Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 30. April 2021, Abgabe: 29. April

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 1

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 30. April um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 29. April um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Aufgabe 1 (1 + 6 = 7 Punkte)

Diese Aufgabe ist kürzer als sie aussieht, ein gutes Verständnis der Erklärungen ist aber wichtig ;)

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um das gleichzeitige Würfeln mit zwei sechsseitigen Würfeln zu beschreiben. Die Grundmenge Ω wählen wir wie in Beispiel 2.1.2 im Skript. Ein Elementarereignis (also ein Element $\omega \in \Omega$ der Grundmenge) gibt also an, welche Zahlen die beiden Würfel zeigen. Beachte, dass die Würfel hier unterscheidbar sind, wir haben also z.B. einen roten Würfel, dem der erste Eintrag von ω entspricht und einen blauen Würfel, dessen Augenzahl im zweiten Eintrag von ω steht. Das Elementarereignis $(4, 2)$ bedeutet dann, dass der rote Würfel eine 4 zeigt, der blaue eine 2; das Elementarereignis $(2, 4)$ aber dass der rote Würfel eine 2 zeigt, der blaue eine 4.

Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit wir berechnen wollen können unter anderem sein:

- A = “Der rote Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4”
- B = “Der rote und der blaue Würfel zeigen die gleiche Zahl”
- C = “Der blaue Würfel zeigt eine größere Zahl als der rote Würfel”

Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ repräsentiert die Menge aller Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit wir später berechnen können. Aus der Intuition des Gegenereignisses (also z.B. “der rote Würfel zeigt *nicht* eine Zahl kleiner als 4” bzw. “der rote Würfel zeigt mindestens 4 Augen”) wird klar, wieso es wichtig ist, dass $\mathcal{F}$ auch das Komplement $\overline{A}$ (also das Gegenereignis von A) enthält, wenn A selbst enthalten ist. Mit der zweiten Forderung der (σ-)Vereinigungsstabilität wird ein Mengensystem konstruiert, in dem im Wesentlichen alle intuitiv definierbaren Ereignisse enthalten sind, also auch Vereinigungen von Ereignissen (A oder B tritt ein), Schnitte (A und B tritt ein) und auch kompliziertere wiederholte Anwendung dieser Operationen (z.B. A und B tritt ein, aber nicht C).

(a) Gib eine geeignete σ-Algebra $\mathcal{F}$ an, die alle Ereignisse aus der Liste oben enthält sowie einfache Abwandlungen davon (Ersetze die 4 durch eine beliebige Zahl; Ersetze “rot” durch “blau” und umgekehrt; Ersetze “kleiner” durch “größer”; ...).

(b) Gehe davon aus, dass die beiden Würfel fair sind, also jede Seite mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zeigen. Gib das Wahrscheinlichkeitsmaß $P\colon \mathcal{F} \to [0, 1]$ an und gib die Wahrscheinlichkeiten für die drei Ereignisse aus der Liste oben an. Es ist hilfreich, wenn du ein Ereignis als Menge von Elementarereignissen betrachtest.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Mache dich mit Mengendiagrammen (Euler- und Venn-Diagramme) vertraut, siehe z.B. Abbildung 2.2 im Skript und den kurzen aber sehr anschaulichen Wikipedia-Artikel dazu: `https://de.wikipedia.org/wiki/Mengendiagramm`. In einem Mengendiagramm werden Ereignisse $A, B, \ldots \subset \mathcal{F}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ als Kreise (oder andere Formen) dargestellt und die Überschneidungen dieser Formen repräsentieren den Schnitt von Ereignissen. In einem Venn-Diagramm werden alle möglichen Schnitte von Kreisen dargestellt, auch wenn die Schnitte der entsprechenden Mengen leer sind.

Zeichne ein Venn-Diagramm das die 3 Ereignisse aus Aufgabe 1 zueinander in Relation setzt. Inklusive dem äußeren Bereich, der in keinem der drei Kreise enthalten ist, sollten 8 voneinander getrennte Bereiche sichtbar sein. Gib für jeden dieser Bereiche eine Beschreibung und ein Elementarereignis an, das im Bereich liegt. Gib an, falls ein Bereich leer ist, also kein Elementarereignis enthält.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige, dass die Definition 2.2.2 im Skript definierte Klasse $\sigma(U)$ tatsächlich eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeige, dass die im Skript definierte Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ (also $d = 1$) alle abgeschlossenen Intervalle (also Intervalle der Form $[a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) enthält.

