universität ulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 10

Abgabedatum: 27.06.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Gilt die Umkehrung des Satzes von Rolle (11.2.5)? In anderen Worten, seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a,b) differenzierbar. Weiter existiere ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Gilt dann $f(a) = f(b)$?

(b) Gilt die Umkehrung des 1. Mittelwertsatzes (11.2.8)? In anderen Worten, seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die gilt

$$\exists \xi \in (a,b) \left(f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

Ist f dann stetig und auf (a,b) differenzierbar?

(c) Hilft der Satz von L'Hospital nur in den Fällen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ weiter?

(d) Für welche Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ gilt, dass das entsprechende Lagrangesche Restglied $R_n(x_0, x)$ gleich 0 ist?

(e) Welche Bedingung muss eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ erfüllen, sodass die Taylorreihe $Tf(x_0, x)$ von f mit Entwicklungspunkt x_0 existiert?

2. (A) Taylorpolynome

a) Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(\cos(x))$. Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom $T^{(2)}f(0,x)$ von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (3)

b) Zeigen Sie, dass für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ die Abschätzung

$$\left| f(x) - T^{(2)}f(0,x) \right| \leq \frac{2}{3}x^3$$

gilt. (3)

3. (A) Kurvendiskussionen

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x)e^{2x}$ durch (Nullstellen, Monotonieintervalle, Extremstellen (lok. Max./Min), Verhalten für $x \to \pm\infty$.) (6)

4. (A) Partielle Ableitungen

Berechnen Sie jeweils alle ersten partiellen Ableitungen von

a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3x_2^2x_3+x_1^2x_2x_3^3+x_1x_2^3x_3^2,$ (1)

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x_1,x_2)=\sin(x_1\cos x_2),$ (1)

c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}x_2^2x_1+3x_1^2x_3^3\\ x_3x_1^2+2x_2x_1\end{pmatrix},$ (2)

d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{x_1x_2^3}{x_1^2+x_2^4}, & (x_1,x_2)^\top\neq(0,0)^\top,\\ 0, & (x_1,x_2)^\top=(0,0)^\top.\end{cases}$ (2)

Beachten Sie bei d), dass die partielle Ableitung in $(0,0)^\top$ mit Hilfe der Definition bestimmt werden muss – warum ist das so?

5. (A) Stammfunktionen

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\,dx,\ x\in(-1,1)$ (1,5)

b) $\int\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln^2(x)}}\,dx$ (1,5)

c) $\int\sin(2x)\cos(4x)\,dx$ (1,5)

d) $\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (1,5)

Hinweis zu Teil d): Führen Sie die Substitution $x=\sinh(u)$ durch.

6. (T),(NA)

a) Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Taylor $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf einen Fehler von 10^{-4} genau.

b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von

   a) $f:(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x_1,x_2)=x_1^{x_2}$

   b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2)^\top\neq(0,0)^\top,\\ 0, & (x_1,x_2)^\top=(0,0)^\top.\end{cases}$

c) Sei $f:(0,2\pi)\to\mathbb{R},\ x\mapsto\cos(x)e^x$. Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f und überprüfen Sie, ob es sich dort um lokale Maxima oder Minima handelt.

7. (T),(NA)

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int\ln^2(x)\,dx$

b) $\int\frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$

c) $\int\arctan(3x)\,dx$

d) $\int\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.