Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 9. Juli 2021, Abgabe: 8. Juli

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 9. Juli um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 8. Juli um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Gebt die Lösungen nach Möglichkeit bitte in Gruppen von zwei oder drei Personen ab. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Musterlösungen

Aufgabe 1 (3 + 2 = 5 Punkte) 2
Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte) 3
Aufgabe 3 (3 Punkte) 4
Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 4 = 10 Bonuspunkte) 5

Multiple Choice Aufgaben **7**

Aufgabe 5 (6 Punkte) 7

Aufgabe 1 (3 + 2 = 5 Punkte)

Es sei $X = (X_1, X_2)$ ein zweidimensionaler stetiger Zufallsvektor mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{3}{2}x_1^2\,x_2 + \frac{1}{2}(x_2 - \frac{1}{2}) - \frac{3}{4}x_1^2 & \text{falls } x_1 \in [0,1] \text{ und } x_2 \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechne die Erwartungswerte und Varianzen von X_1 und von X_2.

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{2}(x_2 - \frac{1}{2}) - \frac{3}{4}x_1^2 &= \frac{1}{4}\left(6x_1^2x_2 - 3x_1^2 + 2x_2 - 1\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(3x_1^2 + 1\right)(2x_2 - 1) \end{aligned}$$

Und

$$f_{X_1}(x) = \int_1^2 \frac{1}{4}\left(3x^2 + 1\right)(2t - 1)\; dt = \frac{1}{2}\left(3x^2 + 1\right)$$

$$f_{X_2}(x) = \int_0^1 \frac{1}{4}\left(3t^2 + 1\right)(2x - 1)\; dt = \frac{1}{2}(2x - 1) = x - \frac{1}{2}$$

Wir berechnen

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_0^1 x f_{X_1}(x)\, dx = 5/8\,, \qquad \mathbb{E}(X_1^2) = \int_0^1 x^2 f_{X_1}(x)\, dx = 7/15$$

$$\mathbb{E}(X_2) = \int_1^2 x f_{X_2}(x)\, dx = 19/12\,, \qquad \mathbb{E}(X_2^2) = \int_1^2 x^2 f_{X_2}(x)\, dx = 31/12$$

Daraus folgt

$$\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \frac{73}{690} \approx 0.0760$$

$$\mathrm{Var}(X_2) = \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_2)^2 = \frac{11}{144} \approx 0.0764$$

(b) Berechne die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X_1 und X_2.

Lösung:

Mit der Rechnung aus a) sehen wir $f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$, also sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig und Kovarianz und Korrelation sind beide 0.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Sei $X \sim Exp(\lambda)$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen

(a) $X_1 = e^{-X}$.

Lösung:
Die Dichte der Exponentialverteilung ist

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x}.$$

Also ist

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_0^\infty e^{-x}\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

(b) $X_2 = 2X$.

Lösung:

$$\mathbb{E}(X_2) = \int_0^\infty 2x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda}.$$

(c) $X_3 = \max\{X, 1/3\}$.

Lösung:

$$\mathbb{E}(X_3) = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda x}\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-\lambda/3}\right) + \frac{1}{3}e^{-\lambda/3} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda/3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda/3}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die $\mathsf{Erlang}_{n,\lambda}$-Verteilung ist die Verteilung von $X_1 + \cdots + X_n$, wobei $X_1, \ldots, X_n \sim \mathsf{exp}_\lambda$ unabhängige Zufallsvariablen sind. Zeige durch vollständige Induktion: Die Dichte der $\mathsf{Erlang}_{n,\lambda}$-Verteilung ist gegeben durch

$$f_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung:

Sei im folgenden immer $x \geq 0$.

Sei $n = 1$. Dann ist

$$f_{n,\lambda}(x) = \frac{\lambda^1 x^0}{0!} e^{-\lambda x} = f_{X_1}(x)\,.$$

Gelte die Induktionsannahme für ein festes n. Definiere $Y = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathsf{Erlang}_{n,\lambda}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_{Y+X_{n+1}}(x) &= \int_0^x f_Y(t) f_{X_{n+1}}(x-t)\,dt \\ &= \int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda(x-t)}\,dt \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x t^{n-1} e^{-\lambda t} e^{\lambda t}\,dt \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x t^{n-1}\,dt \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \frac{x^n}{n} = \frac{\lambda^{n+1} x^{(n+1)-1}}{((n+1)-1)!} e^{-\lambda x} = f_{n+1,\lambda}(x)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 4 = 10 Bonuspunkte)

Gegeben sei eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen $X \sim U([0,1])$ und eine Quantilfunktion F^{-1} (siehe Blatt 4, Aufgabe 5) die zu einer Verteilungsfunktion F gehört.

(a) Zeige, dass $Y = F^{-1}(X)$ gemäß F verteilt ist. Diese Art, gemäß F verteilte Zufallsvariablen zu erhalten, nennt sich *Inversionsmethode*.

Lösung:
Mit Blatt 4, Aufgabe 5c) gilt

$$P(Y \leq t) = P(F^{-1}(X) \leq t) = P(X \leq F(t)) = F(t)\,.$$

(b) Berechne die Quantilfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$. Im folgenden bezeichnen wir diese Funktion als $g(x)$.

