Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
SoSe 2021

20 Punkte

Übungen zu: Analysis 1 für Informatik Blatt 05

Hinweise zur Abgabe

Abgabetermin: 31.05.21, 14:00 Uhr
Abgabeformat: Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!
Sonstiges: Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an.

Aufgaben

1. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ (1)

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ (1)

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ (2)

iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^6}{3^k}$ (1)

v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10k+2}{k^4+4}$ (1)

vi) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{5k+3}$ (1)

vii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2} 2^k}$ (2)

viii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ (1)

2. i) Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt der Potenzreihen (4)

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

ii) Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt der konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ mit sich selbst divergent ist. Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 2.5.21? (6)

3. Sei $M = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in \{0,1\}\}$ die Menge aller Folgen mit Folgeglieder in $\{0,1\}$. (10)
Zeigen Sie, dass M überabzählbar ist.
Hinweis: Eine ähnliche Strategie wie im Beweis von Satz 2.6.5 könnte zielführend sein.

4. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen:

i) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(5+\frac{2}{k+1}\right)^k x^k$ (1)

ii) $\sum_{k=0}^{\infty}(\sqrt{k+2})^k x^k$ (1)

iii) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^{-k} x^k$ (1)

iv) $\sum_{k=0}^{\infty}(7k^5+3k^2+1)x^k$ (1)

v) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{(-1)^k k}}{2^k}x^k$ (2)

vi) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)x^k$ (2)

Untersuchen Sie auch für vi) das Konvergenzverhalten der Potenzreihe im Fall $|x| = R$. (2)