Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 12

Abgabedatum: 11.07.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Ist jede Lipschitz-stetige Funktion integrierbar?

(b) Impliziert $\int\limits_a^b f(x)\,dx, \int\limits_a^b g(x)\,dx < \infty$, dass $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx < \infty$?

(c) Impliziert $\int\limits_a^b f(x)\,dx, \int\limits_a^b g(x)\,dx < \infty$, dass $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx < \infty$?

(d) Gibt es nicht ausgezeichnete Partitionenfolgen?

2. (A) Bestimmte Integrale

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

a) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (1)

b) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{4x-1}}\,dx$ (1)

c) $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^2+1}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}\,dx$ (2)

d) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx$ (1)

e) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{x^4+4}\,dx$ (1)

3. (A) Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sowie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare, nicht-negative Funktion. Zeigen Sie, dass dann ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

existiert. (6)

4. (A) Aussagen über Riemann-integrierbarkeit

a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar mit $f([a,b]) \subseteq [-M,M]$ für ein $M > 0$. Sei weiter $g : [-M,M] \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig. Zeigen Sie, dass dann $g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ebenfalls Riemann-integrierbar ist. (4)

b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $\exp \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. (2)

5. (A) Uneigentliche Integrale und das Integralkriterium

a) Bestimmen Sie alle Kombinationen von $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\int\limits_1^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\,dx$ konvergiert. (3)

b) Bestimmen Sie alle $\mu > 0$, sodass

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{\log(\log(k))^{-\mu}}{k \log(k)}$$

konvergiert. (3)

6. (T),(NA)

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\,dx$

b) $\int\limits_1^e \frac{\log(x)}{x\sqrt{1+\log(x)^2}}\,dx$

c) $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

d) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3+x}\,dx$

e) $\int\limits_1^e x^2 \log(x)\,dx$

7. (T),(NA)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.