Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

TE3003B.501

Integración de robótica y sistemas inteligentes (Gpo 501)

Semestre: febrero - junio 2024

Actividad 4 (Linealización)

Alumno:

Daniel Ruán Aguilar A01731921

Objetivos:

En este reporte se mostrará la linealización del modelo cinemático del robot diferencial a través de la teoría del Jacobiano.

Posteriormente se realizará un análisis matemático del procedimiento de linealización y verificar su comportamiento en Matlab para 5 velocidades en específico.

Parte 1: Análisis matemático del procedimiento de linealización

Primer análisis:

Definimos las ecuaciones cinemáticas diferenciales del robot diferencial:

$$\dot{x} = r\left(\frac{w_r + w_l}{2}\right)\cos(\theta)$$
$$\dot{y} = r\left(\frac{w_r + w_l}{2}\right)\sin(\theta)$$
$$\dot{\theta} = r\left(\frac{w_r - w_l}{L}\right)$$

También se pueden expresar matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2}\cos(\theta) & \frac{r}{2}\cos(\theta) \\ \frac{r}{2}\sin(\theta) & \frac{r}{2}\sin(\theta) \\ \frac{r}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_r \\ w_l \end{bmatrix}$$

El Jacobiano J se define como la matriz de derivadas parciales de las salidas ($\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{\theta}$) respecto a $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, θ, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{\omega}$. Por lo tanto, tomamos las derivadas parciales de las ecuaciones con respecto a las entradas:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial w_r} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial w_l} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial w_r} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial w_l} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial w_r} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial w_l} \end{bmatrix}$$

Al resolver las derivadas parciales se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{array}{llll}
\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 0 & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} = -r \cdot \frac{w_r + w_l}{2} \cdot \sin(\theta) & \frac{\partial \dot{x}}{\partial w_r} = \frac{r}{2} \cdot \cos(\theta) \\
\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = 0 & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta} = r \cdot \frac{w_r + w_l}{2} \cdot \cos(\theta) & \frac{\partial \dot{y}}{\partial w_r} = \frac{r}{2} \cdot \sin(\theta) \\
\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} = 0 & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial w_r} = \frac{r}{L}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\frac{\partial \dot{x}}{\partial w_l} = \frac{r}{2} \cdot \cos(\theta) \\
\frac{\partial \dot{y}}{\partial w_l} = \frac{r}{2} \cdot \sin(\theta) \\
\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial w_l} = -\frac{r}{L}
\end{array}
$$

Teniendo como resultado las siguientes matrices linealizadas del modelo cinemático diferencial del robot, usando la teoría del Jacobiano:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -r \cdot \frac{w_r + w_l}{2} \cdot \sin(\theta) \\ 0 & 0 & r \cdot \frac{w_r + w_l}{2} \cdot \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot \cos(\theta) & \frac{r}{2} \cdot \cos(\theta) \\ \frac{r}{2} \cdot \sin(\theta) & \frac{r}{2} \cdot \sin(\theta) \\ \frac{r}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix}
$$

Segundo análisis

Ahora, simplificando el sistema como lo vimos en clase y para poder utilizar la función resultante en el código de R.O.S., relacionando como entradas v, w. Quedaría el procedimiento de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v \cdot \cos(\theta) \\
\dot{y} &= v \cdot \sin(\theta) \\
\dot{\theta} &= w
\end{aligned}
$$

Forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}
$$

Se define nuevamente la matriz de derivadas parciales de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, θ con respecto a $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, θ, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{\omega}$:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial w} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial w} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Resolviendo las derivadas:

$$\begin{array}{lllll} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 0 & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} = -v\sin(\theta) & \frac{\partial \dot{x}}{\partial v} = \cos(\theta) & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \omega} = 0 \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = 0 & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta} = v\cos(\theta) & \frac{\partial \dot{y}}{\partial v} = \sin(\theta) & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \omega} = 0 \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} = 0 & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial v} = 0 & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \omega} = 1 \end{array}$$

