Actividad 5: Torque y Matriz de Inercia

Objetivo

Para esta actividad se debe obtener el modelo del torque de cada articulación y la matriz de inercia para tres robots manipuladores, en este caso el robot péndulo:

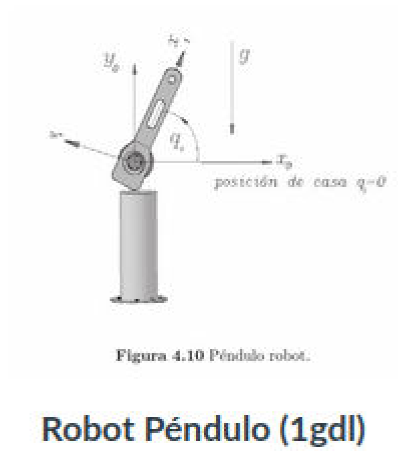


Imagen 1. Modelo

Procedimiento

Primero se limpia la pantalla y valores, para poder declarar las variables simbólicas, es decir, no tienen un valor en específico.

```
clear all
close all
clc

tic

syms th1(t)  t  %Angulos de cada articulación
syms m1 Ixx1 Iyy1 Izz1 %Masas y matrices de Inercia
syms th1p(t)   %Velocidades de cada articulación
syms th1pp(t)   %Aceleraciones de cada articulación
syms l1 lc1 %l=longitud de eslabones y lc=distancia al centro de masa de cada eslabón
syms pi g
altura1=10;
```

Posteriorementе se hace la configuración del robot, 0 para junta rotacional, 1 para junta prismática, además de crear el vector de coordenadas articulares (Posición).

```
RP=[0];

Q= [th1];
disp('Coordenadas articulares');
```

```
Coordenadas articulares
```

```
pretty (Q);
```

```
th1(t)
```

Creamos el vector de velocidades articulares

```
Qp= [th1p];
disp('Velocidades articulares');
```

```
Velocidades articulares
```

```
pretty (Qp);
```

```
th1p(t)
```

Creamos el vector de aceleraciones articulares

```
  Qpp= [th1pp];
disp('Aceleraciones generalizadas');
```

```
Aceleraciones generalizadas
```

```
pretty (Qpp);
```

```
th1pp(t)
```

```

%Número de grado de libertad del robot
GDL= size(RP,2); %***Siempre se coloca 2, ya que indica la dimensión de las columnas
GDL_str= num2str(GDL);%Convertimos el valor numérico a una cadena de carácteres tipo st
```

Se declaran las matrices de posición y las de rotación.

```
%Articulación 1
%Posición de la junta 1 respecto a 0
P(:,:,1)= [l1*cos(th1);
           l1*sin(th1);
              altura1];%*** Vector de posición indexado por página

%Matriz de rotación de la articulación 1 respecto a 0
R(:,:,1)= [cos(th1) -sin(th1)  0; %*** Análisis de robot péndulo
           sin(th1)  cos(th1)  0;
           0         0         1];


%Creamos un vector de ceros
Vector_Zeros= zeros(1, 3);

%Inicializamos las matrices de transformación Homogénea locales
A(:,:,GDL)=simplify([R(:,:,GDL) P(:,:,GDL); Vector_Zeros 1]);%****
```

```
%Inicializamos las matrices de transformación Homogénea globales
T(:,:,GDL)=simplify([R(:,:,GDL) P(:,:,GDL); Vector_Zeros 1]);%*****

%Inicializamos los vectores de posición vistos desde el marco de referencia inercial
PO(:,:,GDL)= P(:,:,GDL); %*****

%Inicializamos las matrices de rotación vistas desde el marco de referencia inercial
RO(:,:,GDL)= R(:,:,GDL);
```

Ahora en un ciclo for hará el procedimiento el número de veces de grados de libertad que tenga el robot. En este for se despliega las matrices de transformación locales y las globales, con un try catch se hace la excepción si el robot sólo cuenta con un grado de libertad. La mattriz global es la multiplicación de las locales.

```
for i = 1:GDL
    i_str= num2str(i);
    %Locales
    %disp(strcat('Matriz de Transformación local A', i_str));
    A(:,:,i)=simplify([R(:,:,i) P(:,:,i); Vector_Zeros 1]);
    %pretty (A(:,:,i));

    %Globales
    try
       T(:,:,i)= T(:,:,i-1)*A(:,:,i);
    catch
       T(:,:,i)= A(:,:,i);  %Caso específico cuando i=1 nos marcaría error en try
    end
    disp(strcat('Matriz de Transformación global T', i_str));
    T(:,:,i)= simplify(T(:,:,i));
    pretty(T(:,:,i));
%Obtenemos la matriz de rotación "RO "y el vector de translación PO de la
%matriz de transformación Homogénea global T(:,:,GDL)
    RO(:,:,i)= T(1:3,1:3,i);
    PO(:,:,i)= T(1:3,4,i);
    pretty(RO(:,:,i));
    pretty(PO(:,:,i));
end
```

```
Matriz de Transformación global T1
/ cos(th1(t)), -sin(th1(t)), 0, l1 cos(th1(t)) \
|                                               |
| sin(th1(t)),  cos(th1(t)), 0, l1 sin(th1(t)) |
|                                               |
|      0,            0,      1,       10        |
|                                               |
\      0,            0,      0,        1        /
/ cos(th1(t)), -sin(th1(t)), 0 \
|                              |
| sin(th1(t)),  cos(th1(t)), 0 |
|                              |
\      0,            0,      1 /
```

```
/ l1 cos(th1(t)) \
|                |
| l1 sin(th1(t)) |
|                |
\       10       /
```

