Gesamtpunktzahl: 100 Punkte.

*Diese Klausur ist **beidseitig** bedruckt.*

1. Zeige durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass [12]

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

2. Bestimme die Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung [10]

$$2^{2x} \cdot 5^{-x+1} = 7^x$$

3. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit [3+9=12]

$$a_n := \frac{4n^2+9}{2n^2+2n+3}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Bestimme $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mithilfe der Grenzwertsätze.

   (b) Zeige den Grenzwert aus (a) mithilfe der Definition, finde also für alle $\varepsilon > 0$ ein N, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

4. Zeige oder widerlege: [4×3=12]

   (a) Die Summe divergenter Folgen ist divergent.

   (b) Es sei $b > 1$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b^{-k}$.

   (c) Ist eine Funktion f in a stetig, so ist f in a auch differenzierbar.

   (d) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(a) = 0$. Dann hat f an der Stelle a ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

5. (a) Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar. [2×5=10]
   Zeige mit der Definition der Ableitung, dass dann auch $f + g$ in a differenzierbar ist mit $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

   (b) Für eine differenzierbare, positive Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ betrachten wir die logarithmische Ableitung, also die Funktion

$$L(f) : I \to \mathbb{R} \text{ mit } L(f) := \frac{f'}{f}$$

   Zeige, dass für zwei differenzierbare, positive Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$L(f \cdot g) = L(f) + L(g)$$

   gilt.

6. Bestimme, falls existent, den Grenzwert [10]

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin(x)}$$

7. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x + e^{-x}$ [3+7+4=14]

   (a) Begründe ohne Rechnung, warum die Funktion f im Intervall $I = [-1, 1]$ ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt.

   (b) Bestimme das globale Maximum und das globale Minimum aus (a) (also auf dem Intervall $I = [-1, 1]$).

   (c) Zeige, dass das Taylorpolynom dritten Grades mit Entwicklungspunkt $a = 0$ gegeben ist durch
   $$P_3(x) = 2 + x^2$$

8. (a) Bestimme folgende unbestimmten Integrale: [4+4+7+5=20]

   i. $\int 3x^2 \ln(x)\ dx$

   ii. $\int \frac{2xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$

   iii. $\int \frac{2x+1}{x^2-9}\ dx$

   (b) Berechne
   $$\int_0^1 \sqrt[4]{x}\ dx$$

Viel Erfolg!