Megi Hoxhalli
Daniele Vella
Emmanuella Udeh
Micha Kotlowski

Blatt 1

Auf. 1

(a) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

(b) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$P(A) = \frac{3 \cdot 6}{36} = 0{,}5$

$P(B) = \frac{6}{36} = 0{,}1667$

$P(C) = \frac{5+4+3+2+1}{36} = 0{,}4167$

Auf. 2

(a) $\Omega = \mathbb{N}$ $\quad \omega \in \Omega =$ "ω Studenten haben H22 verlassen"

(b) $\Omega = \{$"Nein", "BB", "M", "WD"$\}$ $\quad \omega \in \Omega =$ "Der Kommilitone hat Nein gesagt oder ja und eines der Speiselokale genannt (BB, M, WD)"

(c) $\Omega = \{(k, g) : k \in \mathbb{N}, g \in \mathbb{N}\}$ $\quad \omega \in \Omega = (k, g) =$ "Es wurden k Kunden bedient welche insgesamt g Cent ausgegeben haben"

Auf. 3

(a) $A \cup C = \{6, 8, 16, 17, 18, 19, 20\}$

(b) $A \cap B = \{\}$

(c) $C^c = \{5, 6, 7, 8, 9, 20\}$

(d) $C^c \cap D = \{6, 9, 20\} = D$

(e) $(\Omega \setminus C)^c = C = \{16, 17, 18, 19\}$

(f) $A \setminus C = \{6, 8, 20\}$

Auf. 4

(a) Der Kurs steigt um 0 - 10%

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}45$ da $A \cap B = \emptyset$

(b) Der Kurs fällt

$P((A \cup B \cup C)^c) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = 0{,}5$ da $A \cap B = \emptyset$ und $B \cap C = \emptyset$ und $A \cap C = \emptyset$

(c) Der Kurs steigt um weniger als 5% oder bleibt gleich oder fällt

$P(B^c \cap C^c) = P((B \cup C)^c) = 1 - P(B) - P(C) = 0{,}9$ da $B \cap C = \emptyset$

Auf. 5

(a) Sei $A = \{23, \cup, \epsilon, ☺\} \Rightarrow A \in \mathcal{F}_1$ aber $A^c \notin \mathcal{F} \Rightarrow$ keine σ-Algebra

(b) 1. $\mathcal{F}_2 \neq \emptyset$

2. $\forall B \in \mathcal{F}_2 : B^c \in \mathcal{F}_2$ da $\emptyset \in \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \Omega \in \mathcal{F}_2$ und $A \in \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{F}_2$

3. Sei $B_1, B_2, \ldots, \in \mathcal{F}_2$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}_2$ da $\forall C_1, C_2, \ldots, \in \mathcal{F}_2 : \Omega \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \Omega \in \mathcal{F}_2$

$\forall C \in \mathcal{F}_2 : \emptyset \cup C = C \in \mathcal{F}_2$

$A \cup A^c = \Omega \in \mathcal{F}_2$

$\emptyset \cup A \cup A^c = \Omega \in \mathcal{F}_2$

$\Rightarrow \mathcal{F}_2$ ist σ-Algebra

(c) Sei $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ mit $A_i = \{2i\}$

$\Rightarrow |A_i| = 1$ also $A_i \in \mathcal{F}_3$

$\Rightarrow A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ und $A^c = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow |A| = \infty$ und $|A^c| = \infty$ also $A, A^c \notin \mathcal{F}_3$

$\Rightarrow$ keine σ-Algebra

(d) 1. $\emptyset \subset [0,1] \Rightarrow \emptyset, \Omega \in \mathcal{F}_4$

2. $A \in \mathcal{F}_4 \Leftrightarrow A \subset [0,1]$ oder $A^c \subset [0,1] \Leftrightarrow A^c \subset [0,1]$ oder $A^{c^c} \subset [0,1] \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{F}_4$

3. Sei $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{F}_4$

Fall 1: $\forall A_i : A_i \subset [0,1] \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset [0,1] \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_4$

Fall 2: $\exists A_j : A_j \not\subset [0,1]$

$\Rightarrow A_j^c \subset [0,1]$ da $A_j \in \mathcal{F}_4$

$\Rightarrow (-\infty, 0), (1, \infty) \subset A_j$ da $A_j \cup A_j^c = \Omega$

$\Rightarrow (-\infty, 0), (1, \infty) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_i$

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c \subset [0,1]$

$\Rightarrow \mathcal{F}_4$ ist σ-Algebra

Auf. 6

(a) $\{0,1\} \in \mathcal{F}$ aber P ist nicht def. für $\{0,1\}$ $\Rightarrow$ kein WR

(b) $P(\Omega) = 1$ da $0 \in \Omega$

Sei $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt

Fall 1: kein A_i enthält 0 $\Rightarrow P(A_i) = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Fall 2: $0 \in A_i \Rightarrow$ kein A_j mit $i \neq j$ und $0 \in A_j$ existiert

$\Rightarrow P(A_i) = 1$ und $P(A_j) = 0$ für $j \neq i$

$\Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ $\Rightarrow P: \mathcal{F} \to \{0,1\}$ $\Rightarrow (\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist WR

(c) Zeige $P(\Omega) = 1$

$$P(\Omega) = \sum_{j \in \Omega} \frac{2j}{n(n+1)} = \frac{2 \sum_{j \in \Omega} j}{n(n+1)} = \frac{2\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)} = 1$$

Sei $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \frac{2j}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in A_i} \frac{2j}{n(n+1)} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$\Rightarrow P: \mathcal{F} \to [0,1]$ da $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ und $\forall j \in \Omega: \frac{2j}{n(n+1)} > 0$

$\Rightarrow (\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist WR