Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 06

Lösung

1. (NA) Minifragen

(a) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und $a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ eine Folge.

- Falls a konvergent ist, ist dann die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?
  Lösung: Ja.
- Falls a bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, ist dann die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?
  Lösung: Nein, z. B. $f(x) = x$.

(b) Ist $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, falls der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert in jedem Punkt aus $\mathbb{R}$ übereinstimmen?
Lösung: Für Stetigkeit müssen diese auch mit dem Funktionswert an der Stelle übereinstimmen.

(c) Falls eine stetige Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Werte 0 und 1 annimmt, nimmt sie dann auch den Wert 0.5 an?
Lösung: Ja, vgl. Zwischenwertsatz.

2. (A) Funktionsgrenzwerte mit dem ϵ-δ-Kriterium

Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ-δ-Kriteriums (Definition 10.1.3), dass für jedes $x_0 \in [0,5]$ der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{2}{1+\sqrt{x}}$$

existiert. (6)

Lösung: Wir betrachten zuerst den Fall $x_0 \neq 0$. Diese Annahme wird später in einer Abschätzung wichtig sein.

$$\begin{aligned}
|f(x_0) - f(x)| &= \left|\frac{2}{1+\sqrt{x_0}} - \frac{2}{1+\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{2(1+\sqrt{x}) - 2(1+\sqrt{x_0})}{(1+\sqrt{x_0})(1+\sqrt{x})}\right| \\
&\leq |2(1+\sqrt{x}) - 2(1+\sqrt{x_0})| = 2|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| \\
&\overset{x_0\neq 0}{=} 2\left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}\right| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x_0}}\right| \\
&< \delta\frac{2}{\sqrt{x_0}} \leq \epsilon \\
&\Rightarrow \delta \leq \epsilon\frac{\sqrt{x_0}}{2}
\end{aligned}$$

Den Fall $x_0 = 0$ betrachten wir gesondert. In diesem vereinfacht sich sehr viel:

$$\begin{aligned}|f(0) - f(x)| = |\frac{2}{1+\sqrt{0}} - \frac{2}{1+\sqrt{x}} &= |\frac{2(1+\sqrt{x})-2}{1+\sqrt{x}}| \\ &\leq 2|\sqrt{x}| < 2\sqrt{\delta} \leq \epsilon \\ &\Rightarrow \delta \leq \frac{\epsilon^2}{4}\end{aligned}$$

3. (A) Grenzwerte spezieller Funktionen Es seien $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Zeigen Sie, dass

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$, (2)
Lösung: Wir wählen $n > \alpha + 1$. Dies geht immer und hilft uns später alle bis auf einen Summanden abzuschätzen.

$$\frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta x)^k}{k!} \geq \frac{\beta^n x^n}{x^\alpha n!} = \frac{\beta^n x^{n-\alpha}}{n!} \geq \frac{\beta^n x^1}{n!} \overset{x\to\infty}{\to} \infty$$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, (2)
Lösung: Sei $(x_k)_k$ eine beliebige Folge mit $x_k \overset{k\to\infty}{\to} \infty$. Dann können wir oBdA annehmen, dass $x_k > 0$. Wir definieren eine zweite Folge $(y_k)_k$ durch $y_k = \ln x_k$, bzw. $x_k = e^{y_k}$. Durch Einsetzen dieser Folge erhalten wir:

$$\frac{\ln x_k}{x_k^\alpha} = \frac{y_k}{e^{y_k\alpha}} = \left(\frac{e^{y_k\alpha}}{y_k}\right)^{-1}$$

Aus Aufgabenteil a) wissen wir, dass der Term in der Klammer gegen ∞ divergiert. Daher konvergiert der gesamte Ausdruck gegen 0. Mit dem Folgekriterium folgt die Aussage.

(c) $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = 0$. (2)
Lösung: Wir benutzen erneut eine Substitution. Sei $(x_k)_k$ eine Folge, die von rechts gegen 0 konvergiert, d.h. $x_k > 0$. Sei weiter die Folge $(y_k)_k$ durch $y_k = \frac{1}{x_k}$ definiert. Dann divergiert diese Folge gegen ∞. Wir setzen nun erneut ein:

$$x_k^\alpha \ln x_k = \frac{1}{y_k^\alpha}\ln(\frac{1}{y_k}) = -\frac{\ln y_k}{y_k^\alpha}$$

Durch die vorangegangene Aufgabe, wissen wir, dass dieser Ausdruck gegen 0 konvergiert. Mit dem Folgekriterium folgt die Aussage.

Hinweis: Nutzen Sie die Reihendarstellung der Exponentialfunktion und führen Sie Teil b) auf Teil a) zurück.

4. (A) Weitere Funktionsgrenzwerte

Berechnen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim_{x\to2} \frac{x^2+5x-14}{x-2}$, (2)
Lösung: $\frac{x^2+5x-14}{x-2} = \frac{(x-2)(x+7)}{x-2} = x + 7 \overset{x\to2}{\to} 9$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2+24x}$, (2)

Lösung: Wir betrachten den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert getrennt. Für den rechtsseitigen (d.h. $x > 0$) gilt:

$$\frac{|x|}{x^2+24x} = \frac{x}{x^2+24x} = \frac{1}{x+24} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{24}\ .$$

Für den linksseitigen gilt jedoch:

$$\frac{|x|}{x^2+24x} = \frac{-x}{x^2+24x} = -\frac{1}{x+24} \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{24}\ .$$

Somit existiert der Grenzwert nicht.

(iii) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)}\right)$. (2)

Lösung:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 1} 1$$

5. (A) Ein impliziter Grenzwert Für $x \in (0,1)$ definieren wir $f(x)$ durch

$$\sin x = \frac{x(60-7x^2)+x^7 f(x)}{60+3x^2}.$$

Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} f(x)$. (6)

Hinweis: Nutzen Sie die Reihendarstellung des Sinus und stellen Sie die Gleichung nach x um.

Lösung: Wir stellen die Gleichung um und setzen die Reihendarstellung des Sinus ein:

$$x^7 f(x) = 60\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 3\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!} + 7x^3 - 60x$$

Nun ziehen wir alle Summanden aus der Summe heraus, deren Exponenten kleiner gleich 7 ist:

$$\begin{aligned}
x^7 f(x) =& 60\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \sum_{k=4}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\
&+ 3\left(\frac{x^3}{1} - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} + \sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!}\right)\\
&+ 7x^3 - 60x\\
&= \frac{x^7 11}{840} + \sum_{k=4}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

Nun teilen wir durch x^7 und bilden den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{11}{840}$$

6. (T),(NA) Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ-δ-Kriteriums (Definition 10.1.3), dass für jedes $x_0 \in [2,5]$ der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{1-x^2}$$

existiert.

7. (T),(NA)

Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x}$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$,
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$,
6. $\lim_{x\to \infty} \frac{6x^4+12x^2-13}{3x^4-7x^3+2x+1}$.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.