Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Grenzwerte

Grenzwerte bestimmen

Als Produkt schreiben und Kürzen:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+7)}{x-2} = 9$$

Grenzwerte bestimmen

Als Produkt schreiben und Kürzen:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-14}{x-2}=\frac{(x-2)(x+7)}{x-2}=9$$

Höchste Potenz ausklammern

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+12x^2-13}{3x^4-7x^3+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(6+12x^{-2}-13x^{-4})}{x^4(3-7x^{-1}+2x^{-3}+x^{-4})}=\frac{6}{3}=2$$

Grenzwerte bestimmen mit Folgen

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Wähle zwei Nullfolgen und zeige, dass sie auf unterschiedliche Grenzwerte führen. Widerspruch zur Eindeutigkeit.

Grenzwerte bestimmen mit Folgen

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Wähle zwei Nullfolgen und zeige, dass sie auf unterschiedliche Grenzwerte führen. Widerspruch zur Eindeutigkeit.

Sei (x_k) eine Nullfolge mit $x_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_k|}{x_k} = \lim_{k \to \infty} 1 = 1$$

Sei (y_k) eine Nullfolge mit $y_k \leq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|y_k|}{y_k} = \lim_{k \to \infty} -1 = -1$$

Grenzwerte bestimmen mit Folgen

Ist $f(x)$ stetig?

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{|x| \cos \frac{1}{x^2}}{1+x^4} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{array} \right\}$$

Sei (x_k) eine beliebige Nullfolge. Dann gilt.

Grenzwerte bestimmen mit Folgen

Ist $f(x)$ stetig?

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{|x| \cos \frac{1}{x^2}}{1+x^4} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{array} \right\}$$

Sei (x_k) eine beliebige Nullfolge. Dann gilt.

$$0 \leq |\lim_{k \to \infty} f(x_k)| = \lim_{k \to \infty} \frac{|x_k| \cos\left(\frac{1}{x_k^2}\right)}{1 + x_k^4} \leq \lim_{k \to \infty} |x_k| = 0$$

Grenzwerte bestimmen mit Folgen

Ist $f(x)$ stetig?

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{|x| \cos \frac{1}{x^2}}{1+x^4} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{array} \right\}$$

Sei (x_k) eine beliebige Nullfolge. Dann gilt.

$$0 \leq |\lim_{k\to\infty} f(x_k)| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_k| \cos\left(\frac{1}{x_k^2}\right)}{1 + x_k^4} \leq \lim_{k\to\infty} |x_k| = 0$$

Also gilt für $f(x)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$f(x)$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$

Stetigkeit: $\epsilon - \delta$-Definition

Stetigkeit: $\epsilon - \delta$-Definition

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0)$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

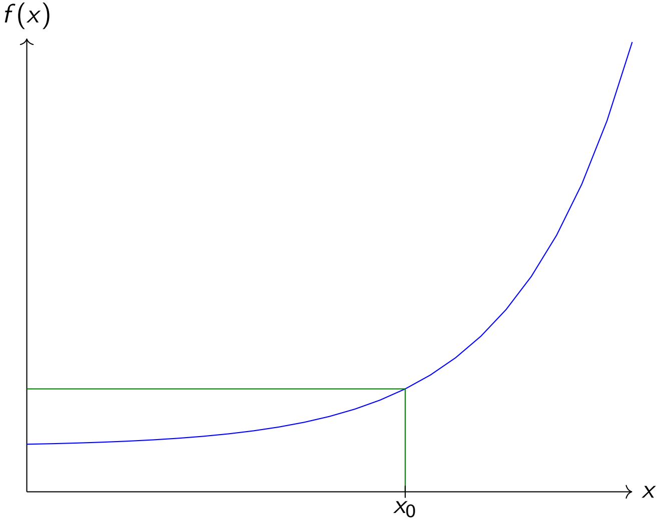
Stetigkeit: $\epsilon - \delta$-Definition

