Analysis I für Ingenieure und Informatiker

Dr. Jan-Willem Liebezeit

Sommersemester 2021

Dieses Skript basiert auf verschiedenen anderen Skripten und Ausarbeitungen. Ausführlichere Darstellungen vieler Themen und weggelassene Beweise finden sich in [1], im dazugehörenden [2] finden sich passende Übungsaufgaben. Die meisten anderen Lehrbücher zur Analysis 1 beziehungsweise Differenzial- und Integralrechnung 1 beinhalten meist auch Übungsaufgaben. Ein anschauliches Lehrbuch mit vielen Beispielen, Anwendungsbeispielen und Aufgaben ist [4].

Für die Anregungen zur Überarbeitung (die noch lange nicht alle umgesetzt sind) im Sommersemester 2019 bedanke ich mich bei M. Steinle und F. Sihler.

Wenn Sie im Skript Fehler finden oder Verbesserungsvorschläge beziehungsweise -wünsche haben, schreiben Sie mir bitte an
`jan-willem.liebezeit@uni-ulm.de`.

Der Text wurde mit LaTeX gesetzt, die Grafiken sind mit Ti*k*Z und `gnuplot` erstellt worden.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Mengen

In diesem Abschnitt behandeln wir kurz die Mengenlehre insoweit wir sie für die Analysis 1 benötigen. Eine ausführlichere Behandlung erfolgt in den Vorlesungen Lineare Algebra und Formale Grundlagen.

Definition 1.1.1: Cantor[a]

[a] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845-1918, dt. Mathematiker

Unter einer *Menge* versteht man eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte, aus denen sich die Menge zusammensetzt, heißen *Elemente* der Menge.

Bemerkungen 1.1.2. (i) Wir notieren die Aussage „x ist Element der Menge M" kurz durch $x \in M$ und mit $x \notin M$ wird „x ist nicht Element der Menge M" bezeichnet.

(ii) Mengen können beschreiben wir durch

(a) die Aufzählung ihrer Elemente: $M = \{ a, b, c \}$,

(b) die Charakterisierung ihrer Elemente:

$$M = \{ x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } \dots \} .$$

(iii) Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Sie kann etwa durch $\emptyset = \{ x \mid x \neq x \}$ charakterisiert werden.

Operationen 1.1.3. Es seien A, B Mengen.

(i) Die Menge $A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ heißt *Vereinigung* von A und B.

(ii) Die Menge $A \cap B := \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$ heißt *Durchschnitt* von A und B.

(iii) Die *Differenz* von A und B ist $A \setminus B := \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$.

(iv) A heißt *Teilmenge* von B, $A \subset B :\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$, das heißt jedes Element aus A ist auch Element von B.

(v) Beispiel $A = \{ 2, 3 \}$, $B = \{ 1, 2, 4 \}$, $C = \{ 1, 4 \}$:
$A \cap B = \{ 2 \}$,
$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$,
$A \setminus B = \{ 3 \}$, $B \setminus A = \{ 1, 4 \}$,
$C \subset B$, $A \not\subset B$.

(vi) Die Menge $A \times B := \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$ ist das *kartesische Produkt*[1] von A und B.

1.2 Zahlen

Wir motivieren in diesem Abschnitt kurz die Einführung der verschiedenen Zahlbereiche. Häufig begegnen uns Probleme, die sich als Gleichungen darstellen lassen. Wir betrachten dafür

Definition 1.2.1: Natürliche Zahlen

Wir bezeichnen mit $\mathbb{N} := \{ 1, 2, 3, \dots \}$ *die natürlichen Zahlen* und mit $\mathbb{N}_0 := \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$ die natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

Die Gleichung $x + 3 = 5$ hat die Lösung $x = 2 \in \mathbb{N}$, aber die Gleichung $x + 3 = 1$ hat keine Lösung in $\mathbb{N}$, denn $-2 \notin \mathbb{N}$.

Daher *erweitern* wir die natürlichen Zahlen zu

Definition 1.2.2: Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} := \{ 0, 1, -1, 2, -2, \dots \} = \{ x \mid x \in \mathbb{N}_0 \vee -x \in \mathbb{N} \}$ – die *ganzen Zahlen*.

Die Gleichung $x + 3 = 1$ hat nun die Lösung $x = -2 \in \mathbb{Z}$. Betrachten wir zusätzlich die Multiplikation, dann finden wir wieder ein Problem, das wir in diesem Zahlenbereich nicht lösen können, denn die Gleichung $x \cdot 3 = 1$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$, da $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

[1] René Descartes, 1596-1650, frz. Mathematiker

Wir *erweitern* daher den Zahlbereich erneut:

Definition 1.2.3: Rationale Zahlen

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$ zu den *rationalen Zahlen*.

Jetzt hat die Gleichung $x \cdot 3 = 1$ die Lösung $x = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$. Aber die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$, denn $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen:

Beweis. Angenommen, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, etwa $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, wobei m, n teilerfremd angenommen werden können, dann folgt

$$\begin{aligned} 2 = \frac{m^2}{n^2} &\Rightarrow 2n^2 = m^2 \Rightarrow 2 \mid m^2 \Rightarrow 2 \mid m \\ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = 2k &\Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \\ &\Rightarrow 2 \mid n \lightning n, m \text{ teilerfremd.} \quad \square \end{aligned}$$

Zahlen, wie $\sqrt{2}$, die sich nicht als Verhältnis $a : b$ zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ darstellen lassen, nennt man irrational. Wir *erweitern* die rationalen Zahlen:

Die reellen Zahlen 1.2.4. $\mathbb{R}$ („Zahlengerade") besteht aus den rationalen und irrationalen Zahlen. Eine genaue Definition und die Eigenschaften der reellen Zahlen werden wir in Abschnitt 1.4 behandeln.

Die Gleichung $x^2 = 2$ hat die Lösung $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Aber wir können nicht alle quadratischen Gleichungen lösen, denn die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Daher *erweitern* wir abschließend die reellen Zahlen zur

Definition 1.2.5: Komplexe Zahlen

Die *komplexen Zahlen* sind gegeben durch die Menge $\mathbb{C} := \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ mit der normalen Addition und Multiplikation reeller Zahlen und der Eigenschaft $i^2 = -1$. Konkret gilt

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat die Lösungen $\pm i \in \mathbb{C}$.

Wir werden an manchen Stellen Probleme und Fragestellungen behandeln, die auch in den komplexen Zahlen sinnvoll sind. Diese lassen sich allerdings fast immer auf die getrennte Betrachtung des *Realteils* a und des *Imaginärteils* b von $z = a + ib$ und damit auf die Betrachtung des Problems in den reellen Zahlen zurückführen. Daher werden wir uns in der Regel auf die Betrachtung von Problemen in den reellen Zahlen beschränken können.

Bemerkung 1.2.6. Die Einführung der Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kann formal aus der Mengenlehre über Äquivalenzklassen[2]

(i) Eine natürliche Zahl kann als eine Klasse gleichmächtiger endlicher Mengen definiert werden (vgl. Definition 1.3.10).

(ii) Eine ganze Zahl ist eine Klasse differenzengleicher Paare natürlicher Zahlen, für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a + d = c + b$.

(iii) Eine rationale Zahl ist eine Klasse quotientengleicher ganzer Zahlen, (a, b) ,$(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc$.

(iv) Reelle Zahlen erhält man dann mit Satz 2.3.8, die komplexen Zahlen dann über eine Klassenbildung auf dem Ring der Polynome mit reellen Koeffizienten (siehe 3.1.7 und Vorlesung Lineare Algebra).

1.3 Funktionen

Wir führen den Funktionsbegriff nur knapp ein, die detaillierteren Aussagen aus der Linearen Algebra behalten ihre Gültigkeit.

Definition 1.3.1: Funktion

Es seien X, Y nichtleere Mengen. Eine *Funktion* f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $y \in Y$ zuordnet. Das $x \in X$ zugeordnete Element von Y wird mit $f(x)$ bezeichnet. X heißt *Definitionsbereich* und Y der *Wertebereich* von f. Als *Bild* von f bezeichnen wir die Menge

$$\operatorname{Im} f = \{\, y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y \,\}.$$

Wir schreiben $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$.

Beispiel 1.3.2. Es seien $X = \{\, 1, 2, 3 \,\}$, $Y = \{$ Apfel, Birne, Autoreifen $\}$, dann ist $f : X \to Y$, $1 \mapsto$ Apfel, $2 \mapsto$ Birne, $3 \mapsto$ Birne, eine Funktion.

Definition 1.3.3: Bild und Urbild

Es seien $f : X \to Y$ und $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, dann heißt

(i) $f(X') := \{\, f(x) \mid x \in X' \,\} \subset Y$ das *Bild* von X', und

(ii) $f^{-1}(Y') := \{\, x \in X \mid f(x) \in Y' \,\} \subset X$ das *Urbild* von Y'.

[2]Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist eine Verallgemeinerung der Gleichheit: Es handelt sich um eine reflexive, symmetrische und transitive Relation, das heißt für $a, b, c \in M$ gilt, wenn $\sim$ die Relation bezeichnet, $a \sim a$, $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ sowie $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$. Eine Äquivalenzklasse $\overline{a}$ ist für $a \in M$ die Menge $\{\, b \in M \mid b \sim a \,\}$.

Beispiel 1.3.4. Es seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$, sowie die Mengen $X' = \{ 1, 3 \}$, $Y_1' = \{ 4, 16, 361 \}$, dann ist das Bild von X' gerade $f(X') = \{ f(1), f(3) \} = \{ 1, 9 \}$ und das Urbild von Y_1' ist $f^{-1}(Y_1') = \{ 2, 4, 19 \}$. Betrachten wir f als Funktion auf $\mathbb{Z}$, dann ist das Urbild von $Y_2' = \{ 4 \}$ die Menge $f^{-1}(Y_2') = \{ -2, 2 \}$.

Definition 1.3.5: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

(i) *injektiv* oder *eineindeutig*, wenn für $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.

(ii) *surjektiv*, wenn $f(X) = Y$, das heißt zu jedem $y \in Y$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

(iii) *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Die Eigenschaft Injektivität kann man auch so formulieren, dass aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt.

Beispiel 1.3.6. Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 2x$, ist injektiv, da aus $x_1 \neq x_2$ folgt, dass $f(x_1) = 2x_1 \neq 2x_2 = f(x_2)$. f ist nicht surjektiv, da keine ungerade Zahl ein Urbild besitzt. f ist daher auch nicht bijektiv.

Indem man als Wertebereich das Bild der Funktion setzt, kann man Surjektivität für eine einzelne Funktion offenbar immer erreichen.

Lemma 1.3.7: Existenz der Umkehrfunktion

Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Funktion $g : Y \to X$ gibt mit

$$\forall x \in X g(f(x)) = x \wedge \forall y \in Y f(g(y)) = y.$$

Die Funktion g ist in dem Fall eindeutig bestimmt, heißt *Umkehrfunktion* von f und wird mit f^{-1} bezeichnet. Genauer bedeutet die Existenz einer Funktion g, welche die erste Aussage erfüllt, dass f injektiv ist und wenn eine Funktion g existiert, welche die zweite Aussage erfüllt, so ist f surjektiv.

Beweis. Ist f bijektiv, dann existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, die Funktion $g : Y \to X$, $y \mapsto x$ ist dann durch die Eigenschaft $f(x) = y$ eindeutig definiert.

Umgekehrt bedeutet die erste Eigenschaft, dass f injektiv ist, denn aus $f(x_1) = f(x_2) = y$ folgt $g(f(x_1)) = x_1 = g(f(x_2)) = x_2$.

Die zweite Eigenschaft bedeutet, dass f surjektiv ist, denn für jedes $y \in Y$ existiert mit $x = g(y)$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. □

Definition 1.3.8: Hintereinanderausführung

Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, dann heißt

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)),$$

die *Hintereinanderausführung*, *Komposition*, *Verknüpfung* oder *Verkettung* von f und g.

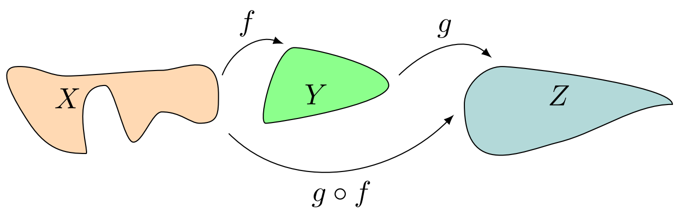

Abbildung 1.1: Hintereinanderausführung von f und g.

Beispiel 1.3.9. Die Reihenfolge der Hintereinanderausführung ist wichtig, denn selbst wenn die jeweiligen Definitions- und Bildmengen passend sind, müssen $g \circ f$ und $f \circ g$ nicht übereinstimmen:
Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, dann ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ und $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x^2 + 1$. Also offenbar $g \circ f \neq f \circ g$.

Definition 1.3.10

Es seien X, Y Mengen.

(i) X, Y heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Funktion $f : X \to Y$ gibt.

(ii) X heißt *endlich*, wenn eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass X und $\{ 0, 1, \ldots, N - 1 \}$ gleichmächtig sind. Andernfalls heißt X *unendlich*.

(iii) X heißt *abzählbar*, wenn X endlich ist oder X und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind. Eine nicht endliche, abzählbare Menge wird auch *abzählbar unendlich* genannt.

(iv) X heißt *überabzählbar*, wenn X nicht abzählbar ist.

Bemerkung 1.3.11. Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Mengen. Geht man nun davon aus, dass es eine unendliche Menge gibt oder fordert dies, so kann man mit Bemerkung 1.2.6 die Zahlbereiche konstruieren. Eine alternative Konstruktion der natürlichen Zahlen kommt ohne diese Forderung aus (siehe etwa[1, B]).

Beispiele 1.3.12. (i) Die Menge $X = \{ 1, 2, 3, \ldots, 250000 \}$ ist endlich, denn die Funktion $f : X \to \{ 0, 1, \ldots, 249999 \}$, $x \mapsto x - 1$, ist bijektiv.

(ii) $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Beispiele für unendliche Mengen.

(iii) Die Menge $G = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade} \}$ ist unendlich und abzählbar, da die Funktion $f : \mathbb{N} \to G$, $x \mapsto 2x$ bijektiv ist.

(iv) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar unendlich (siehe Satz 2.6.5).

Satz 1.3.13

Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.

Beweis. Zu $\mathbb{N}$: Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x$ ist bijektiv. Für die Abzählbarkeit von $\mathbb{Z}$ betrachten wir die durch

$$f(n) = \begin{cases} k, & n = 2k \\ -k + 1, & n = 2k - 1 \end{cases}$$

gegebene bijektive Abbildung. Zu $\mathbb{Q}$: Das *Cantorsches Diagonalverfahren* liefert eine Abzählung der rationalen Zahlen vermöge der Skizze:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1}^{(1)} & & \frac{2}{1}^{(3)} & & \frac{3}{1}^{(5)} & & \frac{4}{1}^{(9)} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
\frac{1}{2}^{(2)} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2}^{(8)} & & \frac{4}{2} & & \cdots \\
& \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
\frac{1}{3}^{(4)} & & \frac{2}{3}^{(7)} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \cdots \\
& \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{1}{4}^{(6)} & & \frac{2}{4} & & \cdots & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & &
\end{array}.$$

Damit folgt die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$. Eine ausführlichere Darstellung findet man in [1, 1.2]. □

Eine Idee analog zum Cantorschen Diagonalverfahren kann verwendet werden, wenn man abzählbar viele Turing-Maschinen takten muss und nicht garantieren kann, dass alle tatsächlich stoppen. Im obigen Schema entsprechen die Spalten den Bändern der Maschinen und durch die Pfeile wird angedeutet, wann welche Maschine den nächsten Arbeitsschritt ausführt.

1.4 Die reellen Zahlen

Wir behandeln in diesem Abschnitt die aus der Schule vertrauten reellen Zahlen. Alle bekannten Rechentechniken können auf die formalen Eigenschaften und

Operationen zurückgeführt werden und können daher auch weiterhin angewandt werden. Erfahrungsgemäß neu und ungewohnt und daher zu üben ist sicher der Umgang mit Ungleichungen. Dies spielt eine wesentliche Rolle in der Analysis, da wir häufig Ausdrücke gegen einfacher zu handhabende abschätzen werden.

In der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind die Verknüpfungen *Summe* $+$ und *Produkt* $\cdot$ erklärt als Funktionen

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (a, b) \mapsto a + b,$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

welche folgenden Axiomen genügen:

(A) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die *Axiome der Addition*:

- (i) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(Assoziativgesetz)*.
- (ii) $a + b = b + a$ *(Kommutativgesetz)*.
- (iii) Es gibt ein *Nullelement* $0 \in \mathbb{R}$, so dass $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- (iv) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert ein *negatives Element* $-a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$.

(B) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ gelten die *Axiome der Multiplikation*:

- (i) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *(Assoziativgesetz)*.
- (ii) $a \cdot b = b \cdot a$ *(Kommutativgesetz)*.
- (iii) Es gibt ein *Einselement* $1 \in \mathbb{R}$, so dass $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$.
- (iv) Zu jedem $a \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ existiert ein *inverses Element* $\frac{1}{a} = a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$.

(C) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt das *Distributivgesetz*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Bemerkungen 1.4.1. (i) Die Axiome der Addition beziehungsweise der Multiplikation besagen, dass $(\mathbb{R}, +)$ beziehungsweise $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist.

(ii) Die obigen Eigenschaften heißen *Körperaxiome*, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammen mit $+, \cdot$ daher auch *Körper der reellen Zahlen*.

(iii) Die rationalen und die komplexen Zahlen bilden mit der bekannten Addition und Multiplikation ebenfalls Körper, das heißt, sie erfüllen die oben genannten Axiome.

(iv) Die natürlichen und die ganzen Zahlen erfüllen die Körperaxiome nicht (so existieren etwa keine multiplikativen Inversen für jedes Element aus $\mathbb{N}$ beziehungsweise $\mathbb{Z}$, vergleiche Abschnitt 1.2) und bilden daher keine Körper.

Die reellen und die rationalen Zahlen sind geordnet:

Definition 1.4.2: Anordnungsaxiome

Auf $\mathbb{R}$ ist eine *Anordnung* $<$ erklärt als Relation auf $\mathbb{R}$, welche für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ den folgenden Axiomen genügt:

(O1) Es gilt genau eine der Relationen

$$a = b,\ \ a < b \text{ oder } b < a \ (\textit{Trichotomie}),$$

(O2) die Anordnung ist *transitiv*, das heißt $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ und

(O3) sie ist mit den Operationen in $\mathbb{R}$ verträglich, das heißt
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (*Monotonie bezüglich* $+$) sowie
$a < b \ \Rightarrow \ a \cdot c < b \cdot c$ für alle $c > 0$ (*Monotonie bezüglich* $\cdot$).

In geordneten Körpern gelten folgende weitere Eigenschaften:

Lemma 1.4.3

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $a < b \Rightarrow -b < -a$.

(ii) $0 < 1$.

(iii) $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow 0 < a \cdot b$ (insb. $0 < a^2$ für $a \neq 0$).

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage:

$$a < b \overset{(O3)}{\Rightarrow} a + (-a - b) = -b < b + (-a - b) = -a.$$

Zur zweiten Aussage: Angenommen, es ist $1 < 0$, dann folgt $0 < -1 \Rightarrow -1 = -1 \cdot 1 < -1 \cdot 0 = 0 \lightning$.

Abschließend gilt: Aus $0 < -a$ und $0 < -b$ folgt $0 < (-a)(-b) = ab$. $\square$

Definition 1.4.4

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) $a > b :\Leftrightarrow b < a$.

(ii) a heißt *positiv*, falls $a > 0$ und *negativ*, falls $a < 0$.

(iii) $a \leq b :\Leftrightarrow a < b \vee a = b$, $a \geq b :\Leftrightarrow a > b \vee a = b$.

(iv) a heißt *nicht-negativ*, falls $a \geq 0$ und *nicht-positiv*, falls $a \leq 0$.

Beispiel 1.4.5. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $0 < b$ und $0 < c < d$, dann ist auch $a \cdot c < b \cdot d$, denn mit der Monotonie bezüglich $\cdot$ folgt

$$a \cdot c < b \cdot c < b \cdot d.$$

Definition 1.4.6: Vorzeichen und Betrag

Es sei $x \in \mathbb{R}$, dann heißt

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

das *Vorzeichen* von x.
Der *Absolutbetrag* oder nur *Betrag* von x ist erklärt durch

$$|x| := \operatorname{sgn} x \cdot x = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

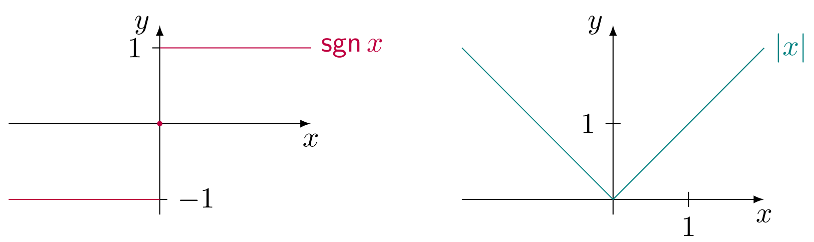

Abbildung 1.2: Vorzeichen- und Betragsfunktion.

Lemma 1.4.7: Eigenschaften des Betrags

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist

(i) $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$ *(Definitheit)*,

(ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ *(Multiplikativität)*,

(iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung)*.

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften sind klar. Wir zeigen die wichtige Dreiecksungleichung: Es sei $\varepsilon := \operatorname{sgn}(a + b)$. Aus der Definition folgt sofort $a \leq |a|$, was wir in Lemma 1.4.8 noch explizit notieren. Mit $|\pm 1| = 1$ erhalten wir dann

$$|a + b| = \varepsilon(a + b) = \varepsilon \cdot a + \varepsilon \cdot b \leq |\varepsilon \cdot a| + |\varepsilon \cdot b| = |a| + |b|\,. \qquad \square$$

Lemma 1.4.8: Rechnen mit Beträgen

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) $a \leq |a|$.

(ii) Für $a \neq 0$ ist $a^2 = (-a)^2 = |a|^2 > 0$.

(iii) Für $a \neq 0$ ist $\left|a^{-1}\right| = |a|^{-1}$.

(iv) $|a| < c \Leftrightarrow a < c$ und $-a < c$.

(v) $|b - a| < c \Leftrightarrow a - c < b < a + c$.

(vi) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (*Dreiecksungleichung nach unten*).

(vii) $a < c < b \Leftrightarrow \left| c - \dfrac{a+b}{2} \right| < \dfrac{b-a}{2}$.

Die Eigenschaft (v) ist nützlich, wenn Beträge aufgelöst werden sollen. Die Aussage (vii) besagt anschaulich, dass der Abstand zwischen c und dem Mittelpunkt der Strecke von a nach b kleiner als die Hälfte der Streckenlänge von a nach b sein muss, damit c zwischen a und b liegt.

Beweis. Die ersten vier Aussagen folgen direkt aus der Definition und mit 1.4.3. (v) folgt aus (iv). Zu (vi):

$$\begin{aligned} |a| &= |a + b - b| \leq |a - b| + |b| \\ \Rightarrow |a| - |b| &\leq |a - b|\,. \end{aligned}$$

Analog folgt $|b| - |a| = -(|a| - |b|) \leq |a - b|$. Damit folgt (vi) mit (iv).

(vii) folgt mit (iv). $\square$

Beispiel 1.4.9 (Rechnen mit Beträgen)**.** Wir bestimmen die Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die

$$|x+1| \leq |x-2| \tag{1.1}$$

gilt.

Zunächst veranschaulichen wir das Problem durch eine Skizze (siehe Abbildung 1.3).

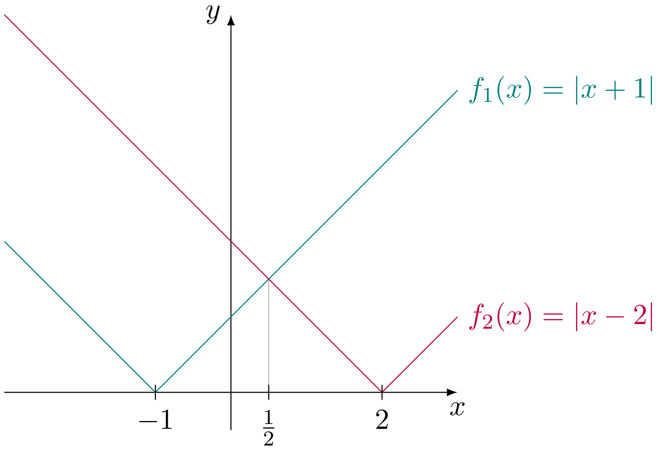

Abbildung 1.3: Ungleichung mit Beträgen: Für $x > \frac{1}{2}$ ist $f_1(x) > f_2(x)$.

Da eine Skizze kein Beweis ist, muss die Lösung – die Ungleichung gilt für alle $x \leq \frac{1}{2}$ – auch noch rechnerisch gezeigt werden. Dazu betrachten wir die *kritischen Punkte* an denen $x+1$ beziehungsweise $x-2$ das Vorzeichen wechseln: Es gilt: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ und $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Daraus ergeben sich folgende Fälle für die Auflösung der Beträge:

(i) $x \leq -1$: Dann ist $|x+1| = -(x+1) = -x-1$ und $|x-2| = -(x-2) = -x+2$. Die Ungleichung lautet also $-x-1 \leq -x+2 \Leftrightarrow -1 \leq 2$. Dies ist immer wahr.

(ii) $-1 < x < 2$: Dann liefert die Auflösung der Beträge $x+1 \leq -x+2 \Leftrightarrow 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

(iii) $x \geq 2$: Wir erhalten $x+1 \leq x-2 \Leftrightarrow 1 \leq -2$, eine Aussage, die nie wahr ist.

Also gilt die Ungleichung $|x+1| \leq |x-2|$ für alle x aus der Menge

$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq -1 \,\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\infty < x \leq \frac{1}{2} \right\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

Aufpassen muss man, wenn man Beträge durch Quadrieren auflösen will. So ist etwa $x - 2 < 0$ für $x < 2$, die Ungleichung $|x + 1| \leq x - 2$ für $x < 2$ nicht erfüllbar, aber dieser Information geht verloren, wenn man die Ungleichung durch Quadrieren auflöst:

$$|x + 1| \leq x - 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \leq x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 6x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

Definition 1.4.10: Intervall

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann bezeichnen wir folgende Mengen als *Intervalle*:

(i) $[a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ (kompaktes Intervall),

(ii) $(a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ (offenes beschränktes Intervall),

(iii) $[a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$ und $(a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$ (halboffene beschränkte Intervalle),

(iv) $[a, +\infty) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$ und $(-\infty, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \}$ (abgeschlossene unbeschränkte Intervalle) sowie

(v) $(a, +\infty) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}$ und $(-\infty, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \}$ (offene unbeschränkte Intervalle).

(vi) Intervalle (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ und $[a, b]$ mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ und $a \geq b$ heißen *ausgeartet*. In dieser Vorlesung betrachten wir stets nicht ausgeartete Intervalle.

Definition 1.4.11: Schranken und Beschränktheit von Mengen

Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, dann heißt A

(i) *nach oben beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R} \forall x \in A : x \leq S$. Die Zahl S heißt *obere Schranke* von A.

(ii) *nach unten beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} \forall x \in A : x \geq s$. Die Zahl s heißt *untere Schranke* von A.

(iii) *beschränkt* $:\Leftrightarrow$ A ist nach oben und unten beschränkt.

Beispiel 1.4.12. Die Menge $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \}$ ist nach oben beschränkt, jede Zahl $S \geq 2$ ist eine obere Schranke von A. Die Menge A ist nicht nach unten beschränkt, denn angenommen $s \leq 2$ wäre eine untere Schranke von A, dann wäre $s - 1 \leq s \leq 2$ und damit $s - 1 \in A$, ein Widerspruch.

Definition 1.4.13: Supremum und Infimum

Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, dann heißt

(i) $S_0 \in \mathbb{R}$ *Supremum* (*kleinste obere Schranke*) von A, $S_0 = \sup A$: $\Leftrightarrow$

(a) S_0 ist obere Schranke von A.

(b) Für jede obere Schranke S von A gilt $S_0 \leq S$.

(ii) $s_0 \in \mathbb{R}$ *Infimum* (*größte untere Schranke*) von A, $s_0 = \inf A$: $\Leftrightarrow$

(a) s_0 ist untere Schranke von A.

(b) Für jede untere Schranke s von A gilt $s_0 \geq s$.

Beispiel 1.4.14. Es sei $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2 \}$, dann ist

- $\sup A = 2$, denn

  (i) 2 ist obere Schranke von A und

  (ii) für jede andere obere Schranke S von A gilt $S \geq 2$.

- $\inf A = 1$, denn

  (i) 1 ist untere Schranke von A und

  (ii) 1 ist die größte untere Schranke, denn angenommen $s > 1$ sei eine untere Schranke, also $\forall x \in A : s \leq x$. Wir führen die Annahme zum Widerspruch: Es gilt dann nämlich

  $$1 = \frac{1+1}{2} < \frac{s+1}{2} < \frac{s+s}{2} = s,$$

  also $\frac{s+1}{2} < s$ und $\frac{s+1}{2} \in A$, also ein Widerspruch zu $\forall x \in A : s \leq x$. s ist also kein Infimum von A.

Definition 1.4.15: Minimum und Maximum

Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, dann heißt

(i) $M \in \mathbb{R}$ *Maximum* von A, $M = \max A$, falls gilt

(a) M ist obere Schranke von A.

(b) $M \in A$.

(ii) $m \in \mathbb{R}$ *Minimum* von A, $m = \min A$, falls gilt

(a) m ist untere Schranke von A.

(b) $m \in A$.

Beispiel 1.4.16. $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2 \}$. Oben hatten wir gezeigt: $\sup A = 2$, $\inf A = 1$. Da $2 \in A$, gilt $\max A = 2$. $\min A$ existiert nicht, da 1 die größte untere Schranke von A ist, aber nicht in A liegt.

Lemma 1.4.17: Zusammenhang von Maximum und Supremum

Existiert das Maximum (Minimum) einer Menge, so existiert auch das Supremum (Infimum) der Menge und beide sind gleich.

Die Umkehrung gilt nicht (siehe Beispiel 1.4.16).

Definition 1.4.18

Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, dann definieren wir

(i) $\sup A = +\infty$, falls A nicht nach oben beschränkt ist.

(ii) $\inf A = -\infty$, falls A nicht nach unten beschränkt ist.

Außerdem setzen wir $\inf \emptyset = +\infty$ und $\sup \emptyset = -\infty$.

Vollständigkeitsaxiom 1.4.19

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge aus $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Bemerkungen 1.4.20. (i) Die Rechenregeln, Ordnung ($<$) und das Vollständigkeitsaxiom machen die reellen Zahlen zu einem *vollständigen, geordneten Körper*. Formal gesehen, ist das unsere Definition der reellen Zahlen.

(ii) In $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht: $\left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 \leq 2 \right\}$ hat das Supremum $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(iii) Weiter sind $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ geordnet, aber nicht vollständig. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen vollständigen Körper, der aber nicht geordnet ist und auch nicht geordnet werden kann. Zur Definition von Vollständigkeit in nicht geordneten Körpern und Räumen wird dabei Satz 2.4.20 verwendet (siehe 2.4.21).

1.5 Summen und Produkte

Definition 1.5.1: Summe und Produkt

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

und

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n.$$

Für $m > n$ setzen wir $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ und $\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$.

Die Notation mit dem Summenzeichen $\sum$ wird sich als sehr nützlich erweisen. Solange man noch wenig Übung im Umgang damit hat, kann es hilfreich sein, die Summen auch jeweils auszuschreiben (mit $+\cdots+$).

Beispiele 1.5.2. (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ (harmonische Summe),

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n$ (geometrische Summe) und

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n.$

Satz 1.5.3: Prinzip der vollständigen Induktion

Gegeben seien Aussagen $A(n)$ für $n \geq n_0 \in \mathbb{Z}$ und es gelte

(i) $A(n_0)$ ist wahr und

(ii) für alle $n \geq n_0$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Bemerkung 1.5.4. (i) (i) heißt *Induktionsanfang* und (ii) *Induktionsschritt*.

(ii) Das Prinzip der vollständigen Induktion ist nicht konstruktiv, das heißt es liefert nicht die zu beweisende Behauptung. Diese muss also schon bekannt sein.

Beispiele 1.5.5. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ und

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Beweis. Zu (iii): Die Aussage $A(n)$ ist $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$.

Induktionshypothese (IH): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$. Wir zeigen im *Induktionsschritt*, dass daraus $A(n+1)$ folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{IH}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) \\ &= (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

das heißt, es gilt $A(n+1)$. □

Die folgenden Rechenregeln vereinfachen das Arbeiten mit Summen. Wir sammeln sie hier, damit sie nicht über das ganze Skript verteilt sind und an den Stellen, wo wir sie bemötigen, vom Himmel fallen.

Lemma 1.5.6: Rechenregeln für Summen

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$ für $k = m, m+1, \ldots, n, n+1$ gilt

(i) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+\ell}^{n+\ell} a_{k-\ell}$ für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ (Indexverschiebung),

(ii) $\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$ (Additivität),

(iii) $\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$ (Multiplikativität),

(iv) $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ (Teleskopsumme),

(v) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$ (Rückwärtssummieren).

Beispiele 1.5.7. (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k+1}$ (Indexverschiebung: $a_k = \frac{1}{k}$, $\ell = -1$),

(ii) $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=3}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{11}$.

Satz 1.5.8: Geometrische Summenformel

Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis. Es gilt $(1 - q)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1}) = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$. □

Beispiel 1.5.9. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = \sum_{k=0}^{9} 2^k = \frac{2^{10}-1}{2-1} = 1023$.

Lemma 1.5.10: Doppelsummen, Dreiecksschema

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_{jk} \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq j \leq k \leq n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{jk}.$$

Für $n = 5$ können wir die Zahlen beispielsweise in folgendem Schema notieren:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & & a_{44} & a_{45} \\ & & & & a_{55} \end{array}$$

Das Lemma besagt, dass es egal ist, ob man zeilenweise oder spaltenweise aufsummiert. Die Formel ermöglicht einen Tausch der Reihenfolge der Summenzeichen, wenn der eine Index vom anderen abhängt. Dadurch kann man manchmal eine Vereinfachung erreichen.

Beispiel 1.5.11. Mit Beispiel 1.5.5 gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{j^3}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{j^3}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{k}j^3 \\
&\overset{1.5.5\,(iii)}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\cdot\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n+1}k^2 \\
&\overset{1.5.5\,(ii)}{=} \frac{1}{4}\left(\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-1\right).
\end{aligned}
$$

Definition 1.5.12: Fakultät und Binomialkoeffizient

(i) Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ *Fakultät* von n,

(ii) sind $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, so heißt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *Binomialkoeffizient*. Man sagt „n über k“. Für $n, k \in \mathbb{N}$ kann man auch schreiben $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, da $n! = n \cdot (n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)!$.

(iii) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ nennen wir

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Binomialkoeffizient als Verallgemeinerung. Für $k = 0$ definieren wir $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Beispiele 1.5.13. $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$, $\binom{4}{3} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{24}{6} = 4$, $\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{-6}{6} = -1$ und $\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2\cdot 1} = -\frac{1}{8}$.

Bemerkungen 1.5.14. (i) Nach Definition 1.5.1 von $\prod$ ist $0! = 1$. Die Definition $\binom{\alpha}{0} = 1$ gilt also bereits nach Definition für alle $\alpha \in \mathbb{N}$, sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ festzuschreiben ist also nur konsequent.

(ii) Interpretation (Kombinatorik):

(a) $n!$ ist die Anzahl der Möglichkeiten n Objekte anzuordnen.

(b) $\binom{n}{k}$ ist für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ die Anzahl der Möglichkeiten k Objekte aus einer Menge von n Objekten auszuwählen.

Lemma 1.5.15: Additionstheorem für Binomialkoeffizienten

Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)k!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{\alpha-k}{k+1}\right)}_{=\frac{k+1+\alpha-k}{k+1}=\frac{\alpha+1}{k+1}} \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+1-(k+1)+1)}{(k+1)!} = \binom{\alpha+1}{k+1}. \square\end{aligned}$$

Bemerkungen 1.5.16. (i) $\binom{n}{k} = 0$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k > n$.

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $n \geq k$.

(iii) Pascalsches[3] Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\iddots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \ddots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\iddots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \ddots
\end{array}$$

(iv) Durch direktes Nachrechnen erhält man

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

[3]Blaise Pascal, 1623-1662, frz. Mathematiker

Die Vorfaktoren vor den Ausdrücken entsprechen geraden den Zahlen im Pascalschen Dreieck. Man kann daher vermuten, dass

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Diese Vermutung ist korrekt:

Binomialsatz 1.5.17

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \tag{1.2}$$

Beweis durch vollständige Induktion über n. Durch (1.2) ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

Induktionsanfang: $A(0)$ ist wahr, da $(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^{0-k}b^k = 1 \cdot a^0 b^0$ (siehe auch Definition 1.5.20).

Induktionshypothese: $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass dann $A(n+1)$ gilt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{\text{IH}}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k + \binom{n}{n}a^0 b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} \\
&\overset{1.5.15}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.
\end{aligned}$$

□

Da die Summe im Binomialsatz schnell unhandlich wird, betrachten wir folgende Abschätzung, die man durch Ausklammern, $(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$, oft anwenden kann.

Lemma 1.5.18: Bernoulli-Ungleichung[a]

[a] Jakob Bernoulli, 1655-1705, schweiz. Mathematiker

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis durch vollständige Induktion über n. Für $n = 1$ ist der *Induktionsanfang* klar.

Die *Induktionshypothese* lautet $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$.

Wir zeigen im *Induktionsschritt*, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \overset{\text{IH}}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

□

Für $x \geq 0$ folgt die Ungleichung direkt aus dem Binomialsatz.

Definition 1.5.19: n-Potenz

Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann definieren wir

(i) $a^n := \prod_{k=1}^n a = \underbrace{a \cdots a}_{n\text{-mal}}$.

(ii) Für $a \neq 0$: $a^{-n} := \left(a^{-1}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.

Definition 1.5.20: n-te Wurzel

Für $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, und $n \in \mathbb{N}$ heißt $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, *n-te Wurzel* von a, $x = \sqrt[n]{a} :\Leftrightarrow x^n = a$.
Wegen $\sqrt[n]{a}^n = a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$, schreiben wir statt $\sqrt[n]{a}$ auch $a^{\frac{1}{n}}$.

Durch Kombination der beiden Definitionen können wir für $a \geq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ den Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ erklären, wobei wir für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ $a^0 = 1$ setzen.

Lemma 1.5.21: Potenzrechenregeln

Für alle $a, b \geq 0$ und alle $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

(ii) $a^p \cdot b^p = (ab)^p$.

