ulm university universität **uulm**

Sommersemester 2020

Institut für Stochastik

Dr. Larisa Yaroslavtseva
Freimut von Loeper

Angewandte Stochastik 1

Musterlösung zum Übungsblatt 3

Aufgabe (1)[2+2 Punkte]

a) Eine Urne enthält acht Kugeln mit den Ziffern 1 bis 8. Wir bilden nun eine dreistellige Zahl, indem wir nacheinander drei Kugeln aus der Urne ziehen und die Ziffer jeder Kugel als Ziffer der dreistelligen Zahl verwenden. Wie viele Zahlen sind möglich, wenn wir ...

   (i) ... jede gezogene Kugel wieder zurücklegen?

   (ii) ... die gezogenen Kugeln nicht wieder zurücklegen?

b) Wir betrachten obige Situation mit dem Unterschied, dass wir die Ziffern der Kugeln nach der Ziehung der Größe nach aufsteigend ordnen. Wie viele Zahlen können Sie in den Fällen (i) und (ii) darstellen?

Lösung:

a) (i) Die Menge aller möglich Ereignisse ist

$$\Omega = \{(w_1, w_2, w_3) : w_1, w_2, w_3 \in \{1, \dots, 8\}\}.$$

Folglich gilt $|\Omega| = 8^3 = 512$.

(ii) Die Menge aller möglich Ereignisse ist

$$\Omega = \{(w_1, w_2, w_3) : w_i \in \{1, \dots, 8\} \text{ mit } w_i \neq w_j \text{ für } i \neq j\}.$$

Folglich gilt $|\Omega| = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

b) (i) Die Menge aller möglich Ereignisse ist

$$\Omega = \{(w_1, w_2, w_3) : 1 \leq w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq 8\}.$$

Folglich gilt $|\Omega| = \binom{8+3-1}{3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$.

(ii) Die Menge aller möglich Ereignisse ist

$$\Omega = \{(w_1, w_2, w_3) : 1 \leq w_1 < w_2 < w_3 \leq 8\}.$$

Folglich gilt $|\Omega| = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$.

Aufgabe (2)[2+2+2 Punkte]

Betrachten Sie die folgenden zwei Schubladen: In der ersten Schublade befinden sich 5 weiße und 4 schwarze Socken. In der zweiten Schublade befinden sich 5 weiße und 5 schwarze Socken. Da das Licht ausgefallen ist, müssen Sie blind zwei Socken ziehen. Für welche der folgenden Strategien a), b) oder c) sollten Sie sich entscheiden, wenn Sie zwei gleichfarbige Socken haben möchten? Berechnen Sie hierzu unter Angabe geeigneter Wahrscheinlichkeitsräume jeweils die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg.

a) Sie ziehen zwei Socken aus der ersten Schublade.

b) Sie ziehen zwei Socken aus der zweiten Schublade.

c) Sie ziehen aus jeder Schublade eine Socke.

Lösung:

a) Verwende den W-Raum (Ω, Σ, P) mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{0, 1, 2\}$, der σ-Algebra

$$\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$$

und der hypergeometrischer Verteilung $P = \mathbf{H}(9, 5, 2)$ als W-Maß.
Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "A_b =Genau b der k gezogenen Socken ist weiß." für $k = b = 2$

$$P(A_2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{5!}{2! \cdot 3!}}{\frac{9!}{2! \cdot 7!}} = \frac{5}{18}$$

und für $k = 2$ und $b = 0$

$$P(A_0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{4!}{2! \cdot 2!}}{\frac{9!}{2! \cdot 7!}} = \frac{3}{18}.$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Die 2 gezogenen Socken sind gleichfarbig."

$$P(A_0 \cup A_2) = P(A_0) + P(A_2) - P(\underbrace{A_0 \cap A_2}_{=\emptyset}) = \frac{5+3}{18} = \frac{4}{9}.$$

b) Verwende den W-Raum (Ω, Σ, P) mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{0, 1, 2\}$, der σ-Algebra

$$\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$$

und der hypergeometrischer Verteilung $P = \mathbf{H}(10, 5, 2)$ als W-Maß.
Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "A_b =Genau b der k gezogenen Socken ist weiß." für $k = b = 2$

$$P(A_2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{5!}{2!\cdot 3!}}{\frac{10!}{2!\cdot 8!}} = \frac{2}{9}$$

und für $k = 2$ und $b = 0$

$$P(A_0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = P(A_2) = \frac{2}{9}.$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Die 2 gezogenen Socken sind gleichfarbig."

$$P(A_0 \cup A_2) = P(A_0) + P(A_2) - P(\underbrace{A_0 \cap A_2}_{=\emptyset}) = \frac{2+2}{9} = \frac{4}{9}.$$

c) Betrachte den Laplace-Raum (Ω, Σ, P) auf

$$\Omega = \{\underbrace{1, 2, 3, 4, 5}_{\widehat{=}\text{weiß}}, \underbrace{6, 7, 8, 9}_{\widehat{=}\text{schwarz}}\} \times \{\underbrace{1, 2, 3, 4, 5}_{\widehat{=}\text{weiß}}, \underbrace{6, 7, 8, 9, 10}_{\widehat{=}\text{schwarz}}\}.$$

