Megi Hoxhalli
Daniele Vella
Emmanuella Udeh
Micha Kotlowski

Blatt 2

Auf. 1

Urnenmodell mit Zurücklegen mit Reihenfolge

A:= "Drei Fragen richtig beantwortet"

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3^2(4+3+2+1)}{4^5} = \frac{90}{1024} = 0{,}0879$$

Auf. 2

Urnenmodell mit Zurücklegen mit Reihenfolge

$$|\Omega| = 10^4$$

(a) $P(A) = \frac{5\cdot 10\cdot 10\cdot 3}{10^4} = 0{,}15$

(b) $A^c :=$ "keine Rote oder keine schwarze oder keine weiße"

$$P(A) = 1 - \frac{7^4+8^4+5^4-3^4-2^4-5^4}{10^4} = \frac{6400}{10000} = 0{,}36$$

(c) (i) $P(A) = \frac{5^4}{10^4} = 0{,}0625$

(ii) $P(A) = \frac{3^4}{10^4} = 0{,}0081$

(iii) $P(A) = \frac{2^4}{10^4} = 0{,}0016$

(d) $A^c :=$ "nur eine Farbe oder alle Farben"

$$P(A) = 1 - (P(\text{"nur rot"}) + P(\text{"nur schwarz"}) + P(\text{"nur weiß"}) + P(\text{"alle Farben"}))$$

$$= 1 - (0{,}0081 + 0{,}0016 + 0{,}0625 + 0{,}36)$$

$$= 0{,}5678$$

(e) $P(A) = \frac{5\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{4!}{2}}{10^4} = 0{,}072$

Auf. 3

(a) $T :=$ "Tot" $R :=$ "Raucher" $N :=$ "Nichtraucher"

$P(T|R) = \frac{139}{582} = 0{,}2388$ $P(T|N) = \frac{230}{732} = 0{,}3142$

(b) (i) $P(T|R) < P(T|N) \Rightarrow$ falsch

(ii) $P(T) = \frac{139+230}{582+732} = 0{,}2808 \neq 0{,}2388 = P(T|R) \Rightarrow$ falsch

(iii)

Nein, da es noch andere unbekannte Variablen geben kann.

Auf. 4

(a) Normiertheit $\Rightarrow c =$

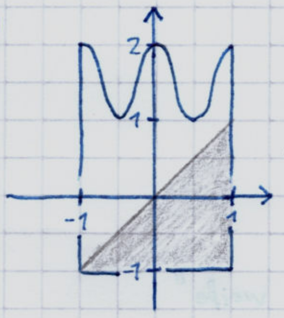
$$\int_{-1}^{1} f(x)+1\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 0{,}5\cos(2\pi x)+2{,}5\,dx$$

$$= \left[\frac{0{,}5\sin(2\pi x)}{2\pi}+2{,}5x\right]_{-1}^{1}$$

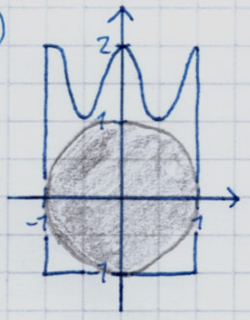
$$= 5$$

(b)



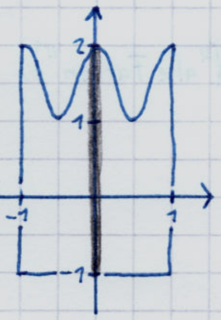
$P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4$

(c)



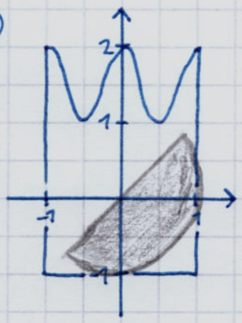
$P(B) = \frac{\pi}{5} = 0{,}6283$

(d)

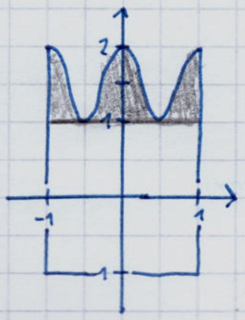


$P(C) = 0$

(e)



$P(D) = P(B) \cdot 0{,}5 = 0{,}31415$



$P(E) = \int_{-1}^{1} 0{,}5\cos(2\pi x) + 0{,}5\,dx = 1$

Auf. 5

(a) IA: $n=1$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right) = P(A_1) = \sum_{i=1}^{1} P(A_i) \quad \checkmark$$

IH: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

IS: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&\overset{IH}{\leq} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) && \text{da } P: \mathcal{F} \to [0,1] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) \quad \square
\end{aligned}$$

(b) IA: $n=1$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{1} A_i\right) = P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (1-1)$$

IH: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$

IS: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&\overset{IH}{\geq} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) + P(A_n+1) - 1 && \text{da } -P(A) \geq -1 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - ((n+1)-1) \quad \square
\end{aligned}$$

Auf. 6

IH: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i-1} \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_i \leq n} P(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i}) \right)$

IS: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\overset{IH}{=} \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i-1} \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_i \leq n} P(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i}) \right) + P(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i-1} \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_i \leq n} P(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i} \cap A_{n+1}) \right) \\
&= \quad \text{---}||\text{---} \quad + \sum_{i=0}^{n} \left((-1)^{i} \sum_{0 \leq k_0 < \ldots < k_i \leq n} P(A_{k_0} \cap \ldots \cap A_{k_i} \cap A_{n+1}) \right) \quad \text{mit } A_0 = \emptyset \\
&= \quad \text{---}||\text{---} \quad + \sum_{i=1}^{n+1} \left((-1)^{i-1} \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_i = n+1} P(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \left((-1)^{i-1} \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_i \leq n+1} P(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i}) \right) \quad \square
\end{aligned}$$