Ya con esto se calcula el jacobiano lineal de forma diferencial, para esta matriz se deriva parcialmente th1, respecto a los ejes. Con las derivadas acomodamos los valores y creamos la matriz del jacobiano.

```
%Calculamos el jacobiano lineal de forma diferencial
disp('Jacobiano lineal obtenido de forma diferencial');
```

```
Jacobiano lineal obtenido de forma diferencial
```

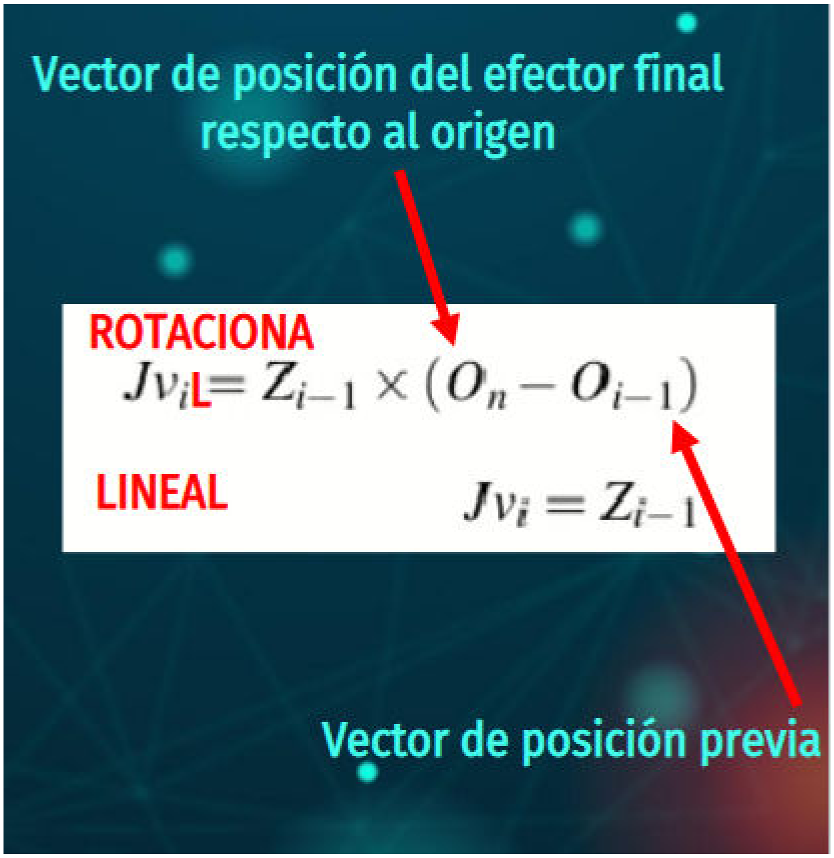
```
%Derivadas parciales de x respecto a th1
Jv11= functionalDerivative(PO(1,1,GDL), th1);
%Derivadas parciales de y respecto a th1
Jv21= functionalDerivative(PO(2,1,GDL), th1);
%Derivadas parciales de z respecto a th1 y th2
Jv31= functionalDerivative(PO(3,1,GDL), th1);

%Creamos la matríz del Jacobiano lineal
jv_d=simplify([Jv11;
              Jv21;
              Jv31]);
pretty(jv_d);
```

```
/ -l1 sin(th1(t)) \
|                 |
|  l1 cos(th1(t)) |
|                 |
\        0        /
```

```
%Calculamos el jacobiano lineal de forma analítica
%Inicializamos jacobianos analíticos (lineal y angular)
Jv_a(:,GDL)=PO(:,:,GDL);
Jw_a(:,GDL)=PO(:,:,GDL);
```

Nuevamente se utiliza un ciclo para construir los jacobianos, con una condición haca el procedimiento para una articulación rotacional o prismática, si en RP es 0 significa que es rotacional y con 1 es prismática, dentro de la condición hay try catch para los grados de libertad del robot.



