

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

Gustavo Henrique Mattos Silva
Jefferson Caon De Costa
Mateus Marochi Olenik
Renan Augusto Amorim Petrykoski
Tainan Barbosa Borges
Thyago De Azevedo Ribeiro



**PROJETO DE UM CONTROLADOR DE
TEMPERATURA**

Pato Branco
Agosto 2021

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Modelagem matemática	2
2.1	Validação do modelo	4
3	Desenvolvimento do projeto	6
3.1	Atuador	6
3.2	Modelagem por controle de ciclos	9
3.3	Sensor	10
3.4	Diagrama de blocos com sensor	12
3.5	Controlador PI	13
4	Resultados Obtidos	14
5	Conclusão	16
6	Referências Bibliográficas	17

1 Introdução

Este projeto tem como objetivo a projeção e simulação de um controlador de temperatura para o aquecimento de líquidos, sendo então um sistema térmico. O líquido a ser considerado para desenvolvimento será água. Faz-se indispensável a análise do comportamento do sistema conforme a variação da referência de entrada com objetivo da obtenção da mesma variação na saída.

Inicialmente será feita uma abordagem resumida sobre os aspectos físicos e matemáticos de o que são sistemas térmicos e como podem ser modelados. Posteriormente será feita a modelagem da planta a ser controlada, obtendo assim a função transferência a qual descreve a dinâmica do sistema. Seguindo, será desenvolvido o sistema de acionamento, utilizando um relé de estado sólido acionado por um sinal PWM (Pulse Width Modulation). Desenvolvendo então o projeto de um controlador proporcional integrador, responsável por zerar o erro do sistema em regime permanente e melhorar a resposta transitória. Por fim, toda modelagem teórica será validada comparando-a a modelagem experimental feita através do uso de softwares.

2 Modelagem matemática

Sistemas térmicos são aqueles que envolvem transferência de calor de uma substância para outra, de modo que podem ser analisados em função da resistência e da capacidade térmica. Para transferência de calor por condução ou convecção, a Equação Fundamental da Calorimetria representa a relação entre as variáveis do arranjo físico, por meio da seguinte expressão:

$$Q = mc(T_f - T_i) \quad (1)$$

$$Q = mc\Delta T \quad (2)$$

Em que:

Q = Quantidade de calor (Kcal).

m = Massa do líquido (Kg).

c = Calor específico do líquido ($\frac{Kcal}{KgC}$).

$\Delta T = T_f - T_i$ = Variação de temperatura (C).

Capacitância térmica é definida como:

$$C_T = mc \quad (3)$$

E a resistência térmica pode ser definida como:

$$R_T = \frac{\Delta T}{q} = \frac{\text{Variação da temperatura}}{\text{Variação na taxa de fluxo de calor por unidade de área}} \quad (4)$$

Para o sistema analisado, considera-se que a taxa de entrada de calor varia gradualmente de $H + h_i$, até $H + h_o$ de modo que a temperatura do fluido permuta de T_{ii} para $T_{ii} + T$. Desse modo, reescrevendo a expressão (4), a seguinte relação é verificada:

$$R_T = \frac{d(\Delta T)}{dq} = \frac{d(T_f - T_i)}{dq} = \frac{d(T_{ii} + T - T_{ii})}{dq} = \frac{d(T)}{dq h_o} = \frac{T}{h_o} \quad (5)$$

Assumindo que a quantidade de calor presente no sistema (Q) consiste na diferença entre a energia fornecida (Q_i) a parcela referente à quantidade de calor liberada para a atmosfera (Q_o) a seguinte relação pode ser estabelecida:

$$Q_i - Q_o = mc\Delta T. \quad (6)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{dt}$, obtém-se a expressão a seguir:

$$\frac{Q_i - Q_o}{dt} = mc \frac{\Delta T}{dt}. \quad (7)$$

Desse modo, observa-se que o quociente entre a diferença da quantidade de calor no sistema, pelo intervalo de tempo infinitesimal, representa a taxa de entrada de calor, de modo que:

$$h_i - h_o = mc \frac{\Delta T}{dt}. \quad (8)$$

Ou

$$h_i - h_o = C \frac{\Delta T}{dt}. \quad (9)$$

Reescrevendo a expressão acima, substituindo h_o por sua relação equivalente, tem-se:

$$C \frac{\Delta T}{dt} = h_i - \frac{T}{R_T}. \quad (10)$$

Portanto, a equação diferencial que representa o sistema pode ser introduzida da seguinte maneira:

$$C \frac{\Delta T}{dt} + \frac{T}{R_T} = h_i. \quad (11)$$

Ou

$$R_T C \frac{\Delta T}{dt} + T = R_T h_i. \quad (12)$$

Aplicando transformada de Laplace na equação (12), pode-se determinar a função de Transferência da Planta

$$R_T C s T(s) + T(s) = R_T H_i(s). \quad (13)$$

$$G(S) = \frac{T(s)}{H_i(s)} = \frac{R_T}{R_T C s + 1}. \quad (14)$$

Lembrando que a Função de Transferência determinada é válida se, e somente se, as condições iniciais do sistema forem nulas. A equação (14) representa a função de transferência do sistema térmico a ser projetado. Com ela podemos obter a resposta em temperatura ($^{\circ}C$) do sistema ao fornecer certa quantidade de energia na forma de calor durante um período de tempo. O fornecimento de calor se dá através da conversão de energia elétrica em energia térmica, onde esta energia é obtida através da dissipação de potência em um componente resistivo. A potência dissipada em um resistor é dada por:

$$P = \frac{v^2}{R} \quad (15)$$

A equação (15), é dada em watts(W), visto que $1W$ equivale a $1 \frac{J}{s}$ (Joule/segundo), será necessário realizar a conversão de Joules para Kcal. Deste modo, a seguinte equivalência deve ser utilizada.

$$1J = 2,39 \times 10^{-4} kcal. \quad (16)$$

Pode-se expressar a **potencia** em termos da taxa de variação da quantidade de calor, ou seja, em $(\frac{Kcal}{s})$, através da constante K_{PH} . Portanto, o diagrama de blocos que representa a planta, é apresentado na Fig. 1. Onde se relaciona a entrada que é dada em tensão elétrica, com a saída em **G**raus Celsius. O diagrama representa o sistema de controle que será utilizado ao decorrer do projeto.

