Parte I:

Capítulos: 1. Definiciones y Propiedades básicas
2. Medidas de Borel
3. Espacios LP
4. Medidas complejas
5. Diferenciación.

Parte II
- Teoremas de Hahn-Banach
- Principio limitación uniforme, gráfico cerrado, aplicación abierta
- Topologías débiles, espacios reflexivos, espacios separables
- Espacios de Hilbert
- Operadores compactos + Int. Teoría espectral.

1. Definiciones.

Definición: Sea X un conjunto cualquiera. Sea M una colección de subconjunto de X. Decimos que M es una σ-álgebra sii

i.) $X \in M$.

ii.) Si $A \in M \rightarrow A^c \in M$.

iii.) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in M \rightarrow \bigcup_i A_i \in M$.

Todo elemento de M es llamado **Conjunto medible de X**

(X, M) espacio medible

Definición: Sea (X, M) espacio medible y (Y, τ) un espacio Topológico. Decimos que

$$f: X \longrightarrow Y \quad \text{es una función medible.}$$

Sii $\forall v$ abierto en Y, $f^{-1}(v) \in M$.

Teorema: Sean Y, Z espacios topológicos, $g: Y \rightarrow Z$ continua. Entonces:

(i.) Si X es espacio topológico y $f: X \longrightarrow Y$ continua, entonces $h = g \circ f : X \longrightarrow Z$ es continua

(ii.) Si X es espacio medible y $f: X \rightarrow Y$ es medible entonces $h = g \circ f : X \longrightarrow Z$ es medible

Dem:

(i.) ok

(ii.) Sea V abierto en Z

$\Rightarrow g^{-1}(V)$ es abierto en Y (g cont)

$\rightarrow$ $\underbrace{f^{-1}(g^{-1}(v))}_{h^{-1}(v)}$ es conjunto medible (pues f es medible)

Proposición: Sea X espacio medible y considere

$$\left.\begin{aligned} u &: X \longmapsto \mathbb{R} \\ v &: X \longmapsto \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{ funciones medibles}$$

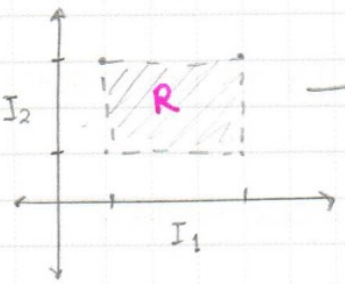
y $\mathbb{R}$ es con la Topología usual. Además considere $\Phi : \underset{(a,b)}{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \longmapsto Y$ función continua con Y espacio topológico.

Si definimos
$$h : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto h(x) = \Phi(u(x), v(x)) = \Phi \circ (u, v)$$

Entonces h es medible

Dem: Si consideramos
$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \Rightarrow h = \Phi \circ f$$
$$x \longmapsto f(x) = (u(x), v(x)) \qquad \Phi \text{ continua}$$

Bastaría ver que f es medible. De hecho, considere $R = I_1 \times I_2$



$$\longrightarrow \quad f^{-1}(R) = \underbrace{u^{-1}(I_1)}_{\text{medible en } X} \cap \underbrace{v^{-1}(I_2)}_{\text{medible en } X}$$

Bonus: i.) $A, B \in M \rightarrow A - B = A \cap B^c \in M$
ii.) $A, B \in M \rightarrow A \cap B = A^c \cup B^c \in M$

Por tanto $f^{-1}(R)$ es medible

Sea V abierta de $\mathbb{R}^2$, existe $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ rectángulos abiertos tal que
$$f^{-1}(v) = f^{-1}\left(\bigcup_i R_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(R_i) \} \text{ es medible}$$

Corolario: $f(u,v)$

(i) Si $f = u + iv$, u, v son medibles $\to$ f es una función compleja medible

(ii) Si $f = u + iv$ es medible $\to$ u, v es medible y $|f|$ es medible

(iii) Si f y g son medibles $\to$ $f + g$, $f \cdot g$ son medibles

(iv) Sea E un conjunto medible. Entonces la función características:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

es una función medible.

(v) Si f es una función compleja medible, entonces existe una función medible α, con $|\alpha| \neq 0$ tal que

$$f = \alpha |f|$$

Teorema: Sea F una familia de subconjuntos de X, entonces existe M_0^* σ-álgebra tal que $F \subset M_0^*$

Dem. • $\Omega = \{M : M \text{ es } \sigma\text{-álgebra } F \subseteq M\} \neq \emptyset$

$\hookrightarrow P(X) \in \Omega$

$M^* = \bigcap_{M_0 \in \Omega} M_0$ $\to$ note que $F \subseteq M$ $\forall M \in \Omega$

$\to F \subseteq M^*$

Falta mostrar que M^* es σ-álgebra

• $X \in M^*$ pues $X \in M$ $\forall M$

• $A \in M^* \to A \in M$, $\forall M \in \Omega$

$\to A^c \in M$, $\forall M \in \Omega \to A^c \in M^*$

$\hookrightarrow M$ es σ-álgebra

• Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in M_0 \to \bigcup A_i \in M^*$

Observación: M^* es llamado σ-álgebra generado por F y de hecho es la σ-álgebra más pequeña que contiene a F.

CONJUNTOS DE BOREL.

Sea (X, τ) espacio topológico, por teorema anterior

$\exists$ una σ-álgebra $\mathcal{B}$ (la más pequeña) tal que $\tau \subseteq \mathcal{B}$, i.e, todo abierto es medible

Los elementos de $\mathcal{B}$ son llamados **Conjunto de Borel.**

Espacios Topológicos $\longrightarrow$ Espacios medibles

$\downarrow$

Borel : σ-álgebra
generado por la Topología.

Observación: Todos los cerrados son Borel

→ las intersecciones numerables$|_{G\delta}$ de abiertos y uniones numerables de cerrados son de Borel

→ Toda función es medible en la σ-álgebra de Borel

$$f: X \longrightarrow Y$$

. Sept/20/2019.

Algunas funciones medibles: Algunas funciones medibles son:

$\sup_n f_n$ $\quad\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\quad\quad f^- = -\min\{f, 0\}$

$\lim_{n\to\infty} f_n$ $\quad\quad f^+ = \max\{f, 0\}$ $\quad\quad |f| = f^+ + f^-$

funciones simples: $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ ← funcion simple

medible ⟷ A_i son medibles

- Sea $f: X \to [0, \infty)$ medible entonces existe una secuencia $\{S_n\}$ de funciones simples medibles
  - (i) $0 \leq S_n < S_{n+1}$
  - (ii) $\lim S_n = f(x), \forall x \in X$ → convergencia puntual.

Definición de medida:

$$\mu: \underset{\hookrightarrow\ \sigma\text{-algebra}}{M} \longrightarrow [0, \infty].$$

Decimos que μ es σ-aditiva si $\mu\left(\bigcup^{\infty} A_i\right) = \sum^{\infty} \mu(A_i)$ SIEMPRE $\bigcap A_i = \emptyset$.

$\mu(A) < \infty$ para algún A

PROPIEDADES.

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $A = \bigcup^{\infty} A_i$; $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$.
- $A = \bigcap^{\infty} A_i$; $A_n \supset A_{n+1}$, $\mu(A_n) < \infty$

  $\to \mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$.

Integración de funciones positivas: Sea $S: X \to [0, \infty)$. simple, medible:

$$S = \sum^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

$$\to \int_E s \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i \cap E) \ ; \ \forall E \in M.$$

↳ Aritmética del inf: $0 \cdot \infty = 0$.

Sea $f: X \to [0, \infty) \longrightarrow$

$$\int f \, d\mu = \sup_{0 \leq S \leq f \cdot E} \int s \, d\mu \ , \ \forall E \in M \Bigg\} \text{ Integral de Lebesgue.}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

- propiedades:

- Si $0 \leq f \leq g \rightarrow \int F \, d\mu \leq \int g \, d\mu \quad \forall x \in E$

- Si $f \geq 0$, $A \subset B \rightarrow \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$

- Si $C \in [0, \infty]$ $\rightarrow \int_E Cf \, d\mu = C \int f \, d\mu$

- $f(x) = 0$, $\forall x \in E \rightarrow \left.\int_E f \, d\mu = 0 \right\}$ incluso si $\mu(E) = \infty$

- Si $\mu(E) = 0 \rightarrow \left.\int f \, d\mu = 0 \right\}$ incluso si $f(x) = \infty$ $\forall x \in E$.

NOTA: (X, M, μ) : espacio de medida
(X, M) : espacio medible.

- $\int_E f \, d\mu = \int_f \chi_E \cdot f \cdot d\mu$

- $\int \chi_E \, d\mu = \mu(E) = \int_E d\mu$

- Si s es simple : $\varphi(E) = \int_E S \, d\mu \Rightarrow \varphi$ es medida

- $\int_E (s+t) \, d\mu = \int_E s \, d\mu + \int_E t \, d\mu$

TEOREMA DE LA CONVERGENCIA MONÓTONA:

Sea $\{f_n\}$ secuencia de funciones positivas medibles, tales que:

i) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty \quad \forall x \in X$.

ii) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X \rightarrow$ Convergencia puntual.

Entonces f es medible.

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \lim_{n \to \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Prueba:

Ya sabemos que f es medible ($\lim f_n$ es medible).

Sabemos que $f_n \leq f_{n+1}$, por lo que

$$\underbrace{\int_X f_n \, (d\mu) = \int_X f_{n+1} \, d\mu}_{\text{Invarianza de la Integral sobre el Orden.}} \rightarrow \left\{ \int_X f_n \, d\mu \right\} \text{ secuencia de \# crecientes } \in [0, \infty].$$

entonces: $\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha \in [0, \infty]$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pues } f_n \geq 0 \text{ y} \\ \text{la medida es pos} \end{array} \right.$

Para n suficientemente grande:, por ii.)

$$f_n(x) \leq f(x). \quad x \in X.$$

$$\int_X f_n(x) \leq \int_X f(x) \, d\mu \quad \forall n \gg 0$$

$\rightarrow$ $f_n(x) \leq f(x)$
$\lim f_n(x) = f(x)$

Por ser positivas medibles sobre X

$$\int_X \lim_{n \to \infty} f_n(x) \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu.$$

Por el límite, cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) \leq \int_X f(x)$$

Afirmación: $\alpha \geq \int_X f \, d\mu$

Sea s simple (Arbitrario) tal que $0 \le s \le f$ y considere un $0<c<1$

$$\rightarrow \quad 0 \le c \cdot s(x) \le s(x) \le f(x).$$

Definamos $E_n = \underbrace{(f_n - cs)}_{\text{medible}}^{-1}([0,\infty])$. $\therefore E_n \in (M) \; \forall n.$

$$= \{x \in X : f_n(x) \ge s(x)\}$$

note $E_n \le E_{n+1}$ pues f_n es creciente, Ahora

$X = \bigcup^{\infty} E_n \rightarrow$ Sea $x \in X$

i.) $f(x) = 0$

$c \cdot s(x) = 0 \quad \therefore \; x \in E_1 \in \bigcup E_n$

ii) $f(x) > 0$: por (i.)

