Kapitel 7

Lineare Gleichungssysteme

Wir wollen in diesem Kapitel lineare Gleichungssysteme betrachten. Diese treten an vielen Stellen auf, die wir bereits betrachtet haben (etwa in endlich-dimensionalen Vektorräumen beim Schnitt von affinen Unterräumen, bei der Suche nach Urbildern, Bild und Kern linearer Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen oder bei der Bestimmung der Koeffizienten eines Polynoms) oder die wir noch betrachten werden (etwa der Suche nach Eigenvektoren oder der Partialbruchdarstellung rationaler Funktionen). Desweiteren stößt man in vielen Anwendungen direkt auf lineare Gleichungssysteme oder Probleme, die sich als lineare Gleichungssysteme darstellen lassen. Es soll untersucht werden, wann ein

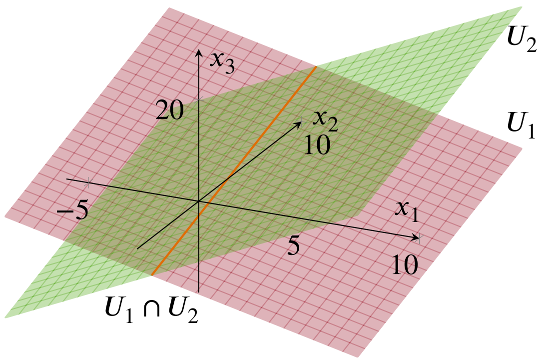


Abbildung 7.1: Die Bestimmung der Schnittmenge der beiden affinen Unterräume $U_1 = \{ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \}$ und $U_2 = \{ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$ führt auf ein lineares Gleichungssystem.

lineares Gleichungssystem lösbar ist, und ein Verfahren zur Lösung von Gleichungen angegeben werden.

7.1 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

> Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt. (Carl Friedrich Gauß)

Beispiel 7.1.1. Zunächst betrachten wir das folgende Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \tag{1}$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \tag{2}$$
$$2x_1 + x_2 - x_4 = 0. \tag{3}$$

Ein erster Lösungsansatz funktioniert wie folgt: Drücke mittels einer Gleichung eine Unbekannte durch die anderen aus und setze das fort, bis alle Gleichungen verwandelt wurden. So ist etwa in (3) $x_4 = 2x_1 + x_2$ und damit in (1) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ und so weiter. Dieses Vorgehen ist jedoch für größere Systeme sehr umständlich und eine formale Beschreibung oder Vorschrift (Algorithmus) unübersichtlich. Wir wollen stattdessen das folgende Verfahren anwenden:

Wir ersetzen das Gleichungssystem durch ein neues, das die gleiche Lösungsmenge besitzt, und zwar so lange, bis sich die Lösbarkeit entscheiden lässt und die Lösungen abgelesen werden können.

Aus dem Gleichungssystem (1), (2) und (3) erhalten wir durch Subtraktion der Gleichung (1) von der Gleichung (2) und des Zweifachen der Gleichung (1) von der Gleichung (3) das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \tag{1}$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \tag{2'}$$
$$-x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -2. \tag{3'}$$

Das Gleichungssystem (1), (2′), (3′) hat dieselben Lösungen wie das System (1), (2), (3), denn ist (x_1, x_2, x_3, x_4) Lösung des Systems (1), (2), (3), dann ist (x_1, x_2, x_3, x_4) Lösung der Gleichungen (1), (2′) = (2)-(1) und (3′)=(3)-2(1), also Lösung des Systems (1), (2′), (3′). Ist andererseits (x_1, x_2, x_3, x_4) Lösung des Systems (1), (2′), (3′), so löst (x_1, x_2, x_3, x_4) auch die Gleichungen (1), (2)=(2′)+(1) und (3)=(3′)+2(1), also das System (1), (2), (3).

Addieren wir die Gleichung (2′) zu der Gleichung (3′), so erhalten wir das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \tag{1}$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \tag{2'}$$
$$0 = 2. \tag{3''}$$

Das Gleichungssystem (1), (2′), (3′′) hat dieselbe Lösungsmenge wie das Gleichungssystem (1), (2′), (3′), also dieselbe wie das Gleichungssystem (1), (2), (3). Da die Gleichung (3″) nicht erfüllt werden kann, ist das System (1), (2), (3) nicht lösbar.

Anders ist die Lage, wenn wir statt (1), (2), (3) die Gleichungen (1), (2) und

$$2x_1 + x_2 - x_4 = -2 \tag{4}$$

betrachten. Mit denselben Umformungen wie oben erhalten wir dann das folgende zu (1), (2), (4) äquivalente System (welches also die gleiche Lösungsmenge wie (1), (2), (4) besitzt):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, && (1)\\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4, && (2')\\ 0 &= 0. && (4') \end{aligned}$$

Die Lösungen des Gleichungssystems erhalten wir dann wie folgt: Wähle x_3, x_4 beliebig, bestimme x_2 aus (2′) und dann x_1 aus (1):

Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist dann mit $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$

$$\begin{aligned} x_2 &= 4 - 2x_3 - 3x_4 = 4 - 2\lambda - 3\mu,\\ x_1 &= 1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 - (4 - 2\lambda - 3\mu) - \lambda - \mu\\ &= -3 + \lambda + 2\mu. \end{aligned}$$

Wir erhalten also für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -3\\ 4\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

ist die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (4).

Das Gauß-Verfahren, Teil I 7.1.2. Das obige Verfahren lässt sich auf beliebige lineare Gleichungssysteme anwenden. Es sei

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, && (1)\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, && (2)\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, && (3)\\ \vdots \qquad & \quad \vdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m && (\mathrm{m}) \end{aligned}$$

ein System von m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$. Wir wollen dieses Gleichungssystem in ein äquivalentes[1] umformen, an dem man sofort die Lösbarkeit und die Lösungen ablesen kann.

[1]das heißt, eines mit der selben Lösungsmenge

Schritt 1: Wir finden diejenige Unbekannte x_{j_1} mit dem kleinsten Index j_1, die tatsächlich in dem Gleichungssystem auftritt. j_1 wird charakterisiert durch

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \text{ für } j < j_1 \text{ und alle } i, \\ a_{ij_1} &\neq 0 \text{ für wenigstens ein } i. \end{aligned}$$

- Gibt es kein solches j_1, das heißt, sind alle $a_{ij} = 0$, so brauchen wir das Gleichungssystem nicht umformen.
- Durch Umnummerieren der Gleichungen können wir erreichen, dass $a_{1j_1} \neq 0$ ist. Das Gleichungssystem hat dann die Form

$$\begin{aligned} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 && (1) \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{mj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. && (m) \end{aligned}$$

Schritt 2: Addieren wir zu der i-ten Gleichung das $-\frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}}$-fache der Gleichung (1), so wird aus den Gleichungen (2), ..., (m) die Unbekannte x_{j_1} eliminiert:

$$\begin{aligned} & a_{1j_1}x_{j_1} + a_{1j_1+1}x_{j_1+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, && (1) \\ (2) - \frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}}(1): \quad & a'_{2j_1+1}x_{j_1+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, && (2') \\ (3) - \frac{a_{3j_1}}{a_{1j_1}}(1): \quad & a'_{3j_1+1}x_{j_1+1} + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_2, && (3') \\ & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ (m) - \frac{a_{mj_1}}{a_{1j_1}}(1): \quad & a'_{mj_1+1}x_{j_1+1} + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. && (m') \end{aligned}$$

Schritt 3: Auf das Gleichungssystem (2'), ..., (m') wenden wir Schritt 1 an, indem wir die Unbekannte x_{j_2} mit

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= 0 \text{ für } j < j_2 \text{ und alle } i = 2, \ldots, m, \\ a'_{ij_2} &\neq 0 \text{ für wenigstens ein } i \end{aligned}$$

betrachten.

- Gibt es kein solches j_2, sind wir fertig.
- Durch Umnummerieren können wir erreichen, dass $a'_{2j_2} \neq 0$.

Schritt 4: Durch Addition von geeigneten Vielfachen der Gleichung (2') zu den Gleichungen (3'), ..., (m') lässt sich x_{j_2} aus den Gleichungen (3'), ..., (m') eliminieren.

Durch endliche Wiederholung dieses Verfahrens aus Schritt 1 und 2 erhalten wir schließlich ein Gleichungssystem der *Stufenform* beziehungsweise *Zeilenstufenform*

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{1j_1}x_{j_1} + \dots \qquad\qquad\qquad\qquad + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1,\\
\tilde{a}_{2j_2}x_{j_2} + \dots \qquad\qquad + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{b}_2,\\
&\vdots\\
\tilde{a}_{rj_r}x_{j_r} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n &= \tilde{b}_r,\\
0 &= \tilde{b}_{r+1},\\
&\vdots\\
0 &= \tilde{b}_m.
\end{aligned}$$

Dabei ist $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ und

$$\tilde{a}_{ij_i} \neq 0 \text{ für } i = 1, \dots, r.$$

Die Elemente $\tilde{a}_{ij_i}$ heißen auch *Angelpunkte* oder *Pivotelemente*.

An diesem Gleichungssystem können wir sofort ablesen, ob es lösbar ist oder nicht. Es ist genau dann lösbar, wenn

$$\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$$

ist.

Bei der Umformung des Gleichungssystems haben wir die folgenden Schritte durchgeführt:

(U1) Vertauschung zweier Gleichungen,

(U2) Addition des λ-fachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Die Lösungsmengen von Gleichungssystemen, die durch diese Umformungen auseinander hervorgehen, sind gleich.

Beispiel 7.1.3. Wir betrachten

$$0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 1x_5 = 1 \tag{1}$$
$$0x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \tag{2}$$
$$0x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2 \tag{3}$$
$$0x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 1x_5 = \frac{9}{2} \tag{4}$$

Schritt 1: $j_1 = 2$, da $a_{i1} = 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$ und $a_{1j_1} = a_{12} = 1 \neq 0$.
Schritt 2:

$$(2) - \frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}}(1) = (2) - \frac{1}{1}(1): \qquad 2x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 3 \qquad (2')$$
$$(3) - \frac{a_{3j_1}}{a_{1j_1}}(1) = (3) - \frac{0}{1}(1): \qquad 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2 \qquad (3')$$
$$(4) - \frac{a_{4j_1}}{a_{1j_1}}(1) = (4) - \frac{2}{1}(1): \qquad 0x_3 - 2x_4 - 1x_5 = \frac{5}{2} \qquad (4')$$

Schritt 1 für das neue System liefert $j_2 = 3$, da $a'_{2j_2} = a'_{23} = 2 \neq 0$.
Schritt 2 besteht dann aus

$$(3') - \frac{a'_{3j_2}}{a'_{2j_2}}(2') = (3') - \frac{3}{2}(2'): \qquad 2x_4 + 1x_5 = -\frac{5}{2} \qquad (3'')$$
$$(4') - \frac{a'_{4j_2}}{a'_{2j_2}}(2') = (4') - \frac{0}{2}(2'): \qquad -2x_4 - 1x_5 = \frac{5}{2} \qquad (4'')$$

Schritt 1 für dieses System liefert $j_3 = 4$, da $a''_{34} = 2 \neq 0$.
Schritt 2 ist dann

$$(4'') - \frac{a''_{4j_3}}{a''_{3j_3}}(3'') = (4'') - \frac{-2}{2}(3''): \qquad 0 = 0. \qquad (4''')$$

Das heißt, wir haben folgende Form erreicht

$$1x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 1x_5 = 1 \qquad (1)$$
$$2x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 3 \qquad (2)$$
$$2x_4 + 1x_5 = -\frac{5}{2} \qquad (3)$$
$$0 = 0 \qquad (4)$$

Das System ist also lösbar und wir erhalten die Lösung durch sukzessives Umstellen und Einsetzen:

- (3) liefert $x_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2} - x_5\right)$.
- (2) liefert $x_3 = \frac{3}{2} - x_5$.
- (1) liefert

$$x_2 = 1 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 - \frac{3}{2} + x_5 + \frac{5}{2} + x_5 - x_5 = 2 + x_5.$$

Wir erhalten dann, wobei wir x_1 und x_5 beliebig wählen, etwa $x_1 = \lambda$ und $x_5 = \mu$, als Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \tag{7.9}$$

Das Gauß-Verfahren, Teil II 7.1.4. Um die Lösungen eines Gleichungssystems sofort angeben zu können, werden wir die Zeilenstufenform noch weiter vereinfachen. Dazu brauchen wir die Umformung

(U3) Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\lambda \neq 0$.

Auch Umformungen vom Typ (U3) ändern die Lösungsmenge nicht.

Mit (U3) können wir erreichen, dass alle $\tilde{a}_{ij_i}$ in 1 übergehen. Mit (U2) lassen sich ferner die Unbekannten x_{j_i} aus den ersten $i-1$ Gleichungen eliminieren:

Dazu addiere man geeignete Vielfache der i-ten Gleichung zu den ersten $i-1$ Gleichungen. Dann erhalten wir die endgültige *Zeilenstufenform*

$$\begin{aligned} x_{j_1} + \cdots + 0 + \cdots + 0 + \cdots + 0 + \cdots &= b_1', \\ x_{j_2} + \cdots + 0 + \cdots + 0 + \cdots &= b_2', \\ x_{j_3} + \cdots + 0 + \cdots &= b_3', \\ &\vdots \\ x_{j_r} + \cdots &= b_r', \\ 0 &= b_{r+1}', \\ &\vdots \\ 0 &= b_m'. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn

$$b_{r+1}' = \ldots = b_m' = 0$$

gilt (tatsächlich ist $b_{r+1}' = \tilde{b}_{r+1}, \ldots, b_m' = \tilde{b}_m$). Ist das Gleichungssystem lösbar, so erhalten wir die Lösungen wie folgt:

x_k beliebig aus $\mathbb{K}$ für $k \neq j_1, \ldots, j_r$

x_{j_i} aus der i-ten Gleichung:

$x_{j_i} = b_i' +$ linearer Ausdruck in den x_k, $k \neq j_1, \ldots, j_r$.

Beispiel 7.1.5 (Fortsetzung von Beispiel 7.1.3)**.** Wir hatten das Gleichungssystem in Beispiel 7.1.3 auf die Form

$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 1x_5 &= 1 && (1)\\ 2x_3 + 0x_4 + 2x_5 &= 3 && (2)\\ 2x_4 + 1x_5 &= -\frac{5}{2} && (3)\\ 0 &= 0 && (4) \end{aligned}$$

gebracht. Dabei waren $j_1 = 2$, $j_2 = 3$ und $j_3 = 4$ gewesen. Durch Multiplikation von (2) und (3) mit $\frac{1}{2}$ erhalten alle Pivotelemente den Vorfaktor 1:

$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 1x_5 &= 1 && (1')\\ x_3 + 0x_4 + x_5 &= \frac{3}{2} && (2')\\ x_4 + \frac{1}{2}x_5 &= -\frac{5}{4} && (3')\\ 0 &= 0 && (4') \end{aligned}$$

Wir eliminieren $x_4 = x_{j_3}$ aus den „darüber liegenden" Gleichungen, in dem wir das (-2)-fache der Gleichung (3') zur Gleichung (1') addieren:

$$1x_2 + 1x_3 = \frac{7}{2} \qquad (1'')$$

Anschließend addieren wir das (-1)-fache der Gleichung (2') zur Gleichung (1'') und erhalten die endgültige Zeilenstufenform des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_2 \qquad - \; x_5 &= 2 && (1''')\\ x_3 \quad + \; x_5 &= \frac{3}{2} && (2''')\\ x_4 + \frac{1}{2}x_5 &= -\frac{5}{4} && (3''')\\ 0 &= 0 && (4''') \end{aligned}$$

Daraus lesen wir direkt ab:

$$x_2 = 2 + x_5,\ x_3 = \frac{3}{2} - x_5,\ x_4 = -\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x_5$$

und erhalten damit dann die Lösungsmenge aus (7.9).

Wir wollen das Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems noch weiter schematisieren und übersichtlicher gestalten: Statt des Gleichungssystems formen wir die dem Gleichungssystem zugeordnete Matrix der Koeffizienten (a_{ij}) und die Spalte der b_j um. Kurz geschrieben hat das Gleichungssystem dann die Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } Ax = b.$$

Wir betrachten zur Illustration wieder das Gleichungssystem aus den Beispielen 7.1.3 und 7.1.5:

Beispiel 7.1.6. Das System aus den Beispielen 7.1.3 und 7.1.5 lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben dieses System unter Weglassung der Unbekannten in folgendem Schema

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right).$$

Die Umformungsschritte aus dem Gauß-Verfahren notieren wir in geeigneter Weise zu den Schemata, damit der Rechenweg nachvollziehbar ist. Dabei sollten nicht zu viele „verschiedene“ Schritte gleichzeitig durchgeführt werden, damit der Überblick nicht verloren geht („$Z_2 + \frac{3}{4}Z_1$, $Z_3 - 4Z_1$, $Z_3 + Z_2$“). Außerdem ist ggf. die Reihenfolge der Durchführung deutlich zu machen („$Z_2 - 2Z_1$, dann $Z_2 \leftrightarrow Z_3$“).

$$\xrightarrow[Z_2-Z_1]{Z_4-2Z_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-\frac{3}{2}Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4+Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}Z_3]{\frac{1}{2}Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_1-Z_2]{Z_1-2Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Denkt man sich das Schema nun wieder als Gleichungssystem mit den Unbekannten, so liest man die Lösungsmenge mit etwas Übung direkt ab.

Das Verfahren kann man auch anwenden, wenn das System für mehrere rechte Seiten gelöst werden soll. Man schreibt dann $(A|B)$, wobei B die Matrix mit den rechten Seiten als Spalten ist, und formt dann alle rechten Seiten gleichzeitig um. Formal lässt sich das als $AX = B$ schreiben, wobei A eine $m \times n$-, X eine $n \times k$- und B eine $m \times k$-Matrix ist. Wir betrachten folgende beispielhafte Situation:

Berechnung der Inversen einer quadratischen Matrix 7.1.7. Wir wollen die Inverse einer quadratischen Matrix berechnen: Es sei eine n-reihige Matrix (a_{ij}) gegeben. Wir suchen eine Matrix (x_{jk}) mit

$$(a_{ij})(x_{jk}) = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten zunächst die k-te Spalte der Produktmatrix. Sie hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_{1k} + \cdots + a_{1n}x_{nk} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_{1k} + \cdots + a_{kn}x_{nk} &= 1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_{1k} + \cdots + a_{nn}x_{nk} &= 0. \end{aligned}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für die n Unbekannten $x_{1k}, \dots, x_{nk}$. Insgesamt erhalten wir also n Gleichungssysteme mit je n Gleichungen und n Unbekannten. Da die Koeffizienten a_{ij} der linken Seiten der Gleichungen in allen n Gleichungssystemen gleich sind, können wir die Umformungen der Gleichungssysteme simultan vornehmen.

Beispiel 7.1.8. Wir wollen die Inverse der 3-reihigen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

berechnen. Dazu ordnen wir die Koeffizienten der Matrix und die Koeffizienten der Spalten $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, die zu den rechten Seiten der drei Gleichungssysteme gehören, in dem folgenden Schema an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Die Umformungen geben wir jeweils auf der linken Seite an:

$$\xrightarrow[Z_3-3Z_1]{Z_2-6Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & -40 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -16 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2.:\, Z_2-\frac{15}{4}Z_3]{1.:\, Z_2\leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -16 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & \frac{21}{4} & \frac{4}{4} & -\frac{15}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{20}Z_3]{-\frac{1}{4}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{80} & \frac{4}{80} & -\frac{15}{80} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-4Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -9 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{80} & \frac{4}{80} & -\frac{15}{80} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2-4Z_3]{Z_1+9Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{29}{80} & \frac{36}{80} & -\frac{55}{80} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{24}{80} & -\frac{16}{80} & \frac{40}{80} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{80} & \frac{4}{80} & -\frac{15}{80} \end{array}\right)$$

Alle drei Gleichungssysteme sind also lösbar, die Lösungen sind: Die j-te Unbekannte des k-ten Gleichungssystems x_{jk} ist gleich dem j-ten Koeffizienten der k-ten Spalte der Matrix auf der rechten Seite des Schemas. Die inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ ist also die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{29}{80} & \frac{36}{80} & -\frac{55}{80} \\ -\frac{24}{80} & -\frac{16}{80} & \frac{40}{80} \\ \frac{21}{80} & \frac{4}{80} & -\frac{15}{80} \end{pmatrix}.$$

7.2 Das Gauß-Verfahren formalisiert

> Beweisen muß ich diesen Käs'
> sonst ist die Arbeit unseriös. (Friedrich Wille)

Nachdem wir ein lineares Gleichungssystem mit Hilfe einer Matrix A geschrieben haben, ist es naheliegend, die Umformungsschritte (U1), (U2) und (U3) als Matrizenmultiplikationen mit A zu beschreiben. Die dabei verwendeten Matrizen müssen invertierbar sein, da sich andernfalls durch die Umformungen die Lösungsmenge ändern würde. Für die Koeffizientenmatrix A formuliert, hatten wir

(U1) Vertauschung der i-ten mit der k-ten Zeile ($i \neq k$),

(U2) Addition des λ-fachen der i-ten Zeile zur k-ten Zeile ($i \neq k$),

(U3) Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \neq 0$.

Im Folgenden sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ die Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems.

Lemma 7.2.1: (U1)

Die Umformung (U1) entspricht der Linksmultiplikation von A mit $U_{ik} \in M(m \times m, \mathbb{K})$. Dabei ist U_{ik} die Matrix, die aus der Einheitsmatrix durch

Vertauschen der i-ten und der k-ten Zeile hervorgeht,

$$
\begin{array}{cc}
U_{ik} := \left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & \mathbf{0} & & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & 0 & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & \\
& \boldsymbol{O} & & & \ddots & & & \boldsymbol{O} & \\
& & & & & 1 & & & \\
& & & 1 & & 0 & & & \\
& & & & & & 1 & & \\
& & & & \boldsymbol{O} & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1
\end{array}\right)
& \begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \quad i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \quad k\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ i\text{-te Spalte} & k\text{-te Spalte} \end{array} &
\end{array}
$$

Beweis. Es sei $U_{ik}A = (c_{j\ell})$, dann ist

$$c_{j\ell} = \sum_{s=1}^{m} u_{js} a_{s\ell} = \begin{cases} a_{j\ell}, & j \notin \{\, i, k \,\}, \\ a_{i\ell}, & j = k, \\ a_{k\ell}, & j = i. \end{cases}$$

Also ist die j-te Zeile von $(c_{j\ell})$ die j-te Zeile von A für $j \neq i, k$, die k-te Zeile von $(c_{j\ell})$ ist die i-te Zeile von A und die i-te Zeile von $(c_{j\ell})$ ist die k-te Zeile von A. Weiter gilt: U_{ik} ist eine invertierbare Matrix, denn es ist

$$U_{ik} \circ U_{ki} = I. \qquad \square$$

Lemma 7.2.2: (U2)

(U2) entspricht der Linksmultiplikation von A mit $V_{ki}(\lambda) \in M(m \times m, \mathbb{K})$. Dabei ist $V_{ki}(\lambda)$ die Summe aus der Einheitsmatrix mit der Matrix (b_{ij}), deren Einträge alle Null sind, bis auf den Eintrag $b_{ki} = \lambda$,

$$
\begin{array}{cc}
V_{ki}(\lambda) = \left(\begin{array}{cccc}
1 & & & \\
& \ddots & & \\
& \lambda & \ddots & \\
& & & 1
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{c} \uparrow \\ i\text{-te Spalte} \end{array} &
\end{array}
$$

oder kurz und übersichtlich: $V_{ki}(\lambda) = I + E_{ki}(\lambda)$ mit $E_{ki}(\lambda) = (e_{js}(\lambda))$, wobei $e_{js}(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & (j,s) = (k,i), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis. Es sei $V_{ki}A = (c_{j\ell})$, dann ist

$$c_{j\ell} = \sum_{s=1}^{m} \left(\delta_{js} + e_{js}(\lambda)\right) a_{s\ell} = \begin{cases} a_{j\ell}, & j \neq k, \\ a_{j\ell} + \lambda a_{i\ell}, & j = k. \end{cases}$$

Also ist für $j \neq k$ die j-te Zeile von $V_{ki}(\lambda) \circ A$ gleich der j-ten Zeile von A und für $j = k$ ist die j-te Zeile von $V_{ki}(\lambda)A$ gleich der Summe der k-ten Zeile von A mit dem λ-fachen der i-ten Zeile von A.

Da $E_{ki}(\lambda) + E_{ki}(-\lambda) = 0 = E_{ki}(\lambda)E_{ki}(-\lambda)$ für $k \neq i$, folgt weiter mit den Distributivgesetzen für Matrizen

$$\begin{aligned} V_{ki}(\lambda) \circ V_{ki}(-\lambda) &= (I + E_{ki}(\lambda))(I + E_{ki}(-\lambda)) \\ &= II + IE_{ki}(-\lambda) + E_{ki}(\lambda)I + E_{ki}(\lambda)E_{ki}(-\lambda) = I. \end{aligned}$$

Daher ist $V_{ki}(\lambda)$ invertierbar. □

Lemma 7.2.3: (U3)

(U3) entspricht der Linksmultiplikation von A mit $W_i(\lambda)$. Dabei ist $W_i(\lambda)$ die Matrix (w_{ij}), die aus der Einheitsmatrix durch Ersetzen des Elements w_{ii} durch $\lambda \neq 0$ hervorgeht,

$$\begin{array}{cc} W_i(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \quad i\text{-te Zeile} \\ \uparrow & \\ i\text{-te Spalte} & \end{array}$$

Kurz $W_i(\lambda) = (w_{kj}(\lambda))$ mit $w_{kj}(\lambda) = \begin{cases} \delta_{kj}, & (k,j) \neq (i,i), \\ \lambda, & (k,j) = (i,i). \end{cases}$

Beweis. Es sei $W_i(\lambda)A = (c_{j\ell})$, dann ist

$$c_{j\ell} = \sum_{s=1}^{m} w_{js} a_{s\ell} = \begin{cases} a_{j\ell}, & j \neq i, \\ \lambda a_{j\ell}, & j = i, \end{cases}$$

das heißt, für $j \neq i$, ist die j-te Zeile von $W_i(\lambda) \circ A$ gleich der j-ten Zeile von A und für $j = i$ ist die i-te Zeile von $W_i(\lambda) \circ A$ das λ-fache der i-ten Zeile von A.

$W_i(\lambda)$ ist invertierbar, denn

$$W_i(\lambda) \circ W_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) = I \text{ für } \lambda \neq 0. \qquad \square$$

Zusammengenommen haben wir damit

Satz 7.2.4: Durchführung des Gaußverfahrens durch Matrizenmultiplikation

Durch Linksmultiplikation mit invertierbaren m-reihigen Matrizen der Form U_{ik}, $V_{ki}(\lambda)$ und $W_i(\lambda)$, sogenannten *Elementarmatrizen*, lässt sich jede $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ in die Form

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & *** & 0 & *** & 0 & *** \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 & & \vdots & \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & 0 & \\ 0 & \dots & & & & \dots & 0 & 1 & *** \\ & & & & & & & & \\ & & & & \mathbf{0} & & & & \\ & & & & & & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \; r\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

überführen.

Bemerkung 7.2.5. Wir können A und $\tilde{A}$ als lineare Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ auffassen. Die Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix entspricht der Hintereinanderausführung von A und einem Isomorphismus des $\mathbb{K}^m$ auf sich. Diesen Isomorphismus können wir als Basiswechsel interpretieren.

7.3 Gleichungssysteme und lineare Abbildungen

> Ein Inhalt wird dazu in algebraische Formeln eingeschlossen, damit man, indem man die Formel anwendet, nicht hundertmal ein und dasselbe wiederholen muss.
>
> (Alexander Iwanowitsch Herzen)

Wir verbinden die gewonnenen Erkenntnisse zu linearen Gleichungssystemen mit unseren Betrachtungen zu linearen Abbildungen.

