Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
SoSe 2021

20 Punkte

Übungen zu: Analysis 1 für Informatik Blatt 13

Hinweise zur Abgabe

Abgabetermin: 26.07.21, 14:00 Uhr
Abgabeformat: Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!
Sonstiges: Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an.

Aufgaben

1. Wir betrachten die Gamma Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \tag{1}$$

für alle $x > 0$.

i) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral in der Definitionsgleichung (1) von Γ in der Tat für jedes $x > 0$ konvergiert. (6)

ii) Zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ die Funktionalgleichung (4)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

gilt.

2. i) Bestimmen Sie alle Kombinationen von $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\, dx$ konvergiert. (5)

ii) Bestimmen Sie alle $\mu > 0$, sodass (5)

$$\sum_{k=4}^\infty \frac{\ln(\ln(k))^{-\mu}}{k \ln(k)}$$

konvergiert.

3. Bestimmen Sie Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme auf den jeweils gegebenen Intervallen:

i) $ty'(t) + 2y(t) = t^2 - t + 1, y(1) = \frac{1}{2}$ und $t \geq 1$. (2)

ii) $y'(x) + \frac{4}{x} y(x) = x^3 y(x)^2, y(2) = -1$ und $x > 0$. (4)

iii) $y'(x) = 5y(x) + e^{-2x} y(x)^{-2}, y(0) = 2$ und $x > 0$. (4)

4. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, sodass

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \text{ und } f(x) \geq c > 0$$

für ein $c > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$y'(x) = -f(x)y(x) + g(x).$$

Zeigen Sie anhand der Lösungsformel (8)

$$y(x) = \exp\left(-\int_\xi^x f(t)\,dt\right)\eta + \int_\xi^x \exp\left(-\int_t^x f(s)\,ds\right) g(t)\,dt,$$

dass für jede Wahl von $(\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stets

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$$

gilt.