$\exists n_0 : cs(x) \le f_{n_0}(x) \le f(x)$

$x \in E_{n_0}$

$\therefore x \in \bigcup E_n$

Así:
$$\int_X f_n \, d\mu \ge \int_{E_n} f_n \, d\mu \ge \int_{E_n} c\, s(x) \, du$$

$$= c \cdot \varphi(E_n)$$

$$\therefore \quad \varphi(E) := \int_E s \, d\mu$$
$\hookrightarrow$ medida.

Sabemos $\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi(X)$.

cuando $n \to \infty$ $\quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \ge \underbrace{c\,\varphi(X) = c\int s \, d\mu}$

$$\boxed{\alpha \ge c \int s \, d\mu}$$

$\forall s$ simple; $0 \le s \le f$ y $\forall c \in (0,1)$

$$\alpha \ge \int_X s \, d\mu \xrightarrow[\forall s]{} \alpha \ge \sup \int s \, d\mu$$

$$\alpha \ge \int f \, d\mu.$$

TEOREMA: Si $\{f_n\}$ funciones medibles positivas tal que

$$f(x) := \sum_1^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$$

Entonces

$$\int_X f\, d\mu = \sum \int_X f_n\, d\mu.$$

Dem: se tiene por definición de $f(x)$ en el Teorema, que:

$$f(x) = \lim S_n(x) \qquad S_n(x) = \sum f_n(x)$$

y además $0 \leq S_n(x) \leq S_{n+1}(x)$.

Por Teorema de la convergencia monótona:

$$\int_X \lim S_n\, d\mu = \lim \int_X S_n\, d\mu.$$

$$= \lim \int_X \sum_{k=1}^{n} f_k\, d\mu$$

$$= \lim \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k\, d\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\, d\mu.$$

Corolario: Sea $a_{ij} \geq 0$, $i.j = 1,2,3,\dots$

$$\rightarrow \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij} = \sum_{j=1} \sum_{i=1} a_{ij}. \Big\} \text{ medida de Contar.}$$

medida de contar: $\mu(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } E \text{ es infinito} \\ n & \text{si } E \text{ es finito} \end{cases}$

LEMA: FATOU: Sea $\{f_n\}$ secuencia de funciones positivas medibles.

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Dem: $g_k(x) = \inf \{ f_k(x), f_{k+1}(x), \dots \} = \inf_{i \geq k} f_i(x)$.

$$\sup_k g_k(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n$$

$$0 \leq g_k \leq g_{k+1}$$

$\therefore$ $$\lim_{n\to\infty} g_k(x) = \sup g_k(x)$$

Por Teorema de convergencia creciente

$$\int_X \lim g_k \, d\mu = \lim \int_X g_k \, d\mu$$

$$\int_X \liminf_n f(x) \, d\mu = \lim \int_X g_k \, d\mu$$

Note que

$$g_k < f_k$$

$\therefore$ $$\int_X g_k \, d\mu < \int_X f_k \, d\mu \quad \forall k.$$

$$\rightarrow \lim \int_X g_k \, d\mu \leq \liminf \int f_k \, d\mu.$$

TEOREMA: Sea $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ función medible positiva, defina

$$\varphi(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Entonces φ es medida y $\int_X g\, d\varphi = \int_X g\circ f\, d\mu.$

La recíproco se conoce como teorema de Radon-Nikodim.

Dem $E_1, E_2, \dots$ $E_i \cap E_j = \emptyset$, $E = \bigcup E_i$

$$\chi_E = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}$$

Tome $\varphi(E) = \int_E \mu\, d\mu$ $\varphi(E_i) = \int_{E_i} f\, d\mu$

Propiedades de la integral se tiene:

$$\varphi(E) = \int_X E\cdot f\, d\mu \quad \varphi(E_i) = \int_X E_i\, f\, d\mu$$

Note que $\int_X \chi_E\, f\, d\mu = \int_X \Sigma \chi_{E_i}\, f\, d\mu$

$$= \Sigma \int_X \chi_{E_i}\, f\, d\mu = \Sigma\, \varphi(E_i)$$

$\therefore$ φ es medida sigma-aditiva.

- Si $g = \chi_E \to \int_X g\, d\varphi = \int_X \chi_E\, d\varphi = \varphi(E) = \int_E f\, d\mu$

$$= \int_X E f\, d\mu = \int g\circ f\, d\mu$$

Si g es simple $\to$ ok

Si g es cualquier función, medible positiva, se tiene que usar Teorema de conv. Monótona.

Integración de funciones complejas: $f: X \to \overline{\mathbb{C}}$.

$f = u + iv$

$$L^1(\mu) := \left\{ f: X \to \mathbb{C} : \int_X |f| \, d\mu < \infty \right\}$$

Espacio de "funciones" integrables.

Def: Sea $f := u + iv$, u, v función medible real.

Si $f \in L^1(\mu)$:

$$\int_E f \, d\mu := \int_E u \, d\mu + i \int_E v \, d\mu$$

$$= \int_E u^+ \, d\mu - \int_E u^- \, d\mu + \dots + i \int_E v^+ \, d\mu - i \int_E v^- \, d\mu$$

entonces $\int_E f \, d\mu \in \mathbb{C}$.

Si $u: X \to [-\infty, \infty]$, medible:

$$\int_E u \, d\mu = \int_E u^+ \, d\mu - \int_E u^- \, d\mu \qquad u^+ = \max\{u, 0\}, \quad u^- = -\min\{u, 0\}.$$

Proposición: Sean f, g funciones complejas medibles y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

- $\int_E (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu + \beta \int_E g \, d\mu$
- $\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu$

EJERCICIOS

TEOREMA CONVERGENCIA DOMINADA.

Sea $\{f_n\}$ secuencia de funciones complejas medibles tal que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \qquad (\forall x \in X).$$

Si existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim_{n\to\infty}(a$

Entonces

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

o

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$ } convergencia en $L^1(\mu)$

Dem: • $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \quad \therefore \quad \lim |f_n(x)| \leq \lim g(x)$

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \int_X |f(x)| \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu < \infty$$

por pertenecer a $L^1(\mu)$.

• Por otro lado

$$|f_n - f| \leq |f_n| - |f| \leq g + g \leq 2g$$

$$\therefore \quad 2g - |f_n - f| \geq 0 \qquad \lim |f - f_n| = 0$$

aplicando el Lema de Fatou se tiene que:

$$\therefore \int_X \lim_{n\to\infty} [2g - \underbrace{|f - f_n|}_{0}] \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X [2g - |f - f_n|] \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int 2g \, d\mu \leq + \lim_{n\to\infty} \int_X 2g \, d\mu + \lim_{n\to\infty} \left(- \int |f - f_n| \, d\mu \right)$$

$$\int \cancel{2g \, d\mu} \leq \int \cancel{2g \, d\mu} - \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu$$

$$0 \leq - \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu$$

$$\therefore \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_X |f-f_n|\, d\mu \leq 0$$

$$\rightarrow \quad \lim \int_X |f-f_n|\, d\mu = 0$$

CONJUNTO DE MEDIDA CERO.

Decimos que P se satisface para casi todo punto en X (a.e in X). sii N es el conjunto donde no se satisface P entonces $\mu(N)=0$.

Depende de μ.

Por ejemplo: $f(x)=g(x)$ en casi todo punto x.
$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Relación de equivalencia:

$$f \sim g \longleftrightarrow f(x)=g(x) \text{ a.e } x \text{ in } X.$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{[f] = \{g : f \sim g\}}_{\text{INTEGRABILIDAD.}} \qquad X = N \cup N^c$$

$$\int_X (f-g)\, d\mu = \int_{\substack{N\cup N^c \\ N\cap N^c=\emptyset}} (f-g)\, d\mu = \cancel{\int_N (f-g)\, d\mu} \to 0 \quad \mu(N)=0$$

$$+ \int_{N^c} \cancel{(f-g)\, d\mu} \to 0 = 0$$

pues $f=g$

Teorema: Sea (X, M, μ) espacio de medida. Sea M^* colección de todos los $E \subseteq X$ para el cual existe A y $B \in M$ tal que

$$A \subseteq E \subseteq B \quad \wedge \quad \mu(B-A)=0$$

Definimos $\mu(E)=\mu(A)$ Entonces M^* es una σ-álgebra y σ su medida.

Observación: Todo Subconjunto de un conjunto de medida cero es medible en M^*.
Esta medida extendida de μ recibe el nombre de medida completa.

M^* es la $\underbrace{\text{completación}}_{\mu\text{-completación}}$ de M. $\rightarrow$ ejercicio

Teorema: Suponga $\{f_n\}$ una secuencia de funciones complejas medibles, definidas a.e en X tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$$

Entonces la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{converge a.e } x \text{ en } X$$

$f \in L^1(\mu)$ y

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dem: Sea S_n conjunto donde $f_n(x)$ está definida, esto implica que $\mu(S_n^c) = 0$

considere que $\varphi(x) := \sum |f_n(x)|$, $\forall x \in \bigcap S_n = S$

Entonces $\int_S \varphi\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < +\infty$ (*)

Consideremos $E := \{x \in S : \varphi(x) < \infty\}$

(*) $\Rightarrow \mu(E^c) = 0$

Note que la serie converge absolutamente para $\forall x \in E$

Definamos $f(x) = \sum f_n(x)$ definida a.e en X

$\longrightarrow |f(x)| \leq \varphi(x)$

Convergencia absoluta

$\longrightarrow \varphi(x) \in L^1(\mu)$ en E

$\longrightarrow f \in L^1(\mu)$ en X

hacemos $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad x \in E$

$\rightarrow |g_n(x)| \leq \varphi(x) \in L^1(\mu)$

y además $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Aplicando Teorema de convergencia dominada

$$\int_E \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu$$

por tanto

$$\int_E f(x) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \, d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Como $\mu(E^c) = 0$ entonces

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

TEOREMA:

(a) Suponga que $f: X \to [0, \infty]$ es medibe, $E \in M$.

$$\int_E f \, d\mu = 0 \to f = 0 \text{ a.e en } E$$

(b) Si $f \in L^1(\mu)$ y $\int_E f \, du = 0 \quad \forall E \in M \to f = 0$ a.e en X.

(c) supongamos que $f \in L^1(\mu)$ y $|\int f \, d\mu| = \int |f| \, du$.

entonces existe una constante α tal que

$$|f| = \alpha f \quad \text{a.e in } X.$$

Tarea

Dem:

(a). $A_n = \{x \in E : f(x) \geq 1/n\}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{1}{n} \mu(A_n) = \frac{1}{n} \int_{A_n} d\mu \leq \int_{A_n} f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu = 0$$

$$\to \mu(A_n) = 0$$

es decir.

$$\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

esto implica que: $\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ a.e in } X$$

(b) $f = u + iv$, $E = \{x \in X : \mu(x) > 0\}$, $u = u^+$ en E

$$\to \operatorname{Re} \int_E f \, d\mu = \int_E u \, d\mu$$

por hipótesis $u = 0$ a.e en $E \to$ a.e en X

Similarmente $u^- = v^+ = v^- = 0$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

y como $f = (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-) = 0$ a.e en X

TEOREMA: Sea $\{E_k\}$ secuencia de medibles tal que:

$$\sum \mu(E_k) < \infty$$

Entonces casi todo $x \in X$ pertenece a finitos E_k.