Satz 7.3.1: Isomorphismen sind rangerhaltend

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $F : V \to W$ linear und $G : W \to W$ ein Isomorphismus, dann gilt

$$\operatorname{rg} G \circ F = \operatorname{rg} F.$$

Beweis. Die Einschränkung von G auf das Bild von F liefert eine lineare Abbildung

$$G\Big|_{\operatorname{Bild} F} : \operatorname{Bild} F \to \operatorname{Bild} G \circ F$$

durch $G\Big|_{\operatorname{Bild} F}(w) := G(w)$. $G\Big|_{\operatorname{Bild} F}(w)$ ist injektiv, da G injektiv ist, und nach Definition ist $G\Big|_{\operatorname{Bild} F}$ auch surjektiv. $G\Big|_{\operatorname{Bild} F}$ ist also ein Isomorphismus von $\operatorname{Bild} F$ auf $\operatorname{Bild} G \circ F$. Da nach Bemerkung 6.1.13 isomorphe Räume gleiche Dimension haben, gilt

$$\operatorname{rg} G \circ F = \dim \operatorname{Bild} G \circ F = \dim \operatorname{Bild} F = \operatorname{rg} F. \qquad \square$$

Definition 7.3.2: Rang einer Matrix

Den *Rang* einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist der Rang der entsprechenden linearen Abbildung $A = F_A$ von $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$\operatorname{rg} A := \operatorname{rg} F_A.$$

Wir untersuchen nun den Bildraum der Abbildung $A = F_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$: Ein Erzeugendensystem für den Bildraum bilden die Bilder der kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{K}^n$. Es ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-te Stelle} \; = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} =: a_k.$$

Das heißt, das Bild von e_k ist der k-te Spaltenvektor $a_k := \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ der Matrix A. Diese Spaltenvektoren bilden ein Erzeugendensystem des Bildraumes $\operatorname{Bild} A = \operatorname{Bild} F_A$ (vergleiche auch 6.1.8 (ii)). Wir betrachten nun speziell eine Matrix der Form $\tilde{A}$, wie wir sie in Satz 7.2.4 erhalten haben, das heißt

$$\tilde{A} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & *** & 0 & *** & 0 & *** \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 & & \vdots & \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & 0 & \\ 0 & \dots & & & & \dots & 0 & 1 & *** \\ & & & & & & & & \\ & & & & \mathbf{0} & & & & \\ & & & & & & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \; r\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Lemma 7.3.3

Der Bildraum von $\tilde{A} = F_{\tilde{A}}$ ist isomorph zum $\mathbb{K}^r$, in Zeichen

$$\operatorname{Bild} \tilde{A} = \operatorname{Bild} F_{\tilde{A}} \cong \mathbb{K}^r,$$

weshalb $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} = r$.

Beweis. Es gilt

$$\operatorname{Bild} \tilde{A} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \;\middle|\; y_{r+1} = \dots = y_m = 0 \right\} \cong \mathbb{K}^r$$

und, da die Bilder der kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{K}^r$ unter diesem Isomorphismus Spaltenvektoren von $\tilde{A}$ sind, auch

$$\operatorname{Bild} \tilde{A} \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \;\middle|\; y_{r+1} = \dots = y_m = 0 \right\},$$

also $\operatorname{Bild} \tilde{A} \cong \mathbb{K}^r$, und daher $\operatorname{rg} \tilde{A} = r$. Nach Satz 7.3.1 gilt, da $\tilde{A}$ aus A durch Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen hervorgeht:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} = r.$$

□

Definition 7.3.4: Zeilen- und Spaltenrang

So eben wurde gezeigt, dass der Rang einer Matrix A gleich der Dimension des von den Spaltenvektoren erzeugten Unterraums von $\mathbb{K}^m$ ist; wir bezeichnen ihn daher auch als *Spaltenrang* von A. Analog erklären wir den *Zeilenrang* von A als die Dimension des von den Zeilen von A im $\mathbb{K}^n$ aufgespannten Unterraumes.

Satz 7.3.5: Zeilenrang=Spaltenrang

Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix sind gleich.

Beweis. (i) Die Zeilenvektoren $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ der Matrix $A = (a_{ij})$ bezeichnen wir mit a^i. Bei den Umformungen (U1), (U2) und (U3) gehen die Vektoren $a^1, \ldots, a^m$ über in

(U1) $a^1, \ldots, a^{i-1}, a^k, a^{i+1}, \ldots, a^{k-1}, a^i, a^{k+1}, \ldots, a^m$,

(U2) $a^1, \ldots, a^{k-1}, a^k + \lambda a^i, a^{k+1}, \ldots, a^m$,

(U3) $a^1, \ldots, a^{i-1}, \lambda a^i, a^{i+1}, \ldots, a^m$.

Wie verhält sich bei diesen Umformungen der von den Zeilenvektoren aufgespannte Unterraum?

- Bei (U1) ändert er sich offenbar nicht.
- Bei (U2) ändert er sich nicht, denn $a^k + \lambda a^i$ ist Linearkombination von a^k und a^i und andererseits lässt sich a^k als Linearkombination von a^i und $a^k + \lambda a^i$ darstellen.
- Bei (U3) ändert er sich nicht, denn es ist $a^i = \frac{1}{\lambda}(\lambda a^i)$.

Also haben A und $\tilde{A}$ gleichen Zeilenrang.

(ii) Wir berechnen den Zeilenrang von $\tilde{A}$: Die Zeilenvektoren von $\tilde{A}$ bezeichnen wir mit $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^m$. Da die Vektoren $\tilde{a}^{r+1} = \cdots = \tilde{a}^m = 0$ sind, bilden die Vektoren $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^r$ ein Erzeugendensystem des von den Zeilenvektoren erzeugten Unterraums des $\mathbb{K}^n$. Es ist noch zu zeigen, dass sie auch eine Basis dieses Unterraums bilden, das heißt, es ist zu zeigen, dass $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^r$ linear unabhängig sind. Wir nehmen an, dass sie nicht linear unabhängig sind, dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, die nicht alle $= 0$ sind, mit

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tilde{a}^i = 0.$$

Es sei λ_k die erste Zahl unter den $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, die nicht Null ist, dann gilt

$$a := \lambda_k \tilde{a}^k + \lambda_{k+1} \tilde{a}^{k+1} + \cdots + \lambda_r \tilde{a}^r = 0.$$

Die j_k-te Komponente von a ist λ_k, also ungleich 0, das heißt $a \neq 0$, im Widerspruch zur Annahme. Also sind $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^r$ linear unabhängig.

Da $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^r$ eine Basis des von den Zeilenvektoren aufgespannten Unterraums bilden, hat $\tilde{A}$, und damit auch A, den Zeilenrang r. Der Spaltenrang einer Matrix ist also gleich ihrem Zeilenrang. Wir sprechen deswegen im Folgenden nur noch vom Rang $\operatorname{rg} A$ einer Matrix A. □

7.4 Lösbarkeit und Lösungen von Gleichungssystemen

> Nicht weil die Dinge schwierig sind, wagen wir sie nicht, sondern weil wir sie nicht wagen, sind sie schwierig. (Seneca)

Bislang haben wir nur ein Verfahren angegeben, wie man ein Gleichungssystem praktisch auflösen kann. Wir wollen nun einige theoretische Aussagen über die Lösbarkeit eines Gleichungssystems und seine Lösungen ableiten.

Definition 7.4.1: Bezeichnungen in Gleichungssystemen

Ein lineares Gleichungssystem, in dem alle Koeffizienten b_i der rechten Seite gleich 0 sind heißt *homogen*. Ist wenigstens ein $b_i \neq 0$, so heißt das Gleichungssystem *inhomogen*. Es sei (I) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{I}$$

Ferner sei (H) das zu (I) gehörige homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{H}$$

Mit A bezeichnen wir die *Koeffizientenmatrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

mit (A, b) die *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

(ii) Ist $x = (x_1, \dots, x_n)$ eine Lösung von (I), so durchläuft $x + z$ alle Lösungen von (I), falls $z = (z_1, \dots, z_n)$ alle Lösungen von (H) durchläuft.

(iii) Die Lösungen von (H) bilden einen Unterraum des $\mathbb{K}^n$ der Dimension $n - \operatorname{rg} A$.

Wir teilen den Beweis der Aussagen auf:

Beweis von (i). Es seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, dann lautet das Gleichungssystem (I)

$$A \circ x = b.$$

Wir betrachten A als lineare Abbildung des $\mathbb{K}^n$ in den $\mathbb{K}^m$. Es gilt dann

$$\text{(I) lösbar} \Leftrightarrow b \in \operatorname{Bild} A.$$

Die Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$ von A bilden als Bilder der kanonischen Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n$ im $\mathbb{K}^n$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild} A \subseteq \mathbb{K}^m$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \text{(I) lösbar} &\Leftrightarrow b \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle \\ &\Leftrightarrow b \text{ ist Linearkombination der } a_1, \dots, a_n \\ &\Leftrightarrow \text{Spaltenrang von } A = \text{Spaltenrang von } (A, b) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b). \end{aligned}$$

□

Zu (ii): Wir zeigen allgemeiner[2]

Lemma 7.4.3: Lösungsmenge der inhomogenen linearen Gleichung

Sind V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $F : V \to W$ eine lineare Abbildung von V nach W, $w \in W$ und $v_s \in V$ eine Lösung von

$$F(v_s) = w, \tag{I*}$$

dann durchläuft $u + v_s$ alle Lösungen von (I*), falls $u \in V$ alle Lösungen von

$$F(u) = 0 \tag{H*}$$

durchläuft.

Für $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ und $F = A$ liegt die Situation von Satz 7.4.2 (ii) vor.

[2] da insbesondere ohne Einschränkung der Dimensionen von V und W.

Beweis. (i) Es sei u Lösung von (H*), das heißt $F(u) = 0$, dann ist

$$F(u + v_s) = F(u) + F(v_s) = 0 + w = w.$$

$u + v_s$ ist also eine Lösung von (I*).

(ii) Ist umgekehrt v Lösung von (I*), das heißt $F(v) = w$, dann ist

$$F(v - v_s) = F(v) - F(v_s) = w - w = 0,$$

das heißt $v - v_s$ ist Lösung von (H*). Wir können also v schreiben als $u + v_s$, wobei u $(= v - v_s)$ eine Lösung von (H*) ist. □

Beweis von (iii). Wir fassen A wieder als Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ auf. Die Lösungen von (H) bilden dann den Kern von A. Nach der Dimensionsformel für Kern und Bild einer linearen Abbildung, Satz 6.3.6, folgt

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim \mathbb{K}^n - \dim \operatorname{Bild} A = n - \operatorname{rg} A.$$

Die Lösungen von (H) bilden also einen linearen Unterraum der Dimension $n - \operatorname{rg} A$. □

Abschließend notieren wir noch die folgenden zwei Spezialfälle:

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Bemerkung 7.4.5. Ein lösbares inhomogenes System kann also lösbar, universell lösbar oder eindeutig lösbar sein.

Beweis. Zu (i): Fassen wir A als Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ auf, so ist (I) genau dann lösbar, wenn $b \in \operatorname{Bild} A$ ist. Also ist (I) genau dann für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{Bild} A = \mathbb{K}^m$ ist, das heißt $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

Zu (ii): Aufgrund der Rangformel (Satz 6.3.6)

$$\dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Bild} A) = n$$

gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} A = \{\,0\,\} &\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Ker} A) = 0\\ &\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{Bild} A) = n.\end{aligned}$$

Deshalb gilt der erste Teil von (ii). Dass (I) in diesem Fall höchstens eine Lösung hat, folgt aus 7.4.2 (ii). □

Beispiel 7.4.6.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 6,\\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 6,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= 5. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 - Z_1]{Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Also ist $\operatorname{rg}(A,b) = \operatorname{rg} A = 3 = m = n - 2$. Deshalb ist (7.14) lösbar, sogar universell lösbar, und es gilt $\dim \mathcal{L}_0 = 5 - 3 = 2$, wobei wir $\mathcal{L}_0 = \operatorname{Ker} A$ für den Lösungsraum des zugehörigen homogenen Gleichungssystems schreiben. Wir formen weiter um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 - 5Z_3]{Z_1 - 3Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & 11\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das umgeformte inhomogene Gleichungssystem lautet also:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad + 7x_4 \qquad &= 11,\\ x_3 - \ x_4 \qquad &= 0,\\ x_5 &= -1. \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Lösungsmenge:

- Bestimmung einer speziellen Lösung x_s: Wähle $x_2 = x_4 = 0$, dann ist $x_1 = 11$, $x_3 = 0$ und $x_5 = -1$, das heißt

  $$x_s = \begin{pmatrix} 11\\ 0\\ 0\\ 0\\ -1 \end{pmatrix}$$

  ist eine spezielle Lösung von (7.14).

- Bestimmung der Lösungsmenge der homogenen Gleichung: Es seien $x_2 = \lambda_1$ und $x_4 = \lambda_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, dann liest man aus dem homogenen System direkt ab, dass

$$\begin{aligned} x_1 &= -2\lambda_1 - 7\lambda_2, \\ x_3 &= \lambda_2, \\ x_5 &= 0. \end{aligned}$$

  Also ist

$$\mathcal{L}_0 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Der Lösungsraum $\mathcal{L} = x_s + \mathcal{L}_0$ von (7.14) ist dann

$$\mathcal{L} = \left\{ x = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bemerkung 7.4.7 (Definition)**.** Ist V ein Vektorraum, U ein Unterraum von V und $v \in V$, so heißt

$$U' = U + v := \{ u + v \mid u \in U \}$$

ein ***affiner Unterraum***. Wir setzen $\dim U' := \dim U$. Es gilt also: Die Lösungsmenge eines lösbaren inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$ ist ein affiner Unterraum der Dimension $n - \operatorname{rg} A$ (im Beispiel: 2).

Kapitel 8

Skalarprodukte und Abstände

8.1 Bilinearformen

'Offensichtlich' ist das gefährlichste Wort in der Mathematik.
(Eric Temple Bell)

Definition 8.1.1: Linearform

Eine *Linearform* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{K}$. Die Menge aller Linearformen auf V bilden einen Vektorraum[a] $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$, welcher der zu V *duale Vektorraum* heißt.

[a]Satz 6.2.7.

Bemerkung 8.1.2. Nach der Definition der Matrix einer linearen Abbildung hat die Matrix einer Linearform die Gestalt $(a_1, \dots, a_n)$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, wenn V endlich-dimensional ist. Daher ist durch $e_1^* = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2^* = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n^* = (0, \dots, 0, 1)$ eine Basis von V^* gegeben (die kanonische Basis) und es folgt, dass $\dim V^* = \dim V$.

Beispiele 8.1.3. (i) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 - x_2 + 3x_3$, ist eine Linearform, die Matrix von φ bezüglich der kanonischen Basen im $\mathbb{R}^3$ und $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ ist $(2, -1, 3)$. Dies rechnet man leicht selbst nach.

(ii) Aus den Grenzwertsätzen 3.1.17 folgt, dass die Abbildung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$ eine Linearform auf dem Vektorraum der konvergenten reellen Folgen ist.

(iii) Wir betrachten das *kanonische Skalarprodukt* auf dem $\mathbb{R}^n$: Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^n$ ist es durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ definiert.

Für festes $x = x_0$ beziehungsweise $y = y_0$ ist $F(y) := \langle x_0, y\rangle$ beziehungsweise $G(x) := \langle x, y_0\rangle$ eine Linearform, wie man leicht selbst nachrechnet. Die Matrix der Linearform F beziehungsweise G ist der Zeilenvektor $x_0^\top$ beziehungsweise $y_0^\top$, denn zum Beispiel gilt $\langle x, y_0\rangle = \sum_{i=1}^n x_i(y_0)_i = y_0^\top \cdot x$.

Die Situation aus dem letzten Beispiel mit einer Funktion mit zwei Argumenten, die in jedem der Argumente linear ist, wenn man das andere fest hält, und in den zugrundeliegenden Körper abbildet, betrachten wir allgemeiner:

Definition 8.1.4: Bilinearform

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, dann ist eine *Bilinearform* auf $V \times W$ eine Abbildung

$$B : V \times W \to \mathbb{K},\ (v, w) \mapsto B(v, w),$$

die für jedes feste $v \in V$ beziehungsweise jedes feste $w \in W$ eine Linearform auf W beziehungsweise V ist. Das heißt, für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und alle $w, w_1, w_2 \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(B1) $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$,

(B2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$,

(B3) $B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$,

(B4) $B(v, \lambda w) = \lambda B(v, w)$.

Bemerkung 8.1.5 (Sesquilinearform)**.** Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so spielt der Begriff der *Sesquilinearform* eine Rolle. Im Unterschied zur Bilinearform wird bei einer Sesquilinearform entweder aus dem ersten oder dem zweiten Argument[1] ein konstanter Faktor komplex konjugiert herausgezogen, das heißt, statt etwa (B4) gilt

(B4') $B(v, \lambda w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.

Entsprechend bedeutet sesquilinear anderthalbfach-linear.

Beispiele 8.1.6. (i) Durch $B : V^* \times V \to \mathbb{K}$, $B(\varphi, v) := \varphi(v)$ ist eine Bilinearform auf $V^* \times V$ gegeben, denn für Linearformen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ und $v, v_1, v_2 \in V$ gilt

(a) $B(\varphi_1 + \varphi_2, v) = (\varphi_1 + \varphi_2)(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v) = B(\varphi_1, v) + B(\varphi_2, v)$,

(b) $B(\lambda\varphi, v) = (\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v) = \lambda B(\varphi, v)$,

[1] je nach Literatur/Quelle

(c) $B(\varphi, v_1 + v_2) = \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = B(\varphi, v_1) + B(\varphi, v_2)$,

(d) $B(\varphi, \lambda v) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda B(\varphi, v)$.

(ii) Das kanonische Skalarprodukt aus Beispiel 8.1.3 (iii) ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(iii) Auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ ist durch $B(x, y) = x_1(y_2 - 2y_1) + x_2(y_3 + y_1)$ eine Bilinearform erklärt, wie man leicht selbst nachrechnet.

Definition 8.1.7: Orthogonalität

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $B : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform, dann heißen $v \in V$ und $w \in W$ *orthogonal* bezüglich der Bilinearform B, falls $B(v, w) = 0$ gilt. Für $M \subseteq V$ ist

$$M^\perp := \{\, w \in W \mid \forall v \in M\, (B(v, w) = 0)\,\}$$

ein Unterraum von W. Er heißt der zu M *orthogonale Unterraum* bezüglich B. Analog erklärt man für $N \subseteq W$ den zu N orthogonalen Unterraum $N^\perp \subseteq V$ bezüglich B.

Beispiele 8.1.8. (i) Die Vektoren $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal bezüglich dem kanonischen Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$, da $2\pi + 2(-\pi) + 0 \cdot 1 = 0$. Der zu $M = \{\, x \,\}$ orthogonale Unterraum ist $M^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

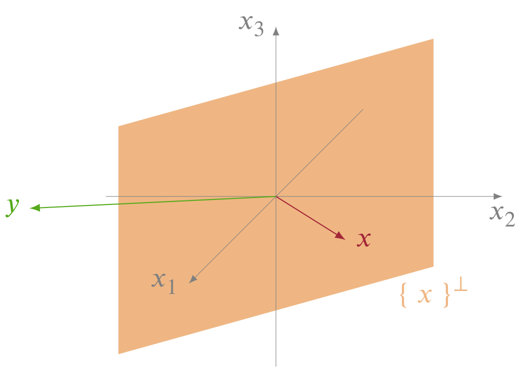


Abbildung 8.1: Orthogonalität bezüglich einer Bilinearform.

(ii) Ist $B(x, y) = x_1(y_2 - 2y_1) + x_2(y_3 + y_1)$ auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$, so sind $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal bezüglich B. Tatsächlich gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^2$, dass $B(x, y) = 0$ ist, das heißt, $\{ y \}^\perp = \mathbb{R}^2$.

(iii) Für jedes Paar von $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W ist durch $B(v, w) := 0$ eine Bilinearform auf $V \times W$ gegeben. Bezüglich dieser Bilinearform ist für jedes $M \subseteq V$ $M^\perp = W$ und für jedes $N \subseteq W$ $N^\perp = V$.

(iv) Die Situation, die in den letzten beiden Beispielen aufgetreten ist, tritt etwa beim kanonischen Skalarprodukt nicht auf. Genauer lässt sich zu jedem $x \neq 0$ ein y finden, so dass $\langle x, y\rangle \neq 0$ gilt, zum Beispiel $y = x$.

Zur Unterscheidung dieser Fälle führen wir die folgende Begrifflichkeit ein:

Definition 8.1.9: Ausartung

Eine Bilinearform $B : V \times W \to \mathbb{K}$ heißt *auf* V beziehungsweise *auf* W *nicht ausgeartet*, wenn aus $B(v, w) = 0$ für alle $w \in W$ beziehungsweise für alle $v \in V$ folgt, dass $v = 0$ beziehungsweise $w = 0$ ist. B heißt *nicht ausgeartet*, wenn B auf V und auf W nicht ausgeartet ist[a].

[a]entsprechend ist die Sprachregelung zu *ausgearteten* Bilinearformen.

Beispiele 8.1.10. (i) Die Bilinearform $B : V^* \times V \to \mathbb{K}$, $B(\varphi, v) = \varphi(v)$ ist nicht ausgeartet.

(ii) Das kanonische Skalarprodukt ist nicht ausgeartet (siehe oben).

(iii) Die Bilinearform $B(x, y) = x_1(y_2 - 2y_1) + x_2(y_3 + y_1)$ auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ ist ausgeartet auf $\mathbb{R}^3$ und nicht ausgeartet auf $\mathbb{R}^2$.

Wir kommen nun zu Bilinearformen, deren Argumente wie etwa beim kanonischen Skalarprodukt aus dem selben Vektorraum kommen. Damit sind weitere mögliche Eigenschaften sinnvoll formulierbar:

Definition 8.1.11: Symmetrie, Definitheit, Skalarprodukt

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann heißt eine Bilinearform B auf $V \times V$

(i) *symmetrisch*, falls für alle $v, w \in V$ $B(v, w) = B(w, v)$ gilt.

(ii) *positiv definit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{ 0 \} (B(v, v) > 0)$.

(iii) *negativ definit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{ 0 \} (B(v, v) < 0)$.

(iv) *positiv* beziehungsweise *negativ semidefinit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{0\} (B(v, v) \geq 0)$ beziehungsweise ≤ 0.

(v) *indefinit*, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und B weder positiv noch negativ semidefinit ist.

(vi) ein *Skalarprodukt*, falls B positiv definit und symmetrisch ist.

Bemerkung 8.1.12. Offenbar ist ein Skalarprodukt stets nicht ausgeartet.

Bemerkung 8.1.13 (Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen)**.** Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, dann heißt eine Bilinearform B auf $V \times V$ ***hermitesch***[2], falls für alle $v, w \in V$

- $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$ gilt.

In diesem Fall ist $B(v, v) = \overline{B(v, v)}$ und daher $B(v, v) \in \mathbb{R}$, das heißt, die positive Definitheit lässt sich auch in diesem Fall sinnvoll erklären. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform (siehe 8.1.5).

Beispiele 8.1.14. (i) Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (oder kurz: auf dem $\mathbb{R}^n$) ist ein Skalarprodukt im Sinne der Definition.

(ii) Die durch $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ auf $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ definierte Sesquilinearform ist hermitesch und positiv definit und heißt das *kanonische Skalarprodukt* auf $\mathbb{C}^n$.

(iii) Die durch $B(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definierte Bilinearform ist symmetrisch, aber nicht positiv definit, denn für alle x mit $x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$ ist $B(x, x) = 0$.

Bemerkung 8.1.15. Bilinearformen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen lassen sich wieder mit Matrizen darstellen, so ist etwa das kanonische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ gegeben durch $\langle x, y \rangle = B(x, y) = x^{\mathsf{T}} I y$ und die Bilinearform $B(x, y) = x_1(y_2 - 2y_1) + x_2(y_3 + y_1)$ auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ lässt sich darstellen als

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend lassen sich die Definitionen von Indefinitheit sowie positiver und negativer (Semi-)Definitheit auf reelle quadratische Matrizen übertragen. Weiter kann man sagen, dass eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ ***hermitesch*** ist, wenn $A^{\mathsf{T}} = \overline{A}$ gilt. Je nach Anwendungsfall lassen sich mit diesen Eigenschaften weitere Aussagen beziehungsweise Ansätze zur Lösung des Problems machen.

[2] Charles Hermite, 1822 - 1901, frz. Mathematiker

Beispiel 8.1.16 (Hadamard-Matrizen)**.** Hadamard-Matrizen sind Matrizen, die nur die Einträge ± 1 aufweisen, siehe beispielsweise (8.1), und deren Zeilen beziehungsweise Spalten paarweise orthogonal sind. Es gilt für eine n-reihige Hadamard-Matrix H genauer $HH^\top = H^\top H = nI_n$.

$$H_1 = (1), \; H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \dots \tag{8.1}$$

Sie spielen eine Rolle in der Codierungstheorie, vergleiche Beispiel 5.2.8. Wie dort bereits erwähnt, wird die die Existenz von solchen Matrizen genau für Dimensionen 1, 2 und solche vermutet, die durch vier teilbar sind. Die Bedingung ist notwendig, inwiefern sie auch hinreichend ist, ist im Allgemeinen ungelöst. Die kleinste solche Dimension, für die bislang keine Hadamard-Matrix gefunden wurde ist $n = 668$.

8.2 Normen und Metriken

Ist es normal, nur weil alle es tun? (Die Fantastischen Vier)

Das Problem, Längen oder Abstände messen zu können, tritt an vielen Stellen auf. Der Word2vec-Algorithmus erzeugt beispielsweise aus einer großen Menge Text einen Vektorraum, in dem „verwandte" Wörter, nah beieinander liegen. Neben dem über die Cauchy-Schwarz-Ungleichung 8.2.8 definierten Winkel (vergleiche Aufgabe A.8.11) spielt dabei auch der Abstand der Wort-Vektoren eine Rolle. Darüber hinaus gibt es Ansätze, auch semantisch korrekt in solchen Vektorräumen rechnen zu können. Das erfordert aber mitunter den Verzicht auf beziehungsweise die Modifikation von einigen im Folgenden betrachteten Eigenschaften eines Abstands, einer Länge von Vektoren.

Wir wollen den Betrag $|\cdot|$, wie wir ihn von den reellen und komplexen Zahlen kennen, verallgemeinern.

Definition 8.2.1: Kanonische Norm und Abstand im $\mathbb{R}^n$

Es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, dann definieren wir die *Norm* (Länge, Betrag, Euklidische Norm) von x als

$$\|x\| := \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Der *Abstand* von zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist dann nach dem Satz des Pythagoras

$$d(x,y) := \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

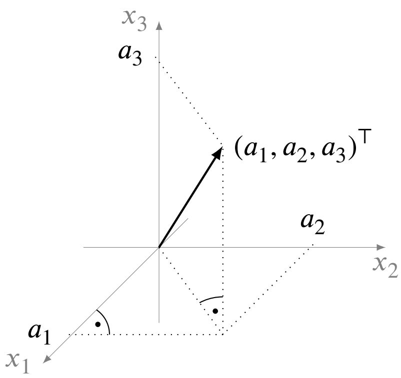


Abbildung 8.2: Kanonische Länge eines Vektors nach dem Satz des Pythagoras.

Für $n = 1$ stimmt also diese Definition mit der Definition des Betrags und Abstands in $\mathbb{R}$ überein. Allgemeiner kann man wie folgt eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ definieren:

Definition 8.2.2: p-Norm

Es seien $x \in \mathbb{R}^n$ oder $x \in \mathbb{C}^n$ und $1 \leq p \leq \infty$, dann heißt

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1\leq i\leq n} |x_i|, & \text{für } p = \infty \end{cases} \tag{8.2}$$

die *p-Norm* von x.
Ist p nicht explizit angegeben, gehen wir immer von der kanonischen Norm mit $p = 2$ aus.
Durch $d_p(x,y) := \|x-y\|_p$ ist dann wieder ein Abstandsbegriff gegeben.

