Lösungsvorschlag Blatt 6

1) wo stetig?

$f_1(x) = \begin{cases} x & , x<0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$ Für $x \neq 0$ ist f_1 stetig als Polynom

Wegen $\lim_{x \to 0^-} f_1(x) = 0 \neq -1 = \lim_{x \to 0^+} f_1(x)$

ist f_1 in $x=0$ unstetig $\Rightarrow f_1$ stetig $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f_2(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ Für $x \neq 0$ ist f_2 stetig als Komposition/Produkt

stetiger Funktionen. Wegen $\lim_{x \to 0} f_2(x) = 0$ (wegen $\cos(\frac{1}{x})$ beschränkt)

und $f_2(0) = 0$ ist f_2 auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

$f_3(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $x \in (z, z+1)$

$\Rightarrow \lfloor x \rfloor = z$, $f_3(x) = z + (x-z)^2$, stetig da Polynom.

$\Rightarrow f_3$ stetig auf $\bigcup_{z \in \mathbb{Z}} (z, z+1) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Zeige noch, dass f_3 stetig auf $\mathbb{Z}$:

$\lim_{x \to z^+} f_3(x) = \lim_{x \to z} (z + (x-z)^2) = z$ $\Rightarrow f_3$ stetig $\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f_3$ stetig auf $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ e^{bx} & x > 0 \end{cases}$ f ist für $x \neq 0$ stetig als Polynom / Exponentialfunktion $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Damit f in 0 stetig ist, muss

$f(0) = b = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{bx} = 1$ gelten $\Rightarrow b = 1$

Damit $f(-7) = 13$ gilt, muss $a(-7) + 1 = -13 \Leftrightarrow a = 2$

2) $f: [a,b] \to [a,b]$ stetig, z.z.: $\exists x^* \in [a,b]: f(x^*) = x^*$

Ist $f(a) = a$ oder $f(b) = b$ ist die Aussage gezeigt. Sei also $f(a) > a$,

$f(b) < b$. Betrachte $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$

$\Rightarrow g(a) = f(a) - a > 0$, $g(b) = f(b) - b < 0$

g stetig $\underset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists x^* \in [a,b]: g(x^*) = 0 \Leftrightarrow f(x^*) - x^* = 0$

$\Leftrightarrow f(x^*) = x^*$ □

3) a) z.z.: $\exists x \in \mathbb{R}: e^{-x} + \cos(7x+1) - 3x^2 + x^3 + xe^{x^2} = 0$

Betrachte die Funktion f mit $f(x) = e^{-x} + \cos(7x+1) - 3x^2 + x^3 + xe^{x^2}$

Es gilt: $f(0) = e^0 + \cos(1) > 0$,

$f(-1) = e^1 + \cos(-6) - 3 - 1 - e^1 = \cos(-6) - 4 < 0$

f ist als Komposition / Summe / Produkt stetiger Fkt stetig

$\Rightarrow \exists x \in [-1, 0]: f(x) = 0$ □

3) b) z.z.: Es ex. unendlich viele $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Betrachte ~~für~~ f mit $f(x) = \frac{\sin(x)(x^2+1)}{2x} - 1$

Es fällt auf: Für große x geht $\frac{x^2+1}{2x} - 1$ gegen ∞, während $\sin(x)$ zwischen 1 und −1 schwankt. $\Rightarrow$ f(x) alterniert zwischen immer betragsmäßig größer werdenden positiven und negativen Werten.

Zudem ist f ~~als~~ für $x > 0$ stetig. $\Rightarrow$ ~~Es~~

Nach ZWS lassen sich also ∞ viele Intervalle $[a,b]$ finden, s.d.

$\exists x \in [a,b] : f(x) = 0$ $\Rightarrow$ ~~die~~ obige Gleichung hat ∞ viele Lsg in $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^2 - 2$

Es gilt: $f(1) = -1$, $f(2) = 2$, $f\left(\frac{1+2}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{8}{4} = ~~1~~ - \frac{7}{4} < 0$

$\Rightarrow [a_1, b_1] = [\frac{1}{2}, 2]$

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$, $f(2) = 2$.

$f\left(\frac{\frac{1}{2}+2}{2}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16} - \frac{32}{16} = -\frac{7}{16} < 0$

$\Rightarrow [a_2, b_2] = [\frac{5}{4}, 2]$

$f(\frac{5}{4}) = -\frac{7}{16}$, $f(2) = 2$

$f\left(\frac{\frac{5}{4}+2}{2}\right) = f\left(\frac{13}{8}\right) = \frac{169}{64} - \frac{128}{64} = \frac{41}{64} > 0$

$\Rightarrow [a_3, b_3] = [\frac{5}{4}, \frac{13}{8}] = [1{,}25, 1{,}625]$ $\Rightarrow \sqrt{2} \in [1{,}25, 1{,}625]$

4)

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $a > 0$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Wegen $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ ist f bei 0 rechtsseitig stetig

Wegen $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$ ist f bei 0 nicht diff.-bar.

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $a \neq 1$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a+h}{a+h-1} - \frac{a}{a-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)(a-1) - a(a+h-1)}{h(a-1)(a+h-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + ah - a - h - a^2 - ah + a}{h(a-1)(a+h-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(a-1)(a+h-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(a-1)(a+h-1)} = -\frac{1}{(a-1)^2}$$