Dem: Sea entonces $A = \{x \in X : x$ pertenece a infinitos $E_k\}$.

considere $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_k}$

Note que $x \in A$ entonces $g(x) = \infty$

por teoremas anteriores

$$\int_X g \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_k} \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$$

propiedades

$= g \in L^1(\mu)$.

$\rightarrow g < \infty$ a.e in X

Teorema: suponga $\mu(X) < \infty$, $f \in L^1(\mu)$, $S \subseteq \mathbb{C}$ cerrado.

y

$$A_E(f) := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in S \quad \forall E \in M$$

con $\mu(E) > 0$.

Entonces $f(x) \in S$ a.e in X.

Dem S^c es abierto $\Rightarrow$ $S^c = \bigcup B(\alpha, r)$

$\alpha, r > 0 \rightarrow$ contables

$E = f^{-1}(B(\alpha, r)) = \{x \in X : f(x) \in B(\alpha, r) \subseteq S^c\}$

↳ medible

Basta ver que $\mu(E) = 0$.

$(\rightarrow\leftarrow)$ Suponga que $\mu(E) > 0$, entonces

$$|A_E(f) - \alpha| = \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu - \frac{\alpha}{\mu(E)} \int_E d\mu \right|$$

$$\leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - \alpha|\, d\mu \leq \frac{1}{\mu(E)} \int d\mu$$

$$= r$$

$\Rightarrow$ $A_E(f) \in B(\alpha, r) \subseteq S^c$ absurdo pues $A_E(f) \in S$.)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

27/Sep/19.

Teorema de Representación de Riesz.
(Conexión Con Análisis Funcional).

- Preliminares de Topología
- Teorema de Riesz

NOTA
la medida de compacto es finita

• **Transformación lineal:**

A. $\Lambda : V_1 \longrightarrow V_2$ es lineal sii
$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda x$
Donde $\alpha, \beta \in K$ (Un campo).

Cuando V_2 es un campo, Λ es **funcional Lineal**.
Campo de funciones

• **Ejemplo:**

$$\Lambda : \mathcal{L}^1(\mu) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longrightarrow \Lambda f = \int_X f \, d\mu$$

A. $\Lambda : C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow \Lambda f = \int_0^1 f(x)\, dx \Big\} \text{ Riemann}$$

los anteriores son funcionales reales

Definición: Λ es funcional lineal positivo sii $\Lambda f \geq 0$ siempre que $f \geq 0$ En el sentido que Λ definido en un espacio de funciones.

Teorema de Representación de Riesz:
Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y sea un funcional Λ lineal positivo definido en.

$$C_c(X) : \{ f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continua a } X \text{ supp } f \text{ compacto} \}$$

Entonces existe σ-álgebra M que contiene TODOS los Borelianos de X y una única medida positiva μ en M tal que:

Relacionado a un funcional positivo

a.) $\Lambda f = \int_X f\, d\mu = \mu$, en donde μ tiene las sgtes propiedades.

b.) $\mu(K) < \infty$, K compacto. la medida de compactos es finita.

c.) $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ abierto}\}$, $E \in M$

Infimo de medida de abiertos que contienen σ-álg.

d.) $\mu(E) = \sup\{\mu(K),\ K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$ Para todo E

Supremo de medida de los compactos contenidos en M

abierto, $E \in M$, $\mu(E) < \infty$

e.) Si $\mu(E) = 0$, $E \in M$, $A \subset E \rightarrow A \in M \rightarrow X, M, \mu$: espacio de medida completo.

Requisitos Mínimos.

- Clausura: Si $\bar{A} = A \cup A'$

  $x \in \bar{A}$ si $\forall \underbrace{N_x}_{\text{vecindad}}$ de $x \rightarrow N_x \cap A \neq \emptyset$.

  vecindad: abierto que contiene a x.

- X es Hausdorff, si $p \neq q \in X \rightarrow N_p, N_q \in I$ tal que

  $$N_p \cap N_q = \emptyset$$

  completo: que contiene a A'

  Compacto: cub. finito.

- Si $A \subset X \rightarrow \bar{A}$ es compacto.

- $K \subset X$ es compacto sii.

  $$K \subset \bigcup_{\alpha \in I} \underbrace{V_\alpha}_{\text{abierto}} \rightarrow K \subset V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}.$$

Teorema: Sea X espacio localmente compacto y Hausdorff. $K \subset U$, K compacto, U abierto, Entonces existe un conjunto abierto tal que

$$K \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

Dem: (X, τ_1) y (Y, τ_2) son espacios topológicos, $f: X \to Y$ e continua sii

$$f^{-1}(V) \in \tau_1 \quad \forall V \in \tau_2$$

Definición

$f: X \to \mathbb{R}$; (X, τ) espacio Topológico).

- f es **semicontinua inferior sii:**

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \text{ es abierto}$$

- f es **semicontinua superior sii:**

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X , f(x) < \alpha\} \text{ es abierto.}$$

Entonces f es continua sii f es semicontinua superior o inferior.

Obs:

- χ_A es semicontinua inferior sii A es abierto.
- χ_A es semicontinua superior si A es cerrado

→ $h(x) = \sup_{\alpha} f_\alpha$ es semicontinua inferior sii f_α es semicontinua inferior.

→ $g(x) = \inf_{\alpha} f_\alpha$ es semicontinua superior sii f_α es semicontinua superior.

Definición. Sea $f: X \to Y$, el soporte de una función se define como:

$$\text{supp } f = \{x \in X : f(x) \neq 0\} \subset X$$
$$= f^{-1}(\{0\})^c \subset X$$

con X, Y espacio topológico.

$C_c(X) : \{ f : X \to \mathbb{C} : \text{supp } f \text{ compacto} \}$.

- $K \prec f = \begin{cases} f \in C_c(X), \; 0 \leq f(x) \leq 1 \; \forall x \in X \\ f(x) = 1 \quad \forall x \in K \end{cases}$

- $f \prec V = \begin{cases} f \in C_c(X), \; 0 \leq f \leq 1 \\ \text{Supp } f \subseteq V \end{cases}$

Lema Urysohn

Sea X espacio de Hausdorff, localmente compacto y sean $K \subset V$, K compacto y V abierto. Entonces existe $f \in C(X)$ tal que

$$\underbrace{K}_{\text{compacto}} \prec f \prec \underbrace{V}_{\text{abierto}} \to \chi_K \leq f \leq \chi_V$$

Teorema (Partición de la Unidad).

Sea X, H.L.C y K compacto $V_1, V_2, \ldots, V_n$ abiertos, de modo que

$$K \subset V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$$

Entonces existe $h_i \prec V_i$ y además $\sum^{n} h_i(x) = 1$. $\forall x \in K$.

PRUEBA TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ

- UNICIDAD

Existen 2 μ_1 y M_2 tales que satisfacen el teorema

Bastaría ver que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ para K compacto.

fijando K, $\varepsilon>0$.

$$\mu_2(K) = \inf\{\mu_2(V) : K \subset V,\ V \text{ abierto}\}.$$

existe V_ε abierto que depende de ε tal que $\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$. $K \subset V$. Por el lema de Urysohn

$$\exists f \in C_c(X) \text{ tal que}$$

$$K \prec f \prec V \to \underbrace{\chi_K}_{\text{conjunto característico}} \leq f \leq \chi_V$$

Así:

$$\mu_1(K) = \int_X \chi_K \, d\mu_1 \leq \int_X f \, d\mu_1 = \Lambda f$$

$$= \int_X f \, d\mu_2 \leq \int_X \chi_V \, d\mu_2$$

entonces

$$\underbrace{= \mu_2(V) \leq \mu(K) + \varepsilon}$$

$$\mu_1(K) < \mu_2(K) + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$$

y análogamente $\mu_2(K) \leq \mu_1(K)$

por lo que se comprueba la unicidad

CONSTRUCCIÓN DE μ y M

la medida TAMBIÉN se puede definir

$$\mu : P(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

Sea V un abierto en X

$$\mu(V) := \sup \{\Lambda f : f \prec V\} \qquad (1)$$

Claramente $V_1 \subset V_2 \rightarrow \mu(V_1) \leq \mu(V_2)$.

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ abierto}\} \qquad (2)$$

Para cualquier $E \subset X$ (Si E es abierto, (1) y (2) son consistentes).

Definimos:

$$M_F = \{E \subset X : \mu(E) < \infty \text{ y } \mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}\}$$

Y además

$$M' = \{E \subset X : E \cap K \in M_F, K \text{ compacto}\}$$

OBSERVACIÓN: (X, M, μ) es completo $\rightarrow \mu(A) \subseteq \mu(B)$ si $A \subset B$.
Si $\mu(E) = 0$ y $K \subset E \rightarrow \mu(K) = 0$ para todo compacto $K \subset E$. Si $A \subset E \Rightarrow \mu(A) = 0$

OBSERVACIÓN: Λ es monótona (i.e $f \leq g \rightarrow \Lambda f \leq \Lambda g$), En efecto
$\Lambda g = \Lambda f + \Lambda(g-f) \geq \Lambda f$

PROBAR QUE: μ y M tienen las propiedades del teorema.
EJERCICIO !!!

PASO 1: Sea $E_1, E_2, \ldots$ subconjuntos arbitrarios de X. Entonces

$$\mu\left(\bigcup E_i\right) \leq \sum \mu(E_i).$$

PASO 2: Si K es compacto $\rightarrow K \in M_F$ y además.

$$\mu(K) = \inf\{\Lambda f : K \prec f\}$$

PASO 3: Todo abierto satisface

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \;\; K \text{ compacto}\}$$

es decir, $\mu(V) < \infty \rightarrow V \in M$.

PASO 4: Si $E = \bigcup_i^{\infty} E_i$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ $i \neq j$ y $E_i \in M_F$ Entonces

$$\mu(E) = \sum \mu(E_i)$$ $\Rightarrow$ probar que es σ aditiva

PASO 5: Si $E \in M_F$ $\forall \varepsilon > 0$ Existe compacto K y abierto V, tal que

$$K \subset E \subset V \quad y \quad \mu(V - E) < \varepsilon$$

PASO 6: Si $A, B \in M_F \rightarrow A - B,\ A \cap B,\ A \cup B \in M_F$

PASO 7: M es σ-álgebra que contiene TODOS los Borelianos

PASO 8: M_F consiste precisamente de todos los $E \subset M$ tal que $\mu(E) < \infty$

PASO 9: μ es una medida en X

PASO 10: $\forall f \in C_c(X) \rightarrow \Lambda f = \int_X f \, d\mu$

$\mu(v) =$

$\mu(v) =$

$\mu(v) =$

Demostración.