Obtenemos como resultado las siguientes matrices linealizadas del modelo cinemático diferencial del robot, usando la teoría del Jacobiano:

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_o * sin(\theta_o) \\ 0 & 0 & v_o * cos(\theta_o) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{df}{du} = \begin{bmatrix} 0 & cos(\theta_o) \\ 0 & sin(\theta_o) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Enfocándonos más al reto de esta semana, será de utilidad la primera matriz, sin embargo, para poder usar las ecuaciones en nuestro programa de R.O.S se tiene que discretizar la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta t \cdot v_k \cdot \sin(\mu_{\theta,k-1}) \\ 0 & 1 & \Delta t \cdot v_k \cdot \cos(\mu_{\theta,k-1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde se multiplican por el delta de tiempo, se toman las muestras anteriores y al derivar x, y, w. Se genera una matriz identidad con la diagonal de unos, la cual ya podemos ingresar y programar en R.O.S. para el puzzlebot.

PARTE 2: Comparativa de comportamiento en Matlab:

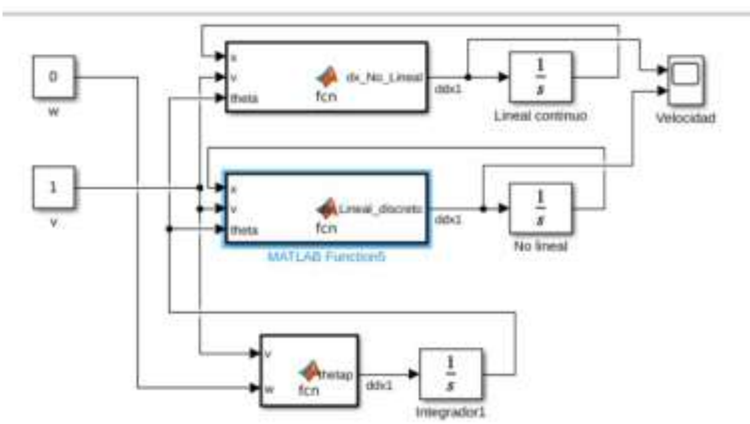
Función sistema no lineal: v*cos(θ)

Función linealizada y discretizada: x – v* sin(θ)* θ

Función linealizada y continua: v* sin(θ)* θ

Linealizacion ▸ MATLAB Function5

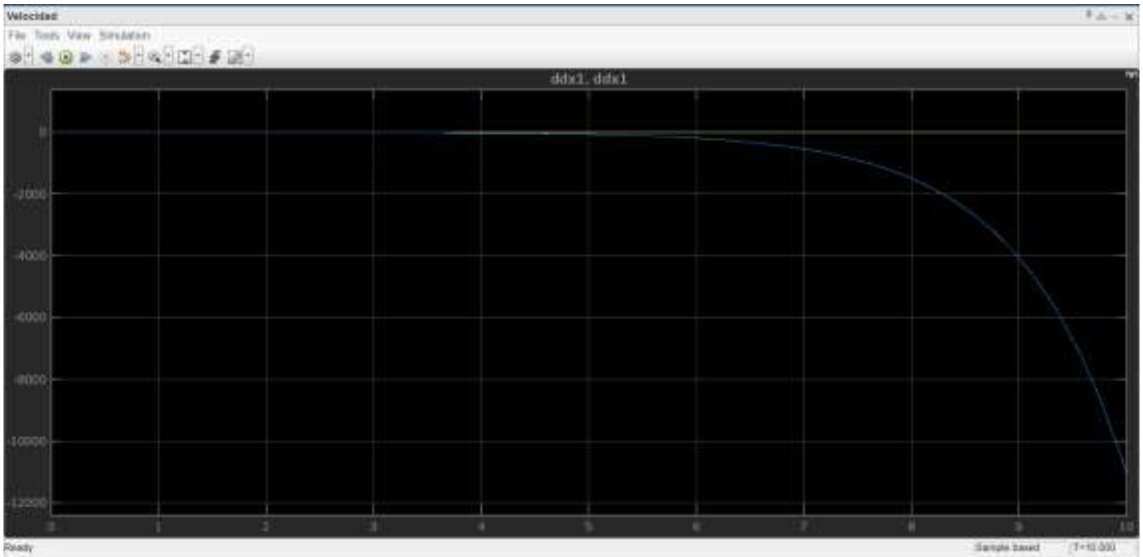
```
function dx_Lineal_discreto = fcn(x, v, theta)

dx_No_Lineal= v*cos(theta);

dx_Lineal_discreto = x -v*sin(theta)*theta

