Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille
Marc Schneble

Sommersemester 16
Blatt 9 (40 Punkte)
14.06.2016

Übungen zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe: Dienstag, 14.06.2016, bis 14:15 Uhr, H22)

1. Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a-2}, & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 + b, & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

stetig in $x = 1$ ist und $f(-1) = 1$ gilt. (4 Punkte)

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \log_4(x + 16) + x \cdot 4^x - 6$. Zeige, dass f im Intervall $[-1, 1]$ mindestens eine Nulstelle besitzt.

(3 Punkte)

3. Beweise Satz 3.3.22 aus dem Skript. (5 Punkte)

4. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und die Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ sei stetig auf $[a, b]$. Zeige, dass es mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - x$. (7 Punkte)

5. Zeige mit der Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$$

im Punkt $x_0 = 1$ stetig ist. (5 Punkte)

6. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

a) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeige, dass f gleichmäßig stetig auf I ist.

b) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(4+6 Punkte)

7. Es sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert. Zeige, dass f auf dem Definitionsbereich stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(6 Punkte)

Bonus 4) (a) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq \sqrt{2}, \\ 1, & x > \sqrt{2}, \end{cases}$$

stetig ist.

(b) Gegeben seien zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Bonus 5) Zeige, dass die durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ \text{teilerfremd}, \\ 0, & x \text{ irrational} \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion in allen irrationalen Punkten stetig und in allen rationalen Punkten unstetig ist.

Bonus 6) Zeige, dass die durch

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{k}(1 + kx^2)}$$

definierte Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, die Reihe aber für $x \in [-1, 1]$ nicht gleichmäßig konvergiert.