(iii) $(a^p)^q = a^{pq}$.

Weiter gelten für $a, b > 0$, $p < q$ folgende Ungleichungen:

(iv) $a^p < a^q$, falls $a > 1$, $a^p > a^q$, falls $0 < a < 1$.

(v) $a^p < b^p$, falls $p > 0$ und $0 \leq a < b$.

Kapitel 2

Folgen und Reihen

Wir betrachten in diesem Kapitel Folgen – bei den Reihen im Titel handelt es sich um spezielle Folgen, die aufgrund ihrer Struktur zusätzliche Aussagen ermöglichen. Die ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels bilden dabei die wesentliche Grundlage für die weitere Analysis- und Mathematikausbildung auch über diese Vorlesung hinaus. Wir werden explizit und implizit sehr häufig auf die hier behandelten Begriffe und ihre Eigenschaften zurückgreifen.

2.1 Definition und Beispiele

Definition 2.1.1: Folge

Es sei $M \neq \emptyset$. Eine *Folge* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to M$, $n \mapsto a(n) = a_n$. Die Elemente $a_n \in M$ heißen *(Folgen-) Glieder* von a.

In der überwiegenden Mehrheit werden wir Zahlenfolgen betrachten, das heißt, M ist eine Menge von Zahlen.

Bemerkung 2.1.2. Es gibt verschiedene Schreibweisen:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n)_{n=1}^{\infty},\ (a_n)_{n\geq 1},\dots$$

Die beiden letzten Varianten ermöglichen, statt bei 1 auch bei beliebigen $m \in \mathbb{Z}$ zu beginnen. Die kürzeste Schreibweise ist (a_n).

Beispiele 2.1.3 (Explizite Definition von Folgen)**.**

(i) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto c$: Konstante Folge $c, c, c, c, \dots$

(ii) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto a_n := n$: Folge aller natürlicher Zahlen $1, 2, 3, \dots$

(iii) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto a_n := 2n$: Folge der geraden Zahlen $2, 4, 6, 8, \dots$

(iv) $b : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $n \mapsto b_n := 2n + 1$: Folge der ungeraden Zahlen $1, 3, 5, 7, \dots$

(v) Für festes $a_0, d \in \mathbb{R}$ wird durch $a_n := a_0 + n \cdot d$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine *arithmetische Folge*, das heißt $a_{n+1} - a_n = d$, definiert: $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \ldots$

(vi) Für feste $a_0, q \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ wird durch $a_n := a_0 \cdot q^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine *geometrische Folge* definiert, das heißt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

(vii) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.

(viii) $a_n := \left[0, \frac{3}{n}\right)$ definiert eine Folge von Intervallen: $[0, 3)$, $\left[0, \frac{3}{2}\right)$, $[0, 1)$, $\left[0, \frac{3}{4}\right), \ldots$.

Beispiele 2.1.4 (Rekursive Definition von Folgen)**.**

(i) Die Vorschrift $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := (n + 1)a_n$ liefert $a_2 = 2$, $a_3 = 6, \ldots$, $a_n = n!$.

(ii) $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}$: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \ldots$.

(iii) $a_0 := 0$, $a_1 := 1$, $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$ liefert die *Fibonacci-Zahlen*[1]: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

Definition 2.1.5: Beschränktheit von Folgen

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, dann heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) *nach oben beschränkt*: $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$.

(ii) *nach unten beschränkt*: $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq m$.

(iii) *beschränkt*, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben und unten beschränkt ist. Dies ist äquivalent zu $\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$ und bedeutet anschaulich, dass alle Folgenglieder im Intervall $[-M, M]$ liegen.

Beispiele 2.1.6. (i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = c$ ist beschränkt ($M = |c|$).

(ii) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$: $-1, 1, -1, 1, \ldots$, ist beschränkt ($M = 1$).

(iii) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten (durch 0), aber nicht nach oben beschränkt.

(iv) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} &= \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} < 2. \end{aligned}$$

[1] Leonardo da Pisa, ca. 1170-1240, ital. Rechenmeister

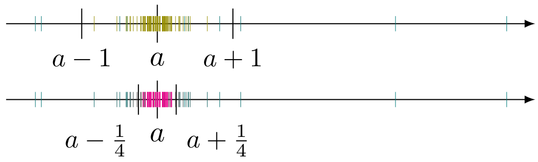

Abbildung 2.1: Zur Veranschaulichung der Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}$. Gegeben ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a + 5 \cdot \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot \sin(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Oben ist $n_0 = 11$ für $\varepsilon = 1$, unten $n_0 = 44$ für $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Das $n_0(\varepsilon)$ erhält man hier über eine Abschätzung mit der Darstellung des Logarithmus aus 4.2.10 (i).

2.2 Konvergenz

Wie verhalten sich Zahlenfolgen für große Werte von n? Nähern sich die Werte der Folgenglieder einer festen Zahl an (vergleiche 2.2.1) oder können wir ihr Verhalten qualitativ mit einfachen Folgen vergleichen (vergleiche 2.2.15)?

Definition 2.2.1: Konvergenz

(i) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt *konvergent* :$\Leftrightarrow$

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt $a \in \mathbb{R}$ der *Grenzwert* der Folge. Wir schreiben $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Das $n_0 \in \mathbb{N}$ kann von ε abhängen, das heißt $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

(ii) Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 heißt *Nullfolge*.

(iii) Eine nicht-konvergente Folge heißt *divergent*.

Bemerkungen 2.2.2. (i) $a_n \to a$ für $n \to \infty$ bedeutet anschaulich (vergleiche Abbildung 2.1), dass man für eine beliebige Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ immer eine Zahl n_0 findet, so dass *alle* Folgenglieder nach der Nummer n_0 weniger als ε vom Grenzwert a entfernt sind. Mit anderen Worten: ab n_0 liegen alle weiteren Folgenglieder im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (vergleiche Lemma 1.4.8 (v)).

(ii) Die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$ ist analog definiert. In $\mathbb{C}$ liegen dann alle Folgenglieder ab n_0 in einer Kreisschreibe mit dem Radius ε, da die durch $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \varepsilon \}$ gegeben Menge eine (offene) Kreisscheibe mit Radius ε und Mittelpunkt a beschreibt.

In den folgenden Beispielen geben wir ein passendes n_0 direkt an und zeigen, dass damit die Definition von Konvergenz erfüllt ist. In der Praxis ist es so, dass man aus Abschätzungen von $|a_n - a|$ und der Forderung, dass diese kleiner als ein konkretes oder allgemeines ε sein möge, ein n_0 erhält beziehungsweise herleiten muss.

Beispiele 2.2.3. (i) Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = c$ für $n \geq 1$ eine konstante Folge, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann setzen wir $n_0 = 1$ und erhalten

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Also gilt $a_n \to c$ für $n \to \infty$.

(ii) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $n_0 = \left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil + 1 := \min\left\{ z \in \mathbb{Z} \;\middle|\; z \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\} + 1$, dann gilt

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$, da $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Wir verwenden hier die “obere Gaußklammer” $\lceil\cdot\rceil$, da $\frac{1}{\varepsilon}$ im Allgemeinen keine natürliche Zahl ist und addieren 1, damit im Fall $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ nicht $\frac{1}{n_0} = \varepsilon$ eintreten kann.

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n^3+n+4}$ für $n \geq 1$ ist eine Nullfolge, denn

$$\left|\frac{1}{n^3+n+4} - 0\right| = \frac{1}{n^3+n+4} \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n}.$$

Da $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist, muss also auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein. Formal kann man hier für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ das $n_0(\varepsilon)$ wie oben wählen. Das liefert dann zwar nicht den kleinstmöglichen Index, ab dem die Ungleichung gilt, das ist aber aus mathematischer Sicht unerheblich.

(iv) Die durch $a_n = (-1)^n$ gegebene Folge ist nicht konvergent, also divergent. Angenommen, es wäre $\mathbb{R} \ni a = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$, dann ist

$$|a_n - a| = \begin{cases} |1-a|\,, & n \text{ gerade}, \\ |-1-a| = |1+a|\,, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Wählen wir jetzt $\varepsilon = \frac{\max\{\,|1-a|,|1+a|\,\}}{2}$, dann ist $|a_n - a| \geq \varepsilon$ für alle geraden oder alle ungeraden Indizes n. Insbesondere also gilt nicht $|a_n - a| < \varepsilon$ ab irgendeinem $n_0 \in \mathbb{N}$.

Damit existiert offenbar nicht immer ein Grenzwert, aber kann es passieren, dass eine Folge gegen mehrere Werte konvergiert? Nein, denn es gilt

Lemma 2.2.4: Eindeutigkeit des Grenzwerts

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beweis. Es sei $a_n \to a$ für $n \to \infty$ und $a_n \to b$ für $n \to \infty$. Also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon.$$

Es seien jetzt $\varepsilon > 0$ und n_0 und n_1 so gewählt, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ beziehungsweise $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $n \geq \max\{ n_0, n_1 \}$ gilt dann

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und damit $a = b$. $\square$

Beispiel 2.2.5 (Geometrische Folge)**.** Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$, dann ist $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, das heißt $a_n := a^n$, eine Nullfolge.

Beweis. Es sei $b := \frac{1}{|a|}$, dann ist $b > 1$ und aus der Bernoulli-Ungleichung 1.5 folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$|a|^n = \frac{1}{(1 + (b-1))^n} \leq \frac{1}{1 + n(b-1)} \leq \frac{1}{(b-1)n}.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n_0 > \frac{1}{(b-1)\varepsilon}$, zum Beispiel $n_0 = \left\lceil \frac{1}{(b-1)\varepsilon} \right\rceil + 1$. Dann folgt, dass

$$|a|^n \leq \frac{1}{(b-1)n} \leq \frac{1}{(b-1)n_0} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0. \qquad \square$$

Lemma 2.2.6

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Das Lemma liefert eine Möglichkeit, konvergente Folgen gegen eine (ggf. unbestimmte) Konstante abzuschätzen, beziehungsweise falls die Eigenschaft nicht erfüllt ist, Konvergenz auszuschließen.

Beweis. Es sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon := 1$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < 1 \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Es folgt

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

für $n \geq n_0$. Also ist

$$|a_n| \leq c := \max\{ |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a| \} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Bemerkung 2.2.7. Die Umkehrung gilt nicht: Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent, siehe Beispiel 2.2.3 (iv).

Bei der Konvergenz von Folgen kann man sich auf die Betrachtung von Nullfolgen beschränken:

Lemma 2.2.8

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ beziehungsweise $(|a_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Beweis. Folgt sofort aus der Definition des Grenzwerts. □

Wir zeigen noch

Lemma 2.2.9

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, dann ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$, und $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ seien so gewählt, dass

$$|b_n| \leq c \text{ und } |a_n| < \frac{\varepsilon}{c} \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann folgt

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

das heißt $a_n b_n \to 0$ für $n \to \infty$. □

Abgesehen vom offensichtlichen Einsatz dieser Aussage, wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, kann man sich mit diesem Lemma auch detaillierte Abschätzungen ersparen, wenn es gelingt eine zu untersuchende Folge als ein entsprechendes Produkt darzustellen.

Die folgenden Grenzwertsätze sind wesentlich für die weitere Analysis. Auf sie werden wir direkt oder indirekt wieder und wieder zurückgreifen. Außerdem erleichtern sie ganz erheblich die Konvergenzuntersuchungen von Folgen.

Grenzwertsätze 2.2.10

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen und sei $c \in \mathbb{R}$, dann konvergieren auch die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gelten die Grenzwertbeziehungen

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(iv) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$. Setzt man $\frac{a_n}{b_n} := 0$ für $n < N$, dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ und es gilt die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

(v) Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$ (für ein $N \in \mathbb{N}$), dann ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(vi) Die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ der Beträge konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|.$$

Beweis. Es seien $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wir verwenden die Lemmata 2.2.6, 2.2.8 sowie die dann bereits gezeigten Aussagen, ohne dies im Detail auszuführen.

(I) $a_n + b_n \to a + b$: Es gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

(II) $c \cdot a_n \to c \cdot a$: Es folgt

$$|c \cdot a_n - c \cdot a| \leq |c|\,|a_n - a| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

(III) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$: Die konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt, das heißt, es gibt ein $c > 0$ mit $|a_n| \leq c$ und $|b_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Deshalb folgt

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &\leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - a \cdot b| \\ &\leq |a_n - a| \cdot c + |a| \cdot |b_n - b| \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

(IV) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n| \geq \frac{|b|}{2} > 0$ für alle $n \geq N$. Deshalb folgt

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n \cdot b - a \cdot b_n}{b_n \cdot b}\right| &\leq \frac{|a_n \cdot b - a \cdot b| + |a \cdot b - a \cdot b_n|}{\frac{b^2}{2}} \\ &= \frac{2}{|b|}\,|a_n - a| + \frac{2\,|a|}{b^2}\,|b_n - b| \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

(VI) Die Behauptung (vi) ergibt sich aus der Dominanz:

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

□

Bemerkungen 2.2.11. (i) Die Umkehrungen der Aussagen der Grenzwertsätze gelten allesamt nicht. Beispielsweise sind die durch $a_n = (-1)^n$ und $b_n = -a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gegebenen Folgen divergent, aber da $a_n + b_n = 0$, gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.

(ii) Die Menge aller Folgen aus $\mathbb{R}$ bildet mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Grenzwertsätze (Aussagen (i) und (ii)) besagen dann, dass die Menge der konvergenten Folgen einen Unterraum bilden.

Beispiele 2.2.12. (i) Die durch $a_n = \frac{(-1)^n+5}{n}$ gegebene Folge konvergiert gegen 0, da die durch $b_n = (-1)^n + 5$ gegebene Folge beschränkt und $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist.

(ii) Es sei $a_n = \dfrac{3n^2+4n+1}{-n^2+12} = \dfrac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{-n^2\left(1-\frac{12}{n^2}\right)} = -\dfrac{3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{12}{n^2}}$.
Nach den Grenzwertsätzen gilt: $3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \to 3$ und $1 - \frac{12}{n^2} \to 1$. Die erneute Anwendung der Grenzwertsätze liefert dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n+1}{-n^2+12} = -3.$$

Satz 2.2.13: Sandwich-Theorem, Einschließungskriterium

Gegeben seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für $n \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Weiter gelte $a_n \to a$, $c_n \to a$ für $n \to \infty$. Dann gilt $b_n \to a$ für $n \to \infty$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wir erinnern an das im Lemma 2.2.9 behandelte Problem des Produkts einer konvergenten Folge mit einer beliebigen Folge und betrachten folgende Beispiele: Das Produkt der durch $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegebenen Nullfolge mit den durch $b_n = n$, $c_n = n^2$ beziehungsweise $d_n = n \cdot (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ gegebenen unbeschränkten Folgen ist eine konvergente, bestimmt divergente (siehe Definition 2.3.3) beziehungsweise divergente Folge, wie man sofort sieht. Das bedeutet: Über das Produkt einer unbeschränkten Folge mit einer Nullfolge können im Allgemeinen keine Aussagen gemacht werden.

Wir behandeln noch das folgende interessante

Beispiel 2.2.14. Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0.$$

Beweis. Wir können $|a|$ in der Form $|a| = \left(\frac{1}{1+h}\right)^{k+1}$ mit $h > 0$ schreiben. Dann gilt

$$0 \le \left|n^k a^n\right| = \frac{1}{n}\left|n^{k+1}a^n\right| = \frac{1}{n}\frac{n^{k+1}}{(1+h)^{n(k+1)}} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{(1+h)^n}\right)^{k+1}$$
$$\overset{1.5}{\le} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{1+nh}\right)^{k+1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+h}\right)^{k+1} \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{h}\right)^{k+1}.$$

Also folgt die Behauptung mit dem Einschließungskriterium. □

Definition 2.2.15: Landau-Symbole[a]

[a]Edmund Georg Hermann Landau, 1877-1938, dt. Mathematiker

In der Informatik wird häufig die O-Notation (wie "Ordnung") verwendet, die das qualitative Verhalten von Folgen (Rechenaufwand) beschreibt: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Wir sagen

(i) $a_n = O(b_n)$ („a_n ist Groß-O von b_n"), falls die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(ii) $a_n = o(b_n)$ („a_n ist Klein-O von b_n"), falls $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(iii) $a_n \sim b_n$ („a_n ist asymptotisch gleich b_n"), falls $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ für $n \to \infty$.

Die O-Notation zum Verhalten führt also direkt auf die Konvergenzuntersuchung entsprechender Folgen.

Beispiel 2.2.16. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten. Beim Gauß-Verfahren[2] sind im ersten Schritt $(n-1)$ Multiplikatoren zu bestimmen und je $(n-1)^2$ Multiplikationen und Additionen durchzuführen. Analog überlegt man sich, dass im k-ten Schritt $(n-k)$ Multiplikatoren zu bestimmen und $2(n-k)^2$ Rechenoperationen durchzuführen sind. Die Überführung in die (einfache) Zeilenstufenform erfordert also mit 1.5.5 einen Rechenaufwand von

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = \frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} = O(n^3).$$

[2]Johann Carl Friedrich Gauß, 1777-1855, dt. Mathematiker

Die Groß-O-Notation bedeutet: Für große n spielen die anderen Terme keine wesentliche Rolle mehr, so ist der Rechenaufwand für $n = 10^{10}$ in diesem Beispiel $0,67 \cdot 10^{30} = 0,67 \cdot n^3$.

2.3 Monotone Folgen

Es kann mitunter schwierig sein, Kandidaten für den Grenzwert einer Folge zu finden, oder ausreichend sein, die Konvergenz einer Folge zu zeigen – beispielsweise um sie dann mit Lemma 2.2.6 abzuschätzen. Wir betrachten Folgen, deren Glieder auf- oder absteigend angeordnet sind und machen für diese Aussagen über die Konvergenz, ohne den konkreten Grenzwert zu kennen.

Definition 2.3.1

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

(i) *(streng) monoton wachsend* ($(a_n) \uparrow$), $(a_n) \nearrow$, falls

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \underset{(>)}{\geq} a_n.$$

(ii) *(streng) monoton fallend* ($(a_n) \downarrow$), $(a_n) \searrow$, falls

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \underset{(<)}{\leq} a_n.$$

(iii) *(streng) monoton*, falls sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Sind die Folgenglieder $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so kann man die Monotonie nicht nur durch $a_{n+1} - a_n \geq 0$ beziehungsweise ≤ 0 nachweisen, sondern auch durch $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ beziehungsweise ≤ 1 (analog für die strikten Ungleichungen).

Der folgende Satz garantiert die Konvergenz monotoner beschränkter Folgen und ist (zusammen mit der Existenz der natürlichen Zahlen) äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom 1.4.19 (siehe [1, 2.4]).

Satz 2.3.2: Monotonieprinzip

Jede monotone, beschränkte Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Es gilt genauer

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$, falls $(a_n) \nearrow$ und

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$, falls $(a_n) \searrow$.

Beweis. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wach-

send und beschränkt. Dann ist $\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom 1.4.19 existiert $S = \sup \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $S - \varepsilon$ keine obere Schranke. Also existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > S - \varepsilon$.
Da $(a_n) \nearrow$ gilt $\forall n \geq N : a_n > S - \varepsilon$.
Damit folgt $\forall n \geq N : |a_n - S| = S - a_n < \varepsilon$. □

Definition 2.3.3

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* oder *uneigentlich konvergent* gegen $+\infty$, in Zeichen

$$a_n \to +\infty \text{ für } n \to \infty :\Leftrightarrow \forall c > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > c.$$

Analog (mit $c < 0$, $a_n < c$) ist eine gegen $-\infty$ uneigentlich konvergente Folge erklärt.

Damit können wir das Monotonieprinzip allgemeiner formulieren:

Satz 2.3.4: Verallgemeinertes Monotonieprinzip

Jede monotone Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent oder uneigentlich konvergent.

Beispiel 2.3.5. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $a^n = o(n!)$, das heißt $|a|^n$ wächst langsamer als $n!$ für $n \to \infty$. Dazu betrachten wir die durch $b_n := \frac{|a|^n}{n!}$ gegebene Folge. Diese ist wegen $b_n \geq 0$ nach unten beschränkt. Für $a \neq 0$ ist $(b_n) \downarrow$ ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$, denn $b_{n+1} < b_n \Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ und dies ist wegen

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|a|^n} = \frac{|a|}{n+1} < 1$$

für alle $n + 1 > |a|$ erfüllt. Es gilt weiter $\inf \{ b_n \mid n \in \mathbb{N} \} = 0$ und damit $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, denn angenommen, es existiert ein $c > 0$ mit $b_n \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir für $n \geq \max \left\{ 2|a|^2, \frac{1}{c} \right\}$ einen Widerspruch, da (notiert für gerade n)

$$b_n \geq c \Leftrightarrow |a|^n \geq c \cdot n! \geq c \cdot 1 \cdots \frac{n}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdots n > c\frac{n}{2} 2^{\frac{n}{2}} |a|^n \geq |a|^n .$$

Beispiel 2.3.6 (Eulersche Zahl)**.** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen die *Eulersche Zahl*[3] e (Definition). Wir zeigen dafür: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt.

[3] Leonhard Euler, 1707-1783, schweiz. Mathematiker

(i) Mit der Bernoullischen Ungleichung 1.5 folgt, wegen $-\frac{1}{(n+1)^2} > -1$, dass

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n}\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&\geq \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Also $(a_n) \nearrow$.

(ii) Die Beschränktheit erhalten wir durch

$$\begin{aligned}
0 \leq a_n \leq a_{2n} &= \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \leq \frac{1}{\left(\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\right)^2} \leq \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.
\end{aligned}$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und wir setzen $e := \lim_{n\to\infty} a_n$.

Satz 2.3.7

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ und es gilt $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Der folgende Satz liefert ein weiteres Vollständigkeitsprinzip (vergleiche [1, 2.4]) und beispielsweise eine Methode, um die Voraussetzungen für das Einschließungskriterium 2.2.13 zu erfüllen.

Satz 2.3.8: Intervallschachtelungsprinzip

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$. Weiter gelte $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$ und $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dann konvergieren beide Folgen und zwar gegen den selben Grenzwert.

Beweis. Die Konvergenz folgt aus dem Monotonieprinzip 2.3.2 und da die Folge $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, stimmen die Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überein. □

2.4 Teilfolgen und Häufungswerte

Beispiel 2.4.1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent: Für gerade n ist $a_n = 1$, für ungerade n ist $a_n = -1$. Um die Folge auf die Situation wie im vorherigen Abschnitt zurückzuführen, könnte man die Folge „aufteilen" in zwei konvergente näher zu definierende „Teilfolgen" $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-1)_{n\in\mathbb{N}}$. Dafür würde man die neuen Folgen über die Folgenglieder mit geraden beziehungsweise ungeraden Indizes definieren.

Im Allgemeinen wird man nicht erwarten können, dass eine solche "Aufteilung" in Folgenglieder mit geradem oder ungeradem Index stets konvergente Folgen ergibt. Auch für eine beliebig wählbare "Aufteilung" einer Folge muss es nicht zwangsläufig so sein, dass mindestens eine der entstehenden Folgen konvergiert. Um dies besser untersuchen zu können, präzisieren wir zunächst die "Aufteilung" von Folgen:

Definition 2.4.2: Teilfolge

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion, das heißt, $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) < \varphi(n+1)$, dann heißt die Folge $\left(a_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Üblicherweise setzt man $n_k := \varphi(k)$ und schreibt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Die strenge Monotonie von φ sorgt dafür, dass Folgenglieder mit niedrigerem Index etwa bei Konvergenzbetrachtungen durch Wahl eines hinreichend großen $n_k = \varphi(k)$ ausgeschlossen werden können. Insbesondere gilt $\varphi(k) \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beispiele 2.4.3. (i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setze $\varphi(n) = 2n$, dann ist $a_{\varphi(n)} = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, die Teilfolge ist also konstant 1. Setzt man $\tilde{\varphi}(n) = 2n+1$ für $n \in \mathbb{N}_0$, so ist $a_{\tilde{\varphi}(n)} = a_{2n+1} = -1$.

(ii) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b_n = 2^n$, ist eine Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$. Um $\varphi(k)$ zu bestimmen, schreiben wir $b_k = a_{\varphi(k)}$, also $2^k = 2\varphi(k)$, daher $\varphi(k) = 2^{k-1}$.

(iii) Oft verwendet man die Folge der geraden $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Folge der ungeraden Zahlen $(2n+1)_{n\in\mathbb{N}_0} = (2n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ als Teilfolgen der natürlichen Zahlen.

Lemma 2.4.4: Teilfolgen konvergenter Folgen

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $a \in \mathbb{R}$, dann konvergiert jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert a.

Beweis. Dies ist klar, da der Grenzwert einer Folge nach Lemma 2.2.4 eindeutig bestimmt ist. □

Definition 2.4.5: Häufungswert

$a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungswert* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$, das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Beispiele 2.4.6. (i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$, dann ist nach Lemma 2.4.4 der Grenzwert a der einzige Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

besitzt genau die beiden Häufungswerte 0 und 1. Dass 0 und 1 Häufungswerte sind, ist klar (analog zu Beispiel 2.4.3 (i)) und kein $a \in \mathbb{R} \setminus \{\,0, 1\,\}$ kann ein weiterer Häufungswert sein, denn für $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{\, |a-1|, |a|\,\} > 0$ ist $|a_n - a| \geq 2\varepsilon > \varepsilon$.

(iii) Die im Beweis von Satz 1.3.13 skizzierte Abzählung von $\mathbb{Q}$ liefert eine Folge, die alle reellen Zahlen als Häufungswerte besitzt.

Satz 2.4.7: Weierstraßsches[a] Auswahlprinzip, Bolzano[b]-Weierstraß

[a]Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815-1897, dt. Mathematiker
[b]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, 1781-1848, böhm. Mathematiker

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt einen Häufungswert, das heißt, jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, das heißt, es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass

$$|a_n| \leq c < +\infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

Es sei nun $c > 0$ eine Schranke für die Folge $(|a_n|)$. Wir setzen $I_0 = [c_0, d_0] := [-c, c]$, betrachten die Intervalle

$$I_1^{(1)} = \left[c_0, \frac{c_0 + d_0}{2}\right], \quad I_1^{(2)} = \left[\frac{c_0 + d_0}{2}, d_0\right]$$

und unterscheiden zwei Fälle: Wenn es eine Teilfolge $(a_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $a_{n_\ell} \in I_1^{(1)}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$, dann setzen wir

$$I_1 := I_1^{(1)}, \ a_\ell^{(1)} := a_{n_\ell} \text{ für } \ell \in \mathbb{N}.$$

Sonst gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \notin I_1^{(1)}$ für alle $n \geq N$. Dann ist $a_n \in I_1^{(2)}$ für alle $n \geq N$ und wir setzen

$$I_1 := I_1^{(2)}, \ a_\ell^{(1)} := a_{N+\ell-1} \text{ für } \ell \in \mathbb{N}.$$

Dieses Verfahren wird auf I_1 angewandt und der Prozess iteriert.

Auf diese Weise erhalten wir über die Grenzen der Intervalle $I_k = [c_k, d_k]$ zwei Folgen mit $d_k - c_k = \frac{d_0 - c_0}{2^k}$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(a_\ell^{(k)})_{\ell\in\mathbb{N}}$ der Folge $(a_\ell^{(k-1)})_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_\ell^{(k)} \in I_k \text{ für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Man setze $a'_k := a_k^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a'_k \in I_k$, also $c_k \leq a'_k \leq d_k$ für alle k, und aus dem Intervallschachtelungsprinzip 2.3.8 folgt die Konvergenz der Folge $(a'_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Um die folgende Definition 2.4.10 einfacher formulieren zu können, vereinbaren wir folgende

Definition 2.4.8: Ausdrucksweisen

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben, dann sagen wir

(i) „$A(n)$ gilt unendlich oft“, falls eine bijektive Abbildung von der Menge $\{ n \in \mathbb{N} \mid A(n) \}$ auf $\mathbb{N}$ existiert, das heißt $A(n)$ ist für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(ii) „$A(n)$ gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$“, falls ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $A(n)$ für alle $n \geq N$ wahr ist. Eine andere Formulierung ist “$A(n)$ gilt bis auf endlich viele Ausnahmen”.

Beispiele 2.4.9. (i) Die Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ kann man damit dann auch so beschreiben: Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $a_n = 1$ unendlich oft (und $a_n = -1$ unendlich oft).

Definition 2.4.10: Limes superior, Limes inferior

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und H die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann heißt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \sup H = \sup\{\, x \in \mathbb{R} \mid a_n > x \text{ unendlich oft} \,\}$$

der *Limes superior* (größter Häufungswert) von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \inf H = \inf\{\, x \in \mathbb{R} \mid a_n < x \text{ unendlich oft} \,\}$$

der *Limes inferior* (kleinster Häufungswert) von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung 2.4.11. Für jede reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren stets Limes superior und Limes inferior, allerdings müssen sie für unbeschränkte Folgen nicht reell sein, da dann $\pm\infty$ als Grenzwerte von Teilfolgen ebenfalls möglich sind.

Die Beschreibung über Suprema und Infima ist unhandlich, wir führen daher folgende Charakterisierung an, mit der man einfacher arbeiten kann.

Lemma 2.4.12: Charakterisierung von Limes superior und Limes inferior

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $s = \limsup_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt

   (a) $a_n < s + \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und
   (b) $a_n > s - \varepsilon$ unendlich oft.

(ii) $s = \liminf_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt

   (a) $a_n > s - \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und
   (b) $a_n < s + \varepsilon$ unendlich oft.

Beweis. Wir definieren $M = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a_n > x \text{ unendlich oft} \,\}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} a_n = s &\Leftrightarrow s = \sup M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists b \in M : b > s - \varepsilon \wedge s + \varepsilon \notin M \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : a_n < s + \varepsilon \text{ für fast alle } n \wedge a_n > s - \varepsilon \text{ unendlich oft.}\end{aligned}$$

Die Aussage über den Limes inferior folgt analog. $\square$

Lemma 2.4.13

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ und H sei die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt

(i) $s = \limsup_{n\to\infty} a_n \Rightarrow s = \max H$.

(ii) $s = \liminf_{n\to\infty} a_n \Rightarrow s = \min H$.

Beweis. (I) Es sei $s = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

(a) Wir zeigen, dass s Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: Nach Lemma 2.4.12 können wir eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so wählen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$s - \frac{1}{k} < a_{n_k} < s + \frac{1}{k}.$$

Dann ist $\forall k \in \mathbb{N} : |a_{n_k} - s| < \frac{1}{k}$ und es folgt $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = s$.

(b) Wir zeigen $\forall \varepsilon > 0 : s + \varepsilon$ ist kein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Zunächst existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n < s + \frac{\varepsilon}{2}$, nach Definition von $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - (s+\varepsilon)| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daher kann keine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, die gegen $s + \varepsilon$ konvergiert.

(II) Die Aussage folgt analog zur ersten. □

Bemerkungen 2.4.14. (i) Aus der Definition eines Häufungswertes folgt mit diesem Lemma, dass es Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen den Limes superior beziehungsweise den Limes inferior der Folge konvergieren, das heißt $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n$ beziehungsweise $\lim_{\ell\to\infty} a_{n_\ell} = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

(ii) Für eine beliebige Menge $A \neq \emptyset$ lassen sich Supremum und Infimum von A über Folgen charakterisieren. Insbesondere existieren stets Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \inf A \wedge \lim_{n\to\infty} S_n = \sup A.$$

Diese Folgen konstruiert man leicht mit Hilfe der Definitionen, indem man (im endlichen Fall) für jedes $\varepsilon = \frac{1}{n}$ etwa ein $s_n \in A$ mit $|\inf A - s_n| < \varepsilon$ wählt. Ist dann $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, dann gilt $|s_n - \inf A| < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$, falls $n \geq n_0(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$.

Beispiele 2.4.15. (i) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Häufungswerte $-1, 1$ und daher Limes superior 1 und den Limes inferior -1. Geeignete Teilfolgen sind die geraden beziehungsweise ungeraden Zahlen.

(ii) Die Folge $\left(n - 4\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nimmt die Werte 0, 1, 2, 3 jeweils unendlich oft an. Daher ist der Limes superior der Folge 3 und der Limes inferior der Folge ist 0.

Lemma 2.4.16

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, dann gilt

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow$ es existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \to +\infty$ für $k \to \infty$.

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

(iv) Analoge Aussagen gelten für $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Beweis. Es sei $M = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a_n > x \text{ unendlich oft} \,\}$.

(I) „$\Rightarrow$“: Es gelte $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup M = +\infty$, dann können wir eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wählen, so dass

$$\forall k \in \mathbb{N} : n_{k+1} > n_k \wedge a_{n_k} \geq k.$$

Nach Konstruktion ist dann $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.

„$\Leftarrow$“: Es sei $(a_{n_k})_{k\to\infty}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$, dann gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : k \geq n_0 \Rightarrow a_{n_k} > x.$$

Daraus folgt $\mathbb{R} \subset M$ und demnach $\sup M = +\infty = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

(II) Es gilt

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty &\Leftrightarrow \sup M = -\infty \Leftrightarrow M = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.\end{aligned}$$

(III) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Angenommen, $\limsup_{n\to\infty} a_n \notin \mathbb{R}$, dann ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. Nach den ersten beiden Teilen existiert dann eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$ oder es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, in beiden Fällen also ein Widerspruch zur Beschränktheit der Folge. $\square$

Bei zwei gegebenen Mengen A, B können wir $A = B$ über $A \subset B$ und $B \subset A$ zeigen. Das folgende Lemma liefert ein ähnliches Hilfsmittel für Folgen. Insbesondere ist es nützlich, weil man auch durch Abschätzungen die (Un-) Gleichheit von Limes superior und Limes inferior und damit die Konvergenz (Divergenz) der betrachteten Folge erhalten kann.

Lemma 2.4.17: $\liminf = \limsup$-**Kriterium**

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent oder bestimmt divergent, wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ gilt.

Beweis. (I) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq x.$$

Das bedeutet aber $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

(II) Ähnlich gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

(III) Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 2.2.6 beschränkt. Weiter gilt: Es existieren Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ und $\lim_{\ell\to\infty} a_{n_\ell} = \liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Da alle Teilfolgen einer konvergenten Folge gegen den selben Grenzwert konvergieren, ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

(IV) Sei nun umgekehrt $a \in \mathbb{R}$ mit $a = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt mit Lemma 2.4.12

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow a_n < a + \varepsilon \\ \wedge\ &\forall \varepsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Rightarrow a_n > a - \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \max\{\, n_1, n_2 \,\} \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \qquad \square$$

Wir haben verschiedene Hilfsmittel für die Untersuchung von Folgen erarbeitet:

(i) Ist der Grenzwert bekannt beziehungsweise wird er vermutet, so kann man ihn über die Definition und ggf. die Grenzwertsätze nachrechnen.

(ii) Ist der Grenzwert nicht bekannt, kann man ihn vielleicht über die Grenzwertsätze, über Monotonie oder die Häufungswerte bestimmen.

(iii) Um festzustellen, ob eine Folge konvergent ist, betrachten wir die Abstände der Folgenglieder. Da bei einer gegen a konvergenten Folge, alle Glieder ab einem n_0 in einem Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen, ist ihr Abstand durch $a + \varepsilon - (a - \varepsilon) = 2\varepsilon$ beschränkt (vergleiche Abbildung 2.2).

Dies motiviert

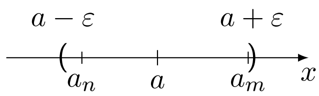

Abbildung 2.2: Zur Motivation des Begriffs Cauchy-Folge, $n, m \geq n_0(\varepsilon)$.

Definition 2.4.18: Cauchy-Folge[a]

[a]Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857, frz. Mathematiker

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge* :⇔

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Beispiel 2.4.19. Die Folge 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; ...→ $\sqrt{2}$ ist eine Cauchy-Folge: Das n-te Folgeglied approximiert $\sqrt{2}$ auf n Nachkommastellen. Für $n \leq m$ ist dann $|a_n - a_m| < 10^{-n+1}$ und damit für genügend großes n_0 kleiner als ein beliebiges $\varepsilon > 0$.

Diese Folge ist ein Beispiel für eine Folge, die ganz in $\mathbb{Q}$ liegt, aber keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ besitzt. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ kann so ein Fall in $\mathbb{R}$ nicht auftreten:

Satz 2.4.20: Cauchy-Kriterium

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge, dann gilt

$$\begin{aligned} &\exists a \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} a_n = a \\ &\qquad \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Das heißt: Eine Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. „⇒“: Es sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann gilt

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Also folgt durch Wahl von $n_1 = n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$": Wir zeigen zunächst, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Sei dafür $N = n_0(1)$ so gewählt, dass für alle $n \geq N$ $|a_n - a_N| \leq 1$ gilt. Wegen $|a_n| - |a_N| \leq |a_n - a_N|$ ist dann $|a_n| \leq 1 + |a_N|$ für alle $n \geq N$ und insgesamt

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq \max\{\, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N| \,\}.$$

Wir zeigen nun die Konvergenz der Folge. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 2.4.7 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : k \geq n_1 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon \\
&\qquad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0, n_1 \forall k \in \mathbb{N} : k \geq \max\{\, n_0, n_1 \,\} \\
&\qquad\qquad \Rightarrow |a_k - a| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Bemerkungen 2.4.21. (i) Das Cauchy-Kriterium ist deshalb wichtig, da es gestattet eine Folge auf Konvergenz zu untersuchen, ohne ihren Grenzwert zu kennen. Beispielsweise ist die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Das Cauchy-Kriterium lässt sich anders als das Supremumsprinzip zur Definition von Vollständigkeit in anderen Zusammenhängen (zum Beispiel in $\mathbb{C}$ oder Vektorräumen mit einem Abstandsbegriff) heranziehen. Eine Menge heißt dann vollständig, wenn jede Cauchy-Folge aus Elementen der Menge einen Grenzwert in der Menge besitzt. Vektorräume mit einem Skalarprodukt, die bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm vollständig sind, heißen *Hilberträume*.

2.5 Reihen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Folgen mit einer speziellen Struktur.

Definition 2.5.1: Reihe, Partialsumme

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Die durch $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ definierte Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *unendliche Reihe* und wird mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. s_n heißt die n*-te Partialsumme* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegen ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, das heißt $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, dann schreibt man $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Damit hat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ einmal die Bedeutung als Partialsummenfolge und einmal als Zahl, falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beispiele 2.5.2. (i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ ist konvergent, da $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ monoton wachsend und beschränkt ist:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \le 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$$
$$= 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \le 2.$$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, die *harmonische Reihe*, ist nach Bemerkung 2.4.21 (i) divergent.

(iii) Für $|a| < 1$ erhalten wir mit der geometrischen Summenformel 1.5.8 und Beispiel 2.2.5 die Formel für die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

(iv) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} - a_k) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_1) = a - a_1.$$

(v) Am obigen Beispiel sieht man auch, dass umgekehrt jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_1 = a_1$ und $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$ für $n > 1$ eine Darstellung als Reihe besitzt.

