ulm university universität uulm

Sommersemester 2020

INSTITUT FÜR STOCHASTIK

Dr. Larisa Yaroslavtseva
Freimut von Loeper

Angewandte Stochastik 1

Musterlösung zum Übungsblatt 2

Aufgabe (1)[1+1+1+1+1 Punkte]

a) Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ für $\Omega = \{a, 2, \star\}$ an.

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengensysteme σ-Algebren auf $\Omega = \{a, b, c, d\}$ sind:

(i) $\Sigma = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$,

(ii) $\Sigma = \{\Omega, \{a, b\}, \{c, d\}\}$,

(iii) $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$,

(iv) $\Sigma = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \Omega\}$.

Lösung:

a) $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{2\}, \{\star\}, \{a, 2\}, \{a, \star\}, \{2, \star\}\}$.

b) (i) Keine σ-Algebra, da Def. 2.1.5 (iii) nicht erfüllt ist: $\{a\}, \{b\} \in \Sigma$, aber $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \Sigma$

(ii) Keine σ-Algebra, da Def. 2.1.5 (ii) nicht erfüllt ist: $\Omega \in \Sigma$, aber $\Omega^c = \emptyset \notin \Sigma$

(iii) σ-Algebra, da alle Eigenschaften in Def. 2.1.5 erfüllt sind.

(iv) σ-Algebra, da alle Eigenschaften in Def. 2.1.5 erfüllt sind.

Aufgabe (2)[2+2+2 Punkte]
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für jede Menge $\Omega \neq \emptyset$ und alle σ-Algebren Σ_1, Σ_2 auf Ω gilt: $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ist σ-Algebra auf Ω,

b) Für jede Menge $\Omega \neq \emptyset$ und alle σ-Algebren Σ_1, Σ_2 auf Ω gilt: $\Sigma_1 \backslash \Sigma_2$ ist σ-Algebra auf Ω,

c) Für jede Menge $\Omega \neq \emptyset$ und alle σ-Algebren Σ_1, Σ_2 auf Ω gilt: $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ ist σ-Algebra auf Ω.

Lösung:

a) Falsch, Gegenbeispiel $\Omega = \{a, b, c, d\}$: Dann ist $\Sigma_1 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \Omega\}$ eine σ-Algebra, siehe Aufgabe 1b). Analog gilt: $\Sigma_2 = \{\emptyset, \{a, d\}, \{c, b\}, \Omega\}$ ist eine σ-Algebra. Angenommen $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ist eine σ-Algebra. Es gilt $\{a, b\} \cap \{a, d\} = \{a\} \notin \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ein Widerspruch zu Thm. 2.1.7 (ii).

b) Falsch, Gegenbeispiel $\Omega \neq \emptyset$: $\Sigma_2 = \Sigma_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, dann ist $\Sigma_1 \backslash \Sigma_2 = \{\emptyset\}$. Folglich ist Def. 2.1.5 (i) nicht erfüllt.

c) Richtig. Überprüfung der Def. 2.1.5:

   (i) $\forall i \in \{1, 2\} : \Omega \in \Sigma_i \Rightarrow \Omega \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

   (ii) $A \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \Rightarrow \forall i \in \{1, 2\} : A \in \Sigma_i \Rightarrow \forall i \in \{1, 2\} : A^c \in \Sigma_i \Rightarrow A^c \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

   (iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \Rightarrow \forall i \in \{1, 2\} \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \Sigma_i \Rightarrow \forall i \in \{1, 2\} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma_i \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

Aufgabe (3)[1+2+1+1 Punkte]
Sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit zwei Ereignissen $A, B \in \Sigma$.

a) Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

   (i) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$,

   (ii) $P(A^c \cap B^c) - P(A^c)P(B^c) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$.

b) Die Ereignisse A und B haben Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/3$ und $P(A \cap B) = 1/8$. Berechnen Sie:

   (i) $P(A \cap B^c)$,

   (ii) $P(A^c \cap B^c)$.

