Universität Ulm

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller

Abgabe: Freitag, den 29.05. um 12 Uhr

Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Lösungsvorschlag Analysis 1: Blatt 5

17. Zeige:

(a) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ gilt (1)

$$\frac{n^k}{k!}\left(1 - \frac{k(k-1)}{n}\right) \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

Lösungsvorschlag: Es gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\, n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n^k}{k!}\left(1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right).$$

Der Ausdruck in der Klammer ist ≤ 1 und somit ist $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$. Mit der Bernoulli-Ungleichung folgt außerdem

$$\frac{n^k}{k!}\left(1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) \geq \frac{n^k}{k!}\Bigg(1 \underbrace{- \frac{k-1}{n}}_{>-1}\Bigg)^k \geq \frac{n^k}{k!}\left(1 - \frac{k(k-1)}{n}\right),$$

womit auch die andere Ungleichung gezeigt ist.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ gilt (1)

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{|z|^k}{(k-2)!}.$$

Lösungsvorschlag: Wir benutzen den binomischen Lehrsatz und (a) und erhalten

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}\Big|$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{|z|^k}{k!}\left(1 - \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{n^k}\right) \overset{(a)}{\leq} \sum_{k=2}^{n} \frac{|z|^k}{k!}\;\frac{k(k-1)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{|z|^k}{(k-2)!},$$

wobei in der zweiten Zeile benutzt wurde, dass die ersten beiden Summanden verschwinden.

18. Man beweise die Parallelogrammidentität in $\mathbb{C}$: (1)

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Lösungsvorschlag: Es gilt

$$\begin{aligned}|z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w)(\overline{z-w})\\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w}\\ &= 2z\bar{z} + 2w\bar{w} = 2(|z|^2 + |w|^2).\end{aligned}$$

19. Man berechne $\overline{z}$, $|z|$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Re}(\frac{1}{z})$ und $\operatorname{Im}(\frac{1}{z})$ für $z = \frac{12+5i}{2+3i}$. (1)

Lösungsvorschlag: Mit der 3. binomischen Formel erhalten wir

$$z = \frac{12+5i}{2+3i} = \frac{(12+5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{24 - 36i + 10i + 15}{4+9} = \frac{39 - 26i}{13} = 3 - 2i.$$

Damit ist $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -2$ und $\bar{z} = 3 + 2i$. Weiter ist

$$|z| = \sqrt{(3-2i)(3+2i)} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Die Reziproke von z ist gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{2+3i}{12+5i} = \frac{(2+3i)(12-5i)}{(12+5i)(12-5i)} = \frac{39+26i}{169} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$$

Also ist $\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{3}{13}$ und $\operatorname{Im}(\frac{1}{z}) = \frac{2}{13}$.

20. Zeichnen Sie die folgenden Mengen: (2)

(i) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid -2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3,\ -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\}$

(ii) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 1 + i| < 2\}$

(iii) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$

(iv) $M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq |z-i| \leq |z-1|\}$.

Geben Sie ferne bei den Mengen M_3, M_4 eine äquivalente Beschreibung der Menge mittels Bedingungen an den Imaginär- und Realteil einer komplexen Zahl an.

21. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \text{ und } \operatorname{Re} z \leq 0\}$ die komplexe Zahl (2)

$$w = \sqrt{|z|}\frac{z+|z|}{|z+|z||}$$

eine Quadratwurzel der Zahl z ist. Das heißt es gilt $w^2 = z$. Geben sie außerdem alle komplexen Quadratwurzeln der Zahl $z_0 = -6 + 8i \in \mathbb{C}$ in der Form $x = \operatorname{Re}(x) + i \operatorname{Im}(x)$ an und beweisen Sie ihre Behauptung.

Lösungsvorschlag: Wir berechnen das Quadrat von w:

$$\begin{aligned}
w^2 &= \left(\sqrt{|z|}\frac{z+|z|}{|z+|z||}\right)^2 = |z|\frac{(z+|z|)^2}{|z+|z||^2} = |z|\frac{(z+|z|)^2}{(z+|z|)\overline{(z+|z|)}} \\
&= |z|\frac{z+|z|}{\bar{z}+|z|} = |z|\frac{(z+|z|)(z-|z|)}{(\bar{z}+|z|)(z-|z|)} = |z|\frac{z^2-|z|^2}{|z|^2+(z-\bar{z})|z|-|z|^2} \\
&= |z|\frac{z^2-z\bar{z}}{(z-\bar{z})|z|} = \frac{z(z-\bar{z})}{z-\bar{z}} = z.
\end{aligned}$$

Damit ist w eine Quadratwurzel von z. Mit dieser Formel erhalten wir als eine Quadratwurzel von $z_0 = -6 + 8i$ ($|z_0| = 10$):

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{10}\frac{-6+8i+10}{|-6+8i+10|} = \sqrt{10}\frac{4+8i}{|4+8i|} = \sqrt{10}\frac{4+8i}{\sqrt{80}} \\
&= \sqrt{10}\frac{4+8i}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{8}} + \frac{8}{\sqrt{8}}i = \sqrt{2} + \sqrt{8}i.
\end{aligned}$$

Zur Probe berechnen wir w_0^2:

$$w_0^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{8}i)^2 = 2 + 2\cdot\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}_{=4}i - 8 = -6 + 8i.$$

Die zweite Lösung ist $-w_0 = -\sqrt{2} - \sqrt{8}i$, da $(-w_0)^2 = (-1)^2 \cdot w_0^2 = w_0^2$.

22. (a) Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie die folgenden Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (1)

$$z^{n+1} - w^{n+1} = (z-w)\cdot\sum_{k=0}^{n} z^{n-k}w^k.$$

Lösungsvorschlag: Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion: $n = 0$: Es gilt

$$z - w = (z-w)\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{0} z^{n-k}w^k}_{=1} = z - w.$$

Wir nehmen an, dass die Aussage für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
$n \to n+1$: Es gilt

$$\begin{aligned}
(z-w) \cdot \sum_{k=0}^{n+1} z^{n+1-k} w^k &= (z-w) \left(z \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} z^{n-k} w^k \right) + z^{n+1-(n+1)} w^{n+1} \right) \\
&= z \cdot (z-w) \cdot \sum_{k=0}^{n} z^{n-k} w^k + (z-w) \cdot w^{n+1} \\
&\overset{\text{IH}}{=} z \cdot (z^{n+1} - w^{n+1}) + (z-w) \cdot w^{n+1} \\
&= z^{n+2} - zw^{n+1} + zw^{n+1} - w^{n+2} = z^{n+2} - w^{n+2}.
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun mittels vollständiger Induktion.

(b) Es seien $a_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Finden Sie eine Formel (ohne Summenzeichen) für den Ausdruck (1)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - 2a_{k-1} + a_{k-2}).$$

Lösungsvorschlag: Mit der Formel für Teleskopsummen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k - 2a_{k-1} + a_{k-2}) &= \sum_{k=1}^{n} -(a_{k-1} - a_k) + (a_{k-2} - a_{k-1}) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-2} - a_{k-1}) \\
&= -(a_0 - a_n) + (a_{-1} - a_{n-1}) = -a_0 + a_1 - a_{n-1} + a_n
\end{aligned}$$