

Actividad 4: Modelo de Energía y Lagrangiano

Objetivo

Para esta actividad se debe obtener el modelo de la energía y el Lagrangiano para tres configuraciones de robots manipuladores, en este caso el robot cartesiano de tres grados de libertad:

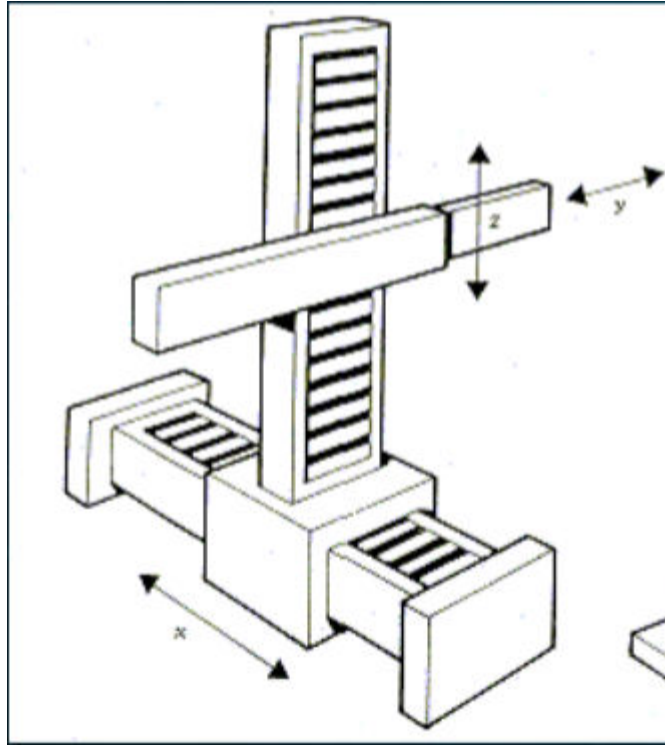


Imagen 1. Modelo

Procedimiento

Primero se limpia la pantalla y valores, para poder declarar las variables simbólicas, es decir, no tienen un valor en específico.

```
%Limpieza de pantalla
clear all
close all
clc

tic
%Declaración de variables simbólicas
syms long1(t) long2(t) long3(t) t %Angulos de cada articulación
syms m1 m2 m3 Ixx1 Iyy1 Izz1 Ixx2 Iyy2 Izz2 Ixx3 Iyy3 Izz3
%Masa y matrices de Inercia
syms t1 t2 t3 %Tiempos
syms l1 l2 l3 lc1 lc2 lc3 %l=longitud de eslabones
% y lc=distancia al centro de
% masa de cada eslabón
syms pi g
altural=5; %altura constante del robot
```

Posteriormente se hace la configuración del robot, 0 para junta rotacional, 1 para junta prismática, además de crear el vector de coordenadas articulares (Posición). En este caso, como son 3 articulaciones se colocan 3 unos por ser articulaciones prismáticas.

```
RP=[1 1 1];

Q= [long1; long2; long3];
disp('Coordenadas generalizadas');
```

Coordenadas generalizadas

```
pretty (Q);
```

```
/ long1(t) \
| long2(t) |
| long3(t) |
\          /
```

Sacando la derivada del vector de coordenadas articulares con la función diff, obtenemos la velocidad articular.

```
Qp= diff(Q, t);%diff() para derivadas con variable de referencia
% que no depende de otra: ejemplo el tiempo
disp('Velocidades generalizadas');
```

Velocidades generalizadas

```
pretty (Qp);
```

```
/ d      \
| -- long1(t) |
| dt          |
| d          |
| -- long2(t) |
| dt          |
| d          |
| -- long3(t) |
| dt          |
\          /
```

Con la función size se declara el número de grados de libertad que tiene el robot con el vector RP previamente definido, siempre se coloca 2, ya que indica la dimensión de las columnas y se convierte a string para posteriormente declarar el nombre a las matrices.

```
GDL= size(RP,2);
GDL_str= num2str(GDL);
```

Para determinar las matrices de rotación se pone un sistema de referencia en cada articulación empezando desde la base del robot, se coloca el eje z en paralelo con el movimiento de esa articulación y se rota en las demás articulaciones, con esta rotación se determina el ángulo que se sustituirá en las siguientes matrices, dependiendo de en qué eje rotó el sistema de coordenadas.

