Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 14. Mai 2021, Abgabe: 13. Mai

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 2

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 14. Mai um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 13. Mai um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Gebt die Lösungen nach Möglichkeit bitte in Gruppen von zwei oder drei Personen ab, pro Gruppe soll nur eine Person die Lösung hochladen. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Musterlösungen

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\Omega = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \cap \Omega$ und $P(A) = |A|/c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichnet $|A|$ in diesem Fall die Fläche von A, z.B. $|[0, 0.5] \times [0.2, 0.7]| = (0.5 - 0)(0.7 - 0.2) = 0.25$.

(a) Zeige, dass $c = |\Omega|$ gelten muss, damit P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und gib den Wert von c an. Welche Eigenschaft eines Wahrscheinlichkeitsmaßes aus Definition 2.2.1 ist hierfür entscheidend?

Lösung:
Hier ist die Normiertheit entscheidend.

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow c = |\Omega| = 4$$

Skizziere die Menge Ω und zeichne folgende Teilmengen ein. Berechne außerdem ihre Wahrscheinlichkeiten.

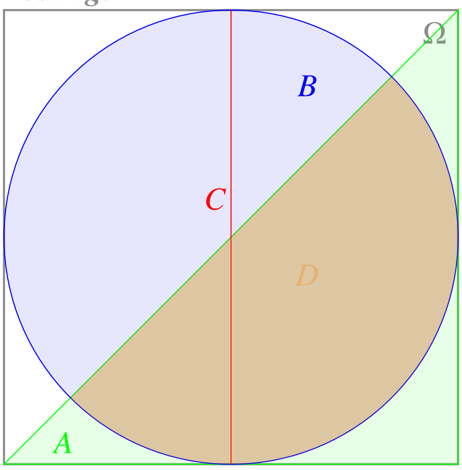
(b) $A = \{(x, y) \in \Omega, x > y\}$

(c) $B = \{(x, y) \in \Omega, x^2 + y^2 \leq 1\}$

(d) $C = \{(x, y) \in \Omega, x = 0\}$

(e) $D = A \cap B$

Lösung:



Und es ist $P(A) = 0.5$, $P(B) = \pi/|\Omega| = \pi/4$, $P(C) = 0$, $P(D) = P(B)/2 = \pi/8$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Binokel ist ein schwäbisches Kartenspiel, das mit einem doppelten württembergischen Blatt, also $2 \times 24 = 48$ Karten gespielt wird. Die Karten verteilen sich auf 4 Farben (hier genannt: Kreuz, Schippen, Herz, Schellen) zu jeweils 12 Karten (2× Ass, 2× Zehn, 2× König, 2× Ober, 2× Unter, 2× Sieben). Jede dieser Karten kommt im Deck doppelt vor. Beim Spiel zu dritt werden an jede/n Spieler/in 14 Karten verteilt, die letzten 6 Karten verbleiben im sogenannten *Dapp*.

Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

(a) Spieler A hat einen *doppelten Binokel* auf der Hand, also beide Schippen Ober und beide Schellen Unter.

Lösung:
Spieler A zieh 14 *von* 48 *Karten. Das Ereignis tritt ein, wenn er* 4 *bestimmt Karten bekommt. Wir können so tun, als ob alle Karten "weiß" wären und nur die beiden Schippen Ober und die beiden Schellen Unter "schwarz". Das funktioniert, da es keine weiteren Schippen Ober / Schellen Unter gibt. Also ist es hier ein klassisches Urnenmodell "Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen" bzw. die hypergeoemetrische Verteilung mit* 44 *"weißen Kugeln" und* 4 *"schwarzen Kugeln". Das Ereignis ist dann, dass unter* 14 *gezogenen Kugeln* 4 *schwarze sind und die Wahrscheinlichkeit ist*

$$P(\textit{doppelter Binokel}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{44}{10}}{\binom{48}{14}} = 0.005144414\,.$$

(b) Spieler B hat mindestens einen *Dis*, also eine Sieben in der Trumpffarbe, auf der Hand. Die Trumpffarbe sei hierfür Herz.

Lösung:
Hierfür stellen wir uns vor, alle Karten seien weiße Kugeln, außer die beiden Dis, die schwarze Kugeln seien. Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B keinen *Dis zieht ist dann*

$$P(\textit{kein Dis}) = \frac{\binom{2}{0}\binom{46}{14}}{\binom{48}{14}} = 0.4973404\,.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann

$$P(\textit{mind 1 Dis}) = 1 - 0.08067376 = 0.9193262$$

(c) Spieler C hat genau 5 Karten in Kreuz auf der Hand.

Lösung:

Alle Kreuz Karten seien "schwarze Kugeln", der Rest "weiße Kugeln". Dann ist

$$P(exakt\ 5\ Kreuz) = \frac{\binom{12}{5}\binom{36}{9}}{\binom{48}{14}} = 0.154589$$

(d) Im Dapp liegen nur Zehner.