Aufgabe 5 (5 Bonuspunkte)

Führe die Induktion aus dem Beweis von Folgerung 2.2.1, Teil 4) bis zum Ende durch.

Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 14. Mai 2021, Abgabe: 13. Mai

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 2

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 14. Mai um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 13. Mai um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Gebt die Lösungen nach Möglichkeit bitte in Gruppen von zwei oder drei Personen ab, pro Gruppe soll nur eine Person die Lösung hochladen. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \cap \Omega$ und $P(A) = |A|/c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichnet $|A|$ in diesem Fall die Fläche von A, z.B. $|[0, 0.5] \times [0.2, 0.7]| = (0.5 - 0)(0.7 - 0.2) = 0.25$.

(a) Zeige, dass $c = |\Omega|$ gelten muss, damit P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und gib den Wert von c an. Welche Eigenschaft eines Wahrscheinlichkeitsmaßes aus Definition 2.2.1 ist hierfür entscheidend?

Skizziere die Menge Ω und zeichne folgende Teilmengen ein. Berechne außerdem ihre Wahrscheinlichkeiten.

(b) $A = \{(x, y) \in \Omega, x > y\}$

(c) $B = \{(x, y) \in \Omega, x^2 + y^2 \leq 1\}$

(d) $C = \{(x, y) \in \Omega, x = 0\}$

(e) $D = A \cap B$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Binokel ist ein schwäbisches Kartenspiel, das mit einem doppelten württembergischen Blatt, also $2 \times 24 = 48$ Karten gespielt wird. Die Karten verteilen sich auf 4 Farben (hier genannt: Kreuz, Schippen, Herz, Schellen) zu jeweils 12 Karten (2× Ass, 2× Zehn, 2× König, 2× Ober, 2× Unter, 2× Sieben). Jede dieser Karten kommt im Deck doppelt vor. Beim Spiel zu dritt werden an jede/n Spieler/in 14 Karten verteilt, die letzten 6 Karten verbleiben im sogenannten *Dapp*.

Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

(a) Spieler A hat einen *doppelten Binokel* auf der Hand, also beide Schippen Ober und beide Schellen Unter.

(b) Spieler B hat mindestens einen *Dis*, also eine Sieben in der Trumpffarbe, auf der Hand. Die Trumpffarbe sei hierfür Herz.

(c) Spieler C hat genau 5 Karten in Kreuz auf der Hand.

(d) Im Dapp liegen nur Zehner.

Hinweis: Für die Teilaufgaben kann es nützlich sein, das verwendete Urnenmodell jeweils unterschiedlich zu formulieren.

Bonusaufgabe ohne Punkte: Welche Regeln oder Bezeichnungen kennst du anders? Wir können das gerne nach der Übung diskutieren ;)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

In einer Urne befinden sich 26 Kugeln, die mit den Buchstaben des Alphabetes (21 Konsonanten, 5 Vokale) beschriftet sind. Von diesen werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass als erster Buchstabe ein Vokal gezogen wird.

(b) Stelle einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf, wenn die Reihenfolge des Ziehens nicht beachtet werden soll.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(c) höchstens drei Vokale gezogen werden,

(d) aus den gezogenen Buchstaben das Wort "PHYSIK" gelegt werden kann.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sensitivität und Spezifität eines PCR-Tests auf SARS-CoV-2 können über folgenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ beschrieben werden:

$$\Omega = \{\text{gesund}, \text{erkrankt}\} \times \{\text{negativ}, \text{positiv}\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

und ein Wahrscheinlichkeitsmaß P. Ein Elementarereignis $\omega = (x, y)$ gibt in der ersten Komponente (x) an, ob eine Person tatsächlich mit SARS-CoV-2 infiziert ("erkrankt") ist und in der zweiten Komponente (y), ob diese Person ein positives oder negatives Testergebnis bekommt.

Formuliere folgende Ereignisse als Menge von Elementarereignissen:

(a) Ω, also gib alle Elementarereignisse an.

(b) A = “Eine Person ist erkrankt”

(c) B = “Eine Person wird positiv getestet”

(d) C = “Eine Person ist erkrankt und wird positiv getestet”

(e) D = “Eine Person ist gesund und wird negativ getestet”

Nimm an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person erkrankt ist, bei $P(A) = 0.02$ liegt und auch $P(B) = 0.03$. Nimm außerdem an, dass eine Person mit $P(C \cup D) = 0.988$ ein korrektes Testergebnis erhält.

Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, das diese drei Werte als Ausdruck der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse darstellt. Um die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse eindeutig zu bestimmen, musst du eine weitere Gleichung hinzufügen, siehe Aufgabe 1 a). Berechne damit die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.

Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 28. Mai 2021, Abgabe: 27. Mai

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 3

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 28. Mai um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 27. Mai um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Gebt die Lösungen nach Möglichkeit bitte in Gruppen von zwei oder drei Personen ab. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Aufgabe 1 (2 + 2 = 4 Punkte)

Eine Fußballmannschaft hat eine Siegchance von 75% je Spiel, falls ihr Kapitän in guter Form ist. Falls ihr Kapitän nicht gut in Form ist, dann betrage ihre Siegchance nur 40%. Bei 70% aller Spiele seiner Mannschaft sei der Kapitän in guter Form. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) die Mannschaft ein Spiel gewinnt,

(b) der Kapitän bei einem Spiel gut in Form ist, wenn die Mannschaft nicht gewinnt.

Aufgabe 2 (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

Gib die Verteilungsfunktionen folgender Zufallsvariablen an und skizziere sie:

(a) X, wobei $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P(X = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ und $P(X = 2) = \frac{1}{6}$

(b) $X^2 + 1$

(c) $X \cdot X'$, wobei X und X' unabhängige Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion aus Teil (a) sind.

Aufgabe 3 (2 + 2 = 4 Punkte)

Gegeben sein eine Zufallsvariable $X \sim Geo(p)$ für einen Parameter $p \in (0, 1)$ die der geometrischen Verteilung folgt.

(a) Berechne die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X.

(b) Zeige, dass die geometrische Verteilung gedächtnislos ist, d.h., es gilt für $n, k = 1, 2, \ldots$:

$$P(X = n + k | X \geq k) = P(X = n) \,.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Betrachte Aufgabe 4 von Übungsblatt 2. Berechne für die dort gegebenen Wahrscheinlichkeiten den so genannten *negativen Vorhersagewert*

$$P(\text{“eine Person ist nicht erkrankt”} \mid \text{“die Person wird negativ getestet”})\,.$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F_X und zwei Werte $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Drücke $P(a < X < b)$ und $P(a <= X < b)$ mit Hilfe von F_X aus.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Welche der Plots in Abbildung 1 zeigen Verteilungsfunktionen? Begründe deine Antwort, falls ein Plot keine Verteilungsfunktion zeigt. Gib für die skizzierten diskreten Verteilungen die Zähldichten $\{p_k\}$ an.