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0)$$

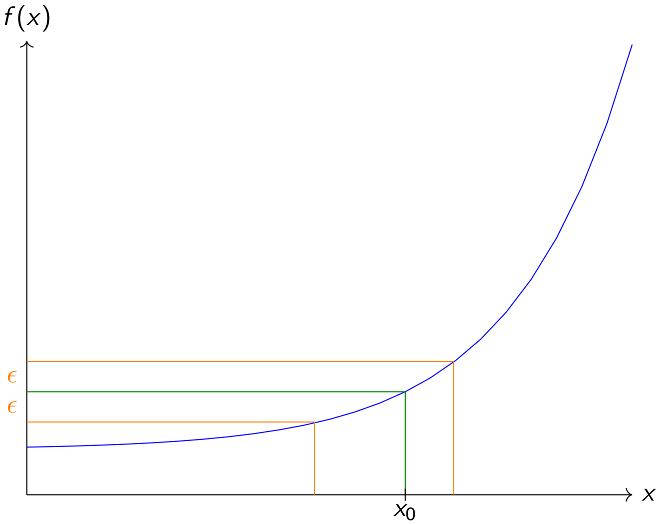
$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$$x \in U_\delta(x_0) \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$$

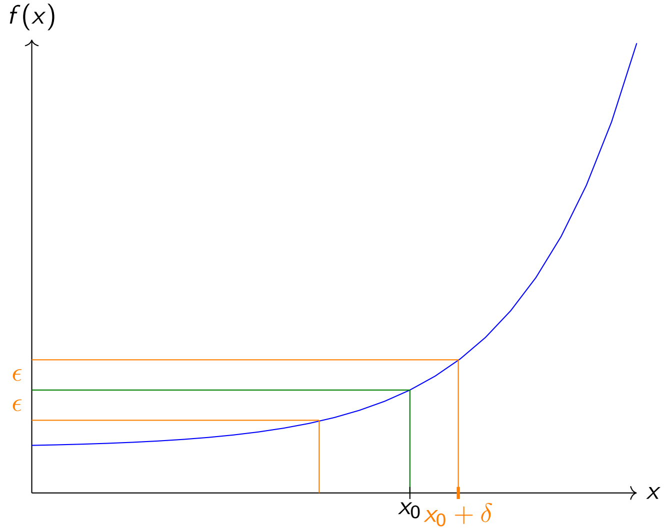
Bedeutung $\epsilon - \delta$



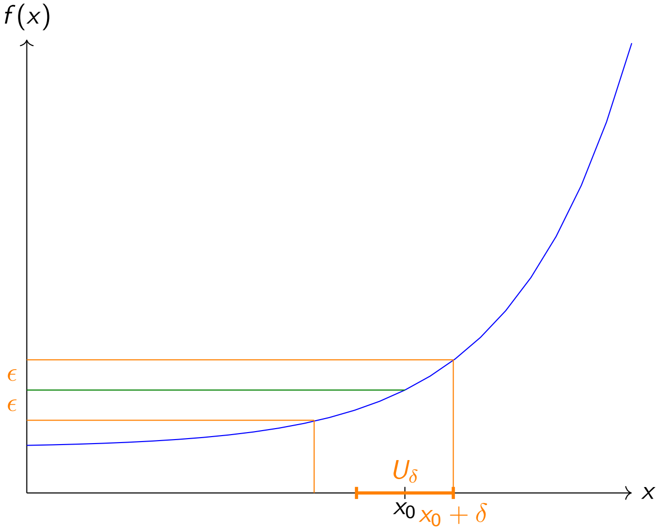
Bedeutung s$\epsilon - \delta$



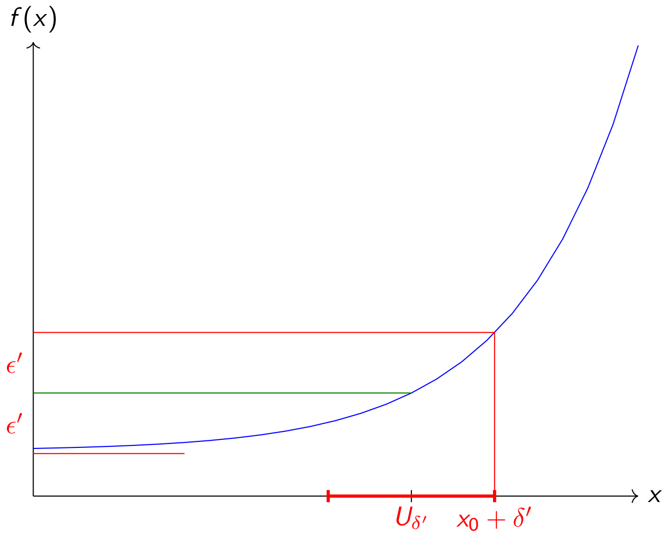
Bedeutung $\epsilon - \delta$



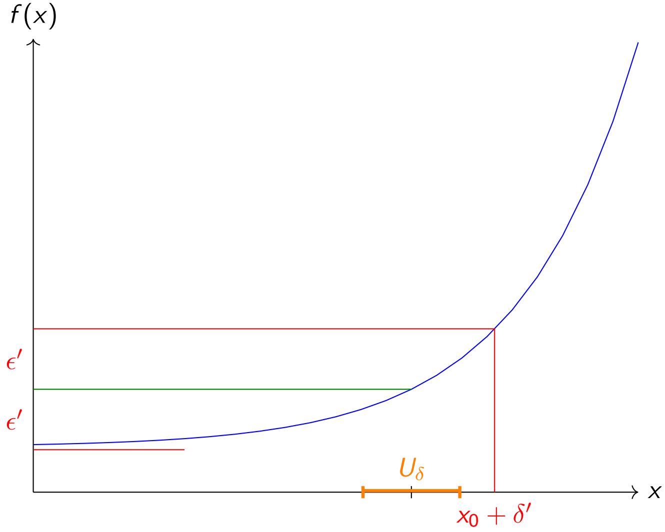
Bedeutung $\epsilon - \delta$



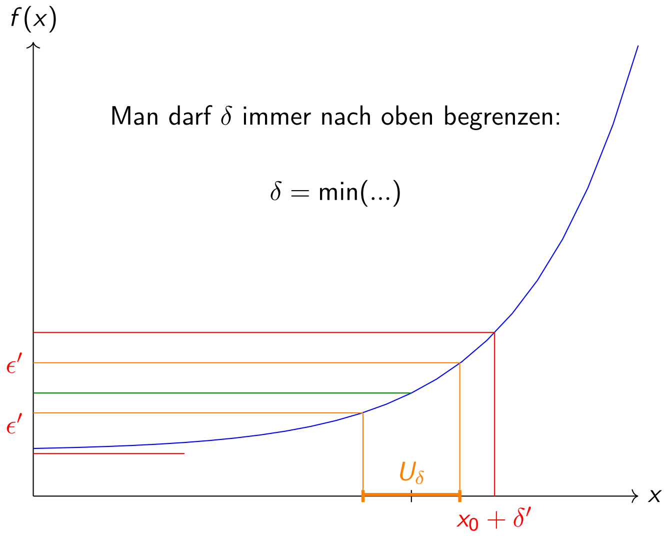
Bedeutung $\epsilon - \delta$



Bedeutung $\epsilon - \delta$



Bedeutung $\epsilon - \delta$



Wichtige Tricks zum umformen

