Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille
Marc Schneble

Sommersemester 16
Blatt 2 (40 Punkte)
26.04.2016

Übungen zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe: Dienstag, 26.04.2016, bis 14:15 Uhr, H22)

1. Bestimme jeweils Infimum und Supremum sowie, falls existent, Minimum und Maximum folgender Mengen:

   a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} : |x| < |x+1|\}$

   b) $M_2 := \left\{ \frac{\sqrt{x+y}}{xy} : x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x, y \geq 1 \right\}$ (4+6 Punkte)

2. Beweise Lemma 1.5.6, Aussagen (i) und (iv). (2+2 Punkte)

3. Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$. Berechne

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k}$,

   b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k}$. (3+6 Punkte)

4. a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \neq 0$. Zeige, dass dann

   $$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2.$$

   b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n > 0$ reelle Zahlen. Zeige mit vollständiger Induktion, dass dann

   $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2$$

   gilt. (3+4 Punkte)

5. Es sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$. Dann gilt $2^n > n^2 \geq 2n+1$. (4 Punkte)

6. Es sein $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass folgende Ungleichung gilt:

   $$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n$$

   (6 Punkte)