Blatt 1 Lösungsvorschlag:

1)

a) $\sum_{k=7}^{15} 2k = 2\sum_{k=7}^{15} k = 2\left(\sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{6} k\right) = 2\left(\frac{15\cdot 16}{2} - \frac{6\cdot 7}{2}\right) = \underline{\underline{198}}$

Alternativ: $2\sum_{k=7}^{15} k = 2\sum_{k=1}^{9}(k+6) = 2\left(\sum_{k=1}^{9} k + 9\cdot 6\right) = 2\left(\frac{9\cdot 10}{2} + 9\cdot 6\right) = 198$

b) $\sum_{k=0}^{10} \frac{-1}{2^{k+1}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k = -\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2048} - 1}{1} = \underline{\underline{-\frac{2047}{2048}}}$

c) $\sum_{k=1}^{7} \frac{(-1)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^8 - 1}{-\frac{1}{3} - 1} - 1 \quad \underline{\underline{\left(= -\frac{547}{2187}\right)}}$

d) $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k - \left(\frac{3}{2}\right)^0 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} - 1 = 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) - 1 = \underline{\underline{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 3}}$

2) a) IA: ~~n=1~~: $A(1)$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}$ ✓

IV: $A(n)$ gelte für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$

c) $\sum_{k=1} \frac{\ldots}{3^k} = \sum_{k=1} \left(\frac{\ldots}{3}\right) = \sum_{k=0} \left(\frac{\ldots}{3}\right) \ldots \left(-\frac{\ldots}{3}\right) - \frac{\ldots}{-\frac{1}{3}-1} - 1 \quad \left(= -\frac{\ldots}{2187}\right)$

d) $\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{k} - \left(\frac{3}{2}\right)^{0} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n} - 1}{\frac{3}{2} - 1} - 1 = 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n} - 1\right) - 1 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n} - \ldots$

2) a) IA: ~~n=1~~: $A(1)$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6}$ ✓

IH: ~~$\sum_{k=1}^{n}$~~ $A(n)$ gelte für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$

IS: ~~$\sum_{k=1}^{n+1}$~~ Es gelte $A(n)$. z.z.: $A(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \overset{IH}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \qquad \square$$

b) IA: $A(1)$: $(1+x)^1 = 1+x \geq 1 + 1 \cdot x$

IH: $A(n)$ gelte für festes aber bel. $n \in \mathbb{N}$

IS: Es gelte $A(n)$. z.z.: $A(n+1)$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{IH}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2$$

$$= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x \qquad \square$$

c) IA: $A(2)$: 2 Punkte $\Rightarrow$ 1 Strecke ; $1 = \frac{2 \cdot (2-1)}{2}$ ✓

IH: $A(n)$ gelte für festes aber bel. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

IS: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

Es gelte $A(n)$. Kommt nun ein neuer Punkt hinzu, so können n neue Strecken gezogen werden, also gibt es jetzt ~~$n(n+1)$~~ $n + \frac{n(n-1)}{2}$ Strecken nach IH. Es gilt: $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ $\square$

d) IA: $A(1): \sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = (-1)^1 \cdot 1^2 = -1 = (-1)^1 \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

IH: $A(n)$ gelte für festes aber bel. $n \in \mathbb{N}$

IS: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 = (-1)^{n+1}(n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 \overset{IH}{=} (-1)^{n+1}(n+1)^2 + (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1)^2 - (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(2n^2 + 4n + 2 - n^2 - n)$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n^2 + 3n + 2) = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+1)(n+2) = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \square$$