UNIVERSITÄT ULM

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2019

Übungen Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker: Blatt 7

31. Berechne den Grenzwert
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$
Hinweis: Wir können annehmen, dass $|x| < 1$. Benutze die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion, um eine geometrische Reihe zu erhalten.

32. Betrachte die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/q, & \text{falls } x = p/q \text{ für } p, q \in \mathbb{N} \text{ ohne gemeinsamen Teiler.} \end{cases}$$
Zeige, dass f an jeder irrationalen Stelle ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) stetig ist, an jeder rationalen Stelle ($x \in \mathbb{Q}$) jedoch unstetig.
Hinweis: Ist $r = p/q$ rational, so ist die Folge $x_n := r + \sqrt{2}/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ irrational. Beachte außerdem, dass es für beliebiges $\varepsilon > 0$ nur endlich viele natürliche Zahlen q gibt, sodass $q \leq 1/\varepsilon$.

33. Es seien $f_1, f_2, \ldots$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Für jedes feste $x \in I$ sei die Folge $(f_1(x), f_2(x), \ldots)$ nach oben beschränkt. Wir definieren die Funktion $g(x) := \sup(f_1(x), f_2(x), \ldots)$. Dann ist g auf ganz I definiert. Gib ein Beispiel an, das zeigt, dass die Funktion g nicht stetig zu sein braucht.

34. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$. Wir nennen f gleichmäßig stetig auf I, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : (\forall x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Beachte, dass die Schranke $\delta := \delta(\varepsilon)$ nur noch von ε, aber nicht mehr von einem bestimmten Punkt $x_0 \in I$ abhängt. Die Schranke gilt also gleichmäßig für alle $x \in I$.

(a) Sei nun f stetig auf I und (x_n) sei eine Cauchyfolge in I.
   (i) Gib ein Beispiel dafür an, dass $(f(x_n))$ keine Cauchyfolge sein muss.
   (ii) Zeige, dass $(f(x_n))$ immer eine Cauchyfolge ist, falls f gleichmäßig stetig auf I ist.

(b) Es seien $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und $\varepsilon > 0$ beliebig. Konstruiere eine Treppenfunktion T (d.h. eine stückweise konstante Funktion) auf $[0,1]$, sodass für alle $x \in [0,1]$ gilt, dass $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

35. Zeige, dass jede monotone Funktion f auf einem Intervall I nur abzählbar viele Sprungstellen haben kann.
Hinweis: Zu jedem Intervall findet man eine rationale Zahl, die in diesem Intervall liegt.

36. Zeige, dass jedes Polynom ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle besitzt.