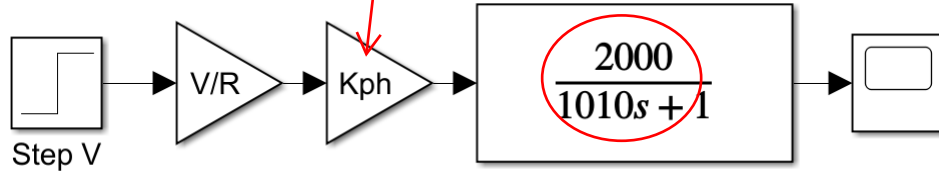


Figura 1: Diagrama de blocos do sistema. (Fonte: Autoria própria)

Para o desenvolvimento desse projeto foi definido um ebulidor com potência de $1000W$ e tensão nominal de $127V$, O aquecedor será alimentado com uma tensão CA reduzida, para que não ocorra a fervura da água, pois toda a análise será realizada sob a curva de aquecimento do líquido. A partir dessas especificações podemos calcular a resistência elétrica :

$$R = \frac{V^2}{P} \quad (17)$$

onde V é a tensão nominal, P a potência e R a resistência que buscamos, logo:

$$R = \frac{127^2}{1000} = 16,129\Omega \quad (18)$$

2.1 Validação do modelo

Para a validação de um modelo, é necessário comparar o comportamento do modelo matemático com o comportamento real da planta, para as mesmas condições de operação. Tomaremos como referência os resultados experimentais apresentados por Cardoso (2021), ao utilizar um sistema com 500 ml de água, um aquecedor, aplicando uma tensão de 32 V e monitorando a temperatura do sistema ao longo do tempo, temos o gráfico da Fig. 2 como resultado.

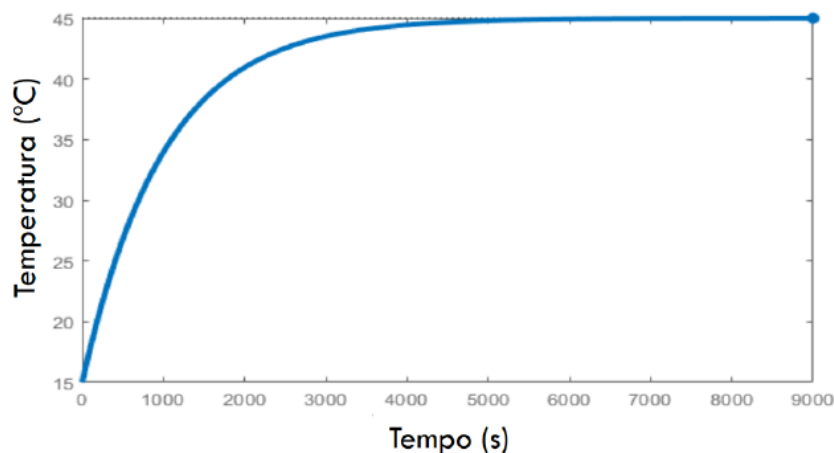


Figura 2: Curva da temperatura da água. (CARDOSO, 2021)

Retirando o *offset* da temperatura ambiente em (15°C), é possível encontrar a variação de temperatura, onde o tempo que a curva atinge de 63,2% de seu valor final, esse valor é denominado de constante de tempo do sistema. $\tau = 1,01 \times 10^3 \text{ s}$.

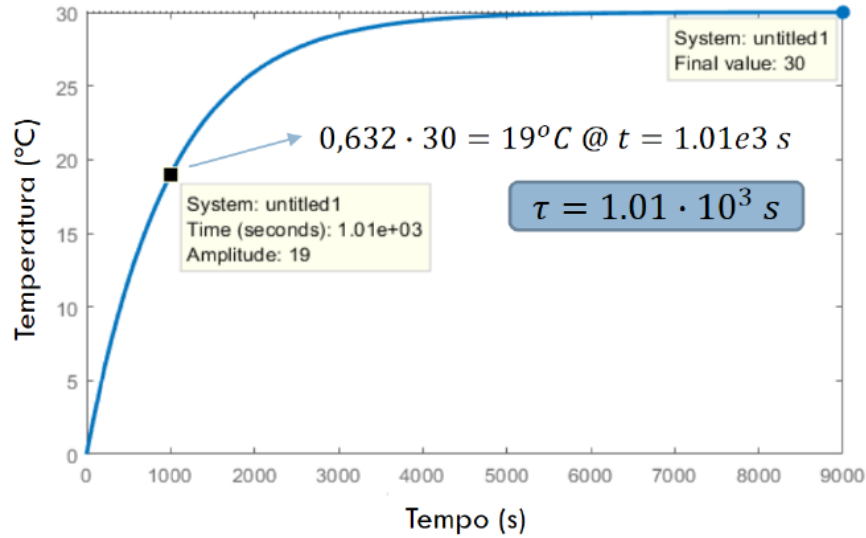


Figura 3: Curva da temperatura da água retirando *offset*. (CARDOSO, 2021)

Para definirmos $G(s)$ em valores numéricos, calcularemos o valor de R_T com base na equação do ganho CC.

$$K_{CC} = R_T = \frac{\Delta T}{\Delta h_i} \quad (19)$$

Portanto temos que definir Δh_i para $\Delta V = 32V$ e $\Delta T = 30^{\circ}\text{C}$.

$$\Delta h_i = \frac{\Delta v^2}{R} \cdot K_{PH} = 0,015 \text{ kcal/s}. \quad (20)$$

Substituindo a equação (20) na equação (19) temos:

$$K_{CC} = R_T = \frac{30}{0,015} = 2000 \quad (21)$$

Temos então a seguinte função transferência $E(s)$ experimental:

$$E(s) = \frac{K_{CC}}{\tau s + 1} = \frac{2000}{1010s + 1} \quad (22)$$

Para a função transferência do modelo teórico $G(s)$, definiremos a capacitância térmica do sistema considerando o modelo experimental apresentado acima, ou seja, com 500 ml de água com calor específico de $1 \text{ kcal/kg}^{\circ}\text{C}$.

$$C = 0,500 \times 1,000 = 0,500 \text{ kcal/}^{\circ}\text{C}. \quad (23)$$

Substituindo os valores encontrados na equação(14) temos:

$$G(s) = \frac{R_T}{R_T C s + 1} = \frac{2000}{1000s + 1}. \quad (24)$$

Comparando os valores das funções transferência teórica e experimental, nota-se uma pequena diferença. Porém ao compararmos as curvas de ambas na Fig. 4, pode se assegurar que os modelos são válidos.