Unsere Aussagen über Folgen lassen sich unmittelbar auf Reihen übertragen:

Lemma 2.5.3

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe, dann gilt

(i) Cauchy-Kriterium für Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \ge m \ge n_0 : \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

(ii) Notwendiges Konvergenzkriterium: Wenn $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. (I) Folgt mit dem Cauchy-Kriterium, Satz 2.4.20.

(II) Folgt aus dem ersten Teil mit $n = m + 1$. □

Beispiele 2.5.4. (i) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ für $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| \geq 1$ sind nach Lemma 2.5.3 (ii) divergent.

(ii) Die Umkehrung von 2.5.3 (ii) gilt nicht: Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, aber $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Man kann das notwendige Kriterium also nur verwenden, um die Divergenz einer Reihe zu zeigen.

(iii) Man kann Reihen auch mit komplexen Summanden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ betrachten. Ist $a_n = b_n + ic_n$, $b_n, c_n \in \mathbb{R}$, für $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergieren und nach den Grenzwertsätzen gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k + i\sum_{k=1}^{\infty} c_k$. Daher beschränken wir uns auf die Betrachtung von Reihen mit reellen Folgen.

Lemma 2.5.5

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen, dann gilt:

(i) wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergieren, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

(ii) wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann konvergiert auch die *Restreihe* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Beweis. (I) Folgt direkt aus den Grenzwertsätzen.

(II) Es sei $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dann ist

$$R_n = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\ell} a_k = \lim_{\ell\to\infty}(s_\ell - s_n) = s - s_n.$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(s - s_n) = s - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0. \qquad \square$$

Lemma 2.5.6

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer Zahlen, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ beschränkt ist.

Beweis. Da $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $s_n \nearrow$. Also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. $\square$

Beispiel 2.5.7. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ genau dann konvergent, wenn $\alpha > 1$.

Beweis. Wir betrachten zunächst $\alpha \leq 1$, dann ist $k^\alpha \leq k$ und daher $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

also folgt die Divergenz mit dem Cauchy-Kriterium.

Für den Fall $\alpha > 1$ machen wir folgende Vorüberlegung: Es gilt

$$2^{n+1} = (1+1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \geq \binom{n+1}{1} = n+1.$$

Damit haben wir $n < 2^{n+1} - 1$ und folglich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\leq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{1}{2^{\alpha\ell}} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{2^\ell}{2^{\alpha\ell}} = \sum_{\ell=0}^{n} \left(2^{1-\alpha}\right)^\ell \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^\ell = \frac{1}{1-2^{1-\alpha}},\end{aligned}$$

da $\left|2^{1-\alpha}\right| < 1$. Damit sind die Partialsummen beschränkt und die Behauptung folgt mit Lemma 2.5.6. □

Das obige Beispiel liefert, dass etwa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent sind. Was ist aber beispielsweise mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ("alternierende harmonische Reihe")? Für die Untersuchung von Reihen dieser Gestalt kann man den folgenden Satz verwenden:

Satz 2.5.8: Leibniz-Kriterium[a]

[a]Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716, dt. Mathematiker

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die *alternierende Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

Beweis. Mit der Monotonie und Nicht-Negativität von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt für $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}s_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{2n+1} \\ &= -a_1 + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}_{\geq 0}\end{aligned}$$

monoton wachsend und wegen

$$s_{2n+1} = \underbrace{-a_1 + a_2}_{\leq 0} + \underbrace{-a_3 + a_4}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{-a_{2n-1} + a_{2n}}_{\leq 0} - a_{2n+1} \leq 0$$

auch (nach oben) beschränkt und daher konvergent ist. Weiter gilt

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = s_{2n+1} + a_{2n+1}.$$

Aus den Grenzwertsätzen folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

und daher folgt die Existenz von $\lim_{n\to\infty} s_n$. □

Damit ist also beispielsweise $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ genau dann konvergent, wenn $\alpha > 0$ ist.

Definition 2.5.9: Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Beispielsweise ist nach unseren obigen Überlegungen die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe divergiert. In dieser Situation sagt man auch, dass die Reihe *bedingt konvergiert*. Umgekehrt gilt aber

Lemma 2.5.10

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Das ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m \geq n_0 : \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung für Summen

$$\forall n \geq m \geq n_0 : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

und damit die Konvergenz der Reihe mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums. □

Wir können die Konvergenz oder Divergenz von Reihen durch Vergleich mit Reihen zeigen, von denen das Konvergenzverhalten bereits bekannt ist. Gelingt eine entsprechende Abschätzung, so kann man sich dadurch viele Mühen ersparen.

Lemma 2.5.11: Majorantenkriterium

Es seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit $\forall k \in \mathbb{N} b_k \geq 0$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und existiert ein $c > 0$, so dass $\forall k \in \mathbb{N}\, |a_k| \leq c \cdot b_k$, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis. Aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : n \geq m \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=m}^{n} b_k < \varepsilon.$$

Damit folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m \geq n_0 : \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c b_k < c\varepsilon. \qquad \square$$

Bemerkungen 2.5.12. (i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot b_k$ heißt *Majorante* für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(ii) Es genügt, wenn $|a_k| \leq c b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) Das Majorantenkriterium eignet sich, um die (absolute) Konvergenz von Reihen mit Hilfe von (bekannten) konvergenten Reihen zu zeigen.

(iv) Existiert ein $c > 0$ mit $\forall_{k \in \mathbb{N}} : a_k \geq c b_k \geq 0$ und divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (*Minorantenkriterium*, $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot b_k$ heißt *Minorante*).

(v) Das Minorantenkriterium eignet sich, um mit Hilfe von bekannten divergenten Reihen die Divergenz von Reihen zu zeigen.

(vi) Man mache sich klar, dass eine divergente Majorante beziehungsweise eine konvergente Minorante nutzlos sind, um Konvergenz beziehungsweise Divergenz von Reihen zu zeigen.

Beispiele 2.5.13. (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2+2}$ konvergiert absolut und für alle $x \in \mathbb{R}$, da $\left|\frac{\sin(kx)}{k^2+2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^2+4k+1}$ ist divergent, denn für $k \geq 2$ ist

$$\frac{k-1}{k^2+4k+1} \geq \frac{k-\frac{k}{2}}{k^2+4k^2+k^2} = \frac{\frac{k}{2}}{6k^2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k}.$$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^3+4k+1}$ ist absolut konvergent, denn

$$\frac{k-1}{k^3+4k+1} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

Durch den Vergleich mit einer geeignete geometrischen Reihe erhalten wir die folgenden Aussagen.

Lemma 2.5.14: Wurzel- und Quotientenkriterium

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Es gilt

(i) Wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ist, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent (*Wurzelkriterium*).

(ii) Wenn $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ist, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent (*Quotientenkriterium*).

Beweis. (I) Wir wählen ein q mit $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, beispielsweise $q = \frac{\alpha+1}{2}$. Nach Lemma 2.4.12 existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq N$: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ gilt. Damit folgt $\forall n \geq N : |a_n| \leq q^n$. Mit dem Majorantenkriterium 2.5.11 folgt die Behauptung, da $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konvergent ist.

(II) Wir wählen ein q mit $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$. Damit ist

$$|a_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| |a_N| \leq q^{n-N} |a_N| .$$

Die Behauptung folgt also wiederum mit dem Majorantenkriterium. □

Bemerkungen 2.5.15. (i) Ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ somit divergent.

(ii) In den Fällen $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ und $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Dies sieht man etwa an

  (a) der divergenten harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, diesen Grenzwert zeigen wir in Lemma 2.7.9, und

  (b) der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 2n - 1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{2n+1}{(n+1)^2} \to 1$$

  für $n \to \infty$.

(iii) Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

(iv) Es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .$$

Das heißt, das Quotientenkriterium ist gröber als das Wurzelkriterium. Beispielsweise liefert das Quotiententenkriterium für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2-(-1)^k}{2^k}$ keine Aussage, mit dem Wurzelkriterium folgt aber die Konvergenz, wie man sich leicht selbst überlegt.

Beispiele 2.5.16. (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ konvergiert, denn mit $a_n = \frac{n}{3^n}$ ist

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Reihen dieser Form werden wir in Abschnitt 2.7 genauer betrachten.

Bei (endlichen) Summen ist die Reihenfolge der Glieder egal. Bei Reihen muss man aufpassen. Eine Veränderung der Summationsreihenfolge erreichen wir formal mit folgender

Definition 2.5.17

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt *Umordnung* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\forall k \in \mathbb{N} : b_k = a_{\varphi(k)}$ existiert.

Beispiel 2.5.18. Bekannt ist, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ *bedingt konvergiert*, das heißt, sie ist konvergent aber nicht absolut konvergent, der Wert der Reihe sei s. Wir betrachten die Addition von

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots = s$$

und

$$\frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{4} + \qquad \frac{1}{6} \qquad - \frac{1}{8} + \qquad \frac{1}{10} + \cdots = \frac{s}{2}$$

und erhalten

$$1 \qquad + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \qquad + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \qquad + \cdots = \frac{3}{2}s.$$

Diese Reihe ist aber eine Umordnung der ursprünglichen Reihe, das heißt durch Umordnung der Reihe haben wir $0 \neq s = \frac{3}{2}s$ erhalten.

Eine Aussage, unter welchen Umständen man die Reihenfolge der Summanden einer Reihe ändern darf, liefert der

Satz 2.5.19: Umordnungssatz

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine in $\mathbb{R}$ absolut konvergente Reihe, dann konvergiert jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ der Reihe absolut und es gilt die Gleichheit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Bemerkungen 2.5.20. (i) Es gilt sogar die *unbedingte Konvergenz*: Eine Reihe konvergiert genau dann absolut, wenn alle ihre Umordnungen gegen den selben Grenzwert konvergieren.

(ii) Eine Reihe konvergiert nach dem Umordnungsatz genau dann absolut, wenn eine ihrer Umordnungen absolut konvergiert. In diesem Fall konvergieren alle Umordnungen absolut und zwar gegen den selben Grenzwert.

(iii) Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe. Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, dann existiert zu jedem $x \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, die gegen x konvergiert beziehungsweise bestimmt divergiert (*Riemannscher Umordnungssatz*[4]).

Wir wenden uns der Fragestellung zu, wie man Reihen miteinander multiplizieren kann. Für endliche Summen ist das mit den Rechenregeln in den reellen Zahlen klar und auch das Produkt einer endlichen Summe und einer Reihe ist mit der Linearität aus Lemma 2.5.5 kein Problem:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_k b_i, \quad \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen, dann ist das Produkt eine Summe von Produkten von $a_k b_i$ $(k, i \in \mathbb{N}_0)$ und sollte sich daher wieder als Reihe darstellen lassen. Wir überlegen uns folgendes Vorgehen für die Summation dieser Produkte:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) &= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \cdots)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots)\\ &= a_0b_0 + a_0b_1 + a_0b_2 + a_0b_3 + \cdots\\ &\quad + a_1b_0 + a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + \cdots\\ &\quad + a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + \cdots\\ &\quad + a_3b_0 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + \cdots .\end{aligned}$$

Addieren wir hier zum Beispiel zeilen- oder spaltenweise, haben wir nichts gewonnen, da etwa $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sum_{i=0}^{\infty} b_i)$ keinen Erkenntnisgewinn über das Konvergenzverhalten oder weitere Eigenschaften des Produkts liefert. Wir addieren

[4] Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866, dt. Mathematiker

stattdessen wie durch die Farbgebung angedeutet über die Diagonalen (ähnliche Idee wie beim Cantorschen Diagonalverfahren im Beweis von 1.3.13) und erhalten

Satz 2.5.21: Cauchy-Produkt

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen und für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j},$$

dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |c_k| &= \sum_{k=0}^{n} \left|\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right| \le \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} |a_j b_{k-j}| \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} |a_j|\,|b_{k-j}| = \sum_{j=0}^{n} |a_j| \sum_{k=j}^{n} |b_{k-j}| \\
&= \sum_{j=0}^{n} |a_j| \sum_{k=0}^{n-j} |b_k| \le \sum_{j=0}^{n} |a_j| \sum_{k=0}^{n} |b_k| \\
&\le \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right) < +\infty.
\end{aligned}$$

Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < +\infty$, das heißt, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ist absolut konvergent.

Es sei nun $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $b = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, $A = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $B = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{2n} c_k - ab\right| &= \left|\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} - ab\right| = \left|\sum_{j=0}^{2n}\sum_{k=j}^{2n} a_j b_{k-j} - ab\right| \\
&\overset{\ell=k-j}{=} \left|\sum_{j=0}^{2n}\sum_{\ell=0}^{2n-j} a_j b_\ell - ab\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{2n}\sum_{\ell=0}^{2n-j} a_j b_\ell - \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\right)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_{j=0}^{2n} a_j \sum_{\ell=0}^{2n-j} b_\ell - \sum_{j=0}^{2n} a_j \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell - \sum_{j=2n+1}^{\infty} a_j \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \right| \\
&= \left| - \sum_{j=0}^{2n} a_j \sum_{\ell=2n-j+1}^{\infty} b_\ell - \sum_{j=2n+1}^{\infty} a_j \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=0}^{2n} a_j \sum_{\ell=2n-j+1}^{\infty} b_\ell \right| + B \left| \sum_{j=2n+1}^{\infty} a_j \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{2n} |a_j| \sum_{\ell=2n-j+1}^{\infty} |b_\ell| + B \sum_{j=2n+1}^{\infty} |a_j| \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{n} |a_j|}_{\leq A} \underbrace{\sum_{\ell=2n-j+1}^{\infty} |b_\ell|}_{\leq \sum_{\ell=n+1}^{\infty} |b_\ell|} + \underbrace{\sum_{j=n+1}^{2n} |a_j|}_{\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|} \underbrace{\sum_{\ell=2n-j+1}^{\infty} |b_\ell|}_{\leq B} \\
&\quad + B \underbrace{\sum_{j=2n+1}^{\infty} |a_j|}_{\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|} \\
&\leq A \sum_{\ell=n+1}^{\infty} |b_\ell| + 2B \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| \to 0 \text{ für } n \to \infty,
\end{aligned}
$$

wegen der absoluten Konvergenz der Reihen, vergleiche Lemma 2.5.5. Also folgt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = ab$. □

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, insbesondere gibt es divergente Reihen, deren formales Cauchy-Produkt konvergiert. Die Voraussetzungen können aber dahingehend abgeschwächt werden, dass nur eine der Reihen absolut konvergent und die andere konvergent ist (Satz von Mertens, siehe etwa [1, 3.8]).

2.6 Dezimalbruchentwicklung

Wir lassen im Folgenden ein paar Beweise aus, man findet diese Aussagen etwa in [1, 2.2] bewiesen. Uns geht es hier wie angekündigt (Beispiel 1.3.12) darum, zu zeigen, dass die reellen Zahlen nicht abzählbar, also überabzählbar sind. Außerdem wird die bekannte Dezimalbruchdarstellung der reellen Zahlen in unsere bisherigen Überlegungen eingebettet.

Definition 2.6.1

Es sei $(d_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $d_0 \in \mathbb{Z}$ und $d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für $k \in \mathbb{N}$, dann heißt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$$a_n := d_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k} = d_0, d_1 d_2 \dots d_n$$

eine *Dezimalbruchentwicklung*. Sie heißt *eigentlich*, falls keine Periode 9 vorliegt, das heißt, es gibt kein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_k = 9$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$.

Bemerkung 2.6.2. In der bekannten Schreibweise im Dezimalsystem stellen wir Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ als $\operatorname{sgn} a \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k$ mit $a_k \in \{0, \dots, 9\}$, $k = 0 \dots, n$, dar. Zum Beispiel $7234 = 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$. Analog erhält man für eine beliebige Zahl $g \in \mathbb{N}$, $g > 1$, eine Darstellung $a = \operatorname{sgn} a \sum_{k=0}^{\tilde{n}} b_k \cdot g^k$ mit $b_k \in \{0, \dots g-1\}$, $k = 0, \dots, \tilde{n}$. Mit dieser Darstellung kann man dann analog zur obigen Definition eine entsprechende Entwicklung als Bruch erhalten:

$$a_n = b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{g^k}.$$

Beispielsweise ist die Binärbruchentwicklung von $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots$$

Die folgenden Aussagen kann man dann auch über diese beziehungsweise in dieser Darstellung zeigen.

Lemma und Definition 2.6.3

Jede Dezimalbruchentwicklung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist konvergent. Den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ bezeichnen wir mit

$$a = d_0, d_1 d_2 \dots .$$

Satz 2.6.4

Für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine eigentliche Dezimalbruchentwicklung $a = d_0, d_1 d_2 \dots$.

Satz 2.6.5

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar, also überabzählbar.

Beweis (Cantorsches Diagonalverfahren). Es genügt zu zeigen, dass eine Teilmenge Menge von $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist. Wir betrachten dazu das Intervall $[0,1)$. Nehmen wir an, dass $[0,1)$ abzählbar ist, dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $[0,1) = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Es sei

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{d_{nk}}{10^k}\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

die eigentliche Dezimalbruchentwicklung von a_n für $n \in \mathbb{N}$, das heißt $a_n = 0{,}d_{n1}d_{n2}d_{n3}\ldots$. Wir betrachten das Schema

$$\begin{matrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \cdots \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & \cdots \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & \cdots \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$d_k := \begin{cases} 0 & \text{falls } d_{kk} \neq 0 \\ 1 & \text{falls } d_{kk} = 0. \end{cases}$$

Dann ist $d_k \neq d_{kk}$, also

$$a := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{d_k}{10^k} = 0{,}d_1d_2d_3\ldots \neq a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

weil $0{,}d_1d_2d_3\ldots$ eine eigentliche Dezimalbruchentwicklung ist. Damit ist $a \in [0,1)$ und es gilt $a \neq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was aber im Widerspruch zur Annahme steht, dass $[0,1) = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ ist. Also ist diese Annahme falsch und die Menge $[0,1)$ ist deshalb nicht abzählbar. □

2.7 Potenzreihen

Potenzreihen sind für die Darstellung von einigen wichtigen Funktionen unerlässlich, in einigen Situationen kann man Probleme durch einen Ansatz mit Potenzreihen lösen und außerdem liefert die im Kapitel über Differenzialrechnung noch zu betrachtende Taylor-Entwicklung eine Potenzreihe.

Definition 2.7.1

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *Potenzreihe* mit *Entwicklungspunkt* x_0 und *Koeffizienten* a_k, $k \in \mathbb{N}_0$.

Beispiele 2.7.2. (i) Die geometrische Reihe können wir als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auffassen: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Sie ist für alle $x \in (-1, 1)$ definiert.

(ii) Eine wichtige Potenzreihe ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (siehe 2.7.12). Sie ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

(iii) Ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und $\forall k > n : a_k = 0$.

Satz 2.7.3: Cauchy-Hadamard[a]

[a] Jacques Salomon Hadamard, 1865-1963, frz. Mathematiker

Es seien $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe, $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und $R = \frac{1}{\alpha}$, wobei wir $R = 0$ für $\alpha = +\infty$ und $R = +\infty$ für $\alpha = 0$ setzen. Dann konvergiert $P(x)$ absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < R$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > R$.

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall $R \in (0, +\infty)$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < R$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R} < 1$$

und daher konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ nach dem Wurzelkriterium, Lemma 2.5.14, absolut. Für $|x - x_0| > R$ ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R} > 1$$

und nach Lemma 2.5.14 ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ divergent.

Für $R = 0$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$$

für $x \neq x_0$, die Reihe divergiert für $x \neq x_0$ also nach Lemma 2.5.14.

Für $R = +\infty$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, also konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium. □

Bemerkungen und Beispiel 2.7.4.

(i) Die entscheidende Ungleichung $|x - x_0| < R$ bedeutet $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

(ii) Im Fall $|x - x_0| = R$, $R \in (0, +\infty)$, ist keine allgemeine Aussage möglich. Die Randpunkte des Konvergenzintervalls müssen ggf. mit anderen Kriterien und Methoden einzeln untersucht werden.

(iii) Bei „Lückenreihen", wie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$, muss zunächst die Koeffizientenfolge bestimmt werden, so dass die Reihe die für Satz 2.7.3 richtige Form hat, hier $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ mit $b_{2k} = a_k$ und $b_{2k+1} = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Um $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|}$ zu bestimmen, werden die Teilfolgen untersucht, wobei im Beispiel $\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{0} = 0$ und daher allein $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_k|}$ relevant ist.

In einfachen Situationen kann man auch substituieren, hier $y = x^2$, um die gewünschte Form zu erhalten. Die erhaltene Zahl $\tilde{R}$ bezieht sich dann auf die substituierte Variable und muss auf die ursprüngliche Variable zurückgerechnet werden, hier $R = \sqrt{R}$, da $|y| < R \Leftrightarrow |x| < \sqrt{R}$.

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$, das heißt $x_0 = 0$, $a_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$ und daher ist die Reihe für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergent, für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergent. Weiter ist die Reihe für $x = 1$ divergent (harmonische Reihe) und für $x = -1$ konvergent (alternierende harmonische Reihe).

Definition 2.7.5

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe, dann heißt $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Beispiele und Bemerkung 2.7.6. (i) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ den Konvergenzradius 1.

(ii) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$ hat den Konvergenzradius $\frac{1}{3}$.

(iii) Der Name Konvergenzradius motiviert sich aus der Betrachtung über $\mathbb{C}$: Die durch $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R \}$ gegebene Menge ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius R. Die Aussagen, die wir in diesem Abschnitt machen, gelten auch, wenn man x, x_0 und $a_k \in \mathbb{R}$ durch z, z_0 und $a_k \in \mathbb{C}$ ersetzt.

Das folgende Kriterium schreibt das Quotientenkriterium auf die Situation von Potenzreihen beziehungsweise Konvergenzradien um, woraus sich die Betrachtung des Kehrwert ergibt. Zu beachten ist, dass es im Allgemeinen für Lückenreihen nicht verwendet werden kann!

Lemma 2.7.7

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Wenn die Folge $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent oder bestimmt divergent ist, so gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Beweis. Analog zum Beweis vom Satz von Cauchy-Hadamard, Satz 2.7.3, unter Verwendung von $z \neq z_0$ und dem Quotientenkriterium anstelle des Wurzelkriteriums zeigt man, dass die durch $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ bestimmte Zahl dieselben Eigenschaften bezüglich der Konvergenz der Potenzreihe wie R hat. Alternativ folgt die Behauptung auch aus 2.5.15 (iv) und 2.4.17. □

Beispiele 2.7.8. (i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $R = +\infty$, da $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{(k+1)!}{1} = k+1 \to +\infty$ für $k \to \infty$.

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$, $R = 1$, da $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k}{k+1} \to 1$ für $k \to \infty$.

(iii) Für $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k$, mit $a_k = \binom{2k}{k}$, ist

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(2k)!}{k!k!}\cdot\frac{(k+1)!(k+1)!}{(2k+2)!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} \to \frac{1}{4} \text{ für } k \to \infty,$$

also ist der Konvergenzradius $\frac{1}{4}$.

(iv) Für $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4}{3^k} x^k$, mit $a_k = \frac{k^4}{3^k}$, ist

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k^4}{3^k}\cdot\frac{3^{k+1}}{(k+1)^4} = 3\left(\frac{k}{k+1}\right)^4 \to 3 = R \text{ für } k \to \infty.$$

Wir zeigen unter Zuhilfenahme der Ergebnisse über Potenzreihen einen Grenzwert, der andernfalls nur wesentlich komplizierter zu zeigen ist:

Lemma 2.7.9

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis. Nach Beispiel 2.7.8 (ii) besitzt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ den Konvergenzradius 1, das heißt es gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Weiter ist $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \geq 1$. Damit folgt die Behauptung mit Lemma 2.4.17. □

Das folgende Lemma ist ein Vorgriff auf die Differenziation und Integration von Potenzreihen. Wenn man sich an diese Techniken aus der Schule erinnert, weiß man, dass die Ableitung von x^n gerade nx^{n-1} und dass eine Stammfunktion von x^n die Funktion $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ist. Die Aussage des Lemmas ist daher: Wenn man Potenzreihen gliedweise differenziert beziehungsweise integriert, erhält man wieder eine Potenzreihe mit dem selben Konvergenzradius. Dass die so erhaltenen Reihen dann sogar die Ableitung beziehungsweise eine Stammfunktion der ursprünglichen Potenzreihe ist, zeigen wir in 4.1.6 beziehungsweise 5.1.6.

Lemma 2.7.10

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, dann besitzen die Potenzreihen $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ ebenfalls den Konvergenzradius R.

Beweis. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1} \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} ka_k(x-x_0)^k \text{ konvergent,}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^k \text{ konvergent.}$$

Aus Lemma 2.7.9 folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, denn für $n \geq 2$ gilt

$$1 \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{n+n} = \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} \to 1$$

für $n \to \infty$. Damit ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}. \qquad \square$$

Das folgende Lemma ist die Umformulierung von Satz 2.5.21 zum Cauchy-Produkt auf die Situation von Potenzreihen.

Lemma 2.7.11: Cauchy-Produkt von Potenzreihen

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ Potenzreihen mit Konvergenzradius R_1 beziehungsweise R_2. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei weiter $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Dann gilt für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, dass $R \geq \min\{R_1, R_2\}$, und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \min\{R_1, R_2\}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k.$$

Beweis. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \min\{R_1, R_2\}$ sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ absolut konvergent. Daher folgt die Behauptung aus Satz 2.5.21. □

Definition 2.7.12

(i) Die *Exponentialfunktion* ist definiert durch

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; \exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(ii) Die *trigonometrischen Funktionen* sind definiert durch

$$\begin{aligned}
&\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},\\
&\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},\\
&\tan : \{ x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0 \} \to \mathbb{R}, && \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\\
&\cot : \{ x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0 \} \to \mathbb{R}, && \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Bemerkungen 2.7.13. (i) Zur Übung zeige man mit Hilfe des Binomialsatzes 1.5.17, dass die Definition von e^x über die Potenzreihe mit der vorherigen Definition über die Folge übereinstimmt, das heißt, für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

(ii) Die Definitionen für die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen sind auch für komplexe Argumente sinnvoll. Die Aussagen der folgenden zwei Lemmata gelten auch in $\mathbb{C}$.

Lemma 2.7.14

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

(ii) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

(iii) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage. Die anderen Folgen (ebenfalls) mit Hilfe des Cauchy-Produkts.

(I) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt nach Lemma 2.7.11

$$e^x \cdot e^y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}_{=(x+y)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$

mit Hilfe des Binomialsatzes 1.5.17. □

Lemma 2.7.15

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $e^x \neq 0$.

(ii) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

(iii) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$.

(iv) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Beweis. Nach Lemma 2.7.14 gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1,$$

woraus die ersten beiden Behauptungen folgen. Die dritte Aussage folgt sofort aus der Definition und den Satz von Pythagoras zeigen wir mit Hilfe von Lemma 2.7.14, wobei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $x' = -x$ sei:

$$1 = \cos(x - x) = \cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)\,. \qquad \square$$

Lemma 2.7.16

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $e^x > 0$.

(ii) $1 + x \leq e^x$.

(iii) $x < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x} \geq e^x$

(iv) $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$.

Bemerkung 2.7.17. Als nützlich und über die Reihendarstellung leicht zu zeigen erweist sich oft für $\varphi \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen werden wir uns im folgenden Kapitel erarbeiten.

Kapitel 3

Funktionen

3.1 Reelle Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige der wichtigsten Funktionstypen und erste Eigenschaften von Funktionen, die auf Eigenschaften der reellen Zahlen beruhen.

Definition 3.1.1

Eine *reelle Funktion* ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$. Mit reellen Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ können weitere Funktionen erklärt werden:

$$\begin{aligned} f + g &: D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x), \\ c \cdot f &: D \to \mathbb{R},\ x \mapsto c \cdot f(x), \\ f \cdot g &: D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x), \\ \frac{f}{g} &: \{\, x \in D \mid g(x) \neq 0 \,\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.1.2. Die Menge der reellen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ bildet den Vektorraum $\mathbb{R}^D$ über $\mathbb{R}$.

Wir betrachten ein paar Beispiele

Konstante Funktionen 3.1.3. Für festes $c \in \mathbb{R}$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ eine *konstante Funktion.*

Die Identität 3.1.4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, wird auch mit $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ bezeichnet.

Durch mehrfache Anwendung der Operationen aus 3.1.1 und den Betrachtungen in Abschnitt 1.3 konstruieren wir weitere Funktionen:

Potenzen, Monome 3.1.5. Für $n \in \mathbb{N}_0$ entsteht $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, als wiederholtes Produkt

(i) $n = 0$: konstante Funktion, $f(x) = 1$,

(ii) n *ungerade*: f ist punktsymmetrisch, das heißt $f(-x) = -f(x)$,

(iii) n *gerade*: f ist achsensymmetrisch, das heißt $f(-x) = f(x)$, und $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \geq 0$,.

Wurzelfunktionen 3.1.6. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $w : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ die n*-te Wurzel*. Die n-te Wurzel ist die Umkehrfunktion des Monoms $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, auf $[0, +\infty)$, das heißt, für $x, y \geq 0$ gilt

$$p(x) = x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y} = w(y).$$

Polynome 3.1.7. Für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Polynom. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n *Grad* des Polynoms. Das durch $p(x) = 0$ definierte Polynom heißt *Nullpolynom*, sein Grad ist zu $-\infty$ definiert.

Polynome stellen eine wichtige Klasse von Funktionen dar, weil man sie verwenden kann, um kompliziertere Funktionen anzunähern. An vielen Stellen, an denen Polynome auftreten, sind darüberhinaus die Nullstellen von Interesse – etwa bei der Bestimmung von Eigenwerten.

Nullstellen von Polynomen 3.1.8. (i) Ein Polynom besitzt höchstens n reelle beziehungsweise genau n komplexe Nullstellen, wenn der Grad $n \geq 1$ ist.

(ii) Lösungsformeln für die Nullstellen x_1, x_2:

(a) Vieta[1]: $x^2 + px + q = 0$, $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 \cdot x_2$.

(b) Mitternachtsformel: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

(c) Grad ≥ 3: Substitution (beispielsweise $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$), Polynomdivision, Linearfaktoren, Näherungsverfahren (z.B. Newton[2]).

Rationale Funktionen 3.1.9. Der Quotient zweier Polynome P, Q ist definiert auf $D \subset \{ x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0 \}$. Eine solche Funktion

$$R : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

heißt *rationale Funktion*.

[1] François Viète, 1540-1603, frz. Mathematiker
[2] Isaac Newton, 1642-1727, engl. Mathematiker

Exponentialfunktionen 3.1.10. Für festes $q \in (0, +\infty)$ heißt

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ := \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}, \ x \mapsto q^x$$

Exponentialfunktion zur *Basis* q.

Lemma 3.1.11: Rechenregeln für Exponentialfunktionen

Es seien $p, q \in (0, +\infty)$, dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $q^x \cdot q^y = q^{x+y}$, $\frac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$

(ii) $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$,

(iii) $(p \cdot q)^x = p^x \cdot q^x$, $\left(\frac{p}{q}\right)^x = \frac{p^x}{q^x}$.

Die Rechenregeln ergeben sich aus den Potenzrechenregeln 1.5.21 beziehungsweise genauer aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion exp, da wir bisher nur rationale Exponenten zugelassen hatten. Neu ist an dieser Stelle im Wesentlichen nur die Betrachtung als Funktion.

Definition 3.1.12: Monotonie von Funktionen

Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

(i) *monoton fallend* (nicht steigend) auf I, falls

$$\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

(ii) *streng monoton fallend* auf I, falls

$$\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

(iii) *monoton wachsend* (nicht fallend) auf I, falls

$$\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

(iv) *streng monoton wachsend* auf I, falls

$$\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Damit erhalten wir:

Lemma 3.1.13: Monotonieverhalten der Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto q^x$, $q > 0$, sind

(i) für $q > 1$ streng monoton wachsend und

(ii) für $0 < q < 1$ streng monoton fallend.

Eine häufig verwendete Basis ist die Eulersche Zahl e

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \ x \mapsto e^x.$$

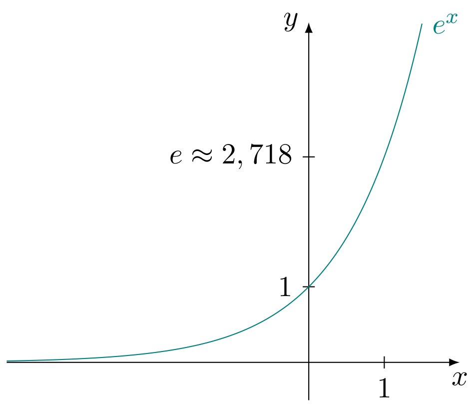

Abbildung 3.1: $f(x) = e^x$. Die Gestalt des Graphen für andere Basen $q > 1$ ist ähnlich; für $0 < q < 1$ erhält man den prinzipiellen Verlauf durch Spiegelung an der y-Achse.

Logarithmen 3.1.14. Die Exponentialfunktionen sind für $q \neq 1$ bijektiv und damit umkehrbar, ihre Umkehrfunktionen heißen *Logarithmusfunktionen*. Die Umkehrfunktion von exp ($f(x) = e^x$) ist der *natürliche Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}^+ = (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \ln(x).$$

Das heißt, es gilt

$$\exp x = y :\Leftrightarrow x = \ln y.$$

Die Umkehrfunktion von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \ x \mapsto q^x \text{ mit } q > 0, \ q \neq 1$$

ist

$$\log_q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \log_q(x).$$

Bei Exponential- und Logarithmusfunktionen genügt es, eine feste Basis zu betrachten, wir verwenden daher auch $\log = \ln$:

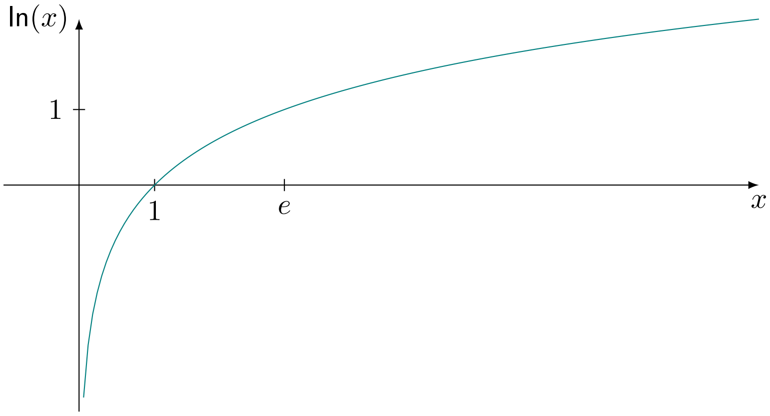

Abbildung 3.2: $f(x) = \ln(x)$. Den Graph der Umkehrfunktion erhält man sofern existent ganz allgemein durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

Lemma 3.1.15

Für $p, q > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $q^x = \left(e^{\ln q}\right)^x = e^{x \ln q}$,

(ii) $q^x = p \Leftrightarrow \log_q(p) = x = \frac{\ln p}{\ln q}$, falls $q \neq 1$.

Beweis. Die erste Behauptung ist klar. Es gilt $q^x = p \Leftrightarrow \log_q(p) = x$ und mit der ersten Aussage $x \cdot \ln q = \ln p$, also$x = \frac{\ln p}{\ln q}$. □

Für die Logarithmusfunktionen gelten folgende Rechenregeln, die direkt aus den Rechenregeln für die Exponentialfunktionen folgen:

Lemma 3.1.16: Rechenregeln für Logarithmen

Es seien $q > 0$ eine beliebige Basis, $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$, dann gilt

(i) $\log_q(x \cdot y) = \log_q x + \log_q y$,

(ii) $\log_q\left(\frac{x}{y}\right) = \log_q x - \log_q y$,

(iii) $\log_q\left(x^\alpha\right) = \alpha \log_q x$.

Beweis. Es sei o. B. d. A. $q = e$, das heißt $\log_q = \ln$, und weiter $u := \ln x \Leftrightarrow x = e^u$, $v = \ln y \Leftrightarrow y = e^v$. Dann gilt

$$\ln(xy) = \ln\left(e^u \cdot e^v\right) = \ln\left(e^{u+v}\right) = u + v = \ln x + \ln y.$$

Die anderen Aussagen folgen analog. □

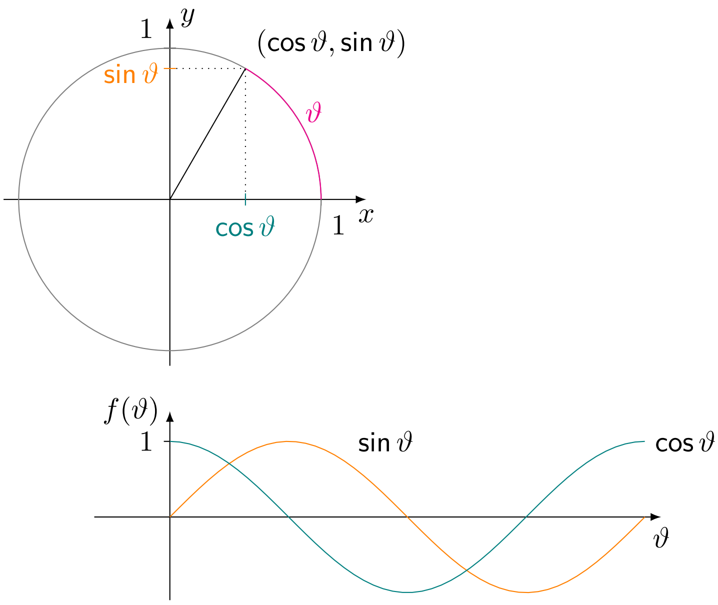

Abbildung 3.3: Geometrische Herleitung von Sinus und Kosinus am Einheitskreis.

Die Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzintervall weitere Beispiele für reelle Funktionen. Die in 2.7.12 betrachteten trigonometrischen Funktionen kann man auch geometrisch herleiten.

Eigenschaften von Sinus und Kosinus 3.1.17

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$.

(ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (Satz des Pythagoras).

(iii) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ und $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ (Additionstheoreme).

(iv) Für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt $\cos x > 0$ und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, das heißt $\frac{\pi}{2}$ ist die kleinste positive Nullstelle des Kosinus.

(v) $\sin \frac{\pi}{2} > 0$.

Dabei kann man entweder die kleinste positive Nullstelle des Kosinus zur Definition von π heranziehen oder man setzt $2\pi = 2 \cdot 3,14159\ldots$ als den Umfang eines Kreises mit Radius 1.

