

Übungen zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe: Dienstag, 31.05.2016, bis 14:15 Uhr, H22)

1. Es sei $a := 0, \overline{31}$. Bestimme mit der Dezimalbruchentwicklung $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, sodass $a = \frac{p}{q}$ gilt. (7 Punkte)

2. Zeige:

a) $\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}$ und mit $\cos(x)\cos(y)\cos(x+y) \neq 0$,

b) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy < 1$,

c) $\arctan(1) = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$ (2+4+4 Punkte)

3. Es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen. Zeige, dass

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2} (f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(5 Punkte)

4. Zeige, folgende Aussagen:

(a) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$,

(c) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

(d) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hinweis: Verwende aus Tabelle 3.1.19 nur: $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \neq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (3+3+3+3 Punkte)

5. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

b) $\sum_{k=2}^{\infty} (\log k)^{-\log k}$

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\log k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$

(3+3 Punkte)