Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Lösungsvorschlag Analysis 1: Blatt 4

13. Beweisen Sie die folgenden Aussagen: (2)

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

(b) Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\left| \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right| \geq 2.$$

14. Schreiben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung von Intervallen. Beweisen Sie ihre Behauptungen. (2)

(i) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < x^2 + 2x \leq 4\}$

(ii) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, ||x + 1| - 2| \leq x\}$.

15. Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen nach oben oder nach unten beschränkt sind. Geben Sie, sofern existent, Infimum, Minimum, Maximum und Supremum an. Beweisen Sei ferner alle Ihre Aussagen. (4)

(i) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0, x^2 \geq 2, x < 5\}$

(ii) $B = \{\frac{n-m}{n} \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$

(iii) $C = \{\frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

(iv) $D = \{t + \frac{1}{t} \,|\, t \in (0, 4] \subset \mathbb{R}\}$.

16. Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung (2)

$$x \cdot [x] = 87,$$

wobei $[x]$ die Gaußklammer von x bezeichne. Geben Sie außerdem eine Zahl $c \in \mathbb{N}$ an, sodass $x \cdot [x] = c$ keine Lösung besitzt und beweisen Sie Ihre Behauptung.