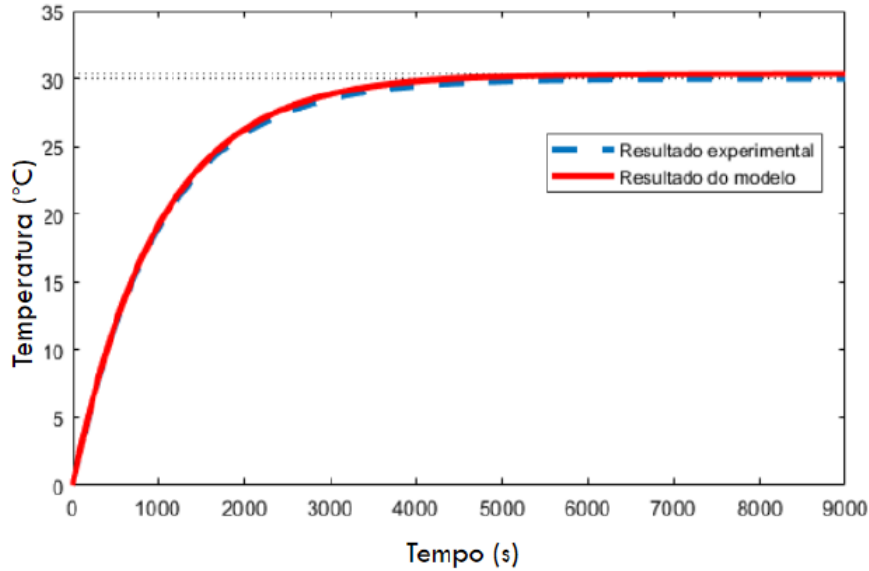


Figura 4: Gráfico das curvas sobrepostas. (CARDOSO, 2021).

3 Desenvolvimento do projeto

3.1 Atuador

Um componente resistivo será alimentado por uma tensão e dissipará energia na forma de calor, assim aquecendo a água do sistema. Para chegar a uma determinada temperatura, necessitamos de um atuador, como o aquecedor está ligado a rede 127V, o atuador assume o papel de chave, controlando quanto tempo o aquecedor fica ligado a rede para aquecer o líquido a uma temperatura desejada.

O controle dessa chave, conectando e desconectando da rede, se dará utilizando modulação PWM. O PWM é um sinal de onda retangular composto por um sinal de alto nível e um sinal de baixo nível, o período de nível alto é chamado de t_{on} , o período do pwm é chamado de T_{pwm} , com isso é possível obter t_{off} , mostrado na equação 25, a frequência do PWM é calculada na equação 26, a partir desses dados também podemos calcular a razão cíclica, mostrado na equação 27.

$$t_{off} = T_{pwm} - t_{on} \quad (25)$$

$$f_{pwm} = \frac{1}{T_{pwm}} \quad (26)$$

$$D = \frac{t_{on}}{T_{pwm}} \quad (27)$$

Será utilizado um oscilador de relaxação para a geração do PWM, é um circuito elaborado usando amplificadores operacionais capazes de gerar uma onda quadrada.

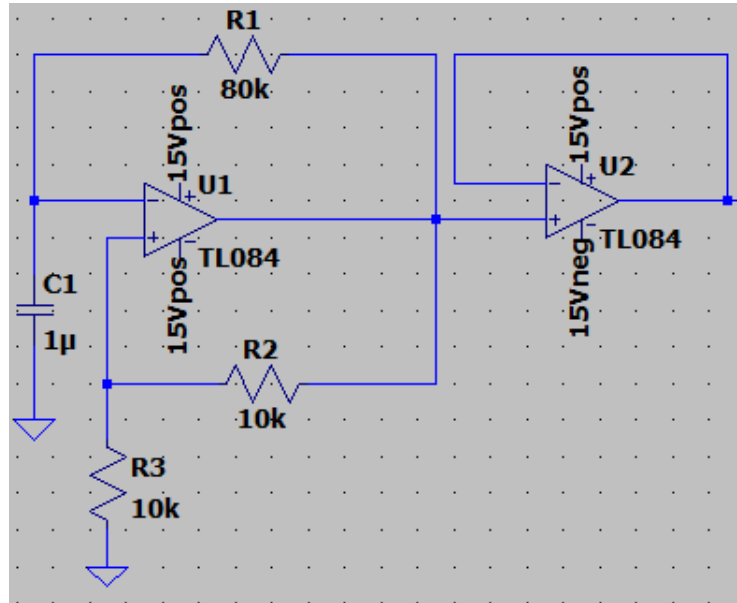


Figura 5: Circuito do oscilador de relaxação. (Autoria própria).