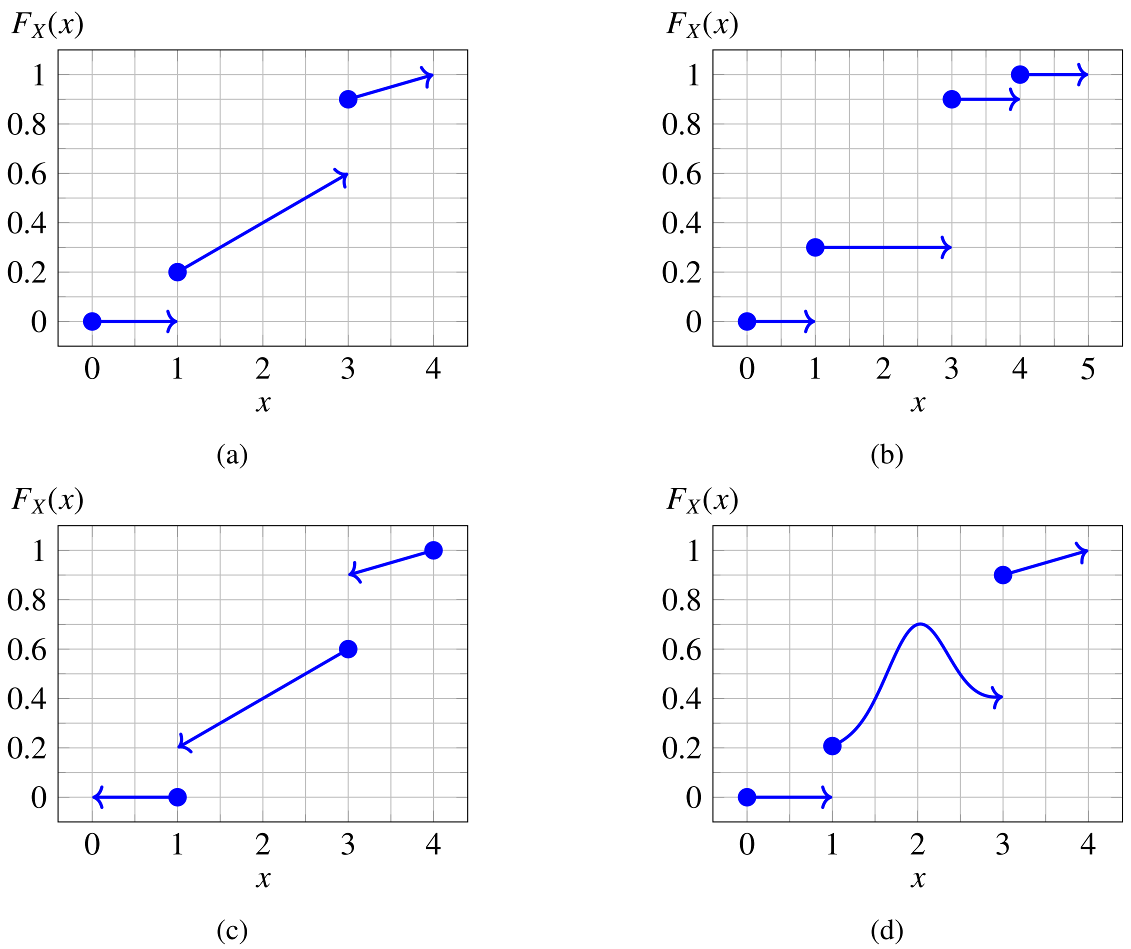

Abbildung 1: Welche Plots zeigen Verteilungsfunktionen?

Multiple Choice Aufgaben

Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben sind die richtigen Aussagen anzugeben. Dabei kann genau eine Aussage zutreffen, mehrere Aussagen können zutreffen oder aber keine der Aussagen trifft zu. Die Aufgabe ist richtig gelöst, wenn alle zutreffenden Aussagen angegeben wurden, jedoch keine nicht zutreffende Aussage angegeben wurde.

Für die Bewertung des Übungsblatts gibt jede richtige Antwort 1 Punkt, jede falsche Antwort gibt 1 Punkt Abzug. Je Aufgabe können minimal 0 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 7 (3 Bonuspunkte)

In einer Studie von Vanderpump et al. (Clinical Endocrinology 1995, 43, 55–69) wurden Todesereignisse innerhalb von 10 Jahren bei RaucherInnen (139 von 582) und NichtraucherInnen (230 von 732) erhoben. Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten für Tod nach 10 Jahren im Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum, bedingt auf RaucherInnenstatus, und gib an, welche Aussagen zutreffen.

(a) Die bedingten Wahrscheinlichkeit für Tod nach 10 Jahren ist höher für RaucherInnen als für NichtraucherInnen.

(b) Deine Analyse zeigt, dass das Rauchverhalten einen kausalen Einfluss auf die Sterbewahrscheinlichkeit hat.

(c) Die Ereignisse *Tod nach 10 Jahren* und *RaucherIn* sind statistisch unabhängig.

Aufgabe 8 (4 Bonuspunkte)

Drei SpielerInnen X, Y und Z spielen Skat und haben jeweils 10 zufällige Karten aus einem gemeinsamen, 32 Karten umfassenden Skatdeck (jeweils 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass in den 4 Farben Karo, Herz, Pik und Kreuz) erhalten. Die verbleibenden beiden Karten bilden den sogenannten *Skat*. Betrachte die folgenden Ereignisse:

- A = “Im Skat liegt exakt ein Bube”
- B = “X erhält mehr Buben als Y”
- C = “X erhält 4 Buben”
- D = “X erhält 3 Buben”
- E = “Im Skat liegt mindestens ein Bube”

Gib an, welche Aussagen korrekt sind:

(a) $P(C) < P(D|A)$

(b) $P(C) > P(D|E)$

(c) A und B sind unabhängig.

(d) D und B sind unabhängig.

Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 11. Juni 2021, Abgabe: 10. Juni

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 4

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 11. Juni um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 10. Juni um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Gebt die Lösungen nach Möglichkeit bitte in Gruppen von zwei oder drei Personen ab. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Du kommst gleichverteilt zwischen 18:00 und 18:05 an einer Bushaltestelle an. Der Bus fährt laut Fahrplan um 18:02 und hat eine Verspätung von $V \sim Exp(1/3)$ Minuten, d.h., die Verspätung ist exponentialverteilt mit Parameter $1/3$. Weiterhin sei die Verspätung unabhängig von deiner Ankunftszeit. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass du den Bus erreichst.