```



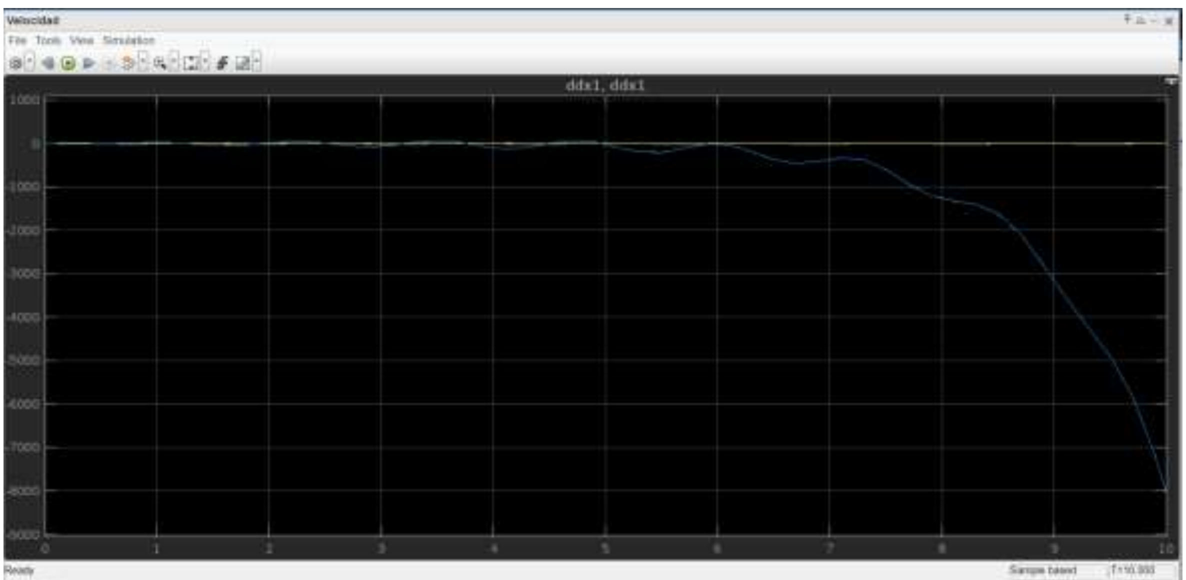
Resultados

Función linealizada y discretizada vs No linealizada:

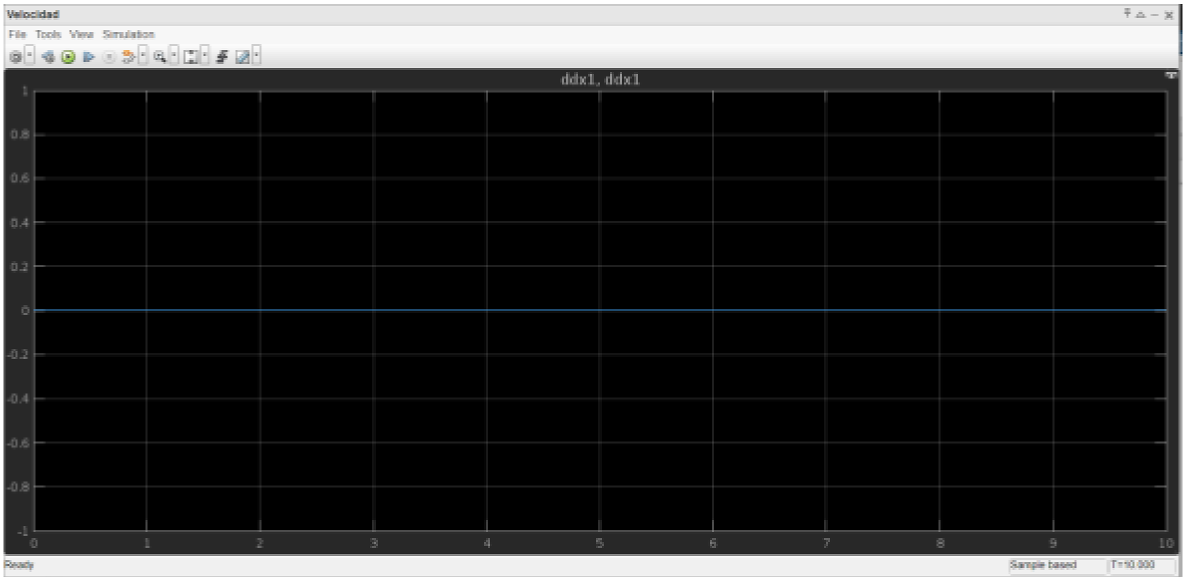
Para: w=0, v=1



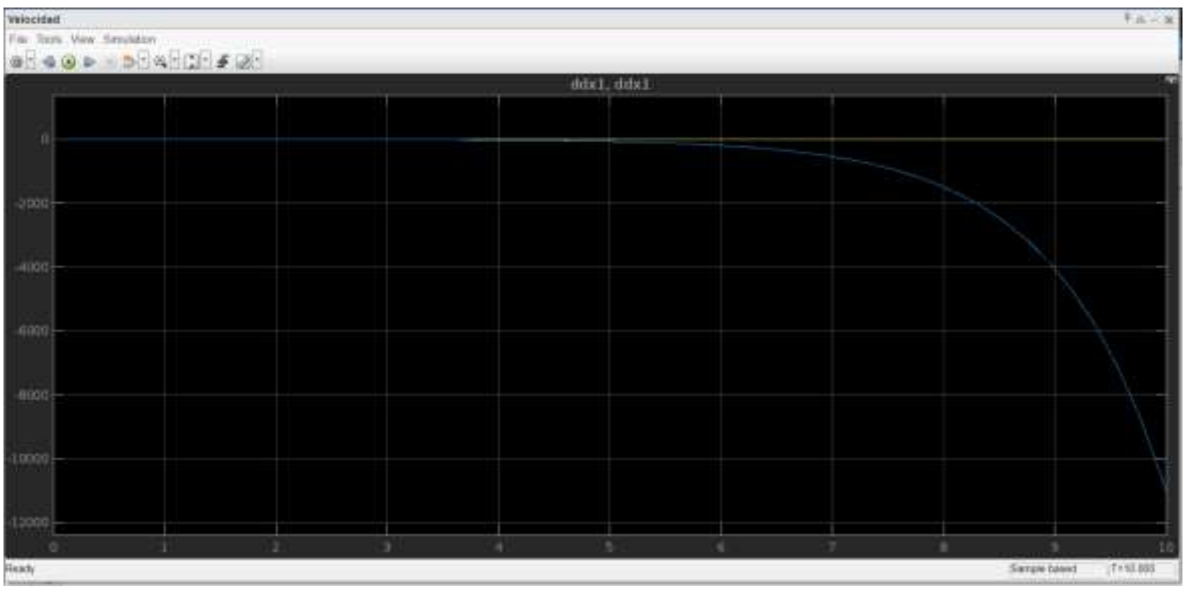
Para: w=5, v=5



