Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille, Marc Schneble

Wintersemester 15/16
20.02.2016, 10 Uhr s.t.

1. Klausur zu Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

Gesamtpunktzahl: 115 Punkte
Hinreichende Punktzahl für das Bestehen der Klausur: 50 Punkte

1. a) Definiere folgende Begriffe: (i) Äquivalenzrelation (ii) Ähnlichkeit von Matrizen.
   b) Zeige, dass die Relation R mit
   $$A \text{ R } B :\Leftrightarrow \text{A und B sind ähnlich}$$
   eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. (4+10 Punkte)

2. Es seien $\pi \in S_4$ und $\tau \in S_6$ mit $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
   a) Berechne π^n für $n \in \mathbb{N}$.
   b) Schreibe τ als Produkt von Transpositionen. Ist die Darstellung eindeutig? Begründe.
   c) Bestimme die Inversionen und das Vorzeichen von τ.
   d) Gib eine geschlossene Formel für die Berechnung der Determinante einer quadratischen Matrix mit Hilfe von Permutationen an (Leibnizformel).

   (3+4+3+2 Punkte)

3. Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi : P_3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f \mapsto (f'(0), f'(1), f'(2) + f(2))^\top$. Zwei Basen von P_3 seien durch $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$ und $\mathcal{A}' = \{1, 1-x, 1-x^2, 1-x^3\}$ gegeben. Außerdem seien zwei Basen des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch
   $$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
   a) Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$.
   b) Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}'}(\varphi)$.
   c) Bestimme $\dim \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\dim \mathrm{Bild}(\varphi)$.
   d) Ist φ surjektiv bzw. injektiv? Begründe. (3+8+7+3 Punkte)

4. a) Definiere den Begriff Skalarprodukt.
   b) Es sei $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das kanonische Skalarprodukt. Für $v \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $||v|| := \sqrt{\langle v , v \rangle}$ die euklidische Norm. Es seien v und w orthogonal bezüglich $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Zeige, dass dann gilt
   $$||v||^2 + ||w||^2 = ||v + w||^2.$$

   (2+4 Punkte)

5. Gegeben seien $v_1 = (-2, 0, -2)^\top$, $v_2 = (-a, -2, 1)^\top$, $v_3 = (0, a, \frac{1}{8})^\top$ und $a \in \mathbb{R}$.

   a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig?

   b) Es sei nun $A = (v_1|v_2|v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, sodass das Gleichungssystem $Ax = b$ zwar eindeutig aber nicht universell lösbar ist? Falls ja, gebe ein solches a an. Falls nicht, begründe warum ein solches a nicht existiert. (5+2 Punkte)

6. Berechne den Eintrag x_3 der Lösung $x \in \mathbb{C}^4$ von $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2+2i & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3-4i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$$

   und bringe das Ergebnis auf die Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. (8 Punkte)

7. Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

   a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist λ^n ein Eigenwert von A^n.

   b) Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kommutieren, d.h. $AB = BA$, dann gilt $\det A = \det B$.

   c) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und λ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit n. Falls A nicht die Matrix ist mit den Einträgen λ auf der Diagonalen und 0 sonst, ist A nicht diagonalisierbar.

   (4+3+5 Punkte)

8. Es sei die quadratische Form $f(x) = x^\top Ax = \frac{14}{9}x_1^2 + \frac{14}{9}x_2^2 + \frac{17}{9}x_3^2 - \frac{8}{9}x_1x_2 + \frac{4}{9}x_1x_3 + \frac{4}{9}x_2x_3$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 14/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 14/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 17/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 14 & 2 \\ 2 & 2 & 17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 0, 2)^\top$ und $v_2 = (-4, 5, 2)^\top$. Zeige, dass v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 2 ist. Ist v_2 auch ein Eigenvektor von A? Falls ja, zu welchem Eigenwert?

   b) Bestimme den Eigenraum zum Eigenwert 1 von A.

   c) Bestimme das charakteristische Polynom von A und zerlege es soweit wie möglich in Linearfaktoren. Verwende dabei nicht die Aufgabenteile a) und b).

   d) Bestimme eine invertierbare Matrix S, so dass $f(Sx) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^2$ gilt, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A sind.

   e) Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv definit, falls $x^\top Bx > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeige, dass eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann positiv definit ist, falls B nur positive Eigenwerte besitzt.

   f) Untersuche A auf positive Definitheit.

   g) Zeige, dass $A^n = SD^nS^{-1}$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf der Hauptdiagonalen ist. Gebe S, S^{-1} und D^n explizit an.

   Hinweis: Die Berechnung von A^n darf hier mit „…“ ausgeschrieben werden.

   (3+4+4+9+9+2+4 Punkte)

Viel Erfolg!