Universität Ulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2019

Übungen Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker: Blatt 12

57. Wir betrachten für $x > 0$ die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

(a) Zeige, dass das Integral für alle $x > 0$ (absolut) konvergiert.

(b) Zeige, dass

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0,$$

und dass insbesondere für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\Gamma(n+1) = n!$ gilt.

(c) Berechne mithilfe der Gammafunktion das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Hinweis: a) Betrachte $\int_0^1$ und $\int_1^\infty$ getrennt und schätze die Integranden durch Potenzen von t ab, welche auf den jeweiligen Teilintervallen integrierbar sind (vgl. Satz 5.6.6). Für $\int_1^\infty$ fixiere ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > x$ und benutze, dass $\frac{t^m}{m!} \leq e^t$ fü $t \geq 0$. c) Ohne Beweis, darf benutzt werden, dass $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Zeige zunächst, dass für gerade Funktionen $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-a}^a f(x)\, \mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x.$$

58. Man berechne die Werte der folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2}\, \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$

Hinweis: c) Betrachte $\int_0^1$ und benutze die Substitution $x = 1/u$, um zu zeigen, dass $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = -\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$. Hierbei darf ohne Beweis benutzt werden, dass $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\, \mathrm{d}x$.

59. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Existiert der Cauchysche Hauptwert von $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$, so schreibt man dafür auch $VP \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ (französisch: valeur principal). Man berechne die folgenden Cauchyschen Hauptwerte:

a) $\displaystyle VP\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle VP\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle VP\int_{-1}^1 \frac{1}{x(6+x-x^2)}\, \mathrm{d}x.$

Hinweis: b) Bringe mithilfe der Additionstheoreme $\sin x$ auf die Form $\sin x = 2\tan(x/2)\cos^2(x/2)$ und substituiere anschließend $u = \tan(x/2)$, c) Partialbruchzerlegung.