Universität Ulm

Abgabe: Bis Dienstag, 19.07.2022, 14:00 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Lars von der Heide
Sommersemester 2022
Punktzahl: 20

Übungen Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure: Blatt 13

Aufgabe 1: Berechne folgende bestimmte Integrale (3×1,5)

a) $\int_{-1}^{1} xe^{x^2}\ dx$

b) $\int_{-2}^{0} \frac{2x^3-7x^2+7x-2}{x-1}\ dx$

c) $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$

Aufgabe 2: (6)
Bestimme, falls existent, folgende uneigentlichen Integrale.

a) $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

b) $\int_{0}^{1} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

c) $\int_{0}^{\infty} \frac{k}{\mu}\left(\frac{x}{\mu}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^k}\ dx$
wobei $k > 0$ und $\mu > 0$ Konstanten sind.

d) $\int_{0}^{1} \ln(x)\ dx$

e) $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\ dx$

f) $\int_{0}^{\infty} e^{-\mu x}\ dx$
wobei $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Konstante ist.
Tipp: Fallunterscheidung.

Aufgabe 3: (3,5)
Betrachte die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -3(x^2-1)$. Berechne das Volumen des Rotationskörpers der entsteht, wenn man f (im Intervall $[-1, 1]$) um die $x-$Achse rotiert.
Bemerkung: Sieht übrigens in etwa aus wie ein Ufo.

Aufgabe 4: (6)
In dieser Aufgabe betrachten wir eine spezielle Funktion, die von enormer Wichtigkeit in vielen Bereichen der Mathematik, vor allem der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Sie ist gegeben durch $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Es gibt keine geschlossene Formel für die Stammfunktion. Es darf im Folgenden stets benutzt werden, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\ dx = 1. \tag{1}$$

Das werden wir in Analysis IIa beweisen.

a) Zeige durch Nachrechnen: $\int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x)\ dx = 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi(x)\ dx = 1$.

b) Betrachte nun $\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ aus der Vorlesung. Zeige durch geeignete Substitution und Benutzung von (1), dass $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$.

Tipp: $\phi(x) = \phi(-x)$.