Aufgaben zu Induktion

1. $\prod_{k=1}^{n} (1+a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$

Induktionsanfang: $n=1$

$$\prod_{k=1}^{1} (1+a_k) = 1 + a_k \geq 1 + \sum_{k=1}^{1} a_k \quad \checkmark$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1+a_k) = \prod_{k=1}^{n} (1+a_k) \cdot (1+a_{n+1}) \overset{IH}{\geq} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)(1+a_{n+1})$$

$$= 1 + a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k + \underbrace{\underbrace{a_{n+1}}_{\leq 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\leq 0}}_{\geq 0} \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k \quad \square$$

2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

IA: $n=0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} \frac{k}{(k+1)!} = 0 = 1 - \frac{1}{1!}$ ✓

IS: $n \to n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{n+1}{(n+2)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

$$\overset{IH}{=} \frac{n+1}{(n+2)!} + \Bigg(1 - \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+2)}(n+1)!}}\Bigg) = \frac{n+1}{(n+2)!} + \left(1 - \frac{(n+2)}{(n+2)!}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+2)!} \quad \square$$

3. Aufgabe Idee

$$\text{IS} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \overset{\text{IH}}{<} \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$$

ZZ $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \iff \frac{2n+1}{(2n+2)^2} \leq \frac{1}{2n+3}$

$\iff \frac{2n+1}{(2n+2)} \leq \frac{2n+2}{2n+3}$ $\qquad \frac{1}{2} \to \frac{2}{3} \to \frac{3}{4}$

Aufgaben zum Betrag

1. $|x| < |x+1|$ * $\qquad \Rightarrow$ kritischen Stellen $\{0, -1\}$

1. Fall $x \in (-\infty, -1]$ $\qquad |x| = -x \qquad |x+1| = -(x+1) = -x-1$

$* \iff -x \leq -x-1 \iff 0 \leq -1$ $\lightning$ $\Rightarrow$ für kein $x \in (-\infty, 1)$ erfüllt

2. Fall: $x \in [-1, 0] \Rightarrow |x| = -x \qquad |x+1| = x+1$

$* \iff -x \leq x+1 \iff -\frac{1}{2} \leq x$ $\Rightarrow$ gilt $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0]$

3. Fall $x \in [0, \infty] = |x| = x \qquad |x+1| = x+1$

$* \iff x \leq x+1 \iff 0 \leq 1$ gilt $\forall x \in [0, \infty)$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $= [-\frac{1}{2}, \infty)$

2. Aufgabe

infimum bei $n \to \infty$ und $m = 1$

$A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$

für $n = 1$ ist $\frac{1}{n}$ maximal

für $m \Rightarrow \infty$ ist $\frac{1}{m}$ minimal

$\sup(A) = 1$

$\inf(A) = -1$

maximum, minimum existieren nicht weil supremum und infimum nicht angenommen werden

Aufgaben zu Summen

① $\sqrt[n]{1+2n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}} \iff 1+2n < \left(1+\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^n$ | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Es gilt $\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \cancel{1^{n-k}} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^k$

$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^0}_{1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^1 + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^k}_{\geq 0}$

$\geq 1 + \underbrace{n \frac{2}{\sqrt{n-1}}}_{>0} + \underbrace{\frac{n(\cancel{n-1})}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{(\cancel{n-1})}}_{2n} > 1+2n$

$\Rightarrow 1+2n < \left(1+\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^n \iff \sqrt[n]{1+2n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}}$ $\square$

② . $\sum_{k=1}^{n+2} \left(4 \cdot q^{k-1} + \frac{q}{2}\right) = 4 \sum_{k=1}^{n+2} q^{k-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+2} q$

$\overset{\text{I.S.}}{=} 4 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1 =: m} q^k}_{4 \cdot \left(\frac{q^{n+2}-1}{q-1}\right)} + \frac{1}{2} \cdot (n+2) \cdot q = 4\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right) + \frac{1}{2}(n+2) \cdot q$

denn $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

q^{n+1}

$= \frac{1-q}{1-q}$

Aufgaben zu Gleichungen lösen

a) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 = p(x)$

$\hookrightarrow$ 1 ist eine Nullstelle.

$\Rightarrow$ führe Polynomdivision durch

$$(x^3 - x^2 - 2x + 2) : (x-1) = x^2 - 2$$
$$\underline{-(x^3 - x^2)}$$
$$-2x + 2$$
$$-(-2x+2) \quad r(x) = 0$$

Es gilt $p(x) = (1-x)\underbrace{(x^2-2)}_{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}$

$\Rightarrow x_1 = 1, \; x_2 = (\sqrt{2}), \; x_3 = -(\sqrt{2})$

b) $\log_3(x) + \log_3(x-6) = 3$ $\qquad \log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$

$\Leftrightarrow \log_3(x(x-6)) = 3 \Leftrightarrow (x(x-6)) = 3^3$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$

