Mathematik für Informatik II - Tutorium - Woche 3

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. (23/83 (Summe Teilaufgaben), $\sim 27\%$)
(a) Was ist ein Skalarprodukt auf V (erläutern Sie die Eigenschaften explizit)?

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. (23/83, $\sim 27\%$)
(a) Was ist ein Skalarprodukt auf V (erläutern Sie die Eigenschaften explizit)?

Lsg: Positiv definite, hermitesche Sesquilinearform.

- Sesquilinearform: Bilinearform (linear in beiden Argumenten), in welcher entweder im ersten oder zweiten Argument ein konstanter Faktor komplex konjugiert herausgezogen wird.
- Positiv definit: $\langle v, v\rangle > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ (macht nur Sinn, wenn $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$).
- Hermitesch: $\langle v, w\rangle = \overline{\langle v, w\rangle}$ für alle $v, w \in V$ (deswegen $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$).

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(b) Es sei nun $V = \mathbb{C}^n$ mit der kanonischen Basis und $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Ist durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j = x^\top A \overline{y}$ immer ein Skalarprodukt auf V gegeben (Begründung)?

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(b) Es sei nun $V = \mathbb{C}^n$ mit der kanonischen Basis und $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Ist durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j = x^\top A \overline{y}$ immer ein Skalarprodukt auf V gegeben (Begründung)?

Lsg: Nein. Sei z.B. $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt für $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$

$$\langle x, x \rangle = x^\top A \overline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 < 0,$$

womit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht positiv definit ist.

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(c) Es seien V und A wie in Teilaufgabe (b). Welche Eigenschafte von A sind notwendig bzw. hinreichend (Beweis/Herleitung), damit durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{y}_j = x^\top A \overline{y}$ ein Skalarprodukt auf V gegeben ist?

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(c) Es seien V und A wie in Teilaufgabe (b). Welche Eigenschafte von A sind notwendig bzw. hinreichend (Beweis/Herleitung), damit durch $\langle x, y\rangle := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j = x^\top A \overline{y}$ ein Skalarprodukt auf V gegeben ist?

Lsg:

- Sesquilinearität: Für alle A erfüllt ✓.
- Hermitesch: Betrachte $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \langle e_1, e_1\rangle \neq \overline{\langle e_1, e_1\rangle}$. Es muss $\overline{A} = A^\top$ gelten (A muss hermitesch sein).
  Beweis: $\overline{A} = A^\top \implies a_{ij} = \overline{a}_{ji}\ (*)$, womit

$$x^\top A x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} \overline{x}_j \overset{(*)\text{ und } +,\cdot \text{ komm.}}{=} \sum_{j,i=1}^{n} \overline{x}_j \overline{a}_{ji} x_i = \overline{x^\top A x} \quad \square$$

Einschub - Eigenwert und Eigenvektor

Definition 9.3.1: Eigenwert und Eigenvektor

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und weiter sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Eine reelle oder komplexe Zahl λ heißt *Eigenwert* von F, wenn es einen Vektor $x \in V$, $x \neq 0$, gibt mit

$$Fx = \lambda x.$$

x heißt dann Eigenvektor von F zum Eigenwert λ.

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(c) Es seien V und A wie in Teilaufgabe (b). Welche Eigenschafte von A sind notwendig bzw. hinreichend (Beweis/Herleitung), damit durch $\langle x, y\rangle := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_i = x^\top A \overline{y}$ ein Skalarprodukt auf V gegeben ist?

Lsg:

- Positiv definit: A wie in (b) hermitesch aber nicht positiv definit $\rightsquigarrow$ Es darf A nur positive Eigenwerte besitzen.
  Beweis: Angenommen A besitzt einen nicht-positiven Eigenwert, dann existiert $v \in V \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$. Dann folgt aber

$$\langle v, v\rangle = v^T A v = v^T(-\lambda)v = \lambda v^T v = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \overset{\lambda \leq 0}{\leq} 0 \qquad \square$$

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(d) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{C}^n$ zusammen mit $d : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $d(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ ein metrischer Raum ist.

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(d) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{C}^n$ zusammen mit $d : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $d(x,y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ ein metrischer Raum ist.

Lsg: Überprüfe (Me1) - (Me3).

- (Me1) Aus den Eigenschaften des Betrags für komplexe Zahlen folgt
$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq 0$$
und $|x_i - y_i| = 0 \iff x_i = y_i \implies d(x,y) = 0 \iff x = y$.
- (Me2) Es gilt
$$|x_i - y_i| = |-1||x_i - y_i| = |-x_i + y_i| = |y_i - x_i|,$$
womit $d(x,y) = d(y,x)$.

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(d) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{C}^n$ zusammen mit $d : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $d(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ ein metrischer Raum ist.

Lsg: Überprüfe (Me1) - (Me3).

- (Me3) Folgt direkt aus der Dreiecksungleichung für den Betrag.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + |z_i - y_i| = d(x,z) + d(z,y)$$

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(e) Wird die Metrik aus Teilaufgabe (d) durch eine Norm induziert? Wenn ja, geben Sie die Norm an.

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(e) Wird die Metrik aus Teilaufgabe (d) durch eine Norm induziert? Wenn ja, geben Sie die Norm an.

Lsg: Ja, es handelt sich um die 1-Norm (vrgl. Definition 8.2.2: p-Norm).

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

2. (b) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar? Bestimmen Sie ggf. A^{-1}. (7/83, $\sim 8\%$)

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 05.10.2023

2. (b) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar? Bestimmen Sie ggf. A^{-1}. (7/83, $\sim 8\%$)

Lsg: Wir berechnen $\det(A)$ und Entwickeln nach der 1. Zeile. Es gilt

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) = -12 \neq 0.$$

Somit ist die Matrix invertierbar.

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 27.7.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. (3/83, $\sim$ 3%)
(c) Zeigen Sie, dass die induzierte Norm die Parallelogramm-Identität erfüllt, das heißt, für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Klausur Mathematik für Informatik 2 - 27.7.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. (3/83, $\sim 3\%$)
(c) Zeigen Sie, dass die induzierte Norm die Parallelogramm-Identität erfüllt, das heißt, für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Lsg: Induzierte Norm $\implies$ $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Damit folgt

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

und

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

Addiert man nun die beiden Terme, erhält man die rechte Seite der Gleichung.