Das muss man mindestens einmal finden: $|x - x_0| < \delta$

Wichtige Tricks zum umformen

Das muss man mindestens einmal finden: $|x - x_0| < \delta$

3. binomische Formel: $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \, |x + x_0|$

Erweitern mit 3. binomischer Formel:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

Wichtige Tricks zum umformen

Das muss man mindestens einmal finden: $|x - x_0| < \delta$

3. binomische Formel: $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \; |x + x_0|$

Erweitern mit 3. binomischer Formel:

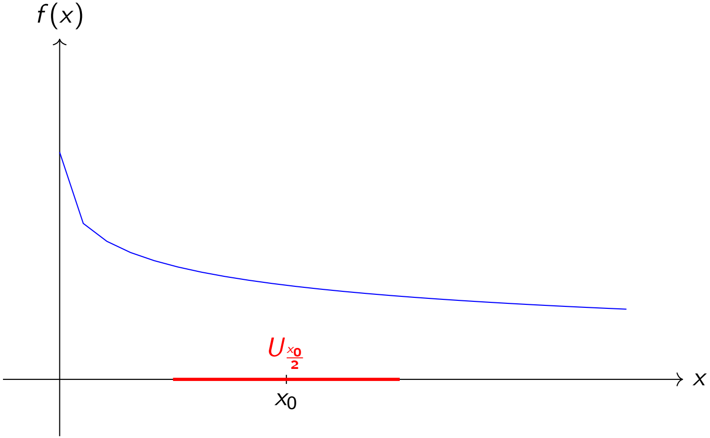
$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \; \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