$\hookrightarrow$ Mit Mitternachtsformel folgt $\underbrace{x_1 = -3}_{}$ $\underbrace{x_2 = 9}_{}$

keine Lösung da log nur auf $\mathbb{R}^+$ def.

c) $\ln(3x+2) = 5$

$\Leftrightarrow 3x + 2 = e^5 \Leftrightarrow x = \frac{e^5 - 2}{3}$

d) $\underbrace{\ln(\sqrt{x})}_{\ln(x^{\frac{1}{2}})} - 2\ln(x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(x) - 2\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 = -\frac{3}{2}\ln(x)$

$\Leftrightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$

e) $3^x \cdot 5^{-2x} = 7^{x+1}$

$\Leftrightarrow \ln(3^x \cdot 5^{-2x}) = \ln(7^{x+1})$

$\Leftrightarrow x \cdot \ln(3) - 2x \cdot \ln(5) = \underbrace{(x+1)\ln(7)}_{x \cdot \ln(7) + \ln(7)}$ $\leftarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(7)}{\ln(3) - 2\ln(5) - \ln(7)}$

f) $e^x \cdot e^{3x} = 2$

$\Leftrightarrow e^{4x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = \ln(2)$

Aufgaben zu Folgen

a) $a_n := \dfrac{n^2 + 2n + 1}{cn^3 - n^2 + n - 1} = \dfrac{\overset{\to 0}{\frac{n^2}{n^3}} + \overset{\to 0}{\frac{2n}{n^3}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}}{c - \underset{\to 0}{\frac{1}{n}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}} - \underset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}}$ $\overset{c \neq 0}{}$ $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ c \neq 0}} a_n = 0$

für $c=0$ gilt $a_n = \dfrac{\overset{1}{\frac{n^2}{n^2}} + \overset{\to 0}{\frac{2n}{n^2}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{\underbrace{-\frac{n^2}{n^2}}_{1} + \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}$ $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ c=0}} a_n = -1$

b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - (1/2)}} - 1 = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ $\leftarrow \to 0$

c) $a_n := \dfrac{2}{\sqrt[n]{3n^2}}$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2}{\underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\to 1} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = 2$

d) $a_n := \sum_{k=1} \frac{2^k}{k!}$ $\quad$ # $e^x = \sum_{k=0} \frac{x^k}{k!}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - 1 = e^2 - 1$$

Zeige oder wiederlege $\quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$

a) stimmt $\quad$ Sei $N_1 \in \mathbb{N} : n > N_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $N_2 \in \mathbb{N} : n > N_2 \quad |b_n - b| < \varepsilon/2$

Sei $N = \max\{N_1, N_2\}$

$c_n := a_n + b_n$

$\lim_{n\to\infty} c_n := c = a + b$

$\Rightarrow$ so gilt $|\underbrace{\overbrace{a_n + b_n}^{c_n}}_{\text{folge}} - \underbrace{\overbrace{(a+b)}^{c}}_{\text{grenzwert}}| \overset{\Delta}{\leq} \overbrace{|a_n - a|}^{\varepsilon/2} + \overbrace{|b_n - b|}^{<\varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\quad \forall n > N$

b) Stimmt nicht z.b $\quad a_n = (-1)^n \quad b_n = (-1)^n \Rightarrow a_n \cdot b_n = 1$

c) $a_n = o(c_n)$ und $b_n = o(c_n)$

$a_n = n = b_n \quad c_n = n^2 \quad$ so gilt $\frac{n}{n^2} \to 0 \Rightarrow a_n = o(c_n)$

aber $a_n \cdot b_n = n^2 \quad$ Es gilt $\frac{n^2}{n^2} \to 1 \Rightarrow a_n \cdot b_n \;!= o(c_n)$

Schwer

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3} \qquad a_0 = 0$$

Zeige Beschränktheit : $0 \leq a_n \leq 1$

IA: sei $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{0 + 2}{3} = 2/3$

IS: $a_{n+1} = \frac{\overbrace{a_n^2}^{\leq 1 \text{ IH}} + 2}{3} \leq \frac{1 + 2}{3} \leq 1$

Z: $a_n \leq a_{n+1}$

$\le a_n \le a_{n+1}$

IA: $n=1$ $\quad a_2 > a_1 \quad = \frac{\frac{4}{9}+2}{3} > \frac{2}{3}$ ✓

IS: $a_{n+1} = \frac{\overbrace{a_n^2}^{1 < a_{n+1}}+2}{3} \overset{\text{I.H}}{\le} \frac{(a_{n+1})^2+2}{3} = a_{n+2}$ $\square$

b) nach monotonieprinzip (beschränkt, m.s) muss a_n konvergieren

da $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+m}| \to 0$

$$a = \frac{a^2+2}{3} \iff -a^2+3a-2 = 0$$

$\Rightarrow$ MF folgt $a_1 = 1 \quad a_2 = 2$

da $a_n \le 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Aufgaben zu stetigkeit

