universität ulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 07

Lösung

1. (NA) Minifragen

(a) Ist die Verkettung von stetigen Funktionen stetig?
Lösung: Ja, siehe Lemma 10.2.3 (ii).

(b) Ist die kleinste obere Schranke eines kompakten Intervalls immer in diesem enthalten?
Lösung: Ja.

(c) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gilt dann $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$?
Lösung: Für $a = b$ gilt die Aussage. Für $a \neq b$ gilt die Aussage nicht, denn wähle bspw. $f(x) = -x$ für $x \in [a,b]$, dann gilt $f([a,b]) = [-b,-a] = [f(b), f(a)] \neq [f(a), f(b)]$.

(d) Sei I ein Intervall und sei f eine auf I definierte Funktion. Existiert dann ein $x_+ \in I$ mit $f(x_+) > f(x)\ \forall x \in I$?
Lösung: Nein, denn für jedes $x_+ \in I$ gilt $f(x_+) = f(x_+)$.

(e) Das ε-δ-Kriterium aus Def. 10.2.1 für Stetigkeit besagt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Welche der folgenden Aussagen sind bzw. sind nicht äquivalent zum ε-δ-Kriterium?

- $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
Lösung: Diese Aussage ist nicht äquivalent.
- $\neg \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon)$.
Lösung: Diese Aussage ist äquivalent.

2. (A) Stetigkeit

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 5\,|x^2 - 2| + 3$ in $x_0 = 1$ stetig ist, (2)

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \min(\frac{\varepsilon}{15}, \sqrt{2}-1)$, dann gilt für $x \in U_\delta(1)$:

$$\begin{aligned}
|f_1(x) - f_1(1)| &= |5|x^2-2| + 3 - 8| \\
&= |5|x^2-2| - 5| \\
&= 5||x^2-2| - 1| \\
&\overset{\delta \le \sqrt{2}-1}{=} 5|(2-x^2) - 1| \\
&= 5|1-x| \cdot |1+x| \\
&< 5\delta|1+x| \\
&= 5\delta|2+x-1| \\
&\le 5\delta(|2| + |x-1|) \\
&< 5\delta(2+\delta) \\
&= 10\delta + 5\delta^2 \\
&\overset{\delta \in (0,1)}{<} 15\delta \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}$$

ii) $f_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist. (2)
Lösung: Seien $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in (0, \infty)$ jeweils beliebig. Wähle $\delta := \min(\frac{x_0^2\varepsilon}{2}, \frac{x_0}{2})$, dann gilt für $x \in U_\delta(x_0)$:

$$\begin{aligned}
|f_2(x) - f_2(x_0)| &= |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| \\
&= |\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}| \\
&= \frac{|x_0 - x|}{|x| \cdot |x_0|} \\
&< \frac{\delta}{|x| \cdot |x_0|} \\
&\overset{x_0 \ge 0}{=} \frac{\delta}{|x| \cdot x_0} \\
&< \frac{\delta}{\frac{x_0}{2} \cdot x_0} \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}$$

(b) In Beispiel 10.2.6 (iv) steht, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [0,1]$ mit $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ bei $x = 0$ eine sogenannte Unstetigkeit zweiter Art besäße.

i) Geben Sie zunächst Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in}$ an, so dass $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = 0$ und $\lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{x_k} \neq \lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{y_k}$. (1)
Lösung: Wähle bspw. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2k\pi}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi}$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = 0$ und $0 = \lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{x_k} \neq \lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{y_k} = 1$.

ii) Verwenden Sie die beiden Folgen aus (i) dazu, die genannte Unstetigkeit zweiter Art bei $x = 0$ zu beweisen. (1)
Lösung: Dies folgt direkt aus Aufgabenteil i) und Satz 10.1.6.

3. (A) Stetigkeit

a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a+2}, & x \leq 1, \\ x^2 + b, & x > 1 \end{cases}$$

in $x = 1$ stetig ist und $f(-1) = 1$ gilt. (2)

Lösung: Für f muss gelten:

I) f stetig in $x = 1$

II) $f(-1) = 1$

II) ist genau dann erfüllt, wenn

$$f(-1) = \frac{-1}{a+2} = 1 \Leftrightarrow -1 = a + 2 \Leftrightarrow a = -3.$$

Für die Erfüllung von I) betrachten wir den links- und rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{a+2} = \lim_{x \to 1^-} -x = -1$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + b = 1 + b \overset{!}{=} -1 \Leftrightarrow b = -2$$

$\Rightarrow a = -3, b = -2.$

b) Zeigen Sie mithilfe der Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$$

im Punkt $x_0 = 1$ stetig ist. (3)

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \min(\frac{1}{2}, \varepsilon)$, dann gilt für $x \in U_\delta(1)$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(1)| &= |\frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1}}| \\
&= |\frac{2 - x - \sqrt{x}}{2(x + \sqrt{x})}| \\
&< \frac{1}{2}|2 - x - \sqrt{x}| \\
&= \frac{1}{2}|1 - x + 1 - \sqrt{x}| \\
&\leq \frac{1}{2}(|1 - x| + |1 - \sqrt{x}|) \\
&= \frac{1}{2}(|1 - x| + |\frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})}|) \\
&= \frac{1}{2}(|1 - x| + |\frac{1 - x}{(1 + \sqrt{x})}|) \\
&< \frac{1}{2}(|1 - x| + |1 - x|) \\
&= |1 - x| < \delta \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

c) Zeigen Sie: Ist $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $x \mapsto x \cdot g(x)$ in $x_0 = 0$ stetig. (1)
Lösung: Sei $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}, h(x) = x \cdot g(x)$ und $c > 0$, sodass $\forall x \in [0,1](|g(x)| \leq c)$. Seien nun $\varepsilon > 0$ und $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Dann gilt für $x \in U_\delta(0)$, dass

$$|h(x) - h(x_0)| = |x \cdot g(x)| = |x| \cdot |g(x)| \leq \delta \cdot c = \varepsilon.$$

Also ist h in $x_0 = 0$ stetig.