PASO 1: Iniciamos probando que:

$$\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu_1(V_1) + \mu_2(V_2), \quad V_1 \text{ y } V_2 \text{ abiertos.}$$

Considere $g \prec V_1 \cup V_2$ soporte de $g \subset V_1 \cup V_2$

$\rightarrow$ partición de la unidad:

$\exists\, h_i \prec V_i$ tal que $h_1(x) + h_2(x) = 1 \;\; \forall x \in \operatorname{supp} g$

$\rightarrow h_i g_i \prec V_i \quad y \quad g = gh_1 + gh_2$

$\rightarrow \underbrace{\Lambda g = \Lambda(gh_1) + \Lambda(gh_2) \leq}_{} \mu(V_1) + \mu(V_2)$

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda g : g \prec V\}$$

Probamos que $\Lambda g \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$, $\forall g \prec V_1 \cap V_2$

$\rightarrow \quad \mu(V_1 \cap V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$.

Inductivamente,

$$\mu\left(\bigcup^{n} V_i\right) < \sum^{n} \mu(V_i)$$

sea E_i arbitrario. Si $\mu(E_i) = \infty$, para algún $i \rightarrow$ ok pues infinito es mayor que cualquiera.

Ahora, suponemos que $\mu(E_i) < \infty$, se define

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V\} \text{ con } V \text{ abierto,}$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists V_i = V_i(\varepsilon)$ abierto $\rightarrow \mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon \quad E_i \subset V_i$

Tomemos

$$E = \bigcup^{\infty} E_i \quad , \quad V = \bigcup^{\infty} V_i \text{ abierto y } f \prec V$$

Comp $f \in C_c(X) \rightarrow f \prec V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ para algún n,

Así

$$\underbrace{\underbrace{\Lambda f \leq}_{\text{por def. de la medida con supremos}} \mu(V_1 \cup \ldots \cup V_n) \leq \sum^{n} \mu(V_i) \leq \sum^{n} \mu(E_i) + \varepsilon \sum^{n} 2^{-i}}_{}$$

$$\Lambda f \leq \sum^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon \quad , \quad \forall f \prec V \; , \; \forall \varepsilon > 0.$$

$\Rightarrow \quad \mu(V) \leq \sum^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$

$\mu(E) \leq \mu(V) \leq \sum \mu(E_i) \qquad$ pues $E \subseteq V$.

PASO 2: Sea f arbitrario con $K \prec f$ y $0 < \alpha < 1$

Definamos

$$V_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)).$$

- Sea $x \in K$, $f(x) = 1 > \alpha \to x \in V_\alpha \longrightarrow K \subset V_\alpha$.

- Por otro lado si $g \prec V_\alpha$

$$\alpha g \leq f g \leq f \to g \leq \alpha^{-1} f \xrightarrow[\Lambda \text{ monótona}]{} \Lambda g \leq \alpha^{-1} \Lambda f$$

Luego

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup\{\Lambda g : g \prec V_\alpha\} \leq \alpha^{-1} \Lambda f \to \underbrace{\mu(K) < \infty}_{K \in M_F}$$

Recordemos que

$$\mu(K) = \inf\{\mu(V) : K \subset V \text{ abierto}\}$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists V$ abierto, $K \subset V$ y

$$\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$$

Por el Teorema de Urysohn, se tiene que

$$\exists f \in C_c(X) : K \prec f \prec V$$
$$\hookrightarrow \Lambda f \leq \mu(V)$$

Entonces

$$\Lambda f \leq \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$$

Por tanto

$$\Lambda f < \mu(K) + \varepsilon$$

y por definición de $\mu(K)$ con el concepto de ínfimo

$$\mu(K) = \inf\{\Lambda f : K \prec f\}$$

PASO 3: V abierto

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \mu(V) \rightarrow$ por def de la medida por supremo se tiene $\rightarrow \exists f : f \prec V$ tal que $\alpha < \Lambda f$.

Sea W cualquier abierto con $\text{supp } f \subseteq W$, es decir $f \prec W$

por (*) $\longrightarrow$ $\Lambda f \leq \mu(w)$

$\Downarrow$ por $\mu(K) = \inf\{\mu(V) : K \subset V \text{ abierto}\}$

$$\alpha < \Lambda f \leq \mu(K).$$

Es decir, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \mu(V)$, encontramos $K \subset W$

$$\alpha < \mu(K) \leq \mu(W) \quad \text{Para cualquier } W \text{ abierto}$$

Es decir, Dado $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha < \mu(K) \leq \mu(W) \text{ para cualquier abierto}$$

$$\xrightarrow[\text{Def supremo}]{} \quad \mu(W) = \sup\{\mu(K) : K \subset W, K \text{ compacto}\}$$

PASO 4: Iniciamos probando.

$$\mu(K_1 \cap K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2) \quad \underbrace{K_1 \cap K_2}_{\text{compactos}} = \emptyset$$

En efecto, X es H., existe V_1 abierto

$$K_1 \subset V_1 \quad \text{y} \quad K_2 \cap V_1 = \emptyset$$

Por Lema Urysohn $\rightarrow \exists f \in C_c(X)$, $K_1 \prec f \prec V_1$, es decir

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = 1 & x \in K_1 \\ f(x) = 0 & x \in K_2 \end{array} \right\} 0 \leq f \leq 1$$

Dado $\varepsilon > 0$, por el paso II, $\exists g$ tal que:

$$\Lambda g \leq \mu(K_1 \cup K_2) \quad \text{donde} \quad K_1 \cup K_2 \prec g.$$

Entonces se tiene:

$$K_1 \prec fg \quad y \quad K_2 \prec (1-f)g. \quad \text{pues} \quad (K_1 \cap K_2 = \emptyset).$$

por paso 2:

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) < \Lambda fg + \Lambda(1-f)g = \Lambda g \leq \mu(K_1 \cup K_2)$$

???

por paso 1 se tiene: $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$.

Inductuctivamente:

$$\mu\left(\bigcup^{n} K_i\right) = \sum^{n} \mu(K_i)$$

- Si $\mu(E) = \infty$, ok
- Si $\mu(E) < \infty$, como $E_i \in M_F$, entonces $\varepsilon > 0$, existe

$$H_i \subset E_i \quad , \quad H_i \text{ compacto.}$$

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - 2^{-i}\varepsilon \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

Tome $K_n = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$, así:

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum^{n} \mu(H_i) > \sum^{n} \mu(E_i) - \varepsilon \cancel{\sum^{n} 2^{-i}} \, 1$$

$\forall n$ y $\forall \varepsilon$

$$\mu(E) \geq \sum^{n} \mu(E_i)$$

y por paso 1 concluye

PASO 5: Sea $\varepsilon > 0$, existe K compacto $K_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon$, por (**) y (***) se tiene

$$\mu(V) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces $V-K$ es abierto $\xrightarrow[\text{por paso 3}]{}$ $V-K \in M_F$

así

$$V = K \cup (K-F) \in M_F \quad y \quad K \cap (K-F) = \emptyset$$

Por paso 4

$$\mu(V) = \mu(K) + \mu(V-K) < \mu(E) + \varepsilon/2 < \mu(K) + \varepsilon$$

$$\mu(V-K) < \varepsilon$$

PASO 6: Sea $\varepsilon > 0$, $A, B \in M_F$, por paso 5, existe K_1 compacto y V_1 abierto

$$K_1 \subset A \subset V_1 \quad y \quad K_2 \subset B \subset V_2.$$

$$\Rightarrow \quad A - B \subset V_1 - K_2 \subset (V_1 - K_1) \cup (K_1 - V_2) \cup (V_2 - K_2)$$

Tenemos

$$\mu(A-B) \leq \mu(V_1 - K_1) + \mu(K_1 - V_2) + \mu(V_2 - K_2) < \underbrace{\mu(K_1 - V_2)}_{\text{Compacto}} + 2\varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$, conseguimos $K = K_1 - V_2 \subset A - B$, tal que

$$\mu(A-B) < \mu(K) + 2(\varepsilon)$$

$$\downarrow$$

$$\mu(A-B) = \sup\{\mu(K) : K \subset A - B, K \text{ compacto}\}$$

$$A - B \in M_F$$

$$A \cap B = A - (A - B) \in M_F$$

$$A \cup B = (A - B) \cup B \xrightarrow[\text{paso 4}]{} M_F$$

↳ ejercicio

Paso 7 : Sea K compacto arbitrario en X:

Si $A \in M$, $A^c \cap X = K - (A \cap K) \in M_F$

$\rightarrow A^c \in M_F$.

Sea $A = \overset{\infty}{\bigcup} A_i$, $A_i \in M_i$, considere:

$$B_1 = A \cap K$$

$$B_2 = A_2 \cap K - B_1$$

$$B_3 = (A_3 \cap K) - (B_1 \cup B_2) \in M_F$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{B_n = (A_n \cap K) - (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})}$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j \quad \in M_F.$$

Note que

$$A \cap K = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup K = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

$\Downarrow$ Ejercicio

$$A \cap K \in M_F \rightarrow A \in M$$

Si C es cerrado $\rightarrow$ $C \cap K$ es compacto $\rightarrow$ $C \cap K \in M_F$

$\rightarrow C \in M \rightarrow X \in M$

PASO 8: Si $E \in M_F \to E \cap K \in M_F \to E \in M$

Recíprocame. Sea $E \in M$ con $\mu(E) < \infty$

por definición, existe V abierto $E \subset V \to \mu(V) < \infty$

sea $\varepsilon > 0$, por paso 3 y 5, existe compacto y abierto $K < E < \bar{V}$ tal que

$$\mu(\bar{V} - K) < \varepsilon$$

Si es verdad, dado $\varepsilon > 0$, $\exists K \subset E \subset V$

$$\mu(V - K) < \varepsilon \quad \mu(V) < \infty$$

Como $E \cap K \in M_F$, existe compacto $H \subset E \cap K$

$$\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon \longrightarrow \text{Por definición de } M_F$$

Además

$$E \subset (E \cap K) \cup (V - K)$$

$$\to \mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V - K) < \mu(H) + 2\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ compacto}\} \to E \in M_F$$

PASO 9. Trivial sigue 8, 7 y 4 $\quad \Lambda f \leq \int_X f \, d\mu$

PASO 10. Basta probar para f real $\longleftarrow$ EJERCICIO comprobar

y además basta probar que

(1) $\Lambda f \leq \int_X f \, d\mu$, $\forall f \in C_c(X)$ y f real

pues por linealidad tenemos que

$$-\Lambda f = \Lambda(-f) \leq -\int_X f \, d\mu \longrightarrow \Lambda f \geq \int_X f \, d\mu$$

Sea $K = \operatorname{supp} f$ compacto y existe $[a,b]$ tal que

$$f(x) \in [a,b] \qquad x \in X$$

Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ tal que $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ y

$$y_0 < a < y_1 < y_2 < \dots < y_n = b.$$

y consideramos

$$E_i = f^{-1}((y_{i-1}, y_i)) \cap K = \{x : y_{i-1} < f(x) < y_i\} \cap K$$

como f es continua, f es Borel medible $\rightarrow E_i$ Borel.

$$\underbrace{\bigcup^{n} E_i}_{\text{Borelianos}} = K. \quad \text{y además} \quad E_i \cap E_j = \emptyset. \quad \text{para } i \neq j.$$

$\mu(V_i) \leq \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$, $V_i \supset E_i$ abierto

además $f(x) < y_i + \varepsilon \quad \forall x \in V_i$ (por continuidad).