Nützliche Abschätzungen:

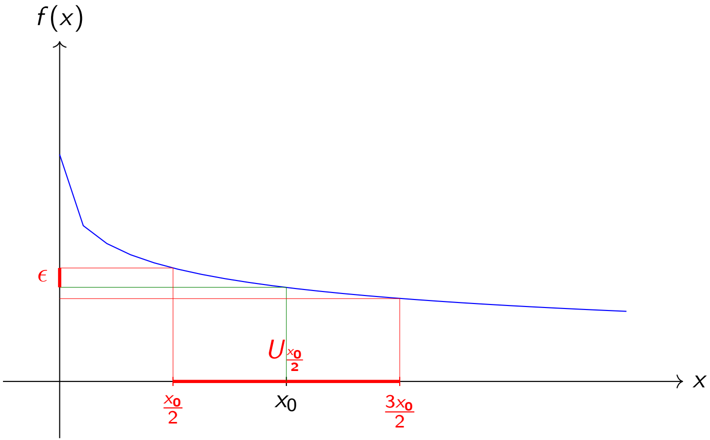
$$1 + \sqrt{x} \geq 1 \; , \quad a + x^2 \geq a$$

$$\text{Wenn } \delta \leq \frac{x_0}{2} \qquad \Rightarrow \frac{x_0}{2} \leq x \leq \frac{3x_0}{2}$$

Abschätzung $\delta \leq \frac{x_0}{2}$



Abschätzung $\delta \leq \frac{x_0}{2}$



Beispiel: $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ ist zu zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \quad (\Leftrightarrow |x - x_0| < \delta)$$
$$|x^2 + x_0^2| < \epsilon$$

Beispiel: $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ ist zu zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \quad (\Leftrightarrow |x - x_0| < \delta)$$
$$|x^2 + x_0^2| < \epsilon$$

Zunächst geschickt umformen:

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \; |x + x_0| &= |x - x_0| \; |x \overbrace{- x_0 + x_0}^{=0} + x_0| \\ &\leq |x - x_0| \; (|x - x_0| + 2|x_0|) \\ &< \; \delta(\delta + 2|x_0|) < \epsilon \end{aligned}$$

Beispiel: $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ ist zu zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \quad (\Leftrightarrow |x - x_0| < \delta)$$
$$|x^2 + x_0^2| < \epsilon$$

Zunächst geschickt umformen:

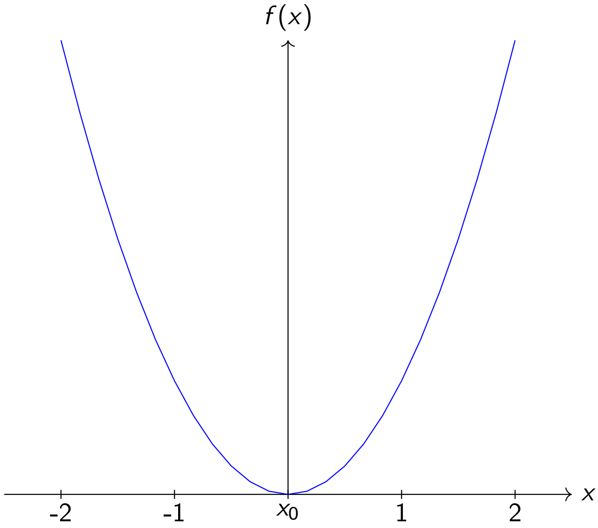
$$\begin{aligned}
|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \; |x + x_0| &= |x - x_0| \; |x \overbrace{-x_0 + x_0}^{=0} + x_0| \\
&\leq |x - x_0| \; (|x - x_0| + 2|x_0|) \\
&< \; \delta(\delta + 2|x_0|) < \epsilon
\end{aligned}$$

