Curso Completo de Cálculo Diferencial

Daniel Alejandro

July 31, 2023

1 Introducción al Cálculo Diferencial

En esta lección, aprenderemos los conceptos básicos del cálculo diferencial y cómo se relacionan con las tasas de cambio y las pendientes de curvas.

1.1 Derivadas

La derivada de una función describe su tasa de cambio en un punto específico. Representaremos la derivada de una función $f(x)$ como $f'(x)$ o $\frac{df}{dx}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

1.2 Reglas de Derivación

Existen reglas que facilitan el cálculo de derivadas para diferentes tipos de funciones. Aquí hay algunas reglas fundamentales:

Regla de la Potencia:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \tag{2}$$

Regla de la Suma y Resta:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \tag{3}$$

Regla del Producto:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot \frac{dg}{dx} + g(x) \cdot \frac{df}{dx} \tag{4}$$

Regla del Cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \cdot \frac{df}{dx} - f(x) \cdot \frac{dg}{dx}}{(g(x))^2} \tag{5}$$

1.2.1 Ejemplo 1

Dada la función $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$, calcula $f'(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(1) \\ &= 6x + 2 - 0 \\ &= 6x + 2 \end{aligned}$$

2 Aplicaciones de las Derivadas

En esta lección, exploraremos cómo aplicar las derivadas para resolver problemas del mundo real, como optimización y análisis de gráficas.

2.1 Máximos y Mínimos

Las derivadas nos ayudan a encontrar los máximos y mínimos de una función. Para ello, buscamos puntos críticos donde la derivada se anula ($f'(x) = 0$) y usamos la segunda derivada para determinar si el punto es un máximo o un mínimo.

Ecuación bonita (Segunda derivada):

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} \tag{6}$$

2.1.1 Ejemplo 2

Dada la función $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, encuentra los máximos y mínimos locales.

Solución:

1. Calculamos la primera derivada: $g'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.
2. Igualamos a cero para encontrar puntos críticos: $3x^2 - 12x + 9 = 0$.
3. Resolvemos la ecuación cuadrática y obtenemos dos puntos críticos: $x = 1$ y $x = 3$.
4. Calculamos la segunda derivada: $g''(x) = 6x - 12$.
5. Evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos: $g''(1) = -6$ y $g''(3) = 6$.
6. Como $g''(1) < 0$, tenemos un máximo local en $x = 1$, y como $g''(3) > 0$, tenemos un mínimo local en $x = 3$.

2.2 Tasa de Cambio

Las derivadas también nos ayudan a analizar la tasa de cambio instantáneo de una función. En el caso de una función de posición $s(t)$, la derivada $s'(t)$ nos da la velocidad instantánea en el tiempo t.

2.2.1 Ejemplo 3

Un coche se mueve a lo largo de una carretera recta. La posición del coche en el tiempo t está dada por $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$ (en metros). Calcula la velocidad del coche en el instante $t = 3$ segundos.

Solución: La velocidad instantánea está dada por la derivada de la posición: $v(t) = s'(t)$.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 3$$
$$v(3) = 4(3) - 3 = 9 \text{ m/s}$$

¡Felicidades! Has completado la primera parte de este curso sobre Cálculo Diferencial. En las siguientes lecciones, abordaremos temas como la regla de la cadena, derivadas implícitas y más aplicaciones interesantes. ¡Sigue adelante!