Der Betrag in (8.2) wird benötigt, weil für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und $p \geq 1$ sonst möglicherweise x^p oder die p-te Wurzel aus der Summe nicht definiert ist beziehungsweise, da für $x \in \mathbb{C}$ x^p im Allgemeinen nicht reell ist und in Folge die p-te Wurzel nicht eindeutig ist und eventuell nicht reell wird, was für eine Länge ungewünscht ist.

Beispiel 8.2.3. Es sei $x = (1, -3, 2)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= |1| + |-3| + |2| = 6,\\ \|x\| = \|x\|_2 &= \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{14},\\ \|x\|_\infty &= \max\{\,|1|\,,|-3|\,,|2|\,\} = 3.\end{aligned}$$

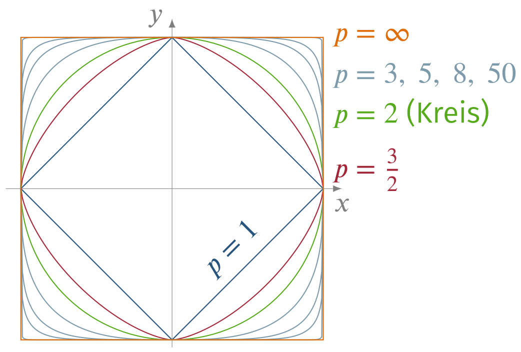


Abbildung 8.3: Mengen $U_1(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1 \right\}$ in verschiedenen p-Normen.

Jede der oben definierten Normen hat die folgenden Eigenschaften:

Bemerkung 8.2.4. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ für ein $1 \leq p \leq \infty$, dann gilt

(N1) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit).

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (Homogenität).

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Allgemeiner ist

Definition 8.2.5: Normierter Raum

Es sei V ein Vektorraum und $N : V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (N1)-(N3), dann heißt N *Norm* auf V und (V, N) heißt *normierter Raum*.

Beispiel 8.2.6. Es seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und M die Menge der beschränkten reellen Funktion auf $[a, b]$, das heißt,

$$M = \{\, f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid \exists c > 0 \forall x \in [a, b]\, (|f(x)| \leq c) \,\},$$

dann wird durch $\|f\| := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ eine Norm auf M definiert. Das ist klar beziehungsweise folgt sofort aus Aufgabe A.3.30, zusätzlich überlegt man sich leicht, dass M ein reeller Vektorraum ist.

Satz 8.2.7: Induzierte Norm

Auf jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ist für $x \in V$ durch $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ eine Norm, die sogenannte *induzierte Norm*, erklärt. Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ ist dies gerade die 2-Norm. Vektorräume, die bezüglich der induzierten Norm vollständig im Sinne von Bemerkung 3.3.21 (ii) sind, heißen *Hilberträume*[a].

[a]David Hilbert, 1862-1943, dt. Mathematiker

Beweis. Dies folgt aus den Eigenschaften des Skalarprodukts und der Monotonie der Wurzel. □

Satz 8.2.8: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Es sei V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der induzierten Norm $\|\cdot\|$, dann gilt für alle $x, y \in V$ die Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \,,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $x = \lambda y$ oder $y = \lambda x$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beziehungsweise $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis. Wenn $y = 0$ ist, so liegt offenbar Gleichheit vor und auch die lineare Abhängigkeit von x und y ist gegeben. Es sei nun also $y \neq 0$. Wir können annehmen, dass $\langle x, y\rangle \neq 0$, da andernfalls die Ungleichung trivialerweise erfüllt ist. Wir setzen $z = x - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y$. Aufgrund der Linearität des Skalarprodukts im ersten Argument folgt

$$\langle z, y\rangle = \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, y \right\rangle = \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, y\rangle = 0.$$

Das bedeutet, y und z sind orthogonal zueinander. Daher folgt mit $x = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y + z$

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\langle \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y + z, \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y + z \right\rangle \\ &= \left| \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \right|^2 \|y\|^2 + \|z\|^2 = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \|z\|^2 \geq \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}, \end{aligned}$$

woraus durch Multiplikation mit $\|y\|^2$ die Ungleichung folgt. Weiter handelt es sich genau dann um eine Gleichheit, wenn $\|z\|^2 = 0$, das heißt, wenn $z = 0$ gilt. Aus der Definition von z folgt dann die behauptete lineare Abhängigkeit. □

Beispiele 8.2.9. (i) Das *Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren*[3] ist ein Algorithmus, um aus einer Menge von linear unabhängigen Vektoren $\{ v_1, v_2, \dots \}$ mit Hilfe eines Skalarprodukts und der davon induzierten Norm eine Menge von paarweise orthogonalen Vektoren der Länge 1, ein sogenanntes *Orthonormalsystem* zu erhalten. Bilden die resultierenden Vektoren eine Basis, spricht man von einer *Orthonormalbasis*. Man setzt $w_1 := \frac{1}{\|v_1\|} v_1$ und für $k = 2, \dots$

$$w_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{\left\| w_j \right\|^2} w_j.$$

Die Vektoren w_i, $i = 2, \dots$ werden abschließend noch mit $\frac{1}{\|w_i\|}$ multipliziert. Die geometrische Idee dahinter ist, dass durch $\frac{\langle w_j, v_k \rangle}{\left\| w_j \right\|} w_j$ die Projektion von v_j auf v_k gegeben ist und der resultierende Vektor w_k diesen Anteil dann nicht mehr hat (Abbildung 8.4). Vergleiche auch Aufgabe A.8.8.

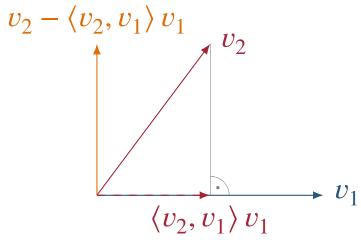


Abbildung 8.4: Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren: Skalarprodukt und Projektion eines Vektors auf einen anderen. Der Vektor v_1 wird hier als normiert angenommen, das heißt, es ist $\|v_1\| = 1$.

(ii) Eine *orthogonale Matrix* ist eine reguläre Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, für die $A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$ gilt. Die Zeilen beziehungsweise Spalten einer orthogonalen Matrix bilden eine *Orthonormalbasis* des $\mathbb{R}^n$. Die orthogonalen Matrizen bilden eine mit $O(n)$ bezeichnete Untergruppe der invertierbaren Matrizen $GL(n)$. Die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO(n)$ ist eine Untergruppe der orthogonalen Matrizen, welche die *echten* Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ realisiert. Eine genaue Charakterisierung ist erst mit den Hilfsmitteln des nächsten Kapitels möglich, siehe Aufgabe A.9.7.

[3] benannt nach Jørgen Pedersen Gram, 1850-1916, dän. Mathematiker, und Erhard Schmidt, 1876-1959, dt. Mathematiker, aber bereits früher gefunden.

(iii) Entsprechend heißt eine reguläre komplexe Matrix $A \in (n \times n, \mathbb{C})$ *unitär*, wenn $\overline{A}^{\top} = A^{-1}$ gilt. Die Zeilen beziehungsweise Spalten einer n-reihigen unitären Matrix bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$. Unitäre Matrizen werden zum Beispiel im Quantencomputing verwendet, um die Zustandsänderungen der Quantenbits zu beschreiben, siehe etwa [16] und weiter Aufgabe A.8.9.

(iv) Eingangs wurde bereits die Möglichkeit erwähnt, über die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung das Skalarprodukt mit dem Begriff eines *Winkels* zwischen Vektoren zu verbinden (Aufgabe A.8.11). Die damit verbundene sogenannte *Kosinus-Ähnlichkeit* wird etwa im maschinellen Lernen eingesetzt. Des Weiteren wird bei neuronalen Netzen das Eingangssignal über ein Skalarprodukt mit einem Gewichtsvektor an die Ausgabefunktion übergeben - im „Lernprozess“ wird dann der Gewichtsvektor angepasst (siehe Beispiel B.3.2), um bei gegebenem Eingangssignal das gewünschte Ausgangssignal zu erhalten.

Beispiel 8.2.10 (Matrixnormen)**.** Es sei $\|\cdot\|_a$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\|_a := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}$$

eine Norm auf $M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert, wie man leicht zeigt (Aufgabe A.8.10).

Weiter erhält man, da $M(m \times n, \mathbb{R})$ und der $\mathbb{R}^{mn}$ isomorph sind (Bemerkung 6.2.10 (ii)), durch jede Norm auf dem $\mathbb{R}^{mn}$ auch eine auf $M(m \times n, \mathbb{R})$. So führt etwa die kanonische Norm auf dem $\mathbb{R}^{mn}$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{mn} |x_i|^2}$ für $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ mit $x_1 = a_{11}$, $x_2 = a_{12}$, ..., $x_n = a_{1n}$, $x_{n+1} = x_{21}$, ..., $x_{mn} = a_{mn}$ zur *Frobenius*[4]*-Norm*

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Wir betrachten noch die Verallgemeinerung des Abstandsbegriffs, dafür stellen wir zunächst fest:

Bemerkung 8.2.11. Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Der Abstand d aus Definition 8.2.1 hat folgende Eigenschaften

(Me1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(Me2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).

(Me3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Allgemeiner ist

[4] Ferdinand Georg Frobenius, 1849-1917, dt. Mathematiker

Definition 8.2.12: Metrik und metrischer Raum

Es sei $M \neq \emptyset$ und $d : M \times M \to \mathbb{R}$ habe die Eigenschaften (Me1)-(Me3), dann heißt d *Abstand* oder *Metrik* auf M und das Paar (M, d) heißt *metrischer Raum*.

Beispiele 8.2.13. (i) Es sei $M \neq \emptyset$, dann ist durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

ein Abstand gegeben (*diskrete Metrik*).

(ii) Betrachten wir die Menge der Codes der Länge n, das heißt die Menge $M = \{ 0, 1 \}^n$, dann ist für $x \in M$ durch

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

eine Norm und für $x, y \in M$ durch

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

ein Abstand (Metrik) definiert. Dieser sogenannte *Hamming-Abstand* liefert gerade die Anzahl der Stellen, an denen sich die beiden Codes (Vektoren) unterscheiden und spielt zum Beispiel bei der Erkennung und Korrektur von Fehlern bei der Datenübertragung eine Rolle.

(iii) Auf einem zusammenhängenden Graph (siehe Modul „Grundlagen der Theoretischen Informatik“) lässt sich ein Abstand durch die Länge des kürzesten Weges zwischen zwei Knoten definieren, siehe auch Abbildung 6.2. Beschreibt der Graph einen Algorithmus, kann man auf diese Weise einen optimalen Lösungsweg finden beziehungsweise die Suche nach ihm beschreiben (dazu sollte der Graph noch „gerichtet“ (Ablauf des Verfahrens) und „gewichtet“ (Berücksichtigung des Aufwands) sein).

(iv) Wir betrachten die sogenannte Dschungel-Metrik auf dem $\mathbb{R}^2$: Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$d(x, y) := \begin{cases} |y_1 - y_2|, & x_1 = x_2, \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2|, & x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

Man stellt sich vor, man hat einen leicht befahrbaren Fluss auf der

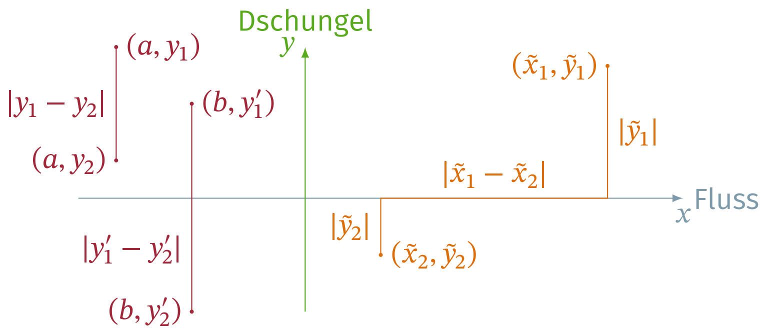


Abbildung 8.5: Zur Dschungelmetrik: Durch den Dschungel zum Fluss und ggf. weiter durch den Dschungel.

ersten Koordinatenachse und über all sonst schwer durchdringbaren Dschungel. Man schlägt sich daher jeweils auf dem kürzesten Weg zum Fluss durch, hält an, wenn man dabei sein Ziel erreicht beziehungsweise überquert direkt den Fluss und geht weiter, oder man fährt dann ein Stück auf dem Fluss und schlägt sich danach wieder auf dem direkten Weg zum Ziel durch. Die Eigenschaften einer Metrik nachzuweisen, sind insbesondere bei der Dreiecksungleichung eine reine Fleissarbeit mit Fallunterscheidungen, die zur Übung überlassen wird.

(v) Ist (M, N) ein normierter Raum, dann ist durch $d(x, y) = N(x-y)$ eine Metrik gegeben, so dass (M, d) zu einem metrischen Raum wird. Die Umkehrung gilt nicht, vergleiche Aufgabe A.8.13.

(vi) Im Machine-Learning gibt es die Technik des „metrischen Lernens“, bei dem ein Abstandsbegriff gelernt werden soll, der für das jeweilige Problem die Daten richtig gruppiert. Es wird bei dem gesuchten „Abstand“ allerdings darauf verzichtet, dass $d(x, y) = 0$ $x = y$ impliziert – das ist für das Problem nicht relevant.

Kapitel 9

Determinanten und das Eigenwertproblem

9.1 Determinanten

> Denn es ist eines ausgezeichneten Mannes nicht würdig, wertvolle Stunden wie ein Sklave im Keller der einfachen Berechnungen zu verbringen. (Gottfried Wilhelm Leibniz)

Motivation 9.1.1. Betrachten wir ein beliebiges 2×2-Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, dann erhalten wir durch elementare Umformungen ($Z_1 \to a_{22}Z_1 - a_{12}Z_2$, $Z_2 \to a_{11}Z_2 - a_{21}Z_1$) die Gleichungen

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{aligned}$$

Jetzt ist offensichtlich das Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ gilt. In dem Fall können wir die Lösung $x = (x_1, x_2)^\mathsf{T}$ nach Division direkt angeben. Vereinbaren wir noch die folgende Schreibweise

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

und nennen diesen Ausdruck die *Determinante* der Matrix, so können auch die rechte Seite in dieser Form schreiben und erhalten

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Bei dieser Formel handelt es sich um die Cramersche[1] Regel, sie ist auch in höheren Dimensionen gültig, für die tatsächliche Lösung von Gleichungssystemen aber aufgrund des hohen Rechenaufwandes kaum geeignet.

Wird ein Parallelogramm in der Ebene von den Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ aufgespannt, kann man diese analog zu den komplexen Zahlen in Polarkoordinatendarstellung darstellen:

$$a = r_a \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad b = r_b \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}.$$

Gehen wir im Beispiel von $\beta \geq \alpha$ und $0 \leq \beta - \alpha \leq \pi$ aus, so hat die Höhe auf die durch a gegebene Seite die Länge $\sin(\beta-\alpha)\,\|b\|$ (Abbildung 9.1). Das

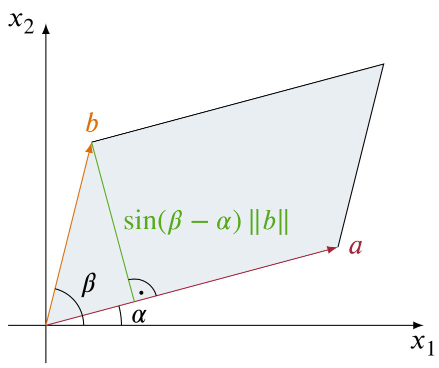


Abbildung 9.1: Flächeninhalt eines Parallelogramms.

Parallelogramm hat daher den Flächeninhalt $F = \sin(\beta-\alpha)\,\|b\|\,\|a\|$ und da $\|a\| = r_a$ und $\|b\| = r_b$, folgt mit den Additionstheoremen 3.5.15 (ii)

$$F = r_a r_b\,(\cos\alpha\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha) = \begin{vmatrix} r_a\cos\alpha & r_b\cos\beta \\ r_a\sin\alpha & r_b\sin\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante gibt also den Flächeninhalt wieder. Diese Formel lässt sich auf das Volumen von ***Parallelotopen*** im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern (für $n = 3$ auch als *Spat* bezeichnet).

Der folgende allgemeine Begriff der Determinante und die Formel lassen sich zwar mathematisch eleganter axiomatisch über die Aussagen (i) und (iii) aus Satz 9.1.5 sowie (ii) aus Korollar 9.1.6 herleiten, wir ersparen uns aber den Aufwand und setzen:

[1]Gabriel Cramer, 1704 - 1752, schweiz. Mathematiker.

Definition 9.1.2: Determinante einer Matrix

Es sei (a_{ki}) eine n-reihige Matrix, dann heißt

$$\det(a_{ki}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \tag{9.1}$$

die *Determinante* der Matrix (a_{ki}).

Beispiele 9.1.3. Wir wollen die Determinante einer n-reihigen Matrix für $n = 1, 2, 3$ berechnen. In Bemerkung 2.3.4 (iii) hatten wir die entsprechenden Permutationen bereits aufgeführt.

$$n = 1 \qquad \det(a_{11}) = a_{11}.$$

$$n = 2 \qquad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} n = 3 \qquad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}. \end{aligned}$$

Die Vorschrift zur Berechnung der Determinante für $n = 3$ ist als *Sarrussche*[2] *Regel* bekannt. Für $n \geq 4$ werden die $n!$ Summanden schnell unübersichtlich, wir betrachten später Methoden, um die Berechnung schrittweise zu vereinfachen.

Satz 9.1.4: Determinante der transponierten Matrix

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dann gilt $\det A = \det A^{\mathsf{T}}$.

Beweis. Für $\pi \in S_n$ hatten wir bereits $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi^{-1}$ gezeigt (Bemerkung 2.3.15) und es gilt $A^{\mathsf{T}} = (b_{ki}) = (a_{ik})$, folglich wird aus dem Faktor $a_{i\pi(i)}$ in der Definition der Determinante für A^{T} $a_{\pi(i)i}$. Es gilt also dann

$$\begin{aligned} \det A^{\mathsf{T}} &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} a_{1\pi^{-1}(1)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)} = \det A, \end{aligned}$$

denn wenn π alle Permutationen von S_n durchläuft, durchläuft auch π^{-1} alle Permutationen von S_n. □

[2] Pierre Frédéric Sarrus, 1798 - 1861, frz. Mathematiker

Satz 9.1.5

Es sei $A = (a_{ik}) \in M(n \times n, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

(i) $\det A$ multipliziert sich mit λ, wenn man eine Zeile[a] mit λ multipliziert (siehe auch Aufgabe A.9.1).

(ii) $\det A$ bleibt unverändert, wenn man ein Vielfaches einer Zeile von A zu einer anderen addiert.

(iii) $\det I = 1$.

[a]die Aussagen gelten auch für Spalten, siehe 9.1.6.

Beweis. (i) Folgt sofort aus (9.1), denn für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1\pi(1)} \cdots \lambda a_{i\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} = \lambda \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

(ii) Für $i, k \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq k$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1\pi(1)} \cdots (a_{k\pi(k)} + \lambda a_{i\pi(k)}) \cdots a_{n\pi(n)} \\
&\qquad = \det A + \lambda \underbrace{\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{i\pi(k)} \cdots a_{n\pi(n)}}_{=(*)}.
\end{aligned}$$

Der Tausch von $a_{i\pi(i)}$ an der i-ten mit $a_{i\pi(k)}$ an der k-ten Stelle erfolgt durch die Transposition τ_{ik}, ändert aber bis auf das Vorzeichen der Transposition nichts am Produkt, es ist gilt also

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{i\pi(k)} \cdots a_{n\pi(n)} \\
&\qquad = \sum_{\tau_{ik}\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau_{ik}\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(k)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} \\
&\qquad\qquad = -\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{1\pi(1)} \cdots a_{i\pi(k)} \cdots a_{i\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)}.
\end{aligned}$$

Also gilt $(*) = 0$.

(iii) Da $I = (\delta_{ik})$ gilt $\delta_{1\pi(1)} \cdots \delta_{n\pi(n)} = 0$ für alle $\pi \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ und folglich

$$\det I = \operatorname{sgn} \mathrm{id}\, \delta_{11} \cdots \delta_{nn} = 1. \qquad \square$$

Korollar 9.1.6

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dann gilt

(i) $\det A$ ändert bei Zeilenvertauschungen das Vorzeichen.

(ii) $\det A = 0$, falls die Zeilenvektoren von A linear abhängig sind, insbesondere falls zwei gleiche Zeilen oder eine nur aus Nullen bestehende Zeile auftritt.

(iii) Die in den Sätzen 9.1.4, 9.1.5 und dem Korollar 9.1.6 genannten Eigenschaften bezüglich der Zeilen gelten auch für die Spalten.

(iv) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\det \lambda A = \lambda^n \det A$.

Beweis. (i) Wir tauschen mit Satz 9.1.5 (ii) die k-te und i-te Zeile wie folgt:

$$\begin{matrix} a_k \\ a_i \end{matrix} \to \begin{matrix} a_k \\ a_i + a_k \end{matrix} \to \begin{matrix} -a_i \\ a_i + a_k \end{matrix} \to \begin{matrix} -a_i \\ a_k \end{matrix}.$$

Da diese Umformungen die Determinante nicht ändern, wir aber mit Satz 9.1.5 (i) noch den Faktor -1 herausziehen können, folgt

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(ii) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i$. Durch sukzessive Subtraktion des λ_i-fachen der i-ten Zeile von der ersten Zeile erhält man ohne Änderung der Determinante (Satz 9.1.5 (ii)) eine Matrix B, die in der ersten Zeile nur Nullen hat. Für diese folgt aus (9.1), dass $0 = \det B = \det A$.

(iii) Folgt sofort aus Satz 9.1.4.

(iv) Aufgabe A.9.3. □

Lemma 9.1.7: Determinantenentwicklung

Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ von der speziellen Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit $A' \in M((n-1)\times(n-1), \mathbb{K})$, so gilt

$$\det A = a_1 \det A'.$$

Beweis. Dies folgt aus Definition 9.1.2, da in der Summe in (9.1) nur die Permutationen π mit $\pi(1) = 1$ einen nicht verschwindenden Beitrag zur Summe liefern. □

Korollar 9.1.8: Determinante einer Dreiecksmatrix

Ist A eine *obere Dreiecksmatrix*, das heißt

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & * & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & a_n \end{pmatrix},$$

so folgt durch sukzessive Anwendung von Lemma 9.1.7, dass

$$\det A = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist also das Produkt der Diagonalelemente. Insbesondere folgt mit Korollar 9.1.6 (ii), dass $\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} A < n$.

Beispiel 9.1.9.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ -4 & 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 - \frac{3}{2}Z_1 \\ Z_4 - \frac{1}{2}Z_1}]{Z_2 + 2Z_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 + 7Z_2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 101 & 22 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4 - \frac{2}{101}Z_3} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 101 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{865}{101} \end{pmatrix}$$

und daher $\det A = 2 \cdot (-1) \cdot 101 \cdot \frac{865}{101} = -1730$.

Bemerkungen 9.1.10. (i) Allgemeiner gilt für *Blockmatrizen* bezeichnete $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ der Form $A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit $A_1 \in M(k \times k, \mathbb{K})$ und $A_2 \in M((n-k)\times(n-k), \mathbb{K})$, dass $\det A = \det A_1 \cdot \det A_2$.

(ii) Durch Übergang zu der transponierten Matrix erhält man analoge Aussage für Blockmatrizen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ * & A' \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix}$$

sowie *untere Dreiecksmatrizen*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \\ & * & & a_n \end{pmatrix}.$$

Beispiele 9.1.11. (i) Wir berechnen

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 101 & 22 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 101 & 22 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = -1730.$$

(ii) Wir berechnen die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

indem wir die Matrix in eine Form $\begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ * & A'' \end{pmatrix}$ überführen. Anschließend wendet man dieses Verfahren auf die Blöcke A' und A'' an, bis man sie auf leicht zu berechnende Determinanten zurückgeführt hat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{Z_2-3Z_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -27 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Block}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -27 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Aus der zweiten Spalte ziehen wir dann den Faktor 2 heraus:

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -27 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \overset{2\cdot\frac{1}{2}S_2}{=} 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -27 & 2 & 2 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{S_3-3S_2}{\overset{S_1-S_2}{=}} 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -29 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -12 \end{vmatrix}$$

$$\overset{S_1\leftrightarrow S_2}{=} \underbrace{-}_{\text{Tausch!}} 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -29 & -4 \\ 4 & 3 & -12 \end{vmatrix} \overset{\text{Block}}{=} -4\begin{vmatrix} -29 & -4 \\ 3 & -12 \end{vmatrix}.$$

Ziehen wir aus der letzten Spalte den Faktor −4 und anschließend aus der letzten Zeile den Faktor 3, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&4&5&6\\7&8&0&0\\9&0&1&2\end{vmatrix} &= -4\begin{vmatrix}-29&-4\\3&-12\end{vmatrix}\\ &= (-4)\cdot(-4)\cdot 3\begin{vmatrix}-29&1\\1&1\end{vmatrix}\\ &= 48(-29-1) = -48\cdot 30 = -1440.\end{aligned}$$

(iii)

$$A = \begin{pmatrix}2&7&4&3\\1&3&2&4\\-1&0&-1&3\\3&7&5&5\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1\leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix}1&3&2&4\\2&7&4&3\\-1&0&-1&3\\3&7&5&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{Z_3+Z_1\\Z_4-3Z_1}]{Z_2-2Z_1} \begin{pmatrix}1&3&2&4\\0&1&0&-5\\0&3&1&7\\0&-2&-1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4+2Z_2]{Z_3-3Z_2} \begin{pmatrix}1&3&2&4\\0&1&0&-5\\0&0&1&22\\0&0&-1&-17\end{pmatrix}$$

Wegen der Zeilenvertauschung im ersten Schritt haben wir also

$$\det A = -\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&22\\-1&-17\end{vmatrix} = -5.$$

Wir verallgemeinern das Vorgehen aus dem Beispiel:

Es sei (a_{ki}) eine n-reihige Matrix. Wir schreiben den i-ten Spaltenvektor $\begin{pmatrix}a_{1i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}$ mit der kanonischen Basis im $\mathbb{K}^n$ in der Form $\begin{pmatrix}a_{1i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\a_{ki}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

Damit erhalten wir wegen der Linearität der Determinante in jeder Zeile und jeder Spalte (Satz 9.1.5 (i), Aufgabe A.9.1 und Satz 9.1.4)

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&a_{1i}&\dots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{ni}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix}a_{11}&\dots&0&\dots&a_{1n}\\&&\vdots&&\\&&0&&\\\vdots&&a_{ki}&&\vdots\\&&0&&\\&&\vdots&&\\a_{n1}&\dots&0&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Durch $i-1$ Vertauschungen benachbarter Spalten können wir die i-te Spalte in die erste Spalte überführen, die Reihenfolge der ersten $i-1$ Spalten bleibt dabei erhalten. Anschließend können wir die k-te Zeile durch $k-1$ Vertauschungen benachbarter Zeilen in die erste Zeile überführen, die Reihenfolge der ersten $k-1$ Zeilen bleibt dabei erhalten. Das liefert

$$\begin{aligned}
\det(a_{ki}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ki} & a_{k1} & \cdots & a_{k(i-1)} & a_{k(i+1)} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{k-1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{ki} & a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ 0 & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{i\text{-te Spalte fehlt}} \; k\text{-te Zeile fehlt} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{ki},
\end{aligned} \tag{9.2}$$

wobei

$$A_{ki} = (-1)^{k+i} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{i\text{-te Spalte fehlt.}} \; k\text{-te Zeile fehlt}$$

Damit erhalten wir

Satz 9.1.12: Laplacescher[a] Entwicklungssatz

[a]Pierre-Simon Laplace, 1749 - 1827, frz. Mathematiker

(i) Entwicklung nach der i-ten Spalte:

$$\det(a_{ki}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{ki}.$$

(ii) Entwicklung nach der k-ten Zeile:

$$\det(a_{ki}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{ki}.$$

Dabei folgt die zweite Formel durch Betrachtung von $(a_{ki})^\top$ und A_{ki} heißt der *Cofaktor* zu a_{ki} in der Matrix (a_{ki}).