Schätze δ ab: $\delta \leq 1$

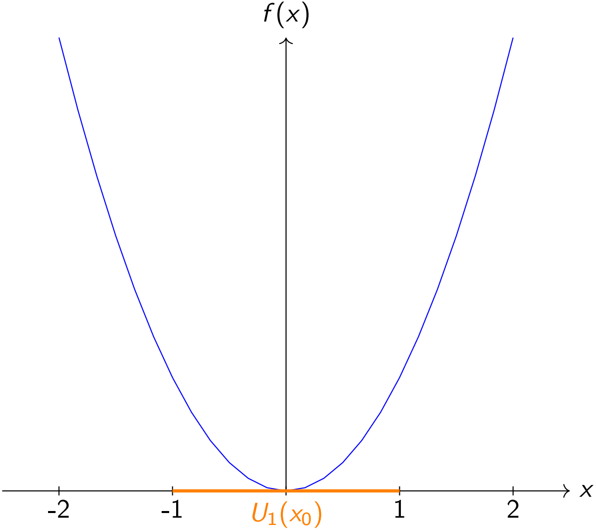
$$\Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \delta(1 + 2|x_0|) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}$$

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$$

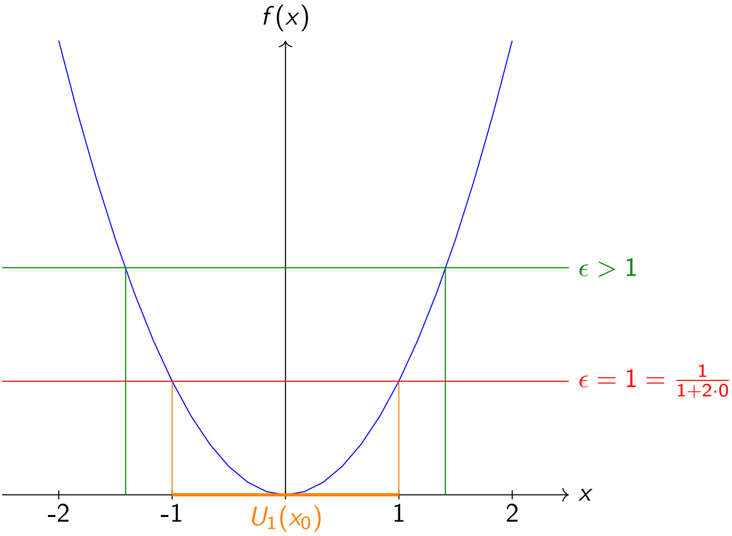
Was bedeutet $\delta \leq 1$



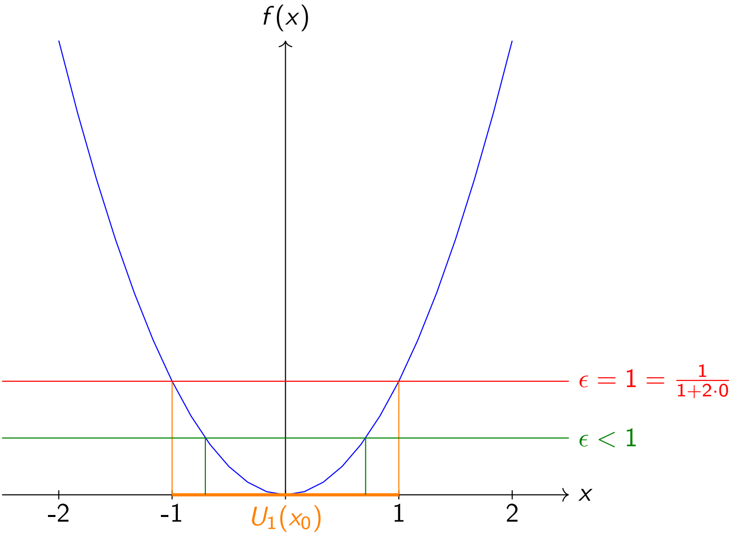
Was bedeutet $\delta \leq 1$



Was bedeutet $\delta \leq 1$



Was bedeutet $\delta \leq 1$



Beispiel: $f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$

Geschicktes umformen:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{2}{1+\sqrt{x}} - \frac{2}{1+\sqrt{x_0}} \right| = \left| \frac{2(1+\sqrt{x_0}) - 2(1+\sqrt{x})}{\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{\geq 1}\underbrace{(1+\sqrt{x_0})}_{\geq 1}} \right|$$

$$\leq 2|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}|$$

(Erweitern mit $\sqrt{x_0} + \sqrt{x}$) $$= 2\frac{|x_0 - x|}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$

Geschicktes umformen:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{2}{1+\sqrt{x}} - \frac{2}{1+\sqrt{x_0}}\right| = \left|\frac{2(1+\sqrt{x_0}) - 2(1+\sqrt{x})}{\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{\geq 1}\underbrace{(1+\sqrt{x_0})}_{\geq 1}}\right|$$

$$\leq 2|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}|$$

(Erweitern mit $\sqrt{x_0} + \sqrt{x}$)

$$= 2\frac{|x_0 - x|}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}}$$

Zum Abschätzen, wähle $\delta \leq \frac{x_0}{2}$.