Das Ereignis "Sie ziehen 2 weiße Socken." ist gegeben durch

$$A := \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

und das Ereignis "Sie ziehen 2 schwarze Socken." ist gegeben durch

$$B := \{6, 7, 8, 9\} \times \{6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Dann gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\underbrace{A \cap B}_{=\emptyset}) = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5^2}{9 \cdot 10} + \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 10} = \frac{1}{2}$$

Fazit: Wegen $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ sollte Strategie c) gewählt werden.

Aufgabe (3)[2+4 Punkte]

Zur Feststellung der Anzahl $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 7$, der in einem See lebenden Fische wurden in einer Fangaktion 7 Fische auf einmal gefangen, markiert und anschließend wieder freigelassen. Nach einer gewissen Zeit werden in einer weiteren Fangaktion $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$, Fische auf einmal gefangen. Wir nehmen an, dass die Fischpopulation im See zwischen den Fangaktionen unverändert geblieben ist.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der zweiten Fangaktion genau $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min(n, 7)$, markierte Fische gefangen werden.

b) Gelte $n = 3$. Bestimmen Sie $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 7$ so, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "In der zweiten Fangaktion werden genau zwei markierte Fische gefangen" maximal ist.

Lösung:

a) Verwende die hypergeometrische Verteilung $\mathbf{H}(N, 7, n)$. Sei k eine natürliche Zahl mit $k \leq \min(n, 7)$. Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_k ="In der zweiten Fangaktion wurden genau k markierte Fische gefangen". Für $\max\{0, n - N + 7\} \leq k \leq \min\{n, 7\}$ gilt

$$P_{N,n}(A_k) = \frac{\binom{7}{k} \cdot \binom{N-7}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

und andernfalls

$$P_{N,n}(A_k) = 0.$$

b) Sei $n = 3$. Für $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 7$, setze $p_N := P_{N,3}(A_2)$ mit A_k definiert in a). Dann gilt $p_7 = 0$ und für $N \geq 8$

$$p_N = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{N-7}{3-2}}{\binom{N}{3}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{(N-7) \cdot (N-3)! \cdot 3!}{N!} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 3! \cdot \frac{N-7}{N \cdot (N-1) \cdot (N-2)} > 0.$$

Hieraus erhalten wir für $N \geq 8$

$$\frac{p_{N+1}}{p_N} = \frac{(N-6) \cdot N \cdot (N-1) \cdot (N-2)}{(N+1) \cdot N \cdot (N-1) \cdot (N-7)} = \frac{N^2 - 8N + 12}{N^2 - 6N - 7}.$$

Es gilt

$$\frac{p_{N+1}}{p_N} < 1 \iff N^2 - 8N + 12 < N^2 - 6N - 7 \iff 19 < 2N \iff 9.5 < N$$

sowie analog

$$\frac{p_{N+1}}{p_N} > 1 \iff N^2 - 8N + 12 > N^2 - 6N - 7 \iff 19 > 2N \iff 9.5 > N.$$

Hieraus erhalten wir

$$0 = p_7 < p_8 < p_9 < p_{10} > p_{11} > p_{12} > \dots$$

Also gilt

$$p_{10} = \max\{p_N \mid N \in \mathbb{N}, N \geq 7\}.$$

Aufgabe (4)[1+2+2 Punkte]

Ein Mathematik-Student, der nebenbei in einer Pizzeria arbeitet, möchte die letzten 10 Oliven auf 6 Pizzen verteilen. Hierzu verfährt er folgendermaßen: Er nummeriert die Pizzen und würfelt anschließend mit einem fairen Würfel. Die Augenzahl des Würfels bestimmt die Pizza, die eine Olive erhält. So verfährt er 10 mal.

a) Modellieren Sie dieses Zufallsexperiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Pizza genau zwei Oliven bekommt.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten beiden Pizzen insgesamt mehr als drei Oliven bekommen.

Lösung:

a) Modellierung durch Laplace-Raum mit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^{10}$.

b) Wir interpretieren den Wurf einer Eins als Erfolg und betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) mit $\Omega = \{0, 1, \dots, 10\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P = \mathbf{B}(10, 1/6)$. Für das Ereignis A ="genau 2 mal eine Eins" gilt

$$P(A) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 5^8}{2 \cdot 6^{10}} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 0.29.$$

c) Wir interpretieren den Wurf einer Eins oder Zwei als Erfolg und betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) mit $\Omega = \{0, 1, \dots, 10\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P = \mathbf{B}(10, 1/3)$. Für das Ereignis A ="mehr als 3 mal eine Eins oder Zwei" gilt

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} \approx 0.44.$$