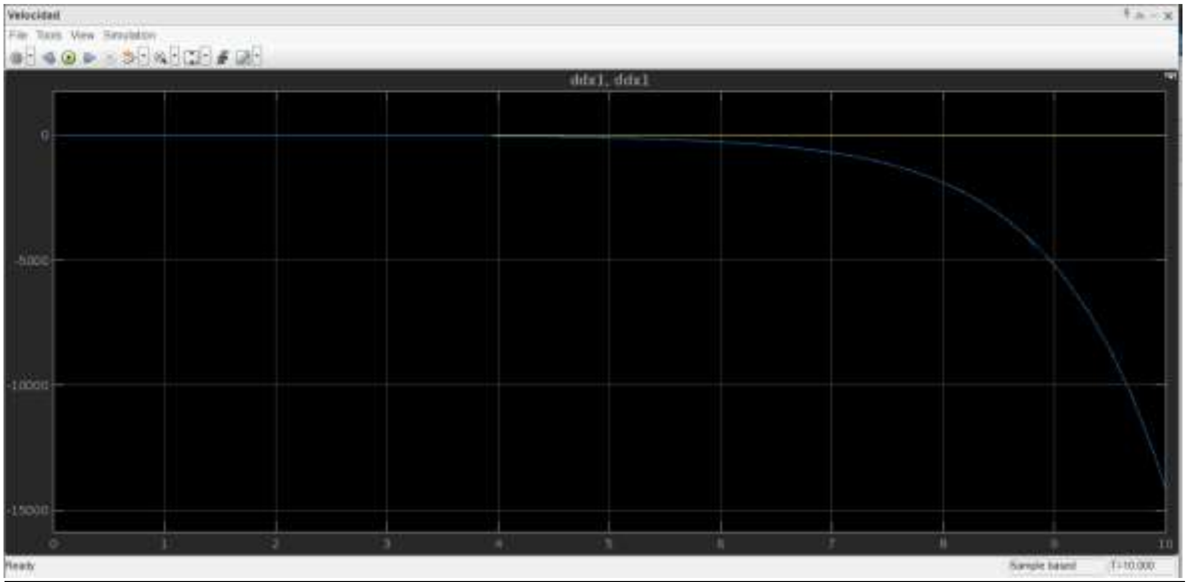
Para: w=2, v=0



Para: w=1, v=1

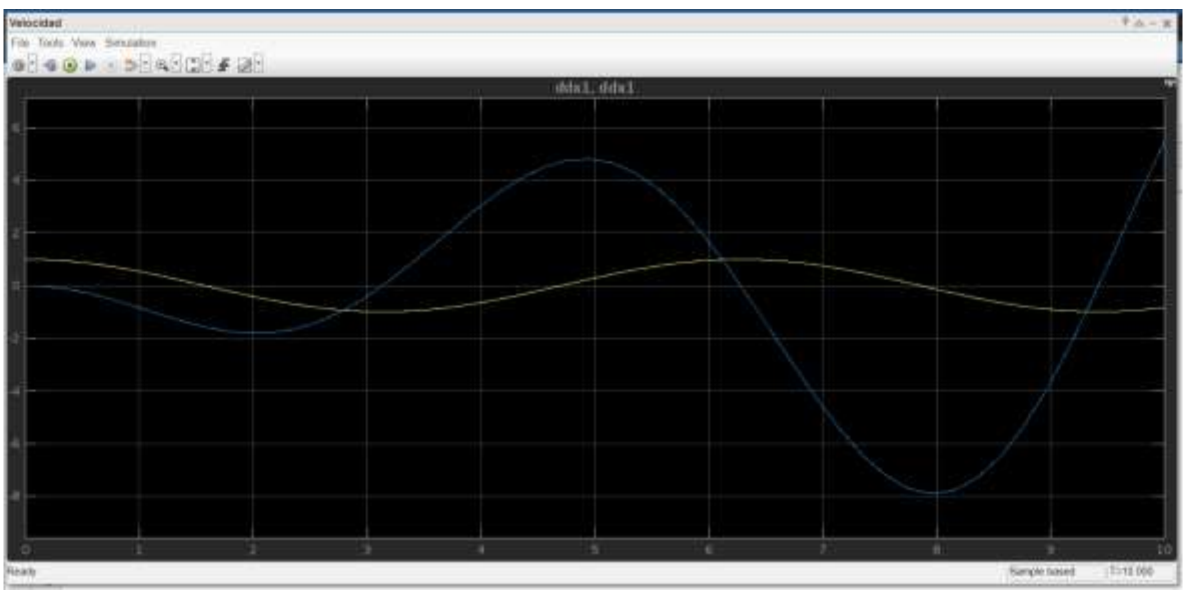


