Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 08

Abgabedatum: 13.06.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Gibt es eine differenzierbare Funktion, die nicht stetig ist?

(b) Folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit Lipschitz-Stetigkeit?

(c) Folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit Stetigkeit?

(d) Ist jede invertierbare Funktion differenzierbar?

2. (A) Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \; \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig auf I ist. (2)

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist. (4)

3. (A) Ableitungsregeln

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich an.

a) $f_1(x) = \log(\log(2x))$, (0.5)

b) $f_2(x) = 2x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, (0.5)

c) $f_3(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, (0.5)

d) $f_5(x) = \frac{x^{\sqrt{x}}}{2^x}$, (0.5)

e) $f_6(x) = x^5 5^x$, (0.5)

f) $f_7(x) = \log\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)$, (0.5)

g) $f_8(x) = (x \cos x)^x$, (1)

h) $f_4(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, (1)

i) $f_9(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin 2x}$. (1)

4. (A) Aussagen zur Differenzierbarkeit

Sei I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $x_0 \in I$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Gibt es Zahlen $K > 0$ und $\alpha > 1$ mit $|f(x)| \leq K\,|x|^\alpha$ für $x \in I$, so ist f in 0 differenzierbar. (2)

b) Gilt $f(0) = 0$ und gibt es $K > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ mit $|f(x)| \geq K\,|x|^\alpha$ für $x \in I$, so ist f in 0 nicht differenzierbar. (2)

c) Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

(2)

5. (A) Monotonieverhalten

a) Bestimmen Sie, auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}$ die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. (2)

b) Begründen Sie, welche der beiden Zahlen 2024^{2025} und 2025^{2024} größer ist. (1)

c) Zeigen Sie, dass es genau ein paar natürlicher Zahlen n, m gibt mit $n < m$ und $n^m = m^n$. (3)

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass ln *auf seinem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend ist.*

6. (T),(NA)

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen und geben Sie jeweils ihren maximalen Definitionsbereich an.

1. $f_1(x) = (x^x)^x$
2. $f_2(x) = x^{(x^x)}$
3. $f_3(x) = x^{\frac{1}{x}}$
4. $f_4(x) = \ln\ln(1 + x)$
5. $f_5(x) = x^{\sin(x)}$
6. $f_6(x) = \sqrt[3]{x^{3/5} + \sin^3(1/x) - \tan^2(x)}$
7. $f_7(x) = \frac{\cos(x)}{2+\sin\log x}$

7. (T),(NA)

Zeigen Sie, dass für $x, y \in (-\infty, 0)$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ folgende Ungleichungen gelten.

1. $|\cos e^x - \cos e^y| \leq |x - y|$.
2. $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

Hinweis: Verwenden Sie den 1. Mittelwertsatz.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.