Universität Ulm

Abgabe: Freitag, den 03.07. um 12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Lösungsvorschlag Analysis 1: Blatt 10

38. Man berechne die Werte folgender Reihen: (2)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k(k+1)(k+2)}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln\left(k^{\ln(k+1)}\right)}$

39. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz: (4)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^6}{3^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10k-2}{k^4+4}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{5k+3}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

(h) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (\ln k)^{-\ln k}$

40. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass (1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+3k+2}{2} z^k = \frac{1}{(1-z)^3}.$$

41. (3)

(a) Man zeige, dass für reelle Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $A_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$.

(b) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ absolut konvergent, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

(c) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so braucht $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ nicht zu konvergieren. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jedoch absolut konvergent, so folgt auch die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.