Bemerkung 3.1.18. Aus (ii) und (iv) folgt $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$. Mit (v) gilt also $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Aus den Additionstheoremen (iii) erhält man dann

$$\begin{aligned} \cos \pi &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = -1, \\ \sin \pi &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0, \\ \cos(2\pi) &= \cos(\pi + \pi) = \cos^2 \pi - \sin^2 \pi = 1 \\ \text{und } \sin(2\pi) &= \sin(\pi + \pi) = 2 \sin \pi \cos \pi = 0. \end{aligned}$$

Wertetabelle für Sinus und Kosinus 3.1.19.

Gradmaß Bogenmaß	0 0	30 $\frac{\pi}{6}$	45 $\frac{\pi}{4}$	60 $\frac{\pi}{3}$	90 $\frac{\pi}{2}$	180 π	270 $\frac{3\pi}{2}$	360 2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Lemma 3.1.20

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

(ii) $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

(iii) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

(iv) $\cos x = 0 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} x = \frac{\pi}{2} + m\pi$.

(v) $\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} x = m\pi$.

Mit der Kenntnis der Nullstellen von Sinus und Kosinus können wir 2.7.12 präzisieren:

Definition 3.1.21: Tangens und Kotangens

Die *Tangensfunktion* ist definiert durch

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + m\pi \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

und die *Kotangensfunktion* durch

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{ m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

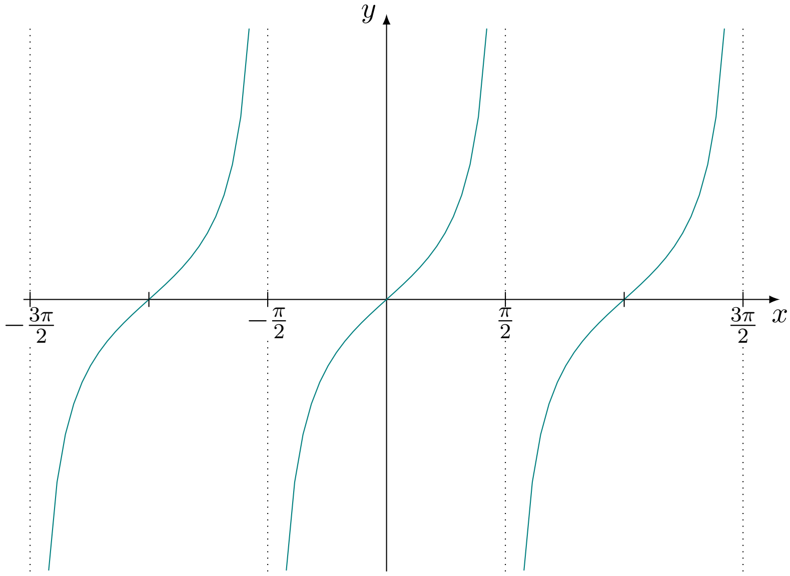

Abbildung 3.4: Tangensfunktion.

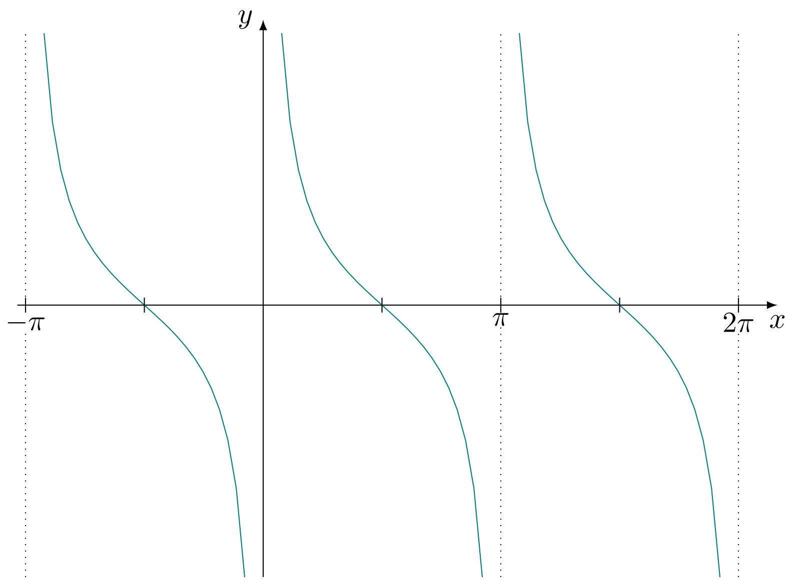

Abbildung 3.5: Cotangensfunktion.

Definition 3.1.22: Arcusfunktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen werden als *Arcusfunktionen* bezeichnet. Für die Existenz müssen der Definitions- und ggf. der Wertebereich derart eingeschränkt werden, dass die jeweilige trigonometrische Funktion bijektiv ist.

(i) Die Umkehrfunktion von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ heißt *Arcussinus-Funktion* und wird mit arcsin bezeichnet.

(ii) Die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ heißt *Arcuscosinus-Funktion* und wird mit arccos bezeichnet.

(iii) Die Umkehrfunktion von $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ heißt *Arcustangens-Funktion* und wird mit arctan bezeichnet.

(iv) Die Umkehrfunktion von $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ heißt *Arcuscotangens-Funktion* und wird mit arccot bezeichnet.

Beispielsweise bedeutet das für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsin y.$$

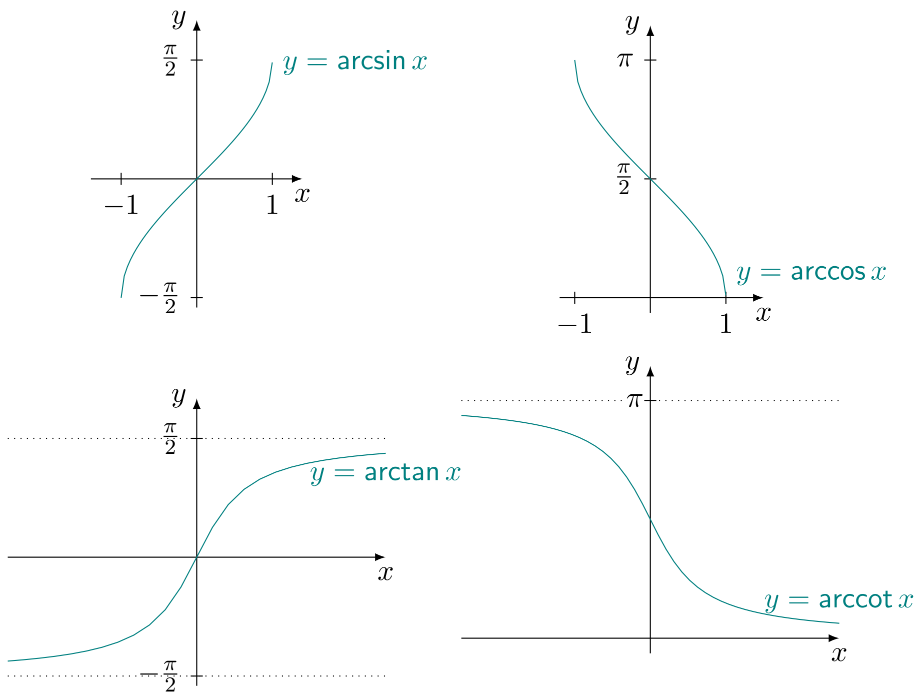

Abbildung 3.6: Die Arcus-Funktionen.

Weitere Funktionen 3.1.23. Wir haben bereits weitere Funktionen verwendet. Es seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, dann sind durch folgende Vorschriften ebenfalls Funktionen gegeben:

$$\begin{aligned}
\min\{\, f_1, f_2 \,\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto \min\{\, f_1(x), f_2(x) \,\}\,, \\
\max\{\, f_1, f_2 \,\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto \max\{\, f_1(x), f_2(x) \,\}\,, \\
\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto \lceil x \rceil = \min\{\, z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x \,\}\,, \\
\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto \lfloor x \rfloor = \max\{\, z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x \,\}\,, \\
|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto |x|\,.
\end{aligned}$$

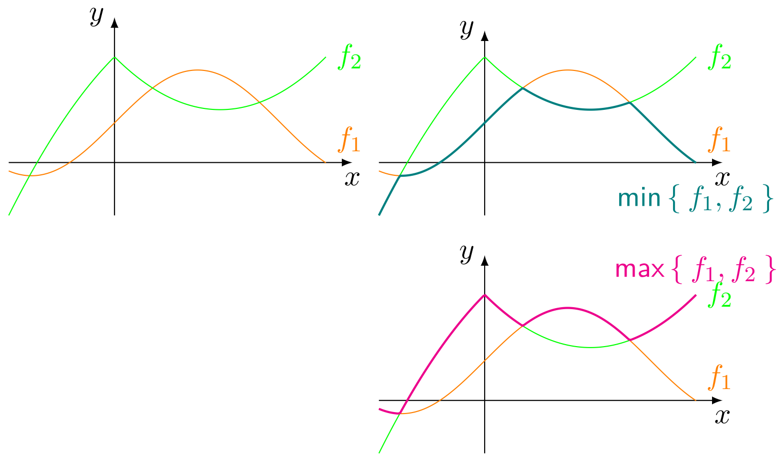

Abbildung 3.7: Maximums- und Minimumsfunktion zweier Funktionen.

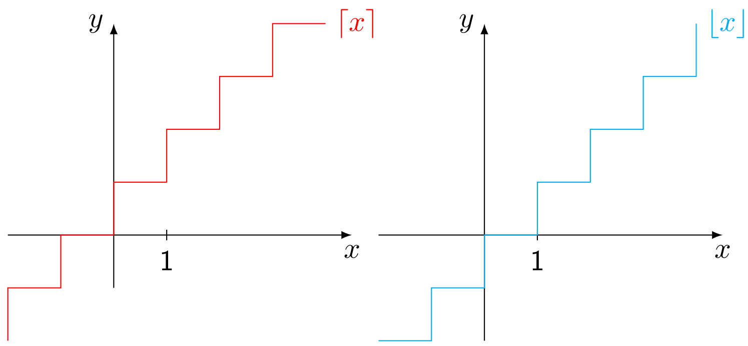

Abbildung 3.8: Die Treppenfunktionen $\lceil x \rceil$ und $\lfloor x \rfloor$.

Daraus hervorgehende Funktionen sind zum Beispiel

(i) die Sägezahnfunktionen $s_1, s_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$s_1(x) = x - \lfloor x \rfloor, \;\; s_2(x) = \left| s_1(x) - \frac{1}{2} \right|.$$

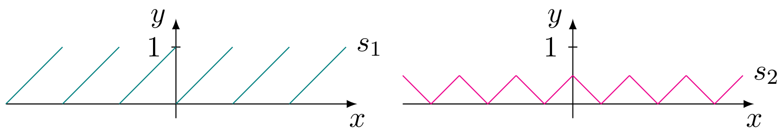

Abbildung 3.9: Die Sägezahnfunktionen s_1 und s_2.

(ii) der positive beziehungsweise negative Anteil von f:

$$f^+(x) = \max\{\, f(x), 0 \,\}\,, \quad f^-(x) = -\min\{\, f(x), 0 \,\}\,.$$

Es gilt dann $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ und $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

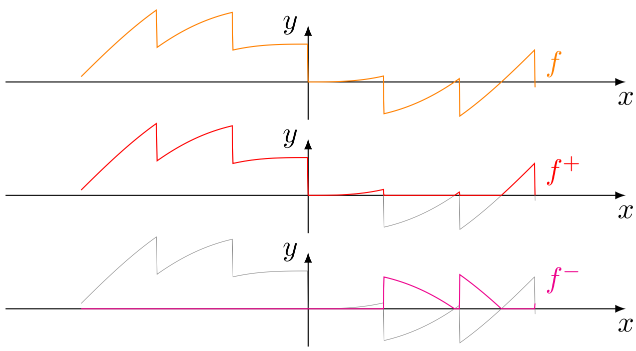

Abbildung 3.10: Positiver und negativer Anteil einer Funktion.

3.2 Funktionsgrenzwerte

In diesem Abschnitt betrachten wir kontinuierliche Grenzwerte, das heißt, wir lassen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ laufen, statt wie in Kapitel 2 ein $n \in \mathbb{N}$ mit diskreten Werten $1, 2, 3, \ldots$ und Grenzwerte $x_k \to a$ für $k \to \infty$ zu betrachten. Der neue Grenzwertbegriff wird mit dem alten aber über das sogenannte Folgenkrterium 3.2.6 verknüpft sein, so dass unsere bisherigen Aussagen übertragbar sein werden.

Grenzwerte von Funktionen bilden die Basis für wichtige Begriffen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit, die wir im weiteren Verlauf der Vorlesung behandeln werden.

Definition 3.2.1: ε-Umgebung

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon \} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die *ε-Umgebung von x_0* und

$$\begin{aligned} \dot{U}_\varepsilon(x_0) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \varepsilon \} \\ &= U_\varepsilon(x_0) \setminus \{ x_0 \} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{aligned}$$

die *punktierte ε-Umgebung von x_0*.

Wir bezeichnen mit I in diesem Abschnitt stets ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und mit $\overline{I}$ den sogenannten *Abschluss* von I. Konkret sind für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ folgende Fälle möglich:

(i) $I = (a, b)$, $\overline{I} = [a, b]$,

(ii) $I = (-\infty, b)$, $\overline{I} = (-\infty, b]$,

(iii) $I = (a, +\infty)$, $\overline{I} = [a, +\infty)$ und

(iv) $I = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\overline{I} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Bemerkung 3.2.2. Da I offen ist, existiert zu jedem $x_0 \in I$ ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x_0) \subset I$.

Beweis. Wählt man im Fall $I = (a, b)$ $\varepsilon := \min \{ |x_0 - a|, |x_0 - b| \}$ als den kleineren der Abstände von x_0 zu den Intervallgrenzen, so ist für $x \in U_\varepsilon(x_0)$

$$|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow a \leq x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \leq b,$$

da $|x - x_0| = \begin{cases} x - x_0, & x \geq x_0, \\ x_0 - x, & x < x_0. \end{cases}$ □

Definition 3.2.3: Funktionsgrenzwert

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Es sei $x_0 \in I$, dann heißt $a \in \mathbb{R}$ der *Grenzwert* oder *Limes* von f an der Stelle x_0 beziehungsweise wir sagen *f konvergiert gegen a für $x \to x_0$*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Wir schreiben $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.

(ii) Es sei $x_0 \in \overline{I}$, dann heißt $a \in \mathbb{R}$ der *linksseitige* beziehungsweise *rechtsseitige Grenzwert* oder *Limes* beziehungsweise wir sagen f *konvergiert von links* beziehungsweise *von rechts gegen* a *für* $x \to x_0$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

beziehungsweise analog mit $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I$ für den rechtsseitigen Grenzwert.

Wir schreiben $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$, $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0^-$ beziehungsweise $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$, $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0^+$.

(iii) Es sei $I = (a, +\infty)$ beziehungsweise $I = (-\infty, b)$ und $c \in \mathbb{R}$, dann *konvergiert* f *gegen* c *für* $x \to +\infty$ beziehungsweise *für* $x \to -\infty$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x \overset{(<)}{>} x_1 \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Wir schreiben $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$ oder $f(x) \to c$ für $x \to +\infty$ beziehungsweise $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ oder $f(x) \to c$ für $x \to -\infty$.

Dabei kann jeweils δ beziehungsweise x_1 von ε und x_0 abhängen, das heißt $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ und $x_1 = x_1(\varepsilon)$.

Lemma 3.2.4: Eindeutigkeit des Grenzwerts

Der Grenzwert einer Funktion ist eindeutig bestimmt.

Beispiele 3.2.5. (i) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 3$ und $x_0 = 0$. Behauptung: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -3$.

Zu zeigen ist: „Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine punktierte $\delta(\varepsilon)$-Umgebung von x_0, so dass für alle x in dieser Umgebung

$$|f(x) - a| = |f(x) - (-3)| = \left|x^2\right| < \varepsilon$$

gilt."

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir setzen $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, dann ist

$$\forall x \in \mathbb{R} x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta) \Rightarrow |f(x) - (-3)| = x^2 < \varepsilon. \qquad \square$$

Wie kommt man hier konkret auf das $\delta(\varepsilon)$? In der letzten Ungleichung wollen wir, dass $x^2 < \varepsilon$ gilt. Dies formen wir um und erhalten

$$x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon},$$

was wir für die Definition von δ verwenden. Dem δ kommt hier eine ähnliche Rolle zu wie dem $N(\varepsilon)$ oder $n_0(\varepsilon)$ bei der Konvergenz von Folgen.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x-2, & x < 0 \end{cases}$. Es gilt

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -2.$$

(iii) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, dann ist mit der dritten binomischen Formel

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \to 0 \text{ für } x \to +\infty.$$

Formaler Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest und $x_1(\varepsilon) = \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2$, dann gilt für alle $x > x_1$

$$\begin{aligned} |f(x) - 0| &= \left| \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right| = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &< \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2\varepsilon}} = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Satz 3.2.6: Folgenkriterium

Es seien $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ und $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ genau dann, wenn $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = a$ für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset I \setminus \{ x_0 \}$ mit $x_k \to x_0$ für $k \to \infty$.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Es sei $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

wobei wir o. B. d. A. annehmen, dass $U_\delta(x_0) \subset I$. Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset I \setminus \{ x_0 \}$ eine Folge mit $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$, das heißt nach Definition

$$\forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta.$$

Damit existiert für beliebiges aber festes $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ $|x_n - x_0| < \delta$ und damit $|f(x_n) - a| < \varepsilon$. Folglich ist $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = a$.

„$\Leftarrow$“ Für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset I \setminus \{ x_0 \}$ mit $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$ gelte nun umgekehrt, dass $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = a$.

Angenommen, $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ wäre falsch, dann gilt (Negation der Grenzwertdefinition)

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap I \left(|f(x) - a| \geq \varepsilon_0 \right).$$

Wir konstruieren eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \dot{U}_\delta(x_0) \cap I$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ mit $|f(x_k) - a| \geq \varepsilon_0$. Dazu setzen wir $\delta_k = \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ und finden zu jedem δ_k ein $x_k \in I \setminus \{ x_0 \}$ mit $|f(x_k) - a| \geq \varepsilon_0$. Dann ist nach Konstruktion $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ und $f(x_k) \nrightarrow a$ für $k \to \infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkungen 3.2.7. (i) Die Aussage von Satz 3.2.6 gilt sinngemäß auch für einseitige Grenzwerte und im Fall $x \to \pm\infty$. Das ist auch bei den nachfolgenden Ergebnissen der Fall, ohne dass wir dies gesondert erwähnen.

(ii) Mit konkreten Folgen kann man mit dem Folgenkriterium nur zeigen, dass ein Grenzwert nicht existiert, da man für die Konvergenz alle Folgen untersuchen müsste. Will man alle Folgen untersuchen, so muss man eine beliebige Folge wählen und kann nur mit der Eigenschaft der Konvergenz der Folge und den Eigenschaften der konkreten Funktion argumentieren.

Aus den Regeln für die Konvergenz von Folgen erhalten wir nun sofort nachstehende Regeln für Grenzwerte von Funktionen:

Lemma 3.2.8: Grenzwertsätze für Funktionsgrenzwerte

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Dann gilt

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha a$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$.

(iv) Wenn $b \neq 0$, dann gilt $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

Beweis. Folgt aus Satz 3.2.6 und den Grenzwertsätzen 2.2.10. □

Beispiele 3.2.9. (i) Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{ 1 \} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$. Gesucht ist $\lim_{x\to 1} f(x)$. Mit der geometrischen Summenformel 1.5.8 gilt

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \to n \text{ für } x \to 1,$$

wobei hier zunächst $x^k \to 1$ für $x \to 1$ klar ist und dann die Summe mit den Grenzwertsätzen bestimmt wird.

(ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{ 0 \} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Für $|x| < 1$ gilt mit Lemma 2.7.16

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1 - x} \Rightarrow x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1 - x} - 1 = \frac{x}{1 - x}$$

und damit $1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$. Mit dem Einschließungskriterium folgt also $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

(iii) Wir betrachten die Dirichlet-Funktion[3]

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Für kein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert dann der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} d(x)$. Es sei etwa $x_0 = 1$, dann ist durch $x_k = 1 + \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(x_k) \subset \mathbb{Q}$ gegeben mit $d(x_k) = 0$, also $\lim_{k\to\infty} d(x_k) = 0$. Durch $\tilde{x}_k = 1 + \frac{\sqrt{2}}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ ist eine Folge $(\tilde{x}_k) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gegeben, also $d(\tilde{x}_k) = 1$ und damit $\lim_{k\to\infty} d(\tilde{x}_k) = 1$.

Man kann also aus der Existenz des Grenzwerts einer konkret gewählten Folge nicht die Existenz des (Funktions-) Grenzwerts schließen.

Wie bei den diskreten Folgen, ist auch bei Funktionen der konkrete Grenzwert mitunter nicht bekannt oder schwer zu bestimmen. Die Existenz des Grenzwerts erhält man mit

Lemma 3.2.10: Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte

Es seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, dann existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in I : x_1, x_2 \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Bemerkungen 3.2.11. (i) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert für $x_0 \in I$ genau dann, wenn $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existieren und gleich sind.

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ hängt nicht von $f(x_0)$ ab. $f(x_0)$ muss nicht einmal definiert sein.

Definition 3.2.12: Bestimmte Divergenz

Es seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \overline{I}$. Dann *divergiert* f in x_0 *bestimmt* gegen $+\infty$, in Zeichen $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, wenn

$$\forall c > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \geq c.$$

Außerdem ist

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty :\Leftrightarrow \forall c > 0 \exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x \geq x_1 \Rightarrow f(x) \geq c.$$

Analog sind die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$,

[3] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859, dt. Mathematiker

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ sowie die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ definiert. Statt von bestimmter Divergenz spricht man auch von *uneigentlicher Konvergenz*.

Beispiele 3.2.13. (i) $\frac{x^2}{x+1} \to +\infty$ für $x \to +\infty$, denn $\frac{x^2}{x+1} \geq \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} > c$ für $x \geq \max\{1, 2c\}$ und

(ii) $\frac{1}{x} \to +\infty$ für $x \to 0^+$ sowie $\frac{1}{x} \to -\infty$ für $x \to 0^-$.

Wir zeigen die zweite Aussage: Es sei $c < 0$ gegeben, dann gilt für $x < 0$ $\frac{1}{x} < c \Leftrightarrow \frac{1}{c} < x$. Wählen wir also $\delta = -\frac{1}{c} > 0$, so gilt für $x \in (-\delta, 0)$, dass $\frac{1}{x} < c$.

Für monotone und beschränkte Folgen konnten wir die Konvergenz in Abschnitt 2.3 nachweisen. Wir übertragen dieses Ergebnis auf Funktionsgrenzwerte und vereinbaren zunächst:

Definition 3.2.14: Beschränktheit von Funktionen

Es seien I ein beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$, dann heißt f auf I *beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists c > 0 : x \in I \Rightarrow |f(x)| \leq c$.

Lemma 3.2.15

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton und beschränkt, dann existiert $\lim_{x \to b^-} f(x)$ und $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

Beweis. O. B. d. A. sei f monoton wachsend und $\forall x \in (a, b)\, |f(x)| \leq c$. Wir setzen $s = \sup\{ f(x) \mid x \in (a, b) \}$, dann ist $s \leq c$ und nach den Supremumseigenschaften gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x(\varepsilon) \in (a, b) : s - \varepsilon < f(x(\varepsilon)) \leq s.$$

Mit der Monotonie von f folgt also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x(\varepsilon) \in (a, b) \forall x' \in (x(\varepsilon), b) : s - \varepsilon < f(x(\varepsilon)) \leq f(x') \leq s,$$

das heißt mit $\delta = \delta(\varepsilon, b) = b - x(\varepsilon) > 0$ ist also

$$\forall x \in (b - \delta, b) : s - \varepsilon < f(x) \leq s,$$

nach Definition also $\lim_{x \to b^-} f(x) = s$.

Analog zeigt man $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf\{ f(x) \mid x \in (a, b) \}$. $\square$

3.3 Stetigkeit

Wir können nun Stetigkeit von Funktionen definieren. Stetige Funktionen haben viele nützliche Eigenschaften, von denen wir einige in diesem Abschnitt herausarbeiten werden. Viele Probleme können durch stetige Funktionen beschrieben oder hinreichend gut angenähert werden.

Definition 3.3.1: Stetigkeit

Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in* $x_0 \in D$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \, (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \, .$$

f heißt *stetig auf* D $:\Leftrightarrow \forall x_0 \in D f$ stetig in x_0.
Die Menge aller auf D stetigen Funktionen wird mit $C(D)$ bezeichnet.

Bemerkungen 3.3.2. (i) Wenn ein offenes Intervall $I \subset D$ existiert und $x_0 \in I$ ist, dann ist f genau dann stetig in x_0, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(ii) f ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Dies folgt sofort aus dem Folgenkriterium, Satz 3.2.6.

(iii) Mit dem Folgekriterium und den Grenzwertsätzen folgt, dass $C(D)$ einen Unterraum von $\mathbb{R}^D$ bildet (vergleiche 3.1.2).

Genauer und desweiteren gilt

Lemma 3.3.3: Operationen mit stetigen Funktionen

(i) Es seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $c \in \mathbb{R}$. Wenn f und g in x_0 stetig sind, dann sind auch die Funktionen $c \cdot f$, $f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 stetig. Gilt zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig.

(ii) Es seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, $f : D_1 \to D_2$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Wenn f in x_0 stetig ist und g in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist auch $g \circ f$ in x_0 stetig.

Beispiele 3.3.4. (i) Polynome $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Beweis. Konstante Funktionen f sind stetig, da stets $f(x) - f(x_0) = 0$. Durch Wahl von $\delta = \varepsilon$ sieht man sofort, dass $f(x) = x$ stetig ist: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$. Damit sind Polynome als Produkte und Linearkombinationen stetiger Funktionen stetig. □

(ii) Potenzreihen stellen innerhalb ihres Konvergenzradius stetige Funktionen dar, siehe Beispiel 3.3.24.

(iii) Mit der Dreiecksungleichung nach unten folgt, dass $|x|$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion ist.

Das folgende Lemma kann so interpretiert werden, dass eine in einem Punkt stetige Funktion in einer (möglicherweise sehr kleinen) Umgebung des Punktes nicht zu sehr vom Funktionswert in diesem Punkt abweicht.

Lemma 3.3.5

Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$, dann gilt

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) \cap I \, (f(x) > 0) \, .$$

Beweis. Setze $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, dann existiert aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \cap I \, (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \, .$$

Das bedeutet, dass für $x \in U_\delta(x_0) \cap I$ gilt

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

und demnach also $0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$. □

Beispiele 3.3.6 (Klassifizierung von Unstetigkeitsstellen)**.** (i) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1, \\ x - 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

hat in $x_0 = 1$ eine *Sprungstelle*. Rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren, sind aber verschieden.

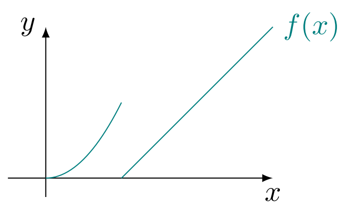

Abbildung 3.11: Funktion mit Sprungstelle.

(ii) *Hebbare Unsstetigkeit* (in $x_0 = 2$):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ 0, & x = 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren und stimmen überein, stim-

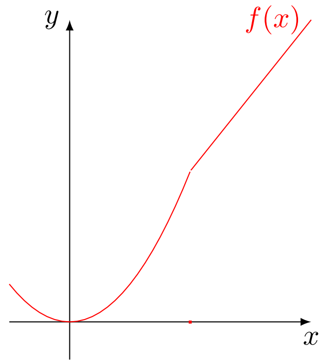

Abbildung 3.12: Funktion mit einer hebbaren Unstetigkeitsstelle.

men aber nicht mit dem Funktionswert an der Stelle überein. Die Unstetigkeit kann durch Setzen eines anderen Wertes für $f(x_0)$ behoben werden.

(iii) *Polstelle*: Einer der Funktionsgrenzwerte $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ist $\pm\infty$. Der andere Grenzwert existiert ggf. uneigentlich. Beispiel: $x_0 = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ sonst.

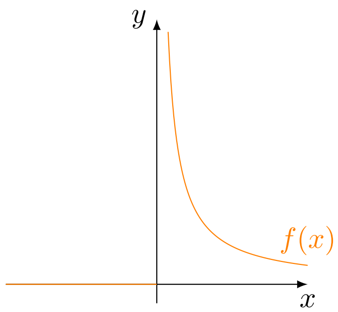

Abbildung 3.13: Funktion mit einer Polstelle.

(iv) *Unstetigkeit zweiter Art*: Der Funktionsgrenzwert in x_0 existiert auch im uneigentlichen Sinn weder von links noch von rechts. Beispiel: $x_0 = 0$ und

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0.$$

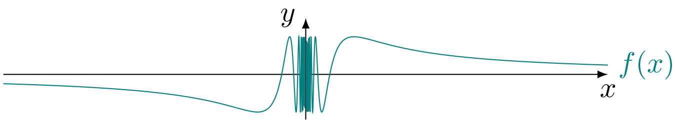

Abbildung 3.14: Funktion mit einer Unstetigkeit zweiter Art.

Dass der Grenzwert für $x \to 0$ nicht existiert, kann man durch Wahl zweier Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beispielsweise mit $f(x_k) = 1$, $f(y_k) = 0$ und $x_k \to 0$, $y_k \to 0$ für $k \to \infty$ zeigen (vgl. Übungsaufgaben).

Zwischenwertsatz 3.3.7

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert für jeden *Zwischenwert* $y \in (f(a), f(b))$ ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = y$.

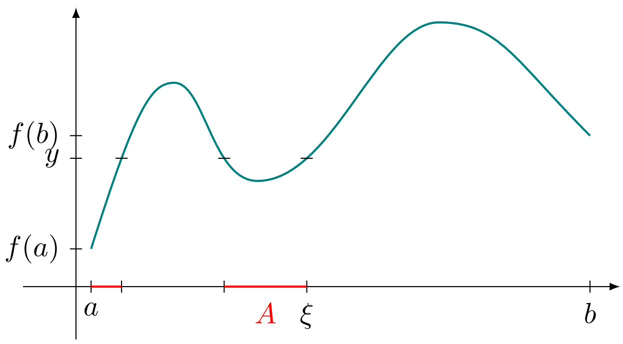

Abbildung 3.15: Zum Zwischenwertsatz 3.3.7.

Beweis. Es seien $y \in (f(a), f(b))$ und $A = \{\, x \in I \mid f(x) \le y \,\}$. Da $f(a) < y$ ist $A \neq \emptyset$ und weiter gilt $\forall x \in A\ a \le x < b$, das heißt, A ist beschränkt. Daher existiert ein $\xi \in I$ mit $\xi = \sup A$. Wir zeigen, dass $\xi \in A$ gilt: Nach Definition des Supremums existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $\forall k \in \mathbb{N} f(x_k) \le y$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann $f(\xi) \le y$. Weiter gilt $f(\xi) = y$. Denn angenommen, es wäre $f(\xi) < y$, so ist $\xi < b$ und es gibt wiederum wegen der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass $\xi + \delta < b$ und $f(x) < y$ für $x \in U_\delta(\xi) \cap I$, also insbesondere für $x = \xi + \frac{\delta}{2}$ was der Definition von ξ als Supremum von A widerspricht. Weiter ist wegen $f(a) < y < f(b)$ abschließend $a < \xi < b$. $\square$

Korollar 3.3.8: Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Funktion I

Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist $f([a, b])$ wieder ein Intervall, wobei $f([a, b]) = \{ c \}$ zugelassen ist.

Definition 3.3.9: Maximum, Minimum, Supremum, Infimum einer Funktion

Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Falls existent, heißt

(i) $\max_{x \in D} f(x) = \max_D f(x) = \max\{ f(x) \mid x \in D \}$ das *Maximum* von f in D,

(ii) $\min_{x \in D} f(x) = \min_D f(x) = \min\{ f(x) \mid x \in D \}$ das *Minimum* von f in D,

(iii) $\sup_{x \in D} f(x) = \sup_D f(x) = \sup\{ f(x) \mid x \in D \}$ das *Supremum* von f in D,

(iv) $\inf_{x \in D} f(x) = \inf_D f(x) = \inf\{ f(x) \mid x \in D \}$ das *Infinum* von f in D.

Beispiel 3.3.10. Wir betrachten die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $\sup_{(0,+\infty)} \dfrac{1}{x} = +\infty$ sowie $\inf_{(0,+\infty)} \dfrac{1}{x} = 0$. Weiter gilt, dass $\max_{(0,+\infty)} \dfrac{1}{x}$ sowie $\min_{(0,+\infty)} \dfrac{1}{x}$ nicht existieren.

Beweis. Es gilt $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Für $x \in (0, +\infty)$ ist aber $f(x) > 0$ und $f(x) < +\infty$. □

Lemma 3.3.11

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt.

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht beschränkt ist. Also existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ mit $\forall n \in \mathbb{N}\, |f(x_n)| \geq n$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, Satz 2.4.7 existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, da die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $c = \max\{ |a|, |b| \}$ beschränkt ist. Es sei $x_0 = \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in [a, b]$, dann gilt wegen der Stetigkeit von f, dass auch $|f|$ auf I stetig ist und

$$\lim_{k \to \infty} |f(x_{n_k})| = |f(x_0)| < +\infty.$$

Nach Konstruktion gilt aber auch $\forall k \in \mathbb{N}\, |f(x_{n_k})| \geq n_k \geq n$ und damit folgt $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$, ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung 3.3.12. Die Aussage gilt im Allgemeinen nur, wenn

(i) f stetig und gleichzeitig

(ii) der Definitionsbereich von f abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiele 3.3.13. (i) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(ii) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ mit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ aber

(iii) $0 < a < 1$, $f : [a, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $[a, 1]$ beschränkt und es gilt

$$\max_{[a,1]} f(x) = \frac{1}{a}, \ \min_{[a,1]} f(x) = 1.$$

Satz vom Minimum und Maximum (Weierstraß) 3.3.14

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann existieren zwei Punkte $x^+, x^- \in I$ mit

$$\forall x \in I \ f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+).$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$f(x^-) = \inf_I f(x) = \min_I f(x), \ \ f(x^+) = \sup_I f(x) = \max_I f(x).$$

Beweis. Es sei $y^+ = \sup_I f(x) = \sup\{\, f(x) \mid x \in I \,\}$. Nach Lemma 3.3.11 folgt $y^+ \in \mathbb{R}$ und nach der Supremumseigenschaft existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in I y_n = f(x_n)$ und $y_n \to y^+$ für $n \to \infty$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, 2.4.7, eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Es sei $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^+$, dann folgt aus der Stetigkeit von f, dass

$$f(x^+) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = y^+$$

und nach Konstruktion ist $\forall x \in I f(x) \leq f(x^+)$.

Analog zeigt man die Existenz eines $x^- \in I$ mit $f(x^-) = \inf_{[a,b]} f(x)$. $\square$

Wir erhalten noch folgende Präzisierung von Korollar 3.3.8:

Korollar 3.3.15: Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Funktion II

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $y_1 = \min_{[a,b]} f(x)$ und $y_2 = \max_{[a,b]} f(x)$ gilt $f([a, b]) = [y_1, y_2]$.

Beispiele 3.3.16. Die Voraussetzungen im Satz von Weierstraß sind alle notwendig, denn:

(i) Die unstetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, x < 1, \\ 0, x \geq 1 \end{cases}$ nimmt auf $[0, 2]$ kein Maximum an.

(ii) Betrachtet man die stetige Funktion $f(x) = x$ auf dem nicht abgeschlossen Intervall $[0, 1)$, so nimmt f dort kein Maximum an.

(iii) Es sei $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, dann ist der Definitionsbereich nicht beschränkt und f nimmt auf ihm kein Minimum an.

Definition 3.3.17: Gleichmäßige Stetigkeit

Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf D :⇔

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Bemerkungen 3.3.18. (i) $\delta = \delta(\varepsilon)$ kann bei einer gleichmäßig stetigen Funktion unabhängig von $x_0 \in D$ gewählt werden. Gewöhnliche Stetigkeit auf D bedeutet

$$\forall x_0 \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(ii) Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig, die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Beispiele 3.3.19. (i) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist gleichmäßig stetig: Es sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left|x_1^2 - x_2^2\right| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \\ &= (x_1 + x_2) |x_1 - x_2| < 2 |x_1 - x_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

falls $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, woraus sich die Wahl von δ erklärt.

(ii) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht gleichmäßig stetig, denn sei zum Beispiel $\varepsilon_0 = 1$, dann ist für $\delta \in (0, 1)$ beliebig und $x_1 = \delta$, $x_2 = \frac{\delta}{2}$

$$|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{\delta} > 1 = \varepsilon_0.$$

Es gilt

Satz 3.3.20

Jede auf $I = [a, b]$ stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, dann

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta, x'_\delta \in [a, b] : \left|x_\delta - x'_\delta\right| < \delta \wedge \left|f(x_\delta) - f(x'_\delta)\right| \geq \varepsilon.$$

Für $\delta = \frac{1}{k}$ existieren also Punkte $x_k, x'_k \in [a, b]$, so dass $|x_k - x'_k| < \frac{1}{k}$ und $|f(x_k) - f(x'_k)| \geq \varepsilon$. Dadurch erhalten wir zwei Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (x'_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$, und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k_\ell} \to x_0 \in [a, b]$ für $\ell \to \infty$. Es gilt auch $x'_{k_\ell} \to x_0$ für $\ell \to \infty$, da $\left|x'_{k_\ell} - x_0\right| \leq \left|x'_{k_\ell} - x_{k_\ell}\right| + |x_{k_\ell} - x_0|$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt $f(x_{k_\ell}) \to f(x_0)$ und $f(x'_{k_\ell}) \to f(x_0)$ für $\ell \to \infty$. Daher gilt

$$\left|f(x_{k_\ell}) - f(x'_{k_\ell})\right| \leq |f(x_{k_\ell}) - f(x_0)| + \left|f(x_0) - f(x'_{k_\ell})\right| \leq 2\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2},$$

falls $\ell \geq \ell_0(\varepsilon^*)$. $\lightning$ □

Definition 3.3.21: Konvergenz von Funktionenfolgen

Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f_k : D \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(i) Die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D : f_k(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$.

(ii) Die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent*:

$$f_k \xrightarrow[\text{glm.}]{} f \text{ für } k \to \infty$$
$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in D \forall k \in \mathbb{N} : k \geq N \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

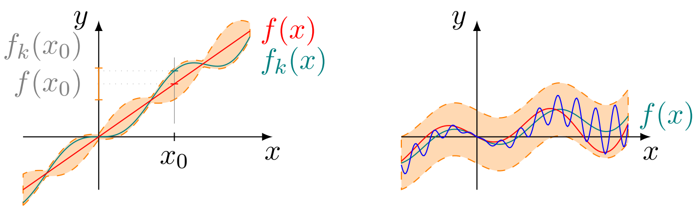

Abbildung 3.16: Zur punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen: Bei gleichmäßiger Konvergenz hängt ε nicht von x_0 ab.

