Universität Ulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2019

Übungen Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker: Blatt 4

13. (a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Folge (x_n) gegeben durch $x_n := 2^n(1 + (-1)^n) + 1$. Man bestimme

$$\underline{\lim} x_n, \quad \overline{\lim} x_n, \quad \underline{\lim}(x_{n+1}/x_n), \quad \overline{\lim}(x_{n+1}/x_n), \quad \underline{\lim}\sqrt[n]{x_n}, \quad \overline{\lim}\sqrt[n]{x_n}.$$

(b) Für die Folgen

$$(x_n) := (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots) \text{ und } (y_n) := (2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \ldots)$$

bestimme man

$$\overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n, \quad \overline{\lim}(x_n + y_n), \quad \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n, \quad \underline{\lim}(x_n + y_n), \quad \underline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n.$$

14. Man stelle fest, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

(a) $\sum \frac{n^2}{2^n}$

(b) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n}\right)$

(d) $\sum(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(e) $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{k+(-1)^k}$

(f) $\sum(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n / n$

15. Man berechne die Werte folgender Reihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k}$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

16. (a) Es sei (x_n) eine nichtnegative, monoton fallende Folge und die Reihe $\sum x_n$ sei konvergent und habe den Wert $s \in \mathbb{R}$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k x_{2^k} \leq 2s.$$

Hinweis: Betrachte den Beweis für die Divergenz der harmonischen Reihe.

(b) Sei nun $\sum 2^n x_n$ konvergent. Zeige, dass für $2^k \geq n$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq \sum_{j=1}^{k} 2^j x_{2^j}.$$

17. Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Betonwürfeln W_n mit Kantenlänge $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ nachgebaut. Wie hoch wird der Turm? Die Bauarbeiter haben nur endlich viel Beton mitgebracht. Kann der Turm fertiggestellt werden?

18. Eine punktförmige Schnecke kriecht auf einem 1m langen Gummiband mit einer konstanten Geschwindigkeit von 5cm/h. Am Ende der ersten und jeder weiteren Stunde wird das Band homogen um jeweils einen Meter gedehnt. Wird die Schnecke in endlicher Zeit das rechte Ende erreichen, wenn sie zu Beginn der ersten Stunde am linken Ende startete?