Universität Ulm

Abgabe: Freitag, den 05.06. um 12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 6

23. Zeige, dass für die nachstehenden Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt und berechne für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei (3)

(a) $a_n := \dfrac{n+4}{n+1}$

(b) $a_n := \dfrac{4n-1}{n^2+n^7+25}$

(c) $a_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

24. Es sei $0 < q < 1$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge reeller Zahlen mit $|y_{n+1} - y_n| \leq q \cdot |y_n - y_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert. (3)
Hinweis: Zeige hierzu, dass (y_n) eine Cauchyfolge ist. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert. Schätze mit einer geometrischen Reihe ab.

25. Zeige, dass für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt (1)

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

26. Wir definieren die Menge $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{q_1 + iq_2 \,|\, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$. Zeige die folgenden Aussagen: (3)

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon > 0$ exisitert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|x - q| < \varepsilon$.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $q \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ mit $|z - q| < \varepsilon$.