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Imagen 2. Matrices de rotación

NOTA: si la rotación fue en la dirección de las manecillas del reloj el ángulo es negativo, de lo contrario es positivo.

```
%Articulación 1
%Posición de la articulación 1 respecto a 0
P(:, :, 1) = [l1; 0; altura1];
%Matriz de rotación de la junta 1 respecto a 0 .... rotó -90° se sustituye
R(:, :, 1) = [0 0 -1;
              0 1 0;
              1 0 0];

%Articulación 2
%Posición de la articulación 2 respecto a 0
P(:, :, 2) = [0; 0; l2];
%Matriz de rotación de la junta 2 respecto a 0.... rotó -90° se sustituye
R(:, :, 2) = [1 0 0;
              0 0 1;
              0 -1 0];

%Articulación 3
%Posición de la articulación 3 respecto a 1
P(:, :, 3) = [0; l3; 0];
%Matriz de rotación de la junta 3 respecto a 1 (Matriz identidad)
R(:, :, 3) = [1 0 0;
              0 1 0;
              0 0 1];
```

Se crea el vector de ceros y se inicializa tanto las matrices de transformación homogénea locales como las matrices de transformación homogénea globales

```
Vector_Zeros= zeros(1, 3);

A(:,:,GDL)=simplify([R(:,:,GDL) P(:,:,GDL); Vector_Zeros 1]);
T(:,:,GDL)=simplify([R(:,:,GDL) P(:,:,GDL); Vector_Zeros 1]);
```

Se inicializan los vectores de posición vistos desde el marco de referencia inercial con el número de grados de libertad

```
PO(:,:,GDL)= P(:,:,GDL);
```

Se Inicializan las matrices de rotación vistas desde el marco de referencia inercial con el número de grados de libertad

```
RO(:,:,GDL)= R(:,:,GDL) ;
```

Ahora en un ciclo for hará el procedimiento el número de veces de grados de libertad que tenga el robot. En este for se despliega las matrices de transformación locales y las globales, con un try catch se hace la excepción si el robot sólo cuenta con un grado de libertad. La matriz global es la multiplicación de las locales.

```
for i = 1:GDL
    i_str= num2str(i);
    %locales
    disp(strcat('Matriz de Transformación local A', i_str));
    A(:,:,i)=simplify([R(:,:,i) P(:,:,i); Vector_Zeros 1]);
    pretty (A(:,:,i));

    %Globales
    try
        T(:,:,i)= T(:,:,i-1)*A(:,:,i);
    catch
        T(:,:,i)= A(:,:,i); %Caso específico cuando i=1 nos marcaría error en try
    end
    disp(strcat('Matriz de Transformación global T', i_str));
    T(:,:,i)= simplify(T(:,:,i));
    pretty(T(:,:,i))
    %Obtenemos la matriz de rotación "RO "y el vector de translación PO de la
    %matriz de transformación Homogénea global T(:,:,GDL)
    RO(:,:,i)= T(1:3,1:3,i);
    PO(:,:,i)= T(1:3,4,i);
    %pretty(RO(:,:,i));
    %pretty(PO(:,:,i));
end
```

```
Matriz de Transformación local A1
/ 0, 0, -1, 11 \
|                |
```

```

| 0, 1, 0, 0 |
| 1, 0, 0, 5 |
\ 0, 0, 0, 1 /
Matriz de Transformación global T1
/ 0, 0, -1, 11 \
| 0, 1, 0, 0 |
| 1, 0, 0, 5 |
\ 0, 0, 0, 1 /
Matriz de Transformación local A2
/ 1, 0, 0, 0 \
| 0, 0, 1, 0 |
| 0, -1, 0, 12 |
\ 0, 0, 0, 1 /
Matriz de Transformación global T2
/ 0, 1, 0, 11 - 12 \
| 0, 0, 1, 0 |
| 1, 0, 0, 5 |
\ 0, 0, 0, 1 /
Matriz de Transformación local A3
/ 1, 0, 0, 0 \
| 0, 1, 0, 13 |
| 0, 0, 1, 0 |
\ 0, 0, 0, 1 /
Matriz de Transformación global T3
/ 0, 1, 0, 11 - 12 + 13 \
| 0, 0, 1, 0 |
| 1, 0, 0, 5 |
\ 0, 0, 0, 1 /