Fórmula 1.

Dependiendo del caso identificado, sea articulación rotacional o lineal, es la fórmula que se emplea.

```
for k= 1:GDL
    if ((RP(k)==0)|(RP(k)==1))%Casos: articulación rotacional y prismática

       %Para las articulaciones rotacionales
        try
            Jv_a(:,k)= cross(RO(:,3,k-1), PO(:,:,GDL)-PO(:,:,k-1));%*****
            Jw_a(:,k)= RO(:,3,k-1);
        catch
            Jv_a(:,k)= cross([0,0,1], PO(:,:,GDL)); %Matriz de rotación de 0 con respec
            Jw_a(:,k)=[0,0,1];%Si no hay matriz de rotación previa se obtiene la Matriz
         end
     else
%          %Para las articulaciones prismáticas
        try
            Jv_a(:,k)= RO(:,3,k-1);
        catch
            Jv_a(:,k)=[0,0,1];%Si no hay matriz de rotación previa se obtiene la Matriz
        end
            Jw_a(:,k)=[0,0,0];
     end
end
```

```
Jv_a= simplify (Jv_a);
Jw_a= simplify (Jw_a);
disp('Jacobiano lineal obtenido de forma analítica');
```

```
Jacobiano lineal obtenido de forma analítica
```

```
pretty (Jv_a);
```

```
/ -l1 sin(th1(t)) \
|                 |
|  l1 cos(th1(t)) |
|                 |
\        0        /
```

```
disp('Jacobiano ángular obtenido de forma analítica');
```

```
Jacobiano ángular obtenido de forma analítica
```

```
pretty (Jw_a);
```

```
/ 0 \
|   |
| 0 |
|   |
\ 1 /
```

```
disp('Velocidad lineal obtenida mediante el Jacobiano lineal');
```

```
Velocidad lineal obtenida mediante el Jacobiano lineal
```

```
V=simplify (Jv_a*Qp');
pretty(V);
```

```
/      _______             \
| -l1 th1p(t) sin(th1(t)) |
|                          |
|      _______             |
|  l1 th1p(t) cos(th1(t)) |
|                          |
\            0             /
```

```
disp('Velocidad angular obtenida mediante el Jacobiano angular');
```

```
Velocidad angular obtenida mediante el Jacobiano angular
```

```
W=simplify (Jw_a*Qp');
pretty(W);
```

```
/    0    \
|         |
|    0    |
|         |
| _______ |
\ th1p(t) /
```

Energía cinética

Se declara la distancia del origen del eslabón a su centro de masa con vectores de posición respecto al centro de masa.

posteriormente se crea la matriz de inercia por cada eslabón.

```
P01=subs(P(:,:,1)/2, l1, lc1);

I1=[Ixx1 0 0;
    0 Iyy1 0;
    0 0 Izz1];
```

Función de energía cinética

```
%Extraemos las velocidades lineales en cada eje
V=V(t);
Vx= V(1,1);
Vy= V(2,1);
Vz= V(3,1);

%Extraemos las velocidades angular en cada ángulo de Euler
W=W(t);
W_pitch= W(1,1);
W_roll= W(2,1);
W_yaw= W(3,1);
```

Calculamos la energía cinemática para cada eslabón

Como este robot péndulo es de un grado de libertad, ya se obtuvo la velocidad lineal (V) y la velocidad angular (W) previamente, por lo que se utilizan esas matrices en la sustitución de la ecuación producto cruz y con la que se obtiene la energía cinética.

```
V_Total= V+cross(W,P01);
K1= (1/2*m1*(V_Total))'*(1/2*m1*(V_Total)) + (1/2*W)'*(I1*W);
```

Para finalmente desplegar la energía cinética total de este robot.

```
disp('Energía Cinética en el Eslabón 1');
```

```
Energía Cinética en el Eslabón 1
```

```
K_Total= simplify (K1);
pretty (K_Total);
```

```
              2            2     ______                     2          2             2
Izz1 |th1p(t)|    |th1p(t)|  cos(th1(t) - th1(t)) |m1|  (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
--------------- + ------------------------------------------------------------------------
       2                                          16 l1 lc1
```

Energía potencial

Calculamos la energía potencial para cada uno de los eslabones.

Primero se obtiene las alturas respecto a la gravedad.

