Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 09

Lösung

1. (NA) Minifragen

(a) Muss eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf ganz $[a,b]$ differenzierbar sein, damit der Mittelwertsatz anwendbar ist?

Lösung: Nein, es reicht aus, dass f auf (a,b) differenzierbar ist.

(b) Ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion immer stetig?

Lösung: Nein, betrachte bspw. die Funktion

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ als Gegenbeispiel.

(c) Folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit Differenzierbarkeit?

Lösung: Nein, betrachte bspw. die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ als Gegenbeispiel.

2. (A) Mittelwertsätze

a) Zeigen Sie, dass es genau ein $x \in [0, +\infty)$ gibt mit $e^x + \sqrt{x} = 3$. (2)

Lösung: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x + \sqrt{x}$. Es gilt, dass f als Summe stetiger Funktionen stetig ist und

- $f(0) = 1$,
- $f(2) = e^2 + \sqrt{2} > 4$.

Nach ZWS gibt es mindestens ein $\xi \in (0,2)$ mit $f(\xi) = 3 \in (1,4)$. Betrachten wir nun die Ableitung von f, gegeben durch $f'(x) = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. f' ist somit größer als 0 für alle $x > 0$. Somit ist f streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$. Damit gibt es genau ein $\xi \in (0,2)$ mit $f(\xi) = 3 \in (1,4)$.

b) Berechnen Sie mithilfe der Mittelwertsätze:

a) $\lim_{n\to\infty} n(1 - \cos(1/n))$ (2)

Lösung: $\lim_{n\to\infty} n(1-\cos(\frac{1}{n})) = -\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\frac{1}{n}) - \cos(0)}{\frac{1}{n} - 0}$

$\underset{\xi_n \in [0, \frac{1}{n}]}{\overset{\text{1. MWS}}{=}} -\lim_{n\to\infty} \sin(\xi_n) = -\sin(\lim_{n\to\infty} \xi_n) = -\sin(0) = 0.$

b) $\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ für $a > 0$, $\beta \neq 0$. (2)

Lösung: Seien $f(x) = x^\alpha$, $g(x) = x^\beta$ jeweils mit Definitionsbereich $[0, \infty)$. Beide Funktionen sind stetig differenzierbar. Nach dem 2. MWS gibt es für jedes $x \in [0, \infty)$ ein $\xi \in (0, \infty)$ mit $a < \xi < x$ oder $x < \xi < a$ und

$$\begin{aligned} & f'(\xi)(g(x) - g(a)) = g'(\xi)(f(x) - f(a)) \\ \Leftrightarrow \quad & f'(\xi)(-1)(g(a) - g(x)) = g'(\xi)(-1)(f(a) - f(x)) \\ \Leftrightarrow \quad & f'(\xi)(g(a) - g(x)) = g'(\xi)(f(a) - f(x)). \end{aligned}$$

Außerdem gilt $g(x) \neq g(a)$ und da $\beta \neq 0$, ist $g'(\xi) = \beta\xi^{\beta-1} \neq 0$, also ist

$$\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\alpha\xi^{\alpha-1}}{\beta\xi^{\beta-1}} \to \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta} \; (x \to a),$$

da mit $x \to a$ auch $\xi \to a$.

3. (A) Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$ (1.5)

Lösung: Zunächst gilt $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Seien nun $f(x) := \sin(\pi x)$ und $g(x) := (x-1)^2$. Es gilt, dass

- $\sin(\pi x) \to 0 \, (x \to 1)$
- $(x-1)^2 \to 0 \, (x \to 1)$
- $g'(x) = 2x - 2 \neq 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Benutze L'Hospital separat auf $(\frac{1}{2}, 1)$ und $(1, \frac{3}{2})$:

- $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\pi\cos(\pi x)}{2x-2} \to \infty \, (x \to 1^-)$, denn für $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ ist $f'(x) < 0$ und $g'(x) < 0$ sowie $f'(x) \to -\pi \, (x \to 1^-)$ und $g'(x) \to 0 \, (x \to 1^-)$.
- $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\pi\cos(\pi x)}{2x-2} \to -\infty \, (x \to 1^+)$, denn für $x \in (1, \frac{3}{2})$ ist $f'(x) < 0$ und $g'(x) > 0$ sowie $f'(x) \to -\pi \, (x \to 1^+)$ und $g'(x) \to 0 \, (x \to 1^+)$.

