



# UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Freitag, den 15.05. um  
12 Uhr

Dr. Gerhard Baur  
Dr. Jan-Willem Liebezeit  
Marcus Müller  
Sommersemester 2020  
Punktzahl: 10

## Übungen Analysis 1: Blatt 3

9. Es sei  $K$  ein Körper und  $a, b, c, d \in K$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen. Geben Sie in jedem Schritt die verwendeten Körperaxiome aus der Vorlesung an. (3)

- (a) Ist  $a \neq 0$ , so besitzt die Gleichung  $a \cdot x = b$  genau die Lösung  $x = a \cdot b^{-1}$  (vgl. Satz 2(ii)).
- (b)  $(-1) \cdot a = -a$  und  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$  (vgl. Satz 3(iii)).
- (c) Ist  $b \cdot c \cdot d \neq 0$ , dann gilt (vgl. Satz 3(v))

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

10. Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $a, b, c, d \in K$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen: (2)

- (a) Aus  $x > y > 0$  folgt  $xy^{-1} > 1$ .
- (b) Ist  $a < c < b$ , so gibt es eine eindeutige Zahl  $\lambda \in (0, 1)$  mit  $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ .

11. Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $A, B \subset K$  seien nichtleer. Für eine beliebige nichtleere Teilmenge  $A \subset K$  definieren wir  $-A = \{-a : a \in A\}$ . Zeigen Sie folgenden Aussagen: (3)

- (a) Falls  $\max A$  existiert, so existiert auch  $\min -A$  und es gilt  $\min -A = -\max A$ .
- (b) Ist  $A \subset B$  und existieren  $\min A$  und  $\min B$ , so ist  $\min A \geq \min B$ .
- (c) Existieren  $\max A$  und  $\max B$ , so existiert auch  $\max A \cup B$  und es gilt  $\max A \cup B = \max\{\max A, \max B\}$ .

12. Es sei  $\mathcal{P}(X)$  die Potenzmenge einer nichtleeren Menge  $X$ . Sind  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ , so definieren wir die symmetrische Differenz  $\triangle : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  durch  $\triangle(A, B) := A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{P}(X)$  zusammen mit  $\triangle$  eine abelsche Gruppe bildet (also Prüfe die Axiome der Addition (A1)-(A4)). Was ist das Nullelement dieser Gruppe? Wie lautet die Inverse zu  $A \in \mathcal{P}(X)$ ? (2)