```

Ya con esto se calcula el jacobiano lineal de forma diferencial, para esta matriz se deriva parcialmente l1, l2 y l3, respecto a los ejes. Con las derivadas acomodamos los valores y creamos la matriz del jacobiano.

```

%disp('Jacobiano lineal obtenido de forma diferencial');
%Derivadas parciales de x respecto a long1, long2, long3
Jv11= functionalDerivative(PO(1,1,GDL), long1);
Jv12= functionalDerivative(PO(1,1,GDL), long2);
Jv13= functionalDerivative(PO(1,1,GDL), long3);
%Derivadas parciales de y respecto a long1, long2, long3
Jv21= functionalDerivative(PO(2,1,GDL), long1);
Jv22= functionalDerivative(PO(2,1,GDL), long2);
Jv23= functionalDerivative(PO(2,1,GDL), long3);

```

```

%Derivadas parciales de z respecto a long1, long2, long3
Jv31= functionalDerivative(PO(3,1,GDL), long1);
Jv32= functionalDerivative(PO(3,1,GDL), long2);
Jv33= functionalDerivative(PO(3,1,GDL), long3);

%Creamos la matriz del Jacobiano lineal
jv_d=simplify([Jv11 Jv12 Jv13;
               Jv21 Jv22 Jv23;
               Jv31 Jv32 Jv33]);
pretty(jv_d);

```

```

/ 0, 0, 0 \
|          |
| 0, 0, 0 |
|          |
\ 0, 0, 0 /

```

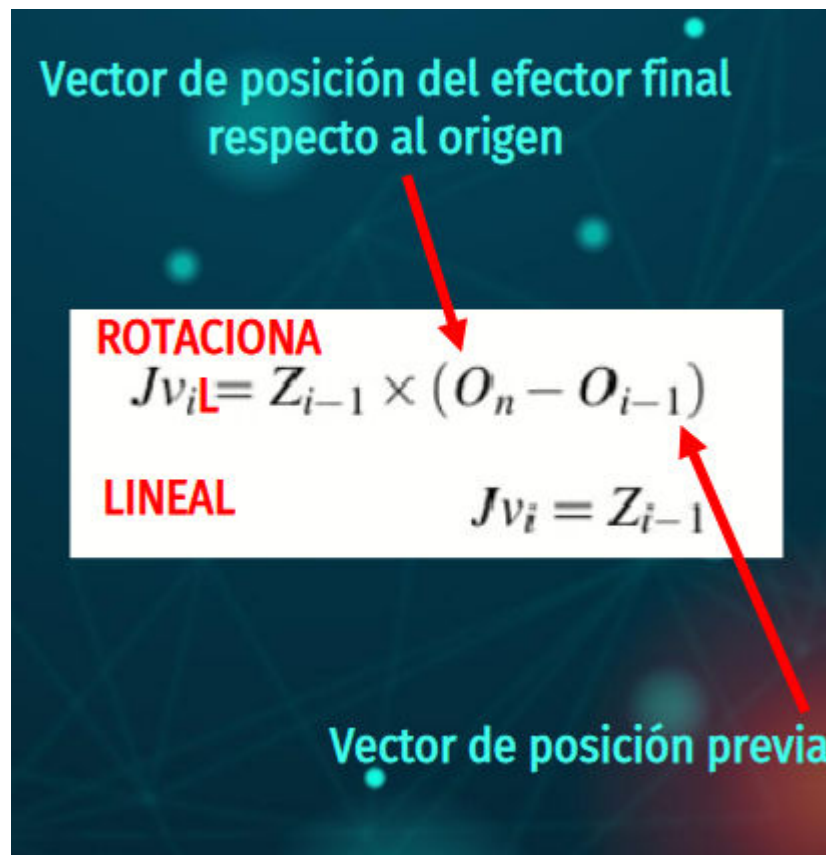
Ahora se realiza el cálculo del jacobiano lineal de forma analítica, para esto se inicializa los jacobianos analíticos (lineal y angular).

```

Jv_a(:,GDL)=PO(:, :,GDL);
Jw_a(:,GDL)=PO(:, :,GDL);

```

Nuevamente se utiliza un ciclo para construir los jacobianos, con una condición hacia el procedimiento para una articulación rotacional o prismática, si en RP es 0 significa que es rotacional y con 1 es prismática, dentro de la condición hay try catch para los grados de libertad del robot.