Aufgabe 2 (2 + 2 = 4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{F}$. Zeige:

(a) Falls $P(A) \in \{0, 1\}$, so ist A unabhängig von jedem Ereignis $B \in \mathcal{F}$.

(b) A ist genau dann unabhängig zu $B \in \mathcal{F}$, wenn A und B^c unabhängig sind.

Aufgabe 3 (2 + 2 = 4 Punkte)

Seien $X_1, ..., X_n \sim U([0, 1])$ unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$.

(a) Berechne die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Y = \min\{X_1, ..., X_n\}$.

(b) Berechne die Dichte von $Y = -\log(X_1)$.

Aufgabe 4 (2 + 2 = 4 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{falls } x \in [0, d] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimme c und d so, dass f und g tatsächlich Dichten sind.

(b) Bestimme für eine Zufallsvariable X mit Dichte f die Wahrscheinlichkeiten

$$P\left(X \le \tfrac{1}{2}\right), \quad P\left(X = \tfrac{1}{2}\right), \quad P\left(X \in \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right]\right), \quad P\left(X \in \left(\tfrac{1}{3}, 2\right)\right).$$

Aufgabe 5 (1+1+2 = 4 Punkte)

Sei F eine Verteilungsfunktion. Dann heißt die Funktion

$$F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\},\ y \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \ge y\}$$

Quantilfunktion von F.

(a) Berechne und skizziere die Quantilfunktion der Zufallsvariable X mit $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ und $P(X = 2) = \frac{1}{6}$ (vgl. Blatt 3, Aufgabe 2).

(b) Zeige: Eine Quantilfunktion ist monoton wachsend.

(c) Zeige:

$$F(x) \ge y \iff x \ge F^{-1}(y)$$

Multiple Choice Aufgaben

Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben sind die richtigen Aussagen anzugeben. Dabei kann genau eine Aussage zutreffen, mehrere Aussagen können zutreffen oder aber keine der Aussagen trifft zu. Die Aufgabe ist richtig gelöst, wenn alle zutreffenden Aussagen angegeben wurden, jedoch keine nicht zutreffende Aussage angegeben wurde.

Für die Bewertung des Übungsblatts gibt jede richtige Antwort 1 Punkt, jede falsche Antwort gibt 1 Punkt Abzug. Je Aufgabe können minimal 0 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 6 (5 Bonuspunkte)

Betrachte für zwei Parameter $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} x^2\right).$$

Sei außerdem $0 < a < b$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $P(-b \le X \le -a) = P(a \le X \le b)$

(b) $P(-b \le X \le -a) = P(-a \le X \le b)$

(c) $P(a < X < b) = P(-a \le X \le b)$

(d) $P(a \leq X < -b) = P(-a \leq X \leq b)$

(e) $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$

Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 25. Juni 2021, Abgabe: 24. Juni

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 5

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 25. Juni um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 24. Juni um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Gebt die Lösungen nach Möglichkeit bitte in Gruppen von zwei oder drei Personen ab. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen wie in Folgerung 3.6.1. Zeige, dass

$$X_1 + X_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) .$$

Aufgabe 2 (2 + 2 + 1 = 5 Punkte)

Der Inhalt einer bestimmten Sorte Farbdosen sei auf dem Etikett mit 1000g Farbe angegeben. Die Abfüllmaschine kann diese Menge jedoch nicht exakt abfüllen, so dass die tatsächlich abgefüllte Menge (in Gramm) normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 1000$ und $\sigma^2 = 100$. Die verwendeten Dosen können höchstens 1020g Farbe fassen.

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Dose beim Abfüllen überläuft. Verwende dazu zunächst eine geeignete Skalierung und Normierung, um eine standardnormalverteilte Zufallsvariable zu bekommen. Verwende außerdem die unten angegebenen Werte der Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung.

(b) Zeige, dass für die Verteilungsfunktion $\Phi\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ der Standardnormalverteilung gilt: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Nutze dazu aus, dass die Dichte $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ der Standardnormalverteilung achsensymmetrisch ist, d.h. es gilt $\varphi(x) = \varphi(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Berechen mit Hilfe von Teil b) die Wahrscheinlichkeit, dass eine Farbdose weniger als 990g Farbe enthält. Verwende die unten angegebenen Werte der Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung.

