Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Blatt 5

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ NF mit

a) $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ zB $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

(oder $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = e^{-n}$ oder ...)

b) $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ zB $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

c) $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 42$ zB $a_n = \frac{42}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 42 = 42$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ex. nicht. zB. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ $\lightning$ existiert nicht.

Aufgabe 2

a) $\overset{?}{} \; a_n \leq c \;\forall n \Rightarrow a \leq c$

Angenommen $a > c$ $\Rightarrow a - c > 0$. Da $a_n \to a$ gibt es $\forall \varepsilon > 0$ ein N mit $|a_n - a| < \varepsilon \;\forall n > N$, insbesondere auch für $\varepsilon = a - c$ $\Rightarrow |a_n - a| < a - c \;\forall n > N$

$\Leftrightarrow -(a-c) < a_n - a < a - c \;\forall n > N$

$\Rightarrow c < a_n \;\forall n > N$ $\lightning$ zu $a_n \leq c \;\forall n > N$

b) $a_n < c \;\forall n \overset{?}{\Rightarrow} a < c$

Nein, stimmt nicht. Gegenbeispiel: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Dann ist $a_n < 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$ aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ erfüllt nicht < 1.

Aufgabe 3

Recall: $a_n = O(b_n)$ falls $\left|\frac{a_n}{b_n}\right|$ beschränkt,

$a_n = o(b_n)$ falls $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to 0$,

$a_n \sim b_n$ falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

a) (i) z.z. $a_n = o(b_n) \Rightarrow a_n = O(b_n)$

Beweis $a_n = o(b_n) \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to 0 \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$ beschränkt $\Rightarrow a_n = O(b_n)$

(ii) z.z. $a_n, b_n = O(c_n) \Rightarrow a_n + b_n = O(c_n)$

Beweis $a_n, b_n = O(c_n) \Rightarrow \left|\frac{a_n}{c_n}\right|$ und $\left|\frac{b_n}{c_n}\right|$ beschränkt $\Rightarrow \left|\frac{a_n+b_n}{c_n}\right| \leq \left|\frac{a_n}{c_n}\right| + \left|\frac{b_n}{c_n}\right|$ beschränkt

also $a_n + b_n \in O(c_n)$

(iii) z.z. $a_n \sim b_n,\ b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

Beweis $a_n \sim b_n,\ b_n \sim c_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}\frac{b_n}{c_n} \overset{\text{GW Sätze}}{=} 1$,

also $a_n \sim c_n$

b) $2^{n+1} = O(2^n)$; $n^{\frac{3}{2}} + n = n\sqrt{n} + n = O(n^2)$; $\sqrt{n}\cdot \ln(n) + \frac{1}{2^n} = O(n)$;

$\frac{n^3}{\ln(n)} = O(n^3)$; $200n^2 + 53n = O(n^2)$, $n!\frac{e^n}{n^n} = O(\sqrt{n})$ (Stirling), $\ln(\ln(n)) = O(\ln(n))$

Sortierung:

$$\ln(\ln(n)) \prec n!\frac{e^n}{n^n} \prec \sqrt{n}\ln(n) + \frac{1}{2^n} \prec n\sqrt{n} + n \prec 200n^2 + 53n \prec \frac{n^3}{\ln(n)} \prec 2^{n+1}$$

Aufgabe 4

HW bestimmen

a) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

Betrachte zwei Teilfolgen:

$$a_{2n} = (-1)^{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = -\frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow{n\to\infty} -1$$

Damit hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die HW 1 und -1

b) $b_n = \dfrac{n}{3} - \lfloor \dfrac{n}{3} \rfloor$ $\qquad (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots)$

Betrachte die drei Teilfolgen

$$b_{3n} = \frac{3n}{3} - \lfloor \frac{3n}{3} \rfloor = n - \lfloor n \rfloor \overset{n\in\mathbb{N}}{=} 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$b_{3n+1} = \frac{3n+1}{3} - \lfloor \frac{3n+1}{3} \rfloor = n + \frac{1}{3} - \lfloor n + \frac{1}{3} \rfloor = n + \frac{1}{3} - n = \frac{1}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$$

$$b_{3n+2} = \frac{3n+2}{3} - \lfloor \frac{3n+2}{3} \rfloor = n + \frac{2}{3} - \lfloor n + \frac{2}{3} \rfloor = \frac{2}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}$$

Damit hat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die HW $0, \frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$

c) $c_n = \dfrac{n \cdot i^n + 1}{4n - 2}$

Beachte $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i$ usw.

Betrachte also die 4 Teilfolgen

$$a_{4n} = \frac{4n \cdot i^{4n} + 1}{16n - 2} = \frac{4n + 1}{16n - 2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}$$

$$a_{4n+1} = \frac{(4n+1) i^{4n+1} + 1}{16n + 2} = \frac{4ni + i + 1}{16n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} i$$

$$a_{4n+2} = \frac{(4n+2) i^{4n+2} + 1}{16n + 6} = \frac{-4n - 1}{16n + 6} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{1}{4}$$

$$a_{4n+3} = \frac{(4n+3) i^{4n+3} + 1}{16n + 10} = \frac{-4ni - 3i + 1}{16n + 10} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{1}{4} i$$

Damit hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die HW $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}i, -\frac{1}{4}i$

d) $d_n = (-1)^{\frac{n^2(n+1)^2}{2}} \frac{2n+1}{n}$

Bemerke, dass für $n \in \mathbb{N}$ entweder n oder $n+1$ gerade ist. Damit ist $n^2(n+1)^2$ stets durch 4 teilbar und damit $\frac{n^2(n+1)^2}{2}$ stets durch 2 teilbar, weswegen $(-1)^{\frac{n^2(n+1)^2}{2}} = 1$. Also haben wir

$$d_n = \frac{2n+1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 2,$$ also eine konvergente Folge mit nur einem HW.
(denn jede Teilfolge würde auch gegen 2 konvergieren)

Aufgabe 5

(a_n) beschr., reelle Folge. Sei $\overline{s} = \limsup a_n$, $\underline{s} = \liminf a_n$

a) z.z.: (a_n) konv $\Rightarrow \overline{s} = \underline{s}$

Beweis Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, etwa $a_n \to a$. $\Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert auch gegen a. $\Rightarrow (a_n)$ hat nur einen HW (und zwar a), weswegen $\overline{s} = \underline{s}$ $\square$

b) z.z. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \quad a_n < \overline{s} + \varepsilon \quad \forall n > N$

Beweis Angenommen es gibt ein $\varepsilon > 0$ für welches kein N existiert mit $a_n < \overline{s} + \varepsilon$. Dann wären unendlich viele Folgenglieder $a_n \geq \overline{s} + \varepsilon$. Aus diesen könnte man nun eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auswählen, die einen HW hat, etwa $a_{n_k} \to h$ (nach Bolzano Weierstraß, da auch a_{n_k} beschr.)
Dann wäre aber $h \geq \overline{s} + \varepsilon$, insbesondere $h > \overline{s}$, Widerspruch zu $\overline{s}$ größte HW $\square$

c) z.z. $\overline{s} = \underline{s} \Rightarrow (a_n)$ konvergent.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (b) und Bemerkung $\exists N \quad a_n < \overline{s} + \varepsilon$ und $a_n > \underline{s} - \varepsilon \;\; \forall n > N$
Wegen $\overline{s} = \underline{s} =: s$ haben wir

$$s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon, \quad \text{also } |a_n - s| < \varepsilon \;\; \forall n > N,$$

was gerade $\lim_{n\to\infty} a_n = s$ bedeutet. $\square$