Satz 9.1.13: Determinantenmultiplikationssatz

Es seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dann gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Beweis. (i) In Lemma 7.2.2 hatten wir die Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile durch eine Matrizenmultiplikation dargestellt und durch endlich viele dieser Umformungen können wir A in eine obere Dreiecksmatrix D überführen, das heißt, es ist $D = U \cdot A$ und mit Satz 9.1.5 (ii) gilt $\det A = \det D = d_{11} \cdots d_{nn}$.

(ii) Analog (Aufgabe A.9.4) überlegt man sich, dass man durch Umformung der Spalten von B B in eine obere Dreiecksmatrix $D' = B \cdot V$ überführen kann. Es gilt dann $\det B = \det D' = d'_{11} \cdots d'_{nn}$.

(iii) $\tilde{D} = D \cdot D'$ ist wieder eine obere Dreiecksmatrix (Aufgabe A.9.8) mit den Hauptdiagonalelementen $\tilde{d}_{ii} = d_{ii} \cdot d'_{ii}$.

(iv) Es gilt also

$$\begin{aligned}\det(AB) = \det(UABV) = \det(DD') = \det \tilde{D} = \tilde{d}_{11} \cdots \tilde{d}_{nn} \\ = d_{11} \cdots d_{nn} \cdot d'_{11} \cdots d'_{nn} = \det D \det D' = \det A \det B.\end{aligned}$$ □

Bemerkung 9.1.14. Determinante einer linearen Abbildungdet:linAbb Für eine lineare Abbildung $F : V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums können wir nun

$$\det F = \det A$$

setzen, wobei A die Darstellunsgmatrix von F bezüglich einer beliebigen Basis von V ist. Ist $\tilde{A}$ die Darstellungsmatrix von F bezüglich einer anderen Basis, dann existiert eine invertierbare Matrix B mit $\tilde{A} = BAB^{-1}$ und folglich gilt

$$\det \tilde{A} = \det(BAB^{-1}) = \det A.$$

Die Determinante von F ist daher eindeutig bestimmt.

9.2 Eigenwerte: Motivation

Die korrekte Art, mich anzusprechen, ist „Sir Terry, darf ich Sie auf ein Bier einladen?“ (Terry Pratchett)

Wir hatten in Abschnitt 6.3.11 die Normalform der Matrix einer linearen Abbildung $F : V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W betrachtet. Die Normalform hatte die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter hatten wir uns im Abschnitt 6.3.12 überlegt, wie ein Basiswechsel bei Matrizen aussieht und das Ergebnis war

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V & \xrightarrow{F} & W & \xrightarrow{\mathrm{id}_W} & W \\ e'_k & & e_j & & f_i & & f'_\ell. \\ & (b_{jk}) & & (a_{ij}) & & (c_{\ell i}) & \end{array}$$

Dabei waren die Matrizen (b_{jk}) und $(c_{\ell i})$ invertierbar. Basiswechsel bedeutet Multiplikation mit invertierbaren Matrizen von links und rechts und dass wir stets Basen finden können bezüglich denen die Matrix einer linearen Abbildung Normalform hat, bedeutet, dass dies durch Multiplikation mit invertierbaren Matrizen von links und rechts erreicht werden kann.

Wir betrachten $V = W$, also $F : V \to V$, das heißt F ist ein Endomorphismus. In diesem Fall will man im Bild- und Urbildraum nicht verschiedene Basen verwenden und weiter ist (a_{ij}) quadratisch.

Der Fall $V = W$, $e_j = f_j$, $e'_k = f'_k$ 9.2.1. *Behauptung*: Es gilt

$$(c_{\ell i})^{-1} = (b_{jk}).$$

Beweis. Wir haben die folgende Situation:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V \\ e'_k & & e_j & & e'_\ell. \\ & (b_{jk}) & & (c_{\ell j}) & \end{array}$$

Der Hintereinanderausführung $\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V$ ist bezüglich der Basis $\{ e'_k \}$ die Einheitsmatrix zugeordnet, das heißt

$$(c_{\ell j}) \circ (b_{jk}) = I_n.$$

Also gilt $(c_{\ell j})^{-1} = (b_{jk})$. □

In diesem Fall bedeutet Basistransformation also Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links und ihrer Inversen von rechts. Damit haben wir weniger Freiheiten bei der Transformation der Matrizen.

Wir wollen einige Beispiele von Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ betrachten.

Beispiele 9.2.2. Mit $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ seien die Vektoren der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

(i) Es sei F die durch

$$F(e_1) = e_2,\ F(e_2) = e_1$$

definierte lineare Abbildung. F hat bezüglich $\{ e_1, e_2 \}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

Wir können F auffassen als Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}\,(x = \lambda(e_1 + e_2)) \right\}$ (Abbildung 9.2). Insbeson-

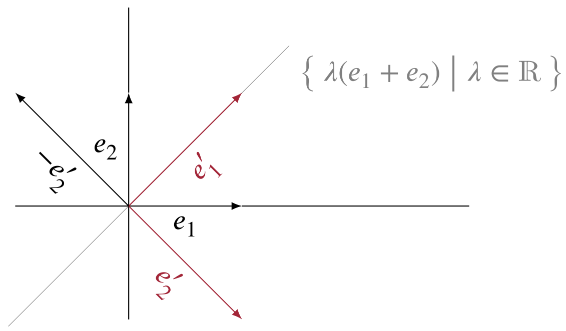


Abbildung 9.2: Spiegelung an der Winkelhalbierenden, Beispiel 9.2.2 (i).

dere gilt für den Vektor $e_1' := e_1 + e_2$, dass $F(e_1') = e_1'$, das heißt, er bleibt unter F unverändert. Der zur Winkelhalbierenden senkrechte Vektor $e_2' := e_1 - e_2$ geht in sein Negatives über:

$$F(e_1') = e_1',\ F(e_2') = -e_2'.$$

$\{ e_1', e_2' \}$ bilden wieder eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Bezüglich $\{ e_1', e_2' \}$ hat F die Matrix

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat nahezu die frühere Form, genauer hat sie *Diagonalgestalt*.

(ii) Wir betrachten die durch $F(e_1) = e_1,\ F(e_2) = e_1 + e_2$ charakterisierte lineare Abbildung. Sie vermittelt eine sogenannte *Scherung* (Abbildung 9.3). F ist bezüglich $\{ e_1, e_2 \}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

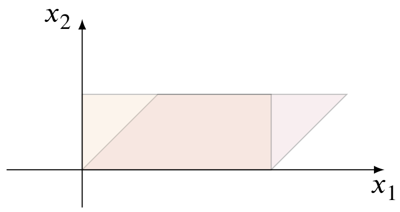


Abbildung 9.3: Scherung eines Rechtecks, Beispiel 9.2.2 (ii).

zugeordnet. Wir wollen versuchen, eine Basis zu finden, derart, dass die zu F gehörige Matrix Diagonalgestalt hat. Wir müssen also Vektoren finden, die sich bei Anwendung von F nur mit einem Faktor multiplizieren. Für einen beliebigen Vektor $x = x_1e_1 + x_2e_2$ ist dies bei Anwendung von F genau dann der Fall, wenn $F(x_1e_1 + x_2e_2) = \lambda(x_1e_1 + x_2e_2)$, das heißt,

$$x_1e_1 + x_2(e_1 + e_2) = \lambda(x_1e_1 + x_2e_2). \tag{9.3}$$

Da e_1 und e_2 linearen unabhängig sind, erhalten wir das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 = \lambda x_1 \tag{9.4a}$$
$$x_2 = \lambda x_2. \tag{9.4b}$$

Die Gleichung (9.4b) ist in den Fällen

(I) $x_2 = 0$, λ beliebig,
(II) $x_2 \neq 0$, $\lambda = 1$

erfüllt. Liegt (I) vor, so ist (9.4a) erfüllt, wenn entweder

$$x_1 = 0,\ \lambda \text{ beliebig oder } x_1 \neq 0,\ \lambda = 1$$

gilt. Im ersten Fall wäre $x = 0$, im zweiten wäre x ein Vielfaches von e_1.

Liegt (II) vor, so folgt aus (9.4a), dass $x_2 = 0$ ist, im Widerspruch zu (II). Die Gleichung (9.3) wird also genau von den Vektoren $x = x_1e_1$ mit $\lambda = 1$ für $x_1 \neq 0$, λ beliebig für $x_1 = 0$ gelöst. Wir können also keine Basis aus Vektoren finden, die bei Anwendung von F nur mit einem Faktor multipliziert werden, das heißt keine Basis, bezüglich der die zu F gehörige Matrix Diagonalgestalt hat.

(iii) Es sei F die durch $F(e_1) = e_2$, $F(e_2) = -e_1$ gegebene lineare Abbildung. Bezüglich $\{ e_1, e_2 \}$ hat F die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auch zu F gibt es keine Basis aus Vektoren, die bei Anwendung von F in ein Vielfaches übergehen: $x = x_1e_1 + x_2e_2$ geht bei Anwendung von F genau dann in das λ-fache über, wenn x und λ der Gleichung $Fx = \lambda x$, das heißt,

$$x_1e_2 - x_2e_1 = \lambda(x_1e_1 + x_2e_2)$$

genügen. Wegen der linearen Unabhängigkeit von e_1, e_2 erhalten wir

$$-x_2 = \lambda x_1 \tag{9.5a}$$
$$x_1 = \lambda x_2 \tag{9.5b}$$

(9.5a) in (9.5b) eingesetzt, liefert

$$x_1 = -\lambda^2 x_1, \tag{9.6}$$

also $x_1 = 0$ oder $\lambda^2 = -1$. Da die Gleichung $\lambda^2 = -1$ keine reelle Lösung hat, bleibt nur $x_1 = 0$, damit ist dann aber ebenfalls $x_2 = 0$. Der einzige Vektor, der $Fx = \lambda x$ genügt, ist also der Nullvektor. Wir können also auch die zu F gehörige Matrix über $\mathbb{R}$ nicht auf Diagonalgestalt bringen.

(iv) Lassen wir im vorigen Beispiel auch komplexe Zahlen zu, so folgt wie oben die Gleichung (9.6) mit den Lösungen $x_1 = 0 = x_2$ und λ beliebig oder $\lambda^2 = -1$, das heißt $\lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm\imath$. Wegen $\frac{1}{\lambda} = \mp\imath$ ist dann (9.5a) äquivalent zu (9.5b) und es gilt

$$x_2 = -\lambda x_1 = \mp\imath x_1,$$

das heißt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ist in diesem Fall ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ \mp\imath \end{pmatrix}$.

9.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Vertraue keinem Zitat, das du im Internet gefunden hast.
(Abraham Lincoln)

In den Beispielen haben wir gesehen, dass die Vektoren, die in ein Vielfaches übergeführt werden, eine entscheidende Rolle bei der Umformung der Matrizen auf Diagonalgestalt spielen.

Definition 9.3.1: Eigenwert und Eigenvektor

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und weiter sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Eine reelle oder komplexe Zahl λ

heißt *Eigenwert* von F, wenn es einen Vektor $x \in V$, $x \neq 0$, gibt mit

$$Fx = \lambda x. \tag{9.7}$$

x heißt dann *Eigenvektor* von F zum Eigenwert λ.

Diese Definition ist für Vektorräume beliebiger Dimension sinnvoll. Im Weiteren wollen wir aber voraussetzen, dass der Vektorraum V reell oder komplex und n-dimensional ist.

Wir wollen zunächst die Eigenwerte einer linearen Abbildung $F : V \to V$ bestimmen. Die Eigenvektoren erhalten wir dann als Lösungen von linearen Gleichungssystemen.

Wir suchen nach reellen oder komplexen Zahlen λ, für die (9.7) für wenigstens ein $x \neq 0$ gilt. Die Gleichung (9.7) ist äquivalent zu

$$Fx - \lambda x = Fx - \lambda \operatorname{id}_V x = (F - \lambda \operatorname{id}_V)\, x = 0,$$

das heißt, gesucht sind λ mit

$$(F - \lambda \operatorname{id}_V)\, x = 0$$

für wenigstens ein $x \neq 0$, das heißt, λ, für welche die Abbildung $F - \lambda \operatorname{id}_V$ einen nicht trivialen Kern hat. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\dim \operatorname{Ker}(F - \lambda \operatorname{id}_V) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(F - \lambda \operatorname{id}_V) < \dim V = n \\
&\qquad \Leftrightarrow \text{die Bilder der Basisvektoren sind linear abhängig} \\
&\qquad \Leftrightarrow \det(F - \lambda \operatorname{id}_V) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

Lemma 9.3.2

Es sei V ein reeller oder komplexer, endlich-dimensionaler Vektorraum und $F : V \to V$ linear, dann ist λ genau dann ein Eigenwert von F, wenn

$$\det(F - \lambda \operatorname{id}_V) = 0.$$

Wie sieht die Determinante von $F - \lambda \operatorname{id}_V$ aus? Es sei $A = (a_{ij})$ die Matrix von F bezüglich irgendeiner Basis von V, dann gilt

$$\begin{aligned}
\det(F - \lambda \operatorname{id}_V) &== \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Wir wollen die einzelnen Summanden der Determinante näher betrachten, vergleiche (9.1).

Ist $\pi = \mathrm{id}_{S_n}$ die identische Permutation, so erhalten wir in (9.8) den Summanden

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda).$$

In allen weiteren Summanden treten höchstens $n - 2$ Faktoren der Form $a_{ii} - \lambda$ auf. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) \\ &\qquad + \text{Glieder mit höchstens } n-2 \text{ Faktoren } (a_{ii} - \lambda).\end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom in λ. Wir sortieren es nach Potenzen von λ: Die Glieder mit den Potenzen λ^n und λ^{n-1} erhalten wir allein aus $(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$; und zwar sind das $(-1)^n \lambda^n$ und die Glieder $(-1)^{n-1} a_{ii} \lambda^{n-1}$ für $i = 1, \dots, n$. Den konstanten Term des Polynoms $\det(A - \lambda I)$ erhalten wir, indem wir $\lambda = 0$ setzen. Der konstante Koeffizient ist folglich $\det A$. Damit haben wir

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \lambda^{n-1} + \cdots + \det A.$$

Dies soll uns genügen, für die weiteren Koeffizienten zu $\lambda^{n-2}, \dots, \lambda$ interessieren wir uns an dieser Stelle nicht. Wir erinnern an die in Aufgabe A.6.19 getätigte

Definition 9.3.3: Spur

Die Summe $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ der Diagonalelemente der Matrix (a_{ij}) heißt die *Spur* von (a_{ij}), in Zeichen

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

oder auch – da $\det(A - \lambda I)$ unabhängig von der Basis und die Monome λ^k linear unabhängig sind, ist der Koeffizient von λ^{n-1} unabhängig von der Basis – die *Spur der linearen Abbildung* $\operatorname{Spur} F$.

Definition 9.3.4: Charakteristisches Polynom

$$P_F(\lambda) = \det(F - \lambda\,\mathrm{id}_V) \text{ beziehungsweise } P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

heißt das *charakteristische Polynom* von F beziehungsweise A.

Wir haben daher

Satz 9.3.5: Eigenwerte und charakteristisches Polynom

Die Eigenwerte von F beziehungsweise A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Mit Satz 9.3.5 kennen wir nun theoretisch die Eigenwerte einer linearen Abbildung F beziehungsweise einer Matrix A. Die Eigenvektoren zu dem Eigenwert λ sind dann die Lösungen des Gleichungssystems

$$Fx = \lambda x \text{ beziehungsweise } Ax = \lambda x.$$

Für die Bestimmung dieser Lösungen bestimmt man $(F - \lambda \operatorname{id}_V)x = 0$ beziehungsweise $(A - \lambda I)x = 0$.

9.4 Diagonalisierung von Matrizen

> Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.
>
> (Bertrand Russell)

Wir kommen wieder auf unser Ausgangsproblem zurück: Wann hat der reelle oder komplexe Vektorraum V eine Basis aus Eigenvektoren von A beziehungsweise wann ist die Matrix A von F bezüglich einer geeigneten Basis diagonal?

Wir geben ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium an. Zunächst wollen wir eine notwendige Bedingung ableiten: Die Matrix von A habe bezüglich einer geeigneten Basis die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dann gilt für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) \\ &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n). \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom zerfällt also in n *Linearfaktoren*[3]. Die Nullstellen und damit die Eigenwerte sind offensichtlich $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Damit ist gezeigt:

[3] Faktoren, in denen λ nur in erster Ordnung, nur linear auftritt.

Lemma 9.4.1: Notwendige Bedingung

Der $\mathbb{C}$- oder $\mathbb{R}$-Vektorraum V besitze eine Basis aus Eigenvektoren, dann ist das charakteristische Polynom von A ein Produkt von n Linearfaktoren.

Wir wollen diese Bedingung an den Beispielen aus 9.2.2 testen:

Beispiele 9.4.2. (i) Es sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dann ist

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

A hat, wie wir in 9.2.2 (i) ausgerechnet haben, die Eigenwerte ± 1. Die notwendige Bedingung ist also erfüllt.

(ii) Wir betrachten $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es ist dann

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = (\lambda - 1)^2.$$

Die notwendige Bedingung ist zwar erfüllt, es gibt aber – wie wir im Beispiel 9.2.2 (ii) gesehen haben – keine Basis aus Eigenvektoren.

(iii) Ist $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wie in Beispiel 9.2.2 (iii), so haben wir

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

$\lambda^2 + 1$ zerfällt über den reellen Zahlen nicht in Linearfaktoren, die notwendige Bedingung ist also nicht erfüllt.

(iv) Über den komplexen Zahlen zerfällt $\lambda^2 + 1$ in die Faktoren $(\lambda \pm \imath)$, wie wir bereits in Beispiel 9.2.2 (iv) gesehen haben, und es gilt

$$\lambda^2 + 1 = (\lambda - \imath)(\lambda + \imath).$$

Die notwendige Bedingung ist also erfüllt und die komplexen Eigenwerte sind $\pm\imath$.

Hinreichende Bedingung 9.4.3

Das charakteristische Polynom ist Produkt von n verschiedenen Linearfaktoren. Dazu äquivalent ist: Das charakteristische Polynom hat n

verschiedene Nullstellen.

Diese Bedingung ist nicht notwendig: Die n-reihige Einheitsmatrix erfüllt sie nicht, trotzdem gibt es eine Basis aus Eigenvektoren.

Wir zeigen, dass diese Bedingung hinreichend ist, indem wir nachweisen, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Damit folgt dann, dass n Eigenvektoren zu n verschiedenen Eigenwerten eine Basis von V bilden.

Satz 9.4.4

Die Eigenvektoren $x_1, \dots, x_r$ von A zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind linear unabhängig.

Beweis. Wir zeigen die Aussage durch vollständige Induktion nach r.

Induktionsanfang $r = 1$: Da Eigenvektoren ungleich 0 sind, ist die Aussage für $r = 1$ richtig.

Induktionshypothese: Die Aussage sei richtig für ein $r - 1 \geq 1$.

Induktionsschluss von $r-1$ *auf* r: Es seien $x_1, \dots, x_{r-1}$ linear unabhängig und $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) mit

$$c_1 x_1 + \cdots + c_{r-1} x_{r-1} + c_r x_r = 0. \tag{9.9}$$

Anwendung von A auf (9.9) liefert

$$c_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + c_{r-1} \lambda_{r-1} x_{r-1} + c_r \lambda_r x_r = 0. \tag{9.10}$$

Multiplikation von (9.9) mit λ_r liefert

$$c_1 \lambda_r x_1 + \cdots + c_{r-1} \lambda_r x_{r-1} + c_r \lambda_r x_r = 0. \tag{9.11}$$

Subtrahieren wir (9.11) von (9.10), so erhalten wir

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_r) x_1 + \cdots + c_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) x_{r-1} = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $x_1, \dots, x_{r-1}$ folgt

$$(\lambda_i - \lambda_r) c_i = 0$$

für alle $i = 1, \dots, r-1$. Da $\lambda_i - \lambda_r \neq 0$ folgt $c_i = 0$ für $i = 1, \dots, r-1$.

Aus (9.9) folgt dann wegen $x_r \neq 0$, dass auch $c_r = 0$. Damit ist gezeigt, dass $x_1, \dots, x_r$ linear unabhängig sind. □

Es sei A eine n-reihige Matrix. Mit 9.4.1 und 9.4.3 kennen wir nun Bedingungen, unter denen es eine invertierbare Matrix B gibt, so dass $B^{-1}AB$ Diagonalgestalt hat.

Definition 9.4.5: Ähnlichkeit

Zwei n-reihige Matrizen A und A' heißen *ähnlich*, falls es eine invertierbare n-reihige Matrix B gibt mit

$$B^{-1}AB = A'.$$

Ist A zu einer Diagonalmatrix ähnlich, so heißt A *diagonalisierbar*.

Wenn die Matrix A von F bezüglich einer Basis Diagonalgestalt hat, also zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist, wie sieht dann die dazugehörige Matrix B aus, die den Basiswechsel vermittelt?

A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Gesucht ist eine Matrix B mit

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $AB = BD$. Es sei $b_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$ die k-te Spalte von B, dann gilt

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ & b_{jk} & \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & b_{1k}\lambda_k & \\ & \vdots & \\ * & b_{jk}\lambda_k & * \\ & \vdots & \\ & b_{nk}\lambda_k & \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ k\text{-te Spalte} \end{array}.$$

Das bedeutet, die k-te Spalte von BD ist gleich $\lambda_k b_k$. Die k-te Spalte von AB ist Ab_k. B löst also die Gleichung $AB = BD$ genau dann, wenn für die Spalten von B gilt

$$Ab_k = \lambda_k b_k,$$

das heißt, wenn für $k = 1, \dots, n$ die Spalte b_k Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_k ist. Wir fassen zusammen:

Lemma 9.4.6: Gestalt der Transformationsmatrix

Für eine invertierbare Matrix B gilt

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn die Spalten b_k von B Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_k sind.

Zur Bestimmung einer Matrix B derart, dass $B^{-1}AB$ Diagonalgestalt hat, müssen wir also zunächst die Eigenwerte berechnen und dann Eigenvektoren. Die Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren sind, hat dann die gewünschten Eigenschaften. Wir wollen ein Beispiel durchrechnen.

Beispiel 9.4.7. Es sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Erster Schritt: Berechnung der Eigenwerte, das heißt der Nullstellen des charakteristischen Polynoms: Für das charakteristische Polynom gilt nach der Sarrusschen Regel

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \left| \begin{array}{rrr} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -3 & -\lambda & 1 \\ 6 & -2 & -3-\lambda \end{array} \right| \begin{array}{rr} 3-\lambda & -2 \\ -3 & -\lambda \\ 6 & -2 \end{array} \\ &= \lambda(3+\lambda)(3-\lambda) - 12 - 12 - 12\lambda + 2(3-\lambda) + 6(3+\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda - 24 - 12\lambda + 6 - 2\lambda + 18 + 6\lambda \\ &= -\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda+1)(1-\lambda). \end{aligned}$$

A hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

Zweiter Schritt: Berechnung von Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 und λ_3: Wir suchen Lösungen der Gleichungssysteme

$$Ax_k = \lambda_k x_k.$$

Das Gleichungssystem $Ax_k = \lambda_k x_k$ ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$(A - \lambda_k I)x_k = 0.$$

Für $\lambda_1 = 0$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = 0.$$

Eine Lösung ist $b_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_2 = 1$ haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = 0.$$

Eine Lösung ist $b_2 = x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Abschließend erhalten wir für $\lambda_3 = -1$ das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = 0.$$

Dieses System wird gelöst von $b_3 = x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die gesuchte Matrix B ist also

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle kann man $A \circ B$ und $B \circ D$ berechnen und zeigen, dass $A \circ B = B \circ D$ gilt. Wir haben

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In 9.4.4 hatten wir gesehen, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Da der Lösungsraum von $(A-\lambda I)x = 0$ mehrdimensional sein kann, stellt sich die Frage, ob es zu den n Eigenwerten, die es zumindest in $\mathbb{C}$ gibt (Fundamentalsatz der Algebra 3.7.11), auch n linear unabhängige Eigenvektoren gibt.

Definition 9.4.8: Vielfachheiten und Eigenraum

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine m-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

(i) m die *algebraische Vielfachheit* von λ_0,

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) =: \dim N_{\lambda_0}$ *geometrische Vielfachheit* von λ_0 und

(iii) $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{ v \mid Av = \lambda_0 v \} = N_{\lambda_0}$ der *Eigenraum* von A zu λ_0.

Es gilt

Lemma 9.4.9

Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und λ_0 ein Eigenwert von A, dann gilt: Die geometrische Vielfachheit von λ_0 ist kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Beweis. Es sei mit Lemma 3.7.8

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$$

mit $Q(\lambda_0) \neq 0$ und $\dim N_{\lambda_0} = k$. Zu zeigen ist $k \leq m$. Es sei dafür $\{ v_1, \dots, v_k \}$ eine Basis von N_{λ_0} und $\{ v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n \}$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$. C sei die Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_n$, dann ist C invertierbar und es gilt

$$\begin{aligned} C^{-1}AC &= C^{-1}\left(\lambda_0 v_1, \dots, \lambda_0 v_k, Av_{k+1}, \dots, Av_n\right) \\ &= (\lambda_0 e_1, \dots, \lambda_0 e_k, *, \dots, *) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \lambda_0 & \\ & 0 & & B \end{pmatrix} = \hat{A} \end{aligned}$$

mit einer $(n-k) \times (n-k)$-Matrix B. Nach dem Multiplikationssatz 9.1.13 sowie 9.1.8 und 9.1.10 ist dann

$$\det(A - \lambda I_n) = \det(\hat{A} - \lambda I_n) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(B - \lambda I_{n-k}).$$

Da $\det(B - \lambda_0 I_{n-k})$ Null sein kann, folgt $k \leq m$. □

Beispiel 9.4.10. Wir hatten in 9.2.2 (ii) die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ betrachtet, der einzige Eigenwert war 1 gewesen und das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2$. Das bedeutet, die algebraische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$ ist 2 und nach den Beobachtungen in 9.2.2 (ii) ist die geometrische Vielfachheit von λ_1 nur 1.

Wir geben noch anderthalb Kriterien an, unter denen eine Matrix immer diagonalisierbar ist:

Bemerkung 9.4.11. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$, dann bezeichnet A^* die transponierte Matrix mit komplex konjugierten Einträgen, das heißt

$$A^* := \overline{A}^{\mathsf{T}} = (\overline{a_{ji}}).$$

Hinreichende Bedingung für die Diagonalisierbarkeit von A ist $A^*A = AA^*$. A heißt in diesem Fall *normal* und man sagt A *kommutiert* mit A^*.

Diese Bedingung ist insbesondere erfüllt, wenn A reell und *symmetrisch* ist, das heißt, wenn $A^{\mathsf{T}} = A$ gilt.