Fórmula 1.

Dependiendo del caso identificado, sea articulación rotacional o lineal, es la fórmula que se emplea.

```
for k= 1:GDL
    if RP(k)==0
        %Para las juntas de revolución
        try
            Jv_a(:,k)= cross(RO(:,3,k-1), PO(:, :,GDL)-PO(:, :,k-1));
            Jw_a(:,k)= RO(:,3,k-1);
        catch
            Jv_a(:,k)= cross([0,0,1], PO(:, :,GDL)); %Matriz de rotación de 0
            % con respecto a 0 es la Matriz Identidad,
            % la posición previa también será 0
            Jw_a(:,k)=[0,0,1]; %Si no hay matriz de rotación previa
            % se obtiene la Matriz identidad
        end
    else
        %Para las juntas prismáticas
        try
            Jv_a(:,k)= RO(:,3,k-1);
        catch
            Jv_a(:,k)=[0,0,1]; %tercera columna de la matriz identidad
        end
        Jw_a(:,k)=[0,0,0];
    end
end
```

```
end
```

Resultados

Para finalmente desplegar los resultados con simplify y pretty para tener una visualización más entendible.

```
Jv_a= simplify (Jv_a);  
Jw_a= simplify (Jw_a);
```

Resultado de las operaciones hechas en el ciclo for para obtener el jacobiano lineal con los movimientos lineales en l2, l3 y l1.

```
disp('Jacobiano lineal obtenido de forma analítica');
```

Jacobiano lineal obtenido de forma analítica

```
pretty (Jv_a);
```

```
/ 0, -1, 0 \  
|  |  |  |  
| 0,  0, 1 |  
|  |  |  |  
\ 1,  0, 0 /
```

Resultado del jacobiano angular obtenido de la forma analítica muestra, en este jacobiano, por no tener articulaciones que formen ángulos, ya que todas son prismáticas, la matriz aparece en ceros.

```
disp('Jacobiano angular obtenido de forma analítica');
```

Jacobiano angular obtenido de forma analítica

```
pretty (Jw_a);
```

```
/ 0, 0, 0 \  
|  |  |  |  
| 0, 0, 0 |  
|  |  |  |  
\ 0, 0, 0 /
```

Al observar la velocidad lineal podemos comprobar que es correcto, porque tenemos movimiento en cada uno de los ejes x,y,z representado con la derivada en l1, l2 y l3 con respecto al tiempo, siendo la velocidad la derivada de la posición.

```
disp('Velocidad lineal obtenida mediante el Jacobiano lineal');
```

Velocidad lineal obtenida mediante el Jacobiano lineal

```
V=simplify (Jv_a*Qp);  
pretty(V);
```

```
/      d      \  
| - -- long2(t) |  
|      dt      |  
|      d      |  
| - -- long3(t) |
```


$$\begin{pmatrix} dt \\ d \\ \frac{d}{dt} \text{long1}(t) \\ dt \end{pmatrix}$$

Nuevamente, por tener sólo articulaciones prismáticas obtenemos las siguientes velocidades angulares.

```
disp('Velocidad angular obtenida mediante el Jacobiano angular');
```

Velocidad angular obtenida mediante el Jacobiano angular

```
W=simplify (Jw_a*Qp);
pretty(W);
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Energía cinética

Se declara la distancia del origen del eslabón a su centro de masa con vectores de posición respecto al centro de masa.

posteriormente se crean la matrices de inercia por cada eslabón.

```
P01=subs(P(:, :, 1)/2, l1, lc1);
P12=subs(P(:, :, 2)/2, l2, lc2);
P23=subs(P(:, :, 3)/2, l3, lc3);

I1=[Ixx1 0 0;
    0 Iyy1 0;
    0 0 Izz1];

I2=[Ixx2 0 0;
    0 Iyy2 0;
    0 0 Izz2];

I3=[Ixx3 0 0;
    0 Iyy3 0;
    0 0 Izz3];
```

Función de energía cinética

```
%Extraemos las velocidades lineales en cada eje
V=V(t);
Vx= V(1,1);
Vy= V(2,1);
Vz= V(3,1);

%Extraemos las velocidades angular en cada ángulo de Euler
```

```

W=W(t);
W_pitch= W(1,1);
W_roll= W(2,1);
W_yaw= W(3,1);

```

Calculamos las velocidades para cada eslabón

Esta vez necesitamos obtener la velocidad lineal y angular del primer y segundo eslabón, ya que en este robot de tres grados de libertad previamente habíamos calculado las velocidades del último eslabón. A diferencia del robot péndulo, debemos que sacar individualmente las velocidades de cada eslabón.

