Hinweise zur Abgabe

Abgabetermin: 17.05.21, 14:00 Uhr
Abgabeformat: Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!
Sonstiges: Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an.

Aufgaben

1. i) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die folgenden Beispiele auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^5$ (1)

b) $a_n = \left(\frac{3n+1}{n+1} - \frac{n+1}{n}\right)$ (1)

c) $a_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n$ (1)

d) $a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$ (1)

ii) Zeigen Sie , dass (6)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Hinweis: Sie können versuchen, mit dem Ansatz $n = ((\sqrt[n]{n} - 1) + 1)^n$ *zu starten.*

2. i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge, definiert durch $b_n = a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und in diesem Fall die beiden Grenzwerte übereinstimmen. (3)

ii) Sei nun $a_1 > 0$. Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (7)

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

monoton wachsend, aber nicht nach oben beschränkt ist.

3. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte reelle Zahlenfolgen. Zeigen oder widerlegen (mit einem Gegenbeispiel) Sie die folgenden Aussagen:

i) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$ (2)

ii) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$ (2)

iii) $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$ (2)

iv) $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \geq (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$ (2)

v) $-\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n$ (2)

4. i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge und (5)

$$\varphi_1, ..., \varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

streng monoton wachsende Funktionen, sodass die zugehörigen Teilfolgen mit Grenzwerten

$$\alpha_l = \lim_{j\to\infty} a_{\varphi_l(j)}$$

für alle $l = 1, ..., k$ existieren. Sei außerdem

$$\mathbb{N} \setminus (\varphi_1(\mathbb{N}) \cup ... \cup \varphi_k(\mathbb{N}))$$

endlich. Zeigen Sie, dass $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ die Menge aller Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

ii) Bestimmen Sie alle Häufungswerte, den Limes inferior und den Limes superior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch (5)

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.