Gesamtpunktzahl: 100 Punkte.
*Diese Klausur ist **beidseitig** bedruckt.*

1. Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung [10]

$$|x-3| > |2x|$$

erfüllen.

2. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 2$ und [8+3+4=15]

$$a_{n+1} := \frac{2}{n+1} a_n$$

für $n \geq 1$.

(a) Zeige durch vollständige Induktion, dass $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeige, dass $0 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

3. Zeige oder widerlege: [4×3=12]

(a) Das Minimum einer Menge ist, so es existiert, eindeutig.

(b) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(c) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann ist $a > 0$.

(d) Jede differenzierbare Funktion besitzt auf einem kompakten Intervall eine Nullstelle.

4. (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar. [2×5=10]
Zeige mit der Definition der Ableitung, dass dann für $c \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $c \cdot f$ in a differenzierbar ist mit $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$.

(b) Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei positiv und konkav auf I. Ferner sei f zweimal differenzierbar. Zeige, dass dann $\frac{1}{f}$ konvex auf I ist.
Erinnerung: f konvex an der Stelle $a \Leftrightarrow f''(a) \geq 0$ und f konkav an der Stelle $a \Leftrightarrow f''(a) \leq 0$.

5. Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit [9]

$$f(x) = e^x + x^5 - \sin(2x) + 2x$$

genau eine Nullstelle im Intervall $(-\pi, 0)$ hat.
Hinweis: Die Nullstelle braucht nicht berechnet werden.

6. Betrachte die Funktion $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $f(x) = \tan(x)$. [5+6=11]

   (a) Zeige unter Verwendung der Tatsache $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, dass $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$.
   Hinweis: Hier braucht nicht die Definition der Ableitung verwendet werden.

   (b) Zeige, dass für $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $b > a$ gilt, dass

$$\tan(b) - \tan(a) > b - a$$

7. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^{-2x}$ [3+8+3=14]

   (a) Begründe ohne Rechnung, warum die Funktion f im Intervall $I = [0, 1]$ ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt.

   (b) Bestimme das globale Maximum und das globale Minimum aus (a) (also auf dem Intervall $I = [0, 1]$).
   Hinweis: $e^{-2} \approx 0.14$ *und* $e^{-1} \approx 0.37$

   (c) Berechne, falls existent, $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

8. (a) Bestimme folgende unbestimmten Integrale: [4+7+8=19]

   i. $\int x \sin(2x)\, dx$

   ii. $\int \frac{-x+7}{(x-1)(x+2)}\, dx$

   (b) Besitzen die beiden Integrale

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx \text{ und } \int_0^\infty \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

   jeweils einen endlichen Wert? Begründe jeweils.

Viel Erfolg!