Universität Ulm

Abgabe: Freitag, den 10.07. um 12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 11

42. Man untersuche die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz: (3)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+2k^2+1}{k^5+k-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k+2)}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^4 e^{-k^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)^2}$

43. Man zeige die folgenden Aussagen: (3)

(a) $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

(b) $\cosh x = \cosh(-x)$ und $\sinh(-x) = -\sinh x$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

(c) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ und $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$.

(d) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

44. Man zeige oder widerlege die folgenden Aussagen: (2)

(a) Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

(b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \sin(\ln(k))}{k^5}$ konvergiert, aber nicht absolut.

(c) Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.

Hinweis: Eine komplexe Zahl x heißt algebraisch, wenn sie die Nullstelle eines Polynoms vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit rationalen Koeffizienten ist. Außerdem gilt der Fundamentalsatz der Algebra: Ein komplexes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ hat mindestens eine und höchstens n verschiedene komplexe Nullstellen.

45. Man berechne den Grenzwert (2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$