Analysis I für IGI

Blatt 7

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 Ableitung mit Definition

a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a > 0$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad a \neq 1$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a+h}{a+h-1} - \frac{a}{a-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)(a-1) - a(a+h-1)}{h \cdot (a-1)(a+h-1)} = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + ah - a - h - a^2 - ah + a}{h \cdot (a-1)(a+h-1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(a-1)(a+h-1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(a-1)(a+h-1)} = -\frac{1}{(a-1)^2}$$

Aufgabe 2

a) $f(x) = (3x+1)^4 \Rightarrow f'(x) = 4(3x+1)^3 3 = 12(3x+1)^3$

und $D = D' = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x \ln(x^2+1) - x \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{x^2+1} \cdot 2x + \ln(x^2+1) - 1 = \frac{2x^2}{x^2+1} + \ln(x^2+1) - 1$

und $D = D' = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sin(x)^{\cos(x)} = e^{\cos(x) \cdot \ln(\sin(x))}$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{\cos(x) \cdot \ln(\sin(x))} \cdot \left(\frac{d}{dx} \cos(x) \cdot \ln(\sin(x)) \right)$$

$$= \sin(x)^{\cos(x)} \cdot \left(-\sin(x) \cdot \ln(\sin(x)) + \cos(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) \right)$$

$$= \sin(x)^{\cos(x)} \cdot \left(-\sin(x) \ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} \right)$$

und $D = D' = (0, \pi)$ (oder jedes andere in dem $\sin(x) > 0$ gilt)

d) $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx}\, x \cdot \ln(x)\right) = x^x \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$
$$= x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

und $D = D' = (0, \infty)$

e) $f(x) = x^2 \cdot e^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{\sqrt{x}} + x^2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(2x + \frac{1}{2} x^{3/2}\right)$

und $D = D' = [0, \infty)$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1} + 1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}+1) \cdot 2x - x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2+1} + 1)^2}$$

und $D = D' = \mathbb{R}$

g) $f(x) = \dfrac{3^x}{3^{x-1}} = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$

und $D = D' = \mathbb{R}$

Aufgabe 3

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

für $x \neq 0$ ist h stetig und differenzierbar als Komposition stetiger und differenzierbarer Funktionen.

Wegen $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{beschränkt}} = 0 = h(0)$

ist h in 0 auch stetig.

Wir berechnen die Ableitung von h in 0:

$$h'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h(0+h) - h(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{beschr.}} = 0$$

Also ist h stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$h'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Wegen $h'\left(\frac{1}{\pi}\right) = 2 \cdot \sin(\pi) - \cos(\pi) = 1$ und $h\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$

ist die Gleichung der Tangente in 0 gegeben durch

$$T(x) = h'\left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{\pi}\right) + h\left(\frac{1}{\pi}\right) = x - \frac{1}{\pi}$$

Aufgabe 4

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 3x, & x \leq 2 \\ x^2 - bx, & x > 2 \end{cases}$$

für $x \neq 2$ ist f stetig und diff'bar als Polynom. Damit f in 0 diff'bar ist, muss f dort stetig sein.

$$\Rightarrow \quad f(2) = 8a + 6 \overset{!}{=} \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4 - 2b, \text{ also } \underline{8a + 6 = 4 - 2b \ (I)}$$

Außerdem müssen rechts und linksseitige Ableitung übereinstimmen:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f'(x) &= \lim_{x \to 2^-} (3ax^2 + 3) = 12a + 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f'(x) &= \lim_{x \to 2^+} (2x - b) = 4 - b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{12a + 3 = 4 - b \ (II)}$$

aus II) $\Rightarrow b = 1 - 12a \overset{\text{in I)}}{\Rightarrow} 16a = 4$

also $\underline{a = \frac{1}{4}, \ b = -2}$

Aufgabe 5

$$X(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Betrachte $f(x) = X(x)$, $g(x) = x \cdot X(x)$, $h(x) = x^2 \cdot X(x)$

Zu f: f ist laut Blatt 6, A1c in 0 nicht stetig, da der GW $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht existiert. Deswegen kann f dort nicht differenzierbar sein

Zu g: Wegen $g(0) = 0 \cdot X(0) = 0$ und $\lim_{x \to 0} x \cdot \underbrace{X(x)}_{\text{beschr.}} = 0$ ist g in 0 stetig.

Untersuche Ableitung in 0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot X(h)}{h} = \lim_{h \to 0} X(h) \text{ existiert nicht (Blatt 6, A1c)}$$

$\rightarrow$ nicht diff'bar in 0

Zu h: Wegen $h(0) = 0 = \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \underbrace{X(x)}_{\text{beschr.}} = 0$ ist h in 0 stetig.

Untersuche Ableitung in 0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(h) - h(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot X(h) = 0$$ existiert die Ableitung in 0,

h ist also stetig und diff'bar in 0.