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$

Geschicktes umformen:

$$|f(x) - f(x)| = \left| \frac{2}{1+\sqrt{x}} - \frac{2}{1+\sqrt{x_0}} \right| = \left| \frac{2(1+\sqrt{x_0}) - 2(1+\sqrt{x})}{\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{\geq 1}\underbrace{(1+\sqrt{x_0})}_{\geq 1}} \right|$$

$$\leq 2|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}|$$

(Erweitern mit $\sqrt{x_0} + \sqrt{x}$)

$$= 2\frac{|x_0 - x|}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}}$$

Zum Abschätzen, wähle $\delta \leq \frac{x_0}{2} \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{\frac{x_0}{2}}$.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2\overbrace{|x - x_0|}^{<\delta}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{\frac{x_0}{2}}} < \frac{2}{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{x_0}}\delta < \epsilon$$

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$

Geschicktes umformen:

$$|f(x) - f(x)| = \left|\frac{2}{1+\sqrt{x}} - \frac{2}{1+\sqrt{x_0}}\right| = \left|\frac{2(1+\sqrt{x_0}) - 2(1+\sqrt{x})}{\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{\geq 1}\underbrace{(1+\sqrt{x_0})}_{\geq 1}}\right|$$

$$\leq 2|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}|$$

(Erweitern mit $\sqrt{x_0} + \sqrt{x}$) $$= 2\frac{|x_0 - x|}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}}$$

Zum Abschätzen, wähle $\delta \leq \frac{x_0}{2} \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{\frac{x_0}{2}}$.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2\overbrace{|x - x_0|}^{<\delta}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{\frac{x_0}{2}}} < \frac{2}{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{x_0}}\delta < \epsilon$$

$$\delta = \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{x_0}}{2}\epsilon\right)$$

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 10.2.17: Gleichmäßige Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $D :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \right).$$

Abbildung 3.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Unterschied zu Stetigkeit?

Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 10.2.17: Gleichmäßige Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $D :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Abbildung 3.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Unterschied zu Stetigkeit?

Es existiert ein δ, dass für alle $x_1, x_2 \in D$ gelten muss.

Schlussfolgerung:

Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 10.2.17: Gleichmäßige Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $D :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

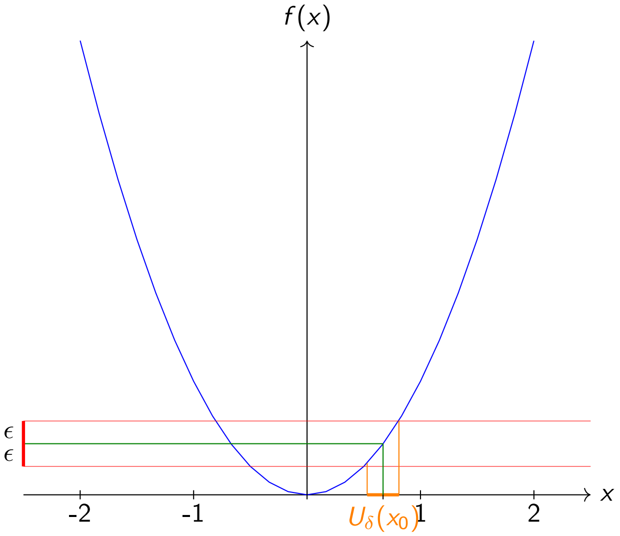
Abbildung 3.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Unterschied zu Stetigkeit?

