Dr. J.-W. Liebezeit
M. Scheibchen

Blatt 05
23.05.2014

Übungen zu Analysis I für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe bis Freitag, 30.05.2014 um 08:20 Uhr, H3)

1. Bestimme jeweils den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} x^k$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$

   (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$

   (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)^{k^2} x^k$

   (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^{3k}$

   (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$

(11 Punkte)

2. Zeige, dass es eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ und Konvergenzradius $R > 0$ gibt, welche auf den Randpunkten des Konvergenzintervalls divergiert.

(5 Punkte)

3. Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

   (a) $e^x > 0$.

   (b) $1 + x \leq e^x$.

   (c) $x < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x} \geq e^x$

   (d) $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$.

(6 Punkte)

4. Berechne den Wert von:

   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k + 3^{k+1}}{5^k}$.

   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m}$ für $p > -1$.

(3+4 Punkte)

5. (a) Schreibe den folgenden Ausdruck als Logarithmus *einer* Zahl: $\frac{\frac{1}{3}\ln 125 - 3\ln 2 + \ln 40}{2\ln 5 + \ln 4}$.

(b) Vereinfache den folgenden Ausdruck und entscheide, für welche q er definiert ist: $2\log_8(q+1) + \log_4(q-1) - \log_2\sqrt{q^2-1}$.

(c) Löse die folgende Gleichung: $8^{4x-5}27^{5x-3} = 18 \cdot 16^{3x-4}9^{4x+5}$.

(d) Vereinfache den folgenden Ausdruck und entscheide für welche Werte der darin auftretenden Variablen er sinnvoll ist: $2\log_8(a+b) + \log_4(a-b) - \log_2\sqrt{a^2-b^2}$.

(10 Punkte)