Lösung:

a) (i) Wegen $(A \cap B) \subset A$ und $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ sind die Mengen $(A \cap B)$ und $(B \setminus A)$ disjunkt. Weiterhin gilt $(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$. Es folgt mit Bemerkung nach Def. 2.1.9 $P(B) = P((B \setminus A) \cup (A \cap B)) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$, also $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

   (ii) Thm. 2.1.11 (ii) liefert: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
   Addieren von $(1 - P(A))(1 - P(B))$:
   $P(A \cap B) + (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - P(A \cup B) + P(A)P(B)$
   Wegen $P(C^c) = 1 - P(C)$ für $C \subset \Sigma$ folgt:
   $P(A \cap B) + P(A^c) \cdot P(B^c) = P((A \cup B)^c) + P(A)P(B)$
   Wegen der de Morgansche Regel $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$:
   $P(A \cap B) + P(A^c) \cdot P(B^c) = P(A^c \cap B^c) + P(A)P(B)$
   Umstellen: $P(A^c \cap B^c) - P(A^c)P(B^c) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$

b) (i) Mit Bemerkung nach Def. 2.1.9 gilt: $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$
   Es folgt: $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 1/4 - 1/8 = 1/8$.

   (ii) Aus a) (ii) folgt: $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) + P(A \cap B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) + P(A \cap B) - P(A)P(B) = 1 - 1/4 - 1/3 + 1/8 = 13/24$

Aufgabe (4)[1+1+1+1+1 Punkte]

Ein Passwortgenerator erzeugt zufällig ein dreistelligen Passworts bestehend aus Zahlen von 0 bis 9. Die drei Zahlen werden unabhängig von einander erzeugt und die Werte von 0 bis 9 sind jeweils gleichwahrscheinlich. 0 wird als eine gerade Zahl angenommen.

a) Modellieren Sie dieses Zufallsexperiment durch ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P).

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Passwort aus 3 gleichen Zahlen besteht.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Passwort keine 3 und keine 9 enthält.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Passwort genau zwei gerade Zahlen enthält.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Passwort nur aus geraden, aber 3 verschiedenen Zahlen besteht.

Lösung:

a) Wir verwenden den Laplace-W-Raum mit $\Omega = \{(w_1, w_2, w_3) : w_1, w_2, w_3 \in \{0, \dots, 9\}\} = \{0, \dots, 9\}^3$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} A = \{&(0,0,0),(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),\\ &(5,5,5),(6,6,6),(7,7,7),(8,8,8),(9,9,9)\}. \end{aligned}$$

Folglich ist $|A| = 10$ und wegen $|\Omega| = 1000$ ist $P(A) = 10/1000 = 0,01$.

c) Es gilt: $A = \{(w_1, w_2, w_3) : w_1, w_2, w_3 \in \{0,1,2,4,5,6,7,8\}\}$. Folglich ist $|A| = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ und wir erhalten $P(A) = 512/1000 = 0,512$.

d) Es gilt:

$$\begin{aligned} A =& \{(w_1, w_2, w_3) : w_1, w_2 \in \{0,2,4,6,8\}, w_3 \in \{1,3,5,7,9\}\} \cup \\ & \{(w_1, w_2, w_3) : w_1, w_3 \in \{0,2,4,6,8\}, w_2 \in \{1,3,5,7,9\}\} \cup \\ & \{(w_1, w_2, w_3) : w_2, w_3 \in \{0,2,4,6,8\}, w_1 \in \{1,3,5,7,9\}\}. \end{aligned}$$

Folglich ist $|A| = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 375$ und wir erhalten $P(A) = 375/1000 = 0,375$.

e) Es gilt: $A = \{(w_1, w_2, w_3) : w_1, w_2, w_3 \in \{0,2,4,6,8\}, w_i \neq w_j \text{ für } i \neq j\}$. Folglich ist $|A| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ und wir erhalten $P(A) = 60/1000 = 0,06$.