Mathematik für Informatik II - Tutorium - Woche 4

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 9 & 14 & -8 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Determinanten

Satz 9.1.5

Es sei $A = (a_{ik} \in M(n \times n, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

(i) $\det A$ multipliziert sich mit λ, wenn man eine Zeile mit λ multipliziert.

(ii) $\det A$ bleibt unverändert, wenn man ein Vielfaches einer Zeile von A zu einer anderen addiert.

(iii) $\det I = 1$.

Aufgabe 6

Besonders einfach berechnet sich die Determinante für Dreiecksmatrizen und Matrizen mit vielen Nulleinträgen. Wir versuchen die Matrizen A und B entsprechend umzuformen und beginnen mit der Matrix A. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \overset{Z_4 - Z_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \overset{Z_2 - Z_4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_{i \neq 4} - Z_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \overset{Z_5 - 2 \cdot Z_4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = 0 \ \ (*)$$

$(*)$ Satz 9.1.5 + Satz 9.1.12 (Laplacescher Entwicklungssatz, Entwicklung nach der 5-ten Zeile)

Aufgabe 6

Für die Matrix B entwickeln wir direkt nach der 6-ten Zeile:

$$\det B = -(-2) \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 & 14 & -8 \\ 1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}}_{=B_1} + 11 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 9 & 14 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{=B_2}$$

Wir können direkt $\det B_2 = 0$ ablesen, da die vierte und fünfte Zeile linear abhängig sind. B_1 bringen wir in die obere Dreiecksform. Da in dieser nur die Hauptdiagonale von Interesse ist, reicht es, wenn wir die entsprechenden Einträge betrachten. Indem wir von der zweiten Zeile $\frac{1}{2}$-mal die erste Zeile abziehen und von der fünften Zeile $\frac{8}{7}$-mal die vierte Zeile, erhalten wir die Hauptdiagonale

$$(b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44}, b_{55}) = (2, -1, 3, 7, \tfrac{1}{7}) \implies \det B = -(-2) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 7 \cdot \tfrac{1}{7} = -12$$

Eigenwerte

Definition 9.3.1: Eigenwert und Eigenvektor

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und weiter sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Eine reelle oder komplexe Zahl λ heißt *Eigenwert* von F, wenn es einen Vektor $x \in V$, $x \neq 0$, gibt mit

$$Fx = \lambda x$$

x heißt dann *Eigenvektor* von F zum Eigenwert λ.

Eigenwerte

Definition 9.3.1: Eigenwert und Eigenvektor

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und weiter sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Eine reelle oder komplexe Zahl λ heißt *Eigenwert* von F, wenn es einen Vektor $x \in V$, $x \neq 0$, gibt mit

$$Fx = \lambda x$$

x heißt dann *Eigenvektor* von F zum Eigenwert λ.

- $Fx = \lambda x \implies (Fx - \lambda \mathrm{id}_V)x = 0 \implies (\lambda \text{ EV von F} \iff \det(F - \lambda \mathrm{id}_V) = 0)$
- $P_F(\lambda) = \det(F - \lambda \mathrm{id}_V)$ *charakteristisches Polynom* von F

Diagonalisierbarkeit

Lemma 9.4.1: Notwendige Bedingung

Der $\mathbb{C}$- oder $\mathbb{R}$-Vektorraum V besitze eine Basis aus Eigenvektoren, dann ist das charakteristische Polynom von A ein Produkt von n Linearfaktoren.

Diagonalisierbarkeit

Lemma 9.4.1: Notwendige Bedingung

Der $\mathbb{C}$- oder $\mathbb{R}$-Vektorraum V besitze eine Basis aus Eigenvektoren, dann ist das charakteristische Polynom von A ein Produkt von n Linearfaktoren.

- Hinreichend: $P_F(\lambda)$ besitzt n verschiedene Nullstellen
- Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerte sind linear unabhängig!
- Der Grundkörper $\mathbb{K}$ ist wichtig! $P_F(\lambda) = \lambda^2 + 1$ (z.B. gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) ist über $\mathbb{R}$ irreduzibel und besitzt über $\mathbb{C}$ die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Diagonalisierbarkeit

Definition 9.4.5: Ähnlichkeit

Zwei n-reihige Matrizen A und A' heißen *ähnlich*, falls es eine invertierbare n-reihige Matrix B gibt mit

$$B^{-1}AB = A'$$

Ist A zu einer Diagonalmatrix ähnlich, so heißt A diagonalisierbar.

