ulm university universität uulm

2. Klausur Analysis I für Ing/Inf

7.10.2014

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Ungleichung $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. [6]

2. Untersuchen Sie mit Hilfe der Definition die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei [5]

$$a_n = \frac{-\pi n^5 + \sqrt{2}n^4 - 2n}{-n^5 - \sqrt{3}n^4 + 26} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

3. Zeigen Sie, dass der folgende Schluss im Allgemeinen falsch ist: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ eine Folge mit $x_n \to x_0 \in [a, b]$ für $n \to \infty$, dann existiert auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. [3]

4. Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}(x-2)^n$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und das resultierende Konvergenzintervall. [4]

5. Es seien $I = [1, 2]$ und $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+x-4}{x+1}$.
   (a) Zeigen Sie: f besitzt in I eine Nullstelle. [3]
   (b) Bestimmen Sie eine Zahl C so, dass die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + C$ auf I nicht negativ ist. [4]

6. (a) Zeigen Sie $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sin x}}{\ln(\ln(x))} = 0$. [4]
   (b) Die Funktion $f(x) = \ln(\cosh x)$ soll um 0 durch ein Polynom dritten Grades angenähert werden. Bestimmen Sie ein geeignetes Polynom mit dem Satz von Taylor. [6]
   Hinweis: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

7. Zeigen Sie: $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{6}\sin^3(2x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = \cos^3(2x)$ auf $\mathbb{R}$. [4]

8. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
   (a) Zeigen Sie, dass durch $x_j = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{n}}$, $j = 0, \ldots, n$, eine ausgezeichnete Partitionenfolge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a, b]$ gegeben ist. [3]
   (b) Durch $\xi_j = x_j$ für $j = 1, \ldots, n$ sind Zwischenstellen dieser Partition gegeben. Bestimmen Sie die zugehörige Riemannsche Zwischensumme. [2]
   (c) Bestimmen Sie über die Zwischensumme aus 8b das Integral $\int_a^b \frac{dx}{x}$. [5]

9. Berechnen Sie, falls existent, folgendes Integral. Leiten Sie dabei ggf. verwendete Stammfunktionen her. [16]

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}.$$

Viel Erfolg!