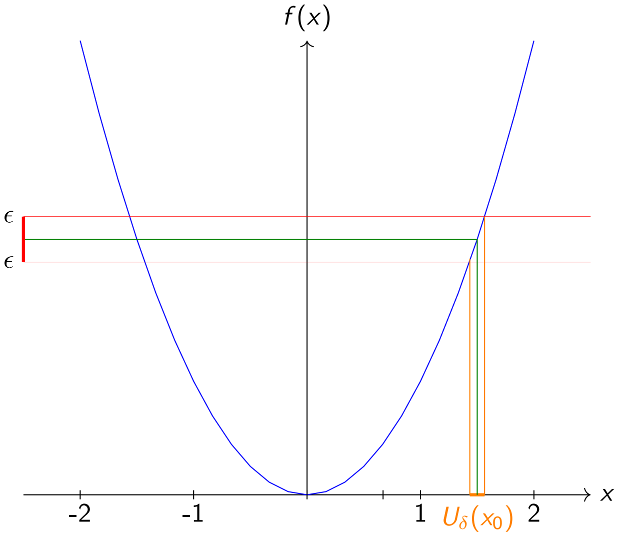
Es existiert ein δ, dass für alle $x_1, x_2 \in D$ gelten muss.

Schlussfolgerung: δ darf nicht von x_0 abhängen, wenn f(x) auf $\mathbb{R}$ definiert ist.

Abhängigkeit von δ von x_0



Abhängigkeit von δ von x_0



Sind $f(x) = x^2$ und $\tilde{f}(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$ glm. stetig?

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$$

Sind $f(x) = x^2$ und $\tilde{f}(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$ glm. stetig?

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$$

Hängt von x_0 ab, also **nicht** gleichmäßig stetig.

Für $\tilde{f} : (0, \infty) \to \mathbb{R};\ \tilde{f} = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$:

$$\delta = \min\left(\frac{x_0}{2},\ \frac{(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{x_0}}{2}\epsilon\right)$$

Hängt von x_0 ab, also **nicht** gleichmäßig stetig.

Was wäre für $f : [a, b] \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$

Vorher:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right) \overset{|x_0| \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Jetzt: Sei $M = \max(|a|, |b|)$. Wähle

$$\delta = \frac{\epsilon}{1 + 2M}$$

Was wäre für $f : [a, b] \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$

Vorher:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right) \stackrel{|x_0| \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Jetzt: Sei $M = \max(|a|, |b|)$. Wähle

$$\delta = \frac{\epsilon}{1 + 2M}$$

da für alle $x_0 \in [a, b]$ gilt:

$$\frac{\epsilon}{1 + 2M} \leq \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}$$

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = 3x - 2$

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = 3x - 2$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$?

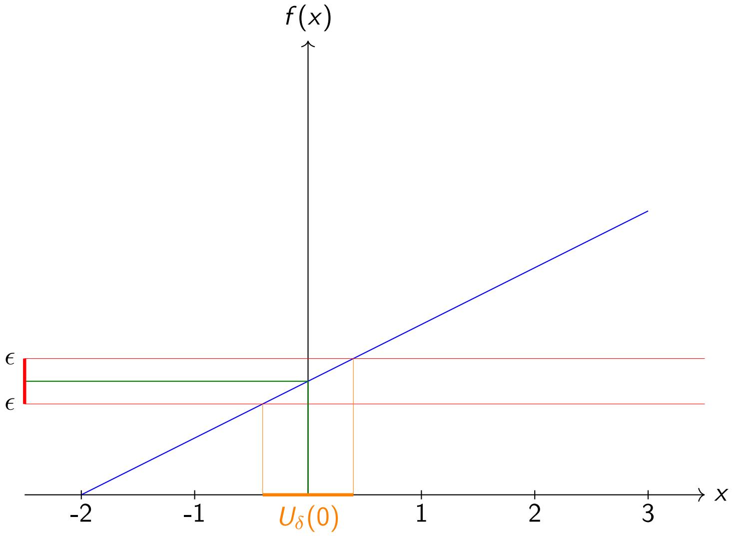
Sei $x \in U_\delta(x_0)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |3x - 2 - 3x_0 + 2| &= |3x - 3x_0| \\ &= 3|x - x_0| \\ &< 3\delta < \epsilon \end{aligned}$$