Note

$$K = \bigcup E_i \subset \bigcup^{n} V_i$$ Aplicando la partición de la unidad

$\exists\, h_i \prec V_i$ de modo que $\quad 0 < h_i < 1.$

$$\sum^{n} h_i(x) = 1 \quad \forall x \in K.$$

$$\Rightarrow \quad f = \sum h_i f \qquad \therefore \quad K \prec \sum h_i \prec V$$
$$h_i \in C_c.$$

Por paso 2

$$\boxed{\mu(K) \leq \Lambda\left(\sum h_i\right) = \sum \Lambda h_i}$$

entonces $f \leq y_i + \varepsilon$

Ahora, $h_i f \leq (y_i+\varepsilon) h_i$ y $y_i - \varepsilon < f(x)$ $\forall x \in E_i$

$$\Lambda f = \sum^n \Lambda(h_i f) \leq \sum^n (y_i+\varepsilon)\Lambda h_i$$

$$= \sum^n (|a| + y_i + \varepsilon)\Lambda h_i - \sum^n |a| \Lambda h_i$$

$$\underset{\substack{h_i < V_i \\ \mu(V_i) \geq \Lambda h_i}}{\leq} \sum^n (|a| + y_i + \varepsilon)\mu(V_i) - \sum^n |a| \Lambda h_i$$

$$< \sum^n (|a| + y_i + \varepsilon)\left(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\right) - \sum^n |a| \Lambda h_i$$

$\mu(V_i) = \sup\{\Lambda h : h < V\}$

$$= \cancel{|a| \underbrace{\sum_{i=1}^n \mu(E_i)}_{\mu(K)}} + \sum_i \underbrace{(y_i+\varepsilon)}_{\geq f} \mu(E_i) \cancel{- |a| \mu(K)} + \frac{\varepsilon}{n}\sum(|a| + y_i + \varepsilon)$$

02/10/19.

Teorema Representación Riesz.

CONTINUACIÓN PASO 10:

$$= \underbrace{\sum \underbrace{(y_i - \varepsilon)}_{\leq f} \mu(E_i)}_{\leq \int_X f\, d\mu} + \frac{\varepsilon}{n}\left[\sum^n (|a| + \underbrace{y_i}_{\leq b} + \varepsilon)\right] + 2\mu(K)\varepsilon$$

$$\leq \int_X f\, d\mu + \varepsilon\left[|a| + b + \varepsilon + 2\mu(K)\right]$$

Entonces, Dado $\varepsilon > 0$ se tiene que (ε suficientemente pequeño)

$$\Lambda f \leq \int_X f\, d\mu + \varepsilon\left[|a| + b + \varepsilon + 2\mu(K)\right].$$

TEOREMA DE URYSOHN:

Sea X espacio de Hausdorff localmente compacto, $K \subset V$, V abierto, Entonces existe $f \in C_c(X)$:

$$K \prec f \prec V$$

Demostración:
Considere $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3, r_4, \ldots \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$
Sabemos que:
$$K \subset V \longrightarrow \exists\, V_0, V_1$$

tal que: $K \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset V$.
?

Por recurrencia se tiene $\{r_1, \ldots, r_n\}$ números tales que $\in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ tal que

$$\text{si } r_i < r_j \Rightarrow V_{r_j} \subset \overline{V_{r_i}}$$

Definir r_{n+1}, entonces considere

$$r_i = \max\{r_k : 1 \le k \le n : r_k < r_{n+1}\} \to \text{máximo cotas inferiores}$$

$$r_j = \min\{r_k : 1 \le k \le n : r_{n+1} < r_k\} \to \text{mínimo cotas superiores}$$

Nótese que: $r_i < r_{n+1} < r_j$

Y por el Teorema se tiene que

$$\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V}_{r_{n+1}} \subset V_{r_i}$$

Entonces se ha construido $\{V_r\}$ tal que:
$$\begin{cases} \text{si } r > s \longrightarrow \overline{V}_s \subset V_r & \forall r,s \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ K \subset V_1,\ \overline{V}_0 \subset V \end{cases}$$

Se define $f_r(x) = \begin{cases} r & \text{si } x \in V_r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
$\hookrightarrow$ semicontinua inferior

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{V_1} \\ 0 & \text{En Otro caso} \end{cases}$$ abierto

Semicontinua superior

$\therefore$ se define $f := \sup_r f_r$; $g := \inf_r g_r$

- Si $x \in K \Rightarrow x \in V_r, \forall r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \Rightarrow f(x) = 1$

- $\operatorname{supp} f \subset \overline{V_0}$

  $x \in \{x : f(x) \neq 0\} \Rightarrow f(x) \neq 0 \xrightarrow[\exists r]{} f_r(x) \neq 0$

  $\rightarrow x \in V_r$

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{V_0}$$

$\boxed{\text{EJERCICIO: } f = g}$ ¡¡!!

Teorema de la Partición de la Unidad.

X espacio Hausdorff localmente compacto,

$$K \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n$$

Entonces existe $h_i(x)$ tal que $h_i \prec V_i \wedge K \prec \sum h_i$.

Demostración: Sea $x \in K \rightarrow \{x\} \subset V_i \rightarrow \exists\, W_x$ (vecindad x).

Urysohn

tal que $W_x \subset \overline{W_x} \subset V_i \} \rightarrow \boxed{i = i(x)}$ ¡OJO!

$\overline{W_x}$ compacto pues es localmente compacto

K compacto $\exists x_1, \ldots, x_n$ tal que

$$K \subset W_{x_1} \cup \ldots W_{x_n}$$

Considere $H_i = \cup \overline{W}_{x_j}$ donde $\overline{W}_{x_j} \subset V_i$

Entonces se tiene que $H_i \subset V_i$

unión finita de compactos

Por lema de Urysohn $\exists g_i : H_i \prec g_i \prec V_i$

Defina:

$$h_1 = g_1$$
$$h_2 = (1-g_1)g_2$$
$$h_3 = (1-g_1)(1-g_2)g_3$$
$$\vdots$$
$$\therefore\ h_m = (1-g_1)\dots(1-g_{n-1})g_n$$

EJERCICIO: $K \prec \sum h_i\ ,\ h_i \prec V_i$

1. Medidas de Borel

$E \subset X$ Borel, decimos que es **exterior** (regular exterior) si

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ abierto}\}$$

Decimos que es **interior** (regular interior)

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$$

y $\mu(E)$ es **regular**. si todos los Borelianos son exteriores e interiores.

Definición: un conjunto E de un espacio topológico es llamado σ-compacto si:

$$E = \bigcup_{i}^{\infty} K_i \quad , \quad k_i \text{ compacto.}$$

Un conjunto E es un espacio de medida, es σ-finita. si:

$$E = \bigcup^{\infty} E_i \quad , \quad \mu(E_i) < \infty$$

TEOREMA 1: Sea X Hausdorff, localmente compacto, σ-compacto. Si M y μ son la σ-álgebra y la medida con las propiedades del T.R.R., entonces:

(i) Si $E \in M$, $\varepsilon > 0$, $\exists$ F cerrado, V abierto, tal que
$$F \subset E \subset V \quad \wedge \quad \mu(V-F) < \varepsilon.$$

(ii) μ es medida de Borel regular a X

(iii) Si $E \in M$, existen A y B donde $A \in F_\sigma$ "uniones numerables de cerrados y $B \in G_\delta$ intersección numerable de abiertos, tal que:
$$A \subset E \subset B \quad \wedge \quad \mu(B-A) = 0$$

TEOREMA 2: Sea X - espacio de Haussdorff localmente compacto tal que cada abierto es σ-compacto. sea λ cualquier medida positivas de Borel tal que

$$\lambda(K) < \infty \qquad \forall K \text{ compacto.}$$

Entonces λ es regular.

Medida de Lebesgue:

Espacios Euclidicanos:

$$\mathbb{R}^k = \{ x = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_i \in \mathbb{R} \} \quad \dim \mathbb{R}^n = n.$$

- **Propiedades de vectores:**

- $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$

- $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \longrightarrow$ producto interno

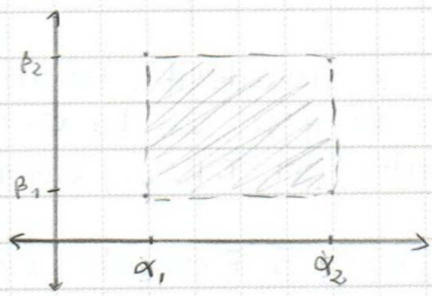
- $|x| = (x \cdot x)^{1/2} \longrightarrow$ normo

- $d(x,y) = |x - y| \longleftarrow$ métrica $(\mathbb{R}^k, d)$ espacio topológico.

- $|x, y| = |\Sigma \xi_i \eta_i| \leq |x| \cdot |y|$: Desigualdad de Cauchy Schwarz.

- $E \subset \mathbb{R}^k$, $E + x = \{ y + x : y \in E \}$: Traslación

- $W = \{ x := (\xi_1, \dots, \xi_k) : \alpha_i < \xi_i < \beta_i : 1 \leq r \leq k \}$.



W se denomina k-ceida.

- El volumen de W está dado por:

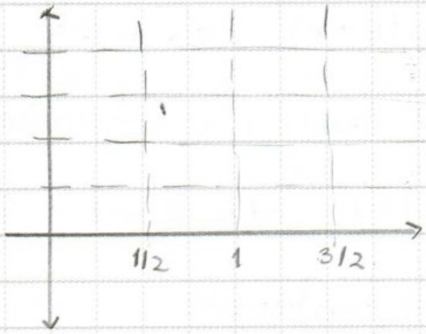
$$\mathrm{Vol}(W) = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i).$$

- Si $a \in \mathbb{R}^k$, $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ $\delta > 0$

$$Q(a, \delta) = \{ x : \alpha_i \leq \xi_i < \alpha_i + \delta \}$$

y Q es una δ-caja con vértice en a.

• Sea $P_n = \{ x \in \mathbb{R}^k : \xi_i = m 2^{-n} \}$. $n \in \mathbb{Z}$ $i = 1, \dots, k$



TODAS las dimensiones de las celdas son iguales de dim. 2^{-n}

• Sea $\Omega_n = \{ Q(a, 2^{-n}) : a \in P_n \}$ Partición del espacio.
Cajas de Radio 2^{-n}.