```

%Eslabón 1

%Calculamos el jacobiano lineal de forma analítica
%se resta a los grados de libertad (3-2=1) para llegar al primer eslabón
Jv_a1(:,GDL-2)=PO(:, :, GDL-2);
Jw_a1(:,GDL-2)=PO(:, :, GDL-2);

for k= 1:GDL-2
    if RP(k)==0
        %Para las juntas de revolución
        try
            Jv_a1(:,k)= cross(RO(:,3,k-1), PO(:, :, GDL-2)-PO(:, :, k-1));
            Jw_a1(:,k)= RO(:,3,k-1);
        catch
            Jv_a1(:,k)= cross([0,0,1], PO(:, :, GDL-2));%Matriz de rotación de 0
            % con respecto a 0 es la Matriz Identidad, la posición previa también será
            Jw_a1(:,k)=[0,0,1];%Si no hay matriz de rotación previa se
            % obtiene la Matriz identidad
        end
    else
        %Para las juntas prismáticas
        try
            Jv_a1(:,k)= RO(:,3,k-1);
        catch
            Jv_a1(:,k)=[0,0,1];
        end
        Jw_a1(:,k)=[0,0,0];
    end
end

%Obtenemos SubMatrices de Jacobianos
Jv_a1= simplify (Jv_a1);
Jw_a1= simplify (Jw_a1);
%disp('Jacobiano lineal obtenido de forma analítica');
%pretty (Jv_a);
%disp('Jacobiano angular obtenido de forma analítica');
%pretty (Jw_a);

```

```

%Matriz de Jacobiano Completa
%disp('Matriz de Jacobiano');
Jac1= [Jv_a1;
       Jw_a1];
Jacobiano1= simplify(Jac1);
% pretty(Jacobiano);

%Obtenemos vectores de Velocidades Lineales y Angulares
%disp('Velocidad lineal obtenida mediante el Jacobiano lineal del Eslabón 1');
Qp=Qp(t);
V1=simplify (Jv_a1*Qp(1));
%pretty(V1);
% disp('Velocidad angular obtenida mediante el Jacobiano angular del Eslabón 1');
W1=simplify (Jw_a1*Qp(1));
% pretty(W1);

%Eslabón 2

%Calculamos el jacobiano lineal de forma analítica
%se resta a los grados de libertad (3-1=2) para llegar al segundo eslabón
Jv_a2(:,GDL-1)=PO(:, :, GDL-1);
Jw_a2(:,GDL-1)=PO(:, :, GDL-1);

for k= 1:GDL-1
    if RP(k)==0
        %Para las juntas de revolución
        try
            Jv_a2(:,k)= cross(RO(:,3,k-1), PO(:, :, GDL-1)-PO(:, :, k-1));
            Jw_a2(:,k)= RO(:,3,k-1);
        catch
            Jv_a2(:,k)= cross([0,0,1], PO(:, :, GDL-1));%Matriz de rotación de 0 con
            %respecto a 0 es la Matriz Identidad, la posición previa también será 0
            Jw_a2(:,k)=[0,0,1];%Si no hay matriz de rotación previa se
            %obtiene la Matriz identidad
        end
    else
        %Para las juntas prismáticas
        try
            Jv_a2(:,k)= RO(:,3,k-1);
        catch
            Jv_a2(:,k)=[0,0,1];
        end
        Jw_a2(:,k)=[0,0,0];
    end
end

%Obtenemos SubMatrices de Jacobianos
Jv_a2= simplify (Jv_a2);
Jw_a2= simplify (Jw_a2);

```

```

%disp('Jacobiano lineal obtenido de forma analítica');
%pretty (Jv_a);
%disp('Jacobiano angular obtenido de forma analítica');
%pretty (Jw_a);

