Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
SoSe 2021

20 Punkte

Übungen zu: Analysis 1 für Informatik Blatt 01

Hinweise zur Abgabe

Abgabetermin: 03.05.21, 14:00 Uhr
Abgabeformat: Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!
Sonstiges: Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an (siehe entsprechende Ankündigung in Moodle).

Aufgaben

1. i) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist. (6)

ii) Natürlich ist $\sqrt{4} = 2$ nicht irrational. An welcher Stelle im Beweis von *i)* schlägt eine analoge Argumentation für $\sqrt{4}$ fehl? (4)

2. Eine Funktion muss nicht zwingend zwischen Zahlenmengen abbilden. Sei

$$\Omega = \{A | A \subset \mathbb{N} \text{ ist endlich}\}$$

und die Funktion $f : \Omega \to \{B | B \subset \mathbb{N}\}$ gegeben durch

$$f(A) = \{2n | n \in A\} \subset \mathbb{N}$$

für alle $A \in \Omega$.

i) Bestimmen Sie $f(\{1, 2, 3\} \cup \{1, 100, 102\})$ und $f^{-1}(\{\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \{1, 2\}\})$. (4)

ii) Überprüfen Sie, ob f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. (6)

3. i) Zeigen Sie durch schrittweise Argumentation mit entsprechenden Verweisen auf Definitionen und Resultate der Vorlesung, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (4)

$$ca - cb \leq |c|(|a| + |b|)$$

gilt.

ii) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, welche (6)

$$2x - |x - 2| \leq |2x - |x + 2||$$

erfüllen.

4. i) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (6)

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Schreiben Sie dabei auch die linke Seite mittels Summenzeichens.

ii) Wir "beweisen" folgende Aussage mittels vollständiger Induktion: Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sind in jeder Gruppe von n Personen alle Personen gleich groß.

Beweis. Induktionsanfang (I.A.) $n = 1$: In einer Gruppe, bestehend aus einer Person, ist diese natürlich so groß wie sie selbst. Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.
Induktionsschritt (I.S.) $n \to n + 1$: Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass in jeder Gruppe von n Personen alle Personen gleich groß sind (Induktionshypothese (I.H.)).
Wir betrachten nun eine Gruppe von $n + 1$ Personen und stellen diese der Reihe nach auf. Die ersten n Personen bilden eine Gruppe von n Personen und die letzten n Personen bilden eine Gruppe von n Personen. Nach (I.H.) sind somit die ersten n und die letzten n Personen gleich groß. Da nun aber alle Personen zwischen der ersten und letzten in beiden Gruppen sind, müssen somit alle Personen gleich groß sein. □

Finden Sie den Fehler in der Argumentation. (4)