Hinweis: Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(0, 1)$ gilt

x	0.1	0.2	0.5	1	2	5
$F_X(x)$	0.540	0.579	0.691	0.841	0.977	1.000

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein absolutstetiger Zufallsvektor mit der Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{2}{3}x_2, & \text{für } (x_1, x_2) \in [0,1]^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Prüfe, ob die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig sind.

Aufgabe 4 (3 Bonuspunkte)

Ein Pseudozufallszahlengenerator (englisch: pseudorandom number generator, PRNG) wird genutzt um am Computer Zahlen zu erzeugen, die als Realisierungen von auf $[0, 1]$ gleichverteilten und unabhängigen Zufallszahlen angesehen werden können. Eine einfache Klasse von Algorithmen zur Erzeugung von (Pseudo-)Zufallszahlen sind sogenannte *lineare Kongruenzgeneratoren*, die für vier Parameter $y_1, b, a \in \{0, \ldots, m-1\}$ und m (genannt *Startwert, Inkrement, Faktor* und *Modul*) mit folgender rekursiven Vorschrift

$$y_i = (ay_{i-1} + b) \mod m$$

Zahlen y_i generieren. Hier bezeichnet $\mod m$ den Rest nach Division durch m.

Wir wollen nun die Güte dieser Klasse von Zufallszahlengeneratoren untersuchen. Insbesondere interessieren wir uns für die Unabhängigkeit der Realisierungen $y_1, y_2, \ldots$.

Implementiere in einer Programmiersprache deiner Wahl einen linearen Kongruenzgenerator mit Parametern $a = 24298$, $b = 99991$, $m = 199017$ und $y_1 = 7324$. Generiere damit nun 180 Pseudozufallszahlen $y_1, y_2, \ldots, y_{180}$ und berechne daraus zwei Listen $X = (x_1, \ldots, x_{60}) = (y_1, y_4, y_7, \ldots, y_{178})$ und $Z = (z_1, \ldots, z_{60}) = (y_2+y_3, y_5+y_6, y_8+y_9, \ldots, y_{179}+y_{180})$. Plotte nun die Punktwolke $(x_1, z_1), \ldots (x_{60}, z_{60})$. Was fällt dabei auf? Würden wir dieses Verhalten erwarten, wenn die Werte y_i wirklich Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen wären?

Multiple Choice Aufgaben

Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben sind die richtigen Aussagen anzugeben. Dabei kann genau eine Aussage zutreffen, mehrere Aussagen können zutreffen oder aber keine der Aussagen trifft zu. Die Aufgabe ist richtig gelöst, wenn alle zutreffenden Aussagen angegeben wurden, jedoch keine nicht zutreffende Aussage angegeben wurde.

Für die Bewertung des Übungsblatts gibt jede richtige Antwort 1 Punkt, jede falsche Antwort gibt 1 Punkt Abzug. Je Aufgabe können minimal 0 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor, der $N(\mu, \Sigma)$ verteilt ist. Gib an, welche Aussagen korrekt sind:

(a) Σ ist eine 2x2-Matrix.

(b) Falls X und Y unabhängig sind, dann sind die Nichtdiagonalelemente von Σ gleich null.

(c) Die Diagonalelemente von Σ sind kleiner Null, falls X und Y abhängig sind.

(d) Falls die Nichtdiagonalelemente von Σ gleich Null sind, dann ist $X + Y$ ebenfalls normalverteilt.

(e) Falls $X + Y$ normalverteilt ist mit Parametern m und s^2, $X + Y \sim N(m, s^2)$, so ist s^2 gleich der Summe der Nichtdiagonalelemente von Σ.

(f) Falls

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma = \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

dann ist Y^2 χ_1^2-verteilt.

Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 9. Juli 2021, Abgabe: 8. Juli

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 9. Juli um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 8. Juli um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Gebt die Lösungen nach Möglichkeit bitte in Gruppen von zwei oder drei Personen ab. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Aufgabe 1 (3 + 2 = 5 Punkte)

Es sei $X = (X_1, X_2)$ ein zweidimensionaler stetiger Zufallsvektor mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{3}{2}x_1^2 x_2 + \frac{1}{2}(x_2 - \frac{1}{2}) - \frac{3}{4}x_1^2 & \text{falls } x_1 \in [0,1] \text{ und } x_2 \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechne die Erwartungswerte und Varianzen von X_1 und von X_2.

(b) Berechne die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X_1 und X_2.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Sei $X \sim Exp(\lambda)$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen

(a) $X_1 = e^{-X}$.

(b) $X_2 = 2X$.

