Analysis I für I&I

Blatt 9

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

(l'H $\hat{=}$ l'Hospital)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x}x^2 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} \overset{\text{l'H}}{\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{2e^{2x}} \overset{\text{l'H}}{\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-1}{x^2} \overset{\text{l'H}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)\sin(x)}{2x} \overset{\text{l'H}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)-\cos^2(x)}{1} = -1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{\sin(x)\cdot x} \overset{\text{l'H}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\cos(x)\cdot x + \sin(x)} \overset{\text{l'H}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{-\sin(x)\cdot x + \cos(x) + \cos(x)} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln(x)}$

Betrachte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln(x) \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

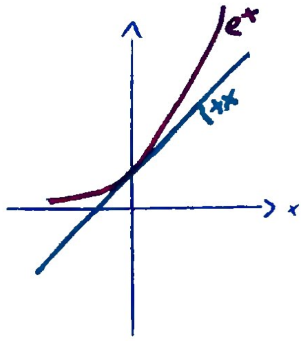
da e^x stetig $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x(\arctan(x)-\frac{\pi}{2})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\arctan(x)-\frac{\pi}{2}} \overset{\text{l'H}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{-x^2} = -1$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^m+1)}{\ln(x^n)} \overset{\text{l'H}}{\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^m+1}\, m\, x^{m-1}}{\frac{1}{x^n}\, n\, x^{n-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{m}{n}\,\frac{x^m}{x^m+1} = \frac{m}{n}$

Aufgabe 2

$z\!\!\!\!\!-$ $e^x \geq 1+x \quad , x \in \mathbb{R}$



($1+x$ ist die Tangente an den Graphen von e^x an der Stelle 0)

Betrachte

$h(x) = e^x - 1 - x \quad$ für $x \geq 0$

$h'(x) = e^x - 1$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

und $h'(x) > 0 \ \forall x > 0$

also ist h monoton wachsend für $x \geq 0$ und damit

$h(x) \geq h(0) = 0 \quad \forall x \geq 0 \quad \Rightarrow$ Beh. für $x \geq 0$

Für den Fall $x < 0$ betrachte

$\tilde{h}(x) := h(-x) \quad$ für $x > 0$

Dann ist $\tilde{h}(x) = e^{-x} - 1 + x$ und $\tilde{h}'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^x}$

Es folgt $\tilde{h}'(0) = 0$ und $\tilde{h}'(x) > 0 \ \forall x > 0$, also ist $\tilde{h}$ monoton wachsend.

$\Rightarrow \tilde{h}(x) \geq \tilde{h}(0) = 0 \quad \forall x \geq 0$

Das bedeutet aber $h(-x) \geq h(0) \ \forall x > 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0) \ \forall x < 0$

Also gilt $h(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ (und damit $e^x \geq 1+x \ \forall x \in \mathbb{R}$) $\square$

Alternativ: für $x \leq -1$ stimmt die Ungleichung, da $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Nun kann man das globale Minimum von h auf dem Kompaktum $[-1, 0]$ berechnen und zeigen, dass dies 0 ist. So folgt die Ungleichung für $x \leq 0$.

Aufgabe 3

a) $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ (streng) monoton wachsend.

$\Rightarrow f''(x) = \frac{(1+e^{-x})^2 \cdot (-e^{-x}) - e^{-x} \cdot 2 \cdot (1+e^{-x}) \cdot (-e^{-x})}{(1+e^{-x})^4}$

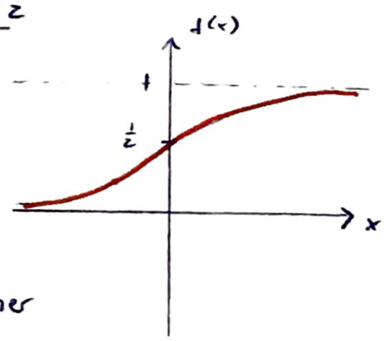
$= \frac{(1+e^{-x}) \cdot (-e^{-x}) + 2 \cdot e^{-2x}}{(1+e^{-x})^3} = -\frac{e^{-x}(1-e^{-x})}{(1+e^{-x})^3}$

notwendig für WP: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

für $x < 0$ ist $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x = 0$ mit $f(0) = \frac{1}{2}$

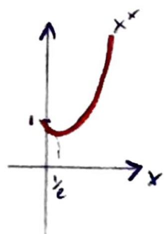
$x > 0$ ist $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ konvex auf $(-\infty, 0]$

konkav auf $[0, \infty)$



Anwendung bei begrenztem Wachstum ($x \hat{=}$ Zeit).
Anfangs exponentielles Wachstum, beim WP wird Wachstum immer langsamer und nähert sich der oberen Grenze (hier 1) an.
Anwendung: Populationswachstum, Lebenszyklus von Produkten o.ä.

b) $f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln(x)}$, $x > 0$



da $e^x > 0 \ \forall x$ hat f keine Nullstellen.

