Universität Ulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2019

Übungen Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker: Blatt 13

60. Man löse die folgenden Differentialgleichungen mit Trennung der Variablen:

a) $y'(x) + y(x)\tan(x) = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$
b) $(x^2 - 1)y'(x) + 2xy(x) = xy(x)^2, \quad y(0) = 1$
c) $y'(x) + 1 = \cos^2(x + y(x)), \quad y(0) = 0.$

61. Man bestimme die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

$$y'(x) = -\frac{2y(x)}{x} + 4x, \quad y(0) = y_0$$

für $y_0 = 1$ und $y_0 = 2$.

62. Man bestimme die allgemeinen Lösungen bzw. die Lösungen der Anfangswertprobleme folgender Differentialgleichungen mithilfe des charakteristischen Polynoms:

a) $y''(x) + 13y'(x) + 40y(x) = 0$
b) $y''(x) - 12y'(x) + 36y(x) = 0$
c) $y^{(3)}(x) - 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$
d) $y^{(4)}(x) - y^{(3)}(x) + y''(x) - y'(x) = 0$
e) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$
f) $y^{(3)}(x) - y'(x) = 3e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 4$

63. Gegeben seien stetige Funktionen $a, f \in C(\mathbb{R})$ mit $a(x) \geq k > 0\,\forall x \in \mathbb{R}$ für eine Konstante k. Außerdem gelte $\lim\limits_{x\to\infty} f(t) = 0$. Man zeige mithilfe der Lösungsformel

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{t}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s\right) f(t)\,\mathrm{d}t,$$

dass jede Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y}(x) = -a(x)y(x) + f(x)$$

für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

64. Eine homogene Kugel mit Radius r und Dichte δ_K sinke unter dem Einfluss der Schwerkraft in einer Flüssigkeit mit Dichte δ_F und Viskosität $\eta > 0$. Die Bewegung erfolge längs einer vertikal nach unten gerichteten x-Achse, deren Nullpunkt auf der Flüssigkeitsoberfläche liege. Zur Zeit $t > 0$ befinde sich die Kugel an der Stelle $x(t)$, ihre Anfangsgeschwindigkeit sei $x'(0) = 0$. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$ her. Was ist die Grenzgeschwindigkeit ($t \to \infty$) der Kugel? Glyzerin hat bei 20°C die Dichte $1,26\frac{g}{cm^3}$ und die Viskosität $14,99\frac{g}{cm\cdot s}$. Blei hat bei derselben Temperatur eine Dichte von $11,35\frac{g}{cm^3}$. Was ist die Grenzgeschwindigkeit einer in Glyzerin sinkenden Bleikugel mit Radius $r = 1$cm?
Hinweis: Auf die Kugel wirken die Schwerkraft $mg = \frac{4\pi}{3}r^3\delta_K g$, der Reibungswiderstand, der nach dem Gesetz von Stokes durch $6\pi\eta r x'(t)$ gegeben ist, und der Auftrieb, der nach dem Prinzip von Archimedes gleich dem Gewicht $\frac{4\pi}{3}r^3\delta_F g$ der verdrängten Flüssigkeit ist. Man berechne zuerst mittels Variation der Konstanten eine Lösung für $x'(t)$, um anschließend durch Integration eine Lösung für $x(t)$ zu erhalten. Beachte außerdem, dass bei Erreichen der Grenzgeschwindigkeit die Summe aller wirkenden Kräfte verschwindet ($F_{ges} = 0$).