Primeiramente definimos os resistores R_2 e R_3 com valores de $10K\Omega$ para calcularmos o valor da constante B , demonstrada na equação 28, assumiremos o valor de V_s como $13,5V$, obtemos a entrada não inversora do amplificador. Para o cálculo da frequência deste oscilador, levamos em conta o tempo de carga e descarga do capacitor, o valor para V_+ encontrado na equação 29, indica até qual valor de tensão o capacitor irá carregar, definiremos então a capacitância do capacitor como $1\mu F$. Assumindo que a frequência de oscilação seja de $5,7Hz$, para termos uma quantidade adequada de ciclos, utilizaremos a equação 30 para definirmos o valor de R_1 , demonstrada na equação 31.

$$B = \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10K}{10K + 10K} = 0,5 \quad (28)$$

$$V_+ = V_s \cdot B = 13,5 \cdot 0,5 = 6,75V \quad (29)$$

$$f_{osc} = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C \cdot \ln \frac{1+B}{1-B}} \quad (30)$$

$$R = \frac{1}{2 \cdot 5,7 \cdot 1 \times 10^{-6} \cdot \ln \frac{1+0,5}{1-0,5}} = 80k\Omega \quad (31)$$

Para definirmos o tempo que o relé fica aberto ou fechado, utilizaremos uma onda triangular em conjunto com a onda quadrada, utilizando um integrador temos o seguinte circuito.

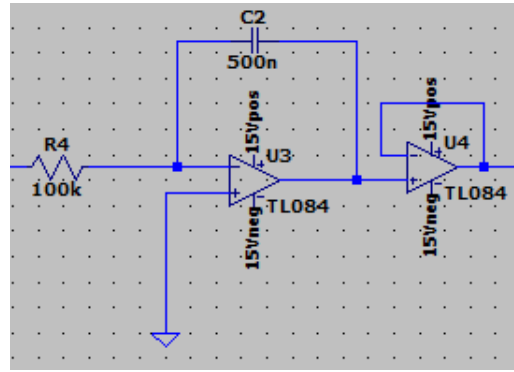


Figura 6: Circuito Integrador. (Autoria própria).

A transformada de Laplace do circuito mostrado na Fig. 6 é demonstrada na equação 32.

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{-1}{sRC} \quad (32)$$

O mesmo circuito no domínio do tempo é mostrado na equação 33

$$V_o(t) = -\frac{1}{RC} \int V_i(t) dt \quad (33)$$

Definimos os valores de R_4 e do capacitor para termos a inclinação desejada na onda triangular. Os circuitos mostrados nas Fig. 5 e 6 usam um buffer **afim** de isolá-los.

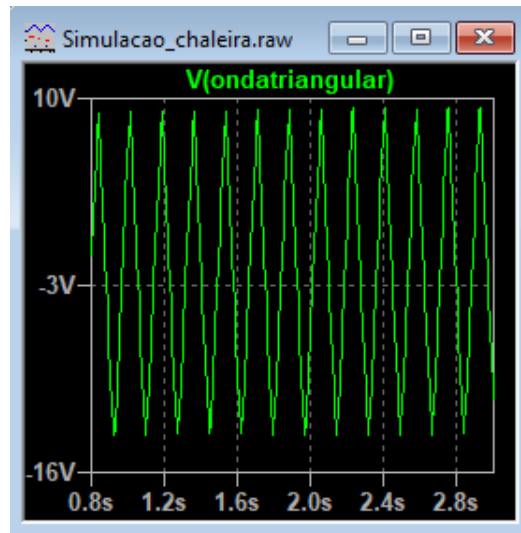


Figura 7: Onda Triangular. (Autoria própria).

O circuito completo para a geração do PWM é mostrado na figura 8

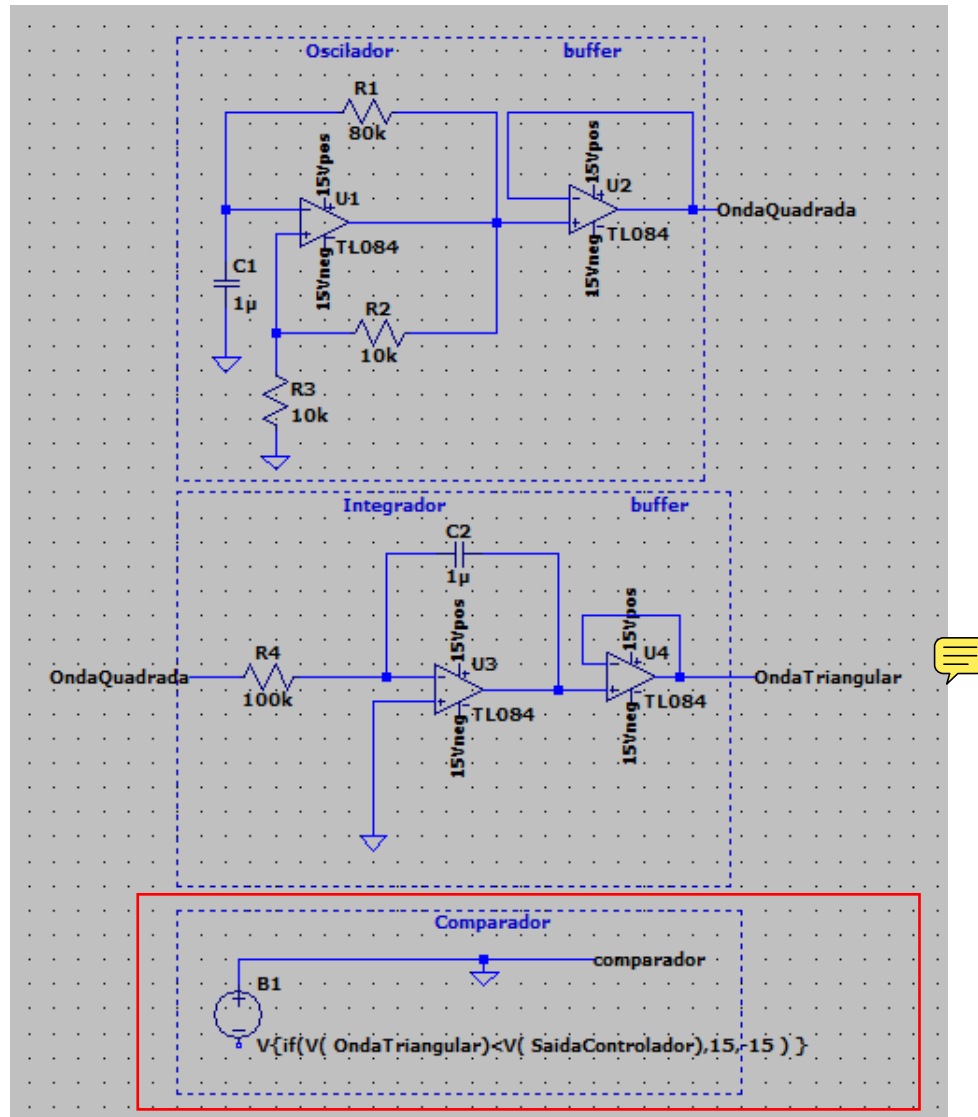


Figura 8: Circuito completo de geração de PWM. (Autoria própria).

3.2 Modelagem por controle de ciclos

A tensão do aquecedor é controlada pelo relé de estado sólido, que é controlado pela razão cíclica do sinal de PWM, onde é controlada pelo erro entre o sinal de referência e o sinal da realimentação do sistema. O sinal de referência (tensão relacionada à temperatura desejada da água no aquecedor) será obtido mediante a queda de tensão sobre um potenciômetro, a qual variará de 0 a 5 V. Já o sinal da realimentação do sistema virá da resposta de um sensor de temperatura.

Conforme a razão cíclica do sinal PWM de acionamento, uma quantidade maior de ciclos de tensão senoidal da rede é aplicada pelo relé de estado sólido na carga, possibilitando seu aquecimento por um intervalo de tempo estabelecido pela razão cíclica do sinal de PWM. O funcionamento ilustrativo pode ser observado na Fig. 9.

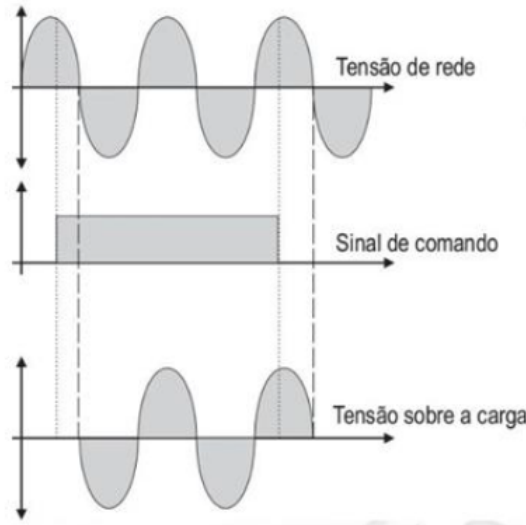


Figura 9: Representação do funcionamento do relé. (CARDOSO, 2021).

A tensão aplicada na carga ocorre somente no instante em que o sinal senoidal da rede altera sua polaridade, ou seja, atravessa o eixo horizontal, independente se o sinal de comando foi inserido antes da condição. A tensão eficaz aplicada na carga pode ser representada pela equação não linear a seguir:

$$V_{ef} = V_P \sqrt{\frac{t_{on}}{2T}}. \quad (34)$$

A relação entre a razão cíclica do sinal PWM e a tensão RMS da saída do relé não é linear. Entretanto, a relação entre o quadrado da tensão RMS da saída do relé e a razão cíclica do sinal PWM é linear. Assim, a equação a seguir mostra a relação linear entre V_{ef}^2 e razão cíclica $\frac{t_{on}}{T}$.

$$V_{ef}^2 = V_P^2 \frac{t_{on}}{2T}. \quad (35)$$

Considerando um sinal triangular de amplitude 10 V de pico, a constante de ganho do relé pode ser expressa em termos do quociente entre a tensão quadrática eficaz do aquecedor e a amplitude da tensão de pico do sinal triangular, demonstrada na equação a baixo:

$$K_{CCICLOS} = \frac{V_{ef}^2}{V_{pico-triangular}} = \frac{127^2}{10} = 1612,9. \quad (36)$$

3.3 Sensor

Para medir a temperatura da água em nosso projeto, usaremos um sensor de temperatura, sendo o LM35 o escolhido por ser calibrado diretamente em graus Celsius.

De acordo com o *DataSheet* da Texas Instruments, o LM35 tem uma precisão considerável sem requerer nenhuma calibração ou ajuste externo para fornecer precisões típicas de $\pm 1/4^\circ$ C à temperatura ambiente e $\pm 3/4^\circ$ C em uma faixa de temperatura entre -55° C a 150° C.

Algumas de suas características:

- Calibrado Diretamente em Celsius (Centígrado).

- 0,5°C Precisão Garantida (a 25° C).
- Faixa de operação entre -55° C a 150° C.
- Fator de escala linear +10mV/°.
- Auto Aquecimento baixo, 0,08 no ar.
- Saída de baixa impedância, 0,1 Ω para carga de 1 mA.
- Opera de 4 V a 30 V.

Como o fator de escala linear é +10 mV/° C podemos variar a saída de 0 a 1 V sendo 0V como 0° C e 1V como 100° C. Para diminuir o erro, iremos utilizar um amplificador não inversor como mostra a Fig. 10.

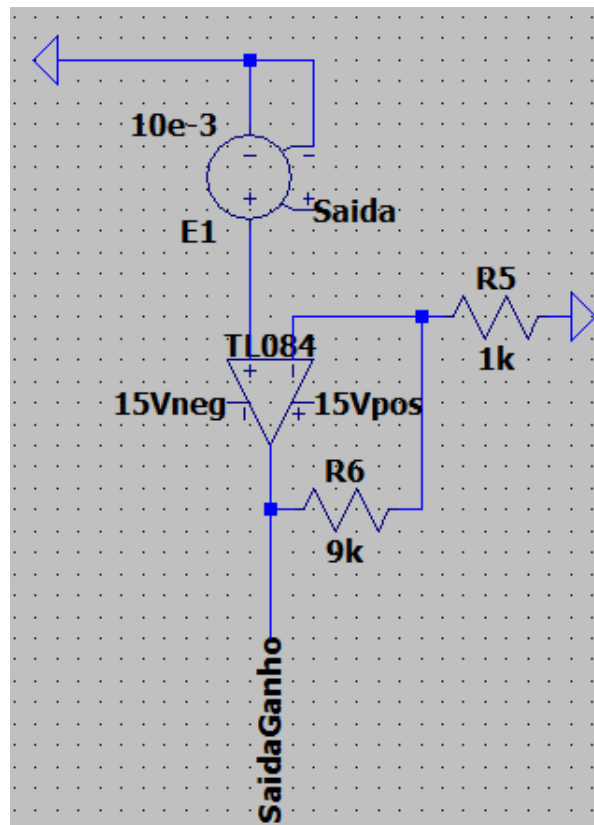


Figura 10: Circuito do Sensor com amplificador. (Autoria própria).

Temos como objetivo conseguir um ganho $K_{sensor} = 0.1$ para o sensor, por escolha do grupo, pois nos sentimos mais seguros com o valor, visto que é o mesmo do exemplo dado.

Para isso queremos amplificar a saída do sensor para 0V até 10V.

Com o objetivo de determinar o ganho de tensão do circuito não inversor, será necessário um divisor de tensão entre os dois resistores:

$$\frac{V_o}{V_i} = 10V = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (37)$$

Então decidimos escolher os valores dos resistores para que possam satisfazer a equação, logo escolhemos $R_1 = 9k\Omega$ e $R_2 = 1k\Omega$.

3.4 Diagrama de blocos com sensor

O diagrama de blocos que representa o sistema é composto por planta, circuito de acionamento, controlador e sensor, pode ser conferido na Fig. 11.

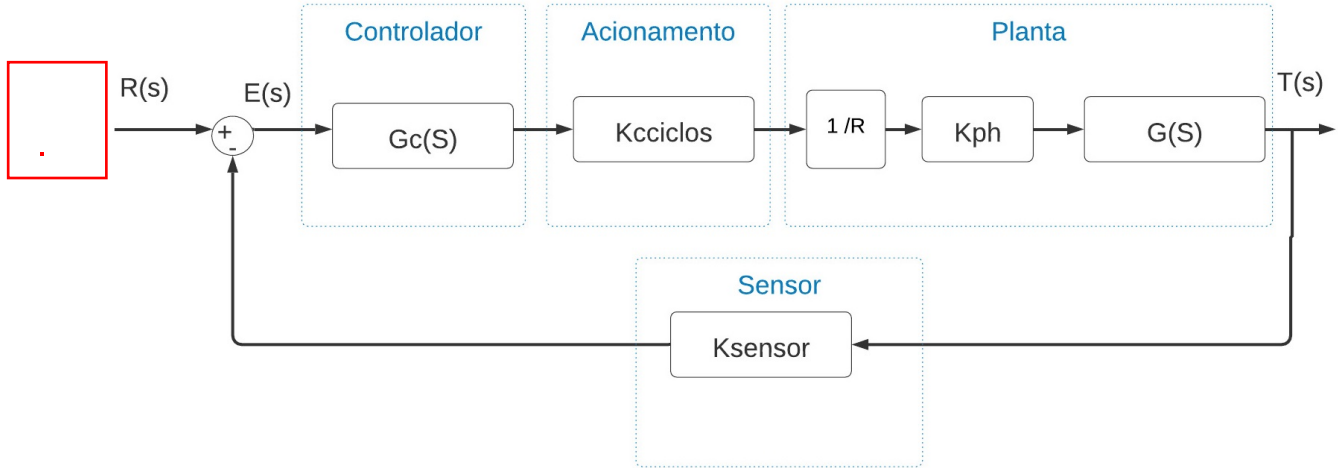


Figura 11: Diagrama de blocos do sistema com sensor. (Autoria própria).

Considerando os seguintes valores de ganho, encontrados no decorrer do projeto.

$$K_{CCICLOS} = 1612,9 \quad (38)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{16,129} \quad (39)$$

$$K_{PH} = 2,39 \times 10^{-4} \quad (40)$$

$$G(s) = \frac{2000}{1010s + 1} \quad (41)$$

Devido essa inserção do sensor, para termos uma leitura da saída numa mesma escala de amplitude, realizamos uma pequena alteração no diagrama do sistema que eventualmente altera sua resposta em regime permanente, porém a mesma será compensada no circuito compensador. O diagrama de blocos utilizado no projeto é descrito pela Fig. 12

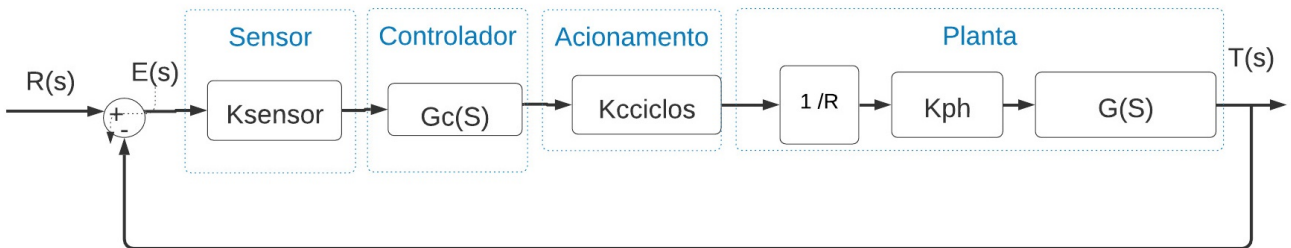


Figura 12: Diagrama de blocos do sistema com sensor e realimentação unitária.

Uma vez feita essa adequação garantimos a realimentação unitária para o sistema, permitindo assim que possamos projetar nosso controlador $G_c(s)$.

3.5 Controlador PI

Para o presente projeto precisamos escolher um tipo de controlador para implementarmos. Como nesse caso devemos zerar o erro em regime permanente, e não desejamos mudar significativamente a resposta transitória do sistema, implementaremos um controlador Proporcional-Integral (PI) utilizando o método por lugar das raízes.

Como não queremos sobressinal, nosso coeficiente de amortecimento será unitário, ou seja, $\zeta = 1$. Definimos um tempo de acomodação para o sistema de 4 min. Para o tempo definido de 240s, calculamos a frequência natural não amortecida ω_n do controlador:

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta \times 240} = \frac{1}{60} = 0.016\bar{6} \quad (42)$$

Para manter o mesmo coeficiente de amortecimento dos polos de malha fechada originais do sistema sem o compensador, os polos de malha fechada, após a inserção do compensador devem estar em:

$$s_{1,2} = -\omega_n \zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2} = -0.0167 \quad (43)$$

A partir disso escolhemos o zero do nosso compensador PI para um valor próximo a origem que será dado por $\frac{1}{T_i} = 0,001$. Como a condição de módulo do lugar das raízes deve ser unitária, calculamos nosso ganho K_p :

$$\left| K_p \left(\frac{s + 0.001}{s} \right) \frac{4.78}{1010s + 1} \right|_{s=-0.0167} = 1 \quad (44)$$

Em posse desses valores, obtemos nosso diagrama de blocos completo para o sistema, demonstrado na Figura 13

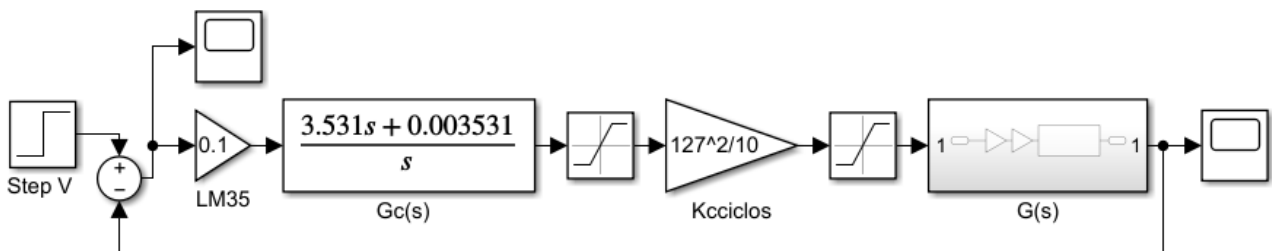


Figura 13: Planta do Sistema com Compensador.

O circuito final do controlador PI é dado na Fig. 14.

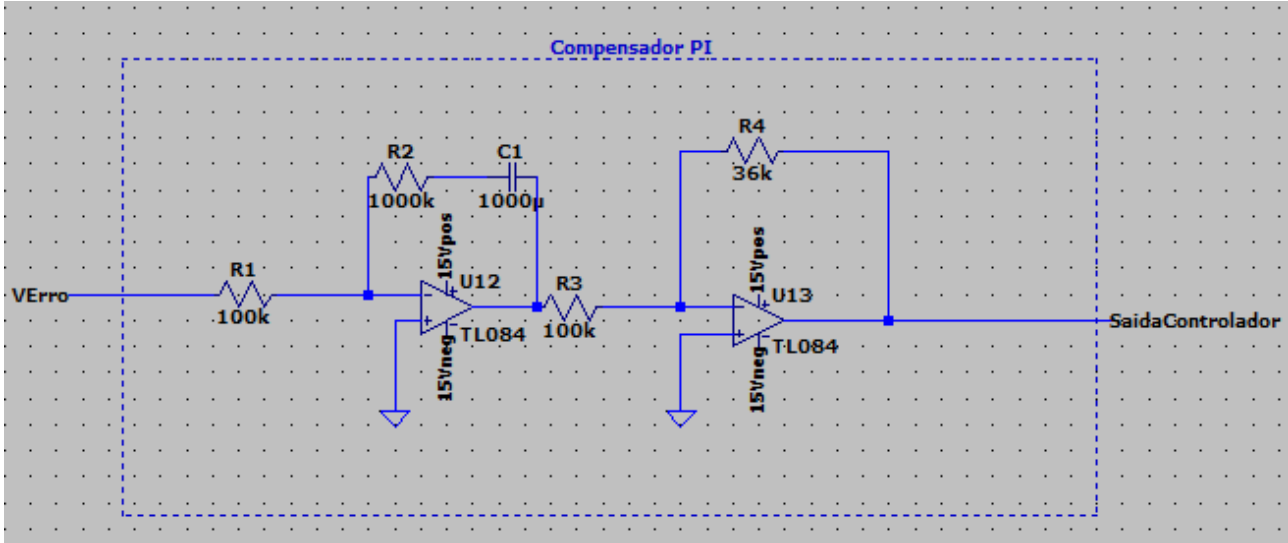


Figura 14: Controlador PI.

Para definir os valores dos componentes, fez-se o uso de duas equações:

$$\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} = T_i = \frac{1}{0.001} = 1000 \quad (45)$$

$$R_2 C_2 = 3,531 \quad (46)$$

Como no sistema de equações existem cinco incógnitas mas apenas duas equações, é necessário definir valores para três dos componentes. Assim, foram definidos:

$$C_1 = 1000 \mu F \quad (47)$$

$$R_1 = 100k \Omega \quad (48)$$

$$R_3 = 100k \Omega \quad (49)$$

A partir desses valores e utilizando as equações, os outros dois componentes foram definidos:

$$R_2 = 1M \Omega \quad (50)$$

$$R_4 = 35310 \Omega \quad (51)$$

Com base nos valores teóricos, foram escolhidos valores próximos de componentes disponíveis comercialmente.

4 Resultados Obtidos

Através das especificações do projeto foi definido a planta inicial, que possuía um erro, e tínhamos como objetivo um projeto com erro nulo, para isso foi utilizado um controlador PI, posteriormente levando em conta o ganho dos elementos envolvidos no circuito final foram definidos os valores dos componentes físicos do projeto. Ao final comparamos a simulação teórica do controlador de temperatura, realizada no matlab, com a simulação do circuito elétrico equivalente, realizada no LTspice como mostra a Fig. 15. As simulações foram feitas a partir de uma entrada de um degrau de 50V procurando chegar a uma saída de 50°C.

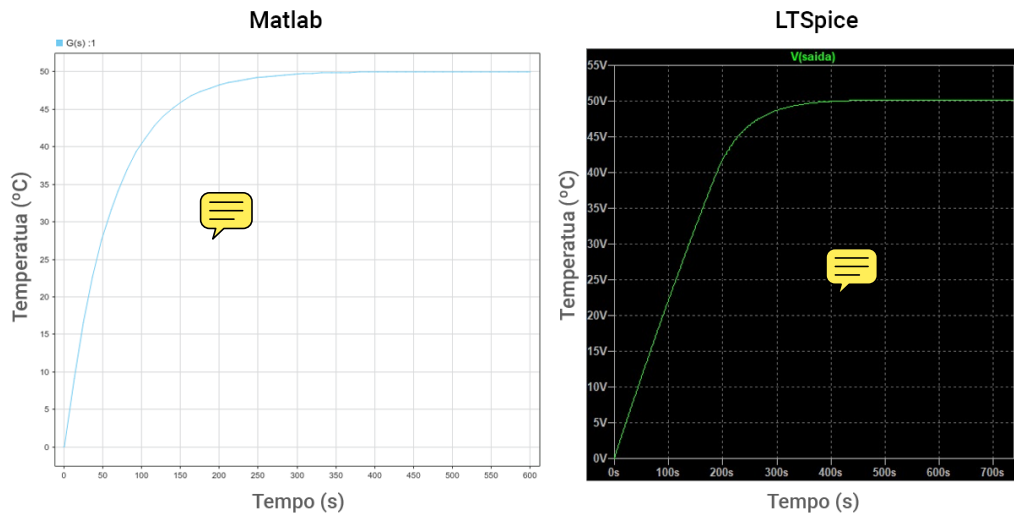


Figura 15: Gráficos para a resposta do sistema.



Comparando os resultados da planta inicial com a planta compensada demonstrado pela Fig. 16, no qual pode se observar que para o sistema sem compensador é identificado a presença de um erro, enquanto pra o sistema com o compensador conseguimos chegar no objetivo em zerar o erro em regime permanente como mostra a Fig. 17.

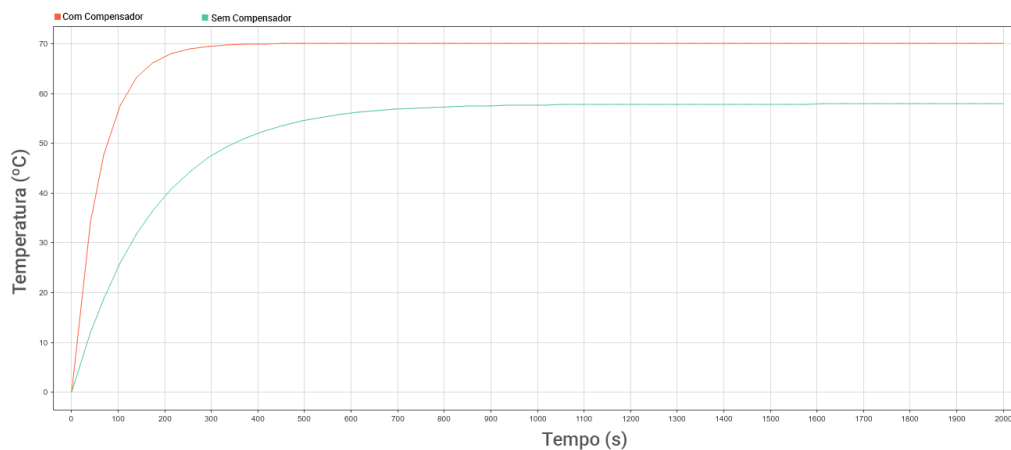


Figura 16: Gráficos do erro para o sistema com e sem compensador.

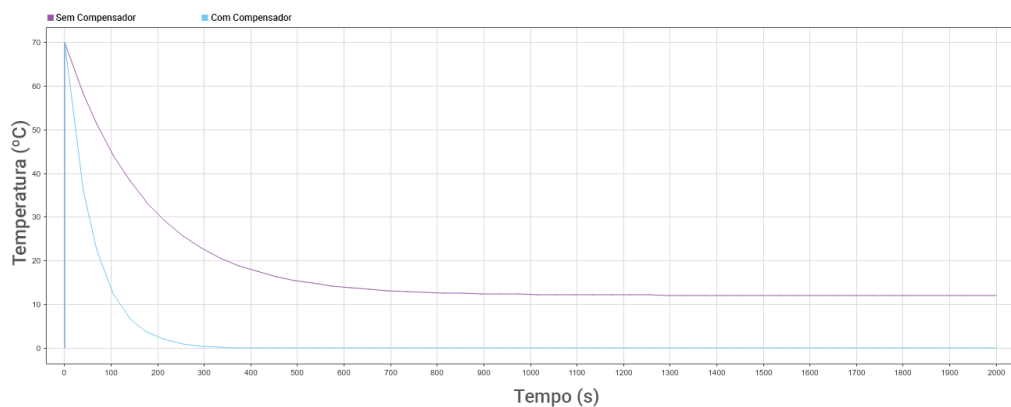


Figura 17: Gráficos para o sistema com e sem compensador.

5 Conclusão

Durante o desenvolvimento do projeto, notamos a necessidade de usar o controlador Proporcional Integral PI para que assim pudéssemos anular o erro em regime permanente, visto que em uma das verificações dos valores descobrimos que não condiziam com os desejados.

O projeto em si, pode proporcionar uma gama de conhecimentos práticos de tudo aquilo que foi estudado.

A **experiência** obtida desde modelar o sistema, a implementação e projeto do controlador e a anulação do erro em regime permanente, agregou bastante, juntamente com a parte de relembrar outros conceitos já estudados anteriormente.

6 Referências Bibliográficas

https://github.com/texane/power_inverter/blob/master/ltspice/logic/tl084/tl084.txt



INSTRUMENTS, Texas. LM35 Precision Centigrade Temperature Sensors. 2015. Disponível em: <<http://pdf1.alldatasheet.com/>>.

NISE, Norman S. CONTROL SYSTEMS ENGINEERING. California State Polytechnic University, Pomona: John Wiley and Sons, Inc., 2006.

CARDOSO, R. SISTEMAS DE CONTROLE 2 - Projeto de Controlador de Temperatura. Disponível em: <<https://moodle.utfpr.edu.br/>>