Nach L'hospital gilt dann $\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty \, (x \to 1^-)$ und $\frac{f(x)}{g(x)} \to -\infty \, (x \to 1^+)$. Somit existiert der gesuchte Grenzwert nicht.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} \right)$ (1.5)

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} \ldots)^2}{x^2 \sin^2(x)} \\ &= \frac{x^2 - (x^2 - \frac{2x^4}{6} + \ldots)}{x^2 \sin^2(x)} = \frac{\frac{1}{3}x^4 + \ldots}{x^2 \sin^2(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}x^2 + \ldots}{\sin^2(x)} = \frac{\frac{1}{3} + \ldots}{\left(\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{3} + \ldots}{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2} \to \frac{1}{3} \; (x \to 0) \end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(\cos(3x))}{\log(\cos(2x))}$ (1.5)

Lösung: Seien $f(x) = \log(\cos(3x))$ und $g(x) = \log(\cos(2x))$, dann gilt:

- $f(x) \to 0 \, (x \to 0)$
- $g(x) \to 0 \, (x \to 0)$
- $g'(x) = \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)} \neq 0$ auf $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \setminus \{0\}$

Wende L'Hospital an:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\frac{1}{\cos(3x)} \cdot 3 \cdot \sin(3x)}{-\frac{1}{\cos(2x)} \cdot 2 \cdot \sin(2x)} = \underbrace{\frac{\cos(2x)}{\cos(3x)}}_{\to 1 \, (x \to 0)} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$$

Wende L'Hospital auf $\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ an, denn $\sin(3x) \to 0 \, (x \to 0)$ und $\sin(2x) \to 0 \, (x \to 0)$. Außerdem gilt $(\sin(2x))' = 2\cos(2x) \neq 0$ für $x \in (-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$. Wir erhalten

$$\frac{(\sin(3x))'}{(\sin(2x))'} = \frac{3\cos(3x)}{2\cos(2x)} \to \frac{3}{2} \, (x \to 0)$$

$\overset{\text{L'Hospital}}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \overset{\text{L'Hospital}}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{9}{4}$.

d) $$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos(x) + e^x + e^{-x} - 4}{x^4} \tag{1.5}$$

Lösung: Seien $f(x) = 2\cos(x) + e^x + e^{-x} - 4$ und $g(x) = x^4$, dann gilt:

- $f(x) \to 0 \, (x \to 0)$
- $g(x) \to 0 \, (x \to 0)$
- $g'(x) = 4x^3 \neq 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Wende L'Hospital an:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\overbrace{-2\sin(x) + e^x - e^{-x}}^{=f'(x)}}{\underbrace{4x^3}_{=g'(x)}}$$

Da $f'(x) \to 0 \, (x \to 0), g'(x) \to 0 \, (x \to 0)$ und $g''(x) = 12x^2 \neq 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wende L'Hospital ein weiteres Mal an:

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\overbrace{-2\cos(x) + e^x + e^{-x}}^{=f''(x)}}{\underbrace{12x^2}_{=g''(x)}}$$

Da $f''(x) \to 0 \, (x \to 0), g''(x) \to 0 \, (x \to 0)$ und $g'''(x) = 24x \neq 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wende L'Hospital ein weiteres Mal an:

$$\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{\overbrace{2\sin(x) + e^x - e^{-x}}^{=f'''(x)}}{\underbrace{24x}_{=g'''(x)}}$$

Da $f'''(x) \to 0 \, (x \to 0), g'''(x) \to 0 \, (x \to 0)$ und $g''''(x) = 24 \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$, wende L'Hospital ein weiteres Mal an:

$$\frac{f''''(x)}{g''''(x)} = \frac{2\cos(x) + e^x + e^{-x}}{24} \to \frac{1}{6} \, (x \to 0)$$

$\overset{\text{L'Hospital}}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{f''''(x)}{g''''(x)} = \frac{1}{6} \overset{\text{L'Hospital}}{\Rightarrow} \dots \overset{\text{L'Hospital}}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{6}$.