Beispiel 9.4.12 (PageRank)**.** Google betrachtet das Internet als gerichteten Graph, die Webseiten sind die Knoten und die Kanten sind durch Links von einer Webseite zu einer anderen gegeben. Zu diesem Graph wird eine Adjazenzmatrix erstellt, siehe Beispiel 6.2.13[4]. Für eine Seite ohne Links auf andere Seiten werden alle Einträge der zugehörigen Spalte auf 1 gesetzt. Anschließend werden die Spalten der Matrix bezüglich der 1-Norm normiert, das heißt, der i-te Eintrag in der j-ten Spalte gibt an, ob von Seite j ein Link zur Seite i geht, dividiert durch die Gesamtzahl der Links von Seite j zu anderen Seiten. Die Summe über die Einträge einer Zeile i liefert dann eine Zahl, die beschreibt, wie oft relativ von anderen Seiten auf die i-te Seite verlinkt wird. Um eine Person zu simulieren, die „zufällig" im Netz unterwegs ist, führen [3] eine Dämpfungsfaktor $d \in (0,1)$ ein, der die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der die Person einen Link auf der jeweiligen Seite klickt, um weiter zu surfen. Die Wahrscheinlichkeit, auf eine beliebige zufällig gewählte Seite zu wechseln, ist dann $1-d$. Ist $A = \left(a_{ij}\right)$ die oben konstruierte $n \times n$-Matrix, dann erhält man die ***Google-Matrix*** als $G = \left(g_{ij}\right)$ mit

$$g_{ij} = da_{ij} + \frac{1-d}{n}.$$

Die Summe über die Elemente einer Spalte ist weiterhin 1 und die Summe über eine feste Zeile j ist der sogenannte ***PageRank*** der Seite j. Die Bestimmung des PageRank ist als Eigenwertproblem darstellbar, denn die Gleichung

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} x_i, \;\; j = 1, \dots, n$$

lässt sich schreiben als $Gx = x$ (siehe auch Aufgabe A.9.21). Einen zugehörigen Eigenvektor für sehr große n zu bestimmen, ist sehr aufwändig, man kann aber für diagonalisierbare Matrizen mit Hilfe einer Matrixpotenzmethode schnell eine gute Näherung erhalten (Aufgabe A.9.22). Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt dabei am Verhältnis des betragsmäßig zweitgrößten Eigenvektor zum größten (hier 1), siehe [9]. Im Spezialfall der Google-Matrix ist dieser durch d gegeben und man kann weitere nützliche Eigenschaften ableiten (siehe etwa [14]). Die Google-Matrix und PageRank werden des Weiteren zur Untersuchung weiterer Netzwerke (etwa Procedure Call Networks) oder Rangfolgen herangezogen. Für eine ausführlichere Herleitung und weitergehende Darstellung siehe etwa [4].

[4]anders als dort definieren wir die Adjazenzmatrix andersherum: $a_{ij} = 1$, falls von Knoten j zu Knoten i eine Kante geht, das heißt, wir vertauschen Zeilen und Spalten im Vergleich zum genannten Beispiel.

Kapitel 10

Stetige Funktionen

10.1 Funktionsgrenzwerte

> Ein Mathematiker ist eine Maschine, die Kaffee in Theoreme verwandelt. (Paul Erdős)

In diesem Abschnitt betrachten wir kontinuierliche Grenzwerte, das heißt, wir lassen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ laufen, statt wie in Kapitel 3 ein $n \in \mathbb{N}$ mit diskreten Werten $1, 2, 3, \dots$ und Grenzwerte $x_k \to a$ für $k \to \infty$ zu betrachten. Der neue Grenzwertbegriff wird mit dem alten aber über das sogenannte Folgenkriterium 10.1.6 verknüpft sein, so dass unsere bisherigen Aussagen übertragbar sein werden.

Grenzwerte von Funktionen bilden die Basis für wichtige Begriffen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit, die wir im weiteren Verlauf der Vorlesung behandeln werden.

Definition 10.1.1: ε-Umgebung

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon \} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

die *ε-Umgebung von x_0* und

$$\begin{aligned}\dot{U}_\varepsilon(x_0) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \varepsilon \} \\ &= U_\varepsilon(x_0) \setminus \{ x_0 \} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)\end{aligned}$$

die *punktierte ε-Umgebung von x_0*.

Punktierte Umgebungen sind zum Beispiel dann nützlich, wenn das Verhalten einer Funktion in einem Punkt unabhängig vom tatsächlichen Wert der Funktion in diesem Punkt untersucht werden soll.

Wir bezeichnen mit I in diesem Abschnitt stets ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und mit $\bar{I}$ den sogenannten *Abschluss* von I. Konkret sind für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ folgende Fälle möglich:

(i) $I = (a, b)$, $\bar{I} = [a, b]$,

(ii) $I = (-\infty, b)$, $\bar{I} = (-\infty, b]$,

(iii) $I = (a, +\infty)$, $\bar{I} = [a, +\infty)$ und

(iv) $I = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\bar{I} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Bemerkung 10.1.2. Da I offen ist, existiert zu jedem $x_0 \in I$ ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x_0) \subseteq I$.

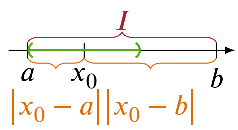


Abbildung 10.1: Offene ε-Umgebung in einem offenen Intervall I.

Beweis. Wählt man im Fall $I = (a, b)$ $\varepsilon := \min\{\,|x_0 - a|\,, |x_0 - b|\,\}$ als den kleineren der Abstände von x_0 zu den Intervallgrenzen, so ist für $x \in U_\varepsilon(x_0)$

$$|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow a \leq x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \leq b,$$

da $|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$ (Lemma 2.6.13). □

Definition 10.1.3: Funktionsgrenzwert

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Es sei $x_0 \in I$, dann heißt $a \in \mathbb{R}$ der *Grenzwert* oder *Limes* von f an der Stelle x_0 beziehungsweise wir sagen f *konvergiert gegen* a *für* $x \to x_0$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \left(x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \right).$$

Wir schreiben $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.

(ii) Es sei $x_0 \in \bar{I}$, dann heißt $a \in \mathbb{R}$ der *linksseitige* beziehungsweise *rechtsseitige Grenzwert* oder *Limes* beziehungsweise wir sagen f *konvergiert von links* beziehungsweise *von rechts gegen* a *für* $x \to x_0$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \left(x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \right)$$

beziehungsweise analog mit $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I$ für den rechtsseitigen Grenzwert.

Wir schreiben $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$, $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0^-$ beziehungsweise $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$, $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0^+$.

(iii) Es sei $I = (a, +\infty)$ beziehungsweise $I = (-\infty, b)$ und $c \in \mathbb{R}$, dann *konvergiert f gegen c für $x \to +\infty$* beziehungsweise *für $x \to -\infty$*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \left(x \overset{(<)}{>} x_1 \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon \right).$$

Wir schreiben $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$ oder $f(x) \to c$ für $x \to +\infty$ beziehungsweise $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ oder $f(x) \to c$ für $x \to -\infty$.

Dabei kann jeweils δ beziehungsweise x_1 von ε und x_0 abhängen, das heißt $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ und $x_1 = x_1(\varepsilon)$.

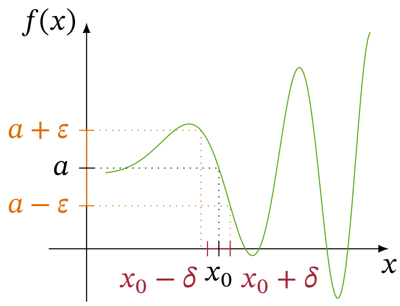


Abbildung 10.2: Zum Funktionsgrenzwert: Hier ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = a = f(x_0)$. Das muss im Allgemeinen nicht gelten. δ wird entsprechend klein gewählt.

Lemma 10.1.4: Eindeutigkeit des Grenzwerts

Der Grenzwert einer Funktion ist eindeutig bestimmt.

Beispiele 10.1.5. (i) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 3$ und $x_0 = 0$. Behauptung: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -3$.

Um dies zu zeigen, müssen wir nachweisen: „Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine punktierte $\delta(\varepsilon)$-Umgebung von x_0, so dass für alle x in dieser Umgebung

$$|f(x) - a| = |f(x) - (-3)| = |x^2| < \varepsilon$$

gilt.“

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir setzen $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, dann ist

$$\forall x \in \mathbb{R} \left(x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta) \Rightarrow |f(x) - (-3)| = x^2 < \varepsilon \right). \qquad \square$$

Wie kommt man hier konkret auf das $\delta(\varepsilon)$? In der letzten Ungleichung wollen wir, dass $x^2 < \varepsilon$ gilt. Dies formen wir um und erhalten

$$x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon},$$

was wir für die Definition von δ verwenden. Dem δ kommt hier eine ähnliche Rolle zu wie dem $N(\varepsilon)$ oder $n_0(\varepsilon)$ bei der Konvergenz von Folgen.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x - 2, & x < 0 \end{cases}$ (Abbildung 10.3). Es gilt

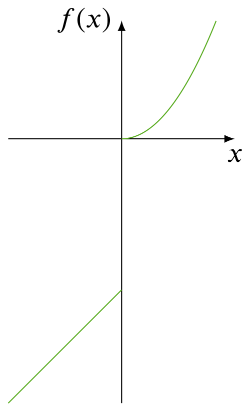


Abbildung 10.3: Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert müssen nicht übereinstimmen, Beispiel 10.1.5 (ii).

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -2.$$

(iii) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, dann ist mit der dritten binomischen Formel

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \to 0 \text{ für } x \to +\infty.$$

Formaler Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest und $x_1(\varepsilon) = \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2$, dann gilt für alle $x > x_1$

$$\begin{aligned}|f(x)-0| &= \left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &< \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2}} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2\varepsilon}} = \varepsilon.\end{aligned}$$ □

Satz 10.1.6: Folgenkriterium

Es seien $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ genau dann, wenn $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$ für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{x_0\}$ mit $x_k \to x_0$ für $k \to \infty$.

Beweis. „$\Rightarrow$" Es sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, dann gilt

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \left(x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\right),$$

wobei wir o. B. d. A. annehmen, dass $\dot{U}_\delta(x_0) \subseteq I$. Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{x_0\}$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, das heißt nach Definition

$$\forall\delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \left(n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta\right).$$

Damit existiert für beliebiges aber festes $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ $|x_n - x_0| < \delta$ und damit $|f(x_n) - a| < \varepsilon$. Folglich ist $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$.

„$\Leftarrow$" Für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ gelte nun umgekehrt, dass $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$.

Angenommen, $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ wäre falsch, dann gilt (Negation der Grenzwertdefinition)

$$\exists\varepsilon_0 > 0 \forall\delta > 0 \exists x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap I \left(|f(x) - a| \geq \varepsilon_0\right).$$

Wir konstruieren eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \dot{U}_\delta(x_0) \cap I$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ und mit $|f(x_k) - a| \geq \varepsilon_0$. Dazu setzen wir $\delta_k = \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ und finden zu jedem δ_k ein $x_k \in I \setminus \{x_0\}$ mit $|f(x_k) - a| \geq \varepsilon_0$. Dann ist nach Konstruktion $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ und $f(x_k) \nrightarrow a$ für $k \to \infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkungen 10.1.7. (i) Die Aussage von Satz 10.1.6 gilt sinngemäß auch für einseitige Grenzwerte und im Fall $x \to \pm\infty$. Das ist auch bei den nachfolgenden Ergebnissen der Fall, ohne dass wir dies gesondert erwähnen.

(ii) Mit konkreten Folgen kann man mit dem Folgenkriterium nur zeigen, dass ein Grenzwert nicht existiert, da man für die Konvergenz alle Folgen untersuchen müsste. Will man alle Folgen untersuchen, so muss man eine beliebige Folge wählen und kann nur mit der Eigenschaft der Konvergenz der Folge und den Eigenschaften der konkreten Funktion argumentieren.

Aus den Regeln für die Konvergenz von Folgen erhalten wir nun sofort nachstehende Regeln für Grenzwerte von Funktionen:

Lemma 10.1.8: Grenzwertsätze für Funktionsgrenzwerte

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{I}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Dann gilt

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \left(\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha a \right)$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$.

(iv) Wenn $b \neq 0$, dann gilt $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

Beweis. Folgt aus Satz 10.1.6 und den Grenzwertsätzen 3.1.17. □

Beispiele 10.1.9. (i) Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^n-1}{x-1}$. Gesucht ist $\lim_{x\to 1} f(x)$. Mit der geometrischen Summenformel 2.8.7 gilt

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \to n \text{ für } x \to 1,$$

wobei hier zunächst $x^k \to 1$ für $x \to 1$ klar ist und dann die Summe mit den Grenzwertsätzen bestimmt wird.

(ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$. Für $|x| < 1$ gilt mit Lemma 3.5.17

$$1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x} \Rightarrow x \le e^x - 1 \le \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

und damit $1 \le \frac{e^x-1}{x} \le \frac{1}{1-x}$ für $x > 0$ und $\frac{1}{1-x} \le \frac{e^x-1}{x} \le 1$ für $x < 0$. Mit dem Einschließungskriterium folgt also $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

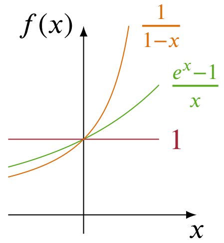


Abbildung 10.4: Funktionsgrenzwert mit dem Einschließungskriterium bestimmen, Beispiel 10.1.9 (ii).

(iii) Wir betrachten die Dirichlet-Funktion[1]

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Für kein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert dann der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} d(x)$. Es sei etwa $x_0 = 1$, dann ist durch $x_k = 1 + \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(x_k) \subseteq \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ gegeben mit $x_k \to 1$ für $k \to \infty$ und $d(x_k) = 0$, also $\lim_{k\to\infty} d(x_k) = 0$. Durch $\tilde{x}_k = 1 + \frac{\sqrt{2}}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ ist eine Folge $(\tilde{x}_k) \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \{1\}$ mit $\tilde{x}_k \to 1$ für $k \to \infty$ gegeben, also $d(\tilde{x}_k) = 1$ und damit $\lim_{k\to\infty} d(\tilde{x}_k) = 1$.

Man kann also aus der Existenz des Grenzwerts einer konkret gewählten Folge nicht die Existenz des (Funktions-) Grenzwerts schließen.

Wie bei den diskreten Folgen, ist auch bei Funktionen der konkrete Grenzwert mitunter nicht bekannt oder schwer zu bestimmen. Die Existenz des Grenzwerts erhält man mit

Lemma 10.1.10: Cauchy-Kriterium für Funktionsgrenzwerte

Es seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, dann existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in I \big(x_1, x_2 \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\big).$$

Bemerkungen 10.1.11. (i) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert für $x_0 \in I$ genau dann, wenn $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existieren und gleich sind.

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ hängt nicht von $f(x_0)$ ab. $f(x_0)$ muss nicht einmal definiert sein, siehe Beispiel 10.1.9 (ii).

[1] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859, dt. Mathematiker

Definition 10.1.12: Bestimmte Divergenz

Es seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \bar{I}$. Dann *divergiert* f in x_0 *bestimmt* gegen $+\infty$, in Zeichen $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, wenn

$$\forall c > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \left(x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \geq c\right).$$

Außerdem ist

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty :\Leftrightarrow \forall c > 0 \exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \left(x \geq x_1 \Rightarrow f(x) \geq c\right).$$

Analog sind die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ sowie die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ definiert. Statt von bestimmter Divergenz spricht man auch von *uneigentlicher Konvergenz*.

Beispiele 10.1.13. (i) $\frac{x^2}{x+1} \to +\infty$ für $x \to +\infty$, denn $\frac{x^2}{x+1} \geq \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} > c$ für $x \geq \max\{1, 2c\}$ und

(ii) $\frac{1}{x} \to +\infty$ für $x \to 0^+$ sowie $\frac{1}{x} \to -\infty$ für $x \to 0^-$.
Wir zeigen die zweite Aussage: Es sei $c < 0$ gegeben, dann gilt für $x < 0$ $\frac{1}{x} < c \Leftrightarrow \frac{1}{c} < x$. Wählen wir also $\delta = -\frac{1}{c} > 0$, so gilt für $x \in (-\delta, 0)$, dass $\frac{1}{x} < c$.

Für monotone und beschränkte Folgen konnten wir die Konvergenz in Abschnitt 3.2 nachweisen. Wir übertragen dieses Ergebnis auf Funktionsgrenzwerte und vereinbaren zunächst:

Definition 10.1.14: Beschränktheit von Funktionen

Es seien I ein beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$, dann heißt f auf I *beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists c > 0 \, (x \in I \Rightarrow |f(x)| \leq c)$.

Lemma 10.1.15

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton und beschränkt, dann existiert $\lim_{x\to b^-} f(x)$ und $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

Beweis. O. B. d. A. sei f monoton wachsend und $\forall x \in (a, b) (|f(x)| \leq c)$. Wir setzen $s = \sup\{ f(x) \mid x \in (a, b) \}$, dann ist $s \leq c$ und nach den Supremumseigenschaften gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x(\varepsilon) \in (a, b) \left(s - \varepsilon < f(x(\varepsilon)) \leq s\right).$$

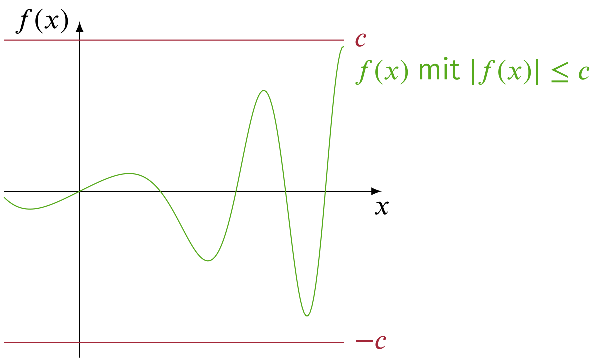


Abbildung 10.5: Zur Beschränktheit von Funktionen.

Mit der Monotonie von f folgt also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x(\varepsilon) \in (a,b) \forall x' \in (x(\varepsilon), b) \, (s - \varepsilon < f(x(\varepsilon)) \leq f(x') \leq s) \, ,$$

das heißt mit $\delta = \delta(\varepsilon, b) = b - x(\varepsilon) > 0$ ist also

$$\forall x \in (b - \delta, b) \, (s - \varepsilon < f(x) \leq s) \, ,$$

nach Definition also $\lim_{x \to b^-} f(x) = s$.
Analog zeigt man $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf\{ f(x) \mid x \in (a,b) \}$. □

10.2 Stetigkeit

> Nach unserer bisherigen Erfahrung sind wir zum Vertrauen berechtigt, dass die Natur die Realisierung des mathematisch denkbar Einfachsten ist. (Albert Einstein)

Wir können nun Stetigkeit von Funktionen definieren. Stetige Funktionen haben viele nützliche Eigenschaften, von denen wir einige in diesem Abschnitt herausarbeiten werden. Viele Probleme können durch stetige Funktionen beschrieben oder hinreichend gut angenähert werden.

Definition 10.2.1: Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in* $x_0 \in D$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \, (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \, .$$

f heißt *stetig auf* D $:\Leftrightarrow \forall x_0 \in D \, (f$ stetig in $x_0)$.
Die Menge aller auf D stetigen Funktionen wird mit $C(D)$ bezeichnet.

Bemerkungen 10.2.2. (i) Wenn ein offenes Intervall $I \subseteq D$ existiert und $x_0 \in I$ ist, dann ist f genau dann stetig in x_0, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(ii) f ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Dies folgt sofort aus dem Folgenkriterium, Satz 10.1.6.

(iii) Mit dem Folgenkriterium und den Grenzwertsätzen folgt, dass $C(D)$ einen Unterraum von $\mathbb{R}^D$ bildet.

Genauer und desweiteren gilt

Lemma 10.2.3: Operationen mit stetigen Funktionen

(i) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $c \in \mathbb{R}$. Wenn f und g in x_0 stetig sind, dann sind auch die Funktionen $c \cdot f$, $f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 stetig. Gilt zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig.

(ii) Es seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$, $f : D_1 \to D_2$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Wenn f in x_0 stetig ist und g in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist auch $g \circ f$ in x_0 stetig.

Beispiele 10.2.4. (i) Polynome $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Beweis. Konstante Funktionen f sind stetig, da stets $f(x) - f(x_0) = 0$. Durch Wahl von $\delta = \varepsilon$ sieht man sofort, dass $f(x) = x$ stetig ist: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$. Damit sind Polynome als Produkte und Linearkombinationen stetiger Funktionen stetig. □

(ii) Potenzreihen stellen innerhalb ihres Konvergenzradius stetige Funktionen dar, siehe Beispiel 10.2.24.

(iii) Mit der Dreiecksungleichung nach unten folgt, dass $|x|$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion ist.

Das folgende Lemma kann so interpretiert werden, dass eine in einem Punkt stetige Funktion in einer (möglicherweise sehr kleinen) Umgebung des Punktes nicht zu sehr vom Funktionswert in diesem Punkt abweicht.

Lemma 10.2.5

Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$, dann gilt

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) \cap I \, (f(x) > 0)\,.$$

Beweis. Setze $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, dann existiert aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \cap I\,(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\,.$$

Das bedeutet, dass für $x \in U_\delta(x_0) \cap I$ gilt

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

und demnach also $0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$. □

Beispiele 10.2.6 (Klassifizierung von Unstetigkeitsstellen). (i) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ x - 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

hat in $x_0 = 1$ eine *Sprungstelle*. Rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren, sind aber verschieden.

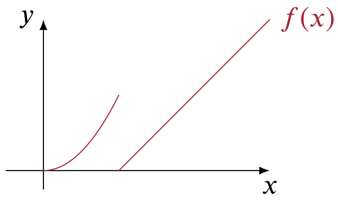


Abbildung 10.6: Funktion mit Sprungstelle.

(ii) *Hebbare Unstetigkeit* (in $x_0 = 2$):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ 0, & x = 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren und stimmen überein, stimmen aber nicht mit dem Funktionswert an der Stelle überein. Die Unstetigkeit kann durch Setzen eines anderen Wertes für $f(x_0)$ behoben werden.

(iii) *Polstelle*: Einer der Funktionsgrenzwerte $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ist $\pm\infty$. Der andere Grenzwert existiert ggf. uneigentlich. Beispiel: $x_0 = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ sonst.

(iv) *Unstetigkeit zweiter Art*: Der Funktionsgrenzwert in x_0 existiert auch im uneigentlichen Sinn weder von links noch von rechts. Beispiel:

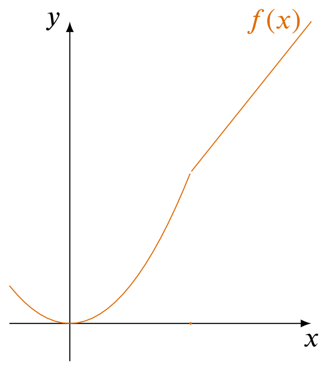


Abbildung 10.7: Funktion mit einer hebbaren Unstetigkeitsstelle.

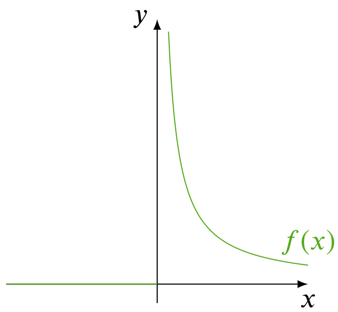


Abbildung 10.8: Funktion mit einer Polstelle.

$x_0 = 0$ und

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0.$$

Dass der Grenzwert für $x \to 0$ nicht existiert, kann man durch Wahl zweier Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beispielsweise mit $f(x_k) = 1, f(y_k) = 0$ und $x_k \to 0$, $y_k \to 0$ für $k \to \infty$ zeigen (Aufgabe A.10.5).

Zwischenwertsatz 10.2.7

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert für jeden *Zwischenwert* $y \in (f(a), f(b))$ ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = y$.

Beweis. Es seien $y \in (f(a), f(b))$ und $A = \{ x \in I \mid f(x) \leq y \}$. Da $f(a) < y$ ist $A \neq \emptyset$ und weiter gilt $\forall x \in A\,(a \leq x < b)$, das heißt, A ist beschränkt. Daher existiert ein $\xi \in I$ mit $\xi = \sup A$. Wir zeigen, dass $\xi \in A$ gilt: Nach Definition des Supremums existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ mit $\forall k \in \mathbb{N}\,(f(x_k) \leq y)$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann $f(\xi) \leq y$. Weiter gilt $f(\xi) = y$. Denn angenommen, es wäre $f(\xi) < y$, so ist $\xi < b$ und es

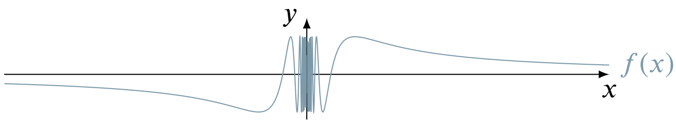


Abbildung 10.9: Funktion mit einer Unstetigkeit zweiter Art.

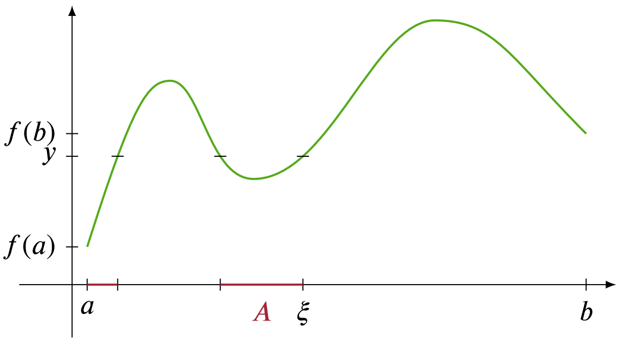


Abbildung 10.10: Zum Zwischenwertsatz 10.2.7.

gibt wiederum wegen der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass $\xi + \delta < b$ und $f(x) < y$ für $x \in U_\delta(\xi) \cap I$, also insbesondere für $x = \xi + \frac{\delta}{2}$ was der Definition von ξ als Supremum von A widerspricht. Weiter ist wegen $f(a) < y < f(b)$ abschließend $a < \xi < b$. □

Korollar 10.2.8: Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Funktion I

Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist $f([a, b])$ wieder ein Intervall, wobei $f([a, b]) = \{ c \}$ zugelassen ist.

Definition 10.2.9: Maximum, Minimum, Supremum, Infimum einer Funktion

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Falls existent, heißt

(i) $\max\limits_{x \in D} f(x) = \max\limits_{D} f(x) = \max\{ f(x) \mid x \in D \}$ das *Maximum* von f in D,

(ii) $\min\limits_{x \in D} f(x) = \min\limits_{D} f(x) = \min\{ f(x) \mid x \in D \}$ das *Minimum* von f in D,

(iii) $\sup\limits_{x \in D} f(x) = \sup\limits_{D} f(x) = \sup\{ f(x) \mid x \in D \}$ das *Supremum* von f in D,

(iv) $\inf_{x \in D} f(x) = \inf_D f(x) = \inf\{\, f(x) \mid x \in D \,\}$ das *Infinum* von f in D.

Beispiel 10.2.10. Wir betrachten die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $\sup\limits_{(0,+\infty)} \dfrac{1}{x} = +\infty$ sowie $\inf\limits_{(0,+\infty)} \dfrac{1}{x} = 0$. Weiter gilt, dass $\max\limits_{(0,+\infty)} \dfrac{1}{x}$ sowie $\min\limits_{(0,+\infty)} \dfrac{1}{x}$ nicht existieren.

Beweis. Es gilt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Für $x \in (0, +\infty)$ ist aber $f(x) > 0$ und $f(x) < +\infty$. □

Lemma 10.2.11

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt.