$f'(x) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$

Notw: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

Hinr. $f''(x) = (\ln(x)+1)^2 \cdot x^x + x^x \cdot \frac{1}{x} = \underbrace{x^x}_{>0} \cdot \left(\underbrace{(\ln(x)+1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} \right) > 0 \ \forall x \in (0, \infty)$

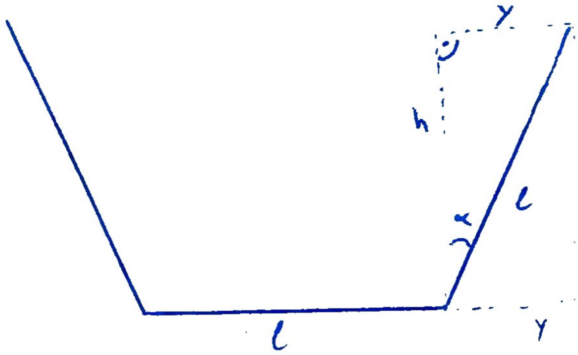
also ist bei $x = e^{-1}$ ein lok. Min mit $f(e^{-1}) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

und f ist $\forall x > 0$ streng konvex.

Außerdem ist f streng monoton fallend auf $(0, e^{-1})$ und streng monoton wachsend auf (e^{-1}, ∞).
Also ist bei $x = e^{-1}$ das globale Minimum.
Wegen $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ gibt es kein Maximum.
Wegen $\lim_{x \to 0} x \cdot \ln(x) = 0$ (Vorlesung) ist wegen der Stetigkeit von e^x $\lim_{x \to 0} x^x = 1$

und $\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$ sowie $\lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$.

Aufgabe 4



Der Flächeninhalt ist

$(l+y)\cdot h$

wegen $\sin(\alpha)=\frac{y}{l}$

$\cos(\alpha)=\frac{h}{l}$

lässt sich dies schreiben als

$$f(\alpha)=(l+l\cdot\sin(\alpha))\cdot l\cdot\cos(\alpha)=l^2\cdot(\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha))$$

Sinnvollerweise sollte α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen ($0°$ und $90°$).

Wir maximieren f:

$$f'(\alpha)=l^2\cdot(-\sin(\alpha)+\underbrace{\cos^2(\alpha)}_{1-\sin^2(\alpha)}-\sin^2(\alpha))=l^2\cdot(-2\cdot\sin^2(\alpha)-\sin(\alpha)+1)$$

Notw: $f'(\alpha)=0 \Rightarrow -2\sin^2(\alpha)-\sin(\alpha)+1=0$

Setze $y=\sin(\alpha) \Rightarrow -2y^2-y+1=0 \Rightarrow y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{-4} \Rightarrow y_1=-1,\ y_2=\frac{1}{2}$

und damit $\left(\alpha_1=\frac{3\pi}{2}\right)$, $\alpha_2=\frac{\pi}{6}$

Betrachte 2. Abltg: $f''(\alpha)=l^2\cdot(-4\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-\cos(\alpha))$

$\Rightarrow f''(\alpha_2)<0 \Rightarrow$ lok. Max. mit $f(\alpha_2)=l^2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx 1.3\,l^2$

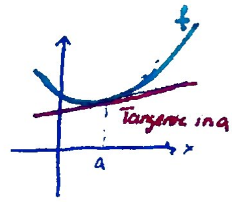
Wegen $f(0)=l^2$ und $f(\frac{\pi}{2})=0$ ist dies auch das globale Maximum.

$\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}$ ($\hat{=}\ \frac{180}{6}=30°$) optimal

Aufgabe 5

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ konvex, also $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in I$

a) z.z. $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$



__Beweis__

Sei $x > a$. Nach dem MWS $\exists \xi \in (a,x)$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$$ Da $f'' \geq 0$ ist f' monoton wachsend $\Rightarrow f'(\xi) \geq f'(a)$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq f'(a) \overset{x-a>0}{\Rightarrow} f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

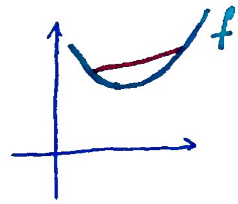
Sei nun $x < a$. Wieder nach dem MWS $\exists \xi \in (x,a)$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$$ Wegen der Monotonie von f' ist $f'(\xi) \leq f'(a)$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'(a) \overset{x-a<0}{\Rightarrow} f(x) \geq f(a) + f'(a)\cdot(x-a).$$

$\square$

b) z.z. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$



Sei $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt mit (a) für jedes $a \in I$

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq \lambda \big(f(a) + f'(a)(x-a)\big) + (1-\lambda)\big(f(a) + f'(a)(y-a)\big)$$

$$= \lambda \cdot f'(a)(x-y) + f(a) + f'(a)\cdot(y-a)$$

mit $a = \lambda x + (1-\lambda) y$ ist $y - a = -\lambda(x-y)$

$$= \lambda f'(a)(x-y) + f(a) - \lambda f'(a)(x-y) = f(a) = f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

$\square$

c) Zeigen nochmal $e^x \geq 1 + x \; \forall x \in \mathbb{R}$

Sei $f(x) = e^x$. $\Rightarrow f''(x) = e^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ konvex auf $\mathbb{R}$

$\overset{(a)}{\Rightarrow} f(x) \geq t(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

mit $a = 0 \Rightarrow f(x) \geq 1 + x$

$\square$