Bemerkung und Beispiel 3.3.22. (i) Eine Funktionenfolge ist höchstens gegen die Funktion gleichmäßig konvergent, gegen die sie punktweise konvergiert.

(ii) Durch $f_k(x) = x^k$ ist für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ eine Funktionenfolge definiert. Diese konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0,1). \end{cases}$$

Die Konvergenz kann nicht gleichmäßig sein, da für jedes $k \in \mathbb{N}$ nach dem Zwischenwertsatz ein $x_k \in [0,1)$ existiert, so dass $f_k(x_k) = \frac{1}{2} = f_k(x_k) - f(x_k)$. Wählt man nun $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ erhält man einen Widerspruch.

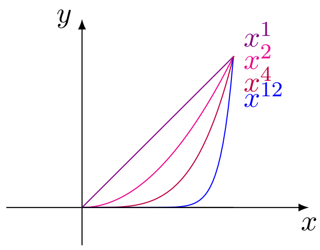

Abbildung 3.17: Illustration der Funktionenfolge aus Beispiel 3.3.22 (ii).

Als wichtiges Resultat halten wir fest

Satz 3.3.23: Eigenschaften der Grenzfunktion

Es seien I ein Intervall und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine auf I gleichmäßig konvergente Folge (gleichmäßig) stetiger Funktionen, dann ist die Grenzfunktion ebenfalls (gleichmäßig) stetig.

Beweis. Wir zeigen den Fall, dass die f_k stetig sind. Es sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall x \in I \forall k \in \mathbb{N} : k \geq N \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Weiter existiert aufgrund der Stetigkeit von f_N ein $\delta > 0$, so dass $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap I$. Damit folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sind die f_k gleichmäßig stetig, folgt die Aussage ähnlich. □

Beispiel 3.3.24. Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergieren innerhalb ihres Konvergenzradius gleichmäßig, das heißt setzt man $f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n$, so ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und die Folgenglieder sind stetig. Also sind Potenzreihen stetige Funktionen innerhalb ihres Konvergenzradius R. Ist $R>0$, so erhält man durch Einschränkung auf $[x_0-R+c, x_0+R-c]$ für ein beliebig kleines $c>0$ die gleichmäßige Stetigkeit von Potenzreihen auf jedem kompakten Intervall, das ganz innerhalb des Konvergenzbereichs liegt.

Die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihen folgt mit

Weierstraßsches Majorantenkriterium 3.3.25

Für $k\in\mathbb{N}_0$ seien $f_k: D\to\mathbb{R}$ mit $|f_k(x)|\le M_k$ für alle $x\in D$ und $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ sei konvergent, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent auf D.

Beweis. Es sei $\varepsilon>0$ und $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ so gewählt, dass $\sum_{k=n+1}^{m} M_k<\varepsilon$ für alle $m>n\ge n_0$. Dann ist

$$\left|\sum_{k=0}^{m} f_k(x)-\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$$

für alle $m>n\ge n_0$ und alle $x\in D$. Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium gleichmäßig auf D. □

Kapitel 4

Differenzialrechnung

In der linearen Algebra ließen sich Gleichungen, Gleichungssysteme aufgrund der Linearität leicht lösen. Für die von uns in der Analysis betrachteten Funktionen ist dies meist nicht so leicht, selbst wenn die Funktionen stetig sind, erhält man vielleicht nur die Existenz einer Lösung für eine gegebene Gleichung zum Beispiel über den Zwischenwertsatz. Die Lösung selbst zu bestimmen, ist dann aber mitunter sehr schwierig oder nur mit Näherungsverfahren möglich. In diesem Kapitel werden wir daher Funktionen lokal, das heißt in einer kleinen Umgebung eines Punktes, durch einfachere Funktionen (affine Funktionen der Form $ax+b$ und Polynome) annähern. Die zu erarbeitenden Techniken ermöglichen dann auch weitere Aussagen, etwa über das lokale Verhalten der Funktion.

4.1 Ableitungen

Dieser Abschnitt behandelt die grundlegenden Definitionen und Rechenregeln für differenzierbare Funktionen.

Definition 4.1.1: Differenzierbarkeit, Ableitung

Es seien $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x_0 \in D$. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar in* x_0 $:\Leftrightarrow$

$$\exists c \in \mathbb{R} : c = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\frac{d}{dx} f(x_0) = f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und nennen $f'(x_0)$ die *Ableitung* von f in x_0. f heißt *differenzierbar* auf D, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, die *Ableitung* von f. Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f auf D *stetig differenzierbar* und wir schreiben $f \in C^1(D)$.

Existieren für $x_0 \in \overline{D}$ die Grenzwerte

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ beziehungsweise}$$
$$f'(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

so heißen sie *rechtsseitige* beziehungsweise *linksseitige Ableitungen* von f in x_0 (vergleiche Definition 3.2.3).

Beispiele und Bemerkung 4.1.2. (i) Der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ beschreibt anschaulich die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ (vergleiche Abbildung 4.1). Der Grenzwert der Sekantensteigungen für $x \to x_0$, also die Ableitung in x_0 sofern existent, ist dann die Tangentensteigung im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

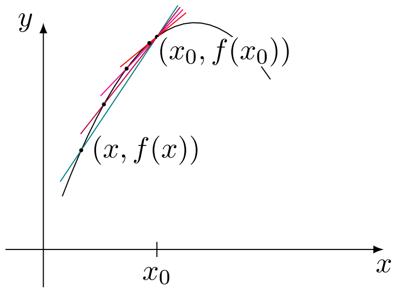

Abbildung 4.1: Der Differenzenquotient beschreibt die Steigung der Sekante durch $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$.

(ii) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dann ist für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a.$$

(iii) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Weiter sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$, dann ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x_0^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^n - 1}{\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)}$$
$$= x_0^{n-1} \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{x_0} \right)^k \right) = n x_0^{n-1}$$

mit Beispiel 3.2.9 (i). Für $x_0 = 0$ ist $\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} \to 0 = n \cdot 0^{n-1}$ für $x \to 0$.

(iv) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, dann ist mit $x = x_0 + h$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^h - 1\right)}{h} = e^{x_0}$$

nach Beispiel 3.2.9 (ii). Also gilt $(e^x)' = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(v) Die eben verwendete Technik $x = x_0 + h$ mit $h \in \mathbb{R}$ zu schreiben, kann nützlich sein. Der Grenzwert des Differenzenquotienten wird wie oben dann zu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Darstellungssatz 4.1.3

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ und eine in x_0 stetige Funktion $\varphi = \varphi_{x_0} : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = 0$ existieren, so dass für alle $x \in I$ die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \varphi_{x_0}(x) \cdot (x - x_0)$$

gilt. In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

Beweis. „$\Rightarrow$" Es sei f in x_0 differenzierbar. Wir definieren

$$\varphi_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0. \end{cases}$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{x \to x_0} \varphi_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0.$$

Für $x \neq x_0$ gilt weiter

$$(x - x_0)\varphi_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

also für alle $x \in I$ die gewünschte Darstellung.

„$\Leftarrow$" Aus der Darstellung folgt für $x \neq x_0$, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + \varphi_{x_0}(x) \text{ mit } \lim_{x \to x_0} \varphi_{x_0}(x) = 0,$$

also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c. \qquad \square$$

Als Folgerung erhalten wir mit Lemma 3.3.3

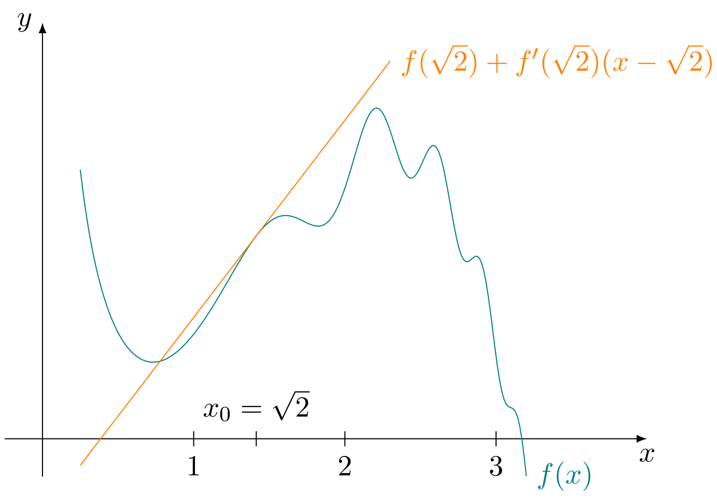

Abbildung 4.2: Zum Darstellungssatz, die Funktion $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ nähert den Graph der Funktion lokal durch eine affine Funktion an.

Satz 4.1.4

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, dann ist f in x_0 stetig.

Bemerkungen 4.1.5. (i) Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch: Ein Beispiel ist die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Diese ist in $x = 0$ stetig aber dort nicht differenzierbar, denn für $x < 0$ ist $\frac{|x|-0}{x-0} = -1 \to -1$ für $x \to 0$ und für $x > 0$ ist $\frac{|x|-0}{x-0} = 1 \to 1$ für $x \to 0$.

(ii) Tatsächlich gibt es stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in keinem Punkt differenzierbar sind. Zwei Beispiele hierfür sind die Weierstraßfunktion $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$ und van der Waerdens[1] Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \phi_0(2^k x)$, wobei $\phi_0(x) = \min\{\, |x - \lfloor x \rfloor| \,, |x - \lceil x \rceil| \,\}$ den Abstand von x zur nächsten ganzen Zahl bezeichnet (siehe Abbildung 4.3). Eine anschauliche Herleitung findet man in [3].

Satz 4.1.6: Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, dann ist f differenzierbar auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ und falls $R = +\infty$

[1] Bartel Leendert van der Waerden, 1903-1996, ndl. Mathematiker

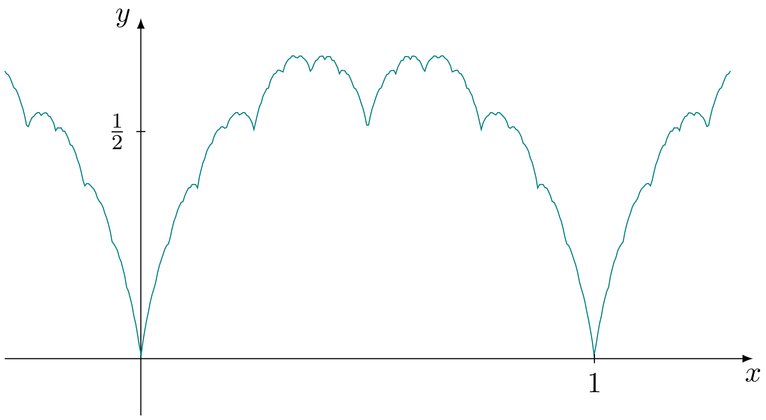

Abbildung 4.3: van der Waerdens überall stetige aber nirgends differenzierbare Funktion.

auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R \Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Beweisskizze. Nach Lemma 2.7.10 konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ und nach Beispiel 3.3.24 sogar gleichmäßig. Daher sind die Grenzwertprozesse vertauschbar und es folgt die Behauptung. □

Beispiele 4.1.7. (i) Damit erhalten wir einen alternativen Beweis für $(e^x)' = e^x$:

$$\frac{d}{dx} e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{k!}}_{=\frac{1}{(k-1)!}} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(ii) Sinus und Cosinus sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar:

$$\frac{d}{dx} \cos x = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sin x,$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k!)} = \cos x.$$

Ableitungsregeln 4.1.8

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktionen, dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

(i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (Linearität der Ableitung),

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel),

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (Quotientenregel).

Beweis. (I) Folgt aus den Grenzwertsätzen, da

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

(II) Folgt wie im Beweis der Grenzwertsätze

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}$$

mit Hilfe der Stetigkeit von g in x_0:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \right) \\ &\qquad = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

(III) Folgt mit Hilfe der Produktregel aus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{1}{g}(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} \lim_{x \to x_0} \left(-\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right). \end{aligned}$$

□

Beispiele 4.1.9. (i) Die Ableitung von $ax^m + bx^n$ ist $amx^{m-1} + bnx^{n-1}$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

(ii) Die Ableitung von $\sin x \cos x$ ist mit Beispiel 4.1.7 (ii)

$$(\sin x \cdot \cos x)' = \sin' x \cos x + \sin x \cos' x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

(iii) Die Ableitung von $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist

$$\frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Satz 4.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\end{aligned}$$

für $x \to x_0$, da aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 mit $x \to x_0$ auch $f(x) \to f(x_0)$. □

Beispiele 4.1.11. (i) $\frac{d}{dx} e^{x^2} = 2x e^{x^2}$,

(ii) $\frac{d}{dx} \sin(x^2 + 2) = \cos(x^2 + 2) \cdot 2x$.

(iii) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Für $x \neq 0$ gilt $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ und für $x = 0$ ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

da $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \to 0$ für $x \to 0$. Allerdings ist die Ableitung in $x = 0$ nicht stetig, wie man analog zu Beispiel 3.3.6 (iv) leicht sieht.

Satz 4.1.12: Ableitung der Umkehrfunktion

Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to J$ bijektiv. Wenn f in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ ist, dann ist auch f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset J \setminus \{ y_0 \}$ eine beliebige aber feste Folge mit $y_n \to y_0$ für $n \to \infty$. Dann existiert die (eindeutig bestimmte) Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I \setminus \{ x_0 \}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} x_n = f^{-1}(y_n)$ und es ist $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Daher folgt

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$ □

Beispiel 4.1.13. $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = e^x$ ist bijektiv und es gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = f(x) \neq 0.$$

Für $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \ln y$ gilt

$$\forall y \in (0, +\infty) \frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Hieraus folgt mit Hilfe der „Umrechnungsformel“ in Lemma 3.1.15, dass für beliebiges $q > 0$, $q \neq 1$,

$$(\log_q x)' = \frac{1}{\ln q \cdot x}.$$

Korollar 4.1.14

Für alle $x > 0$ und alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx} x^c = \frac{d}{dx} e^{c \ln x} = e^{c \ln x} \frac{c}{x} = c \cdot x^{c-1}.$$

Beispielsweise für $c = \frac{1}{2}$: $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Beispiele 4.1.15 (Ableitungen der Arcusfunktionen)**.**

(i) Es sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$, $f(x) = \sin x$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} = \arcsin : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und mit $y = \sin x$ gilt

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Analog zeigt man

(ii) $\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1, 1)$,

(iii) $\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$,

(iv) $\operatorname{arccot}' y = -\frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

Eine weitere Technik liefert

Beispiel 4.1.16 (Logarithmisches Differenzieren)**.** Für $a > 0$, $a \neq 1$ gilt $a^x = e^{\ln a \cdot x}$, also

$$(a^x)' = \left(e^{\ln a \cdot x}\right)' = \ln a e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot a^x.$$

Beispiel 4.1.17. Damit ist dann etwa für $x \in (0,1)$

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{2}^{\ln x \sin \frac{x^2}{x^3-1}}\right)' &= \ln\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^{\ln x \sin \frac{x^2}{x^3-1}}\left(\ln x \sin\frac{x^2}{x^3-1}\right)' \\
&= \ln\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^{\ln x \sin \frac{x^2}{x^3-1}}\left(\frac{\sin\frac{x^2}{x^3-1}}{x} + \ln x \cos\frac{x^2}{x^3-1}\cdot\left(\frac{x^2}{x^3-1}\right)'\right) \\
&= \ln\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^{\ln x \sin \frac{x^2}{x^3-1}}\left(\frac{\sin\frac{x^2}{x^3-1}}{x} + \ln x \cos\frac{x^2}{x^3-1}\,\frac{2x(x^3-1)-3x^4}{(x^3-1)^2}\right).
\end{aligned}
$$

4.2 Die Mittelwertsätze der Differenzialrechnung

Wir leiten im Folgenden einige wichtige und nützliche Eigenschaften differenzierbarer Funktionen her und legen die Grundsteine für eine Kurvendiskussion.

Definition 4.2.1: Lokale Extrema

Es seien $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Maximum* (*lokales Minimum*) :⇔

$$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D : f(x) \leq f(x_0)$$

beziehungsweise

$$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D : f(x) \geq f(x_0).$$

- Wir sagen kurz, dass f in x_0 ein *lokales Extremum* besitzt, wenn f in x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum besitzt.
- Ein lokales Extremum heißt *isoliert*, falls die strikte Ungleichung in der punktierten Umgebung gilt.

Beispiele 4.2.2. (i) Die Funktion $f(x) = c$ hat in jedem $x \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum und Minimum.

(ii) $f(x) = x^2$ hat in $x_0 = 0$ ein lokales, sogar ein isoliertes Minimum, denn $x^2 > 0$, falls $x \neq 0$.

Satz von Fermat[a] 4.2.3

[a] Pierre de Fermat, 1601 - 1665, frz. Mathematiker

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Wenn f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. O. B. d. A. besitze f in x_0 ein lokales Minimum. Das bedeutet, es existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset I$ und $\forall x \in U_\delta(x_0) f(x) \geq f(x_0)$. Es gilt daher

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \wedge f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Also folgt $f'(x_0) = 0$. □

Bemerkungen 4.2.4. (i) Der Satz von Fermat besagt, dass in einem Extremum die Tangente an die Funktion die Steigung 0 besitzt, das heißt parallel zur x-Achse verläuft.

(ii) Der Satz von Fermat liefert eine notwendige, keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum. Beispielsweise gilt $\left(x^3\right)' = 3x^2 = 0$ für $x = 0$, aber $f(x) = x^3$ hat in 0 kein lokales Extremum.

(iii) Wenn I nicht offen ist, kann x_0 auch ein Randpunkt sein. In diesem Fall muss bei einer lokalen Extremstelle nicht notwendigerweise $f'(x_0) = 0$ gelten.

(iv) Man sagt, $f : D \to \mathbb{R}$ besitzt in x_0 ein *globales Maximum* beziehungsweise *Minimum*, falls

$$\forall x \in D : f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_0).$$

Satz von Rolle[a] 4.2.5

[a]Michel Rolle, 1652-1719, frz. Mathematiker

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a, b) differenzierbar. Weiter gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

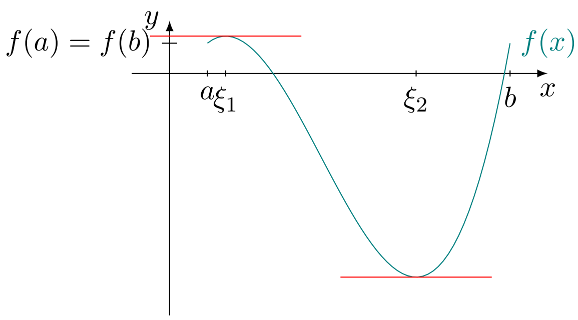

Abbildung 4.4: Zum Satz von Rolle.

Beweis. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum, Satz 3.3.14, gilt

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] \forall x \in [a, b] \left(f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \right).$$

Gilt $x_1 \in (a,b)$ oder $x_2 \in (a,b)$, so folgt aus dem Satz von Fermat, Satz 4.2.3, dass $f'(x_1) = 0$ oder $f'(x_2) = 0$. Gilt $x_1 \in \{ a, b \} \wedge x_2 \in \{ a, b \}$, dann liegen Maximum und Minimum auf dem Rand des Intervalls und nach Voraussetzung gilt

$$f(a) = f(b) = f(x_1) = f(x_2),$$

das heißt es ist $\forall x \in [a,b] f(x) = f(x_1)$. Demnach ist f auf $[a,b]$ konstant und folglich gilt $\forall x \in (a,b) f'(x) = 0$. □

Zweiter Mittelwertsatz 4.2.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Bemerkung 4.2.7. Gilt $\forall x \in (a,b) g'(x) \neq 0$ und $g(a) \neq g(b)$, so wird die behauptete Gleichheit aus Satz 4.2.6 oft in der Form

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

geschrieben.

Beweis von Satz 4.2.6. Wir definieren die Hilfsfunktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = f(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Dann ist h stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) und es gilt

$$h(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = h(b).$$

Nach dem Satz von Rolle, Satz 4.2.5, existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$h'(\xi) = f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) - g'(\xi)\,(f(b) - f(a)) = 0.$$ □

Korollar 4.2.8: Erster Mittelwertsatz

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b), dann gilt

$$\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der erste Mittelwertsatz besagt anschaulich, dass die Steigung der Tangente an die Kurve in mindestens einem Punkt ξ mit der mittleren Steigung (Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$) übereinstimmt (siehe Abbildung 4.5).

Ein theoretisches Hilfsmittel, wann zwei Funktionen gleich sind, liefert der folgende Satz. Man denke etwa an verschiedene Darstellungen einer Funktion.

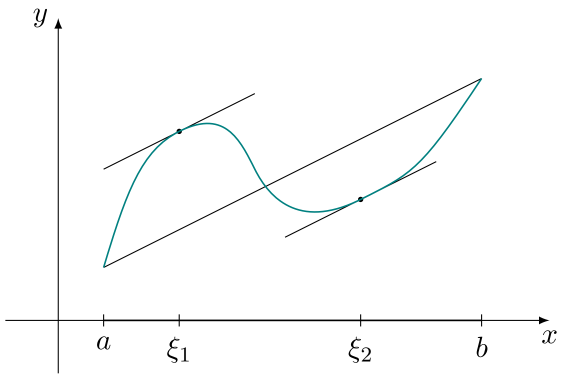

Abbildung 4.5: Zum ersten Mittelwertsatz.

Identitätssatz für differenzierbare Funktionen 4.2.9

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbare Funktionen, dann gilt

(i) $\forall x \in I f'(x) = 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in I f(x) = c$, das heißt wenn die Ableitung von f für alle $x \in I$ verschwindet, dann ist f konstant.

(ii) $\forall x \in I f'(x) = g'(x) \wedge \exists x_0 \in I f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow \forall x \in I f(x) = g(x)$.

Beweis. (I) Es sei $x_0 \in I$ beliebig aber fest, dann gilt nach dem ersten Mittelwertsatz

$$\forall x \in I \exists \xi \in (x, x_0) : f'(\xi)(x - x_0) = 0,$$

da $f'(\xi) = 0$ und damit folgt $f(x) = f(x_0)$ und da x_0 beliebig war, folgt, dass f konstant ist.

(II) Wir betrachten die Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$. Nach Voraussetzung gilt dann $\forall x \in I \; h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ und daher ist h konstant, zum Beispiel $\forall x \in I \; h(x) = c$. Weiter gilt $h(x_0) = 0$, also ist $c = 0$ und damit $\forall x \in I \; h(x) = 0$. □

Beispiele 4.2.10. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\ln(1 - x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$,

(ii) $(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$.

Beweis. (I) Wir definieren zwei Funktionen und zwar $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 - x)$ und $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$. Für alle $x \in (-1, 1)$ gilt mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe

$$f'(x) = \frac{-1}{1 - x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = g'(x)$$

und weiter ist $f(0) = g(0)$. Damit folgt die behauptete Gleichheit aus dem Indentitätssatz 4.2.9.

(II) Für $x \in (-1,1)$ setzen wir $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ und $g(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}$. Wir zeigen $\forall x \in (-1,1) g(x) = 1$ und damit die behauptete Identität. Zunächst gilt für alle $x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned}
(1+x)f'(x) &= (1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}kx^{k-1} = (1+x)\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^{k-1} \\
&= \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}\left(x^{k-1}+x^k\right) \\
&= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}x^k + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^k \\
&= \alpha + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\left(\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}\right)x^k = \alpha+\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \\
&= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = \alpha f(x),
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile $\binom{\alpha-1}{0} = \binom{\alpha}{0} = 1$ ausgenutzt haben. Damit gilt für alle $x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - f(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} \\
&= \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - (1+x)f'(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0
\end{aligned}$$

und weiter $g(0) = \frac{f(0)}{(1+0)^\alpha} = 1$. Demnach ist $\forall x \in (-1,1) g(x) = 1$ und damit folgt die Behauptung. ☐

Lemma 4.2.11: Monotoniekriterien für differenzierbare Funktionen

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt

(i) $\forall x \in I f'(x) \geq\ (>)\ 0 \Rightarrow f \nearrow\ (\uparrow)$ auf I.

(ii) $\forall x \in I f'(x) \leq\ (<)\ 0 \Rightarrow f \searrow\ (\downarrow)$ auf I.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, die weiteren folgen analog.

Es gelte $\forall x \in I f'(x) \geq 0$ und weiter seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Nach dem ersten Mittelwertsatz, Korollar 4.2.8, gilt

$$\exists \xi \in (x_1,x_2) f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

da $f'(\xi) \geq 0$ und $x_2 - x_1 > 0$, also folgt $f(x_2) \geq f(x_1)$ und damit die Behauptung. □

De L'Hospitalsche[a] Regel 4.2.12

[a] Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital, 1661-1704, frz. Mathematiker

Die Funktionen f und g seien auf dem offenen Intervall (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, differenzierbar und weiter sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$. Es sei

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ (der Fall „}\tfrac{0}{0}\text{“)}$$

oder

$$\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty.$$

Außerdem existiere der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, wobei bestimmte Divergenz zugelassen ist. Dann gibt es ein $b' \in \mathbb{R}$, $a < b' \leq b$ mit $g(x) \neq 0$ für $x \in (a, b')$; im Fall „$\frac{0}{0}$“ gilt dies für alle $x \in (a, b)$. Unter diesen Voraussetzungen existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt die de L'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Der Beweis in der folgenden Form ist aus [1, 5.4].

Beweis. (I) Zunächst zeigen wir im Fall „$\frac{0}{0}$“, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt: Ist $a \in \mathbb{R}$, dann kann man g in a durch $g(a) = 0$ stetig fortsetzen und aus dem Satz von Rolle folgt durch Widerspruch, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Denn nimmt man $g(x) = 0$ für ein $x \in (a, b)$ an, so existiert ein $\xi \in (a, x)$ mit $g'(\xi) = 0$. Im Fall $a = -\infty$ folgt aus $g(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (-\infty, b)$ aus dem Satz von Rolle analog zu oben, dass $g(x_0 - 1) \neq 0$ gilt und wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ folgt die Existenz eines $x_2 < x_1 := x_0 - 1$ mit $|g(x_2)| < |g(x_1)|$. Es gibt also ein lokales Extremum im Intervall (x_2, x_0). Nach dem Satz von Fermat ist dort die Ableitung 0 im Widerspruch zur Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$.

(II) Es sei $c := \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Falls $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dann wähle $c' \in \mathbb{R}$, $c' > c$. Es gibt dann ein $a' \in \mathbb{R}$, $a < a' \leq b$ mit

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < c'$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $a < x < a'$. Für $x, x' \in \mathbb{R}$, $a < x < x' < a'$, folgt aus dem Satz von Rolle, dass $g(x) \neq g(x')$, und aus dem zweiten Mittelwertsatz, dass

$$\frac{f(x') - f(x)}{g(x') - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < c' \tag{4.1}$$

für ein $\xi \in (x, x')$. Für $x \to a$ folgt im Fall „$\frac{0}{0}$“, dass $\frac{f(x')}{g(x')} \leq c'$ für $a < x' < a'$, weshalb

$$\limsup_{x' \to a} \frac{f(x')}{g(x')} \leq c' \text{ für alle } c' > c.$$

Deshalb ist

$$\limsup_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq c.$$

(III) Im Fall $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ erhalten wir nach Umformung und Division durch $g(x) \neq 0$ aus (4.1) für alle $x, x' \in \mathbb{R}$, $a < x < x' < a' \leq b$, dass

$$\frac{f(x) - f(x')}{g(x)} < c' \frac{g(x) - g(x')}{g(x)}$$

also

$$\frac{f(x)}{g(x)} < c' \left(1 - \frac{g(x')}{g(x)}\right) + \frac{f(x')}{g(x)} \text{ für alle } c' > c.$$

Für $x \to a$ folgt hieraus, dass

$$\limsup_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq c.$$

(IV) Falls $c \in \mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$, dann folgt analog zu (II) und (III), dass

$$\liminf_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \geq c.$$

Aus (II), (III) und (IV) folgt die de L'Hospitalsche Regel. □

Beispiele 4.2.13. (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp x}{1} = +\infty$, durch Iteration des Argumentes erhält man $\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$, das heißt die Exponentialfunktion wächst für $x \to +\infty$ schneller als jedes Polynom.

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\exp x}{x} = 0$,

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, für $x \to +\infty$ wächst der Logarithmus also langsamer als jedes Polynom.

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x^{-n}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(v) $\lim\limits_{x \to 0} x^x = \lim\limits_{x \to 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \to 0} x \ln x} = e^0 = 1$, wobei wir den Grenzwert aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion hineinziehen durften.

4.3 Der Satz von Taylor

Der Satz von Taylor[2] liefert nach der linearen Approximation von Funktionen über ihre Ableitungen eine Approximation durch Polynome und im günstigsten Fall eine Darstellung als Potenzreihe. Dies ist in der Praxis sehr nützlich, weil Polynome einfach zu untersuchen sind. Mit dem Satz von Taylor werden wir auch weitere Kriterien für eine Kurvendiskussion herleiten, wie sie vielleicht noch aus der Schule bekannt sind.

Definition 4.3.1: Ableitungen höherer Ordnung

(i) Es seien $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I, $x_0 \in I$ und $(f')'(x_0)$ existiere. Dann heißt

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) := (f')'(x_0) = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)(x_0)$$

die *zweite Ableitung* von f an der Stelle x_0.

(ii) Falls $f''(x)$ für alle $x \in I$ existiert, dann heißt f *zweimal differenzierbar* auf I. Die *zweite Ableitung* $f'' : I \to \mathbb{R}$ ist dann auf ganz I erklärt.

(iii) Ist zusätzlich f'' stetig auf I, so heißt f *zweimal stetig differenzierbar* auf I und wir schreiben kurz $f \in C^2(I)$.

(iv) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definieren wir rekursiv die *n-te Ableitung* $f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ und die Klasse $C^n(I)$ der auf I *n-mal stetig differenzierbaren Funktionen*.

(v) Existiert $f^{(n)}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt f *unendlich oft differenzierbar* im Punkt x_0. Ist $f^{(n)}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I$ erklärt, so heißt f *unendlich oft differenzierbar* auf I, $f \in C^\infty(I)$. In diesem Fall ist f automatisch auch unendlich oft stetig differenzierbar.

Satz 4.3.2

Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Es gilt f ist innerhalb des Konvergenzradius unendlich oft differenzierbar, die n-te Ableitung berechnet sich für $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < R$ zu

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n}$$

[2] Brook Taylor, 1685-1731, engl.. Mathematiker

und es gilt $f^{(n)}(x_0) = a_n n!$, also $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ und daher

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < R.$$

Der folgende Satz wäre mit der Forderung $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$ eine Anwendung dieses Satzes. Wir zeigen aber, dass es für Potenzreihen bereits genügt, wenn sie auf einer Folge übereinstimmen, die den Entwicklungspunkt als Häufungspunkt besitzt:

Identitätssatz für Potenzreihen 4.3.3

Es seien $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$ zwei Potenzreihen und ein $R > 0$, so dass f und g für $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < R$, konvergieren. Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < R \} = I$ eine Folge mit $x_k \to x_0$, $x_k \neq x_0$ und gilt $f(x_k) = g(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\forall x \in I\, f(x) = g(x) \wedge \forall k \in \mathbb{N}_0 a_k = b_k.$$

Beweis. Da f, g auf I stetige Funktionen sind, gilt

$$a_0 = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x_0) = b_0.$$

Wir betrachten die Funktionen $f_1(x) = \frac{f(x)-a_0}{x-x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(x - x_0)^k$ und $g_1(x) = \frac{g(x)-b_0}{x-x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(x - x_0)^k$. Diese sind als Potenzreihen wiederum stetig und es gilt $\forall k \in \mathbb{N}\, f_1(x_k) = g_1(x_k)$. Damit folgt

$$a_1 = f_1(x_0) = \lim_{k\to\infty} f_1(x_k) = \lim_{k\to\infty} g_1(x_k) = g_1(x_0) = b_1.$$

Durch vollständige Induktion folgt, dass die Funktionen $f_n(x) = \frac{f_{n-1}(x)-a_{n-1}}{x-x_0}$ und $g_n(x) = \frac{g_{n-1}(x)-b_{n-1}}{x-x_0}$ in allen Punkten x_k, $k \in \mathbb{N}$, übereinstimmen und deshalb mit der Stetigkeit $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Damit folgt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$. □

Definition 4.3.4: Taylorpolynom, Taylorreihe

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in I$ n-mal differenzierbar. Dann ist

$$T^{(n)}f(x_0, x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das n*-te Taylorpolynom* von f an der Stelle x mit dem *Entwicklungspunkt* x_0, wobei wir $f^{(0)} = f$ setzen. Ist f an der Stelle x_0 unendlich oft differenzierbar, so heißt die formale Reihe

$$Tf(x_0, x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die *Taylorreihe* von f an der Stelle x mit dem *Entwicklungspunkt* x_0.

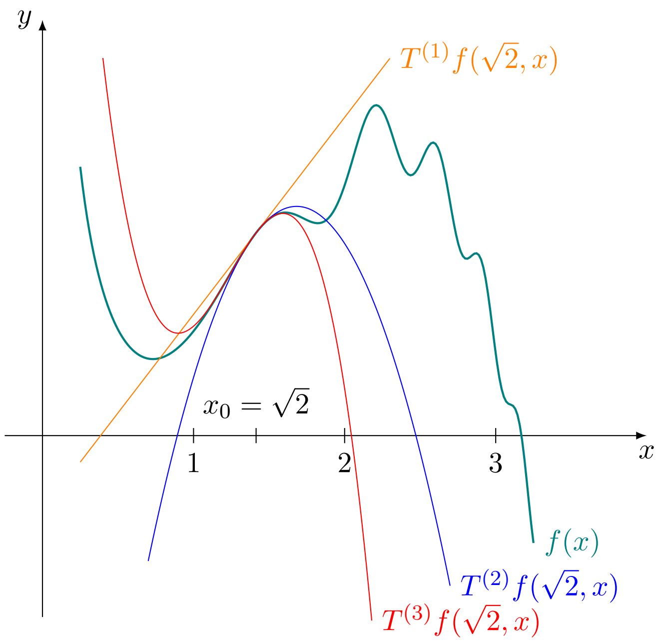

Abbildung 4.6: Taylorpolynome für $f(x) = x^2 \cdot \sin(x) + \frac{\cos(x^3 - 2x)}{x}$.

Satz von Taylor 4.3.5

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei f auf (a, b) n-mal differenzierbar und $(n-1)$-mal stetig differenzierbar in I. Dann gilt die *Taylorsche Formel*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= T^{(n-1)}f(x_0, x) + R_n(x_0, x) \end{aligned}$$

für alle $x \in I$ mit einem $\xi = x_0 + t(x - x_0)$ für ein $t \in (0, 1)$ und

$$R_n(x_0, x) := \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

ist das *Lagrangesche Restglied*[a].

[a] Joseph-Louis de Lagrange, 1736-1813, ital. Mathematiker

Beweis. Es seien $x \in I$, $x \neq x_0$ beliebig aber fest und sei die Konstante $A = A(x) \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$A(x) = \frac{f(x) - T^{(n-1)}f(x_0, x)}{(x - x_0)^n}.$$

Zu zeigen ist, dass $A = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ für ein ξ zwischen x_0 und x. Wir setzen

$$g(t) := f(t) - T^{(n-1)}f(x_0, t) - A(t - x_0)^n.$$

Dann ist $g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!A$, weshalb nur zu zeigen ist, dass $g^{(n)}(\xi) = 0$ für ein ξ zwischen x_0 und x. Mit Satz 4.3.2 gilt

$$\begin{aligned} g^{(k)}(x_0) = \Bigg(& f^{(k)}(t) - \sum_{\ell=k}^{n-1} \ell(\ell-1)\cdots(\ell-k+1)\frac{f^{(\ell)}(x_0)}{\ell!}(t-x_0)^{\ell-k} \\ & -n(n-1)\cdots(n-k+1)A(t-x_0)^{n-k}\Bigg)\Bigg|_{t=x_0} = 0 \end{aligned}$$

für $k = 0, \ldots, n-1$. Außerdem ist $g(x) = 0$ nach Definition von A. Der Satz von Rolle liefert also ein ξ_1 zwischen x_0 und x mit $g'(\xi_1) = 0$. Mit $g'(x_0) = 0$ existiert nach dem Satz von Rolle dann ein ξ_2 zwischen x_0 und ξ_1 mit $g''(\xi_2) = 0$. Nach n Schritten folgt $g^{(n)}(\xi_n) = 0$ für ein ξ_n zwischen x_0 und ξ_{n-1}. Setzen wir $\xi_n =: \xi$, dann folgt die Behauptung. □

Wir nutzen den Satz von Taylor und den Darstellungssatz 4.1.3, um Beiträge zur Kurvendiskussion herzuleiten. Als Folgerung aus dem Satz von Taylor ergibt sich

Lemma 4.3.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf (a, b). Dann gilt für $x, x_0 \in I$ die Taylorsche Formel

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R(x_0, x) \end{aligned}$$

mit einem ξ zwischen x_0 und x und

$$R(x_0, x) = \frac{f''(\xi) - f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Bemerkung 4.3.7. Da für die Funktion R gilt, dass $\lim_{x\to x_0} \frac{R(x_0,x)}{|x-x_0|^2} = 0$, bezeichnet man sie auch als $o(|x-x_0|^2)$. Allgemeiner sagt man: Eine Funktion f ist „klein o“ von einer Funktion g für $x \to x_0$, $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$, wenn $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ gilt, anschaulich bedeutet dies, dass f im Vergleich zu g vernachlässigbar klein wird (vergleiche Definition 2.2.15).

Analog übertragen sich die “groß O”-Notation und die asymptotische Gleichheit auf kontinuierliche Grenzwerte.

Satz 4.3.8: Notwendiges zweite-Ableitungskriterium

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar auf I und besitze in einem inneren Punkt $x_0 \in I$ ein Maximum beziehungsweise ein Minimum. Dann gilt

$$f''(x_0) \leq 0 \text{ beziehungsweise } f''(x_0) \geq 0.$$

Beweis. Nach dem Satz von Fermat 4.2.3 ist $f'(x_0) = 0$. Also reduziert sich die Taylorsche Formel auf

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o(|x-x_0|^2)$$

für $x \in I$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege in x_0 ein lokales Maximum vor. Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Also folgt

$$\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o(|x-x_0|^2) = f(x) - f(x_0) \leq 0$$

und das bedeutet

$$f''(x_0) + \frac{2o(|x-x_0|^2)}{|x-x_0|^2} \leq 0.$$

Der Grenzübergang $x \to x_0$ liefert dann die Behauptung $f''(x_0) \leq 0$. $\square$

Satz 4.3.9: Hinreichendes zweite-Ableitungskriterium

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf I. In einem inneren Punkt $x_0 \in I$ sei $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ beziehungsweise $f''(x_0) > 0$. Dann besitzt f an der Stelle x_0 ein isoliertes relatives Maximum beziehungsweise Minimum.