Lösung:
Sei F_λ die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ und $x > 0$.

$$F_\lambda(x) \geq y \iff 1 - e^{-\lambda x} \geq y \iff x \geq -\frac{\log(1-y)}{\lambda}$$

Also ist

$$g(x) = -\frac{\log(1-x)}{\lambda}\,.$$

(c) Berechne die Dichte von $g(X)$ ($X \sim U([0,1])$ wie oben) mittels Transformationssatz. Welches Ergebnis erwartest du hier?

Lösung:
Sei $y \in [0,\infty]$. Dann ist

$$f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)|$$

und

$$g^{-1}(y) = 1 - e^{-\lambda y}, \qquad (g^{-1})'(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad f_X(g^{-1}(y)) = 1\,.$$

Also folgt

$$f_{g(X)}(y) = \lambda e^{-\lambda y}\,.$$

Nach der Inversionsmethode müsste $g(X)$ exponentialverteilt sein mit Parameter λ. Genau diese Dichte erhalten wir hier auch.

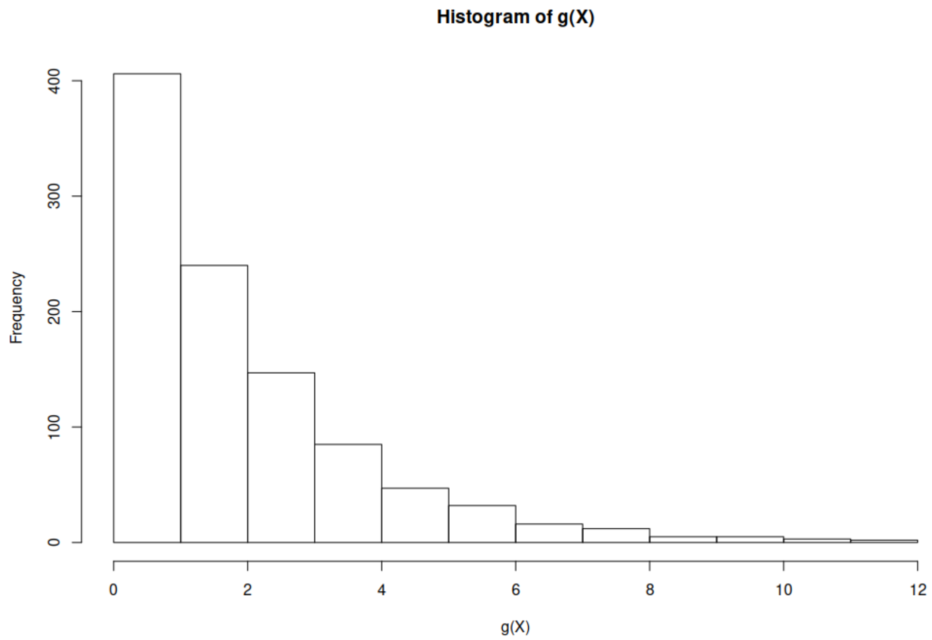
(d) Nutze eine Programmiersprache deiner Wahl, um mit dieser Methode 1000 Realisierungen einer $Exp(1/2)$-verteilten Zufallsvariablen zu erzeugen. Nutze den in den Standardbibliotheken implementierten Generator für $U([0,1])$-verteilte Zufallsvariablen. Plotte das Histogramm der 1000 Realisierungen.

Lösung:

```
g = function(x) {
return(-log(1-x) * 2)
}

X = runif(1000)

hist(g(X))
```



Multiple Choice Aufgaben

Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben sind die richtigen Aussagen anzugeben. Dabei kann genau eine Aussage zutreffen, mehrere Aussagen können zutreffen oder aber keine der Aussagen trifft zu. Die Aufgabe ist richtig gelöst, wenn alle zutreffenden Aussagen angegeben wurden, jedoch keine nicht zutreffende Aussage angegeben wurde.

Für die Bewertung des Übungsblatts gibt jede richtige Antwort 1 Punkt, jede falsche Antwort gibt 1 Punkt Abzug. Je Aufgabe können minimal 0 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichtefunktion $f(x, y)$. Die Dichte der Randverteilungen seinen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. Gib an, welche Aussagen korrekt sind:

(a) X und Y sind abhängige Zufallsvariablen, da sie eine gemeinsame Dichtefunktion besitzen. **Lsg:** falsch

(b) Sind X und Y unkorreliert, so gilt $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. **Lsg:** falsch

(c) Falls $(X, Y) \sim N(\mu, K)$ und $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, so gilt X und Y unkorreliert. **Lsg:** wahr

(d) Falls $(X, Y) \sim N(\mu, K)$ und die Nichtdiagonalelemente von K gleich Null sind, so ist der Korrelationskoeffizient von X und Y gleich Null. **Lsg:** wahr

(e) Falls $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, so ist der Korrelationskoeffizient von X und Y negativ. **Lsg:** falsch

(f) Für abhängige Zufallsvariablen X und Y sind die standardisierten Zufallsvariablen unabhängig. **Lsg:** falsch