• **Propiedades:**

a) Si n es fijo, cada $x \in \mathbb{R}^k$ pertenece a solo un miembro de Ω_n.

b) Si $Q' \in \Omega_n$, $Q'' \in \Omega_r$, $r < n$ entonces
$$Q' \subset Q'' \quad o \quad Q' \cap Q'' = \emptyset.$$

c) Si $Q \in \Omega_r$ entonces:
$$Vol(Q) = 2^{-rk}.$$

d) Cada conjunto no vacío en $\mathbb{R}^k$ es una unión numerable de cajas disyuntas.
$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots$$

TEOREMA: Existe una única medida completa $m = m(k)$ definida en una σ-álgebra M en $\mathbb{R}^k$ con las siguientes propiedades

a) $m(W) = vol(W)$ $\forall k$-celda W

b.) M contiene todos los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^k$, Precisamente $E \in M$ sii $\exists$ conjuntos A y B

$$A \subset E \subset B \qquad \exists\, A \in F_\sigma, \ B \in G_\delta$$

$$y \quad m(A - B) = 0.$$

d.) Si μ cualquier medida de Borel invariante sobre traslación

$$\mu(E) = \mu(E+x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}^k$$

y $\mu(k) < \infty$ Entonces existe una constante c tal que

$$\mu(E) = c\, m(E) \quad , \quad \forall E \text{ Borel.}$$

c.) m es invariante sobre traslaciones.

$$m(E) = m(E+x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^k$$

e.) Para toda transformación lineal $T: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ correspon. de # real ΔT

$$m(T(E)) = \Delta m(T)\, m(E) \qquad \forall E \in \mathcal{M}$$

Además, si T es rotación $m(T(E)) = m(E)$

Demostración.

b.) Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Lambda_n : C_c(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$$
$$f \to \Lambda_n f = \sum_{x \in P_n} f(x)\, 2^{-nk}$$

Por Riemann $\{\Lambda_n f\}$ es una secuencia convergente

$$\therefore \quad \Lambda f = \lim_{n \to \infty} \Lambda_n f$$ ↳ la integral de Riemann.

Tenemos $\Lambda : C_c(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ funcional lineal
⇓ TRR

$\exists\, \mathcal{M}$ σ-algebra que contiene a todos los Borelianos y una única medida m, $\Lambda f = \int_X f\, dm$
con m todas las propiedades del Teorema R. Riet.

$$\therefore \quad f \in C_c(\mathbb{R}^k)$$

$\mathbb{R}^k$ σ-compacto - unión de sigma-compactos

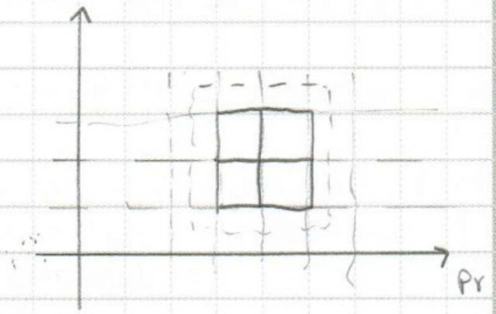
11/10/2019.

m es regular $\underline{\text{ok!}}$

c-) $m(w) = vol(w)$

Sea inicialmente w una k-celda abierta.
k: dimensión del espacio.

Considere $E = \bigcap \{Q \in \Omega_r : \bar{Q} \subset W\}$.



E_r compacto.

Note que $\bar{E}_r \subset W$ y por la geometría de $\mathbb{R}^k$, tenemos

- $Vol(E_r) \xrightarrow[r\to\infty]{} Vol(w)$

- $\chi_{E_r}(x) \longrightarrow \chi_W(x)$.

Por el lema de Urysohn, existe $f_r \in C_c(\mathbb{R}^k)$ tal que $\underbrace{\bar{E}_r \prec f \prec W}_{\chi_{E_r}^{(p)} \leq f \leq \chi_W^{(p)}}$.

Así que $\lim\limits_{r\to w} f_r(x) = \chi_w(x)$.

Además, $g_r(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_r(x)\}, \xrightarrow[r\to\infty]{} \chi_w(x)$

por construcción y monotonía Λf. Se puede aplicar:

$$vol(E_r) \leq \Lambda f_r \leq \Lambda g_r \leq vol(w)$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \Lambda g_r(x) = vol(w)$$

Por otro lado, por T.R.R.

$$\Lambda g_r = \int_X g_r \, dm \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{vol}(w) = \lim_{r\to\infty} \Lambda g_r = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} g_r \, dm$$ por teorema de la convergencia monótona. →

$$= \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{r\to\infty} g_r \, dm = \int_{\mathbb{R}^k} \chi_w \, dm = m(w)$$

Mostramos que:

$$m(w) = \mathrm{vol}(w) \quad \forall w \text{ k-celda abierta.}$$

Para caso general en que w sea una k-celda arbitraria.

Note que

$$w = \bigcap w_i \,; \quad w_i \supset w_{i+1} \,, \quad w_i \text{ k-celda abierta}$$

$$m(w) = m(\cap w_i) = \lim_{n\to\infty} m(w_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}(w_n)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{vol}(w)$$

c) fijemos $x \in \mathbb{R}^k$, y definimos

$$\lambda(E) = m(E + x) \,, \quad \forall E \in M$$

Observación: λ es medida de Borel regular.

- Si λ es medida de Borel, y

$\lambda(E) = m(E)$ si E es una caja.

$\lambda(V) = m(V)$ Todo abierto es UNIÓN DISYUNTA DE CAJAS

$\lambda(E) = m(E)$ m medida de Borel regular.

Los medibles son regulares.

Así, note que:

$$\mathrm{vol}(E + x) = \mathrm{vol}(E) \quad \text{si } E \text{ es caja,}$$

por A.)

$$\lambda(E) = m(E + x) = m(E).$$

$$\downarrow \text{obs.}$$

$$\lambda(E) = m(E)$$

d) *Sea μ invariante sobre traslaciones, $\mu(K) < \infty$

Sea Q_0 una caja con volumen., $vol(Q_0) = 1$. Así:
$\mu(Q_0) = c > 0$

Q_0 = unión de 2^{nk} - cajas. disyuntas que pueden ser traslaciones de una caja Q

$$\mu(Q_0) = 2^{nk}\mu(Q) = c \cdot (m(Q_0)) = c2^{-nk} m(Q)$$

$$\rightarrow \quad cm(Q) = \mu(Q)$$

$$\rightarrow \quad \mu(E) = cm(E) \text{ por regularidad}$$

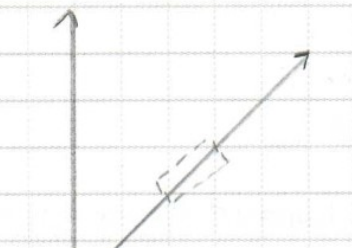
e) Sea $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ transformación lineal.

1.) T no es sobreyectiva

- Si $\text{Im}(T) = Y$ con dimensión $< K$

$T(E) \subseteq$ de un subespacio de dimensión $< k$

$$\rightarrow \quad m(T(E)) = \emptyset$$



$T(E) \subseteq W_\varepsilon$

$vol(E) \sim c \cdot \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \emptyset$

$m(T(E)) \leq m(W_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \emptyset$

2.) Si $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ es biyección.

$\Downarrow$

$T(E)$ es Borel si E es Borel.

Definamos $\quad \mu(E) = m(T(E))$

Note que:

- $\mu(E+x) = m(T(E+x)) = m(T(E) + T(x)) = m(T(E)) = \mu(E)$.
- $\mu(k) = m(T(k)) < \infty$

$$\rightarrow \quad \exists c : \mu(E) = cm(E)$$

por tanto $m(T(E)) = c\cdot m(E)$.

Para ver quien es: c entonces se tiene que: Basta tomar (E_0)

$$\infty > m(E_0) > 0$$
$$\infty > m(T(E_0)) > 0$$

$$\therefore \quad c = \frac{m(T(E_0))}{m(E_0)}$$

- Si T es rotación: $T(E_0) = E_0$ si E_0 es una bola unitaria.

$$\rightarrow c = 1$$

- ¿Todo conjunto de medibles es de Borel? CANTOR.

- ¿Todo m subconjunto de m conjunto medible es medible?

TEOREMA: Si $A \subset \mathbb{R}$ medible, tal que todo subconjunto de A es medible $\rightarrow m(A) = \emptyset$.

Dem (Algebra): $\begin{cases} \mathbb{R} \text{ grupo ??? } + \\ \mathbb{Q} \text{ subgrupo ???} \end{cases}$

Consideremos las clases laterales de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}x = x\mathbb{Q} = \{xq : q \in \mathbb{R}\}$$

Sea E conjunto que contiene exactamente 1 representante de cada clase lateral de $\mathbb{Q}$.

Afirmaciones:

a.) $(E+r) \cap (E+s) = \emptyset$, $\forall r, s \in \mathbb{Q}$ $r \neq s$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists r \in \mathbb{Q}$: $x \in E + r$

Dem i.) Supongamos que $x \in (E+r) \cap (E+s)$.

$$\rightarrow \quad x = y + r = z + s \qquad y, z \in E$$

$$\rightarrow \quad y - z = -r + s$$

y, z pertenecen a la misma clase lateral. (Abs).

ii.) Tome $y \in E$ que está en la misma clase lateral de $x \to r = y - x$.

- Fije $t \in \mathbb{Q}$ y considere

$$A_t = A \cap (E + t) \subseteq A.$$

Por (ii.) $A = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} A_t$

Por hipótesis, A_t es medible

$$\to m(A) = m\left(\bigcup_{t \in \mathbb{Q}} A_t\right) \leq \sum_{t \in \mathbb{Q}} m(A_t)$$

Afirmación ..

$m(A_t) = 0$ si $m(A) = 0$

Sea $K \subset A_t$, K compacto y $H = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} K + r$

Así, H es limitado

$$\to H \subseteq \bar{H}$$
$$\to m(H) < \underset{\substack{\downarrow \\ \text{compacto}}}{m(\bar{H})} < \infty$$

$K \subset A_t \subset E + t.$

por (i.) $K + r$ disyuntos $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$

$$\infty > m(H) = m\left(\bigcup K + r\right) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(K + r)$$

$$= \sum_{r_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(K + r_n).$$

$$m(K) = \lim_{n \to \infty} (m + r_n) = 0.$$

Relaciones entre funciones Medibles y continuas.

TEOREMA: (LUSIN): Sea f compleja medible en un espacio de Hausdorff localmente compacto y μ una medida con propiedades establecidas en T.R.R.

con $\mu(A) < \infty$ y $f(x) = 0$, $x \notin A$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces $g \in C_c(X)$ tal que

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$$

- $\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$

TEOREMA: (Vitali).

Suponga que $f \in L^1(\mu)$, f real. y $\varepsilon > 0$, Entonces existen funciones u y v en X tal que

$$u \leq f \leq v$$

u: es semi-continua superior y acotada superiorm/e

v es semi-continua inferior y " inferiormente y

$$\int_X (u - v)\, d\mu < \varepsilon$$

4. MEDIDAS COMPLEJAS.

Sea M una σ-álgebra de X. Decimos $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in M$ es una partición de E sii

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \qquad E_i \cap E_j = \emptyset \quad i \neq j.$$

una medida compleja, μ, $M \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \qquad \forall E \in M \text{ y para toda partición } \{E_i\} \text{ de } E.$$

la convergencia de la serie es requisito.

Obj: Encontrar una medida positiva λ, que domine de a μ de esta forma

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \qquad 0 < |\mu(E)| \leq \lambda(E).$$

$\downarrow$

Motivación:

$$|\mu| : M \longrightarrow [0, \infty].$$
$$E \longrightarrow |\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

llamamos $|\mu|$ como variación total de μ.

