Universität Ulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2019

Übungen Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker: Blatt 9

43. Man berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x + e^x + e^{-x} - 4}{x^4}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ für $\alpha > 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x$ für $\alpha > 0$

g) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(1 + 1/x)$.

Hinweis zu h) und zu Aufgabe 44a): Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

44. Man bestimme die folgenden Grenzwerte mithilfe der Mittelwertsätze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \cos(1/n))$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ für $a > 0, \beta \neq 0$.

45. Man bestimme die Taylorentwicklung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt 1 für

a) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 2x + 4$

b) $f(x) = e^x$

46. Man bestimme die Extrema und Wendepunkte der durch die folgenden Ausdrücke gegebenen Funktionen:

a) x^x, für $x > 0$

b) $e^{\sin x}$

c) $x^n e^{-x^2}$.

Hinweis: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $x_0 \in I$. Für eine Funktion $f \in C^3(I;\mathbb{R})$ gelten $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Dann hat f in x_0 einen Wendepunkt. Gilt $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so kann f keinen Wendepunkt besitzen.

47. (a) Man berechne die Taylorreihe der allgemeinen Potenz $(1 + x)^\alpha$ an der Stelle x mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Man berechne näherungsweise $\sqrt[5]{30}$ und schätze den Fehler der Näherung ab.
(Hinweis: $\sqrt[5]{30} = 2\sqrt[5]{1 - (1/16)}$.)

48. Man löse die Differentialgleichung $y'' = y$ mittels Potenzreihenansatz und bestimme die Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Machen Sie also den Ansatz $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und leiten Sie mithilfe der Differentialgleichung eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_k her.