Diagonalisierbarkeit

Definition 9.4.5: Ähnlichkeit

Zwei n-reihige Matrizen A und A' heißen *ähnlich*, falls es eine invertierbare n-reihige Matrix B gibt mit

$$B^{-1}AB = A'$$

Ist A zu einer Diagonalmatrix ähnlich, so heißt A diagonalisierbar.

- Ähnlichkeit/Diagonalisierbarkeit von $n \times n$-Matrizen stellt eine Äquivalenzrelation dar (Reflexiv, Symmetrisch, Transitiv)
- Ähnliche Matrizen besitzen die gleichen Eigenwerte, aber i.A. nicht die gleichen Eigenvektoren! Gilt $Av = \lambda v$ folgt für $w = B^{-1}v$ das

$$A'w = B^{-1}ABB^{-1}v = B^{-1}Av = B^{-1}\lambda v = \lambda B^{-1}v = \lambda w$$

Beachte: $w = B^{-1}v = v$ nur in Spezialfällen!

Diagonalisierbarkeit

Lemma 9.4.6: Gestalt der Transformationsmatrix

Für eine invertierbare Matrix B gilt

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn die Spalten b_k von B Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_k sind.

Diagonalisierbarkeit

Lemma 9.4.6: Gestalt der Transformationsmatrix

Für eine invertierbare Matrix B gilt

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn die Spalten b_k von B Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_k sind.

(1) Berechne die Nullstellen von $P_A(\lambda)$.

(2) Löse $Ax = \lambda_i x$ für alle i, wobei λ_i die i-te Nullstelle von $P_A(\lambda)$.

(3) Vergleiche zu mehrfachen Nullstellen die *algebraische* mit der *geometrischen Vielfachheit*.

Diagonalisierbarkeit

Vielfachheiten und Eigenraum

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine m-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

- m die algebraische Vielfachheit von λ_0,
- $\dim \ker(A - \lambda_0 I) =: \dim N_{\lambda_0}$ geometrische Vielfachheit von λ_0 und
- $\ker(A - \lambda_0 I) = N_{\lambda_0}$ der Eigenraum von A zu λ_0.

Diagonalisierbarkeit

Vielfachheiten und Eigenraum

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine m-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

- m die algebraische Vielfachheit von λ_0,
- $\dim \ker(A - \lambda_0 I) =: \dim N_{\lambda_0}$ geometrische Vielfachheit von λ_0 und
- $\ker(A - \lambda_0 I) = N_{\lambda_0}$ der Eigenraum von A zu λ_0.

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar, wenn für alle λ_i $\dim N_{\lambda_0} = m$ (alg. $=$ geom. Vielfachheit).

Stetigkeit

Definition 10.11: ε-Umgebung

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

die ε-Umgebung von x_0 und

$$\dot{U}_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < |x - x_0| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$$

die punktierte ε-Umgebung von x_0.

Stetigkeit

Funktionsgrenzwert: f konvergiert gegen a für $x \to x_0$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} (x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Stetigkeit

Funktionsgrenzwert: f konvergiert gegen a für $x \to x_0$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}(x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

- Beachte die punktierte x_0-Umgebung!

Für Stetigkeit auf D: Ersetze die punktierte x_0-Umgebung durch $U_\delta(x_0) \cap D$.

Stetigkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y - 3$. Zeige die Stetigkeit von f in $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Stetigkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y - 3$. Zeige die Stetigkeit von f in $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Beweis:

(1) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. ,,Rate'' den Grenzwert $a = 1\,(= f(x_0))$. Setze $\delta(\varepsilon) =?$

(2) Suche eine Teilmenge $U_\delta(\varepsilon)(x_0) \subset \mathbb{R}^2$ für die $\forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)(|f(x) - 1| < \varepsilon)$ erfüllt ist. (Wir suchen die offene Kreisscheibe mit Radius $\delta(\varepsilon)$ um x_0, die unter f in das Intervall $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ abgebildet wird)

(3) Sei $\tilde{x} = x_0 + \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}^T$

$$|f(\tilde{x}) - 1| = |(1+c)^2 + (3+d) - 3) - 1| = |c^2 + 2c + d| < \varepsilon$$

Bedingung auf jeden Fall erfüllt, wenn $c = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4} = d$, womit $\delta(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{4} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ (Satz des Pythagoras, $\delta(\varepsilon)^2 = c^2 + d^2$)

Stetigkeit

Beachte:

- Für *jedes* ε darf ein **neues** $\delta(\varepsilon)$ gewählt werden.
- Die Abschätzung muss nicht optimal sein!