



Angewandte Stochastik – Übungsblatt 2

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 19. Mai 2023 um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen vor Beginn der Übung über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als *exakt zwei Dateien* ab: Eine PDF-Datei für die theoretischen Aufgaben und eine R- oder R-Markdown-Datei (Dateiendung *.R* bzw. *.RMD*) für die Programmieraufgaben. Andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Bearbeitet das Übungsblatt in *Gruppen von 3- 4 Personen* und gebt bitte euren jeweiligen Studiengang an. Nur eine Person aus der Gruppe soll das Übungsblatt abgeben. Beachtet außerdem die Hinweise zu den Übungen in Moodle.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Bei der Multiple-Choice Aufgabe in der Klausur zu “Angewandte Stochastik” kennt Marco auf 20 der insgesamt 25 Fragen die richtige Antwort. Da er einige Vorlesungen geschwänzt hat, muss er bei den restlichen 5 Fragen raten. Nimm an, dass bei jeder Frage 4 Antwortmöglichkeiten zur Auswahl stehen, von denen jeweils genau eine richtig ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Marco genau 3 der 5 Fragen richtig beantwortet?

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte)

In einer Urne seien drei rote, zwei schwarze und fünf weiße Kugeln. Wir ziehen zufällig vier Kugeln nacheinander mit Zurücklegen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

- (a) Die erste gezogene Kugel ist eine weiße, die letzte eine rote.
- (b) Alle drei Farben werden gezogen.
- (c) Alle vier Kugeln sind (i) weiß, (ii) rot, (iii) schwarz.
- (d) Genau zwei Farben werden gezogen.
- (e) Genau eine weiße und eine rote Kugel werden gezogen.

Aufgabe 3 (2 + 3 = 5 Punkte)

In einer Studie von Vanderpump et al. (Clinical Endocrinology 1995, 43, 55–69) wurden Todesereignisse innerhalb von 10 Jahren bei RaucherInnen (139 von 582) und NichtraucherInnen (230 von 732) erhoben.

- (a) Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten für Tod nach 10 Jahren im Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum, bedingt auf RaucherInnenstatus.
- (a) Welche Aussagen treffen zu:
 - (i) Die bedingte Wahrscheinlichkeit für Tod nach 10 Jahren ist höher für RaucherInnen als für NichtraucherInnen.
 - (ii) Die Ereignisse *Tod nach 10 Jahren* und *RaucherIn* sind stochastisch unabhängig.
 - (iii) Ist damit gezeigt, dass das Rauchverhalten einen kausalen Einfluss auf die Sterbewahrscheinlichkeit hat.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12 Punkte)

Gegeben sei $f(x) = 0.5 \cos(2\pi x) + 1.5$ und der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \cap \Omega$ und $P(A) = |A|/c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichnet $|A|$ in diesem Fall die Fläche von A , z.B. $|[0, 0.5] \times [0.2, 0.7]| = (0.5 - 0)(0.7 - 0.2) = 0.25$.

- (a) Zeige, dass $c = |\Omega|$ gelten muss, damit P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und gib den Wert von c an. Welche Eigenschaft eines Wahrscheinlichkeitsmaßes aus Definition 2.2.1 ist hierfür entscheidend?

Skizziere die Menge Ω und zeichne folgende Teilmengen ein. Berechne außerdem ihre Wahrscheinlichkeiten.

- (b) $A = \{(x, y) \in \Omega : x > y\}$
- (c) $B = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (d) $C = \{(x, y) \in \Omega : x = 0\}$
- (e) $D = A \cap B$
- (f) $E = \{(x, y) \in \Omega : y \geq 1\}$

Aufgabe 5 (3 + 3 = 6 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Zeige folgende Ungleichungen¹:

¹Verwende in (a) vollständige Induktion

$$(a) \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

$$(b) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n-1) = 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c)$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Führe die Induktion aus dem Beweis der Siebformel (vgl. Folgerung 2.2.1, Teil 3) bis zum Ende durch.