Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Skalarprodukte und Abstände

Bilinearform

Definition 8.1.4: Bilinearform

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, dann ist eine *Bilinearform* auf $V \times W$ eine Abbildung

$$B : V \times W \to \mathbb{K}, \; (v, w) \mapsto B(v, w),$$

die für jedes feste $v \in V$ beziehungsweise jedes feste $w \in W$ eine

Linearform auf W beziehungsweise V ist. Das heißt, für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und alle $w, w_1, w_2 \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(B1) $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$,

(B2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$,

(B3) $B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$,

(B4) $B(v, \lambda w) = \lambda B(v, w)$.

Definitheit

Definition 8.1.11: Symmetrie, Definitheit, Skalarprodukt

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann heißt eine Bilinearform B auf $V \times V$

(i) *symmetrisch*, falls für alle $v, w \in V$ $B(v, w) = B(w, v)$ gilt.

(ii) *positiv definit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{0\} (B(v, v) > 0)$.

(iii) *negativ definit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{0\} (B(v, v) < 0)$.

(iv) *positiv* beziehungsweise *negativ semidefinit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{0\} (B(v, v) \geq 0)$ beziehungsweise ≤ 0.

(v) *indefinit*, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und B weder positiv noch negativ semidefinit ist.

(vi) ein *Skalarprodukt*, falls B positiv definit und symmetrisch ist.

Skalarprodukt

Zeige: ... ist ein Skalarprodukt

Was muss ich zeigen?

- ... ist eine Bilinearform, insbesondere wohldefiniert
- ... ist positiv definit
- ... ist symmetrisch

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Zu zeigen: **1. Bilinearform**:

$x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$

(B1) $\langle x + \tilde{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \tilde{x}, y \rangle$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Zu zeigen: **1. Bilinearform**:

$x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$

(B1) $\langle x + \tilde{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \tilde{x}, y \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x + \tilde{x}, y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \tilde{x}_i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i y_i \\ &= \langle x, y \rangle + \langle \tilde{x}, y \rangle \end{aligned}$$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Zu zeigen: **1. Bilinearform**:

$x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$

(B2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Zu zeigen: **1. Bilinearform**:

$x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$

(B2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \lambda x, y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

(B3) - (B4) analog $\Rightarrow$ $\langle x, y \rangle$ ist eine Bilinearform
positive Definitheit: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

(B3) - (B4) analog $\Rightarrow$ $\langle x, y \rangle$ ist eine Bilinearform
positive Definitheit: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \text{ für alle } i = 1, .., n$$

$\Rightarrow$ $\langle x, y \rangle$ ist positiv definit.

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Symmetrie: Zu zeigen $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Symmetrie: Zu zeigen $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ &= \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle$ ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform
$=$ **Skalarprodukt**

Orthogonal und Orthonormal

Bedingung für Orthogonalität bezüglich einer Bilinearform:

$\langle x, y \rangle = 0$ Orthonormal: zusätzlich $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$

Orthogonal und Orthonormal

Bedingung für Orthogonalität bezüglich einer Bilinearform:

$\langle x, y \rangle = 0$ Orthonormal: zusätzlich $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$

Orthonormalbasis: Alle Basisvektoren sind zueinander orthogonal und normiert.
Wie bekommt man eine Orthonormalbasis?

Orthogonal und Orthonormal

Bedingung für Orthogonalität bezüglich einer Bilinearform:

$\langle x, y \rangle = 0$ Orthonormal: zusätzlich $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$

Orthonormalbasis: Alle Basisvektoren sind zueinander orthogonal und normiert.
Wie bekommt man eine Orthonormalbasis?

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad\qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{||w_1||^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{||w_1||^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad\qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad\qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$