Lösungsvorschlag Blatt 2

1) a) ges: $\{x \in \mathbb{R} : |2x-6| \le x\} = L_1$

kritische Punkt: $x=3$, hier ändert der Term im Betrag das VZ:

Fall 1: $x \ge 3$: $|2x-6| \le x \iff 2x-6 \le x \iff x \le 6$

$\Rightarrow x \in [3,6]$

Fall 2: $x \le 3$: $|2x-6| \le x \iff -2x+6 \le x \iff 6 \le 3x \iff 2 \le x$

$\Rightarrow x \in [2,3)$

insgesamt: $x \in [2,3) \cup [3,6] = [2,6] = L_1$

b) ges: $\{x \in \mathbb{R} : |2x+4| > 1-|x-2|\} = L_2$

kritische Punkt: $x=-2$ und $x=2$

Fall 1: $x \le -2$: $|2x+4| > 1-|x-2| \iff -(2x+4) > 1+(x-2)$

$\iff -3 > 3x \iff x < -1 \qquad \Rightarrow x \in (-\infty,-2]$

Fall 2: $-2 \le x < 2$: $|2x+4| > 1-|x-2| \iff 2x+4 > 1+(x-2)$

$\iff x > -5 \qquad \Rightarrow x \in (-2,2)$

Fall 3: $x \ge 2$: $|2x+4| > 1-|x-2| \iff 2x+4 > 1-(x-2)$

$\iff 3x > -1 \iff x > -\frac{1}{3} \Rightarrow x \in [2,\infty)$

$\Rightarrow$ insgesamt: $x \in (-\infty,-2) \cup [-2,2] \cup (2,\infty) = \mathbb{R} = L_2$

2) a) z.z.: $||a|-|b|| \le |a-b|$ für $a,b \in \mathbb{R}$:

$|a| = |a-b+b| \le |a-b| + |b| \Rightarrow |a|-|b| \le |a-b|$

$|b| = |b-a+a| \le |b-a| + |a| \Rightarrow |b|-|a| \le |b-a| = |a-b|$

insgesamt: $|a-b| \ge \begin{cases} |a|-|b| \\ -(|a|-|b|) \end{cases}$ also $|a-b| \ge ||a|-|b||$ $\square$

b) z.z.: $4ab \overset{①}{\le} (a+b)^2 \overset{②}{\le} 2(a^2+b^2) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

①: $0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \iff a^2+b^2 \ge 2ab$

$\Rightarrow 4ab = 2ab + 2ab \le 2ab + a^2 + b^2 = (a+b)^2$

②: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \le a^2 + a^2 + b^2 + b^2 = 2(a^2+b^2)$ (s. ①) $\square$

3) a) z.z.: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Widerspruchsbeweis: Sei $\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}: \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3$

Wir nehmen dabei an, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ sei vollständig gekürzt.

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 3 \Leftrightarrow p^2 = 3q^2 \Rightarrow p^2$ durch 3 teilbar

(*) $\Rightarrow p$ durch 3 teilbar $\Rightarrow p = 3r \quad r \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \left(\frac{3r}{q}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow 9r^2 = 3q^2 \Leftrightarrow 3r^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ durch 3 teilbar

$\Rightarrow q$ durch 3 teilbar $\Rightarrow p, q$ beide durch 3 teilbar

$\Rightarrow$ Bruch $\frac{p}{q}$ nicht vollständig gekürzt ↯. □

*: Beweis: n^2 durch 3 teilbar $\Rightarrow n$ durch 3 teilbar, $\forall n \in \mathbb{N}$:

Sei n nicht durch 3 teilbar: $n = 3k+1 \Rightarrow n^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$

$\exists\, k \in \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ $n = 3k+2 \Rightarrow n^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$

In beiden Fällen ~~nicht durch~~ ist n^2 nicht durch 3 teilbar □

b) Es gilt nicht: n^2 durch 4 teilbar $\Rightarrow$ n durch vier teilbar (siehe $n=2$, $n=10$, ...)

4) a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$ nach binom. Lehrsatz

Kombinatorische Begr.: Sei M eine Menge mit n Elementen.

$\rightarrow$ M hat 2^n Teilmengen

$\rightarrow$ M hat $\binom{n}{1}$ 1-elementige Teilmengen, $\binom{n}{2}$ 2-elementige TM, usw

bis $\binom{n}{n} = 1$ n-elementige Teilmengen

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n}\binom{n}{k+1} z^{k+1} (1-z)^{n-(k+1)}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \frac{n!}{(n-(k+1))!\,(k+1)!} z^{k+1} (1-z)^{n-k-1} = z \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{(n-1)!}{((n-1)-k)!\,k!}}_{\binom{n-1}{k}} z^k (1-z)^{(n-1)-k}$

bin. LS

$= z(z+1-z)^{n-1} = z$ □

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} \overset{\text{bin. LS}}{=} (1-1)^n = 0$ □