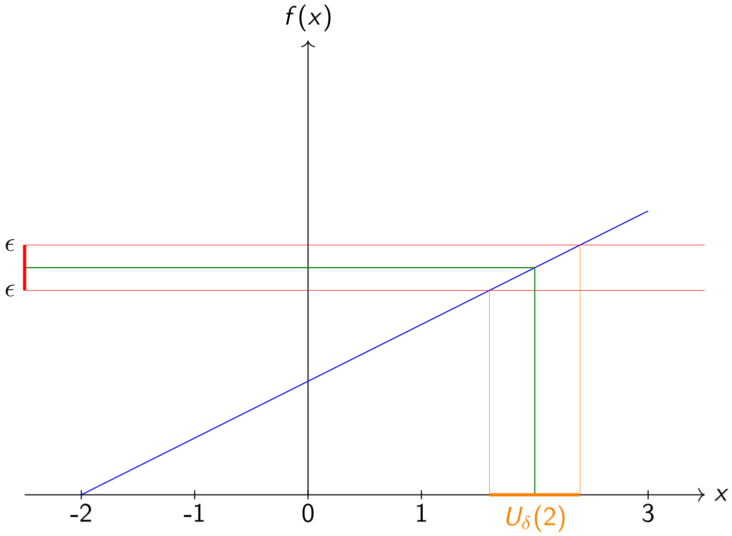
$$\delta = \frac{\epsilon}{3}$$

f ist gleichmäßig stetig, da δ nicht von x_0 abhängt.

Gleichmäßige Stetigkeit von linearen Funktionen



Gleichmäßige Stetigkeit von linearen Funktionen



Alternative Form

Nicht mit Kanonen auf Spatzen schießen

$\epsilon - \delta$ nur benutzen, wenn es konkret dransteht!

- Zeige mit der Definition...
- Zeige mit Hilfe der $\epsilon - \delta$-Definition...

Stattdessen:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Beispiel 1:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \cos(\pi x) & \text{für } x < 1 \\ x - 2 & \text{für } x \geq 1 \end{array} \right\}$$

Beispiel 1:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \cos(\pi x) & \text{für } x < 1 \\ x - 2 & \text{für } x \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 2) &= -1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos(\pi x) &= -1 \\ f(1) &= -1 \end{aligned}$$

f ist stetig in $x_0 = 1$.

Beispiel 2:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 0 \\ \ln(x+1) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Beispiel 2:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 0 \\ \ln(x+1) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x &= 1 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln(x+1) &= 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

f ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

Beispiel 3:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = -1 \\ \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 3:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = -1 \\ \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} \lim_{x \to -1^+} (x+2) = 1$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} \lim_{x \to -1^-} (x+2) = 1$$

$$f(0) = 0$$

f ist nicht stetig in $x_0 = -1$.

Unstetigkeiten

Beispiele 10.2.6 (Klassifizierung von Unstetigkeitsstellen). (i) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1, \\ x - 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

hat in $x_0 = 1$ eine *Sprungstelle*. Rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren, sind aber verschieden.

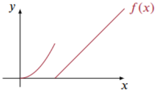


Abbildung 10.6: Funktion mit Sprungstelle.

(ii) *Hebbare Unsstetigkeit* (in $x_0 = 2$):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ 0, & x = 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren und stimmen überein, stimmen aber nicht mit dem Funktionswert an der Stelle überein. Die Unstetigkeit kann durch Setzen eines anderen Wertes für $f(x_0)$ behoben werden.

(iii) *Polstelle*: Einer der Funktionsgrenzwerte $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ist $\pm\infty$. Der andere Grenzwert existiert ggf. uneigentlich. Beispiel: $x_0 = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ sonst.

(iv) *Unstetigkeit zweiter Art*: Der Funktionsgrenzwert in x_0 existiert auch im uneigentlichen Sinn weder von links noch von rechts. Beispiel:

Abbildung 4.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz 10.2.7

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert für jeden *Zwischenwert* $y \in (f(a), f(b))$ ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = y$.

Abbildung 4.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Aufgabe: Zeige, dass $e^{2x} + 3x^2 = 4$ auf $\mathbb{R}$ eine Lösung besitzt.

Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz 10.2.7

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert für jeden *Zwischenwert* $y \in (f(a), f(b))$ ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = y$.

Abbildung 4.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Aufgabe: Zeige, dass $e^{2x} + 3x^2 = 4$ auf $\mathbb{R}$ eine Lösung besitzt.

Wähle $I = [0, 1]$ als kompaktes Intervall und $f(x) = e^{2x} + x^2$. f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Außerdem gilt:

$$f(0) = e^0 + 0 = 1 < 4 \ , \quad f(1) = e^2 + 1 > 2^2 + 1 = 5 > 4$$

Nach ZWS existiert in $\xi \in I \subset \mathbb{R}$ mit $f(\xi) = 4$. ξ ist ein Lösung der Gleichung.