Propiedades:

- Si μ es positiva $\rightarrow |\mu| = \mu$.

$$|\mu|(X) \longrightarrow < \infty \Rightarrow |\mu(E)| \leq |\mu(E)| \leq |\mu|(X) < \infty$$

toda medida compleja limitada es acotada.

·

Teorema: La variación total de una medida compleja μ es una medida positiva.

<u>Dem</u>: sea $\{E_i\}$ partición de E

$$|\mu|(E) \geq \sum |\mu(E_i)|$$

Entonces:

fijemos i y dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ una partición $\{A_{ij}\}$ de E_i

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_{ij})| \geq |\mu|(E_i) - 2^{-i}\varepsilon$$

propiedad del supremo.

Note que $\{A_{ij}\}$, $i,j = 1,2,3,\dots,$ Es una partición de E

Así:

$$|\mu|(E) \geq \sum |\mu(A_{ij})| \geq \sum |\mu|(E_i) - \varepsilon \cancel{\sum 2^{-i}}^{1}$$

Probemos que

$$|\mu|(E) \geq \sum |\mu|(E_i) - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\therefore$

$$|\mu|(E) \geq \sum |\mu|(E_i).$$

—//—

Por otro lado, sea $\{A_{ij}\}$ partición de E

$$\begin{cases} \text{Fije } j \Rightarrow \{A_j \cap E_i\} \text{ una partición de } A_j \\ \text{Fije } i \Rightarrow \{A_j \cap E_i\} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad A_i \end{cases}$$

$\cup(A_j$

$$\mu(A_j) = \sum_i \mu(A_j \cap E_i)$$

Aplicando módulo y sumando en j en 2 lados + aplicando desigualdad triangular

$$\sum_j \mu(A_j) \leq \sum_j \left| \sum_i \mu(A_j \cap E_i) \right|$$

$$\leq \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)|$$

$$= \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)|.$$

$$\leq |\mu|(E_i)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_j |\mu(A_j)| \leq \sum_i |\mu|(E_i).$$

$$\therefore \quad |\mu|(E) \leq \sum |\mu|(E_i).$$

TEOREMA: $|\mu|(X) < \infty$

Lema: sea $z_1, \dots, z_n$ # complejos, existe un subconjunto $S \subseteq \{1, \dots, N\}$ tal que:

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|$$

Supongamos que existe $E \in M$, $|\mu|(E) = \infty$ y sea

$$t = \pi(1 + |\mu(E)|).$$

Existe una partición $\{E_i\}$ de E

$$\sum_{i=1}^{N} |\mu(E_i)| > t$$

Si hacemos $z_i = \mu(E_i) \in \mathbb{C}$

Existe $S \subseteq \{1, \dots, N\}$

$$\left| \sum_{k \in S} \mu(E_k) \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} |\mu(E_k)| > \frac{t}{\pi}$$

Si consideramos

$$A = \bigcup E_k \Rightarrow |\mu(A)| \geq t/\pi > 1$$

Sea $E - A = B$, $\quad E = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$

$$\begin{aligned} |\mu(B)| &= |\mu(E-A)| \\ &\geq ||\mu(A)| - |\mu(E)|| \geq \frac{t}{\pi} - |\mu(E)| = 1 \end{aligned}$$

Resumen: Si $E \in M$, $|\mu|(E) = \infty$

$\Rightarrow \exists A, B \in M$, $A \cap B = \emptyset$

$E = A \cup B$

$\mu(A) > 1$ y $|\mu|(A) = \infty$

$\mu(B) > 1$ ó $|\mu|(B) = \infty$

- Suponga $|\mu|(X) = \infty \Rightarrow \exists A_1, B_1$, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

$X = A_1 \cup B_1$ y $|\mu(A_1)| > 1$

$|\mu|(B_1) = \infty$

Así, existe A_2, B_2

$B_1 = A_2 \cup B_2$, $A_2 \cap B_2 = \emptyset$, $|\mu|(A_2)| > 1$

$|\mu|(B_2) = \infty$

existe $\{A_i\}$ disyunta con $|\mu(A_i)| > 1$

y

$\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i)$

$\Rightarrow \mu(A_i) \xrightarrow[i=\infty]{} 0$

(Absurdo)

- El conjunto de TODAS las medidas complejas es espacio vectorial.

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)(E) = \lambda_1(E) + \lambda_2(E) \\ (c\lambda)(E) = c \cdot \lambda(E). \end{cases}$$

$\|\mu\| = |\mu_i|(X)$.

- variaciones positivas y negativas: sea μ: Medida Real, [signed measure], $|\mu|$ variación total.

$$\mu^+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$$

$$\mu^- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

Las dos definen medidas positivas

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \qquad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

$\Downarrow$

Descomposición de Jordan

- **Continuidad absoluta:**

Sea μ medida positiva y λ medida arbitraria (positiva compleja).

Decimos λ es absolutamente continua con respecto a μ

$\lambda << \mu$ si $\lambda(E) = \emptyset$ para todo $E \in M$ Donde $\mu(E) = 0$.

- Si existe $A \in M$, donde $\lambda(E) = \lambda(E \cap A) = \lambda(E \cap A)$, $\forall E \in M$.

λ está concentrado en A.

- Sean λ_1, λ_2 medidas y sean A, B disyuntos.

$$\begin{cases} \lambda_1 & \text{esta concentrados en } A \\ \lambda_2 & \text{" \quad " \quad en } B. \end{cases}$$

Decimos que λ_1 y λ_2 son mutuamente singulares.

$\lambda_1 \perp \lambda_2$.

18/10/2019.

- Análisis Funcional
- Teorema Nikydom - Radom.
- Teorema Fubinni.

Espacio vectorial sobre un cuerpo. ($\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$: $\mathbb{C}$)

$$\|\cdot\|: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Propiedades de la norma:
  1.) $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
  2.) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
  3.) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ desigualdad triangular.

$(E, \|\cdot\|) \rightarrow$ espacio normado $\Rightarrow d(x,y) = \|x-y\|$ induce a una TOPOLOGÍA.

Def: $(E, \|\cdot\|)$ es un **espacio de Banach** si E es un espacio normado completo

Completo:
$\forall \{x_n\}$ de Cauchy en E, existe $x \in E$

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_E = 0$$

Sec de Cauchy:
$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ t.q: si $n, m > N \Rightarrow \underbrace{\|x_n - x_m\|}_{d(x_n, x_m)} < \varepsilon$.

- Sea (X, M, μ) espacio de medida:

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}_1(X, M, \mu) = \{f: X \to \mathbb{K} \text{ medibles t.q: } \int_X |f| \, d\mu < \infty$$

Si $1 \leq p < \infty$

$$\underbrace{\|f\|_p}_{\text{NO ES UNA NORMA}} := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty$$

RECUERDE QUE: $f > 0$

$$\int_X f \, d\mu = 0 \longrightarrow f = 0 \quad \text{a.e con } X$$

Clases de equivalencia.

$$f \sim g \longleftrightarrow f = g \quad \text{a.e en } X$$

i.e $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) /_\sim$$
$$= \{[f] : f \in \mathcal{L}_p\}.$$

$\|[f]\| := \|f\|_p$ esto quiere decir que es una norma pues NO IMPORTAN los de medida nula

$$(L^p(\mu), \|\cdot\|_p) \rightarrow \text{Espacio Normado.}$$

Desigualdades:

- **Hölder:** Sean $1 \leq p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Entonces, sean $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$

$$\Rightarrow f \cdot g \in L^1(\mu).$$

Entonces $\int_X |f \cdot g| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_p$, $\Rightarrow p = 2$ Cauchy Schwarz

- **Minkowski:** Sean $f, g \in L_p(\mu) \rightarrow (f+g) \in L^p$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

TEOREMA: $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ es espacio de Banach

- $p = \infty$

$\mathcal{L}_\infty(X, M, \mu) = \{$funciones medibles a.e y acotadas a.e$\}$

i.e $\exists N$ medible, $K > 0$

$$|f(x)| \leq K \ , \ \forall x \notin N \ , \ \mu(N) = 0.$$

- $S_f(N) = \sup \{|f(x)| : \forall x \notin N\}$.
- $\|f\|_\infty = \inf \{S_f(N) : N \in M, \mu(N) = 0\}$.

  $\hookrightarrow$ Supremo esencial.

- $L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty\big|_\sim$

$$\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty \longrightarrow \text{es norma.}$$

Por tanto $(L_\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ es Banach.

- Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

$$\left.\begin{array}{l} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K} \\ \qquad (x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle \end{array}\right\} \text{producto interno}$$

Si satisface lo siguiente

- $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ real

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$: Espacio producto interno

$\Downarrow$

$(E, \|\cdot\|)$ Norma inducida $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}}$

$\Downarrow$

$d(x,y) = \|x-y\|$

$\Downarrow$

TOPOLOGÍA.

Def: $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es Hilbert $\overset{sii}{\longrightarrow}$ $(E, \|\cdot\|)$ es espacio completo

- **Desigualdades:**
  - $\underbrace{|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$.

  $\longrightarrow$ NORMAS DERIVADAS DE PRODUCTO INTERNO.

Representación de Riesz.

Sea H espacio de Hilbert y T funcional, lineal acotado.

i.e $\quad T: H \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \longmapsto Tx : |Tx| \leq C \quad \forall x \in H.$

$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |Tx| < C$

Entonces, existe un único $y_0 \in H$

$$Tx = \langle x, y_0\rangle, \quad \forall x \in H.$$

Proposición: $L_p(\mu)$ es Hilbert sii $p = 2$.

- **Continuidad absoluta**

  $\lambda \ll \mu$

  $\mu(E) = \emptyset \longrightarrow \lambda(E) = \emptyset$

- **Mutuamente Singul.**

  $\lambda \perp \mu$

  Si $\exists A, B$, $A \cap B = \emptyset$

  $\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$, $\forall E$

  $\mu(E) = \mu(E \cap B)$, $\forall E$.

Propiedades.

- $\lambda_1 \ll \mu \wedge \lambda_2 \ll \mu \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$
- $\lambda_1 \perp \mu \wedge \lambda_2 \perp \mu \rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) \perp \mu$
- $\lambda_1 \ll \mu \ , \lambda_2 \perp \mu \rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$
- $\lambda_1 \ll \mu \ , \lambda \perp \mu \rightarrow \lambda = \emptyset$

TEOREMA: LEBESGUE - NIKODYM - RADON

Sea μ una medida positiva σ-finita. y λ medida compleja en σ-álgebra M en un conjunto X.

Entonces:

a.) Existen un único par (λ_a, λ_s) medidas complejas tales que:

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s \ , \ \lambda_a \ll \mu, \ \lambda_s \perp \mu.$$ $\rightarrow$ DESCOMPOSICIÓN DE LEBESGUE

Además, si λ es positiva finita $\rightarrow \lambda_a, \lambda_s$ también lo son

b.) Existe una única función $h \in L^1(\mu)$

$$\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu$$

(TEOREMA RADON-NIKODYM)

$$d\lambda_a = h \, d\mu.$$

Prueba:

$\rightarrow$ UNICIDAD:

- Suponga $\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda_a' + \lambda_s'$ $\quad \lambda_a \ll \mu, \ \lambda_a' \ll$

(1) $\quad \lambda_s \perp \mu \ , \ \lambda_s' \perp \mu$

entonces $\lambda_a - \lambda_a' \ll \mu$ y $\lambda_s + \lambda_s' \perp \mu$

de (1) $\underbrace{\lambda_a - \lambda_a'}_{\lambda_a - \lambda_a' \perp \mu} = \underbrace{\lambda_s' - \lambda_s}_{\lambda_s' - \lambda_s \ll \mu}$

implica que por propiedad 1, 2, 4 $\lambda_a = \lambda_a'$
$\lambda_s = \lambda_s'$.

