Universität Ulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2019

Übungen Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker: Blatt 5

19. Es sei $a := 2,\overline{17}$. Bestimme mit der Dezimalbruchentwicklung $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, sodass $a = \frac{p}{q}$ gilt.

20. (a) Es seien die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}$ gegeben. Berechne die Summanden c_k des Cauchyproduktes dieser beiden Reihen und bestimme dessen Wert.

(b) Zeige, dass für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

(c) Es seien $a_0 := 0$ und $a_k := (-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, aber das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst divergiert.

21. Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}k^{-k}x^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}x^{3k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^k}x^{2k}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{k^k}x^k$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^{k^2}x^k.$

22. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(\log k)^{-\log k}.$

23. Zeige die Konvergenz und berechne den Wert von

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}},$$

d.h. den Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$.

24. Gegeben sei die Menge

$$M_1 := \{2,3,4,5,6,7,8,9,20,22,\ldots,30,32,33,\ldots\}$$

also die Menge aller natürlichen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung keine 1 auftaucht. Zeige, dass

$$\sum_{n\in M_1}\frac{1}{n} < \infty.$$