UNIVERSITÄT ULM
Abgabe: Freitag, den 19.06. um 12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 8

31. (a) Es seien $a, b > 0$. Man zeige die Ungleichungen (1)

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

(b) Für $0 < a_1 < b_1$ seien die Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \text{ und } b_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(i) Man zeige, dass die Folge der Intervalle $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ eine Intervallschachtelung bildet. (2)

(ii) Man bestimme die reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$, welche in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}$ liegt. (2)

32. Man verifiziere für alle $x, y > 0$ die Ungleichung (1)

$$\frac{\log x + \log y}{2} \leq \log\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

33. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung (2)

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq n^n e^{-n+1} n$$

erfüllt ist.

34. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass dann auch (2)

$$a_n = \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n$$

konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \exp(x)$.