- Suponga

$$\lambda_a (E) = \int_E h \, d\mu = \int_E h' \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_E (h - h') \, d\mu = 0 \quad \forall E \in M$$

Tomando $\mu(E_0) = 0$ entonces $\rightarrow h - h' = 0 \therefore h = h'$

Lemma: Sea μ medida positiva σ-finita:

En una σ-álgebra M, entonces, existe

$w \in L^1(\mu)$: $0 < w(x) < 1$, $\forall x \in X$

Prueba: $X = \bigcup E_n$, $\mu(E_n) < \infty$

$$w_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin E_n \\ \dfrac{2^{-n}}{1 + \mu(E_n)} & \text{si } x \in E_n \end{cases}$$

La función

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \text{ es la d}$$

CONSTRUCCIÓN:

- μ medida positiva σ-finita
- λ positiva (acotada) en M
- $\exists w \in L^1(\mu)$: $0 < w(x) < 1$, $\forall x \in X$

Define:

$$\varphi(E) = \lambda(E) + \int_E w \, d\mu \quad \forall E \in M.$$

$\hookrightarrow$ es medida positiva. "ver".

Noten que: si $f = \chi_E \rightarrow$ f simple, f medible pos

$$\underbrace{\int_X f \, d\varphi = \int_X f \, d\lambda + \int_X f w \, d\mu}$$

NOTACIÓN $d\varphi = d\lambda + w \, d\mu$

$\forall f$ medible no negativa

Ahora, considere un funcional

$$T : L^2(\varphi) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto Tf = \int_X f \, d\lambda$$

Note:

$$|Tf| = \left| \int_X f \, d\lambda \right| \leq \int_X |f| \, d\lambda \leq \int_X |f| \, d\varphi$$

Así:

$$|Tf| \leq \int_X |f| \, d\varphi \underset{\text{Aplicando Hölder.}}{\leq} \underbrace{\left[\int |f|^2 \, d\varphi \right]^{1/2}}_{\|f\|_{L^2(\varphi)}} \cdot \underbrace{\left[\int_X d\varphi \right]^{1/2}}_{\varphi^{1/2}(X)}$$

$$\varphi(X) = \lambda(X) + \|w\|_{L^1(\mu)} < +\infty$$

T es funcional lineal acotado en Hilber $L^2(\varphi)$.

Por T.R.R (para espacios de Hilbert)

$\exists$ un único $g \in L^2(\varphi)$:

$$T(f) = \langle f, g \rangle_{L^2(\varphi)} = \int_X f \cdot g \, d\varphi.$$

Así:

$$\boxed{\int_X f \, d\lambda = \int_X fg \, d\varphi, \ \forall f \in L^2(\varphi)}$$

Note que:

$$\int_X (1-g) f \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda - \underbrace{\int_X f \cdot g \, d\lambda}$$

$$d\varphi = d\lambda + w \, d\mu \Rightarrow \int_X fg \, d\varphi = \int_X fg \, d\lambda + \int_\lambda fg w \, d\mu$$

$$= \int_X fg w \, d\lambda$$

$$\therefore \int_X (1-g) f \, d\lambda = \int_X f \cdot g \cdot w \, d\mu$$

Recuerde que: $\varphi(E) = \lambda(E) + \int_E w \, d\mu \geq \lambda(E) \geq 0$,

Así

$$\int_X g \chi_E \, d\mu = \int_X \chi_E \, d\lambda$$

$$\Rightarrow \int_E g \, d\varphi = \lambda(E).$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{\frac{1}{\varphi(E)} \int_E g \, d\varphi}_{} = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \leq 1$$

Clase #2: promedio $\in [0,1]$

$\hookrightarrow g(x) \in [0,1)$; a.e en X

Sin pérdida de generalidad: $g(x) \in [0,1] \; \forall x \in X$

$A = \{x : 0 \leq g(x) < 1\}$, $B = \{x : g(x) = 1\}$

$\Downarrow$

$A \cap B = \emptyset$

Definamos $\left.\begin{array}{l} \lambda_a(E) = \lambda(E \cap A) \\ \lambda_s(E) = \lambda(E \cap B) \end{array}\right\} \lambda_a \perp \lambda_s. \; \forall E \in M.$

Si $f = \chi_B$

$$\emptyset = \int_B (1-g) \, d\lambda = \int_B g \cdot w \, d\mu = \int_B w \, d\mu$$

$\Rightarrow \mu(B) = \emptyset$

$\hookrightarrow \emptyset < w < 1$

$\Rightarrow \mu_s \perp \mu.$

- Tome $f = (1 + g + g^2 + \cdots + g^n) \chi_E$, E medible

$$\int_X \underbrace{(1-g)(1+g+g^2+\cdots+g^n)}_{(1-g^{n+1})} \chi_E \, d\lambda$$

$$= \int_E \underbrace{(1-g)(1+g+g^2+\cdots+g^n) w}_{h_n \text{ : monótona y acotado (serie geométrica)}} \, d\mu$$

$\rightarrow$ converge puntualmente a una función $h(x)$.

$$= \underbrace{\int_E (1-g^{n+1})\, d\lambda}$$

$$\int_{E\cap A} (1-g^{n+1})\, d\lambda + \int_{E\cap B} (1-g^{n+1})\, d\lambda$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap A} (1-g^{n+1})\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n \, d\mu$$

$$= \int_E \lim_{n\to\infty} h_n \, d\mu$$

Convergencia Monótona $\quad = \displaystyle\int_E h \, d\mu$

y además: $\displaystyle\int_{E\cap A} \lim (1-g^{n+1})\, d\lambda = \int_{E\cap A} \lambda$ } por convergencia monótona $g^{n+1} \to 0$

Entonces: $\lambda_a(E) = \lambda(E\cap A) = \displaystyle\int_E h \, d\mu \quad \forall E \in M$

Entonces se tiene que:

$$\lambda_a(X) = \|h\|_{L^1(\mu)}$$

$$\|h\|_{L^1(\mu)} = \lambda(X\cap A) = \lambda(A) < C$$

Luego el teorema es verdad para λ positivo acotado

Si ~~λ es~~ compleja

$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ } variaciones positivas y negativas.

Tarea
Consecuencias de Radon-Ni
pág 124

TEOREMA DE FUBINNI

- Espacio producto medible:

Definiciones:

i.) $X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$.

ii.) $A \times B \subset X \times Y$ es rectángulo si $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

iii.) (X, τ), (Y, φ) espacios medibles, decimos que $A \times B$ es rectángulo medible sii $A \in \tau$, $B \in \varphi$.

iv.) $\mathcal{C} = \{R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots, R_i \cap R_j = \emptyset, i \neq j\}$.

$\mathcal{C}$: Clase de conjuntos medibles
R_i : Rectángulo : $R_i = A_i \times B_i$

v.) Definimos $\tau \times \varphi$ como σ-álgebra más pequeña que contiene TODOS los rectángulos medibles.

vi.) Decimos que M es una clase Monótona si

$$A_i \in M, \quad B_i \in M, \quad A_i \subset A_{i+1}, \quad B_i \supset B_{i+1}$$

Entonces

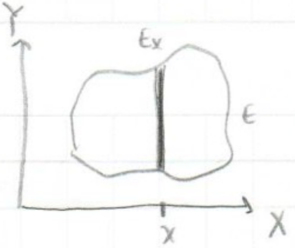
$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M, \quad B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in M.$$

Si $E \subset X \times Y$, para cada $x \in X$, $y \in Y$,

$$E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\} \subseteq Y$$

→ Sección ~~en~~ X
Proyección en Y

x : fijo, y : variable.



$E^y : \{x \in X,\ x, y \in E\} \subseteq X$ — sección en Y.
Proyección en x

TEOREMA:
i.) Si $E \in \tau \times \varphi \longrightarrow E_x \in \varphi,\ E^y \in \tau\ \forall x \in X,\ y \in Y$.

ii.) $\tau \times \varphi$ es la clase monótona más pequeña que contiene los conjuntos elementales.

Definición: Sea f función $X \times Y$, Definimos las <u>funciones marginales</u>:

Si x es fijo: $f_x(y) = f(x, y) : f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$
y es fijo: $f_y(x) = f(x, y) : f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

TEOREMA: Sea f función $(\tau \times \varphi)$-medible en $X \times Y$,
i.) Para $x \in X$, f_x es φ-medible en Y
ii.) Para $y \in Y$: f^y es τ-medible en X

- **Medida Producto.**

TEOREMA: Sean (X, τ, μ), (Y, φ, λ) medibles σ-finitos. Suponga $Q \in \tau \times \varphi$, entonces

$$\theta(x) = \lambda(Q_x), \quad \psi(y) = \mu(Q^y) \quad \forall x \in X,\ y \in Y.$$

Entonces, θ es μ-medible y φ es λ-medible, además

$$\left.\int_X \theta \, d\mu = \int_Y \psi \, d\lambda. \right\} \text{TEOREMA.}$$

OBS: Note que:

$$\lambda(Q_x) = \int_X \chi_{Q_x}(y) \, d\lambda(y).$$

$$= \int_{X \times Y} \chi_Q(x, y) \, d\lambda(y).$$

Definición:

$$(\mu \times \lambda)(Q) = \int_X \lambda(Q_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y)\, d\lambda(y).$$

$(\mu \times \lambda)$: Medida producto con medida σ- finita.

TEOREMA DE FUBINNI (TAREA).

Sean (X, τ, μ), (Y, φ, λ) espacios de medida σ- finitas y sean f función $(\tau \times \varphi)$-medible en $X \times Y$. Entonces

a.) $0 \leq f \leq \infty$ y si

$$\Theta(x) = \int_Y f_x \, d\lambda \quad , \quad \Psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, y \in$$

Entonces, Θ es μ-medible, Ψ es λ-medible, ade

$$\int_X \Theta \, d\mu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \lambda) = \int_Y \Psi \, d\lambda. \quad (1)$$

b.) Si f es compleja, y si

$$\Theta^x = \underbrace{\int_Y |f|_x \, d\lambda}_{\text{finito en CASI todo punto}} \quad y \quad \int_X \Theta^x \, d\mu < \infty$$

Entonces $f \in L^1(\mu \times \lambda)$.

c.) Si $f \in L^1(\mu \times \lambda)$. Entonces:

i.) $f_x \in L^1(\mu)$, $f^y \in L^1(\lambda)$, $\forall x \in X$ y $y \in Y$.

ii.) $\Theta(x) \in L^1(\mu)$ a.e. en X

$\Psi(y) \in L^1(\lambda)$ a.e en Y.

iii.) (1) se cumple