Analysis für Informatiker und Ingenieure

Blatt 1

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) $\sum_{k=7}^{15} 2k = 2 \cdot \sum_{k=7}^{15} k = 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{6} k \right) = 2 \cdot \left(\frac{15 \cdot 16}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2} \right) = 198$

Alternativ via Indexshift: $2 \sum_{k=7}^{15} k = 2 \cdot \sum_{k=1}^{9} (k+6) = 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{9} k + \sum_{k=1}^{9} 6 \right) = 2 \cdot \left(\frac{9 \cdot 10}{2} + 9 \cdot 6 \right) = \underline{\underline{198}}$

b) $\sum_{k=0}^{10} \frac{-1}{2^{k+1}} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \underline{\underline{-\frac{2047}{2048}}}$

c) $\sum_{k=1}^{7} \frac{(-1)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{7} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{7} \left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^8 - 1}{-\frac{1}{3} - 1} - 1 = \underline{\underline{-\frac{547}{2187}}}$

d) $\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \overset{\text{ind. shift}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k - \left(\frac{3}{2}\right)^0 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} - 1$

$= 2 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right) - 1 = \underline{\underline{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 3}}$

e) eine ungerade natürliche Zahl lässt sich schreiben als $2k-1$ mit $k \in \mathbb{N}$. Also:

Summe erste n ungerade nat. Zahlen

$= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k) - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = \underline{\underline{n^2}}$

Aufgabe 2

a) $A(n): \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

Induktionsanfang: $A(1): \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)(2+1)}{6}$ ✓

Induktionsschritt: Es gelte $A(n)$, also $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Wir zeigen $A(n+1)$, also $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)\cdot(2(n+1)+1)}{6}$. Dazu:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{A(n)}{=} \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\cdot(n\cdot(2n+1)+6(n+1))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)\cdot(2(n+1)+1)}{6},$$ also $A(n+1)$

denn $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$

$\boxtimes$

b) $A(n): (1+x)^n \geq 1+nx$ für $n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1$

I.A. $n=1$ $\quad (1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ ✓

I.S. $n \to n+1$ $\quad$ Es gelte $A(n)$, also $(1+x)^n \geq 1+nx$. Dann ist

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}(1+x)^n \overset{A(n)}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x,$$

also $A(n+1)$.

$\boxtimes$

c) $A(n)$: Um bei $n \geq 2$ Punkten je zwei zu verbinden, braucht man $\frac{n(n-1)}{2}$ Strecken.

I.A. $n=2$ $\quad$ Bei zwei Punkten gibt es nur eine Strecke, also $1 = \frac{2\cdot(2-1)}{2}$ ✓

I.S. $n \to n+1$ $\quad$ Es gelte $A(n)$. Seien nun $n+1$ Punkte gegeben. Lässt man einen (beliebig aber festen) Punkt weg, so kann man die verbleibenden Punkte mit $\frac{n(n-1)}{2}$ Strecken zwischen 2 Punkten verbinden, nach I.H. Den weggelassenen Punkt kann man dann mit n Punkten verbinden, also kommen n Strecken hinzu. Insgesamt braucht man also $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2-n}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$ Strecken. Das ist gerade $A(n+1)$.

$\boxtimes$

Aufgabe 3

a) $\{x \in \mathbb{R} : |2x-6| \leq x\}$

kritischer Punkt: $x=3$ (da ändert $2x-6$ das Vz).

Sei $x \geq 3$

$\Rightarrow |2x-6| \leq x \Leftrightarrow 2x-6 \leq x \Leftrightarrow x \leq 6$

$\Rightarrow$ Ungl. (U) gilt für $x \in [3,6]$

Sei $x \leq 3$

$\Rightarrow |2x-6| \leq x \Leftrightarrow -(2x-6) \leq x \Leftrightarrow 6 \leq 3x \Leftrightarrow 2 \leq x$

$\Rightarrow$ U gilt für $x \in [2,3]$

Insgesamt gilt U für $x \in [2,3] \cup [3,6] = [2,6]$

b) $\{x \in \mathbb{R} : |2x+4| > 1 - |x-2|\}$

kritische Punkte: $x=-2$ und $x=2$

Sei $x \geq 2$

$\Rightarrow |2x+4| > 1 - |x-2| \Leftrightarrow 2x+4 > 1-(x-2) \Leftrightarrow 3x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ U gilt für $x \geq 2$

Sei $-2 \leq x \leq 2$ ($\Leftrightarrow x \in [-2,2]$)

$\Rightarrow |2x+4| > 1 - |x-2| \Leftrightarrow 2x+4 > 1+(x-2) \Leftrightarrow x > -5$

$\Rightarrow$ U gilt für $x \in [-2,2]$

Sei $x \leq -2$

$\Rightarrow |2x+4| > 1 - |x-2| \Leftrightarrow -(2x+4) > 1+(x-2) \Leftrightarrow -3 > 3x \Leftrightarrow x < -1$

$\Rightarrow$ U gilt für $x \leq 2$

Insgesamt gilt U für $x \leq 2$ und $x \in [-2,2]$ und $x \geq 2$, also gilt U für alle $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4

z.z. $\big|\,|a|-|b|\,\big| \le |a-b|$

Beweis

Mit der Δ-Ungl. folgt

$$|a| = |a-b+b| \le |a-b| + |b|, \quad \text{also} \quad |a|-|b| \le |a-b|$$

$$|b| = |b-a+a| \le |b-a| + |a|, \quad \text{also} \quad |b|-|a| \le \underbrace{|b-a|}_{=|a-b|}$$

Insgesamt

$$|a-b| \ge \begin{cases} |a|-|b| \\ -(|a|-|b|) \end{cases} \quad \text{also} \quad |a-b| \ge \big|\,|a|-|b|\,\big|$$

$\not{\!\square}$