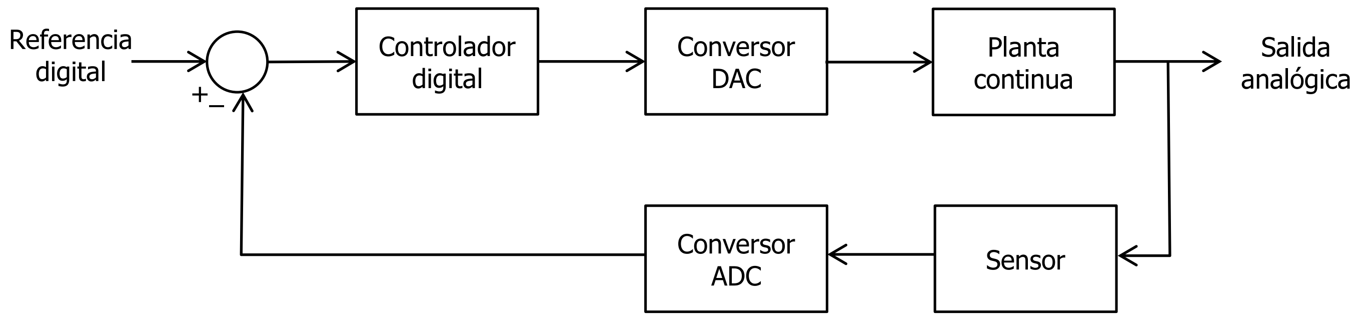


SOLUCIÓN: No existe FT discreta equivalente.

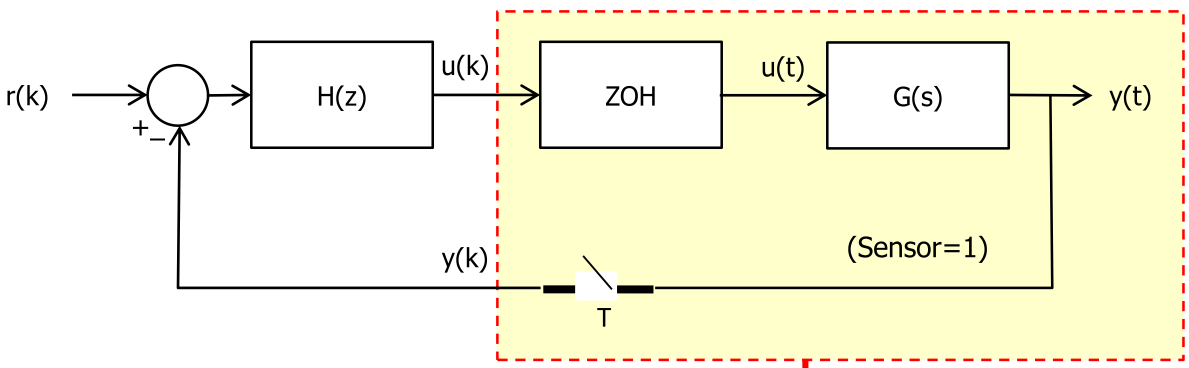
$$C(z) = \frac{G_1R(z) \cdot G_2(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$$

8. Modelos Discretos de Sistemas Muestreados

c) Ejemplo de topología típica de sistema de control digital



El diagrama de bloques utilizando los modelos vistos es:



EQUIVALENTE DISCRETO: $G(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$

Por lo tanto el sistema completo en el dominio discreto queda: