

# Curso Completo de Cálculo Integral

Daniel Alejandro

July 31, 2023

## 1 Introducción al Cálculo Integral

En esta lección, aprenderemos los conceptos fundamentales del cálculo integral y su relación con el cálculo diferencial.

### 1.1 Antiderivadas

La antiderivada de una función  $f(x)$  es una función  $F(x)$  cuya derivada es igual a  $f(x)$ . Representamos la antiderivada como  $\int f(x) dx$  o  $F(x) + C$ , donde  $C$  es una constante de integración.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1)$$

## 2 Técnicas de Integración

En esta lección, exploraremos diversas técnicas para resolver integrales de funciones.

### 2.1 Integración por Sustitución

La integración por sustitución es una técnica para resolver integrales al realizar un cambio de variable.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du \quad (2)$$

#### 2.1.1 Ejemplo 1

Calcular la integral  $\int 2x \cos(x^2) dx$  usando integración por sustitución.

Solución: Hacemos la sustitución  $u = x^2$ , entonces  $du = 2x dx$ .

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int \cos(u) du = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C$$

## 3 Integración por Partes

La integración por partes es una técnica útil para resolver integrales del producto de dos funciones.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad (3)$$

### 3.0.1 Ejemplo 2

Calcular la integral  $\int x \ln(x) \, dx$  usando integración por partes.

Solución: Tomamos  $u = \ln(x)$  y  $dv = x \, dx$ , entonces  $du = \frac{1}{x} \, dx$  y  $v = \frac{x^2}{2}$ .

$$\int x \ln(x) \, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

## 4 Integrales Definidas

En esta lección, exploraremos las integrales definidas y su relación con el área bajo la curva.

### 4.1 Propiedades de las Integrales Definidas

Las integrales definidas tienen propiedades útiles, como la linealidad y el teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \quad (4)$$

#### 4.1.1 Ejemplo 3

Calcular el área bajo la curva  $y = x^2$  en el intervalo  $[0, 2]$ .

$$\text{Solución: Área} = \int_0^2 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

## 5 Aplicaciones de la Integral

En esta lección, veremos cómo aplicar las integrales en problemas del mundo real, como cálculo de áreas y volúmenes.

### 5.1 Área entre Curvas

La integral se puede utilizar para calcular el área entre dos curvas.

$$\text{Área} = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \quad (5)$$

### 5.1.1 Ejemplo 4

Calcular el área entre las curvas  $y = x^2$  y  $y = 2x$  en el intervalo  $[0, 2]$ .

$$\text{Solución: Área} = \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left. \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

## 6 Volúmenes de Sólidos de Revolución

En esta lección, aprenderemos cómo utilizar integrales para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

$$\text{Volumen} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (6)$$

### 6.0.1 Ejemplo 5

Calcular el volumen generado al girar la región entre las curvas  $y = x^2$  y  $y = 0$  alrededor del eje  $x$ .

$$\text{Solución: Volumen} = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

¡Felicidades! Has completado el curso completo de Cálculo Integral. Espero que hayas encontrado útil este curso para mejorar tus habilidades en Cálculo Integral. ¡Sigue practicando y explorando las maravillas del cálculo!