Dr. Gerhard Baur
Lars von der Heide
Sommersemester 2022
Punktzahl: 20

Übungen Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure: Blatt 3

1. Berechne folgende Summen/Produkte, gib also einen Ausdruck an, in dem kein Summen/Produktzeichen mehr vorkommt: (3)

(a) $\sum_{k=1}^{n} \log(k)$

(b) $\sum_{k=0}^{n} e^{kx}$

(c) $\prod_{k=0}^{n} e^{kx}$

Hierbei ist $\prod$ das Produktzeichen, i.e. $\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n$
Gefragt ist nach einer möglichst kompakten Darstellung, die Summen/Produkte nur auszuschreiben reicht nicht.

2. Löse, falls möglich, folgende Gleichungen: (6×0,5)

(a) $2^x = 5$

(b) $\ln(x) + \ln(x-1) = 0$

(c) $2^x \cdot 3^{x+1} = 5^x$

(d) $\ln(x) - \ln(x^2) + 1 = 0$

(e) $e^x + e^{-x} = 2$

(f) $4^x - 2^{x+1} = 3$

3. Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ (3+3)

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = n \log(n) - \log(n!)$$

(a) via vollständige Induktion.

(b) direkt.

4. (2+4+2)

(a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos(x)\sin(y)$$

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$\frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Hinweise: Die Eigenschaften des $\cos()$ *und* $\sin()$ *aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden. Für Teil b) benutze man Teil a). Ferner ist in Teil b) kein Induktionsbeweis nötig - man kann dies direkt zeigen.*

(c) Sei $b \in \mathbb{R}$. Diskutiere Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Gleichung $\cos x = b$.