4. (A) Stetigkeit

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_4(x + 16) + x4^x - 6$, mindestens eine Nullstelle besitzt. (2)
Lösung: f ist stetig als Verkettung stetiger Funktionen. An der Intervallgrenzen gilt

- $f(-1) = \log_4(-1 + 16) + (-1) \cdot 4^{-1} - 6 = \underbrace{\log_4(15)}_{<2} - \frac{25}{4} < 0$
- $f(1) = \log_4(1 + 16) + 1 \cdot 4^1 - 6 = \underbrace{\log_4(17)}_{>2} - 2 > 0$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es nun ein $\xi \in (-1, 1)$ mit $f(\xi) = 0$.

b) Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in welchen Punkten bzw. Bereichen diese stetig sind. Klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen gemäß Beispiel 10.2.6.

i) $f(x) = \exp(24[x])$, wobei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} |\ k \leq x\}$ (2)
Lösung: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0^-} [x] = \begin{cases} [x_0] - 1 & \text{für } x_0 \in \mathbb{Z}, \\ [x_0] & \text{für } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

und

$$\lim_{x \to x_0^+} [x] = [x_0].$$

Da die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^-} \exp(24[x]) &= \exp(24 \lim_{x \to x_0^-} [x]) \\ &= \begin{cases} \exp(24([x_0] - 1)) = f(x_0 - 1) & \text{für } x_0 \in \mathbb{Z}, \\ \exp(24([x_0]) = f(x_0) & \text{für } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^+} \exp(24([x])) &= \exp(24(\lim_{x \to x_0^+} [x])) = f(x_0) \\ &= \exp(24[x_0]). \end{aligned}$$

Damit ist f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und unstetig auf jedem Punkt in $\mathbb{Z}$. Jede Unstetigkeitsstelle ist eine Sprungstelle, denn beide Grenzwerte ex., sind aber verschieden.

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-6x^2}{x^2-9} : x \in \mathbb{R} \setminus \{3,-3\} \\ 4 : x = 3 \\ 3 : x = -3 \end{cases}$ (2)

Lösung: Auf $\mathbb{R} \setminus \{3,-3\}$ ist f als Quotient von Polynomen stetig. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{3,-3\}$ gilt außerdem

$$f(x) = \frac{2x^3-6x^2}{x^2-9} = \frac{2x^2(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2x^2}{x+3}.$$

Damit sind

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{2\cdot 3^2}{3+3} = 3 \neq f(3),$$
$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \infty.$$

Also ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{3,-3\}$ stetig, hat bei $x=-3$ eine Polstelle und bei $x=3$ eine hebbare Unstetigkeit.

5. (A) Grenzwertsätze für Funktionsgrenzwerte

Es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Beweisen Sie die folgenden nach Lemma 10.1.8 geltenden Aussagen jeweils mithilfe von Satz 10.1.6 und den Grenzwertsätzen 3.1.17 für Folgen.

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \left(\lim_{x\to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha a\right)$. (1.5)

(b) $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = a+b$. (1.5)

(c) $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = a\cdot b$. (1.5)

(d) Wenn $b \neq 0$, dann gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$. (1.5)

Lösung: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{x_0\}$ beliebig gewählt mit $x_k \to x_0$ für $k \to \infty$. Dann gilt nach Satz 10.1.6, dass $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$ und $\lim_{k\to\infty} g(x_k) = b$. Somit gilt jeweils

(a) $\lim_{k\to\infty}(\alpha f(x_k)) \overset{3.1.17}{=} \alpha \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \alpha a$
$\overset{10.1.6}{\Rightarrow} \forall \alpha \in \mathbb{R} \left(\lim_{x\to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha a\right)$,

(b) $\lim_{k\to\infty}(f(x_k)+g(x_k)) \overset{3.1.17}{=} \lim_{k\to\infty} f(x_k) + \lim_{k\to\infty} g(x_k) = a+b$
$\overset{10.1.6}{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = a+b$,

(c) $\lim_{k\to\infty}(f(x_k)\cdot g(x_k)) \overset{3.1.17}{=} \lim_{k\to\infty} f(x_k) \cdot \lim_{k\to\infty} g(x_k) = a\cdot b$
$\overset{10.1.6}{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = a\cdot b$,

(d) $\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \underset{\lim_{k\to\infty} g(x_k)=b\neq 0}{\overset{3.1.17}{=}} \frac{\lim_{k\to\infty} f(x_k)}{\lim_{k\to\infty} g(x_k)} = \frac{a}{b}$
$\overset{10.1.6}{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

6. (T),(NA)

Zeigen Sie, dass jedes Polynom ungeraden Grades mindestens eine (reelle) Nullstelle besitzt und schließen Sie daraus, dass jedes $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ mindestens einen reellen Eigenwert besitzt.

7. (T), (NA) Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in welchen Punkten bzw. Bereichen diese stetig sind. Klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen gemäß Beispiel 10.2.6.

a) $f(x) = |\sin(x^3)|$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|\cos(\frac{1}{x^2})}{1+x^4} : x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\} \\ 1 : x = 0 \end{cases}$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.