Beweis. Nach der Taylorschen Formel gilt für $x \in I$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o(|x-x_0|^2).$$

Es sei $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$\left| o(|x - x_0|^2) \right| \le \frac{|f''(x_0)|}{4} \, |x - x_0|^2$$

für $x \in U_\delta(x_0)$. Dann ergibt sich im Fall $f''(x_0) < 0$ die Ungleichung

$$f(x) - f(x_0) \le \frac{f''(x_0)}{4} \, |x - x_0|^2 < 0$$

für $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$.

Der Fall $f''(x_0) > 0$ liefert die entsprechende Behauptung analog. $\square$

Bemerkung 4.3.10. Dieses Kriterium verallgemeinert man mit dem Satz von Taylor leicht auf die Situation, dass $f \in C^{n+1}(I)$ und $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 1, \ldots, n$ und $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

Kapitel 5

Integralrechnung

5.1 Stammfunktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Integrationstheorie unter dem Aspekt der Umkehrung der Differenziation, den aus der Schule bekannten Aspekt der Flächenberechnung betrachten wir später. Auch diesen Ansatz kann man anschaulich motivieren: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$, beschreibe die Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse von a bis zum Punkt $x \in [a,b]$. Ist $x_0 \in [a,b]$, so ist die Fläche unter dem Graph zwischen x_0 und x durch $g(x) - g(x_0)$ gegeben. Diese Fläche können wir auch annähern durch das Rechteck mit der Grundseite der Länge $x - x_0$ und der Höhe $f(x_0)$. Das bedeutet $f(x_0)(x - x_0) \approx g(x) - g(x_0)$ beziehungsweise $f(x_0) \approx \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$. Ist f "gut genug", so wird die Näherung immer besser, wenn wir $x \to x_0$ betrachten. Im Grenzwert konvergiert die rechte Seite dann gegen $g'(x_0)$.

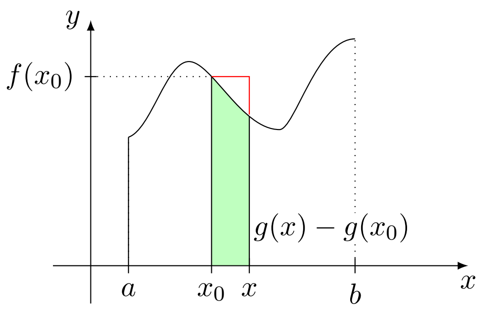

Abbildung 5.1: Graphische Motivation der Stammfunktion.

Definition 5.1.1: Stammfunktion, unbestimmtes Integral

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, F : I \to \mathbb{R}$. Wenn F auf I die Ableitung f besitzt, das heißt wenn $\forall x \in I F'(x) = f(x)$ gilt, so heißt F eine *Stammfunktion* oder ein *unbestimmtes Integral* von f, in Zeichen

$$F(x) = \int f(x)\, dx \text{ für } x \in I.$$

Wir erwähnen eine bekannte Klasse von Funktionen, die Stammfunktionen besitzen:

Satz 5.1.2

Jede auf einem kompakten Intervall I stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion.

Beweis. Das folgt mit Hilfe des Riemann-Integrals im ersten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Satz 5.5.6. □

Beispiel 5.1.3. Es sei $f(x) = 2$, dann ist $F(x) = 2x$ eine Stammfunktion von f, da $F'(x) = 2 = f(x)$ gilt. Wir schreiben auch $\int f(x)\, dx = 2x$. Es ist aber auch $F(x) = 2x + 3 = \int f(x)\, dx$.

Wenn eine Stammfunktion also nicht eindeutig ist, können die Unterschiede zwischen zwei Stammfunktionen einer Funktion dann beliebig sein und wäre das dann überhaupt ein sinnvoller Begriff?

Lemma 5.1.4

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, dann gilt

$$\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in I F_1(x) - F_2(x) = c.$$

Beweis. Die Differenzfunktion $F = F_1 - F_2$ ist in I differenzierbar und es gilt $F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Aus dem Identitätssatz für differenzierbare Funktionen 4.2.9 folgt daher die Behauptung. □

Aus dem vorangegangenen Kapitel erhalten wir durch Umformulierung der Situation "f ist gegeben, bestimme f'" nun mit bekanntem f', eine Stammfunktion f:

Stammfunktionen elementarer Funktionen 5.1.5

Es gilt, sofern nicht anders angegeben für alle $x \in \mathbb{R}$,

(i) $$\int (x-a)^n \, dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \quad \begin{cases} \text{für } x \neq a,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1 \text{ oder} \\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(ii) $$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| \text{ für } x \neq a.$$

(iii) $$\int x^\mu \, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \text{ für } x > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \mu \neq -1.$$

(iv) $$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \text{ für } a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

(v) $$\int a^x dx = \int e^{\ln a \, x} dx = \frac{a^x}{\ln a} \text{ für } a > 0,\ a \neq 1.$$

(vi) $$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x.$$

(vii) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \text{ für } x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \text{ für } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

(viii) $$\int \cot x \, dx = \ln \sin x \text{ für } \sin x > 0,$$
$$\int \tan x \, dx = -\ln \cos x \text{ für } \cos x > 0.$$

(ix) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \text{ für } |x| < 1.$$

(x) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x.$$

Beweis. Man differenziere die jeweils angegebene Stammfunktion. □

Potenzreihen stellen auf ihrem Konvergenzbereich stetige Funktionen dar und besitzen daher Stammfunktionen, wir können diese aber auch ohne Vorgriffe bereits angegeben, denn analog zur Differenziation werden die Stammfunktionen von Potenzreihen gliedweise bestimmt:

Satz 5.1.6: Stammfunktionen von Potenzreihen

Wenn die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < R$ konvergiert, dann gilt dort

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}.$$

Beweis. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}$ besitzt nach Lemma 2.7.10 den selben Konvergenzradius wie f. Deshalb ist sie dort differenzierbar und mit Satz 4.1.6 gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k. \qquad \square$$

Aus den Ableitungsregeln folgt sofort

Satz 5.1.7: Linearität der Stammfunktion

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Existieren $\int f(x)\,dx$ und $\int g(x)\,dx$ dann existieren auch $\int (f+g)(x)\,dx$ und $\int (c \cdot f)(x)\,dx$ und es gilt

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

und

$$\int (c \cdot f)(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx.$$

In der Regel wird man nicht das Glück haben, eine Stammfunktion von einer Funktion bestimmen zu müssen, die man als Linearkombination von bekannten Ableitungen identifizieren und mit Satz 5.1.5 und 5.1.7 lösen kann. Wir betrachten daher zwei Techniken, die auf entsprechende Ableitungsregeln zurückgehen und die es uns erlauben, Stammfunktionen weiterer Funktionen zu bestimmen.

Satz 5.1.8: Partielle Integration

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in I und die Funktion $f \cdot g'$ besitze eine Stammfunktion in I. Dann hat auch $f' \cdot g$ eine Stammfunktion und es gilt

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis. Dies ist eine Umformulierung der Produktregel:

$$(fg)' = f \cdot g' + f' \cdot g. \qquad \square$$

Beispiele 5.1.9. (i) (a) Wir bestimmen $\int xe^x\,dx$. Dafür setzen wir $f(x) = e^x$ mit $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x$ mit $g'(x) = 1$. Wir erhalten so

$$\int \underbrace{x}_{=g(x)} \underbrace{e^x}_{=f'(x)}\,dx = \underbrace{xe^x}_{f(x)g(x)} - \int \underbrace{1}_{=g'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=f(x)}\,dx = xe^x - e^x.$$

(b) Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - \int 2xe^x\,dt \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dt = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x.\end{aligned}$$

(ii) $\int t\cos t\,dt = t\sin t - \int \sin t\,dt = t\sin t + \cos t$.

(iii) In den folgenden beiden Beispielen fügen wir eine "intelligente Eins" ein, um die passende Struktur zu haben:

$$\int \ln t\,dt = t\ln t - \int t\cdot\frac{1}{t}\,dt = t\ln t - t.$$

(iv) $\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

(v)
$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \cos x\sin x - \int (-\sin x)\sin x\,dx \\ &= \cos x\sin x + \int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\,dx \\ &= \cos x\sin x + \int 1\,dx - \int \cos^2 x\,dx \\ &= \cos x\sin x + x - \int \cos^2\,dx.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int \cos^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\cos x\sin x + x\right).$$

Die Situation, dass man bei der partiellen Integration den zu integrierenden Term auf der rechten Seite wieder erhält und zur Bestimmung der Stammfunktion nutzen kann, wird auch als "Phönix aus der Asche"-Methode bezeichnet.

Oft ist nicht auf den ersten Blick klar, welchem Teil der Funktion man bei der partiellen Integration welche Rolle zuweisen muss, damit die Rechnung zum Erfolg führt. Teilweise hilft das Einfügen einer "nahrhaften Null", manchmal ist mehrfache Anwendung von partieller Integration notwendig – in diesem Fall ist darauf zu achten, dass man nicht durch eine Unaufmerksamkeit einen vorherigen Schritt einfach wider rückgängig macht.

Die zweite Integrationstechnik geht auf die Kettenregel zurück:

Satz 5.1.10: Substitutionsregel

Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei Intervalle, $f : I \to J$ differenzierbar und $g : J \to \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion im Intervall J, dann besitzt die Funktion $g \circ f \cdot f' : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion und für $t \in I$ gilt die *Substitutionsregel*

$$\int g(x)\,dx\Big|_{x=f(t)} = \int g(f(t))f'(t)\,dt.$$

Beweis. Es sei $G(x) = \int g(x)dx$ eine Stammfunktion von g, dann ist für alle $x \in J$ $G'(x) = g(x)$. Nach der Kettenregel gilt für $t \in I$ außerdem

$$(G \circ f)'(t) = (G(f(t)))' = G'(f(t)) \cdot f'(t) = g(f(t)) \cdot f'(t) = \big((g \circ f) \cdot f'\big)(t).$$

Also ist $G \circ f$ eine Stammfunktion von $(g \circ f) \cdot f'$ im Intervall I und es gilt weiter

$$\int g(x)\,dx\Big|_{x=f(t)} = G(f(t)) = \int g(f(t))f'(t)\,dt. \qquad \square$$

Korollar 5.1.11

Ist f auf I umkehrbar, so erhält man durch Einsetzen die häufig nützlichere Form der *Substitutionsregel*:

$$\int g(x)\,dx = \int g(f(t)) \cdot f'(t)\,dt\Big|_{t=f^{-1}(x)}.$$

Beispiele 5.1.12. (i) Wir bestimmen $\int te^{t^2}dt$ und setzen dafür $f(t) = t^2$ mit $f'(t) = 2t$ und $g(x) = e^x$. Die Motivation ist, dass einerseits dadurch der Term e^{t^2} verschwindet und andererseits man f' schon fast im Integral stehen hat. Genauer hat das Integral dann die Form $\frac{1}{2}\int g(f(t))f'(t)\,dt$. Die Funktion g besitzt die Stammfunktion $G(x) = e^x$ und nach der Substitutionsregel ist die gesuchte Stammfunktion daher unter Berücksichtigung des Vorfaktors $\frac{1}{2}G(x)\big|_{x=f(t)} = \frac{e^{t^2}}{2}$. Manchmal ist die folgende, durch unsere Definition nicht legitimierte, Schreibweise praktisch: Wir setzen $f(t) = t^2$, dann ist $\frac{df}{dt} = 2t$ also "$df = 2t\,dt$" oder $dt = \frac{df}{2t}$. Beim Einsetzen kürzt sich dann t und wir erhalten

$$\int te^{t^2}dt = \int e^f\frac{df}{2} = \frac{e^f}{2} = \frac{e^{t^2}}{2},$$

wobei wir im letzten Schritt zurücksubstituiert haben.

(ii) $\int \tan t\,dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt$. Wir setzen $u = \cos t$, dann ist $du = -\sin t\,dt$ und demnach

$$\int \tan t\,dt = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| = -\ln|\cos t|.$$

Diese Situation mit $\int \frac{f'}{f}\,dx$ führt ganz allgemein auf $\ln|f(x)|$ (siehe auch Beispiel 5.1.13).

(iii) Wir betrachten $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Da $|x| \leq 1$ gelten muss, subsituieren wir $x = \sin t$, dann ist $\frac{dx}{dt} = \cos t$ beziehungsweise $dx = \cos t\,dt$. Damit haben wir mit dem Satz des Pythagoras 3.1.17

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt &= \int \cos t \cos t\,dt \\ &= \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(\cos t \sin t + t)\end{aligned}$$

nach Beispiel 5.1.9 (v). Rücksubstitution unter Verwendung von $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ liefert

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right).$$

Auch bei der Substitution gibt es keine allgemeine Regel, wie man auf die zu substituierende Variable kommt. Mit etwas Übung, Probieren und Betrachtung der noch nicht passenden Terme kann man aber zum Erfolg kommen.

Im Allgemeinen wird die Bestimmung einer Stammfunktion mehrfache Anwendungen und Kombinationen von allen möglichen Techniken erfordern. Wir erwähnen noch zwei Kniffe, mit denen man es sich manchmal einfacher machen kann.

Beispiele 5.1.13. Allgemein gilt unter den Voraussetzungen für partielle Integration beziehungsweise die Substitutionsregel für eine Funktion f

(i) $\int f(x)f'(x)dx = f(x)f(x) - \int f'(x)f(x)dx$ und daher

$$\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}(f(x))^2.$$

(ii) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$, falls $f(x) \neq 0$.

5.2 Rationale Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Integration rationaler Funktionen beschäftigen. Rationale Funktionen sind nach Definition 3.1.9 Quotienten von Polynomen. Deshalb erinnern wir zunächst an ein paar Aussagen über Polynome und komplexe Zahlen.

Polynome 5.2.1. (i) Jedes Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$, n-ten Grades besitzt genau n (komplexe) Nullstellen.

(ii) Jedes Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ vom Grad n besitzt eine Produktdarstellung der Form

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{p_k}, \tag{5.1}$$

wobei $r \in \{1, \ldots, n\}$, z_k für $k = 1 \ldots, r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von P und $p_k \in \mathbb{N}$ für $k = 1, \ldots, r$ mit $\sum_{k=1}^{r} p_k = n$ die Vielfachheiten der Nullstellen sind.

Wir vereinfachen das Problem, indem wir es auf die Integration von Polynomen und *echt gebrochen rationalen Funktionen* zurückführen. Polynome können wir bereits integrieren und für echt gebrochen rationale Funktionen werden wir die Situation auf wenige Spezialfälle zurückführen können. Zunächst betrachten wir

Euklidischer[a] Algorithmus 5.2.2

[a]Euklid von Alexandria, ca. 300 v. Chr., gr. Mathematiker

Es seien P und $Q \neq 0$ zwei Polynome. Dann gibt es zwei eindeutig bestimme Polynome P_1 und P_2, so dass Grad $P_2 <$ Grad Q und für alle $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = P_1(z)Q(z) + P_2(z).$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $Q(z) \neq 0$ bedeutet dies also

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = P_1(z) + \frac{P_2(z)}{Q(z)}.$$

Das erreicht man durch Polynomdivision. Wir können uns also darauf beschränken, dass $R = \frac{P}{Q}$ *echt gebrochen* ist, das heißt Grad $P <$ Grad Q. Das Verfahren entspricht der Division mit Rest: Sind $p, q \in \mathbb{N}$, so existieren eindeutig bestimmte $p_1, p_2 \in \mathbb{N}_0$, so dass $p = p_1 \cdot q + p_2$ mit $0 \leq p_2 < q$. Wir betrachten zunächst ein paar Beispiele, in denen Q P teilt, das bedeutet, Q lässt sich bis auf einen konstanten Faktor als ein Teilprodukt aus der Darstellung (5.1) darstellen – besitzt also höchstens die Nullstellen von P, das Restpolynom P_2 ist daher hier Null. Im Allgemeinen ist das nicht so, in Beispiel 5.2.7 betrachten wir diese Situation exemplarisch.

Beispiel 5.2.3 (Polynomdivision, Euklidischer Algorithmus I)**.** Wir betrachten das Polynom $P(x) = x^4 + \frac{x^3}{2} - 4x^2 - \frac{x}{2} + 3$ und raten eine erste Nullstelle $x_1 = 1$. Durch Polynomdivision erhalten wir ein Polynom Q, so dass $P(x) = (x-1)Q(x)$ gilt:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{1}{2}x + 3\big) : \big(x - 1\big) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3 \\
\underline{\;-x^4 \;\; + x^3\;} \\
\qquad\quad \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 \\
\qquad \underline{-\frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2} \\
\qquad\qquad\quad -\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\
\qquad\qquad\quad \underline{\;\;\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -3x + 3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\;\;\;3x - 3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Damit ist $P(x) = \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x\right)(x-1)$.

Beispiel 5.2.4 (Polynomdivision, Euklidischer Algorithmus II)**.** Wir betrachten $P(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 4x - 4$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^5 + 3x^4 + 4x^3 \qquad\quad - 4x - 4\big) : \big(x - 1\big) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 \\
\underline{\;-x^5 \;\; + x^4\;} \\
\qquad\quad 4x^4 + 4x^3 \\
\qquad \underline{-4x^4 + 4x^3} \\
\qquad\qquad\quad 8x^3 \\
\qquad\qquad \underline{-8x^3 + 8x^2} \\
\qquad\qquad\qquad 8x^2 - 4x \\
\qquad\qquad\quad \underline{-8x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 4x - 4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-4x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Es gilt: $P(x) = (x-1)(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4)$. Das verbleibende Polynom hat keine reellen Nullstellen mehr, denn

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = (x^2 + 2x + 2)^2.$$

$x^2 + 2x + 2$ hat die komplexen Nullstellen $x_3 = -1 + i$ und $x_4 = -1 - i = \overline{x_3}$. Damit gilt

$$P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)^2 = (x-1)^2(x + 1 - i)^2(x + 1 + i)^2.$$

Wir erwähnen nun eine Darstellungsmöglichkeit für echt gebrochen rationale Funktionen, deren Terme eine einfachere Bestimmung der Stammfunktion erlauben. Zusammen mit dem euklidischen Algorithmus können wir dann rationale Funktionen integrieren. Einen Beweis des folgenden Satzes findet man in [1, C.3].

Partialbruchzerlegung 5.2.5

Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine echt gebrochene rationale Funktion und Q durch die Produktdarstellung

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{p_k}$$

gegeben. Dann besitzt R für $z \notin \{ z_1, \dots, z_r \}$ eine *Partialbruchdarstellung* der Form

$$\begin{aligned} R(z) &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{p_k} \frac{C_k^{(\ell)}}{(z - z_k)^\ell} \\ &= \frac{C_1^{(1)}}{z - z_1} + \dots + \frac{C_1^{(p_1)}}{(z - z_1)^{p_1}} + \dots + \frac{C_r^{(p_r)}}{(z - z_r)^{p_r}} \end{aligned}$$

mit Konstanten $C_k^{(\ell)} \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, r$, $\ell = 1, \dots, p_k$.

Bei der Betrachtung reeller Polynome wäre es unnatürlich, eine Darstellung mit komplexen Koeffizenten zu verwenden. Durch folgende Betrachtung erhalten wir aus der Darstellung in Satz 5.2.5 eine rein reelle Darstellung einer rationalen Funktion: Wenn $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle eines Polynoms P mit reellen Koeffizienten ist, so ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von P mit derselben Vielfachheit. Das sieht man leicht: Es sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$. Ist z_0 eine Nullstelle von P, so gilt

$$0 = \overline{0} = \overline{P(z_0)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0}^k = P(\overline{z_0}).$$

Faktorisiert man diese Nullstelle heraus, das heißt, schreibt man $P(x) = (x - z_0)^m \cdot Q(x)$ mit einem Polynom Q mit $Q(z_0) \neq 0$, dann folgt, dass auch $\overline{z_0}$ die Vielfachheit m hat.

Fasst man nun solche Paare in der Produktdarstellung von P zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n \prod_{k=1}^{r_1} (z - x_k)^{p_k} \prod_{k=r_1+1}^{r_2} ((z - z_k)(z - \overline{z_k}))^{p_k} \\ &= a_n \prod_{k=1}^{r_1} (z - x_k)^{p_k} \prod_{k=r_1+1}^{r_2} (z^2 - 2 \operatorname{Re} z_k z + |z_k|^2)^{p_k} \end{aligned}$$

mit reellen Nullstellen x_k und echt komplexen Nullstellen z_k. Damit haben wir im Reellen folgende Darstellung für $P(x)$:

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{t_1} \cdots (x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{t_\ell}$$

mit $p_1 + \cdots + p_k + 2(t_1 + \cdots + t_\ell) = n$, wobei die quadratischen Polynome der Form $x^2 + b_j x + c_j$ keine reellen Nullstellen haben.

Reelle Partialbruchzerlegung 5.2.6

Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine echt gebrochene rationale Funktion und Q möge durch die reelle Produktdarstellung

$$Q(x) = (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{t_1} \cdots (x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{t_\ell}$$

wie oben gegeben sein, dann besitzt R eine *Partialbruchdarstellung* der Form

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{A_i^{(j)}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{t_i} \frac{B_i^{(j)} x + C_i^{(j)}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_i^{(1)}}{x - x_i} + \cdots + \frac{A_i^{(p_i)}}{(x - x_i)^{p_i}} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{B_i^{(1)} x + C_i}{x^2 + b_i x + c_i} + \cdots + \frac{B_i^{(t_i)} x + C_i^{(t_i)}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{t_i}} \right) \end{aligned}$$

mit $A_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ für $i = 1 \ldots, k$, $j = 1, \ldots, p_i$ und $B_i^{(j)}, C_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, \ell$, $j = 1, \ldots, t_i$.

Beispiel 5.2.7 (Einfache Partialbruchzerlegung)**.** Wir betrachten die rationale Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit den Polynomen $P(x) = 2x^2$ und $Q(x) = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$ mit den Nullstellen $2, -1$. Da $\operatorname{Grad} P = 2 = \operatorname{Grad} Q$ führen wir zunächst eine Polynomdivision durch: Es gilt

$$2x^2 : (x^2 - x - 2) = 2 + \frac{2x + 4}{x^2 - x - 2}.$$

Aus dem Satz über die reelle Partialbruchdarstellung ist bekannt, dass es Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ geben muss, so dass

$$R_1(x) = \frac{2x + 4}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}.$$

Wir bestimmen A und B zur Illustration durch drei verschiedene Methoden:

(i) Mit Hilfe von Grenzwerten:

$$A = \lim_{x \to 2} (x - 2) R_1(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x + 4}{x + 1} = \frac{8}{3},$$

$$B = \lim_{x \to -1} (x + 1) R_1(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x + 4}{x - 2} = -\frac{2}{3}.$$

Diese Methode funktioniert nur bei den Koeffizienten zu den Termen mit höchster Ordnung (also $\frac{A_k^{(p_k)}}{(x - x_k)^{p_k}}$).

(ii) Durch Wertevergleich: $R_1(-2) = 0$, $R_1(0) = -2$, also

$$0 = \frac{A}{-2-2} + \frac{B}{-2+1} = -\frac{1}{4}A - B,$$
$$-2 = \frac{A}{-2} + \frac{B}{1} = -\frac{1}{2}A + B.$$

Daraus folgt $-2 = -\frac{3}{4}A$, also $A = \frac{8}{3}$ und damit $B = -\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$.
Für diese Methode setzt man an so vielen verschiedenen Stellen außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms Werte für x ein wie es Koeffizienten gibt und erhält dann ein lineares Gleichungssystem in den Koeffizienten.

(iii) Über Koeffizientenvergleich: Es ist

$$Q(x)R_1(x) = 2x + 4 = A(x+1) + B(x-2) = x(A+B) + (A-2B),$$

wie man mit Hilfe der Produktdarstellung von Q sieht. Der Koeffizientenvergleich der Faktoren von x^k, $k = 0, 1$, liefert

$$2 = A + B, \; 4 = A - 2B.$$

Daraus erhält man $3A = 8$ und in Folge $B = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$.
Bei dieser Methode nutzt man aus, dass die Monome $p_k(x) = x^k$ für $k = 0, \ldots, n = \max\{\,\text{Grad}\,P, \text{Grad}\,Q\,\}$ linear unabhängig sind und das Polynom auf der rechten Seite daher genau dann mit dem auf der linken Seite übereinstimmt, wenn die jeweiligen Faktoren für x^k, $k = 0, \ldots, n$, übereinstimmen. Auch dieses Verfahren führt auf ein lineares Gleichungssystem mit den gesuchten Koeffizienten als Unbekannten.

Beispiel 5.2.8 (Partialbruchzerlegung)**.** Es sei $x \neq 1$ und

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 7}{(x^3 + x^2 - 2)^2} = \frac{x^2 + 2x + 7}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)^2},$$

dann besitzt R eine Darstellung der Form

$$R(x) = \frac{A_1^{(1)}}{x-1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-1)^2} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + 2x + 2} + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Wir bestimmen $A_1^{(2)}$ über einen Grenzwert:

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} &= (x-1)^2 R(x)\big|_{x=1} = \Bigg\{ A_1^{(1)}(x-1) + A_1^{(2)} \\ &\quad + \left(\frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + 2x + 2} + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{(x^2 + 2x + 2)^2} \right)(x-1)^2 \Bigg\}\Bigg|_{x=1} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 7}{(x^2 + 2x + 2)^2}\Bigg|_{x=1} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Wir könnten jetzt den gewonnenen Term von R subtrahieren und das Verfahren fortsetzen oder die komplexen Nullstellen bestimmen und das Verfahren auf die Terme anwenden. Wir multiplizieren stattdessen die Gleichung oben mit dem Nennerpolynom und erhalten

$$\begin{aligned}
Q(x)R(x) &= x^2+2x+7\\
&= A_1^{(1)}(x-1)(x^2+2x+2)^2 + A_1^{(2)}(x^2+2x+2)^2\\
&\qquad + (B_1^{(1)}x + C_1^{(1)})(x-1)^2(x^2+2x+2)\\
&\qquad + (B_1^{(2)}x + C_1^{(2)})(x-1)^2\\
&= x^5(A_1^{(1)} + B_1^{(1)})\\
&\qquad + x^4(3A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + C_1^{(1)})\\
&\qquad + x^3(4A_1^{(1)} + 4A_1^{(2)} - B_1^{(1)} + B_1^{(2)})\\
&\qquad + x^2(8A_1^{(2)} - 2B_1^{(1)} - C_1^{(1)} - 2B_1^{(2)} + C_1^{(2)})\\
&\qquad + x(-4A_1^{(1)} + 8A_1^{(2)} + 2B_1^{(1)} - 2C_1^{(1)} + B_1^{(2)} - 2C_1^{(2)})\\
&\qquad - 4A_1^{(1)} + 4A_1^{(2)} + 2C_1^{(1)} + C_1^{(2)}.
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned}
0 &= A_1^{(1)} + B_1^{(1)},\\
0 &= 3A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + C_1^{(1)},\\
0 &= 4A_1^{(1)} + 4A_1^{(2)} - B_1^{(1)} + B_1^{(2)},\\
1 &= 8A_1^{(2)} - 2B_1^{(1)} - C_1^{(1)} - 2B_1^{(2)} + C_1^{(2)},\\
2 &= -4A_1^{(1)} + 8A_1^{(2)} + 2B_1^{(1)} - 2C_1^{(1)} + B_1^{(2)} - 2C_1^{(2)},\\
7 &= -4A_1^{(1)} + 4A_1^{(2)} + 2C_1^{(1)} + C_1^{(2)}.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem wird gelöst durch

$$(A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, C_1^{(1)}, C_1^{(2)}) = \left(-\frac{12}{25}, \frac{2}{5}, \frac{12}{25}, \frac{4}{5}, \frac{26}{25}, \frac{7}{5}\right).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
R(x) = \frac{x^2+2x+7}{(x^3+x^2-2)^2} &= -\frac{12}{25(x-1)} + \frac{2}{5(x-1)^2}\\
&\qquad + \frac{12x+26}{25(x^2+2x+2)} + \frac{4x+7}{5(x^2+2x+2)^2}.
\end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen 5.2.9. Aufgrund der Linearität des Integrals und der reellen Partialbruchzerlegung genügt es nun offenbar, Ausdrücke der Form

$$\frac{1}{(x-c)^\mu},\ \frac{1}{(x^2+bx+c)^\mu},\ \frac{x}{(x^2+bx+c)^\mu}$$

mit Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in \mathbb{R} x^2+bx+c \neq 0$ zu integrieren. Es gilt

(i) $$\int \frac{dx}{x-c} = \ln|x-c|.$$

(ii) $$\int \frac{dx}{(x-c)^\mu} = \frac{1}{(1-\mu)(x-c)^{\mu-1}} \text{ für } \mu > 1 \text{ .}$$

(iii) $$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4}} \\ &= \frac{4}{4c-b^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.\end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+bx+c}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx - \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| - \frac{b}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.\end{aligned}$$

(v) $$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^\mu} &= \frac{1}{(\mu-1)(4c-b^2)}\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^{\mu-1}} \\ &\quad + \frac{2(2\mu-3)}{(\mu-1)(4c-b^2)}\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^{\mu-1}}\end{aligned}$$

für $\mu > 1$, denn es gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^{\mu-1}} &= \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}\right)^{\mu-1}} \\ &= \left(\frac{4}{4c-b^2}\right)^{\mu-1}\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2+1\right)^{\mu-1}} \\ &= \left(\frac{4}{4c-b^2}\right)^{\mu-\frac{3}{2}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{\mu-1}}\Bigg|_{t=\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}}.\end{aligned}$$

Wir berechnen durch partielle Integration, dass

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^{\mu-1}} = \frac{t}{(t^2+1)^{\mu-1}} + 2(\mu-1)\int \frac{t^2}{(t^2+1)^\mu}dt.$$

Wegen

$$\frac{t^2}{(t^2+1)^\mu} = \frac{1}{(t^2+1)^{\mu-1}} - \frac{1}{(t^2+1)^\mu}$$

gilt

$$(2\mu-3)\int \frac{dt}{(t^2+1)^{\mu-1}} = -\frac{t}{(t^2+1)^{\mu-1}} + 2(\mu-1)\int \frac{dt}{(t^2+1)^\mu},$$

und deshalb folgt

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^{\mu-1}} \\
&= \frac{1}{2\mu-3}\left(\frac{4}{4c-b^2}\right)^{\mu-\frac{3}{2}} \left(-\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} \frac{1}{\left(\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2+1\right)^{\mu-1}} \right. \\
&\qquad \left. +2(\mu-1)\int \frac{dt}{(t^2+1)^\mu}\bigg|_{t=\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}} \right) \\
&= \frac{1}{2\mu-3}\left(\frac{4}{4c-b^2}\right)^{\mu-\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{4c-b^2}}\left(\frac{4c-b^2}{4}\right)^{\mu-1} \frac{2x+b}{\left(\frac{2x+b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}} \right. \\
&\qquad \left. +2(\mu-1)\left(\frac{4c-b^2}{4}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2(2\mu-3)}\left(\frac{-(2x+b)}{(x^2+bx+c)^{\mu-1}} + (\mu-1)(4c-b^2)\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^\mu}\right).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die behauptete Rekursionsformel.

(vi) Für $\mu > 1$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x}{(x^2+bx+c)^\mu}\,dx \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^\mu}dx - \frac{b}{2}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^\mu}dx \\
&\qquad = -\frac{1}{2(\mu-1)}\frac{1}{(x^2+bx+c)^{\mu-1}} - \frac{b}{2}\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^\mu}.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wie damit den

Satz über die Integration rationaler Funktionen 5.2.10

Es sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine nicht notwendigerweise echt gebrochen rationale Funktion. $Q(x)$ sei durch die Produktdarstellung

$$Q(x) = (x-x_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{\nu_k} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_\ell x+c_\ell)^{\mu_\ell}$$

gegeben, dabei sind $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von $Q(x)$ mit den Vielfachheiten $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{N}$. Weiter sind $x^2+b_1x+c_1$, $\ldots, x^2+b_\ell x+c_\ell$ paarweise verschiedene quadratische Polynome, welche keine reelle Nullstellen besitzen, das heißt es gilt $4c_1 - b_1^2, \ldots, 4c_\ell - b_\ell^2 > 0$, und $\mu_1, \ldots, \mu_\ell \in \mathbb{N}$. Dann gilt eine Darstellung der Form

$$\int R(x)\,dx = S(x) + \sum_{i=1}^{k} A_i \ln|x-x_i| + \sum_{j=1}^{\ell} \left(B_j \ln\left|x^2+b_jx+c_j\right| + C_j \arctan \frac{2x+b_j}{\sqrt{4c_j - b_j^2}} \right).$$

Dabei ist $S(x)$ eine rationale Funktion, welche echt gebrochen ist, falls $R(x)$ es ist, und $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_\ell, C_1, \ldots, C_\ell \in \mathbb{R}$.

Beispiele 5.2.11. (i) Es sei $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$, dann ist für $x \neq 0, 1$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Leftrightarrow 1 = A(x-1) + Bx$$
$$\Leftrightarrow 1 = x(B+A) - A \Leftrightarrow A = -1,\ B = 1.$$

Also $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ und daher gilt

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \ln|x-1| - \ln|x|.$$

(ii) Es sei $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2(x+1)}$, dann gilt für $x \neq 0, -1$

$$\frac{x^2+2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2+2 = Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2 = x^2(A+C) + x(A+B) + B$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C &= 1 \\ A+B &= 0 \\ B &= 2 \end{cases} \Rightarrow B = 2,\ A = -2,\ C = 3.$$

Damit ist

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{2}{x^2}dx + \int \frac{3}{x+1}dx$$
$$= -2\ln|x| - \frac{2}{x} + 3\ln|x+1|\,.$$

(iii) Es sei $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$, dann ist für $x \neq 0$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow A=1,\ B=-1,\ C=0,$$

das heißt $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}$. Mit Beispiel 5.1.13 folgt dann

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|.$$

Bemerkung 5.2.12. Durch Substitution lassen sich die Integrale weiterer Funktionen auf die Integration rationaler Funktionen zurückführen, diese sogenannten *elementar integrierbaren Funktionen* findet man in den Lehrbüchern, siehe zum Beispiel [1, 7.5] oder [5, § 11]. Bezeichnet $R(x,y)$ eine rationale Funktion in x und y, etwa $\frac{2x^3-xy^2+y}{xy^2+x^2y}$, so existieren beispielsweise

(i) $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\int R\left(e^{ax}\right)\,dx$, $\int R(\sinh ax, \cosh ax)\,dx$,

(iv) $\int R(\sin ax, \cos ax)\,dx$,

(v) $\int R(x, \sqrt{x^2+bx+c})\,dx$.

Beispiel 5.2.13 (Aus [5, § 11])**.**

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{2+x+\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx \overset{t=x+2}{=} \int \frac{\sqrt{t^2+1}}{t+\sqrt{t^2+1}}\,dt$$
$$\overset{t=\sinh s}{=} \int \frac{\cosh^2 s}{\sinh s + \cosh s}\,ds = \frac{1}{4}\int \frac{e^{2s}+2+e^{-2s}}{e^s}\,ds$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^s - 2e^{-s} - \frac{1}{3}e^{-3s}\right).$$

Mit $s = \operatorname{Arsinh} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) = \ln\left(x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}\right)$ gilt mit $A = x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{2+x+\sqrt{x^2+4x+5}} dx = \frac{A}{4} - \frac{1}{2A} - \frac{1}{12A^3}.$$

5.3 Das Riemannsche Integral

Berechnung des Flächeninhalts 5.3.1. Es seien $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die für die Anschauung als nicht-negativ angenommen wird. Wir wollen den Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion bestimmen. Näherungsweise können wir den Inhalt bestimmen, indem wir die Fläche durch geeignet gewählte rechteckige Streifen annähern und die Flächeninhalte der Streifen aufsummieren. Konkret unterteilen wir das Intervall dazu in n Teilintervalle mit den Grenzen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Diese Teilintervalle bilden die Grundseiten der Rechtecke. In jedem Teilintervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ wählen wir einen Zwischenpunkt $\xi_k \in I_k$ für $k = 1, \ldots, n$, an dem der Funktionswert $f(\xi_k)$ die Höhe des Streifens angibt. Die Näherungssumme ist dann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Wir erwarten, dass die Näherungssummen bei unbegrenzter Verfeinerung der Unterteilung von I gegen den gesuchten Flächeninhalt konvergieren, wenn die Funktion "gut genug" ist.

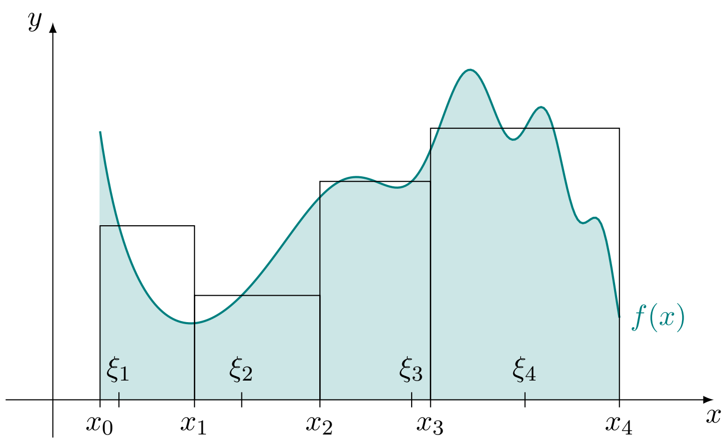

Abbildung 5.2: Näherungssumme (Zwischensumme) für den Flächeninhalt unter der Funktion f.

Definition 5.3.2: Partition, Zerlegung eines Intervalls

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, so dass I in n kompakte Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, 2 \ldots, n$ aufgeteilt wird. Dann heißt das Tupel $\pi := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine *Partition* oder *Zerlegung* von I. Wir schreiben

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Bemerkungen 5.3.3. (i) Manchmal auch die Menge der Teilintervalle als Partition π bezeichnet, dies ist äquivalent zur obigen Definition.

(ii) Die Teilintervalle einer Partition π eines Intervalls I wie oben sind *nicht überlappend*, das heißt je zwei Teilintervalle I_k und I_ℓ haben für $k \neq \ell$ höchstens Randpunkte gemeinsam. Weiter gilt

$$|I| = b - a = x_n - x_0 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \, .$$

Beispiele 5.3.4. Es seien $I = [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$.

(i) Setzen wir $h = \frac{b-a}{n}$, dann teilt die durch $x_k := a + kh$ für $k \in \{\, 0, \ldots, n \,\}$ gegebene Partition

$$\pi : a < a + h < a + 2h < \cdots < a + nh = b$$

das Intervall I in n gleiche Teile ein und wird deshalb *äquidistant* genannt.