%Matriz de Jacobiano Completa
%disp('Matriz de Jacobiano');
Jac2= [Jv_a2;
       Jw_a2];
Jacobiano2= simplify(Jac2);
% pretty(Jacobiano);

%Obtenemos vectores de Velocidades Lineales y Angulares
%disp('Velocidad lineal obtenida mediante el Jacobiano lineal del Eslabón 2');
V2=simplify (Jv_a2*Qp(1:2));
% pretty(V2);
%disp('Velocidad angular obtenida mediante el Jacobiano angular del Eslabón 2');
W2=simplify (Jw_a2*Qp(1:2));
%W2=zeros(3,1);
% pretty(W2);

```

Energía cinética para cada eslabón

Ahora si con las velocidades podemos obtener la energía cinética individual de cada eslabón. Se ocupan los vectores de distancia previamente declarados dependiendo de que eslabón se esté calculando.

```

%Eslabón 1
V1_Total= V1+cross(W1,P01);
K1= (1/2*m1*(V1_Total))'*(1/2*m1*(V1_Total)) + (1/2*W1)'*(I1*W1);
%disp('Energía Cinética en el Eslabón 1');
K1= simplify (K1);
%pretty (K1);

%Eslabón 2
V2_Total= V2+cross(W2,P12);
K2= (1/2*m2*(V2_Total))'*(1/2*m2*(V2_Total)) + (1/2*W2)'*(I2*W2);
%disp('Energía Cinética en el Eslabón 2');
K2= simplify (K2);
%pretty (K2);

%Eslabón 3
V3_Total= V+cross(W,P23);
K3= (1/2*m3*(V3_Total))'*(1/2*m3*(V3_Total)) + (1/2*W)'*(I3*W);
%disp('Energía Cinética en el Eslabón 3');
K3= simplify (K3);
%pretty (K3);

```

Sumamos las tres energías para desplegar la total

```
K_Total= simplify (K1+K2+K3);
pretty(K_Total)
```

$$\frac{\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d}{dt} \text{long1}(t) \right)^2}{4} + \frac{\frac{1}{2} m_3 \left(\frac{d}{dt} \text{long1}(t) \right)^2}{4} + \frac{\frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d}{dt} \text{long2}(t) \right)^2}{4} + \frac{\frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d}{dt} \text{long3}(t) \right)^2}{4}$$

Energía potencial

Calculamos la energía potencial para cada uno de los eslabones.

Primero se obtiene las alturas respecto a la gravedad.

Como la configuración es de tres grados de libertad, se declaran tres alturas.

La primera se declara como la altura constante

La segunda se iguala a la longitud 2 de la articulación 2, el cual es como un riel.

La tercera también se igualará a la longitud 2 porque también se moverá en el riel de la articulación 2.

De esta manera se obtiene la altura total del robot.

```
h1= altura1; %Tomo la altura paralela al eje z constante
h2= long2; %Tomo la altura paralela que será la longitud de la segunda articulación.
h3= long2; %Tomo la altura paralela que será la longitud de la segunda articulación.
```

Se multiplica las alturas por las masas y la gravedad.

```
U1=m1*g*h1;
U2=m2*g*h2;
U3=m3*g*h3;
```

Calculamos la energía potencial total.

```
U_Total= U1 + U2 +U3
```

$$U_{\text{Total}}(t) = 5 g m_1 + g m_2 \text{long2}(t) + g m_3 \text{long2}(t)$$

Y para obtener el Lagrangiano restamos la energía potencial a la energía cinética.

```
Lagrangiano= simplify (K_Total-U_Total);
pretty (Lagrangiano);
```

Para finalmente obtener el modelo de energía sumando la energía cinética y la energía potencial.

```
H= simplify (K_Total+U_Total);
pretty (H)
```

$$\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d}{dt} \text{long2}(t) \right)^2 + 5 g m_1 + \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{d}{dt} \text{long2}(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d}{dt} \text{long3}(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d}{dt} \text{long2}(t) \right)^2$$

where

$$\#1 == \left| \begin{array}{c} d \\ -- \text{long1}(t) \\ dt \end{array} \right|^2$$

```
%se recopila el tiempo que tom3 ejecutar las operaciones  
toc
```

Elapsed time is 4.656360 seconds.