Como la configuración es de un grado de libertad se suma la altura inicial por la longitud 1 que multiplica el sin(th1) del primer eslabón.

```
h1= altura1+l1*sin(th1); %Tomo la altura paralela al eje z
```

Se multiplica la altura por la masa y la gravedad.

```
U1=m1*g*h1;
```

Calculamos la energía potencial total.

```
U_Total= U1
```

U_Total(t) = $g\,m_1\,(l_1\sin(\mathrm{th}_1(t))+10)$

Y para obtener el Lagrangiano restamos la energia potencial a la energía cinética.

```
Lagrangiano= simplify (K_Total-U_Total);
%pretty (Lagrangiano);
```

Para finalmente obtener H sumando la energía cinética y la energía potencial.

```
H= simplify (K_Total+U_Total);
 pretty (H)
```

```
              2                                        2     ______                    2          2
Izz1 |th1p(t)|                                 |th1p(t)|  cos(th1(t) - th1(t)) |m1|  (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l
--------------- + g m1 (l1 sin(th1(t)) + 10) + -------------------------------------------------------------
       2                                                                 16 l1 lc1
```

Ecuaciones de Movimiento

En esta sección obtenemos el Lagrangiano derivado con respecto a la primera coordenada generalizada de velocidad.

Primero definimos un vector columna de derivadas con respecto al tiempo. En este vector se agregan las velocidades y aceleraciones.

```
Qd=[th1p(t); th1pp(t)];
```

Después obtenemos las derivadas de la velocidad en la primera coordenada generalizada.

```
dQ1=[diff(diff(Lagrangiano,th1p), th1),... %Derivamos con respecto a la primera veloci
    diff(diff(Lagrangiano,th1p), th1p)];%Derivamos con respecto a la primera velocidad
```

Definimos los torques

```
%torque 1
t1= dQ1*Qd- diff(Lagrangiano, th1)
```

t1(t) =

$$\mathrm{th1pp}(t)\ \left(\frac{\mathrm{Izz}_1\ |\mathrm{th1p}(t)|}{\sqrt{\sigma_4}}+\frac{\mathrm{Izz}_1\ \sigma_2}{4\ \overline{\mathrm{th1p}(t)}\ \mathrm{th1p}(t)}-\frac{\mathrm{Izz}_1\ |\mathrm{th1p}(t)|\ \sigma_2}{4\ \sigma_4^{3/2}}+\frac{|\mathrm{th1p}(t)|\ \sigma_3\ |m_1|^2\ \sigma_1\ \ (2\ l_1+\mathrm{lc}_1)}{8\ l_1\ \mathrm{lc}_1\ \ \sqrt{\sigma_4}}+\frac{\sigma_3\ |m_1|^2\ \sigma_1}{32\ l_1\ \mathrm{lc}_1\ \mathrm{t}}\right.$$

where

$$\sigma_1=2\ \mathrm{lc}_1\ |l_1|^2+l_1\ |\mathrm{lc}_1|^2$$

$$\sigma_2=\left(\overline{\mathrm{th1p}(t)}+\mathrm{th1p}(t)\right)^2$$

$$\sigma_3=\cos\left(\overline{\mathrm{th}_1(t)}-\mathrm{th}_1(t)\right)$$

$$\sigma_4=\overline{\mathrm{th1p}(t)}\ \mathrm{th1p}(t)$$

Generación del Modelo Dinámico en forma matricial

Extraemos coeficientes de aceleraciones y formar la matriz de inercia como resultado.

```
M=[diff(t1, th1pp)]
```

```
M(t) =
```

$$\frac{\mathrm{Izz}_1\ |\mathrm{th1p}(t)|}{\sqrt{\sigma_4}}+\frac{\mathrm{Izz}_1\ \sigma_2}{4\ \overline{\mathrm{th1p}(t)}\ \mathrm{th1p}(t)}-\frac{\mathrm{Izz}_1\ |\mathrm{th1p}(t)|\ \sigma_2}{4\ \sigma_4^{3/2}}+\frac{|\mathrm{th1p}(t)|\ \sigma_3\ |m_1|^2\ \sigma_1\ \ (2\ l_1+\mathrm{lc}_1)}{8\ l_1\ \mathrm{lc}_1\ \ \sqrt{\sigma_4}}+\frac{\sigma_3\ |m_1|^2\ \sigma_1\ \sigma_2\ \ (2\ l_1+}{32\ l_1\ \mathrm{lc}_1\ \overline{\mathrm{th1p}(t)}\ \mathrm{th1p}}$$

where

$$\sigma_1=2\ \mathrm{lc}_1\ |l_1|^2+l_1\ |\mathrm{lc}_1|^2$$

$$\sigma_2=\left(\overline{\mathrm{th1p}(t)}+\mathrm{th1p}(t)\right)^2$$

$$\sigma_3=\cos\left(\overline{\mathrm{th}_1(t)}-\mathrm{th}_1(t)\right)$$

$$\sigma_4=\overline{\mathrm{th1p}(t)}\ \mathrm{th1p}(t)$$

```
rank (M) %un grado de libertad
```

```
ans = 1
```

```
M=M(t);

%se recopila el tiempo que tomó ejecutar las operaciones
toc
```

```
Elapsed time is 5.192649 seconds.
```