4. (A) Sinus und Kosinus Hyperbolicus

Wir haben im letzen Semester auf Blatt 9 gezeigt, dass die Funktionen sinh, cosh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

mit der Eigenschaft $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ gegeben sind.

a) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion von cosh, nämlich arcosh (Areakosinus Hyperbolicus), existiert und geben Sie größtmögliche Mengen I, J an, so dass arcosh:$I \to J$ existiert, mit $1 \in I$. (2)

Lösung: Wir bestimmen das größtmögliche Intervall, auf dem cosh bijektiv ist. Da für $x, y \in [0, \infty)$ mit $x < y$ gilt, dass

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \cosh(y),$$

ist cosh auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend. Da außerdem für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\cosh(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x),$$

ist cosh symmetrisch bzgl. der y-Achse. Es folgt, dass cosh streng onoton fallend auf $(-\infty, 0]$ ist. Wir beschränken uns nun auf das Intervall $[0, \infty)$. cosh ist als Summe und Produkt stetiger Funktionen stetig und es gilt, dass $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \infty$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt, dass für alle $y \in [1, \infty)$ ein eindeutiges $x \in [0, \infty)$ ex. mit $\cosh(x) = y$. Die Eindeutigkeit folgt dabei aus der strengen Montonie von cosh auf $[0, \infty)$. Insgesamt ist also cosh bijektiv auf $[0, \infty)$ und $\operatorname{arcosh}\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ existiert.

b) Berechnen Sie $\operatorname{arcosh}'(x) \ \forall x \in I$. (2)

Lösung: Zunächst gilt, dass

$$\cosh'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$$

und somit ist $\cosh'(x) > 0$ für alle $x > 0$. Mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist arcosh in $y = \cosh(x)$ differenzierbar und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\operatorname{arcosh}(y) &= \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arcosh}(y))} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(y))} \\ &= \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \end{aligned}$$

für $y > 1$. Für $y = 1$ ex. die Ableitung nicht.

c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ für $x \geq 1$. (2)

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2-1}) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \overset{\text{b)}}{=} \operatorname{arcosh}'(x).\end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz (11.2.9) gibt es eine Konstante c mit $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x+\sqrt{x^2-1}) + c$. Da $\cosh(0) = 1$ und damit $\operatorname{arcosh}(1) = 0$, und $\log(1+\sqrt{1^2-1}) = 0$, ist $c = 0$ und damit gilt

$$\operatorname{arcosh}(x) = \log(x+\sqrt{x^2-1}) \quad \forall x \geq 1.$$

5. (A) Lipschitz-Stetigkeit und Differenzenquotienten

Sei $a < b$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $L \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   a) $|f'(x)| \leq L \ \forall x \in (a,b)$

   b) $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \ \ \forall x,y \in (a,b)$, d.h., f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. (3)

Lösung: a) $\Rightarrow$ b): Wir nehmen an, dass $|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in (a,b)$. Seien $x,y \in (a,b)$, oBdA $x < y$. Dann ist die Einschränkung $f\colon [x,y] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (x,y). Nach dem 1. MWS gibt es ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |f'(\xi)(x-y)|\\ &= |f'(\xi)| \cdot |x-y|\\ &\leq L|x-y|.\end{aligned}$$

b) $\Rightarrow$ a): Sei $x_0 \in (a,b)$ beliebig und $x \in (a,b)$ mit $x \neq x_0$. Nach Annahme gilt, dass

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq L.$$

Da f differenzierbar ist in x_0 und die Betragsfunktion stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}L &\geq \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\\ &= \left|\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\\ &= |f'(x_0)|.\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|\,.$$

(1)

Lösung: Es gilt, dass $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass sin die Aussage 5 a) a) für $L = 1$ erfüllt und somit auch die Aussage 5 a) b) für $L = 1$ erfüllt.

c) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist f zweimal stetig differenzierbar auf (a, b), so gilt für alle x_0 in (a, b):

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

(2)

Lösung: Die Aussage stimmt, denn es gilt

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0) - f'(x_0 - h)}{h} \\ &\overset{\text{Def.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0)}{h_1} - \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x_0 - h + h_2) - f(x_0 - h)}{h_2} \right) = * \end{aligned}$$

Da f stetig differenzierbar ist, ex. die Limites in der großen Klammer und können zusammengefasst werden:

$$* = \lim_{h \to 0} \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0) - f(x_0 - h + h_1) + f(x_0 - h)}{h \cdot h_1}$$

Da f zweimal stetig differnzierbar ist, ex. beide Limites und lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$* = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2}$$

6. (T),(NA)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(3x)}{\tan(5x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

7. (T),(NA)

Zeigen Sie für $x \in (-1, 1)$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.