ulm university universität ulm

Sommersemester 2020

Institut für Stochastik

Dr. Larisa Yaroslavtseva
Freimut von Loeper

Angewandte Stochastik 1

Musterlösung zum Extraübungsblatt

Aufgabe 1
Für $c \in \mathbb{R}$ betrachten Sie die Funktion $f_c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_c(x,y) = \begin{cases} c \cdot e^{-\frac{1}{3}(2x+4y)}, & \text{falls } x, y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f_c genau dann eine Dichte ist, wenn $c = 8/9$ gilt.

(b) Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit Dichte $f_{8/9}$. Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.

(c) Sind X und Y unabhängig?

Lösung:

(a) Es gilt $f_c(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ genau dann wenn $c \geq 0$ ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_c(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^\infty\int_0^\infty c\cdot e^{-\frac{1}{3}(2x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{2}{3}x}\mathrm{d}x e^{-\frac{4}{3}y}\mathrm{d}y\\ &= c\int_0^\infty -\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x}\big|_0^\infty e^{-\frac{4}{3}y}\mathrm{d}y = c\int_0^\infty -\frac{3}{2}\cdot(-1)\cdot e^{-\frac{4}{3}y}\mathrm{d}y\\ &= \frac{3}{2}c\int_0^\infty e^{-\frac{4}{3}y}\mathrm{d}y = \frac{3}{2}c\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)e^{-\frac{4}{3}y}\big|_0^\infty = \frac{9}{8}c.\end{aligned}$$

Folglich ist $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_c(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$ genau dann wenn $c = \frac{8}{9}$ gilt. Damit haben wir bewiesen, dass f_c eine Dichte genau dann ist, wenn $c = \frac{8}{9}$ ist.

(b) Seien p_X und p_Y die Randdichten von X bzw. Y. Für $x, y \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}p_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{8/9}(x,y)\mathrm{d}y = \frac{8}{9}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}(2x+4y)}\mathrm{d}y = \frac{8}{9}e^{-\frac{2}{3}x}\int_0^\infty e^{-\frac{4}{3}y}\mathrm{d}y\\ &= \frac{8}{9}e^{-\frac{2}{3}x}\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{-\frac{4}{3}y}\big|_0^\infty = \frac{8}{9}e^{-\frac{2}{3}x}\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(0-1) = \frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}p_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{8/9}(x,y)\mathrm{d}x = \frac{8}{9}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}(2x+4y)}\mathrm{d}x = \frac{8}{9}e^{-\frac{4}{3}y}\int_0^\infty e^{-\frac{2}{3}x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{8}{9}e^{-\frac{4}{3}y}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot e^{-\frac{2}{3}x}\big|_0^\infty = \frac{8}{9}e^{-\frac{4}{3}y}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(0-1) = \frac{4}{3}e^{-\frac{4}{3}y}.\end{aligned}$$

Sonst ist

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{8/9}(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} 0\mathrm{d}y = 0$$

und

$$p_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{8/9}(x,y)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} 0\mathrm{d}x = 0.$$

Wir erhalten

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{3}e^{-\frac{4}{3}y} & \text{if } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) X und Y sind unabhängig, da die gemeinsame Dichte p von X und Y gemäß b)

$$p(x,y) = f_{8/9}(x,y) = 8/9 \cdot e^{-\frac{1}{3}(2x+4y)} = \frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x} \cdot \frac{4}{3}e^{-\frac{4}{3}y} = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

für $x, y \geq 0$ ist und sonst

$$p(x,y) = f_{8/9}(x,y) = 0 = 0 \cdot 0 = p_X(x) \cdot p_Y(y).$$

Aufgabe 2

(a) Sei X eine Zufallsvariable mit

$$P(\{X=-2\}) = \frac{1}{10}, \quad P(\{X=-1\}) = \frac{1}{10}, \quad P(\{X=0\}) = \frac{2}{15},$$
$$P(\{X=2\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{X=4\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{X=9\}) = \frac{1}{3}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$.

