Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 09

Abgabedatum: 20.06.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Muss eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf ganz $[a,b]$ differenzierbar sein, damit der Mittelwertsatz anwendbar ist?

(b) Ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion immer stetig?

(c) Folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit Differenzierbarkeit?

2. (A) Mittelwertsätze

a) Zeigen Sie, dass es genau ein $x \in [0, +\infty)$ gibt mit $e^x + \sqrt{x} = 3$. (2)

b) Berechnen Sie mithilfe der Mittelwertsätze:

  a) $\lim_{n\to\infty} n(1 - \cos(1/n))$ (2)

  b) $\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ für $a > 0$, $\beta \neq 0$. (2)

3. (A) Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$ (1.5)

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ (1.5)

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos(3x))}{\log(\cos(2x))}$ (1.5)

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(x) + e^x + e^{-x} - 4}{x^4}$ (1.5)

4. (A) Sinus und Kosinus Hyperbolicus

Wir haben im letzen Semester auf Blatt 9 gezeigt, dass die Funktionen sinh, cosh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

mit der Eigenschaft $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ gegeben sind.

a) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion von cosh, nämlich arcosh (Areakosinus Hyperbolicus), existiert und geben Sie größtmögliche Mengen I, J an, so dass arcosh:$I \to J$ existiert, mit $1 \in I$. (2)

b) Berechnen Sie $\operatorname{arcosh}'(x)\ \forall x \in I$. (2)

c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ für $x \geq 1$. (2)

5. (A) Lipschitz-Stetigkeit und Differenzenquotienten

Sei $a < b$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $L \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   a) $|f'(x)| \leq L\ \forall x \in (a, b)$
   b) $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\ \ \forall x, y \in (a, b)$, d.h., f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. (3)

b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|\,.$$

(1)

c) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist f zweimal stetig differenzierbar auf (a, b), so gilt für alle x_0 in (a, b):

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

(2)

6. (T),(NA)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(3x)}{\tan(5x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

7. (T),(NA)

Zeigen Sie für $x \in (-1, 1)$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k + 1}.$$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.