(c) $X_3 = \max\{X, 1/3\}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die $\mathsf{Erlang}_{n,\lambda}$-Verteilung ist die Verteilung von $X_1 + \cdots + X_n$, wobei $X_1, \ldots, X_n \sim \mathsf{exp}_\lambda$ unabhängige Zufallsvariablen sind. Zeige durch vollständige Induktion: Die Dichte der $\mathsf{Erlang}_{n,\lambda}$-Verteilung ist gegeben durch

$$f_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 4 = 10 Bonuspunkte)

Gegeben sei eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen $X \sim U([0, 1])$ und eine Quantilfunktion F^{-1} (siehe Blatt 4, Aufgabe 5) die zu einer Verteilungsfunktion F gehört.

(a) Zeige, dass $Y = F^{-1}(X)$ gemäß F verteilt ist. Diese Art, gemäß F verteilte Zufallsvariablen zu erhalten, nennt sich *Inversionsmethode*.

(b) Berechne die Quantilfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$. Im folgenden bezeichnen wir diese Funktion als $g(x)$.

(c) Berechne die Dichte von $g(X)$ ($X \sim U([0, 1])$ wie oben) mittels Transformationssatz. Welches Ergebnis erwartest du hier?

(d) Nutze eine Programmiersprache deiner Wahl, um mit dieser Methode 1000 Realisierungen einer $Exp(1/2)$-verteilten Zufallsvariablen zu erzeugen. Nutze den in den Standardbibliotheken implementierten Generator für $U([0, 1])$-verteilte Zufallsvariablen. Plotte das Histogramm der 1000 Realisierungen.

Multiple Choice Aufgaben

Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben sind die richtigen Aussagen anzugeben. Dabei kann genau eine Aussage zutreffen, mehrere Aussagen können zutreffen oder aber keine der Aussagen trifft zu. Die Aufgabe ist richtig gelöst, wenn alle zutreffenden Aussagen angegeben wurden, jedoch keine nicht zutreffende Aussage angegeben wurde.

Für die Bewertung des Übungsblatts gibt jede richtige Antwort 1 Punkt, jede falsche Antwort gibt 1 Punkt Abzug. Je Aufgabe können minimal 0 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichtefunktion $f(x, y)$. Die Dichte der Randverteilungen seinen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. Gib an, welche Aussagen korrekt sind:

(a) X und Y sind abhängige Zufallsvariablen, da sie eine gemeinsame Dichtefunktion besitzen.

(b) Sind X und Y unkorreliert, so gilt $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

(c) Falls $(X, Y) \sim N(\mu, K)$ und $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, so gilt X und Y unkorreliert.

(d) Falls $(X, Y) \sim N(\mu, K)$ und die Nichtdiagonalelemente von K gleich Null sind, so ist der Korrelationskoeffizient von X und Y gleich Null.

(e) Falls $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, so ist der Korrelationskoeffizient von X und Y negativ.

(f) Für abhängige Zufallsvariablen X und Y sind die standardisierten Zufallsvariablen unabhängig.

Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 23. Juli 2021, Abgabe: 22. Juli

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 7

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 23. Juli um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 22. Juli um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Gebt die Lösungen nach Möglichkeit bitte in Gruppen von zwei oder drei Personen ab. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 3 = 9 Punkte)

Angenommen eine Münze ist 'gezinkt' und man möchte die Wahrscheinlichkeit p berechnen, dass diese nach einem Wurf 'Kopf' zeigt. Dazu wird die Münze n-mal geworfen und K_i bezeichne das Ereignis, im i-ten Wurf 'Kopf' zu werfen.

(a) Warum ist

$$\widehat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{K_i}$$

ein Näherungswert für p? Begründe mithilfe eines Gesetzes der großen Zahlen.

Hinweis: Nutze den zentralen Grenzwertsatz, um die folgenden Aufgabenteile näherungsweise zu lösen.

(b) Angenommen, der wahre Wert von p ist 0.3 und die Münze wird 100 mal geworfen. Berechne $\mathbb{P}(0.25 \leq \widehat{p} \leq 0.35)$.

(c) Wie oft muss die Münze geworfen werden, damit $\mathbb{P}(0.25 \leq \widehat{p} \leq 0.35) \geq 0.95$ für $p = 0.3$ gilt?

(d) Wie oft muss die Münze geworfen werden, damit $\mathbb{P}(p - 0.05 \leq \widehat{p} \leq p + 0.05) \geq 0.95$ für alle $p \in [0, 1]$ gilt?