(b) Sei X eine Zufallsvariable mit

$$P(\{X=k\}) = \frac{4}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$.

Lösung:

(a) Für den Erwartungswert gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) =&(-2)\cdot P(\{X=-2\}) + (-1)\cdot P(\{X=-1\}) + 0\cdot P(\{X=0\})\\ &+ 2\cdot P(\{X=2\}) + 4\cdot P(\{X=4\}) + 9\cdot P(\{X=9\})\\ =&(-2)\cdot\frac{1}{10} + (-1)\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{3} = 3{,}7.\end{aligned}$$

(b) Für den Erwartungswert gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) =& \sum_{k\in\mathbb{N}} kP(\{X=k\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\frac{4}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{4}{(k+1)\cdot(k+2)}\\ =&4\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = \frac{4}{2} = 2.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Sei $X \sim P(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda$.

(b) Sei $X \sim Exp(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{E}(X^2) = 2/\lambda^2$.

(c) Sei $X \sim Exp(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Bestimmen Sie

$$\mathbb{E}(2X+4), \quad \mathbb{E}(e^{-X}), \quad \mathbb{E}(\max(X, 1/3)).$$

Lösung:

(a) Aus dem Transformationssatz erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right)\\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!} + e^{-\lambda}\lambda\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}\\ &= e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda.\end{aligned}$$

(b) Aus dem Transformationssatz erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -x^2e^{-\lambda x}|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -2xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 0 + \int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{-2}{\lambda}xe^{-\lambda x}|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{-2}{\lambda}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{-2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}|_0^{\infty} = \frac{-2}{\lambda^2}(0-1) = \frac{2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

(c) Aus der Linearität des Erwartungswertes mit Bsp. 4.1.5 folgt:

$$\mathbb{E}(2X+4) = 2\mathbb{E}(X) + 4 = \frac{2}{\lambda} + 4.$$

Mit dem Transformationssatz erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-X}) &= \int_0^{\infty} e^{-x}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+1)x}\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda+1}\int_0^{\infty}(\lambda+1)e^{-(\lambda+1)x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{(\lambda+1)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\max\left(X, \frac{1}{3}\right)\right) &= \int_0^{\infty}\max\left(x, \frac{1}{3}\right)\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{\infty}\lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\lambda}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}|_0^{\frac{1}{3}} - xe^{-\lambda x}|_{\frac{1}{3}}^{\infty} + \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{3}\cdot(e^{-\frac{\lambda}{3}} - 1) + \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{\lambda}{3}} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}|_{\frac{1}{3}}^{\infty} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{3}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Sei $X \sim U(\{1,\ldots,5\})$. Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(X)$.

(b) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$p(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$ und seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Bestimmen Sie

$\mathbb{E}(X_1+X_2)$, $\mathbb{E}(2X_1-3X_2+1)$, $\mathrm{Var}(4X_1+5)$, $\mathrm{Var}(X_1+X_2)$, $\mathrm{Var}(X_1-X_2)$.

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Zufallsvariablen X_1 und $-X_2$ unabhängig sind.

Lösung:

(a) Aus $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{5} \cdot \left((1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2\right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot (4+1+0+1+4) = 2. \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) =& \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x \mathrm{d}x - \left(\int_0^1 x \cdot 2x \mathrm{d}x\right)^2 = \frac{2}{4} x^4 \Big|_0^1 - \left(\frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1\right)^2 \\ =& \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1 + X_2) &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \mu_1 + \mu_2 \\ \mathbb{E}(2X_1 - 3X_2 + 1) &= 2\mathbb{E}(X_1) - 3\mathbb{E}(X_2) + 1 = 2\mu_1 - 3\mu_2 + 1 \\ \mathrm{Var}(4X_1 + 5) &= 4^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) = 16\sigma_1^2 \\ \mathrm{Var}(X_1 + X_2) &= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ \mathrm{Var}(X_1 - X_2) &= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(-X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + (-1)^2 \cdot \mathrm{Var}(X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \end{aligned}$$