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht beschränkt ist. Also existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ mit $\forall n \in \mathbb{N}\, (|f(x_n)| \geq n)$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, Satz 3.3.7, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $c = \max\{\, |a|\,, |b| \,\}$ beschränkt ist. Es sei $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a, b]$, dann gilt wegen der Stetigkeit von f, dass auch $|f|$ auf I stetig ist und

$$\lim_{k\to\infty} \left|f(x_{n_k})\right| = |f(x_0)| < +\infty.$$

Nach Konstruktion gilt aber auch $\forall k \in \mathbb{N}\left(\left|f(x_{n_k})\right| \geq n_k \geq n\right)$ und damit folgt $\lim_{k\to\infty} \left|f(x_{n_k})\right| = +\infty$, ein Widerspruch. □

Bemerkung 10.2.12. Die Aussage gilt im Allgemeinen nur, wenn

(i) f stetig und gleichzeitig

(ii) der Definitionsbereich von f abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiele 10.2.13. (i) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(ii) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ mit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ aber

(iii) $0 < a < 1$, $f : [a, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $[a, 1]$ beschränkt und es gilt

$$\max_{[a,1]} f(x) = \frac{1}{a}, \ \min_{[a,1]} f(x) = 1.$$

Satz vom Minimum und Maximum (Weierstraß) 10.2.14

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann existieren zwei Punkte $x^+, x^- \in I$ mit

$$\forall x \in I\,(f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+))\,.$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$f(x^-) = \inf_I f(x) = \min_I f(x), \;\; f(x^+) = \sup_I f(x) = \max_I f(x).$$

Beweis. Es sei $y^+ = \sup_I f(x) = \sup\{\, f(x) \mid x \in I \,\}$. Nach Lemma 10.2.11 folgt $y^+ \in \mathbb{R}$ und nach der Supremumseigenschaft existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in I\,(y_n = f(x_n))$ und $y_n \to y^+$ für $n \to \infty$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, 3.3.7, eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Es sei $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^+$, dann folgt aus der Stetigkeit von f, dass

$$f(x^+) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = y^+$$

und nach Konstruktion ist $\forall x \in I\,(f(x) \leq f(x^+))$.

Analog zeigt man die Existenz eines $x^- \in I$ mit $f(x^-) = \inf_{[a,b]} f(x)$. □

Wir erhalten noch folgende Präzisierung von Korollar 10.2.8:

Korollar 10.2.15: Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Funktion II

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $y_1 = \min_{[a,b]} f(x)$ und $y_2 = \max_{[a,b]} f(x)$ gilt $f([a, b]) = [y_1, y_2]$.

Beispiele 10.2.16. Die Voraussetzungen im Satz von Weierstraß sind alle notwendig, denn:

(i) Die unstetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, x < 1, \\ 0, x \geq 1 \end{cases}$ nimmt auf $[0, 2]$ kein Maximum an.

(ii) Betrachtet man die stetige Funktion $f(x) = x$ auf dem nicht abgeschlossen Intervall $[0, 1)$, so nimmt f dort kein Maximum an.

(iii) Es sei $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, dann ist der Definitionsbereich nicht beschränkt und f nimmt auf ihm kein Minimum an.

Definition 10.2.17: Gleichmäßige Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $D :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \right).$$

Bemerkungen 10.2.18. (i) $\delta = \delta(\varepsilon)$ kann bei einer gleichmäßig stetigen Funktion unabhängig von $x_0 \in D$ gewählt werden. Gewöhnliche Stetigkeit auf D bedeutet

$$\forall x_0 \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \left(|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

(ii) Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig, die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

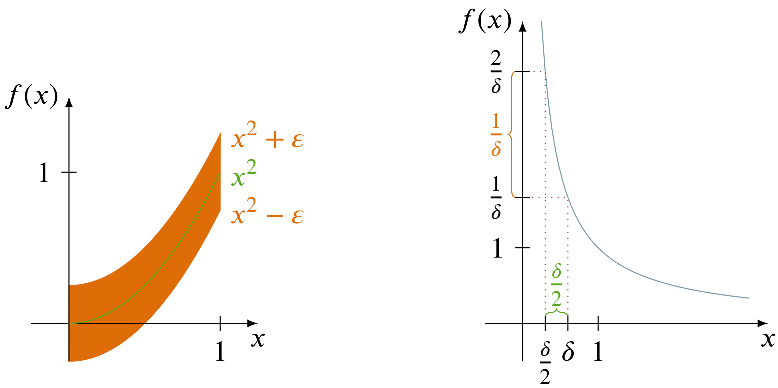


Abbildung 10.11: Veranschaulichung von gleichmäßiger Stetigkeit anhand von Beispiel 10.2.19: Ein „Schlauch“ der Höhe ε kann um $f(x)$ gelegt werden und für beliebige x_1, x_2 mit $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ folgt $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Im Beispiel rechts ist dies nicht möglich, da die Funktion beliebig „steil“ wird.

Beispiele 10.2.19. (i) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist gleichmäßig stetig: Es sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \\ &= (x_1 + x_2)\,|x_1 - x_2| < 2\,|x_1 - x_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

falls $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, woraus sich die Wahl von δ erklärt.

(ii) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht gleichmäßig stetig, denn sei zum Beispiel $\varepsilon_0 = 1$, dann ist für $\delta \in (0,1)$ beliebig und $x_1 = \delta$, $x_2 = \frac{\delta}{2}$

$$|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{\delta} > 1 = \varepsilon_0.$$

Dass hier δ eingeschränkt wurde, ist unerheblich: Für $\delta \geq 1$ wählt man einfach x_1 und x_2 wie oben für ein $\delta' \in (0,1)$, da aus $|x_1 - x_2| < \delta'$ dann auch $|x_1 - x_2| < \delta$ folgt.

Es gilt

Satz 10.2.20

Jede auf $I = [a,b]$ stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, dann

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta, x'_\delta \in [a,b] \left(|x_\delta - x'_\delta| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon \right).$$

Für $\delta = \frac{1}{k}$ existieren also Punkte $x_k, x'_k \in [a,b]$, so dass $|x_k - x'_k| < \frac{1}{k}$ und $|f(x_k) - f(x'_k)| \geq \varepsilon$. Dadurch erhalten wir zwei Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (x'_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [a,b]$, und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k_\ell} \to x_0 \in [a,b]$ für $\ell \to \infty$. Es gilt auch $x'_{k_\ell} \to x_0$ für $\ell \to \infty$, da $\left|x'_{k_\ell} - x_0\right| \leq \left|x'_{k_\ell} - x_{k_\ell}\right| + \left|x_{k_\ell} - x_0\right|$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt $f(x_{k_\ell}) \to f(x_0)$ und $f(x'_{k_\ell}) \to f(x_0)$ für $\ell \to \infty$. Daher gilt

$$\left|f(x_{k_\ell}) - f(x'_{k_\ell})\right| \leq \left|f(x_{k_\ell}) - f(x_0)\right| + \left|f(x_0) - f(x'_{k_\ell})\right| \leq 2\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2},$$

falls $\ell \geq \ell_0(\varepsilon^*)$. Ein Widerspruch. □

Definition 10.2.21: Konvergenz von Funktionenfolgen

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_k : D \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(i) Die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D : f_k(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$.

(ii) Die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent*:

$$f_k \xrightarrow[\text{glm.}]{} f \text{ für } k \to \infty$$
$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in D \forall k \in \mathbb{N} \left(k \geq N \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\right).$$

Bemerkung und Beispiel 10.2.22. (i) Eine Funktionenfolge ist höchstens gegen die Funktion gleichmäßig konvergent, gegen die sie punktweise konvergiert.

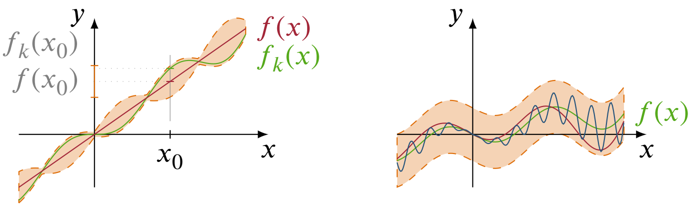


Abbildung 10.12: Zur punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen: Bei gleichmäßiger Konvergenz hängt ε nicht von x_0 ab.

(ii) Durch $f_k(x) = x^k$ ist für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ eine Funktionenfolge definiert. Diese konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0,1). \end{cases}$$

Die Konvergenz kann nicht gleichmäßig sein, da für jedes $k \in \mathbb{N}$ nach dem Zwischenwertsatz ein $x_k \in [0,1)$ existiert, so dass $f_k(x_k) = \frac{1}{2} = f_k(x_k) - f(x_k)$. Wählt man nun $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ erhält man einen Widerspruch.

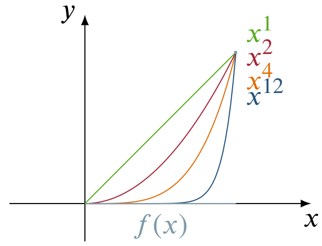


Abbildung 10.13: Illustration der Funktionenfolge aus Beispiel 10.2.22 (ii).

Als wichtiges Resultat halten wir fest

Satz 10.2.23: Eigenschaften der Grenzfunktion

Es seien I ein Intervall und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine auf I gleichmäßig konvergente Folge (gleichmäßig) stetiger Funktionen, dann ist die Grenzfunktion ebenfalls (gleichmäßig) stetig.

Beweis. Wir zeigen den Fall, dass die f_k stetig sind. Es sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall x \in I \forall k \in \mathbb{N} \left(k \geq N \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Weiter existiert aufgrund der Stetigkeit von f_N ein $\delta > 0$, so dass $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle

$x \in U_\delta(x_0) \cap I$. Damit folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sind die f_k gleichmäßig stetig, folgt die Aussage ähnlich. □

Beispiel 10.2.24. Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konvergieren innerhalb ihres Konvergenzradius gleichmäßig, das heißt, setzt man

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n(x - x_0)^n,$$

so ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ und die Folgenglieder sind stetig. Also sind Potenzreihen stetige Funktionen innerhalb ihres Konvergenzradius R. Ist $R > 0$, so erhält man durch Einschränkung auf $[x_0 - R + c, x_0 + R - c]$ für ein beliebig kleines $c > 0$ die gleichmäßige Stetigkeit von Potenzreihen auf jedem kompakten Intervall, das ganz innerhalb des Konvergenzbereichs liegt.

Die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihen folgt mit

Weierstraßsches Majorantenkriterium 10.2.25

Für $k \in \mathbb{N}_0$ seien $f_k : D \to \mathbb{R}$ mit $|f_k(x)| \leq M_k$ für alle $x \in D$ und $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ sei konvergent, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent auf D.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$ für alle $m > n \geq n_0$. Dann ist

$$\left|\sum_{k=0}^{m} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$$

für alle $m > n \geq n_0$ und alle $x \in D$. Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium gleichmäßig auf D. □

Bemerkung 10.2.26. Die Definitionen für Funktionsgrenzwerte, (gleichmäßige) Stetigkeit sowie punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen setzen nur einen Abstandsbegriff voraus, lassen sich also auf beliebigen metrischen und normierten Räumen formulieren. Sind etwa (M_1, ρ_1) und (M_2, ρ_2) metrische Räume und $(V_1, \|\|_1)$, $(V_2, \|\|_2)$ normierte Räume und $f : M_1 \to M_2$ sowie $g : V_1 \to V_2$, dann ist die Umformulierung von Definition 10.2.1 wie folgt:

(i) f ist stetig in $x_0 \in M_1$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M_1 \left(\rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\right).$$

(ii) g ist stetig in $x_0 \in V_1$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in V_1 \left(\|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon\right).$$

Die Aussagen, die wir gezeigt haben, gelten im Allgemeinen aber nicht auf beliebigen metrischen Räumen, da wir häufig direkt und indirekt die Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen ausgenutzt haben.

Kapitel 11

Differenzialrechnung

Im Kapitel 7 ließen sich Gleichungen, Gleichungssysteme aufgrund der Linearität leicht lösen. Für die von uns betrachteten allgemeineren Funktionen (Kapitel 3 und 10) ist dies meist nicht so leicht, selbst wenn die Funktionen stetig sind, erhält man vielleicht nur die Existenz einer Lösung für eine gegebene Gleichung zum Beispiel über den Zwischenwertsatz. Die Lösung selbst zu bestimmen, ist dann aber mitunter sehr schwierig oder nur mit Näherungsverfahren möglich. In diesem Kapitel werden wir daher Funktionen lokal, das heißt in einer kleinen Umgebung eines Punktes, durch einfachere Funktionen (affine Funktionen der Form $ax+b$ und Polynome) annähern. Die zu erarbeitenden Techniken ermöglichen dann auch weitere Aussagen, etwa über das lokale Verhalten der Funktion.

11.1 Ableitungen

> Jetzt erleben wir, wie eine ganze Menge grotesker Funktionen auftaucht, die sich alle Mühe zu geben scheinen, den anständigen Funktionen, die zu etwas nütze sind, so wenig wie möglich zu ähneln... Wenn früher eine neue Funktion erfunden wurde, geschah dies im Hinblick auf einen praktischen Zweck; heute erfindet man sie absichtlich nur dazu, die Argumentation unserer Väter zu widerlegen, und zu etwas anderem werden sie nie taugen. (Henri Poincaré)

Dieser Abschnitt behandelt die grundlegenden Definitionen und Rechenregeln für differenzierbare Funktionen.

Definition 11.1.1: Differenzierbarkeit, Ableitung

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x_0 \in D$. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar in* x_0 $:\Leftrightarrow$

$$\exists c \in \mathbb{R} \left(c = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\frac{d}{dx} f(x_0) = f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und nennen $f'(x_0)$ die *Ableitung* von f in x_0. f heißt *differenzierbar* auf D, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, die *Ableitung* von f. Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f auf D *stetig differenzierbar* und wir schreiben $f \in C^1(D)$.
Existieren für $x_0 \in \overline{D}$ die Grenzwerte

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ beziehungsweise}$$
$$f'(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

so heißen sie *rechtsseitige* beziehungsweise *linksseitige Ableitungen* von f in x_0 (vergleiche Definition 10.1.3).

Beispiele und Bemerkung 11.1.2. (i) Der in der Definition der Ableitung verwendete Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ beschreibt die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ (vergleiche Abbildung 11.1). Der Grenzwert der Sekantensteigungen für $x \to x_0$, also die Ableitung in x_0 sofern existent, ist dann die Tangentensteigung im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

(ii) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dann ist für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a.$$

(iii) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Weiter sei $x_0 \in$

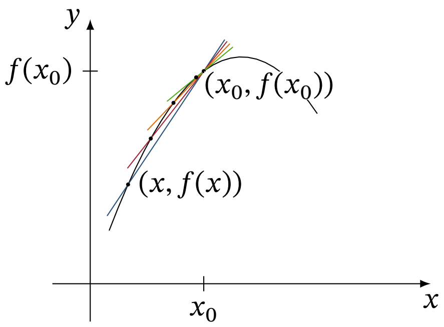


Abbildung 11.1: Der Differenzenquotient beschreibt die Steigung der Sekante durch $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$.

$\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$, dann ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x_0^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^n - 1}{\frac{x}{x_0} - 1}$$
$$= x_0^{n-1} \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^k \right) = n x_0^{n-1}$$

mit Beispiel 10.1.9 (i). Für $x_0 = 0$ ist $\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} \to 0 = n \cdot 0^{n-1}$ für $x \to 0$.

(iv) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, dann ist mit $x = x_0 + h$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^h - 1\right)}{h} = e^{x_0}$$

nach Beispiel 10.1.9 (ii). Also gilt $(e^x)' = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(v) Die eben verwendete Technik $x = x_0 + h$ mit $h \in \mathbb{R}$ zu schreiben, kann nützlich sein. Der Grenzwert des Differenzenquotienten wird wie oben dann zu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Darstellungssatz 11.1.3

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ und eine in x_0 stetige Funktion $\varphi = \varphi_{x_0} : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = 0$ existieren, so dass für alle $x \in I$ die

Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \varphi_{x_0}(x) \cdot (x - x_0)$$

gilt. In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es sei f in x_0 differenzierbar. Wir definieren

$$\varphi_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0), & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0. \end{cases}$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{x\to x_0} \varphi_{x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0.$$

Für $x \neq x_0$ gilt weiter

$$(x - x_0)\varphi_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

also für alle $x \in I$ die gewünschte Darstellung.

„$\Leftarrow$“: Aus der Darstellung folgt für $x \neq x_0$, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + \varphi_{x_0}(x) \text{ mit } \lim_{x\to x_0} \varphi_{x_0}(x) = 0,$$

also

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c.$$

□

Als Folgerung erhalten wir mit Lemma 10.2.3

Satz 11.1.4

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, dann ist f in x_0 stetig.

Bemerkungen 11.1.5. (i) Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch: Ein Beispiel ist die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Diese ist in $x = 0$ stetig aber dort nicht differenzierbar, denn für $x < 0$ ist $\frac{|x|-0}{x-0} = -1 \to -1$ für $x \to 0$ und für $x > 0$ ist $\frac{|x|-0}{x-0} = 1 \to 1$ für $x \to 0$.

(ii) Tatsächlich gibt es stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in keinem Punkt differenzierbar sind. Beispiele für solche Funktionen sind die Weierstraßfunktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin\left(2^k x\right)}{3^k}$$

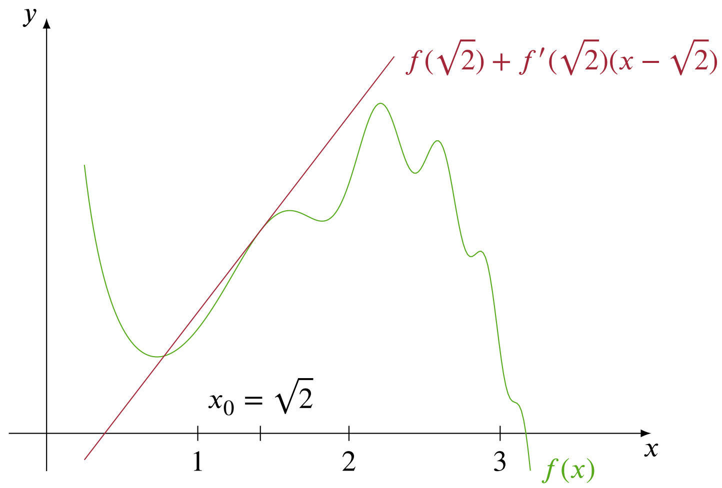


Abbildung 11.2: Zum Darstellungssatz, die Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ nähert den Graph der Funktion lokal durch eine affine Funktion an.

und van der Waerdens[1] Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \phi_0(2^k x),$$

wobei $\phi_0(x) = \min\{\,|x - \lfloor x \rfloor|\,, |x - \lceil x \rceil|\,\}$ den Abstand von x zur nächsten ganzen Zahl bezeichnet (siehe Abbildung 11.3). Eine anschauliche Herleitung findet man in [24].

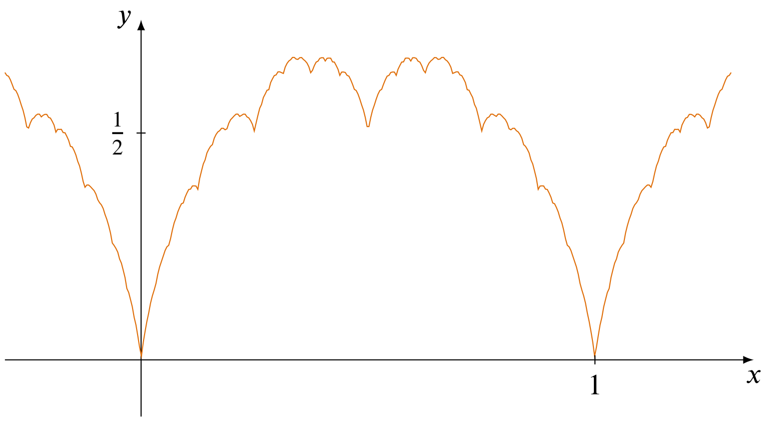


Abbildung 11.3: van der Waerdens überall stetige aber nirgends differenzierbare Funktion.

[1] Bartel Leendert van der Waerden, 1903-1996, ndl. Mathematiker

Satz 11.1.6: Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, dann ist f differenzierbar auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ und falls $R = +\infty$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \left(|x - x_0| < R \Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} \right).$$

Beweisskizze. Nach Lemma 3.5.10 ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ konvergent und nach Beispiel 10.2.24 sogar gleichmäßig. Daher sind die Grenzwertprozesse vertauschbar und es folgt die Behauptung. □

Beispiele 11.1.7. (i) Damit erhalten wir einen weiteren Beweis für das Ergebnis aus Beispiel 11.1.2 (iv) für die Exponentialfunktion $(e^x)' = e^x$:

$$\frac{d}{dx} e^x \underset{11.1.6}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{k!}}_{=\frac{1}{(k-1)!}} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

mit einer Indexverschiebung im letzten Schritt.

(ii) Sinus und Cosinus sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sin x,\\
\frac{d}{dx}\sin x &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x.
\end{aligned}$$

Ableitungsregeln 11.1.8

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktionen, dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

(i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (Linearität der Ableitung),

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel),

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (Quotientenregel).

Beweis. (i) Folgt aus den Grenzwertsätzen, da

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

(ii) Folgt wie im Beweis der Grenzwertsätze: Es ist

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$

und mit Hilfe der Stetigkeit von g in x_0 gilt

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)\right)\\ &\qquad= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0} g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

(iii) Folgt mit Hilfe der Produktregel aus

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{1}{g}(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right).\end{aligned}$$

□

Beispiele 11.1.9. (i) Die Ableitung von ax^m+bx^n ist $amx^{m-1}+bnx^{n-1}$ für $m,n\in\mathbb{N}$.

(ii) Die Ableitung von $\sin x\cos x$ ist mit Beispiel 11.1.7 (ii)

$$(\sin x\cdot\cos x)' = \sin' x\cos x+\sin x\cos' x = \cos^2 x-\sin^2 x.$$

(iii) Die Ableitung von $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist

$$\frac{\sin' x\cos x-\sin x\cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x.$$

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I,J\subseteq\mathbb{R}$ und $f : I\to J$, $g : J\to\mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0\in I$ und g in $f(x_0)\in J$ differenzierbar ist, dann ist $g\circ f : I\to\mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}\\ &= \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\end{aligned}$$

für $x \to x_0$, da aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 mit $x \to x_0$ auch $f(x) \to f(x_0)$. □

Beispiele 11.1.11. (i) $\frac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$,

(ii) Schreibt man in Beispiel 11.1.9 (ii) $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$ mit Hilfe der Additionstheoreme 3.5.15 (ii) um, erhält man das selbe Ergebnis über die Kettenregel und erneut die Additionstheoreme:

$$\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

(iii) $\frac{d}{dx}\sin(x^2+2) = \cos(x^2+2)\cdot 2x.$

(iv) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x = 0\end{cases}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Für $x \neq 0$ gilt $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ und für $x = 0$ ist

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$

da $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$ für $x \to 0$. Allerdings ist die Ableitung in $x = 0$ nicht stetig, wie man analog zu Beispiel 10.2.6 (iv) leicht sieht.

Satz 11.1.12: Ableitung der Umkehrfunktion

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to J$ bijektiv. Wenn f in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ ist, dann ist auch f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq J\setminus\{y_0\}$ eine beliebige aber feste Folge mit $y_n \to y_0$ für $n \to \infty$. Dann existiert die (eindeutig bestimmte) Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I\setminus\{x_0\}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}\,(x_n = f^{-1}(y_n))$ und es ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Daher folgt

$$\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)}{y_n-y_0} = \frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$ □

Beispiel 11.1.13. $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = e^x$ ist bijektiv und es gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}\,(f'(x) = f(x) \neq 0)\,.$$

Für $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \ln y$ gilt

$$\forall y \in (0, +\infty)\left(\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}\right).$$

Hieraus folgt mit Hilfe der „Umrechnungsformel“ in Lemma 3.7.19, dass für beliebiges $q > 0$, $q \neq 1$,

$$\left(\log_q x\right)' = \frac{1}{\ln q \cdot x}.$$

Korollar 11.1.14

Für alle $x > 0$ und alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx}x^c = \frac{d}{dx}e^{c\ln x} = e^{c\ln x}\frac{c}{x} = c \cdot x^{c-1}.$$

Beispielsweise für $c = \frac{1}{2}$: $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Beispiele 11.1.15 (Ableitungen der Arcusfunktionen).

(i) Es sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$, $f(x) = \sin x$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} = \arcsin : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und mit $y = \sin x$ gilt

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Analog zeigt man

(ii) $\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1, 1)$,

(iii) $\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$,

(iv) $\operatorname{arccot}' y = -\frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

Eine weitere Technik liefert

Beispiel 11.1.16 (Logarithmisches Differenzieren). Für $a > 0$, $a \neq 1$ gilt $a^x = e^{\ln a \cdot x}$, also

$$(a^x)' = \left(e^{\ln a \cdot x}\right)' = \ln a e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot a^x.$$

Beispiel 11.1.17. Damit ist dann etwa für $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2}^{\ln x \sin \frac{x^2}{x^3-1}}\right)' &= \ln\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^{\ln x \sin \frac{x^2}{x^3-1}}\left(\ln x \sin\frac{x^2}{x^3-1}\right)' \\
&= \ln\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^{\ln x \sin \frac{x^2}{x^3-1}}\left(\frac{\sin\frac{x^2}{x^3-1}}{x} + \ln x \cos\frac{x^2}{x^3-1}\cdot\left(\frac{x^2}{x^3-1}\right)'\right) \\
&= \ln\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^{\ln x \sin \frac{x^2}{x^3-1}}\left(\frac{\sin\frac{x^2}{x^3-1}}{x} + \ln x \cos\frac{x^2}{x^3-1}\,\frac{2x(x^3-1)-3x^4}{(x^3-1)^2}\right).
\end{aligned}$$

11.2 Die Mittelwertsätze der Differenzialrechnung

> Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die sich nicht mit Mathematik beschäftigt haben.
>
> (Archimedes)

Wir leiten im Folgenden einige wichtige und nützliche Eigenschaften differenzierbarer Funktionen her und legen die Grundsteine für eine Kurvendiskussion.

Definition 11.2.1: Lokale Extrema

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Maximum* (*lokales Minimum*) $:\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D\,(f(x) \leq f(x_0))$$

beziehungsweise

$$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D\,(f(x) \geq f(x_0))\,.$$

(i) Wir sagen kurz, dass f in x_0 ein *lokales Extremum* besitzt, wenn f in x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum besitzt.

(ii) Ein lokales Extremum heißt *isoliert*, falls die strikte Ungleichung in der punktierten Umgebung gilt.

Beispiele 11.2.2. (i) Die Funktion $f(x) = c$ hat in jedem $x \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum und Minimum.

(ii) $f(x) = x^2$ hat in $x_0 = 0$ ein lokales, sogar ein isoliertes Minimum, denn $x^2 > 0$, falls $x \neq 0$.

Satz von Fermat[a] 11.2.3

[a]Pierre de Fermat, 1601 - 1665, frz. Mathematiker

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Wenn f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. O. B. d. A. besitze f in x_0 ein lokales Minimum. Das bedeutet, es existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq I$ und $\forall x \in U_\delta(x_0)\,(f(x) \geq f(x_0))$. Es gilt daher

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \wedge f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Also folgt $f'(x_0) = 0$. □

Bemerkungen 11.2.4. (i) Der Satz von Fermat besagt, dass in einem Extremum die Tangente an die Funktion die Steigung 0 besitzt, das heißt parallel zur x-Achse verläuft.

(ii) Der Satz von Fermat liefert eine notwendige, keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum. Beispielsweise gilt $\left(x^3\right)' = 3x^2 = 0$ für $x = 0$, aber $f(x) = x^3$ hat in 0 kein lokales Extremum.

(iii) Wenn I nicht offen ist, kann x_0 auch ein Randpunkt sein. In diesem Fall muss bei einer lokalen Extremstelle nicht notwendigerweise $f'(x_0) = 0$ gelten.

