Lösungsvorschlag Blatt 4

1) a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-1)^3}{2n^4+\pi n-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-3n^2+3n-1}{2n^4+\pi n-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}}^{\to 0}}{\underbrace{2+\frac{\pi}{n^3}-\frac{2}{n^4}}_{\to 2}} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n}{n^2+1} = \lim \frac{\overbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\to \frac{1}{2}}}{\underbrace{1+\frac{1}{n^2}}_{\to 1}} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{\left(-\frac{1}{3}\right)-1} = \frac{-1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}_{\to 2}} = \frac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e}$

f) $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{k+1} = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} k}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

g)
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^k} \overset{\text{Bern.}}{\geq} \lim\limits_{n\to\infty} 1+n^k\cdot n = \lim\limits_{n\to\infty} 1+n^{k+1} = \infty$ für $k>1$

Für $k=1$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

h) Einschlusskriterium: $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = n\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \begin{cases} \leq n^2\frac{1}{n^2+1} & \text{(n mal größter Sum.)} \\ \geq n^2\frac{1}{n^2+n} & \text{(n mal kleinster Sum.)} \end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{n^2}{n^2+n}}_{\to 1} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{\to 1} \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

2) a) $a_1 = \sqrt{2+a_0} = \sqrt{2}$ $\quad a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ $\quad a_3 = \sqrt{2+a_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

b) Offenbar ist $a_n \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Wir zeigen zunächst: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch 2 nach oben beschränkt, also: z.z.: $a_n \leq 2$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Vollständige Ind.:

IA: $n=1$: $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ ✓

IH: $a_n \leq 2$ gelte für ein festes aber bel. $n\in\mathbb{N}$

IS: $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \overset{IH}{\leq} \sqrt{2+2} = 2$ □

Außerdem zeigen wir: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst monoton, also $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$:

IA: $a_1 = \sqrt{2} \geq 0 = a_0$ ✓ $\quad$ IH: $a_{n+1} \geq a_n$ für ein festes aber bel. $n\in\mathbb{N}$

IS: $a_{n+2} = \sqrt{2+a_{n+1}} \overset{IH}{\geq} \sqrt{2+a_n} = a_{n+1}$ ✓□

Zu 2b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also monoton und beschränkt, also konvergent.

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$; dann gilt ~~wegen~~ wegen $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$:

$a = \sqrt{2+a} \Leftrightarrow a^2 = 2+a \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{1\pm 3}{2}$

$a_2 = -1$ scheidet wegen $a_n \geq 0$ aus, $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2$

3) a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+4} = \frac{1}{2}$

Sei $\varepsilon > 0$: $|a_n - \frac{1}{2}| = \left|\frac{n}{2n+4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-(n+2)}{2n+4}\right| = \left|\frac{-2}{2n+4}\right| = \frac{2}{2n+4} \leq \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} < \varepsilon$

Wählen wir also $N = \frac{1}{\varepsilon}$, gilt: $\forall \varepsilon > 0: |a_n - a| < \varepsilon$, falls $n > N$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2-8n}{3n^2-2n} = \frac{2}{3}$

Sei $\varepsilon > 0$: $|a_n - \frac{2}{3}| = \left|\frac{2n^3+3n^2-8n}{3n^2-2n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n^3+3n^2-8n-\frac{2}{3}(3n^3-2n)}{3n^3-2n}\right|$

$= \left|\frac{3n^2 - \frac{20}{3}n}{3n^3-2n}\right| \overset{n>2}{\underset{(*)}{=}} \frac{3n^2 - \frac{20}{3}n}{3n^3-2n} \leq \frac{3n^2}{3n^3-2n^2} = \frac{3}{n} < \varepsilon$, falls $n > \frac{3}{\varepsilon}$

Damit (*) gilt, muss außerdem $n > 2$ gelten: Wähle $N = \max\{2, \frac{3}{\varepsilon}\}$

Dann gilt $|a_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon \;\forall n > N$

4) a) Aussage wahr: Beweis: angenommen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$ mit $a \neq a'$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N$

$\Rightarrow |a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow |a - a'| < \varepsilon \;\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = a'$ $\square$

b) falsch. Gegenbeispiel: $a_n = n$, $b_n = -n$, a_n und b_n nicht konvergent, aber $a_n + b_n = 0$ ist konvergent.

c) (i) wahr: Beweis: z.z.: $A_n \to 0 \Rightarrow G_n \to 0$ $\quad (A_n = \frac{a_n + b_n}{2}, G_n = \sqrt{a_n b_n})$

Wir zeigen $G_n \leq A_n \;\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} \Leftrightarrow a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2 \geq 4 a_n b_n$

$\Leftrightarrow (a_n - b_n)^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq G_n \leq A_n$, da $A_n \to 0$ muss auch $G_n \to 0$ (Einschlusskriterium) $\square$

(ii) falsch: Gegenbeispiel: Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (G_n also Nullfolge)

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$ (A_n also keine Nullfolge) $\lightning$