(ii) Mit $h = \frac{b-a}{2^n}$ wird durch $x_k = a + kh = a + \frac{k(b-a)}{2^n}$ für $k = 0, \ldots, 2^n$ eine äquidistante Zerlegung der Länge $\frac{b-a}{2^n}$ definiert.

(iii) Es seien $0 < a < b$ und $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, dann wird das Intervall durch die Punkte $x_k = aq^k$ für $k = 0, 1 \ldots, n$ in *geometrischer Progression* in n Teilintervalle unterteilt.

$$\pi : a < aq < aq^2 < \cdots < aq^n = b$$

ist damit ein Beispiel einer nicht äquidistanten Partition.

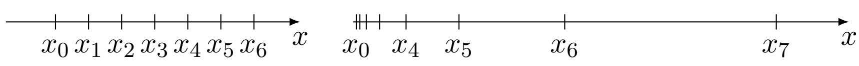

Abbildung 5.3: Partitionen: Äquidistant und in geometrischer Progression.

Definition 5.3.5: Ober-, Unter- und Zwischensummen

Es seien $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Partition von $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für $k \in \{ 1, \ldots, n \}$ setzen wir

$$M_k := \sup_{I_k} f(x), \;\; m_k := \inf_{I_k} f(x).$$

Wir nennen

$$S(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \, |I_k| \, , \text{ beziehungsweise } s(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \, |I_k|$$

die *Riemann-Darbouxsche Ober-* beziehungsweise *Untersumme*[a] von f bezüglich π. Sind für $k \in \{ 1, \ldots, n \}$ $\xi_k \in I_k$, dann heißt

$$\sigma(\pi, f) = \sigma(\pi, f, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \, |I_k|$$

Riemannsche Zwischensumme von f bezüglich π und ξ_k, $k = 1, \ldots, n$.

[a] Jean Gaston Darboux, 1842-1917, frz. Mathematiker

Beispiel 5.3.6. Wir betrachten die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und die äquidistante Partition $\pi : a < a + \frac{b-a}{n} < \cdots < a + \frac{b-a}{n} n = b$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{n} \inf_{\left[a+\frac{b-a}{n}(k-1), a+\frac{b-a}{n}k\right]} x \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n}(k-1) \right) \cdot \frac{b-a}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1) \\ &= ab - a^2 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}. \\ S(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n} k \right) \frac{b-a}{n} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$

Man sieht hier, dass die Unter- und Obersummen für $n \to \infty$ gegen den gemeinsamen Grenzwert $\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ konvergieren. Dieser Grenzwert entspricht dem geometrisch direkt bestimmbaren Flächeninhalt (unter Beachtung des Vorzeichens: Flächen unterhalb der x-Achse werden subtrahiert) und auch dem Ergebnis mit der aus der Schule bekannten Methode, die wir später als zweiten Hauptsatz in 5.5.7 formulieren werden.

Bemerkungen 5.3.7. (i) Für alle $k \in \{ 1, \ldots, n \}$ und $\xi_k \in I_k$ ist $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ und daher gilt

$$s(\pi, f) \leq \sigma(\pi, f) \leq S(\pi, f). \tag{5.2}$$

(ii) Wenn f beschränkt ist, dann existieren

$$M := \sup_I f(x) \text{ und } m = \inf_I f(x).$$

Für alle $k \in \{ 1, \dots, n \}$ gilt dann $m \le m_k \le M_k \le M$ und damit gilt

$$\begin{aligned} s(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \, |I_k| \ge m \sum_{k=1}^{n} |I_k| = m \, |I| \,, \\ S(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{n} M_k \, |I_k| \le M \sum_{k=1}^{n} |I_k| = M \, |I| \,. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$m \, |I| \le s(\pi, f) \le \sigma(\pi, f) \le S(\pi, f) \le M \, |I| \,.$$

(iii) Wenn f beschränkt ist, existieren also $s(f) := \sup_\pi s(\pi, f)$ und $S(f) := \inf_\pi S(\pi, f)$. $S(f)$ beziehungsweise $s(f)$ wird auch als *oberes* beziehungsweise *unteres Riemann-Integral* von f über I bezeichnet.

(iv) Ist $\pi_1 \subset \pi_2$, das heißt π_2 enthält alle Punkte von π_1 und mehr, dann gilt

$$s(\pi_1, f) \le s(\pi_2, f) \text{ und } S(\pi_1, f) \ge S(\pi_2, f).$$

Das heißt, bei einer „Verfeinerung" der Partition werden Untersummen höchstens größer und Obersummen höchstens kleiner.

(v) Für beliebige Zerlegungen π, π' gilt $s(\pi, f) \le S(\pi', f)$, denn

$$s(\pi, f) \le s(\pi \cup \pi', f) \le S(\pi \cup \pi', f) \le S(\pi', f).$$

(vi) Es gilt $s(f) \le S(f)$. Denn angenommen, es wäre $s(f) > S(f)$, dann sei $s(f) - S(f) =: \varepsilon > 0$ und aus der Supremums- beziehungsweise Infimumseigenschaft von $s(f)$ beziehungsweise $S(f)$ folgt die Existenz von zwei Partitionen $\pi(\varepsilon)$ und $\pi'(\varepsilon)$ mit

$$s(f) - s(\pi, f) < \frac{\varepsilon}{3}, \; S(\pi', f) - S(f) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also ist

$$s(f) - \frac{\varepsilon}{3} < s(\pi, f) \le S(\pi', f) < S(f) + \frac{\varepsilon}{3}$$

und folglich $s(f) - S(f) < \frac{2\varepsilon}{3}$ im Widerspruch zur Wahl von $\varepsilon = s(f) - S(f)$.

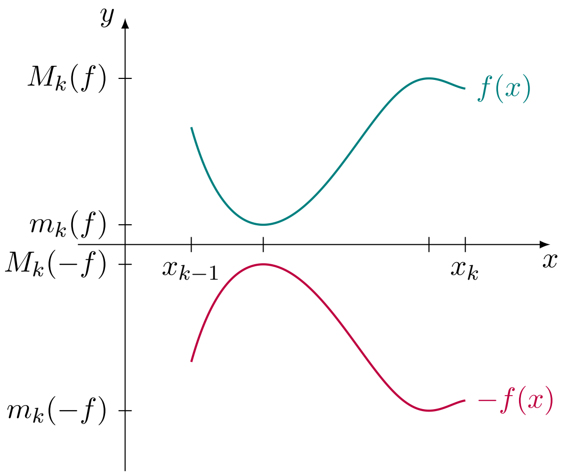

Abbildung 5.4: $m_k(f) = -M_k(-f)$.

(vii) Da für $k = 1, \ldots, n$

$$m_k(f) = \inf_{I_k} f(x) = -\sup_{I_k}(-f(x)) = -M_k(-f)$$

gilt, folgt, dass

$$s(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,|I_k| = -\sum_{k=1}^{n} M_k(-f)\,|I_k| = -S(\pi, -f).$$

Daher können wir uns auf die Betrachtung von Obersummen beschränken.

Definition 5.3.8: Riemann-Integral

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt f über (auf) I *Riemann-integrierbar*, wenn $s(f) = S(f)$ gilt. In diesem Fall heißt der gemeinsame Wert das *Riemann-Intergral* von f über I, in Zeichen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx := s(f) = S(f).$$

Wir setzen außerdem

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ und } \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dies sinnvoll, da über einem Intervall ohne Breite keine Fläche sein kann und da bei der Betrachtung des "umgekehrten" Intervalls "$[b, a]$" für die Intervalllängen $(x_{k-1} - x_k) = -(x_k - x_{k-1})$ gilt.

Unser Ziel ist es, von dieser Definition über Infimum beziehungsweise Supremum der Ober- beziehungsweise Untersummen auf eine Definition mit Hilfe eines Grenzwertes zu kommen. In Beispiel 5.3.6 hat sich angedeutet, dass das funktionieren kann. Für die allgemeine Situation müssen wir noch wenige Vorarbeiten machen.

Definition 5.3.9: Feinheit einer Partition

Ist $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Partition von $I = [a, b]$, so heißt

$$|\pi| := \max \{ |x_k - x_{k-1}| \mid k = 1, \ldots, n \}$$

Feinheit der Partition π.

Lemma 5.3.10: Technisches Hilfslemma

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und π, π' zwei Partitionen von I. Es seien $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $\pi' : a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_{n'} = b$ und $M = \sup_I f(x)$, $m = \inf_I f(x)$, dann gilt

$$S(\pi', f) \leq S(\pi, f) + (n - 1)(M - m) \left|\pi'\right|.$$

Einen Beweis dieses Lemmas findet man in [1, 8.1.12]. Im Beweis des folgenden Satzes werden wir den Clou des Lemmas ausnutzen, dass der zweite Term auf der rechten Seite der Ungleichung mit der Feinheit der Partition π' für eine feste Partition π beliebig klein gemacht werden kann.

Satz 5.3.11: Berechnung des Integrals über einen Grenzwert

Es seien I ein kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine *ausgezeichnete Partitionenfolge*, das heißt es gilt $\lim_{k\to\infty} |\pi_k| = 0$. Dann gilt

$$S(f) = \lim_{k\to\infty} S(\pi_k, f), \; s(f) = \lim_{k\to\infty} s(\pi_k, f).$$

Beweis. Nach Definition von $S(f) = \inf_\pi S(\pi, f)$ gibt es eine Partitionenfolge $(\pi'_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{\ell\to\infty} S(\pi'_\ell, f) = S(f)$. Nach Lemma 5.3.10 gilt mit $M = \sup_I f$, $m = \inf_I f$ und $n' = n'(\ell)$ die Ungleichung

$$S(\pi_k, f) \leq S(\pi'_\ell, f) + (n' - 1)(M - m) |\pi_k| .$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir

$$\limsup_{k\to\infty} S(\pi_k, f) \leq S(\pi'_\ell, f)$$

und damit für $\ell \to \infty$, dass

$$\limsup_{k\to\infty} S(\pi_k, f) \leq S(f).$$

Nach Definition von $S(f)$ gilt $\forall k \in \mathbb{N} S(\pi_k, f) \geq S(f)$ und daher

$$\liminf_{k\to\infty} S(\pi_k, f) \geq S(f).$$

Mit dem lim inf-lim sup-Kriterium, Lemma 2.4.17, folgt dann die Existenz von $\lim_{k\to\infty} S(\pi_k, f)$ und die behauptete Gleichheit. □

Beispiele 5.3.12. (i) Mit dem obigen Satz folgt, dass $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, Riemann-integrierbar ist, wie man mit Beispiel 5.3.6 sofort sieht.

(ii) Die Dirichletsche Sprungfunktion

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, da jede Obersumme 1 und jede Untersumme 0 ist.

Häufig ist es nützlich, statt Ober- oder Untersummen zu betrachten, über Zwischensummen zu argumentieren. Wir erwähnen daher

Satz 5.3.13: Riemannsche Definition des Integrals

Es seien I ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist f genau dann über I Riemann-integrierbar, wenn für jede ausgezeichnete Partitionsfolge $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und jede Wahl der Zwischenpunkte $\xi_1, \ldots, \xi_n$ mit $\xi_\ell \in I_\ell$ für $\ell = 1, \ldots, n_k$ die Zwischensumme

$$\sigma(\pi_k, f) = \sigma(\pi_k, f, \xi_\ell) = \sum_{\ell=1}^{n_k} f(\xi_\ell)\,|I_\ell|$$

konvergiert. In diesem Fall haben alle Summenfolgen den selben Grenzwert und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(\pi_k, f) = \int_I f(x)\,dx.$$

Beweisidee. Ist f Riemann-integrierbar, dann folgt die Aussage aus der Ungleichung (5.2) in Bemerkung 5.3.7 (i). Gilt umgekehrt die behauptete Konvergenz, dann überlegt man sich, dass man die M_k und m_k beliebig gut durch $f(\xi_k)$ approximieren kann und erhält dadurch die Konvergenz der Ober- und Untersummen gegen den selben Grenzwert. Eine ausführliche Darstellung findet man in [1, 8.2.7]. □

5.4 Klassen integrierbarer Funktionen

Welche Funktionen sind Riemann-integrierbar? Wir beantworten diese Frage für zwei häufig verwendete Klassen von Funktionen:

Satz 5.4.1

Jede monotone Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. O. B. d. A. sei f monoton wachsend. Es sei $I = [a, b]$ und $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Partition von I. Dann ist

$$\begin{aligned} S(\pi, f) - s(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq |\pi| \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = |\pi| \, (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

und für jede ausgezeichnete Partitionsfolge gilt dann $S(\pi_k, f) - s(\pi_k, f) \to 0$ für $k \to \infty$. □

Satz 5.4.2

Jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Da I kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig auf I. Es existiert also ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, x' \in I \left| x - x' \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(x') \right| < \varepsilon.$$

Ist π eine Partition von I mit $|\pi| < \delta$, so folgt

$$S(\pi, f) - s(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \, |I_k| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |I_k| = \varepsilon \, |I| \, .$$

Ist $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionsfolge, so gilt $\lim_{k \to \infty} |\pi_k| = 0$ und daher existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wie oben und ein zugehöriges $n_0(\varepsilon)$ mit $|\pi_k| < \delta$ für alle $k \geq n_0$ und damit $S(\pi_k, f) - s(\pi_k, f) \leq \varepsilon \, |I|$ für alle $k \geq n_0$. □

Satz 5.4.3

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die stückweise monoton[a] oder bis auf endlich viele Punkte stetig ist, dann ist f Riemann-integrierbar.

[a]das heißt, es existiert eine Partition von I in endlich viele Teilintervalle $I_1, \ldots, I_n$ so dass f auf I_j monoton ist für $j = 1, \ldots, n$.

Beweisidee. Es seien $I = [a, b]$ und $x_1, \ldots, x_{n-1}$ die Ausnahmepunkte, $x_0 = a$, $x_n = b$, dann ist f auf $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$ integrierbar und jede Partition π von I wird durch Hinzunahme von $\{ x_1, \ldots, x_{n-1} \}$ verfeinert. Die entstehenden Ober-, Unter oder Zwischensummen kann man nun aufspalten in solche, die gegen die Integrale über den I_k konvergieren, woraus die Behauptung folgt. □

5.5 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 5.5.1: Linearität des Riemann-Integrals

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ Riemann-integrierbar. Gilt zusätzlich $\exists c > 0 \forall x \in I \, |f(x)| \geq c$, dann ist auch $\frac{1}{f}$ Riemann-integrierbar. Weiter gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die *Linearitätsrelation*

$$\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_I f(x) \, dx + \beta \int_I g(x) \, dx.$$

Beweis. (I) Integrierbarkeit von $f \cdot g$: Es seien $|f|, |g| \leq M < +\infty$. Dann gilt für $x, x' \in I$

$$\begin{aligned} \left|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x')\right| &\leq \left|f(x)g(x) - f(x')g(x)\right| + \left|f(x')g(x) - f(x')g(x')\right| \\ &\leq M \left(\left|f(x) - f(x')\right| + \left|g(x) - g(x')\right|\right). \end{aligned}$$

Ist $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Partition von I, dann gilt

$$\sup_{I_k}(f \cdot g)(x) - \inf_{I_k}(f \cdot g)(x) \leq M \left(\sup_{I_k} f(x) - \inf_{I_k} f(x) + \sup_{I_k} g(x) - \inf_{I_k} g(x) \right),$$

und daher

$$0 \leq S(\pi, f \cdot g) - s(\pi, f \cdot g) \leq M(S(\pi, f) - s(\pi, f) + S(\pi, g) - s(\pi, g)).$$

Ist nun $(\pi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionenfolge, dann wird die rechte Seite der Ungleichung aufgrund der Integrierbarkeit von f und g beliebig klein, woraus die Behauptung folgt.

(II) Linearität des Integrals: Zunächst ist die Integrierbarkeit der Funktion $\alpha f + \beta g$ klar. Es sei $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionsfolge und seien $\xi_1, \ldots, \xi_{n_k}$, $\xi_\ell \in I_\ell$ beliebig gewählte Zwischenwerte. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx &= \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{n_k} (\alpha f(\xi_\ell) + \beta g(\xi_\ell))\, |I_\ell| \\ &= \alpha \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{n_k} f(\xi_\ell)\, |I_\ell| + \beta \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n_k} g(\xi_\ell)\, |I_\ell| \\ &= \alpha \int_I f(x)\, dx + \beta \int_I g(x)\, dx\end{aligned}$$

aufgrund der Riemannschen Definition des Integrals. □

Die folgende Aussage ist zum Beispiel nützlich, wenn man stückweise definierte Funktionen untersucht oder Integrale über Teilintervalle betrachten will.

Satz 5.5.2: Additivität des Integrationsbereiches

Es sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ auf I Riemann-integrierbar und $a < c < b$, dann ist f auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Beweis. Es seien $\varepsilon > 0$ und $\pi_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c$ und $\pi_2 : c = x_n < x_{n+1} < \cdots < x_m = b$ zwei Zerlegungen so gewählt, dass für $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ gilt $|\pi| < \delta$ und

$$S(\pi, f) - s(\pi, f) < \varepsilon.$$

Dann gilt

$$S(\pi_1, f) - s(\pi_1, f) \leq S(\pi, f) - s(\pi, f) < \varepsilon$$

und damit folgt die Integrierbarkeit von f über $[a, c]$, analog zeigt man die Integrierbarkeit über $[c, b]$. Es seien nun $\xi_k \in I_k$ für $k = 1, \ldots, m$ Zwischenstellen, dann gilt

$$\begin{aligned}\sigma(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\, |I_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, |I_k| + \sum_{k=n+1}^{m} f(\xi_k)\, |I_k| = \sigma(\pi_1, f) + \sigma(\pi_2, f).\end{aligned}$$ □

Dass Ungleichungen zwischen Funktionen sich auf entsprechende Ungleichungen zwischen ihren Integralen übertragen, besagt der folgende

Satz 5.5.3: Monotonie des Riemann-Integrals

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\forall x \in I f(x) \leq g(x)$, dann gilt

$$\int_I f(x)\, dx \leq \int_I g(x)\, dx.$$

Beweis. Es gilt $\forall x \in I g - f \geq 0$ und nach Satz 5.5.1 ist $g - f$ integrierbar. Weiter gilt für eine beliebige Partition π und beliebige Zwischenwerte $\xi_k \in I_k$ für alle Teilintervalle der Partition

$$\sigma(\pi, g - f) = \sum_{k=1}^{n} (g - f)(\xi_k)\, |I_k| \geq 0.$$

Daher gilt

$$\int_I (g - f)(x)\, dx \geq 0 \overset{\text{Satz 5.5.1}}{\Longrightarrow} \int_I g(x)\, dx \geq \int_I f(x)\, dx. \qquad \square$$

Satz 5.5.4: Dreiecksungleichung für das Riemann-Integral

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar, dann ist auch die Funktion $|f| : I \to [0, +\infty)$ Riemann-integrierbar auf I und es gilt

$$\left| \int_I f(x)\, dx \right| \leq \int_I |f(x)|\, dx.$$

Beweis. Es sei π eine beliebige Zerlegung, dann folgt die Integrierbarkeit von $|f|$ aus

$$\begin{aligned} S(\pi, |f|) - s(\pi, |f|) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{I_k} |f| - \inf_{I_k} |f| \right) |I_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \right) |I_k| = S(\pi, f) - s(\pi, f). \end{aligned}$$

Es sei $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionsfolge von I und $\xi_\ell \in I_\ell$ für $\ell = 1, \ldots, n_k$ seien beliebige Zwischenwerte, dann gilt

$$|\sigma(\pi_k, f, \xi_\ell)| = \left| \sum_{\ell=1}^{n_k} f(\xi_\ell)\, |I_\ell| \right| \leq \sum_{\ell=1}^{n_k} |f(\xi_\ell)|\, |I_\ell| = \sigma(\pi_k, |f|, \xi_\ell).$$

Die behauptete Ungleichung folgt jetzt durch Grenzübergang für $k \to \infty$. $\square$

Die Dreiecksungleichung ist wie bei Summen und Reihen ein nützliches Hilfsmittel zur Abschätzung.

Mittelwertsatz der Integralrechnung 5.5.5

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und seien $m, M \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in I m \leq f(x) \leq M$. Dann folgen durch Integration die Ungleichungen

$$m\,|I| \leq \int_I f(x)\,dx \leq M\,|I|\,.$$

Das *Integralmittel* $\mu := \frac{1}{|I|}\int_I f(x)\,dx$ genügt also den Ungleichungen $m \leq \mu \leq M$. Ist f stetig, so folgt aus dem Zwischenwertsatz 3.3.7 die Existenz eines $\xi \in I$ mit $\mu = f(\xi)$. Also gilt

$$\int_I f(x)\,dx = f(\xi)\,|I|\,.$$

Erster Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 5.5.6

Es sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und in $x_0 \in I$ stetig, dann ist die Funktion

$$F(x) := \int_c^x f(t)\,dt$$

für $c \in [a, b]$ in x_0 differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$. Ist also f auf I stetig, dann ist F auf I differenzierbar und es gilt $\forall x \in I F'(x) = f(x)$, das heißt F ist eine Stammfunktion von f.

Beweis. Es sei $x \in I$, $x \neq x_0$, dann gilt

$$F(x) - F(x_0) = \int_c^x f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Wegen $f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt$ folgt hieraus, dass

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \left(f(t) - f(x_0)\right)\,dt.$$

Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ kann nun $\delta > 0$ so gewählt werden, dass für $|x - x_0| < \delta$ stets $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Damit ist für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$:

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon\,dx = \varepsilon,$$

das heißt F ist in x_0 differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Zweiter Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 5.5.7

Es sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ und die Ableitung $f := F' : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über I, dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Beweis. Es sei $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Partition von I, dann können wir $F(b) - F(a)$ als Teleskopsumme schreiben:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(F(t_k) - F(t_{k-1})\right).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung gilt

$$F(t_k) - F(t_{k-1}) = F'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

mit Zwischenstellen $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$ für $k = 1, \ldots, n$. Damit haben wir

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \sigma(\pi, f, \xi_k).$$

Ist nun $(\pi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionsfolge und sind die Zwischenstellen $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n = n(\ell)$ gemäß dem Mittelwertsatz gewählt, so folgt aufgrund der Integrierbarkeit von f, dass

$$F(b) - F(a) = \sigma(\pi_\ell, f, \xi_k) \to \int_a^b f(t)\,dt \text{ für } \ell \to \infty. \qquad \square$$

Bemerkungen 5.5.8. (i) Der zweite Hauptsatz 5.5.7 liefert den Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral, das heißt Flächeninhalt und Stammfunktion, und damit eine einfache Methode, bei bekannter Stammfunktion den Flächeninhalt auszurechnen.

(ii) Die Integrationstechniken für Stammfunktionen übertragen sich:

(a) Partielle Integration:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx.$$

(b) Etwas aufpassen muss man bei der Substitutionsregel, weil sich auch die Integrationsgrenzen verändern:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = \int_a^b g(f(t))f'(t)\,dt.$$

Hier kann man alternativ aber zunächst mit der Substitutionsregel eine Stammfunktion bestimmen und dann zurücksubstitutieren.

5.6 Uneigentliche Integrale

In diesem Abschnitt lassen wir die Voraussetzung der Kompaktheit an das Integrationsintervalls fallen und untersuchen, unter welchen Bedingungen dann das Riemann-Integral einer Funktion existiert. Damit ist dann auch möglich, unbeschränkte Funktionen zu untersuchen, was wir bei der Definition des Riemann-Integrals ausgeschlossen hatten.

Definition 5.6.1: Uneigentliches Integral, Konvergenz

(i) Es sei $I = [a,b)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ auf $[a,c]$ beschränkt und Riemann-integrierbar ist. Der Grenzwert

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

heißt das *uneigentliche Integral* von f über I, falls er existiert. In dem Fall heißt das Integral *konvergent* und es heißt *absolut konvergent*, wenn das Intergral von $|f|$ über I konvergiert.

(ii) Analog ist das uneigentliche Integral über das halboffene Intervall $I = (a,b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

(iii) Es sei $I = (a,b)$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$, dann definieren wir das uneigentliche Integral von f über I durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

falls für ein, und damit für alle $c \in (a,b)$ die beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite konvergieren.

Bemerkung und Beispiele 5.6.2. (i) Ist $I = (a,b)$, so müssen die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ getrennt betrachtet werden. Das bedeutet, $\lim_{d_1\to a^+} \int_{d_1}^c f(x)\,dx$ und $\lim_{d_2\to b^-} \int_c^{d_2} f(x)\,dx$ sind einzeln zu untersuchen. Dies gilt auch, wenn f über $[a,c) \cup (c,b]$ integriert werden soll.

Den gleichzeitigen Grenzwert bezeichnet man als *Cauchy-Hauptwert*, falls er existiert. Beispielsweise

$$\lim_{d\to c} \left(\int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \right) \quad \text{oder} \quad \lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^c f(x)\,dx.$$

Dieser Wert kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral nicht existiert. So existiert etwa das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ nicht, da $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ nicht existiert. Allerdings gilt

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 0}\left(\int_{-1}^{-c}\frac{1}{x}\,dx + \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx\right) &= \lim_{c\to 0}\Big[[\ln|x|]_{-1}^{-c} + [\ln|x|]_c^1\Big] \\ &= \lim_{c\to 0}\left(\ln|-c| - \ln|-1| + \ln|1| - \ln|c|\right) = \lim_{c\to 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

(ii) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0}\left(2 - 2\sqrt{c}\right) = 2.$$

(iii) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{c}+1\right) = 1.$$

(iv) Man überlegt sich leicht, dass $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha dx$ genau dann existiert, wenn $\alpha > -1$ und $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ genau dann existiert, wenn $\alpha < -1$. Insbesondere existiert $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha dx$ für kein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Folgenkriterium 5.6.3

Es seien $I = [a,b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $a < b$, und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem kompaktem Teilintervall $J = [a,c]$, $a < c < b$, Riemann-integrierbar ist, dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^{c_k} f(x)\,dx$$

für jede Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset I$ mit $c_k \to b$ für $k\to\infty$ existiert.

Bemerkung 5.6.4. Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, denn sei $(c'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge, dann muss auch die Folge der Integrale mit der gemischten Obergrenzenfolge $c_1, c'_1, c_2, c'_2, \ldots$ konvergieren, woraus die Behauptung folgt.

Beispiel 5.6.5. Es sei $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $I = (0,1]$. Dann ist $\int_0^1 f(x)\,dx$ nicht definiert, denn

$$\int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{1}{x}\,dx = \sum_{\ell=1}^{k-1}\int_{\frac{1}{\ell+1}}^{\frac{1}{\ell}} \frac{1}{x}\,dx \geq \sum_{\ell=1}^{k-1}\ell\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1}\right) = \sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{1}{\ell+1} \to +\infty$$

für $k \to \infty$. Dies kann man natürlich auch ohne das Folgenkriterium direkt zeigen, da für $0 < c < 1$

$$\int_c^1 f(x)\,dx = -\ln c \to +\infty \text{ für } c \to 0$$

gilt.

Der folgende Satz liefert ein Kriterium für die Existenz des uneigentlichen Integrals, ohne dass der konkrete Grenzwert berechnet werden muss.

Satz 5.6.6

Es sei I ein halboffenes oder offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem kompakten Teilintervall $J \subset I$ beschränkt und Riemann-integrierbar ist. Weiter existiere ein $M > 0$, so dass für jedes kompakte Intervall $J \subset I$ die Ungleichung

$$\int_J |f(x)|\,dx \leq M < +\infty$$

erfüllt ist - dabei ist M unabhängig von J. Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_I f(x)\,dx$.

Bemerkungen 5.6.7. (i) Wie bei Reihen erhält man ein Majoranten- beziehungsweise Minorantenkriterium durch Vergleich mit konvergenten beziehungsweise divergenten uneigentlichen Integralen.

(ii) Anwendung des Majorantenkriteriums:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{c \to +\infty} \left(\left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^c - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$
$$= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Da $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ und $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$, konvergiert auch $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Den Integrand direkt im ersten Schritt gegen $\frac{1}{x}$ abzuschätzen, hätte nicht zum Erfolg geführt, da $\int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \ln c \to +\infty$ für $c \to +\infty$.

(iii) Für $x > 0$ definieren wir die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

$\Gamma(x)$ ist als uneigentliches Integral für alle $x > 0$ definiert. Durch geeignete Abschätzungen kann man zeigen, dass $\Gamma(x) \to +\infty$ für $x \to 0$ und für $x \to +\infty$. Außerdem gilt $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ woraus mit Hilfe von vollständiger Induktion folgt, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Wir stellen noch eine Verbindung der Integrationstheorie mit der Theorie der unendlichen Reihen her (vergleiche Abbildung 5.5):

Wir betrachten $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ beziehungsweise $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und stellen $a_k = a_k \cdot 1$ als Rechtecke der Höhe a_k und der Breite 1 dar. Der Wert der Reihe entspricht daher dem des uneigentlichen Integrals über die entsprechende Treppenfunktion. Ist f eine Funktion, die durch die "Ecken" der Rechtecke verläuft, so können wir die Konvergenz oder Divergenz des uneigentlichen Integrals von f über $(0, +\infty)$ mit dem Verhalten der Reihe verknüpfen.

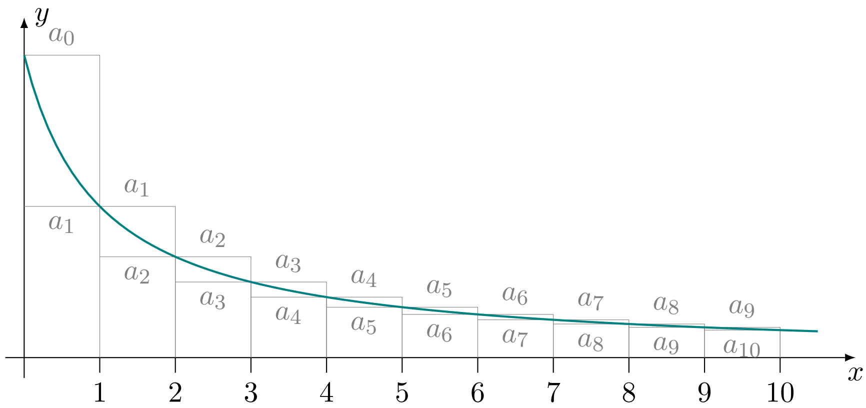

Abbildung 5.5: Veranschaulichung zum Integralkriterium, durch die Rechtecke sind die beiden Summen angedeutet.

Integralkriterium 5.6.8

Es sei $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ eine nicht-negative, monoton fallende Funktion und für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $a_k := f(k)$. Dann gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \int_0^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergiert.

Beweis. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$x \in [k, k+1] \Rightarrow 0 \leq f(k+1) = a_{k+1} \leq f(x) \leq f(k) = a_k.$$

Integrieren wir die Ungleichungen über x von k bis $k+1$, so folgt

$$a_{k+1}(k+1-k) = a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq a_k.$$

Die Summe über alle k von 0 bis $n-1$ liefert dann die behaupteten Ungleichungen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_0^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k. \qquad \square$$

Beispiele 5.6.9. (i) Die *Zeta-Reihe* $\zeta(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\mu}$ konvergiert für $\mu > 1$ und divergiert für $\mu \leq 1$.

(ii) Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\mu}$ konvergiert für $\mu > 1$ und divergiert für $\mu \leq 1$. Für $\mu > 1$ zeigt man hierfür

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\mu} = \left. \frac{(\ln x)^{1-\mu}}{1-\mu} \right|_2^n \to \frac{1}{(\mu-1)(\ln 2)^{\mu-1}} \text{ für } n \to \infty.$$

(iii) Die Euler-Mascheronische[1] Zahl ist definiert durch

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right),$$

hieraus erhalten wir einen Zusammenhang zwischen dem Konvergenzverhalten des Logarithmus und der harmonischen Reihe.

[1] Lorenzo Mascheroni, 1750-1800, ital. Mathematiker

Kapitel 6

Elementare Differenzialgleichungen

6.1 Motivation

Viele Probleme führen auf Gleichungen, in denen eine unbekannte beziehungsweise gesuchte Funktion und ihre Ableitungen auftreten. Fundamentale physikalische Formeln sind häufig in dieser Form notiert, beispielsweise “$F = m{\cdot}a$”, das die Beschleunigung a (zweite Ableitung nach dem Ort) mit der sie bewirkenden Kraft in Verbindung setzt.

Beispiel 6.1.1. Wir betrachten ein radioaktives Präparat mit N_0 Kernen und der Zerfallskonstanten $\lambda \geq 0$. Das bedeutet, dass für die Anzahl der Kerne $N(t)$ zum Zeitpunkt t (ungefähr) gilt

$$N(t) - N(t_0) = -\lambda N(t_0)\,(t - t_0)\,.$$

Die zugrunde liegende Überlegung ist, dass die Veränderung in der Anzahl der Kerne N, $\Delta N = N(t) - N(t_0)$, für kleine zeitliche Veränderungen $\Delta t = t - t_0$ proportional zum Bestand ist. Aus der Gleichung erhalten wir $\frac{N(t)-N(t_0)}{t-t_0} = -\lambda N(t_0)$ und durch Grenzübergang $t \to t_0$

$$N' = -\lambda N.$$

Eine Lösung der obigen Gleichung kann man raten: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}$.

Statt radioaktiven Kernen kann man das Beispiel auch mit einer Population von Lebewesen betrachten - weil man dann meist den Tod zunächst vernachlässigt, hätte man dann $N' = \lambda N$ mit einem $\lambda \geq 0$.

Als einführendes und prominentes Beispiel einer Differenzialgleichung betrachten wir den harmonischen Oszillator. Schwingungsphänomene aller Art können derart beschrieben werden, wir betrachten hier eine anschauliche Situation.

Beispiel 6.1.2 (Harmonischer Oszillator)**.** Eine als punktförmig angenommene Masse m schwinge an einer Feder mit Federkonstante k (die Masse der Feder sei vernachlässigbar klein).

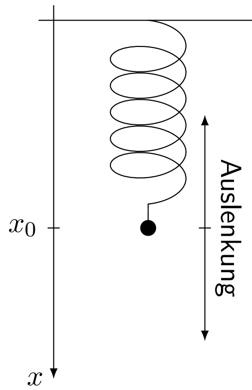

Abbildung 6.1: Harmonischer Oszillator.

Gesucht ist die Auslenkung x der Feder zur Zeit t. Es gilt das Newtonsche Bewegungsgesetz “$F = m \cdot a$”.

$$F_{\text{Feder}} = -kx = mx''.$$

Lösungen sind $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Dies sieht man sofort, weil $(c_1 \cos \omega t)'' = (-c_1 \omega \sin \omega t)' = -c_1 \omega^2 \cos \omega t$ und analog $(c_2 \sin \omega t)'' = -c_2 \omega^2 \sin \omega t$ gilt.

Für eine eindeutige Lösung benötigt man die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \; x'(0) = v_0.$$

Also die Lage der Masse und die Geschwindigkeit der Masse zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 \cos(\omega 0) + c_2 \sin(\omega 0) = c_1 \stackrel{!}{=} x_0, \\ \dot{x}(0) &= -c_1 \omega \sin(\omega 0) + c_2 \omega \cos(\omega 0) \\ &= c_2 \omega \stackrel{!}{=} v_0 \end{aligned}$$

und daraus

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Setzen wir $\tan \delta = \frac{x_0 \omega}{v_0}$, $A = \frac{x_0}{\sin \delta}$, dann ist mit $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$$x(t) = A \sin \delta \cos(\omega t) + A \cos \delta \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \delta).$$

Das heißt, die Lösung ist eine Sinusschwingung mit der *Frequenz* ω, der *Amplitude* A und einer *Phasenverschiebung* δ.

In Beispiel 6.4.5 (ii) werden wir zusätzlich Reibung berücksichtigen und in den Beispielen 6.4.8 (ii) und(iii) sowie 6.4.10 (ii) noch die erzwungene Schwingung behandeln.

Definition 6.1.3: Differenzialgleichung

(i) $I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ seien nicht-leere Intervalle. Die Menge $M = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ heißt (n-dimensionales) *Rechteck*.

(ii) Es seien $M \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $\varphi : M \to \mathbb{R}$ eine stetige[a] Funktion. Weiter seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. y nennen wir eine *Lösung der expliziten (gewöhnlichen) Differenzialgleichung* (DGL) *erster Ordnung*

$$y' = \varphi(x, y),$$

wenn y stetig differenzierbar ist sowie jeweils für alle $x \in I$ gilt, dass $(x, y(x)) \in M$ und $y'(x) = \varphi(x, y(x))$.

(iii) Es seien $M \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck, $\varphi : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(\xi, \eta) \in M$. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann heißt $y : I \to \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems* (AWP)

$$y' = \varphi(x, y), \;\; y(\xi) = \eta,$$

wenn y eine Lösung der Differenzialgleichung $y' = \varphi(x, y)$ ist und zusätzlich $\xi \in I$ mit $y(\xi) = \eta$ gilt.

(iv) $y : I \to \mathbb{R}$, mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, heißt eine *Lösung der expliziten Differenzialgleichung n-ter Ordnung*

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

wenn gilt

- y ist n-mal stetig differenzierbar,
- $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in M$ für alle $x \in I$ und
- $y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ für alle $x \in I$.

Für $(\xi, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ heißt $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \;\; y^{(k)}(\xi) = \eta_k \text{ für } k = 0, \dots, n-1,$$

wenn y die Differenzialgleichung $y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{n-1})$ löst und $y^{(k)}(\xi) = \eta_k$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$ gilt.

[a] Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen werden wir in Analysis II betrachten

Beispiel 6.1.4. $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = e^{\alpha x}$ ist eine Lösung der Differenzialgleichung $y' = \alpha y$ und des Anfangswertproblems $y' = \alpha y$, $y(0) = 1$. Hier ist also $\varphi(x, y) = \varphi(y) = \alpha y$. φ ist auf beliebigen Rechtecken im $\mathbb{R}^2$ und insbesondere dem $\mathbb{R}^2$ selbst definiert, um das Anfangswertproblem lösen zu können, muss zumindest $(0, 1)^\top$ im gewählten Rechteck enthalten sein.

Bemerkungen 6.1.5. (i) Allgemeiner nennt man

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

mit einer stetigen Funktion F und einer n-mal differenzierbaren Funktion y eine *gewöhnliche Differenzialgleichung n-Ordnung*. Was es bedeutet, dass F stetig ist und unter welchen weiteren Voraussetzungen man aus dieser *impliziten* Darstellung eine explizite Darstellung der Differenzialgleichung gewinnt, werden wir in Analysis II betrachten.

