Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 04

Lösung

1. (NA) Minifragen

1. Für welche $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt die Dreiecksungleichung (N3) in Bemerkung 8.2.4 mit "$<$" anstatt "$\leq$"?
   Lösung: Dies hängt von $p \in [1, \infty]$ ab. So gilt z.B. für $x = \binom{2}{1}$, $y = \binom{2}{2}$ $|x+y|_1 = |x|_1 + |y|_1$, $|x+y|_2 < |x|_2 + |y|_2$ und $|x+y|_\infty = |x|_\infty + |y|_\infty$
2. Zeigen oder widerlegen Sie für eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $n \in \mathbb{N}$:
   - Wenn A eine Nullzeile hat, ist $\det A$ immer gleich 0.
     Lösung: Wahr, betrachte $A^\top$.
   - Wenn A eine Nullspalte hat, ist $\det A$ immer gleich 0.
     Lösung: Wahr, Entwicklung nach 0-Spalte.
3. Zeigen oder widerlegen Sie: $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
   Lösung: Falsch, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (A) Berechne mit möglichst wenig Aufwand die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

(1)

Lösung: Durch Permutationen der Spalten erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

Damit ist die Determinante gleich 0.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

(2)

Lösung: Durch Permutationen der Spalten erhalten wir:

$$B = (-1)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

Damit folgt $\det B = (-1)\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)(-12)(7) = 84$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

(2)

Lösung: Laplacesche Entwicklung nach 4. Spalte:

$\det C = 0(\ldots) + 0(\ldots) - 1\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + 0(\ldots) = -(0+0+9-1-12-0) = 4$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

(1)

Lösung: $-\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Damit ergibt sich $\det D = 0$

3. (A)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

Wir definieren $d_n := \det(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $d_0 := 1$.

i) Zeigen Sie die Rekursionsgleichung $d_{n+1} = 2d_n - d_{n-1}$ (2)
Lösung: Wende Laplace auf erste Spalte an:

$$\det A_{n+1} = 2 \det A_n - (-1) \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Durch das Subtrahieren der ersten Zeile dieser Matrix von der zweiten erhalten wir eine Blockmatrix, die als zweiten Block A_{n-1} enthält. Damit ergibt sich die Behauptung.

ii) Folgern Sie per Induktion $d_n = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)
Lösung: IA: $n = 1 \Rightarrow d_1 = 2 = n + 1$
IS: Sei $d_n = n + 1$ für alle $n \leq N$ für ein festes, aber beliebiges $N \in \mathbb{N}$.
Beh: $d_{N+1} = N + 2$
Bew:$d_{N+1} = 2d_N - d_{N-1} = 2(N + 1) - N = 2N + 2 - N = N + 2$

iii) Zeigen Sie außerdem $\det(B_n) = (-1)^{n+1}n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)
Lösung: Wir subtrahieren die (i-1)-te Zeile von der i-ten Zeile und bewegen anschließend die erste Zeile durch (n-1) Transpositionen in die letzte Zeile, so erhalten wir die folgende obere Dreiecksmatrix: $B'_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ Damit ergibt sich: $\det B_n = (-1)^{n-1}n = (-1)^{n+1}n$

4. (A)

(a) Es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie (z.B. durch vollständige Induktion), dass

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

gilt. (2)

Lösung: Beweis per Induktion.
IA: $n = 1 \Rightarrow \det 1 = 1 = \prod_{1 \le i < j \le 1} (x_j - x_i)$
IS: Die Behauptung gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
Bew: Wir betrachten die Matrix

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \dots & x_n^n \\ x_{n+1}^0 & x_{n+1}^1 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^n \\ 1 & x_{n+1}^1 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Nun ziehen wir von jeder (i-ten) Spalte das x_{n+1} fache der $(i-1)$-ten Spalte ab. Damit erhalten wir:

$$\det A_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - 1x_{n+1} & \dots & x_1^n - x_1^{n-1}x_{n+1} \\ 1 & x_2 - 1x_{n+1} & \dots & x_2^n - x_2^{n-1}x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - 1x_{n+1} & \dots & x_n^n - x_n^{n-1}x_{n+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Weiter erhalten wir, indem wir die $(n+1)$-te Zeile von den restlichen subtrahieren und vereinfachen:

$$\begin{aligned} \det A_{n+1} &= \begin{vmatrix} 0 & (x_1 - x_{n+1}) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) \\ 0 & (x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_n - x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_{n+1}) \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & x_n^{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \begin{vmatrix} 1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \\ &= \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

(b) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix, deren Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden. Zeigen Sie: $\det A \in \{-1, 1\}$. (1)
Lösung: $(\det A)^2 = \det A \det A = \det A \det A^\top = \det AA^\top = \det I = 1$

(c) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit $A = -A^\top$ und n ungerade. Zeigen Sie: $\det A = 0$. (1)
Lösung: $\det A = \det -A^\top \Rightarrow \det A = \det -A = (-1)^n \det A = (-1) \det A \Rightarrow 2 \det A = 0$.

(d) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ invertierbar. Zeigen Sie: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. (1)
Lösung: $1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det(A^{-1}) \Rightarrow (\det A)^{-}1 = \det(A^{-1})$

(e) Seien $A, S \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und S invertierbar. Zeigen Sie: $B := S^{-1}AS$ und A haben die gleiche Determinante. (1)
Lösung: $\det B = \det S^{-1}AS = \det S^{-1} \det A \det S = \det A \det(S)^{-1} \det S = \det A$

5. (A) Das charakteristische Polynom

Seien

$$A_1, A_2 \in M(3 \times 3, \mathbb{R}),\ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -6 & -5 & 8 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie jeweils das sogenannte charakteristische Polynom

$$P_A(x) = \det(A - x \cdot I_3)$$

mit $x \in \mathbb{R}$ für $A \in \{A_1, A_2\}$ auf . (2)

Lösung: $P_{A_1} = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & -2 \\ -6 & -5-x & 8 \\ -2 & -2 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x)(-5-x)(3-x) + (-16) + (-24) - ((2-x)(-16)) - ((-6)(3-x)) - (4(-5-x)) = -x^3 + x$

$P_{A_2} = \begin{pmatrix} 10-x & -3 & -9 \\ -18 & 7-x & 18 \\ 18 & -6 & -17-x \end{pmatrix} = ((10-x)(7-x)(-17-x)) - 972 - 972 - ((10-x)(-108)) - (54(-17-x)) - ((7-x)(-162)) = -x^3 + 3x - 2 = -(x-1)^2(x+2)$

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von $P_{A_1}(x)$ und $P_{A_2}(x)$. (2)
Lösung:$L_1 = \{-1, 0, 1\}$, $L_2 = \{-2, 1\}$

(c) Sei nun X_A jeweils die Menge der bestimmten Nullstellen von $P_A(x)$ in Aufgabenteil b) für $A \in \{A_1, A_2\}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $(A - xI)v = 0$ für jeweils alle Nullstellen $x \in X_A$ für beide $A \in \{A_1, A_2\}$. (2)
Lösung

$$(A_1 + I)v = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -6 & -4 & 8 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$(A_1 + 0I)v = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -6 & -5 & 8 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$(A_1 - I)v = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$(A_2 + 2I)v = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 12 & -3 & -9 \\ -18 & 9 & 18 \\ 18 & -6 & -15 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 12 & -3 & -9 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow v = \langle \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$(A_2 - I)v = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 & -9 \\ -18 & 6 & 18 \\ 18 & -6 & -18 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

$$\Rightarrow \langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

6. (T),(NA) Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 9 & 14 & -8 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.