Lösung:
Zehner = schwarze Kugeln, Rest = weiße Kugeln. Im Dapp liegen gesamt 6 *Karten.*

$$P(im\ Dapp\ liegen\ nur\ Zehner) = \frac{\binom{8}{6}\binom{40}{0}}{\binom{48}{6}} = 2.281707e - 06$$

Hinweis: Für die Teilaufgaben kann es nützlich sein, das verwendete Urnenmodell jeweils unterschiedlich zu formulieren.

Bonusaufgabe ohne Punkte: Welche Regeln oder Bezeichnungen kennst du anders? Wir können das gerne nach der Übung diskutieren ;)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

In einer Urne befinden sich 26 Kugeln, die mit den Buchstaben des Alphabetes (21 Konsonanten, 5 Vokale) beschriftet sind. Von diesen werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass als erster Buchstabe ein Vokal gezogen wird.

Lösung:
$P(\ldots) = 5/26.$

(b) Stelle einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf, wenn die Reihenfolge des Ziehens nicht beachtet werden soll.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(x_1, \ldots, x_6) : x_i \in \{A, \ldots, Z\}, x_1 < \ldots < x_6\} \\
\mathcal{F} &= \mathcal{P}(\Omega) \\
P(\omega) &= \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall \omega \in \Omega
\end{aligned}$$

mit $|\Omega| = \binom{26}{6} = 230230$. *Hier bezeichnet < die lexikographische Reihenfolge. Das ist "Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen".*

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(c) höchstens drei Vokale gezogen werden,

Lösung:

$P(\ldots) = P(\textit{kein Vokal}) + P(\textit{genau ein Vokal}) + P(\textit{genau zwei Vokale}) + P(\textit{genau drei Vokale})$

Wir verwenden hier die hypergeometrische Verteilung:

$$P(\textit{Unter den 6 Buchstaben sind genau i Vokale}) = \frac{\binom{5}{i}\binom{21}{6-i}}{\binom{26}{6}}$$

Damit folgt

$$P(\ldots) = 0.9953481$$

(d) aus den gezogenen Buchstaben das Wort "PHYSIK" gelegt werden kann.

Lösung:
Es gibt genau ein Elementarereignis, sodass dieses Wort gelegt werden kann: $\omega = (H, I, K, P, S, Y)$. *Also ist* $P(\ldots) = 1/230230$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sensitivität und Spezifität eines PCR-Tests auf SARS-CoV-2 können über folgenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ beschrieben werden:

$$\Omega = \{\text{gesund}, \text{erkrankt}\} \times \{\text{negativ}, \text{positiv}\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

und ein Wahrscheinlichkeitsmaß P. Ein Elementarereignis $\omega = (x, y)$ gibt in der ersten Komponente (x) an, ob eine Person tatsächlich mit SARS-CoV-2 infiziert ("erkrankt") ist und in der zweiten Komponente (y), ob diese Person ein positives oder negatives Testergebnis bekommt.

Formuliere folgende Ereignisse als Menge von Elementarereignissen:

(a) Ω, also gib alle Elementarereignisse an.

Lösung:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ mit $\omega_1 = (gesund, negativ)$, $\omega_2 = (gesund, positiv)$, $\omega_3 = (krank, negativ)$, $\omega_4 = (krank, positiv)$.

(b) A = "Eine Person ist erkrankt"

Lösung:
$A = \{\omega_3, \omega_4\}$

(c) B = "Eine Person wird positiv getestet"

Lösung:
$B = \{\omega_1, \omega_3\}$

(d) C = "Eine Person ist erkrankt und wird positiv getestet"

Lösung:
$C = \{\omega_4\}$

(e) D = "Eine Person ist gesund und wird negativ getestet"

Lösung:
$D = \{\omega_1\}$

Nimm an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person erkrankt ist, bei $P(A) = 0.02$ liegt und auch $P(B) = 0.03$. Nimm außerdem an, dass eine Person mit $P(C \cup D) = 0.988$ ein korrektes Testergebnis erhält.

Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, das diese drei Werte als Ausdruck der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse darstellt. Um die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse eindeutig zu bestimmen, musst du eine weitere Gleichung hinzufügen, siehe Aufgabe 1 a). Berechne damit die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.

Lösung:
Wir benötigen hier die Normiertheit des Wahrscheinlichkeitsmaßes, also die erste der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) + P(\{\omega_4\}) &= 1 \\ P(\{\omega_3\}) + P(\{\omega_4\}) &= 0.02 \\ P(\{\omega_2\}) + \qquad\qquad P(\{\omega_4\}) &= 0.03 \\ P(\{\omega_1\}) + \qquad\qquad\qquad\qquad P(\{\omega_4\}) &= 0.988 \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch aufsummieren von Gleichungen 2-4 und abziehen von Gleichung 1: $P(\{\omega_4\}) = (0.988 + 0.03 + 0.02 - 1)/2 = 0.019$ *und weiter* $P(\{\omega_1\}) = 0.969$, $P(\{\omega_2\}) = 0.011$ *und* $P(\{\omega_3\}) = 0.001$.