①

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x^2+1-(x^2-1)}^{2}}{\sqrt{x^2+1} + \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\substack{\ge 0 \\ \forall x > 1}}} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\overbrace{\sin(x)}^{\le 1}}}{\ln(\ln(x))}$

sei $x > e$ dann gilt $0 \le \frac{e^{\sin(x)}}{\ln(\ln(x))} \le \frac{e^1}{\ln(\ln(x))} \to 0$

$\cos(1)$

② ist $f(x) = \begin{cases} x > 0 & \ldots \\ x \leq 0 & 0 \end{cases}$ stetig

$\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = 0$

Sei a_n beliebige Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{a_n}\right)}_{<1} \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} \Rightarrow$ Stetigkeit in $x_0 = 0$

$\forall x \in \mathbb{R} / \{0\}$ gilt, dass f stetig, da composition von stetigen Funktionen

③ $\varepsilon := \sqrt{\delta} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$(\Rightarrow)$

$\delta = \varepsilon^2$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ist 1 ← Behauptung

$\boxed{|x-a| < \delta}$

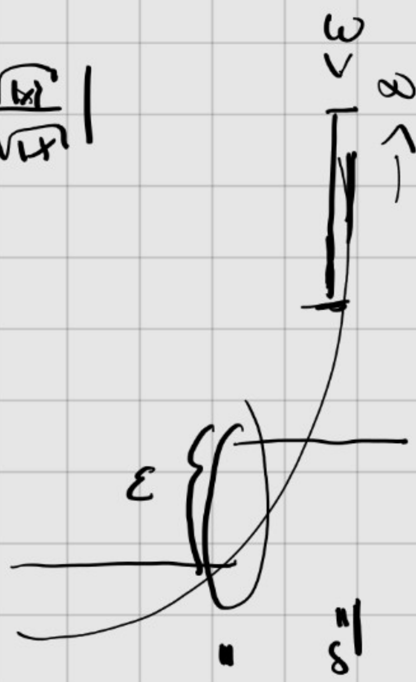
$\Rightarrow |x| < \delta$

$\sqrt{|x|} < \sqrt{\delta}$

Sei $|f(x) - f(0)| = \left|\frac{1}{1+\sqrt{|x|}} - 1\right| < \varepsilon$

Es gilt $\left|\frac{1}{\underbrace{1+\sqrt{|x|}}_{\delta = \varepsilon}} - 1\right| = \left|\frac{1}{1+\sqrt{|x|}} - \frac{1+\sqrt{|x|}}{1+\sqrt{|x|}}\right|$

$= \left| \frac{\sqrt{|x|}}{\underbrace{1+\sqrt{|x|}}_{\geq 1}} \right| < \varepsilon$



④ $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

$\nexists x^* \in \mathbb{R} : \text{sig}(x) = 0$

aber $f(-1) < 0 \quad f(1) > 0$

$\Rightarrow$ Aussage ist falsch

$\frac{1}{x}$

Aufgaben zu Differenzierbarkeit

a) $f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+h}}{h\sqrt{a} \cdot \sqrt{a+h}} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+h}}{h \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a+h}} \circ \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a+h}}{\sqrt{a} + \sqrt{a+h}}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{a-(a+h)}{h \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a+h}(\sqrt{a} + \sqrt{a+h})} = \frac{-\cancel{h}\ 1}{\cancel{h}\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}\left(\sqrt{a} + \sqrt{a}\right)} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ da $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cancel{a}+h - \cancel{a}}{h \cdot (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h} \cdot (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}}$

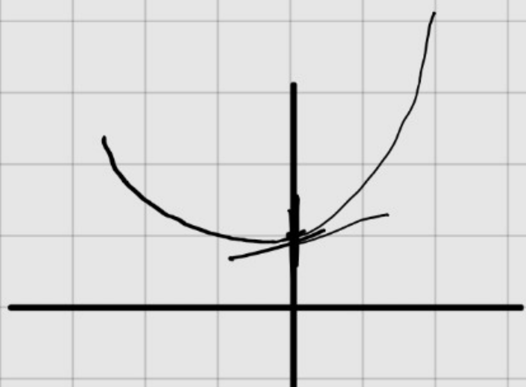
wenn $a = 0$
$\Rightarrow$ nicht definiert
$\Rightarrow$ nicht diffbar

② $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = c \\ \lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = 1 \end{array}\right\}$ damit f stetig $\Rightarrow c = 1$

$g(x) = x^2 + bx + c \qquad h(x) = e^x$

$g'(x) = 2x + b \qquad h'(x) = e^x$



$\lim g'(x) = \lim h'(x)$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^-}}_{b} \qquad \underbrace{\lim_{x \to 0^+}}_{1}$$

$\Rightarrow b = 1$ dann ist f stetig

Einschub für Fragen

e^x, x, $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $f(x) = c$

$\Rightarrow \sin(\cos(e^{\sin(x)})) + \ln(x)$

f ist im punkt a stetig wenn $\forall$ Folgen a_n mit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ $a_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$

wenn $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$