(ii) Bei der Lösung von Differenzialgleichungen oder Anfangswertproblemen stellen sich folgende Fragen:

(a) Gibt es immer eine Lösung?

(b) Ist die Lösung eindeutig?

(c) Wie erhält man die Lösung?

In den folgenden Abschnitten betrachten wir Lösungstechniken für verschiedene Spezialfälle von φ.

6.2 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten wieder die Situation aus dem ersten und dem obigen Beispiel und verallgemeinern dahingehend, dass $y' = f \cdot y$, wobei f nun auch eine Funktion sein darf.

Mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung 5.5.6 kann man sich folgende Aussage überlegen:

Satz 6.2.1: Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\xi \in I$ kein Randpunkt von I. Es seien weiter $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\eta \in \mathbb{R}$. Für

$$y_0 : I \to \mathbb{R},\ y_0(x) := \exp\left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right),$$
$$y : I \to \mathbb{R},\ y(x) := \left(\eta + \int_\xi^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt\right) \cdot y_0(x)$$

gilt dann

(i) y_0 löst das Anfangswertproblem $y' = f(x)y$, $y(\xi) = 1$ und

(ii) y löst das Anfangswertproblem $y' = f(x)y + g(x)$, $y(\xi) = \eta$.

Beweis. (I) $y_0(\xi) = 1$, $y_0'(x) = \left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right)' y_0(x) = f(x)y_0(x)$ für alle $x \in I$ nach dem ersten Hauptsatz 5.5.6.

(II) $y(\xi) = \eta$ und für alle $x \in I$ gilt

$$y'(x) = \frac{g(x)}{y_0(x)} y_0(x) + \left(\eta + \int_\xi^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt\right) f(x)y_0(x) = g(x) + f(x)y(x). \quad \square$$

Beispiele 6.2.2. (i) Das Anfangswertproblem $y' = x \cdot y$, $y(1) = 3$, also $f(x) = x$ und $\xi = 1$, wird gelöst durch

$$y(x) = 3 \exp\left(\int_1^x t\,dt\right) = 3e^{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}.$$

Dies kann man sich entweder so überlegen, dass $y_0(x) = \exp\left(\int_1^x t\,dt\right)$ das Anfangswertproblem mit $y(1) = 1$ löst und man daher mit dem Faktor 3 das Gewünschte erreicht, oder man verwendet formal $g = 0$ in der Lösungsformel.

(ii) Das Anfangswertproblem $y' = x + y$, $y(0) = 2$, das heißt $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $\xi = 0$ und $\eta = 2$ lösen wir in zwei Schritten:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= \exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \exp\left(\int_0^x 1\,dt\right) = e^x, \\
y(x) &= \left(2 + \int_0^x te^{-t} dt\right) e^x = \left(2 + \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt\right) e^x \\
&= \left(2 + \left[-e^{-t} - te^{-t}\right]_0^x\right) e^x = \left(3 - e^{-x} - xe^{-x}\right) e^x \\
&= 3e^x - x - 1.
\end{aligned}$$

(iii) Das Anfangswertproblem $y' = 3x^2y + x^2$, $y(0) = 1$, wird mit $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^2$, $\xi = 0$, $\eta = 1$ gelöst mit

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= \exp\left(\int_0^x 3t^2 dt\right) = e^{x^3}, \\
y(x) &= \left(1 + \int_0^x t^2 e^{-t^3} dt\right) e^{x^3} = \left(1 - \frac{1}{3}\left[e^{-t^3}\right]_0^x\right) e^{x^3} \\
&= \left(1 - \frac{1}{3} e^{-x^3} + \frac{1}{3} e^0\right) e^{x^3} = \frac{4}{3} e^{x^3} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Test:

$$y'(x) = \frac{4}{3} 3x^2 e^{x^3} = 3x^2 \left(\frac{4}{3} e^{x^3} - \frac{1}{3}\right) + x^2.$$

Außerdem ist $y(0) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$.

Bemerkungen 6.2.3. (i) $y' = f(x) \cdot y$ bezeichnet man als *lineare, homogene Differenzialgleichung erster Ordnung*, $y' = f(x) \cdot y + g(x)$ bezeichnet man als *lineare, inhomogene Differenzialgleichung erster Ordnung*.

(ii) Wenn man $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ annimmt, kann man die Lösungsformel der homogenen Differenzialgleichung leicht herleiten:

$$y'(x) = f(x)y(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln(y(x)) = f(x)$$

für alle $x \in I$. Ist F nun eine Stammfunktion von f, beispielsweise $F(x) = \int_\xi^x f(t)\,dt$, so erhält man

$$\ln(y(x)) = F(x) + c \Rightarrow y(x) = e^{F(x)+c} = \tilde{c}e^{F(x)}.$$

(iii) Die Lösungsformel für die inhomogene Differenzialgleichung erhält man mittels einer Methode, die als *Variation der Konstanten* bezeichnet wird: Ist F eine Stammfunktion von f, so ist für alle $c \in \mathbb{R}$ $y(x) = ce^{F(x)}$ eine Lösung von $y' = f(x)y$. Man macht nun den Ansatz

$$y(x) = c(x)e^{F(x)} \tag{6.1}$$

um das inhomogene Problem zu lösen:

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x). \tag{6.2}$$

Setzt man nun (6.1) in (6.2) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} y'(x) &= c'(x)e^{F(x)} + c(x)f(x)e^{F(x)} = c'(x)e^{F(x)} + f(x)y(x) \\ &\overset{!}{=} f(x)y(x) + g(x) \\ \Leftrightarrow c'(x)e^{F(x)} &= g(x) \Leftrightarrow c'(x) = \frac{g(x)}{e^{F(x)}}. \end{aligned}$$

Ist dann $F(x) = \int_\xi^x f(t)\,dt$ und somit $F(\xi) = 0$, so folgt mit

$$c(x) = \int_\xi^x \frac{g(t)}{e^{F(t)}} dt + \eta,$$

dass $c(\xi) = \eta$ und $y(\xi) = c(\xi)e^{F(\xi)} = \eta$. Also erfüllt die Lösung das Anfangswertproblem.

(iv) Wir zeigen als nächstes: Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x)y + g(x) \\ y(\xi) = \eta \end{cases} \tag{AWP}$$

ist immer in der in 6.2.1 angegebenen Form darstellbar.

Lemma 6.2.4: Darstellung der Lösung

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\xi \in I$ mit $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subset I$ für ein $\delta > 0$ und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x)y + g(x)$, $y(\xi) = \eta$. Dann ist

$$y(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right)\left(\eta + \int_\xi^x \frac{g(t)}{\exp\left(\int_\xi^t f(u)\,du\right)}dt\right).$$

Beweis. Wir definieren $y_0 : I \to \mathbb{R}$, $y_0(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right)$. Dann gilt $y_0(x) > 0$ für alle $x \in I$ und weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_0(x)}\right) &= \frac{y'(x)y_0(x) - y(x)y_0'(x)}{y_0^2(x)} \\ &= \frac{(f(x)y(x) + g(x))y_0(x) - y(x)f(x)y_0(x)}{y_0^2(x)} = \frac{g(x)}{y_0(x)}. \end{aligned}$$

Also folgt mit dem zweiten Hauptsatz 5.5.7

$$\frac{y(x)}{y_0(x)} - \eta = \frac{y(x)}{y_0(x)} - \frac{y(\xi)}{y_0(\xi)} = \int_\xi^x \frac{g(t)}{y_0(t)}dt$$

und damit die Behauptung. □

Definition 6.2.5: Bernoullische Differenzialgleichung

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann heißt

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$$

eine *Bernoullische Differenzialgleichung*.

Bemerkungen 6.2.6. (i) Hier betrachten wir das Rechteck $M = I \times (0, +\infty)$, das heißt $y > 0$, beziehungsweise im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ auch $I \times \mathbb{R}$ beziehungsweise Teilrechtecke davon.

(ii) Für $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ ergeben sich lineare Differenzialgleichungen:

- $\alpha = 0$: $y' = f(x)y + g(x)$ (inhomogene lineare Differenzialgleichungen),
- $\alpha = 1$: $y' = (f(x) + g(x))y$ (homogene lineare Differenzialgleichungen).

Lösungsansatz im Fall $\alpha \notin \{ 0, 1 \}$ 6.2.7. Wir versuchen, auch diesen Fall auf eine lineare Differenzialgleichung zurückzuführen, dabei gehen wir zunächst davon aus, dass alle Rechenschritte erlaubt sind und rechtfertigen das Vorgehen später. Wir haben

$$\begin{aligned} y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \Rightarrow \frac{y'}{y^\alpha} &= f(x)\frac{y}{y^\alpha} + g(x) \\ \Leftrightarrow y^{-\alpha}y' &= f(x)y^{1-\alpha} + g(x). \end{aligned}$$

Setzen wir $z = y^{1-\alpha}$, so ist $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, also

$$\frac{z'}{1-\alpha} = f(x)z + g(x) \Leftrightarrow z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x).$$

Also erhalten wir die gesuchte Lösung y der Bernoullischen Differenzialgleichung, wenn wir zunächst die inhomogene lineare Differenzialgleichung

$$z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x)$$

lösen und danach $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ setzen.

Gilt $y > 0$, so ist die Division durch y^α erlaubt und die Herleitung damit grob gesprochen in Ordnung. Genauer gilt: Wenn $y : I \to (0, +\infty)$ eine Lösung von $y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$ ist, dann gilt für

$$\begin{aligned} &z : I \to (0, +\infty),\ z(x) = y^{1-\alpha}(x), \\ &z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)(f(x)y(x) + g(x)y^\alpha(x)) \\ &\qquad = (1-\alpha)f(x)y^{1-\alpha}(x) + (1-\alpha)g(x) \\ &\qquad = (1-\alpha)f(x)z(x) + (1-\alpha)g(x), \end{aligned}$$

das heißt z genügt einer linearen Differenzialgleichung.

Beispiele 6.2.8. (i) $y' = \sqrt{y}$, $y(1) = 4$, also ist $y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$ mit $f(x) = 0$, $g(x) = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Wir setzen $z = \sqrt{y} = y^{1-\frac{1}{2}}$, dann muss

$$z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y' = \frac{1}{2},\ z(1) = \sqrt{y(1)} = 2$$

gelten. Damit ist

$$z(x) = 2 + \int_1^x \frac{1}{2}dt = 2 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{x+3}{2}$$

und folglich $y = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2$.

Schematisch war das Vorgehen also: Setze $z = y^{1-\alpha}$, $z(1) = y(1)^{1-\alpha}$, löse $z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x) = \frac{1}{2}$ mit $z(1) = \sqrt{y(1)}$ und setze anschließend $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} = z^2$.

(ii) $y' = x^4y + x^4y^4$, $y(0) = 1$, das heißt $f(x) = x^4 = g(x)$, $\alpha = 4$. Ansatz: $z = y^{1-4} = \frac{1}{y^3}$. Damit ist

$$z' = \frac{-3}{y^4}y' = -\frac{3}{y^4}(x^4y + x^4y^4) = -3x^4y^{-3} - 3x^4 = -3x^4z - 3x^4$$

und $z(0) = 1$. Die Lösung z ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} z(x) &= \underbrace{\exp\left(\int_0^x (-3t^4)\,dt\right)}_{=\exp(-\frac{3}{5}x^5)} \left(1 - \int_0^x 3t^4 e^{\frac{3}{5}t^5}\,dt\right) \\ &= e^{-\frac{3}{5}x^5}\left(1 - \left[e^{\frac{3}{5}t^5}\right]_0^x\right) = e^{-\frac{3}{5}x^5}\left(1 - e^{\frac{3}{5}x^5} + e^0\right) \\ &= 2e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1. \end{aligned}$$

Damit haben wir $y = z^{\frac{1}{1-4}} = \left(2e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1\right)^{-\frac{1}{3}}$.

6.3 Getrennte Variablen

Definition 6.3.1: Differenzialgleichung mit getrennten Variablen

Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, dann heißt eine Differenzialgleichung der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

Differenzialgleichung mit getrennten Variablen und

$$y' = f(x)g(y),\ \ y(\xi) = \eta \text{ für } \xi \in I,\ \ \eta \in J$$

das zugehörige Anfangswertproblem.

Lösungsansatz für das Anfangswertproblem mit getrennten Variablen 6.3.2.

(i) Wenn $g(\eta) = 0$, dann ist $y : I \to \mathbb{R}$, $y(x) = \eta$ eine Lösung des Anfangswertproblems.

(ii) Ist $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ (dies kann im Fall $g(\eta) \neq 0$ aufgrund der Stetigkeit von g durch eine geeignete Wahl von J stets erreicht werden) und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems, also insbesondere $y(x) \in J$ für alle $x \in I$, dann folgt für alle $x \in I$

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x). \tag{6.3}$$

Es seien nun $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_\xi^x f(t)\,dt$ und $G : J \to \mathbb{R}$, $G(y) = \int_\eta^y \frac{1}{g(u)} du$, dann folgt aus (6.3)

$$\begin{aligned} \int_\xi^x \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt &= \int_\xi^x f(t)\,dt \\ \Leftrightarrow \int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(u)} du &= \int_\xi^x f(t)\,dt \Leftrightarrow G(y(x)) = F(x), \end{aligned}$$

wobei $u = y(t)$, $\frac{du}{dt} = y'(t)$ substituiert wurde. Aus dieser Gleichung erhält man dann die Lösung des Anfangswertproblems durch Auflösen nach $y(x)$.

Liegt nur eine Differenzialgleichung ohne Anfangswertproblem vor, so erhält man die Lösungen, in dem man die Integrale durch unbestimmte Integrale (Stammfunktionen) ersetzt und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ addiert:

$$\int \frac{1}{g(u)} du = \int f(t)\,dt + c$$

und dann auflöst.

Unter der Voraussetzung $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ ist die Funktion $G : J \to \{\, g(y) \mid y \in J \,\}$ stets bijektiv nach Lemma 4.2.11 und daher folgt $y(x) = G^{-1}(F(x))$.

Beispiele 6.3.3. (i) $y' = x(1+y)$, $y(0) = 0$, das heißt $f(x) = x$, $g(y) = 1+y$. Es gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2, \\ G(y) &= \int_0^y \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^y = \ln(1+y). \\ \Rightarrow \ln(1+y) &= \frac{1}{2}x^2 \\ \Rightarrow 1+y &= e^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow y = e^{\frac{1}{2}x^2} - 1. \end{aligned}$$

In der Praxis kann man auch so vorgehen, dass man die zu $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$ umgeformte Gleichung integriert und den Weg über F und G dadurch etwas abkürzt.

(ii) $y' = x(1+y)$, $y(0) = -1$, also $f(x) = x$, $g(y) = 1+y$ und $g(\eta) = g(y(0)) = 0$. Es gilt: $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = -1$ ist eine Lösung.

(iii) $y' = \frac{3x^2+4x+2}{2(y+1)}$, $y(0) = 1$. Mit $f(x) = 3x^2+4x+2$ und $g(y) = (2(y+1))^{-1}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (3t^2+4t+2)\,dt = x^3 + 2x^2 + 2x, \\ G(y) &= \int_1^y 2(u+1)\,du = \left[(u+1)^2\right]_1^y = (y+1)^2 - 4. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}(y+1)^2-4=x^3+2x^2+2x &\Rightarrow (y+1)^2=x^3+2x^2+2x+4\\ &=(x^3+2x)+2(x^2+2)=(x+2)(x^2+2)\\ \Rightarrow y+1=\pm\sqrt{(x+2)(x^2+2)} &\text{ für } x>-2\\ \Rightarrow y=-1\pm\sqrt{(x+2)(x^2+2)} &\text{ für } x>-2.\end{aligned}$$

Aus $y(0)=1$ folgt dann $y(x)=-1+\sqrt{(x+2)(x^2+2)}$ für $x>-2$.

(iv) $y'=e^y\sin x$, also $f(x)=\sin x$, $g(y)=e^y>0$:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_\xi^x \sin t\,dt=[-\cos t]_\xi^x=\cos\xi-\cos x,\\ G(y)&=\int_\eta^y e^{-u}du=\left[-e^{-u}\right]_\eta^y=e^{-\eta}-e^{-y}.\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$e^{-\eta}-e^{-y}=\cos\xi-\cos x\Rightarrow e^{-y}=\cos x+\underbrace{e^{-\eta}-\cos\xi}_{=:c}.$$

Also insgesamt

$$-y=\ln(\cos x+c)\Rightarrow y=-\ln(\cos x+c).$$

Die gesuchte Lösung ist also die Funktion $y(x)=-\ln(\cos x+c)$ auf einem Intervall I mit $\cos x+c>0$ für alle $x\in I$.

(v) $y'=\frac{y}{x}-\frac{x^2}{y^2}$, $y(1)=1$. Ansatz: $z(x)=\frac{y(x)}{x}$, beziehungsweise $y(x)=z(x)\cdot x$. Dann ist

$$y'(x)=z(x)-\frac{1}{z^2(x)}=\underbrace{z'(x)\cdot x+z(x)}_{\text{Ansatz}}.$$

Also

$$z'=-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{x}=g(z)\cdot f(x).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_1^x\frac{1}{t}dt=\ln(x),\\ G(z)&=\int_1^z\left(-u^2\right)\,du=\left[-\frac{1}{3}u^3\right]_1^z=-\frac{z^3-1}{3}.\\ \Rightarrow -\frac{z^3-1}{3}&=\ln x\Leftrightarrow z^3=1-3\ln x\\ &\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{1-3\ln x}.\end{aligned}$$

Also ist $y(x)=x\sqrt[3]{1-3\ln(x)}$ auf einem Intervall I mit $1\in I$ und $1-3\ln x>0$ für alle $x\in I$, beispielsweise $\left(0,e^{\frac{1}{3}}\right)$.

Bemerkung 6.3.4. Eine DGL der Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ wird *homogene Differenzialgleichung* genannt. Der Ansatz $z = \frac{y}{x}$ führt dabei auf eine DGL mit getrennten Variablen:

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y' - z}{x} = \frac{f(z) - z}{x}.$$

6.4 Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Differenzialgleichung, die wir beim harmonischen Oszillator in Beispiel 6.1.2 betrachtet haben,

$$mx'' = -kx,\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0,$$

ist ein ein Beispiel für eine *lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Allgemeiner setzen wir

Definition 6.4.1: Lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Die Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(x)$$

wird *lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten* genannt. Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so heißt die Differenzialgleichung *homogen*, ansonsten *inhomogen*. Das zugehörige *charakteristische Polynom* P ist definiert durch

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Beispiele 6.4.2. (i) Wir betrachten die Differenzialgleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

und machen den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$. Dieser löst die Differenzialgleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + 3\lambda e^{\lambda t} + 2e^{\lambda t} = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ oder } \lambda = -2. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen $y_1(t) = e^{-t}$ und $y_2(t) = e^{-2t}$. Weiter ist dann für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ auch

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

eine Lösung. Weitere Lösungen gibt es nicht.

(ii) $y'' + \omega^2 y = 0$ (harmonischer Oszillator, siehe Beispiel 6.1.2 mit $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $y = x$). Der Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ löst die Differenzialgleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \\ \Leftrightarrow \lambda = \pm \omega i. \end{aligned}$$

Lösungen sind also

$$y_1(t) = e^{i\omega t} \text{ und } y_2(t) = e^{-i\omega t}$$

und damit auch

$$\tilde{y}_1(t) = \frac{1}{2}(y_1(t) + y_2(t)) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \cos(\omega t)$$

und

$$\tilde{y}_2(t) = \frac{1}{2i}(y_1(t) - y_2(t)) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \sin(\omega t).$$

Die allgemeine reelle Lösung ist

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (wie wir auch in Beispiel 6.1.2 behauptet hatten).

(iii) $y'' - 2y' + y = 0$. Der Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ löst die Differenzialgleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} - 2\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda = 1. \end{aligned}$$

Damit ist $y_1(t) = e^t$ eine Lösung. Weitere Lösungen finden wir in diesem Fall über den Ansatz der „Variation der Konstanten“:

Wir setzen $y(t) = c(t)e^{\lambda t}$. Dann ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= c'(t)e^{\lambda t} + c(t)\lambda e^{\lambda t} = (c'(t) + \lambda c(t))e^{\lambda t} \\ y''(t) &= (c''(t) + \lambda c'(t))e^{\lambda t} + (c'(t) + \lambda c(t))\lambda e^{\lambda t} \\ &= (c''(t) + 2\lambda c'(t) + \lambda^2 c(t))e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

das heißt $y(t) = c(t)e^{\lambda t}$ löst die DGL genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (c''(t) + 2\lambda c'(t) + \lambda^2 c(t))e^{\lambda t} - 2(c'(t) + \lambda c(t))e^{\lambda t} + c(t)e^{\lambda t} = 0 \\ \Leftrightarrow \text{für alle } t \in \mathbb{R}\ c''(t) + (2\lambda - 2)c'(t) + (\lambda^2 - 2\lambda + 1)c(t) = 0 \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \tag{6.4}$$
$$(2\lambda - 2)c'(t) = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \tag{6.5}$$
$$c''(t) = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Aus (6.4) folgt $\lambda = 1$ und damit ist (6.5) stets erfüllt. Aus (6.6) folgt $c'(t) = a$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$, folglich $c(t) = at + b$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ und schlussendlich ergibt sich $y(t) = (at + b)e^t$. Die Lösungsmenge ist also insgesamt

$$y(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Im letzten Beispiel haben wir gesehen, dass bei Vielfachheiten von Nullstellen λ auch $y(t) = te^{\lambda t}$ eine Lösung ist, dies gilt allgemeiner:

Satz 6.4.3: Lösungsmenge der linearen homogenen Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei die lineare homogene Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{6.7}$$

mit dem charakterischen Polynom $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$, $a_n = 1$. Es seien weiter $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ die verschiedenen komplexen Nullstellen und $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{N}$ die Vielfachheiten der Nullstellen mit

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{p_r} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R},$$

dann besitzt (6.7) die n Lösungen

$$y(t) = t^k e^{\lambda_\nu t} \; (\nu = 1, \ldots, r, \; 0 \leq k \leq p_\nu - 1).$$

Gilt $\lambda_\nu \notin \mathbb{R}$ für ein $\nu \in \{1, \ldots, r\}$, so ist auch $\overline{\lambda_\nu}$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms und besitzt die Vielfachheit p_ν. Um nur reelle Lösungen zu erhalten, ersetze man das Paar

$$t^k e^{\lambda_\nu t}, \; t^k e^{\overline{\lambda_\nu} t} \; (0 \leq k \leq p_\nu - 1)$$

durch

$$t^k \,\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_\nu t}\right), \; t^k \,\mathrm{Im}\left(e^{\lambda_\nu t}\right).$$

Bezeichnet man die n reellen Lösungen mit $y_1, \ldots, y_n$, so ist die allgemeine Lösung von (6.7) gegeben durch

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

mit Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 6.4.4. Die Zusammenfassung von Paaren zueinander komplex konjugierter Nullstellen zu reellen Lösungen hatten wir in Beispiel 6.4.2 (ii) schon vorgenommen. Für die allgemeine Situation in Satz 6.4.3 erinnern wir daran, dass für eine Komplexe Zahl $\lambda_\nu = a + ib$ gilt

$$e^{\lambda_\nu t} = e^{(a+ib)t} = e^{at} \cdot e^{ibt} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt) .$$

Mit $\overline{\lambda_\nu} = a - ib$ ist dann

$$\begin{aligned} t^k \frac{e^{\lambda_n ut} + e^{\overline{\lambda_\nu} t}}{2} &= t^k e^a t \cos bt = t^k \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_\nu t}\right) \text{ und} \\ t^k \frac{e^{\lambda_n ut} - e^{\overline{\lambda_\nu} t}}{2} &= t^k e^{at} \sin bt = t^k \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_\nu t}\right) . \end{aligned}$$

Beispiele 6.4.5. (i) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 3$. Das charakteristische Polynom hat die Form

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 2).$$

Die allgemeine Lösung lautet $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{2t}$. Aus den Anfangswerten erhalten wir

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + c_3 = 3, \\ y'(0) &= c_1 - 2c_2 + 2c_3 = -1, \\ y''(0) &= c_1 + 4c_2 + 4c_3 = 3. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem wird gelöst durch $c_1 = 3, c_2 = 1$ und $c_3 = -1$, woraus sich die Lösung für das Anfangswertproblem ergibt.

(ii) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$ (siehe Beispiel 6.4.2 (iii)), das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

und die allgemeine Lösung hat die Form $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$. Die Anfangswerte liefern $y(0) = c_1 = 4$ sowie $y'(0) = \left(c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t\right)\big|_{t=0} = c_1 + c_2 = 1$, also $c_2 = -3$.

(iii) Wir betrachten den harmonischen Oszillator (Beispiele 6.1.2, 6.4.2 (ii)) und fügen einen Reibungsterm proportional zur Geschwindigkeit ein (sogenannte gedämpfte Schwingung). Die Differenzialgleichung hat jetzt die Form

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = 0 \text{ mit } \omega, \gamma \neq 0.$$

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2$ und mit Hilfe von quadratischer Ergänzung gilt

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 = \gamma^2 - \omega^2.$$

Der Fall $\omega > \gamma > 0$ („kleine Reibung“):

$$\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

führt auf die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \operatorname{Re}\left(e^{(-\gamma + i\sqrt{\omega^2-\gamma^2})t}\right) + c_2 \operatorname{Im}\left(e^{(-\gamma + i\sqrt{\omega^2-\gamma^2})t}\right) \\ &= c_1 e^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t) + c_2 e^{-\gamma t}\sin(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t) \\ &= e^{-\gamma t}\left(c_1\cos(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t) + c_2\sin(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t)\right). \end{aligned}$$

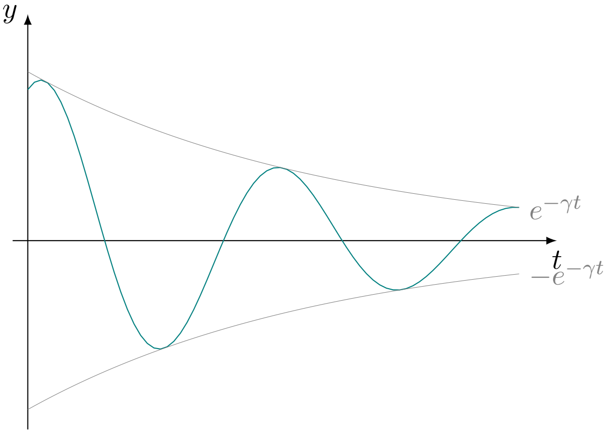

Abbildung 6.2: Gedämpfte Schwingung mit kleiner Reibung.

Der Fall $\gamma > \omega > 0$ („große Reibung“):

$$\begin{aligned} \lambda &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\omega^2} \text{ liefert} \\ y_1(t) &= e^{-\gamma t}\exp(\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t), \\ y_2(t) &= e^{-\gamma t}\exp(-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t). \end{aligned}$$

Mit den Funktion Kosinus hyperbolicus, $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, und Sinus hyperbolicus, $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ gilt

$$\frac{y_1(t)+y_2(t)}{2} = \cosh(\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t)e^{-\gamma t}$$

und

$$\frac{y_1(t)-y_2(t)}{2} = \sinh(\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t)e^{-\gamma t}.$$

Daher lässt sich die allgemeine Lösung auch schreiben als

$$y(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1\cosh(\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t) + c_2\sinh(\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t)\right).$$

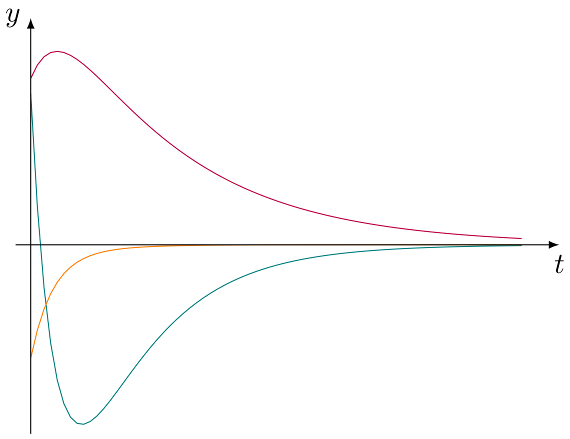

Abbildung 6.3: Gedämpfte Schwingung mit großer Reibung.

Der Fall $\omega = \gamma$ führt auf $\lambda = -\gamma$ und die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t).$$

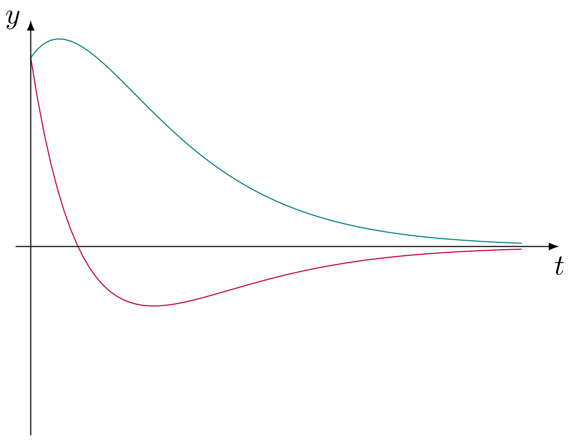

Abbildung 6.4: Gedämpfte Schwingung mit $\gamma = \omega$.

Wir betrachten nun inhomogene lineare Differenzialgleichungen. Anschaulich kann man sich etwa im Fall des harmonischen Oszillators eine Person auf einer Schaukel vorstellen, der eine zweite Person jeweils "Schwung" gibt (allerdings müsste man sich die Verbindung der Personen starr und zumindest die Person auf der Schaukel punktförmig vorstellen, damit die Situation korrekt modelliert ist). Dieser zusätzliche "Schwung" wird durch den Term auf der rechten Seite, die Inhomogenität, beschrieben. Zunächst betrachten wir die Struktur von möglichen Lösungen.

Satz 6.4.6: Inhomogene lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei y_p eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x). \tag{6.8}$$

Dann ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung von (6.8), wenn $y = y_p + y_0$ mit einer Lösung y_0 der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung.

Beweis. Dies folgt mit der Linearität sofort und analog zur entsprechenden Aussage über die Lösungsmenge von inhomogenen linearen Gleichungssystemen: Wir schreiben $Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$, dann ist $L : C^n \to C$ eine lineare Abbildung. Ist y eine Lösung von (6.8), so löst $y - y_p = y_0$ die homogene Gleichung, da $L(y - y_p) = Ly - Ly_p = f - f = 0$. Umgekehrt löst $y_p + y_0$ für beliebige Lösungen y_0 der homogenen Gleichung die inhomogene Gleichung (6.8), denn $L(y_p + y_0) = Ly_p + Ly_0 = f$. □

Wenn wir also eine Lösung der inhomogenen Gleichung haben, erhalten wir alle möglichen Lösungen der inhomogenen Gleichung mit dem obigen Satz. Für rechte Seiten mit einer speziellen Gestalt können wir Lösungen der inhomogenen Gleichung leicht finden:

Lösungen der inhomogenen Gleichung I 6.4.7. Mit dem charakteristischen Polynom $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ gilt für die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = e^{\lambda x}$, dass

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = P(\lambda)e^{\lambda x}.$$

Wenn $P(\lambda) \neq 0$ gilt, so ist $y(x) = \frac{e^{\lambda x}}{P(\lambda)}$ also eine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (6.8) im Fall $f(x) = e^{\lambda x}$.

Beispiele 6.4.8. (i) $y'' + 3y' + 2y = e^{4x}$, das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

mit $P(4) = 30$. Unsere Überlegungen oben liefern, dass $y_p(x) = \frac{e^{4x}}{30}$ eine Lösung der inhomogenen DGL ist. Die allgemeine Lösung ist dann mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y(x) = \frac{e^{4x}}{30} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}.$$

(ii) Wir betrachten wieder den harmonischen Oszillator (Beispiel 6.4.2 (ii)) und untersuchen den Fall der „ungedämpften erzwungenen Schwingung“:

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\alpha x) = \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha x}\right) \text{ mit } \alpha, \omega > 0,\ \alpha \neq \omega.$$

Das charakteristische Polynom hat die Form $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ und $P(i\alpha) = \omega^2 - \alpha^2 \neq 0$ nach Voraussetzung. Wir machen den Ansatz

$$y(x) = \text{Re}\left(\frac{e^{i\alpha x}}{\omega^2 - \alpha^2}\right) = \frac{\cos(\alpha x)}{\omega^2 - \alpha^2}$$
$$\Rightarrow y''(x) + \omega^2 y(x) = \frac{-\alpha^2 \cos(\alpha x)}{\omega^2 - \alpha^2} + \frac{\omega^2 \cos(\alpha x)}{\omega^2 - \alpha^2} = \cos(\alpha x).$$

Die allgemeine Lösung ist dann mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y(x) = \frac{\cos(\alpha x)}{\omega^2 - \alpha^2} + c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x).$$

(iii) Führen wir noch einen zusätzlichen Dämpfungsterm ein, dann hat die Differenzialgleichung die Form

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = \cos(\alpha x) \text{ mit } \omega, \gamma, \alpha > 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2, \ P(i\alpha) = \omega^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\gamma \neq 0.$$

Wir setzen an:

$$\begin{aligned} y(x) &= \text{Re}\left(\frac{e^{i\alpha x}}{\omega^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\gamma}\right) \\ &= \text{Re}\left(\frac{e^{i\alpha x}}{|\omega^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\gamma| \exp\left(i \operatorname{arccot} \frac{\omega^2-\alpha^2}{2\alpha\gamma}\right)}\right) \\ &= \frac{\cos\left(\alpha x - \operatorname{arccot} \frac{\omega^2-\alpha^2}{2\alpha\gamma}\right)}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}}. \end{aligned}$$

Man sieht, dass diese Lösung im Wesentlichen die phasenverschobene rechte Seite $\cos \alpha x$ darstellt. Die allgemeine Lösung erhält man dann als Linearkombination mit Beispiel 6.4.5 (iii). Unabhängig davon, ob die Reibung groß oder klein ist, wird die Lösung für große x hauptsächlich durch die aufgezwungene Schwingung bestimmt, da der Anteil der Lösung der homogenen Gleichung klein wird (Abbildung 6.5).

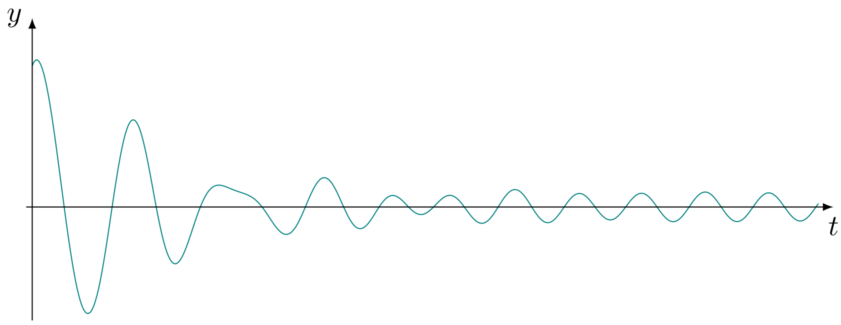

Abbildung 6.5: Harmonischer Oszillator mit kleiner Reibung und erzwungener Schwingung.

Lösungen der inhomogenen Gleichung II 6.4.9. Es sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = xe^{\lambda x}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$y^{(k)}(x) = e^{\lambda x} \cdot \lambda^{k-1}(k + \lambda x).$$

Also ist

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) \\ = e^{\lambda x}(n\lambda^{n-1} + (n-1)\lambda^{n-2}a_{n-1} + \cdots + a_1) \\ + xe^{\lambda x}(\lambda^n + \lambda^{n-1}a_{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) \\ = e^{\lambda x}P'(\lambda) + y(x)P(\lambda) \end{aligned}$$

mit $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Ist $P(\lambda) = 0$ und $P'(\lambda) \neq 0$, so haben wir gezeigt, dass $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{xe^{\lambda x}}{P'(\lambda)}$ eine Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = e^{\lambda x} \tag{6.9}$$

ist. Entsprechend erhält man mit Ansätzen der Form $y(x) = x^{\ell}e^{\lambda x}$ Lösungen für (6.9) in den Fällen $P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(\ell-1)}(\lambda) = 0$, $P^{(\ell)}(\lambda) \neq 0$.

Beispiele 6.4.10. (i) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$, das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2, \text{ mit } P(-1) = 0, \ P'(-1) \neq 0.$$

Also löst $y(x) = xe^{-x}$ die DGL $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$.

(ii) Wir betrachten den ungedämpften harmonischen Oszillator mit einer erzwungenen Schwingung:

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega x).$$

Dieser Fall war in Beispiel 6.4.8 (ii) noch ausgeschlossen gewesen. Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ mit $P(i\omega) = 0$ und $P'(i\omega) = i2\omega$. Wir machen den Ansatz

$$y(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{xe^{i\omega x}}{2\omega i}\right) = -\frac{x}{2\omega}\,\mathrm{Re}\left(ie^{i\omega x}\right) = \frac{x}{2\omega}\sin(\omega x).$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$y(x) = \frac{x}{2\omega}\sin(\omega x) + c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x)$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die Amplitude der Schwingung ist hier $O(x)$, das heißt sie wächst wie x. Durch die Anregung mit der Eigenfrequenz ω kommt es zur sogenannten *Resonanzkatastrophe* (Abbildung 6.6).

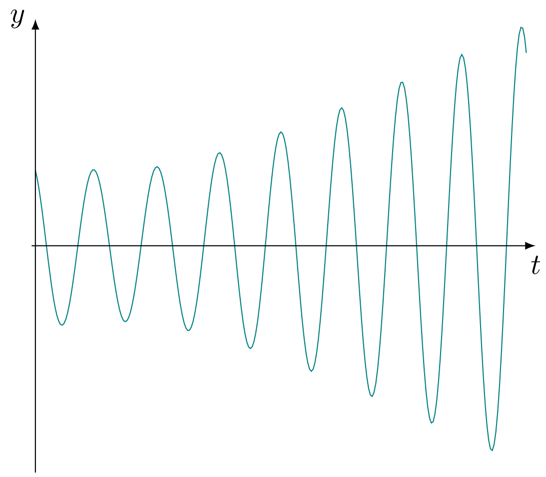

Abbildung 6.6: Resonanzkatastrophe: Ungedämpfter harmonsicher Oszillator bei erzwungener Schwingung mit der Eigenfrequenz.

Literaturverzeichnis

[1] F. Schulz, *Analysis I*. Oldenbourg Verlag, München, 2. Auflage, 2011

[2] F. Schulz, *Aufgabensammlung Analysis I*. Oldenbourg Verlag, München, 1. Auflage, 2011

[3] D. Tall, *The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere*, The Mathematical Gazette, 66, 435, Seiten 11-22, 1982

[4] G. B. Thomas, M. D. Weir und J. Hass, *Analysis 1*, Pearson, München 12. Auflage, 2013

[5] W. Walter, *Analysis 1*. Springer-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1999