Universität Ulm

Abgabe: Freitag, den 12.06. um 12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 7

-

27. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen. Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen: (2)

(a) Gilt $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$, dann gilt auch $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ für $n \to \infty$.

(b) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann folgt $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{a, b\}$ für $n \to \infty$.

(c) Gilt $a_n \to a$ für $n \to \infty$ und ist $(b_n)_{n\to\mathbb{N}}$ beschränkt, dann konvergiert $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, die gegen z konvergiert.

28. Es sei $q > 0$. Definiere $x_0 = q$ und (2)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{q}{x_n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.
Hinweis: Zeige zunächst, dass $x_{n+1}^2 - q \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und betrachte anschließend $x_{n+1} - x_n$.

29. Man untersuche folgende Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ auf Konvergenz. Dabei sind alle Aussagen zu beweisen. (4)

(a) $x_n := \dfrac{3n^2 - 2n^3 + 4}{4n + n^3 - 8}$

(b) $x_n := \left(\dfrac{n^4 + n^2 + 2}{n^4 + n}\right)^n$

(c) $x_n := n^{30}\left(\dfrac{2 - 2i}{3}\right)^n$

(d) $x_n := \dfrac{2^n + (-2)^n}{5 \cdot 2^n}$

(e) $x_n := \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$

(f) $x_n := \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$

(g) $x_n := \left(\dfrac{3n+1}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}\right)$

(h) $x_n := \dfrac{1}{n+2}\left(\sum_{k=0^n} k\right) - \dfrac{n}{2}$

30. Man finde für jedes angegebene Szenario reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den vorgegeben Eigenschaften: (2)

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt mit

- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$
- $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind unbeschränkt mit

- $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 1$
- $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.