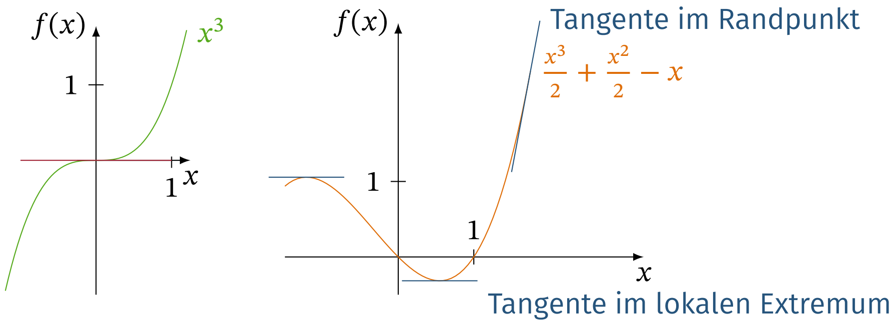


Abbildung 11.4: Zum Satz von Fermat (Bemerkung 11.2.4 (ii) und (iii)): $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend und gilt nur für innere Punkte.

(iv) Man sagt, $f : D \to \mathbb{R}$ besitzt in x_0 ein *globales Maximum* beziehungsweise *Minimum*, falls

$$\forall x \in D \left(f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_0) \right).$$

Satz von Rolle[a] 11.2.5

[a] Michel Rolle, 1652-1719, frz. Mathematiker

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a, b) differenzierbar. Weiter gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

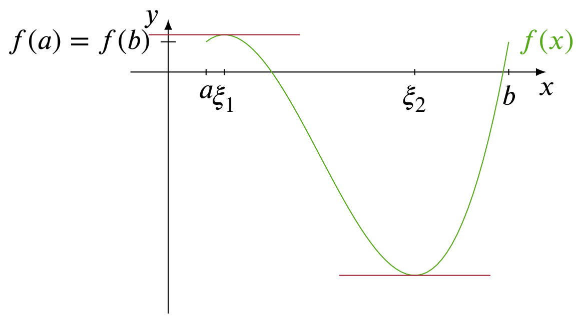


Abbildung 11.5: Zum Satz von Rolle.

Beweis. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum, Satz 10.2.14, gilt

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] \forall x \in [a, b] \left(f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \right).$$

Gilt $x_1 \in (a, b)$ oder $x_2 \in (a, b)$, so folgt aus dem Satz von Fermat, Satz 11.2.3, dass $f'(x_1) = 0$ oder $f'(x_2) = 0$. Gilt $x_1 \in \{ a, b \} \wedge x_2 \in \{ a, b \}$, dann liegen Maximum und Minimum auf dem Rand des Intervalls und nach Voraussetzung gilt

$$f(a) = f(b) = f(x_1) = f(x_2),$$

das heißt es ist $\forall x \in [a, b] \left(f(x) = f(x_1) \right)$. Demnach ist f auf $[a, b]$ konstant und folglich gilt $\forall x \in (a, b) \left(f'(x) = 0 \right)$. □

Zweiter Mittelwertsatz 11.2.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) \left(g(b) - g(a) \right) = g'(\xi) \left(f(b) - f(a) \right).$$

Bemerkung 11.2.7. Gilt $\forall x \in (a, b) \left(g'(x) \neq 0 \right)$ und $g(a) \neq g(b)$, so wird die behauptete Gleichheit aus Satz 11.2.6 oft in der Form

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

geschrieben.

Beweis von Satz 11.2.6. Wir definieren die Hilfsfunktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = f(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)) .$$

Dann ist h stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und es gilt

$$h(a) = f(a)(g(b) - g(a)) - g(a)(f(b) - f(a)) = h(b).$$

Nach dem Satz von Rolle, Satz 11.2.5, existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$h'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) - g'(\xi)(f(b) - f(a)) = 0.$$ □

Korollar 11.2.8: Erster Mittelwertsatz

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b), dann gilt

$$\exists \xi \in (a, b) \left(f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

Der erste Mittelwertsatz besagt anschaulich, dass die Steigung der Tangente an den Graph in mindestens einem Punkt ξ mit der mittleren Steigung (Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$) übereinstimmt (siehe Abbildung 11.6). Ein theoretisches Hilfsmittel, wann

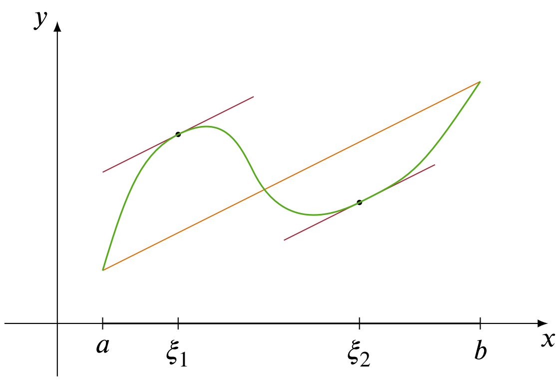


Abbildung 11.6: Zum ersten Mittelwertsatz.

zwei Funktionen gleich sind, liefert der folgende Satz. Man denke etwa an verschiedene Darstellungen einer Funktion.

Identitätssatz für differenzierbare Funktionen 11.2.9

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbare Funktionen, dann gilt

(i) $\forall x \in I (f'(x) = 0) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in I (f(x) = c)$, das heißt wenn die

Ableitung von f für alle $x \in I$ verschwindet, dann ist f konstant.

(ii) $\forall x \in I(f'(x) = g'(x)) \wedge \exists x_0 \in I(f(x_0) = g(x_0)) \Rightarrow \forall x \in I(f(x) = g(x))$.

Beweis. (i) Es sei $x_0 \in I$ beliebig aber fest, dann gilt nach dem ersten Mittelwertsatz

$$\forall x \in I \exists \xi \in (x, x_0)\,(f'(\xi)(x - x_0) = 0)\,,$$

da $f'(\xi) = 0$ und damit folgt $f(x) = f(x_0)$ und da x_0 beliebig war, folgt, dass f konstant ist.

(ii) Wir betrachten die Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$. Nach Voraussetzung gilt dann $\forall x \in I(h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0)$ und daher ist h konstant, etwa $\forall x \in I(h(x) = c)$. Weiter gilt $h(x_0) = 0$, also ist $c = 0$ und damit $\forall x \in I(h(x) = 0)$. □

Beispiele 11.2.10. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\ln(1 - x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$,

(ii) $(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$. Dabei setzen wir für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ sowie $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Beweis. (i) Wir definieren zwei Funktionen und zwar $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 - x)$ und $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$. Für alle $x \in (-1, 1)$ gilt mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe

$$f'(x) = \frac{-1}{1 - x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = g'(x)$$

und weiter ist $f(0) = g(0)$. Damit folgt die behauptete Gleichheit aus dem Indentitätssatz 11.2.9.

(ii) Für $x \in (-1, 1)$ setzen wir $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ und $g(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}$. Wir zeigen $\forall x \in (-1, 1)\,(g(x) = 1)$ und damit die behauptete Identität.

Zunächst gilt für alle $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= (1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}kx^{k-1} = (1+x)\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^{k-1}\\ &= \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}(x^{k-1}+x^k)\\ &= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}x^k + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^k\\ &= \alpha + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\left(\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}\right)x^k = \alpha+\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\\ &= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = \alpha f(x),\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile $\binom{\alpha-1}{0} = \binom{\alpha}{0} = 1$ ausgenutzt haben. Damit gilt für alle $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{f'(x)(1+x)^{\alpha} - f(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}}\\ &= \frac{f'(x)(1+x)^{\alpha} - (1+x)f'(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0\end{aligned}$$

und weiter $g(0) = \frac{f(0)}{(1+0)^{\alpha}} = 1$. Demnach ist $\forall x \in (-1,1)\,(g(x) = 1)$ und damit folgt die Behauptung. □

Lemma 11.2.11: Monotoniekriterien für differenzierbare Funktionen

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt

(i) $\forall x \in I\,(f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \nearrow)$ auf I.

(ii) $\forall x \in I\,(f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \searrow)$ auf I.

(iii) Analoge Aussagen gelten mit den strikten Ungleichungen ($>$, $<$) und strenger Monotonie ($\uparrow$, $\downarrow$).

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, die weiteren folgen analog.

Es gelte $\forall x \in I\,(f'(x) \geq 0)$ und weiter seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Nach dem ersten Mittelwertsatz, Korollar 11.2.8, gilt

$$\exists \xi \in (x_1, x_2)\,(f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0)\,,$$

da $f'(\xi) \geq 0$ und $x_2 - x_1 > 0$, also folgt $f(x_2) \geq f(x_1)$ und damit die Behauptung. □

De L'Hospitalsche[a] Regel 11.2.12

[a]Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital, 1661-1704, frz. Mathematiker

Die Funktionen f und g seien auf dem offenen Intervall (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, differenzierbar und weiter sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$. Es sei

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ (der Fall „}\tfrac{0}{0}\text{“)}$$

oder

$$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Außerdem existiere der Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, wobei bestimmte Divergenz zugelassen ist. Dann gibt es ein $b' \in \mathbb{R}$, $a < b' \leq b$ mit $g(x) \neq 0$ für $x \in (a, b')$; im Fall „$\frac{0}{0}$“ gilt dies für alle $x \in (a, b)$. Unter diesen Voraussetzungen existiert der Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt die de L'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Der Beweis in der folgenden Form ist angelehnt an [20, 5.4].

Beweis. (i) Für den Fall „$\frac{0}{0}$“ zeigen wir vorab, dass $\forall x \in (a, b)\,(g(x) \neq 0)$: Wenn $a \in \mathbb{R}$ gilt, lässt sich g in a durch $g(a) = 0$ stetig fortsetzen und aus dem Satz von Rolle folgt durch Widerspruch, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ (Abbildung 11.7). Denn nimmt man $g(x) = 0$ für ein $x \in$

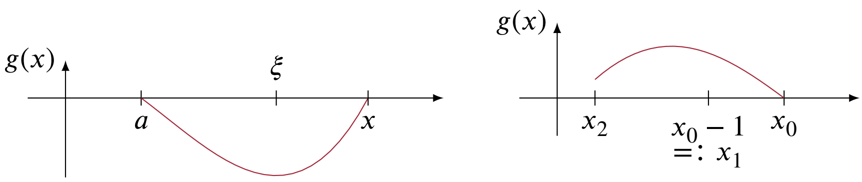


Abbildung 11.7: Zu den Vorbetrachtungen im Beweis der Regel von De L'Hospital, a endlich (links) beziehungsweise $a = -\infty$ (rechts).

(a, b) an, so existiert ein $\xi \in (a, x)$ mit $g'(\xi) = 0$. Ist $a = -\infty$, dann folgt aus der Annahme $g(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (-\infty, b)$ aus dem Satz von Rolle analog zu oben, dass $g(x_0 - 1) \neq 0$ gilt. Da nach Voraussetzung $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ gilt, muss es ein x_2 geben mit $x_2 < x_1 := x_0 - 1$ und $|g(x_2)| < |g(x_1)|$. Aufgrund der Stetigkeit von g existiert demnach ein lokales Extremum in einem Punkt $\xi \in (x_2, x_0)$. Der Satz von Fermat liefert $g'(\xi) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$.

(ii) Es sei $c := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Ist $c \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty \}$, wählen wir ein $c' \in \mathbb{R}$ mit $c' > c$. Es gibt dann ein $a' \in (a, b]$ mit

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < c'$$

für alle $x \in (a, a')$. Für $x, x' \in (a, a')$ mit $x < x'$ folgt aus dem Satz von Rolle 11.2.5, dass $g(x) \neq g(x')$, und aus dem zweiten Mittelwertsatz 11.2.6, dass

$$\frac{f(x') - f(x)}{g(x') - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < c' \tag{11.1}$$

für ein $\xi \in (x, x')$. Im Grenzübergang $x \to a$ folgt im Fall „$\frac{0}{0}$“, dass $\frac{f(x')}{g(x')} \leq c'$ für alle $x' \in (a, a')$, was

$$\limsup_{x'\to a} \frac{f(x')}{g(x')} \leq c' \text{ für alle } c' > c$$

impliziert. Also ist

$$\limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq c.$$

(iii) Im Fall $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ erhalten wir nach Umformung und Division durch $g(x) \neq 0$ aus (11.1) für alle $x, x'(a, a')$ mit $x < x'$, dass

$$\frac{f(x) - f(x')}{g(x)} < c' \frac{g(x) - g(x')}{g(x)}$$

und damit

$$\frac{f(x)}{g(x)} < c' \left(1 - \frac{g(x')}{g(x)}\right) + \frac{f(x')}{g(x)} \text{ für alle } c' > c.$$

Für $x \to a$ erhalten wir dann, dass

$$\limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq c.$$

(iv) Ist $c \in \mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$, so folgt analog zu den Betrachtungen in (ii) und (iii), dass

$$\liminf_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \geq c.$$

Zusammengenommen folgt aus (ii), (iii) und (iv) die de L'Hospitalsche Regel. □

Beispiele 11.2.13. (i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{1} = +\infty$, durch Iteration des Argumentes erhält man $\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$, das heißt die Exponentialfunktion wächst für $x \to +\infty$ schneller als jedes Polynom.

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\exp x}{x} = 0$,

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, für $x \to +\infty$ wächst der Logarithmus also langsamer als jedes Polynom.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(v) $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0} x\ln x} = e^0 = 1$, wobei wir den Grenzwert aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion hineinziehen durften.

11.3 Der Satz von Taylor

> Die gesamte exakte Wissenschaft wird von der Idee der Approximation beherrscht. (Bertrand Russel)

Der Satz von Taylor[2] liefert nach der linearen Approximation von Funktionen über ihre Ableitungen eine Approximation durch Polynome und im günstigsten Fall eine Darstellung als Potenzreihe. Dies ist in der Praxis sehr nützlich, weil Polynome einfach zu untersuchen sind. Mit dem Satz von Taylor werden wir auch weitere Kriterien für eine Kurvendiskussion herleiten, wie sie vielleicht noch aus der Schule bekannt sind.

Definition 11.3.1: Ableitungen höherer Ordnung

(i) Es seien $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I, $x_0 \in I$ und $(f')'(x_0)$ existiere. Dann heißt

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) := (f')'(x_0) = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)(x_0)$$

die *zweite Ableitung* von f an der Stelle x_0.

(ii) Falls $f''(x)$ für alle $x \in I$ existiert, dann heißt f *zweimal differenzierbar* auf I. Die *zweite Ableitung* $f'' : I \to \mathbb{R}$ ist dann auf ganz I erklärt.

[2] Brook Taylor, 1685-1731, engl. Mathematiker

(iii) Ist zusätzlich f'' stetig auf I, so heißt f *zweimal stetig differenzierbar* auf I und wir schreiben kurz $f \in C^2(I)$.

(iv) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definieren wir rekursiv die *n-te Ableitung* $f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ und die Klasse $C^n(I)$ der auf I *n-mal stetig differenzierbaren Funktionen*.

(v) Existiert $f^{(n)}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt f *unendlich oft differenzierbar* im Punkt x_0. Ist $f^{(n)}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I$ erklärt, so heißt f *unendlich oft differenzierbar* auf I, $f \in C^\infty(I)$. In diesem Fall ist f automatisch auch unendlich oft stetig differenzierbar.

Satz 11.3.2

Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Es gilt f ist innerhalb des Konvergenzradius unendlich oft differenzierbar, die n-te Ableitung berechnet sich für $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < R$ zu

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^\infty a_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n}$$

und es gilt $f^{(n)}(x_0) = a_n n!$, also $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ und daher

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R},\ |x-x_0| < R.$$

Der folgende Satz wäre mit der Forderung $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$ eine Anwendung dieses Satzes. Wir zeigen aber, dass es für Potenzreihen bereits genügt, wenn sie auf einer Folge übereinstimmen, die den Entwicklungspunkt als Häufungspunkt besitzt:

Identitätssatz für Potenzreihen 11.3.3

Es seien $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k(x-x_0)^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^\infty b_k(x-x_0)^k$ zwei Potenzreihen und ein $R > 0$, so dass f und g für $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < R$, konvergieren. Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < R \,\} = I$ eine Folge mit $x_k \to x_0$, $x_k \neq x_0$ und gilt $f(x_k) = g(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\forall x \in I\,(f(x) = g(x)) \wedge \forall k \in \mathbb{N}_0\,(a_k = b_k)\,.$$

Beweis. Da f, g auf I stetige Funktionen sind, gilt

$$a_0 = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x_0) = b_0.$$

Wir betrachten die Funktionen $f_1(x) = \frac{f(x)-a_0}{x-x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(x-x_0)^k$ und $g_1(x) = \frac{g(x)-b_0}{x-x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(x-x_0)^k$. Diese sind als Potenzreihen wiederum stetig und es gilt $\forall k \in \mathbb{N}\,(f_1(x_k) = g_1(x_k))$. Damit folgt

$$a_1 = f_1(x_0) = \lim_{k\to\infty} f_1(x_k) = \lim_{k\to\infty} g_1(x_k) = g_1(x_0) = b_1.$$

Durch vollständige Induktion folgt, dass die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{f_{n-1}(x) - a_{n-1}}{x - x_0} \text{ und } g_n(x) = \frac{g_{n-1}(x) - b_{n-1}}{x - x_0}$$

in allen Punkten x_k, $k \in \mathbb{N}$, übereinstimmen und deshalb mit der Stetigkeit $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Damit folgt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$. □

Definition 11.3.4: Taylorpolynom, Taylorreihe

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in I$ n-mal differenzierbar. Dann ist

$$T^{(n)}f(x_0, x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das *n-te Taylorpolynom* von f an der Stelle x mit dem *Entwicklungspunkt* x_0, wobei wir $f^{(0)} = f$ setzen. Ist f an der Stelle x_0 unendlich oft differenzierbar, so heißt die formale Reihe

$$Tf(x_0, x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die *Taylorreihe* von f an der Stelle x mit dem *Entwicklungspunkt* x_0.

Satz von Taylor 11.3.5

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei f auf (a, b) n-mal differenzierbar und $(n-1)$-mal stetig differenzierbar in I. Dann gilt die *Taylorsche Formel*

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \\ = T^{(n-1)}f(x_0, x) + R_n(x_0, x) \end{aligned}$$

für alle $x \in I$ mit einem $\xi = x_0 + t(x - x_0)$ für ein $t \in (0, 1)$ und

$$R_n(x_0, x) := \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

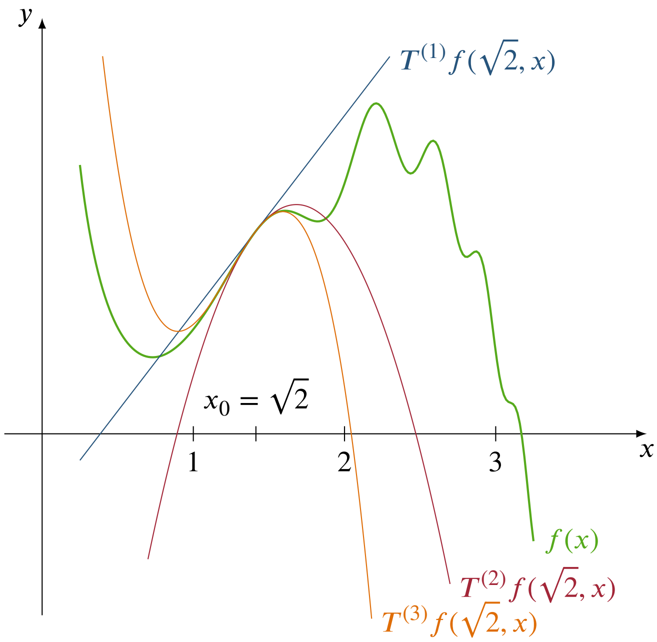


Abbildung 11.8: Taylorpolynome für $f(x) = x^2 \cdot \sin(x) + \frac{\cos(x^3-2x)}{x}$.

ist das *Lagrangesche Restglied*[a].

[a] Joseph-Louis de Lagrange, 1736-1813, ital. Mathematiker

Beweis. Es seien $x \in I$, $x \neq x_0$ beliebig aber fest und sei die Konstante $A = A(x) \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$A(x) = \frac{f(x) - T^{(n-1)}f(x_0, x)}{(x - x_0)^n}.$$

Zu zeigen ist, dass $A = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ für ein ξ zwischen x_0 und x. Wir setzen

$$g(t) := f(t) - T^{(n-1)}f(x_0, t) - A(t - x_0)^n.$$

Dann ist $g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!A$, weshalb nur zu zeigen ist, dass $g^{(n)}(\xi) = 0$ für ein ξ zwischen x_0 und x. Mit Satz 11.3.2 gilt

$$g^{(k)}(x_0) = \Bigg(f^{(k)}(t) - \sum_{\ell=k}^{n-1} \ell(\ell-1)\cdots(\ell-k+1)\frac{f^{(\ell)}(x_0)}{\ell!}(t-x_0)^{\ell-k} \\ -n(n-1)\cdots(n-k+1)A(t-x_0)^{n-k}\Bigg)\Bigg|_{t=x_0} = 0$$

für $k = 0, \ldots, n-1$. Außerdem ist $g(x) = 0$ nach Definition von A. Der Satz von Rolle liefert also ein ξ_1 zwischen x_0 und x mit $g'(\xi_1) = 0$. Mit $g'(x_0) = 0$ existiert nach dem Satz von Rolle dann ein ξ_2 zwischen x_0 und ξ_1 mit $g''(\xi_2) = 0$. Nach n Schritten folgt $g^{(n)}(\xi_n) = 0$ für ein ξ_n zwischen x_0 und ξ_{n-1}. Setzen wir $\xi_n =: \xi$, dann folgt die Behauptung. □

Wir nutzen den Satz von Taylor und den Darstellungssatz 11.1.3, um Beiträge zur Kurvendiskussion herzuleiten. Als Folgerung aus dem Satz von Taylor ergibt sich

Lemma 11.3.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf (a, b). Dann gilt für $x, x_0 \in I$ die Taylorsche Formel

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R(x_0, x) \end{aligned}$$

mit einem ξ zwischen x_0 und x und

$$R(x_0, x) = \frac{f''(\xi) - f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Bemerkungen 11.3.7. (i) Da für die Funktion R gilt, dass $\lim_{x \to x_0} \frac{R(x_0,x)}{|x-x_0|^2} = 0$, bezeichnet man sie auch als $o(|x - x_0|^2)$.

Allgemeiner sagt man und lässt dabei $x_0 = \pm\infty$ zu: Eine Funktion f ist „klein o“ von einer Funktion g für $x \to x_0$, $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$, wenn $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ gilt. Anschaulich bedeutet dies, dass f im Vergleich zu g vernachlässigbar klein wird (vergleiche Definition 3.1.14).

Analog überträgt sich die „groß O“-Notation auf Funktionsgrenzwerte: Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to x_0$, dann gilt

$$\exists C, K \in (0, +\infty) \forall x \in [x_0 - K, x_0 + K] \left(|f(x)| \le C\,|g(x)|\right).$$

Ist $x_0 = \pm\infty$, so gibt es ein K, so dass die Ungleichung für alle größeren beziehungsweise kleineren x gilt. Die Sprechweisen lassen sich auch auf skalare Funktionen auf normierten Räumen übertragen.

(ii) Der Satz von Taylor 11.3.5 liefert zusätzlich zum Darstellungssatz 11.1.3 die Möglichkeit, nichtlineare Gleichungen zu Linearisieren: Die Terme höherer Ordnung sind in der Nähe des Entwicklungspunktes vernachlässigbar klein und lineare Probleme lassen sich viel einfacher lösen. In der Theorie neuronaler Netze führt etwa die Untersuchung von quasi-stationären Zuständen, in denen die Neuronen annähernd konstante Signale aussenden, auf Differenzialgleichungen in der Zeit, siehe auch Kapitel 13, und deren Linearisierung führt dann auf ein Eigenwertproblem, dessen Lösung Aussagen über das Verhalten des neuronalen Netzes erlaubt.

Satz 11.3.8: Notwendiges zweite-Ableitungskriterium

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar auf I und besitze in einem inneren Punkt $x_0 \in I$ ein Maximum beziehungsweise ein Minimum, dann gilt

$$f''(x_0) \leq 0 \text{ beziehungsweise } f''(x_0) \geq 0.$$

Beweis. Nach dem Satz von Fermat 11.2.3 ist $f'(x_0) = 0$. Also reduziert sich die Taylorsche Formel auf

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2)$$

für $x \in I$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege in x_0 ein lokales Maximum vor. Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Also folgt

$$\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2) = f(x) - f(x_0) \leq 0$$

und das bedeutet

$$f''(x_0) + \frac{2o(|x - x_0|^2)}{|x - x_0|^2} \leq 0.$$

Der Grenzübergang $x \to x_0$ liefert dann die Behauptung $f''(x_0) \leq 0$. □

Diese Bedingung ist nicht hinreichend, wie man an $f(x) = x^3$ ohne lokale Extrema aber mit $f'(0) = f''(0) = 0$ sieht.

Satz 11.3.9: Hinreichendes zweite-Ableitungskriterium

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf I. In einem inneren Punkt $x_0 \in I$ sei $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ beziehungsweise $f''(x_0) > 0$. Dann besitzt f an der Stelle x_0 ein isoliertes relatives Maximum beziehungsweise Minimum.

Beweis. Nach der Taylorschen Formel gilt für $x \in I$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2).$$

Es sei $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$\left|o(|x-x_0|^2)\right| \leq \frac{|f''(x_0)|}{4}\,|x-x_0|^2$$

für $x \in U_\delta(x_0)$. Dann ergibt sich im Fall $f''(x_0) < 0$ die Ungleichung

$$f(x) - f(x_0) \leq \frac{f''(x_0)}{4}\,|x-x_0|^2 < 0$$

für $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$.

Der Fall $f''(x_0) > 0$ liefert die entsprechende Behauptung analog. □

Bemerkung 11.3.10. Dieses Kriterium verallgemeinert man mit dem Satz von Taylor leicht auf die Situation, dass $f \in C^{n+1}(I)$, für die Ableitungen $f^{(k)}(x_0) = 0$ gilt für $k = 1, \dots, n$ und die „letzte" Ableitung $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ ist. Eine Fallunterscheidung liefert dann, dass wieder je nach Vorzeichen ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt, wenn $n+1$ gerade ist, und dass andernfalls kein lokales Extremum vorliegt (Aufgabe A.11.13).

11.4 Partielle Ableitungen

> Suche das Einfache und misstraue ihm.
>
> (Alfred North Whitehead)

In diesem Abschnitt betrachten wir kurz Funktionen von mehreren Variablen $x_1, \dots, x_n$ und untersuchen Änderungen der Funktionen, wenn sich genau eine Variable verändert. Wir gehen dabei davon aus, dass man sich im jeweiligen Punkt, in dem man die Funktion untersucht, in alle Richtungen mindestens ein klein wenig bewegen kann, ohne den Definitionsbereich zu verlassen. Es sei konkret also $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ „geeignet". Weiter sei $a = (a_1, \dots, a_n)^\top \in D$ ein fester Vektor. Ersetzt man bis auf x_j alle Variablen x_i $(1 \leq i \neq j \leq n)$ durch die a_i, dann ist durch

$$\tilde{f}^j(x_j) := f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

eine neue Funktion in einer Variablen definiert. Wir setzen voraus, dass $\tilde{f}^j$ mindestens auf $(a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon)$ definiert ist. Existiert die Ableitung von $\tilde{f}^j$ in a_j, so nennt man sie die partielle Ableitung von f nach x_j. Das bedeutet, die partielle Ableitung nach x_j ist die bekannte Ableitung im Eindimensionalen einer entsprechend eingeschränkten (alle anderen Argumente werden auf konkrete Werte gesetzt) Funktion $\tilde{f}^j$.

Definition 11.4.1: Partielle Ableitung, partielle Differenzierbarkeit

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ wie oben und e_j der j-te kanonische Einheitsvektor.

(i) f heißt in a *partiell nach* x_j *differenzierbar* ($1 \leq j \leq n$), wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\cdot e_j)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *partielle Ableitung von f nach x_j in a* und wird mit $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ bezeichnet.

