



Übungen Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure: Blatt 11

Aufgabe 1:

(2+2+1)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ und möchten das Integral $\int_0^1 f(x) dx$ ausrechnen. Betrachte dazu die Partition $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ von $[0, 1]$.

- Berechne die Obersumme $O(f, Z_n)$ sowie die Untersumme $U(f, Z_n)$. Gib beide Ausdrücke ohne Summenzeichen an.
- Berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} O(f, Z_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, Z_n)$.
- Was sollte in Anbetracht von Teil (b) wohl für $\int_0^1 e^x dx$ herauskommen? Verifiziere dies mithilfe des Hauptsatzes der D/I-Rechnung.

Hinweis: Auch hier dürfen diskrete Variablen wieder als kontinuierlich angenommen werden

Aufgabe 2:

(5)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Betrachte nun die Funktion $F : [0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Berechne $F(x)$ für $x \in [0, 3)$. Wo ist F stetig, wo differenzierbar?

Aufgabe 3:

(4)

Es sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig auf I . Zeige:

$$\exists \xi \in I : \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Aufgabe 4:

(6)

Berechne folgende Integrale:

1. $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$

4. $\int_0^3 e^{2x} dx$

2. $\int_{-2}^1 x^2 - 2x + 1 dx$

5. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

3. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

6. $\int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx$

Hinweis: Den zweiten Hauptsatz der D/I-Rechnung behandeln wir erst diese Woche, er darf aber benutzt werden.