Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille
Marc Schneble

Sommersemester 16
Blatt 4 (40 Punkte)
10.05.2016

Übungen zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe: Dienstag, 10.05.2016, bis 14:15 Uhr, H22)

1. Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch $a_0 := 2$ und $a_{n+1} := \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
   a) Zeige, dass $a_{n+1}^2 = 2 + (a_n - a_{n+1})^2$.
   b) Zeige, dass $a_n^2 \geq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.
   c) Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist.
   d) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.
   e) Berechne den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. (3+1+2+1+3 Punkte)

2. Untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
auf ihr Monotonieverhalten und Beschränktheit. Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (6 Punkte)

3. Bestimme die Häufungspunkte der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   a) $a_n = n + (-1)^n 4 \left\lceil \dfrac{n}{4} \right\rceil$ b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2 + 1}{n^2 + 3n + 2}$
   (3+2+3 Punkte)

4. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen. Zeige, dass dann
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$
(7 Punkte)

5. a) Überprüfe mit der Definition 2.4.18, ob es sich bei den Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um Cauchyfolgen handelt:
$$\text{(i) } a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{(ii) } b_n = \frac{1}{n^2 + n}$$
   b) Bestimme für die Cauchyfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ für jedes $\epsilon > 0$ eine Konstante $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass das Cauchykriterium erfüllt ist.
   Hinweis: Zeige zunächst, dass $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. ((2+3)+5 Punkte)