Para: w=0.5, v=1.5

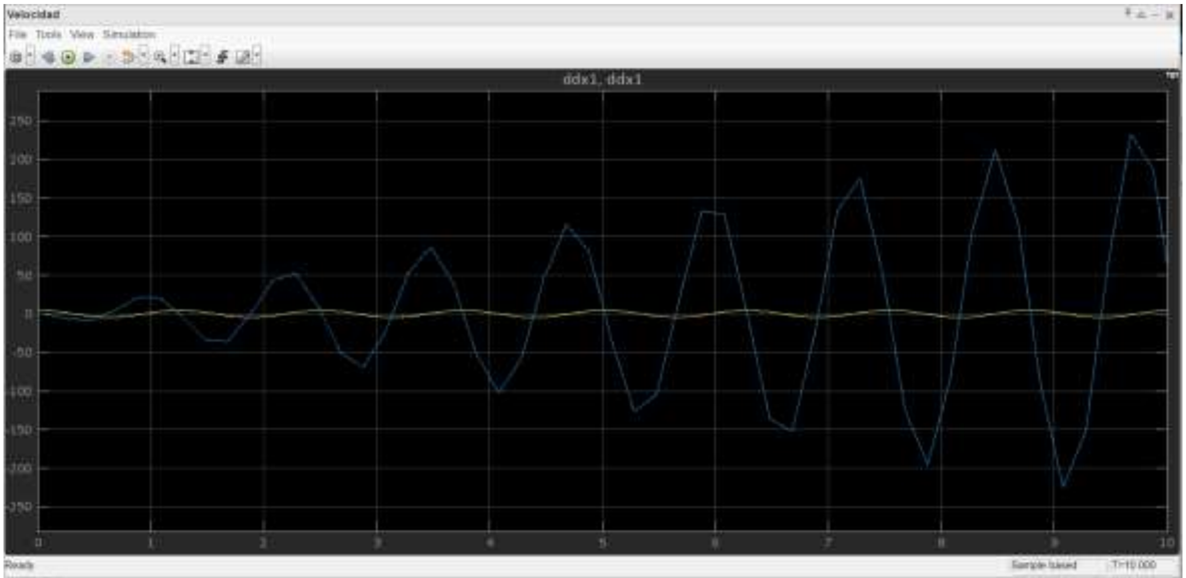


Función linealizada y continuo vs No linealizado:

Para: w=0, v=1

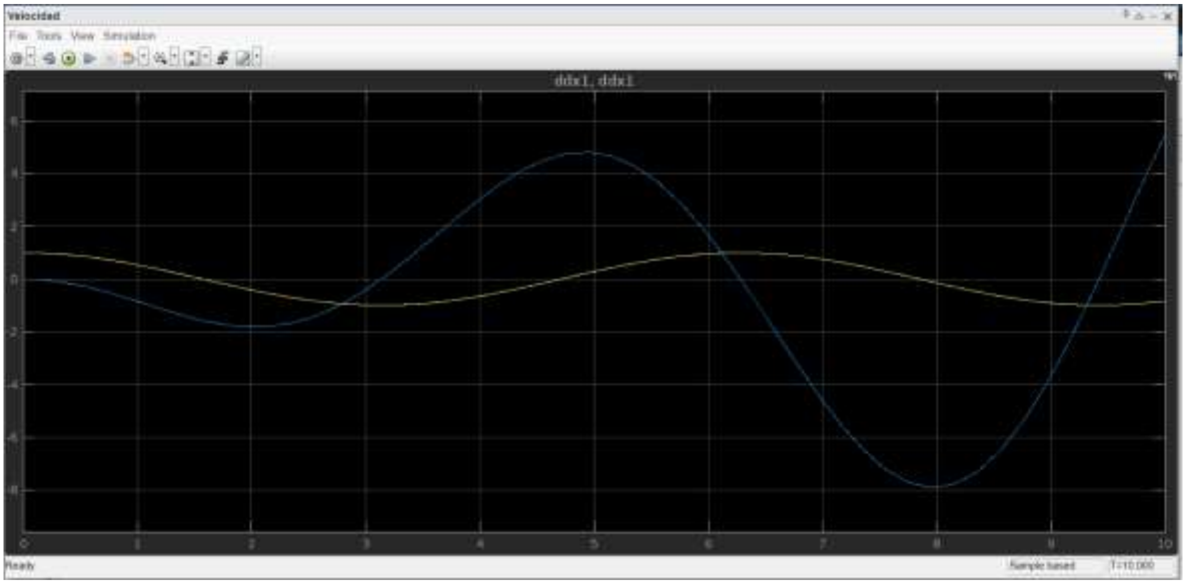


Para: w=5, v=5

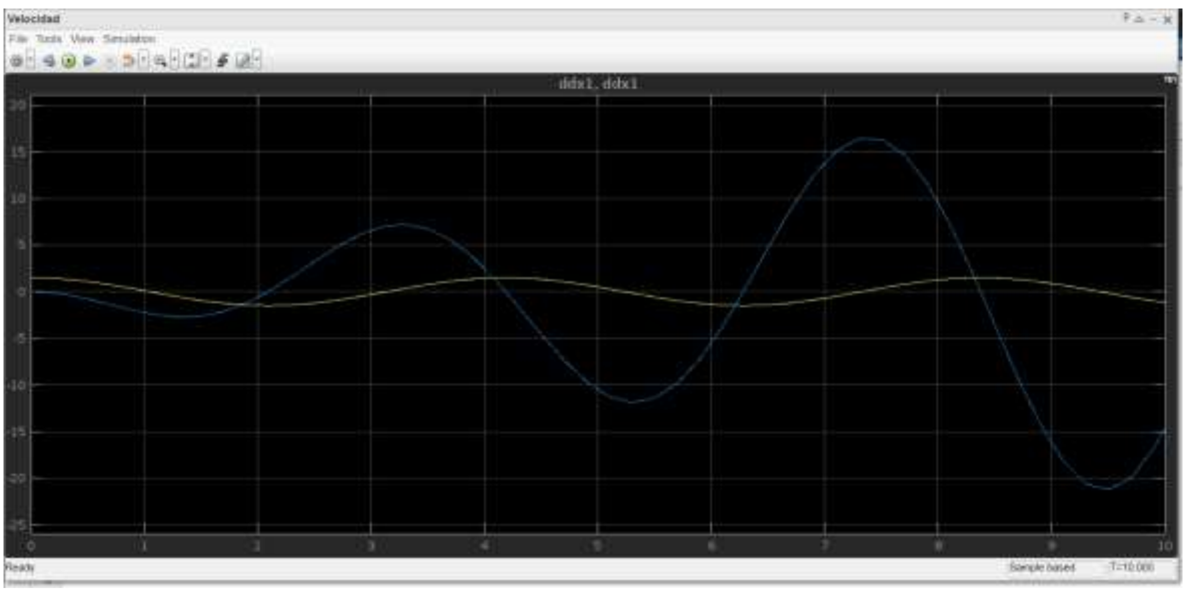


Para: w=2, v=0

Para: w=1, v=1



Para: w=0.5, v=1.5



Como conclusión podemos ver que la linealización hace que la oscilación en la respuesta del sistema disminuya y sea más estable, lo cual nos ayuda para obtener resultados más precisos y poder crear un mejor controlador.

(El código de MatLab se anexa en el repositorio)