Hinweis: Benötigte Funktionswerte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bzw. der Quantilfunktion sind: $\Phi(1.09) = 0.8621$, $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$.

Aufgabe 2 (3 + 3 = 6 Punkte)

Es soll der durchschnittliche Wasserverbrauch pro Person und Tag (in Liter l) einer Stadt bestimmt werden. Wir nehmen an, dass die unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_m$ den Wasserverbrauch von m Personen beschreiben. Es gelte $\mathbb{E}\, Y_j = 50l$ und $\operatorname{Var} Y_j = 87l^2$ für alle $j = 1, \dots, m$.

(a) Verwende die Tschebyscheff-Ungleichung, um festzustellen, von wie vielen Personen der Wasserverbrauch mindestens untersucht werden muss, damit die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{Y}_m = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$ um nicht mehr als $8l$ vom Erwartungswert $\mathbb{E}\, Y_j = 50l$ abweicht, mindestens 0.99 beträgt.

(b) Verwende nun statt der Tschebyscheff-Ungleichung den zentralen Grenzwertsatz, um die Mindestanzahl an Personen zu bestimmen, sodass die Bedingung aus (a) erfüllt ist.

Hinweis: Benötigter Wert der Quantilfunktion der Standardnormalverteilung: $\Phi^{-1}(0.995) = 2.58$.

Aufgabe 3 (3 + 2 = 5 Bonuspunkte)

In den folgenden Aufgaben sollen Monte-Carlo Methoden (siehe Kapitel 5.1.2) genutzt werden. Implementiere die Lösungen in einer Programmiersprache deiner Wahl und gib den Code und den dazugehörigen Output ab.

(a) Gegeben seien zwei Kreise mit Mittelpunkten $c_1 = (0, 0.5)$ und $c_2 = (1, 0.5)$ und identischem Radius $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Berechne die Fläche des Schnitts der beiden Kreise approximativ basierend auf 10^4 zufällig gewählten Punkten in einem Rechteck $[a, b] \times [c, d]$. Wähle die Werte a, b, c, d, so, dass der Schnitt der beiden Kreise vollständig in diesem Rechteck enthalten und die Fläche des Rechtecks minimal ist.

(b) Berechne das folgende Integral approximativ mittels Monte-Carlo Integration (siehe Kapitel 5.1.2) basierend auf 10^4 zufällig gewählten Punkten in $[0, 1]^3$:

$$\int_{[0,1]^3} \cos(x_1 x_2) \cdot \sin(\cos(x_3 x_1))\, dx_1 dx_2 dx_3$$

Multiple Choice Aufgaben

Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben sind die richtigen Aussagen anzugeben. Dabei kann genau eine Aussage zutreffen, mehrere Aussagen können zutreffen oder aber keine der Aussagen trifft zu.

Für die Bewertung des Übungsblatts gibt jede richtige Antwort 1 Punkt, jede falsche Antwort gibt 1 Punkt Abzug. Wie in der Prüfung auch, habt ihr hier die Möglichkeit, für einen Teil keine Antwort anzugeben und damit keine positiven oder negativen Punkte dafür zu erhalten. Je Aufgabe können minimal 0 Punkte erreicht werden.

Zur Abgabe könnt ihr diese Aufgabe gerne ausdrucken und ankreuzen oder die Antworten (richtig/falsch/keine Antwort) mit einer klaren Nummerierung (1-5 oder a-e) versehen.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachte eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ mit gemeinsamen Erwartungswert $\mu = E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \ldots$. Die Zufallsvariablen können im Allgemeinen abhängig oder unabhängig sein. Es sei $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Richtig	Falsch	
◯	◯	$X_1, X_2, X_3, \ldots$ seien abhängig. Dann gilt $E(\bar{X}) = \mu$.
◯	◯	Es gelte $E(\bar{X}) = \mu$. Dann muss auch $\sigma^2 = Var(X_1) = Var(X_2) = Var(X_3) = \ldots$ gelten.
◯	◯	$X_1, X_2, X_3, \ldots$ seien identisch verteilt. Dann gilt das starke Gesetz der großen Zahlen.
◯	◯	$X_1, X_2, X_3, \ldots$ seien unabhängig identisch verteilt mit Varianz $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Dann gilt $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow{P} 0$.
◯	◯	$X_1, X_2, X_3, \ldots$ seien unabhängig identisch Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$. Die Anzahl der Erfolge ist dann ungefäßahr normalverteilt.