Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille
Marc Schneble

Sommersemester 16
Blatt 11 (40 Punkte)
28.06.2016

Übungen zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe: Dienstag, 28.06.2016, bis 14:15 Uhr, H22)

1. Berechne, falls existent, folgende Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \dfrac{y^{1-x}-1}{1-x}, y>0$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x-1}{4\cos^2(x)-3}$

   (je 3 Punkte)

2. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass dann für alle $x \in (a,b)$ gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

   (7 Punkte)

3. Es sei $D := (0,\infty)$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \log(x)$.

   a) Bestimme die formale Taylor-Reihe $Tf(1,x)$ von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

   b) Bestimme den Konvergenzradius von $Tf(1,x)$.

   (6+2 Punkte)

4. Bestimme das dritte Taylor Polynom $T^{(3)}f(x_0,x)$ von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \exp(x)\sin(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und zeige, dass für $|x| < \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\left|f(x) - T^{(3)}f(x_0,x)\right| \le \frac{\sqrt{e}}{6}\,|x|^4$$

   gilt.

   (6 Punkte)

5. Bestimme und klassifiziere alle lokalen Extrema der Funktion $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^5}{20} + \frac{2}{3}x^3, & x \in [-4,1) \\ \frac{x^4}{2} - \frac{8}{3}x^3 + 3x^2 - 3, & x \in [1,4] \end{cases}.$$

   Überprüfe die Existenz eines globalen Maximums bzw. Minimums und berechne gegebenenfalls $\max\limits_{[-4,4]} f(x)$ und $\min\limits_{[-4,4]} f(x)$ und gebe die Intervalle an, auf denen f (streng) monoton steigend bzw. fallend ist.

   (10 Punkte)