(ii) Existiert die partielle Ableitung von f nach x_j in allen $a \in D$, so heißt die Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

die *partielle Ableitung von f nach x_j*.

(iii) Existieren für $x_1,\dots,x_n$ alle partiellen Ableitungen von f im Punkt a, dann heißt $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^{\mathsf{T}}$ der *Gradient* von f.

Beispiele 11.4.2. (i) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = 3x_1x_2 + 4x_2$, dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0,y_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3(x_0+h)y_0+4y_0-(3x_0y_0+4y_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3hy_0}{h} = 3y_0.\end{aligned}$$

Einfacher und schneller geht es, wenn man auf die bekannten Ableitungsregeln zurückgreift, was nach unseren Vorbetrachtungen möglich und sinnvoll ist. Wir bestimmen $\frac{\partial f}{\partial x_2}$: Wir behandeln x_1 wie eine Konstante und differenzieren $f(x_1,x_2)$ nach x_2: $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1 + 4$. Weiter gilt $\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ 3x_1+4 \end{pmatrix}$.

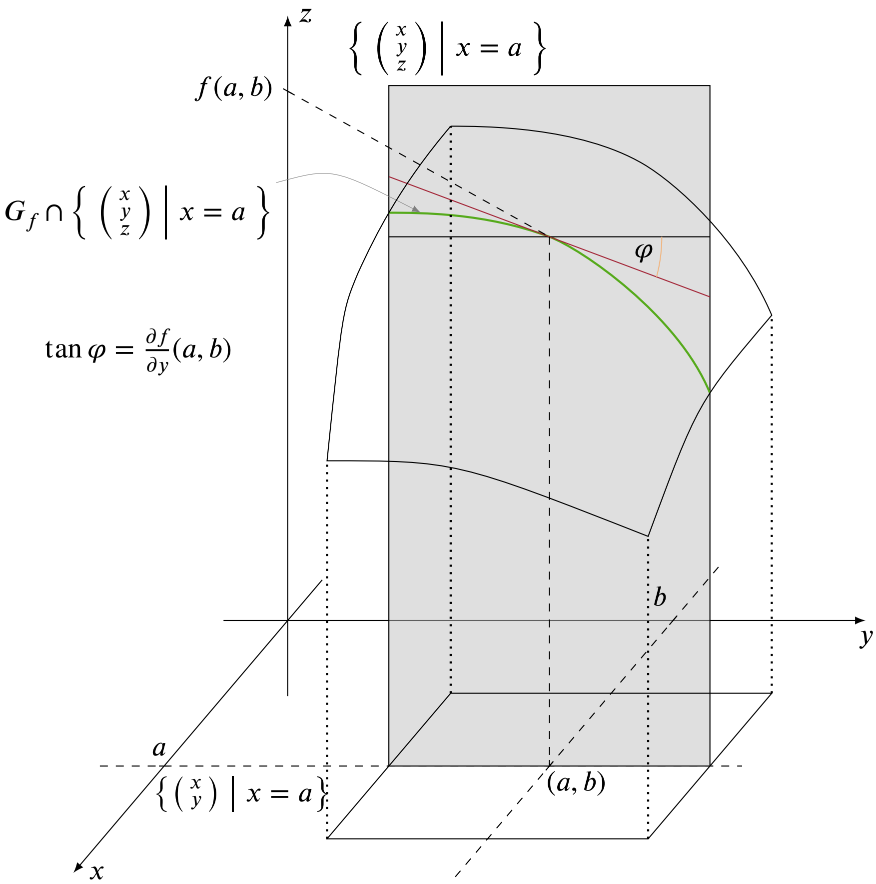


Abbildung 11.9: Partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ in y-Richtung. Der Graph von f geschnitten mit der durch $x = a$ gegebenen Ebene liefert die vertraute eindimensionale Situation (Abbildung angelehnt an [21]).

(ii) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y^2x + 3x^2z^3$, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= f_x(x,y,z) = y^2 + 6xz^3, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= f_y(x,y,z) = 2xy + 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= f_z(x,y,z) = 0 + 9x^2z^2. \end{aligned}$$

(iii) Ein etwas komplizierteres Beispiel ist $f : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^{2y}$. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2yx^{2y-1}, \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\ln x \cdot x^{2y}.$$

Bemerkungen 11.4.3. (i) Während man im $\mathbb{R}^n$ die Definition der Stetigkeit direkt (in der Formulierung für metrische oder normierte Räume, Bemerkung 10.2.26) übernehmen kann, sei darauf hingewiesen, dass man bei den mehrdimensionalen Grenzwerten, die dann auftreten, die Variablen im Allgemeinen nicht unabhängig voneinander betrachten darf.

(ii) Insbesondere folgt aus der partiellen Differenzierbarkeit einer Funktion nicht ihre Stetigkeit.

(iii) Es gilt eine mehrdimensionale Version des Satzes von Fermat 11.2.3: In einem lokalen Extremum ist der Gradient der Nullvektor.

(iv) Eine weitere nützliche Eigenschaft des Gradienten ist, in die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion zu zeigen. Dies findet etwa Anwendung in der Bildbearbeitung zur Kantenerkennung: Eine Kante im Bild zeichnet sich durch eine starke oder zumindest stärkere Farbveränderung aus, wenn sie überschritten wird (siehe etwa [22]).

Weiter wird diese Eigenschaft etwa in sogenannten *Gradientenverfahren* ausgenutzt, um lokale Extrema zu finden: Ist in einem Punkt x der Gradient einer Funktion f durch v gegeben, dann liegt der Punkt $x - \varepsilon v$ näher an einem lokalen Extremum als x, sofern $\varepsilon > 0$ nicht zu groß gewählt wurde.

Im Bereich des maschinellen Lernens wird in einem künstlichen neuronalen Netz hierbei von *Backpropagation* gesprochen, da sich der Lernprozess (die Anpassung der Gewichte, siehe Beispiel B.3.2; ε wird in diesem Kontext als *Lernrate* bezeichnet) von der Ausgabeschicht (Ausgangssignal) rückwärts durch das Netz bis zu den Gewichten in der Eingabeschicht (Eingangssignale) arbeitet.

(v) Man kann auch im Mehrdimensionalen den Satz von Taylor formulieren. Zu beachten ist dabei, dass die „Ableitung" einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus n Funktionen besteht (Gradient, auch Jacobi[3]-Matrix) - vorausgesetzt natürlich, die entsprechenden Grenzwerte existieren alle. Entsprechend besteht die Jacobi-Matrix f' einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ aus $n \cdot m$ Funktionen:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

[3]Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851, dt. Mathematiker

Sind die partiellen Ableitungen wieder stetig partiell differenzierbar, lässt sich der Satz von Taylor wie folgt für das Restglied zweiter Ordnung formulieren

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2). \tag{11.2}$$

Kapitel 12

Integralrechnung

12.1 Stammfunktionen

> Es mag deshalb natürlich erscheinen, eine Defintion des Integrals zu suchen, die in einem möglichst großen Bereich die Integration zur inversen Operation der Differentiation macht.
>
> (Henri Léon Lebesque)

In diesem Abschnitt betrachten wir die Integrationstheorie unter dem Gesichtspunkt der Umkehrung der Differenziation, den aus der Schule bekannten Aspekt der Flächenberechnung betrachten wir später. Auch diesen Ansatz kann man anschaulich motivieren: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$, beschreibe die Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse von a bis zum Punkt $x \in [a, b]$ (Abbildung 12.1). Ist $x_0 \in [a, b]$, so ist die Fläche unter dem Graph zwischen x_0 und x durch $g(x) - g(x_0)$ gegeben. Diese Fläche können wir auch annähern durch das Rechteck mit der Grundseite der Länge $x - x_0$ und der Höhe $f(x_0)$. Das bedeutet $f(x_0)(x - x_0) \approx g(x) - g(x_0)$ beziehungsweise $f(x_0) \approx \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$. Ist f „gut genug", so wird die Näherung immer besser, wenn wir den Grenzwert $x \to x_0$ betrachten. Im Grenzwert konvergiert die rechte Seite dann gegen $g'(x_0)$.

Definition 12.1.1: Stammfunktion, unbestimmtes Integral

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, F : I \to \mathbb{R}$. Wenn F auf I die Ableitung f besitzt, das heißt wenn $\forall x \in I (F'(x) = f(x))$ gilt, so heißt F eine *Stammfunktion* oder ein *unbestimmtes Integral* von f, in Zeichen

$$F(x) = \int f(x)\, dx \text{ für } x \in I.$$

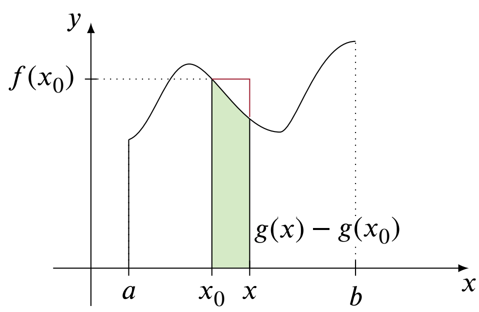


Abbildung 12.1: Graphische Motivation der Stammfunktion.

Um nicht nur über hypothetische Funktionen mit Stammfunktionen zu sprechen, erwähnen wir eine bekannte Klasse von Funktionen, die Stammfunktionen besitzen:

Satz 12.1.2

Jede auf einem kompakten Intervall I stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion.

Beweis. Das folgt mit Hilfe des Riemann-Integrals im ersten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Satz 12.5.6. □

Beispiel 12.1.3. Es sei $f(x) = 2$, dann ist $F(x) = 2x$ eine Stammfunktion von f, da $F'(x) = 2 = f(x)$ gilt. Wir schreiben auch $\int f(x)\,dx = 2x$. Es ist aber auch $G(x) = 2x + 3 = \int f(x)\,dx$. Siehe auch Beispiel 6.1.9 (i).

Wenn eine Stammfunktion also nicht eindeutig ist, können die Unterschiede zwischen zwei Stammfunktionen einer Funktion dann beliebig sein und wäre das dann überhaupt ein sinnvoller Begriff?

Lemma 12.1.4

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, dann gilt

$$\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in I\,(F_1(x) - F_2(x) = c)\,.$$

Beweis. Die Differenzfunktion $F = F_1 - F_2$ ist in I differenzierbar und es gilt $F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Aus dem Identitätssatz für differenzierbare Funktionen 11.2.9 folgt daher die Behauptung. □

Aus dem vorangegangenen Kapitel erhalten wir durch Umformulierung der Situation „f ist gegeben, bestimme f'" nun mit bekanntem f', eine Stammfunktion f:

Stammfunktionen elementarer Funktionen 12.1.5

Es gilt, sofern nicht anders angegeben für alle $x \in \mathbb{R}$,

(i) $$\int (x-a)^n \, dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \begin{cases} \text{für } x \neq a, \ n \in \mathbb{Z}, \ n \neq -1 \text{ oder} \\ x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(ii) $$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| \text{ für } x \neq a.$$

(iii) $$\int x^\mu \, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \text{ für } x > 0, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \mu \neq -1.$$

(iv) $$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \text{ für } a \in \mathbb{R}, \ a \neq 0.$$

(v) $$\int a^x dx = \int e^{\ln a \, x} dx = \frac{a^x}{\ln a} \text{ für } a > 0, \ a \neq 1.$$

(vi) $$\int \sin x \, dx = -\cos x, \ \int \cos x \, dx = \sin x.$$

(vii) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \text{ für } x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \text{ für } x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

(viii) $$\int \cot x \, dx = \ln \sin x \text{ für } \sin x > 0,$$
$$\int \tan x \, dx = -\ln \cos x \text{ für } \cos x > 0.$$

(ix) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \text{ für } |x| < 1.$$

(x) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x.$$

Beweis. Man differenziere die jeweils angegebene Stammfunktion. □

In alten Ausgaben von mathematischen Nachschlagewerken finden sich oft über viele Seiten Listen von Stammfunktionen. Vermutlich da die gängigen Computeralgebrasysteme insbesondere die komplizierteren Stammfunktionen auch selbst bestimmen können, sind die Listen in den neueren Ausgaben wesentlich weniger umfangreich.

Potenzreihen stellen auf ihrem Konvergenzbereich stetige Funktionen dar und besitzen daher Stammfunktionen, wir können diese aber auch ohne Vorgriffe bereits angegeben, denn analog zur Differenziation werden die Stammfunktionen von Potenzreihen gliedweise bestimmt:

Satz 12.1.6: Stammfunktionen von Potenzreihen

Wenn die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < R$ konvergiert, dann gilt dort

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}.$$

Beweis. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ besitzt nach Lemma 3.5.10 den selben Konvergenzradius wie f. Deshalb ist sie dort differenzierbar und mit Satz 11.1.6 gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k.$$ □

Aus den Ableitungsregeln folgt sofort

Satz 12.1.7: Linearität der Stammfunktion

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Existieren $\int f(x)\,dx$ und $\int g(x)\,dx$ dann existieren auch $\int (f+g)(x)\,dx$ und $\int (c \cdot f)(x)\,dx$ und es gilt

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

und

$$\int (c \cdot f)(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx.$$

In der Regel wird man nicht das Glück haben, eine Stammfunktion von einer Funktion bestimmen zu müssen, die man als Linearkombination von bekannten Ableitungen identifizieren und mit Satz 12.1.5 und 12.1.7 direkt angeben kann. Wir betrachten daher zwei Techniken, die auf entsprechende Ableitungsregeln zurückgehen und die es uns erlauben, Stammfunktionen weiterer Funktionen zu bestimmen.

Satz 12.1.8: Partielle Integration

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in I und die Funktion $f \cdot g'$ besitze eine Stammfunktion in I. Dann hat auch $f' \cdot g$

eine Stammfunktion und es gilt

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis. Dies ist eine Umformulierung der Produktregel:

$$(fg)' = f \cdot g' + f' \cdot g.$$

□

Beispiele 12.1.9. (i) (a) Wir bestimmen $\int xe^x\,dx$ mit Hilfe partieller Integration. Dafür wählen wir $f(x) = e^x$ mit $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x$ mit $g'(x) = 1$ und erhalten so

$$\int \underbrace{x}_{=g(x)} \underbrace{e^x}_{=f'(x)}\,dx = \underbrace{xe^x}_{f(x)g(x)} - \int \underbrace{1}_{=g'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=f(x)}\,dx = xe^x - e^x.$$

(b) Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx\\ = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x.\end{aligned}$$

(ii) $\int t\cos t\,dt = t\sin t - \int \sin t\,dt = t\sin t + \cos t.$

(iii) In den folgenden beiden Beispielen fügen wir eine „intelligente Eins“ ein, um die passende Struktur zu haben:

$$\int \ln t\,dt = t\ln t - \int t \cdot \frac{1}{t}\,dt = t\ln t - t.$$

(iv) $\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

(v)
$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \cos x\sin x - \int(-\sin x)\sin x\,dx\\ &= \cos x\sin x + \int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\,dx\\ &= \cos x\sin x + \int 1\,dx - \int \cos^2 x\,dx\\ &= \cos x\sin x + x - \int \cos^2\,dx.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int \cos^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\cos x\sin x + x\right).$$

Die Situation, dass man bei der partiellen Integration den zu integrierenden Term auf der rechten Seite wieder erhält und zur Bestimmung der Stammfunktion nutzen kann, wird auch als „Phönix aus der Asche“-Methode bezeichnet.

Oft ist nicht auf den ersten Blick klar, welchem Teil der Funktion man bei der partiellen Integration welche Rolle zuweisen muss, damit die Rechnung zum Erfolg führt. Teilweise hilft das Einfügen einer „nahrhaften Null“, manchmal ist mehrfache Anwendung von partieller Integration notwendig – in diesem Fall ist darauf zu achten, dass man nicht durch eine Unaufmerksamkeit einen vorherigen Schritt einfach wider rückgängig macht.

Die zweite Integrationstechnik, die wir betrachten, geht auf die Kettenregel zurück:

Satz 12.1.10: Substitutionsregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle, $f : I \to J$ differenzierbar und $g : J \to \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion im Intervall J, dann besitzt die Funktion $g \circ f \cdot f' : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion und für $t \in I$ gilt die *Substitutionsregel*

$$\int g(x)\,dx\Big|_{x=f(t)} = \int g(f(t))f'(t)\,dt.$$

Beweis. Es sei $G(x) = \int g(x)dx$ eine Stammfunktion von g, dann ist $\forall x \in J(G'(x) = g(x))$. Nach der Kettenregel gilt für $t \in I$ außerdem

$$(G \circ f)'(t) = (G(f(t)))' = G'(f(t)) \cdot f'(t) = g(f(t)) \cdot f'(t) = ((g \circ f) \cdot f')(t).$$

Also ist $G \circ f$ eine Stammfunktion von $(g \circ f) \cdot f'$ im Intervall I und es gilt weiter

$$\int g(x)\,dx\Big|_{x=f(t)} = G(f(t)) = \int g(f(t))f'(t)\,dt. \qquad \square$$

Korollar 12.1.11

Ist f auf I umkehrbar, so erhält man durch Einsetzen die häufig nützlichere Form der *Substitutionsregel*:

$$\int g(x)\,dx = \int g(f(t)) \cdot f'(t)\,dt\Big|_{t=f^{-1}(x)}.$$

Wir verdeutlichen die Bedeutung der Aussagen mit Beispielen:

Beispiele 12.1.12. (i) Wir bestimmen $\int te^{t^2}dt$ und setzen dafür $f(t) = t^2$ mit $f'(t) = 2t$ und $g(x) = e^x$. Die Motivation ist, dass einerseits

dadurch der Term e^{t^2} verschwindet und andererseits man f' schon fast im Integral stehen hat. Genauer hat das Integral dann die Form $\frac{1}{2}\int g(f(t))f'(t)\,dt$. Die Funktion g besitzt die Stammfunktion $G(x) = e^x$ und nach der Substitutionsregel ist die gesuchte Stammfunktion daher unter Berücksichtigung des Vorfaktors $\frac{1}{2}G(x)\Big|_{x=f(t)} = \frac{e^{t^2}}{2}$.
Manchmal ist die folgende, durch unsere Definition nicht legitimierte, Schreibweise praktisch: Wir setzen $f(t) = t^2$, dann ist $\frac{df}{dt} = 2t$ also „$df = 2t\,dt$“ oder $dt = \frac{df}{2t}$. Beim Einsetzen kürzt sich dann t und wir erhalten

$$\int te^{t^2}dt = \int e^f \frac{df}{2} = \frac{e^f}{2} = \frac{e^{t^2}}{2},$$

wobei wir im letzten Schritt zurücksubstituiert haben.

(ii) $\int \tan t\,dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt$. Wir setzen $u = \cos t$, dann ist $du = -\sin t\,dt$ und demnach

$$\int \tan t\,dt = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| = -\ln|\cos t|\,.$$

Die Situation mit $\int \frac{f'}{f}\,dx$ führt ganz allgemein auf $\ln|f(x)|$ (siehe auch Beispiel 12.1.13).

(iii) Wir betrachten $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Da $|x| \leq 1$ gelten muss, damit der Integrand definiert ist, substituieren wir $x = \sin t$, dann ist $\frac{dx}{dt} = \cos t$ beziehungsweise $dx = \cos t\,dt$. Damit haben wir mit dem Satz des Pythagoras 3.7.21

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos t \cos t\,dt \\ &= \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(\cos t \sin t + t)\end{aligned}$$

nach Beispiel 12.1.9 (v). Die Rücksubstitution liefert unter Verwendung von $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right).$$

Die Idee, für eine Variable, die Werte zwischen -1 und 1 annimmt, den Sinus oder Cosinus zu substituieren, ist an anderen Stellen nutzbar. Siehe auch Bemerkung 12.2.12.

Auch bei der Substitution gibt es keine allgemeine Regel, wie man auf die zu substituierende Variable kommt. Mit etwas Übung, Probieren und Betrachtung der noch nicht passenden Terme kann man aber zum Erfolg kommen.

Im Allgemeinen wird die Bestimmung einer Stammfunktion mehrfache Anwendungen und Kombinationen von allen möglichen Techniken erfordern. Wir erwähnen noch zwei Kniffe, mit denen man es sich manchmal einfacher machen kann.

Beispiele 12.1.13. Allgemein gilt unter den Voraussetzungen für partielle Integration beziehungsweise die Substitutionsregel für eine Funktion f

(i) $\int f(x)f'(x)dx = f(x)f(x) - \int f'(x)f(x)dx$ und daher

$$\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}(f(x))^2.$$

(ii) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$, falls $f(x) \neq 0$.

12.2 Rationale Funktionen

> Ich wenigstens kenne keine vollbefriedigende Erklärung dafür, warum jede ungerade Zahl (von 3 ab) mit sich selbst multipliziert, stets ein Vielfaches von 8 mit 1 als Rest ergibt.
>
> (Erich Bischoff)

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Integration rationaler Funktionen beschäftigen. Rationale Funktionen sind nach Definition 3.7.13 Quotienten von Polynomen. Deshalb erinnern wir zunächst an ein paar Aussagen über Polynome (Definition 3.7.6 sowie Korollar 3.7.12) und komplexe Zahlen (Abschnitte 2.7 und 4.1).

Polynome 12.2.1. (i) Jedes Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$, n-ten Grades besitzt genau n (komplexe) Nullstellen .

(ii) Jedes Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ vom Grad n besitzt eine Produktdarstellung der Form

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{p_k}, \tag{12.1}$$

wobei $r \in \{1, \dots, n\}$, z_k für $k = 1 \dots, r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von P und $p_k \in \mathbb{N}$ für $k = 1, \dots, r$ mit $\sum_{k=1}^{r} p_k = n$ die Vielfachheiten der Nullstellen sind.

Wir vereinfachen das Problem, indem wir es auf die Integration von Polynomen und *echt gebrochen rationalen Funktionen* zurückführen. Polynome können wir bereits integrieren und für echt gebrochen rationale Funktionen werden wir die Situation auf wenige Spezialfälle zurückführen können. Wir erinnern uns daran, dass Lemma 3.7.9 (Euklidischer Algorithmus für Polynome) es uns ermöglicht, uns bei rationalen Funktionen auf solche Funktionen $R = \frac{P}{Q}$ zu beschränken, die *echt gebrochen* sind, das heißt $\operatorname{grd}(P) < \operatorname{grd}(Q)$.

Das Verfahren der Polynomdivision entspricht dabei der Division mit Rest: Sind $p, q \in \mathbb{N}$, so existieren eindeutig bestimmte $p_1, p_2 \in \mathbb{N}_0$, so dass $p = p_1 \cdot q + p_2$ mit $0 \leq p_2 < q$. Wir betrachten zunächst ein paar Beispiele, in denen Q P teilt, das bedeutet, Q lässt sich bis auf einen konstanten Faktor als ein Teilprodukt aus der Darstellung (12.1) darstellen – besitzt also höchstens die Nullstellen von P, das Restpolynom P_2 ist daher hier Null. Im Allgemeinen ist das nicht so, in Beispiel 12.2.7 betrachten wir diese Situation noch exemplarisch.

Beispiel 12.2.2 (Polynomdivision, Euklidischer Algorithmus I).
Wir betrachten das Polynom $P(x) = x^4 + \frac{x^3}{2} - 4x^2 - \frac{x}{2} + 3$ und raten eine erste Nullstelle $x_1 = 1$. Durch Polynomdivision erhalten wir ein Polynom Q, so dass $P(x) = (x-1)Q(x)$ gilt:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \right) : \left(x - 1 \right) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3 \\
\underline{-x^4 + x^3} \\
\qquad \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 \\
\qquad \underline{-\frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2} \\
\qquad\qquad -\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\
\qquad\qquad \underline{\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}x} \\
\qquad\qquad\qquad -3x + 3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{3x - 3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Damit ist $P(x) = \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3\right)(x-1)$. Man könnte jetzt die Lösungsformeln für Nullstellen von Polynomen vom Grad 3 bemühen oder man rät erneut, dass $x_2 = -1$ eine Nullstelle ist, und bestimmt analog

$$\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3\right) : (x+1).$$

Vom dann verbleibenden quadratischen Polynom erhält man dann die Nullstellen mit Hilfe der bekannten Formeln (siehe 3.7.7). Insgesamt ist $P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Beispiel 12.2.3 (Polynomdivision, Euklidischer Algorithmus II).
Wir betrachten $P(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 4x - 4$:

$$
\begin{array}{llllll}
\big(x^5 + 3x^4 + 4x^3 & & & - 4x - 4\big) : (x-1) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 \\
\underline{- x^5 \ \ + x^4} & & & & \\
\quad 4x^4 + 4x^3 & & & & \\
\quad \underline{- 4x^4 + 4x^3} & & & & \\
& 8x^3 & & & \\
& \underline{- 8x^3 + 8x^2} & & & \\
& & 8x^2 - 4x & & \\
& & \underline{- 8x^2 + 8x} & & \\
& & & 4x - 4 & \\
& & & \underline{- 4x + 4} & \\
& & & \quad\quad 0 &
\end{array}
$$

Es gilt: $P(x) = (x-1)(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4)$. Das verbleibende Polynom hat keine reellen Nullstellen mehr, denn

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = (x^2 + 2x + 2)^2.$$

$x^2 + 2x + 2$ hat die komplexen Nullstellen $x_3 = -1 + \imath$ und $x_4 = -1 - \imath = \overline{x_3}$ (vergleiche Aufgabe A.3.32). Damit gilt

$$P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)^2 = (x-1)^2(x + 1 - \imath)^2(x + 1 + \imath)^2.$$

Motivation 12.2.4. Wir kommen zurück zum Ausgangsproblem einer echt gebrochen rationalen Funktion $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, wobei $Q(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ ein Polynom vom Grad n sei mit nicht notwendigerweise verschiedenen Nullstellen $z_1, \dots, z_n$. Nach Voraussetzung ist P ein Polynom vom Grad kleiner als n und die Polynome $Q_i(z) = \prod_{k=i+1}^{n}(z - z_k)$ sind für $i = 0, \dots, n-1$ paarweise verschieden und linear unabhängig, also eine Basis des Vektorraums der Polynom vom Grad kleiner oder gleich $n - 1$. Das heißt, es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $C_0, \dots, C_{n-1} \in \mathbb{C}$, so dass $P(z) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i Q_i(z)$. Dividiert man P durch $Q = Q_0$, erhält man

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{C_0}{Q_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{\prod_{k=1}^{i}(z - z_k)}. \tag{12.2}$$

Die Terme für verschiedene Nullstellen kann man nun noch auseinander ziehen, denn für $z_1 \neq z_2$ ist etwa

$$\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right).$$

Dadurch lässt sich die Darstellung in (12.2) auf solche Nenner vereinfachen, die nur eine Nullstellen mit eventuellen Vielfachheiten haben (vergleiche 12.3).

Wir erhalten so den folgenden Darstellungssatz für echt gebrochen rationale Funktionen, der uns eine einfachere Bestimmung der Stammfunktion solcher Funktionen erlaubt (einen Beweis findet man in [20, C.3]). Zusammen mit dem euklidischen Algorithmus können wir dann rationale Funktionen integrieren.

Bevor wir uns damit beschäftigen, wie man die Koeffizienten (leichter) ermittelt, formulieren wir zunächst das Ergebnis für den komplexen Fall.

Partialbruchzerlegung 12.2.5

Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine echt gebrochene rationale Funktion und Q durch die Produktdarstellung

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{p_k}$$

gegeben. Dann besitzt R für $z \notin \{ z_1, \dots, z_r \}$ eine *Partialbruchdarstellung* der Form

$$\begin{aligned} R(z) &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{p_k} \frac{C_k^{(\ell)}}{(z - z_k)^{\ell}} \\ &= \frac{C_1^{(1)}}{z - z_1} + \dots + \frac{C_1^{(p_1)}}{(z - z_1)^{p_1}} + \dots + \frac{C_r^{(p_r)}}{(z - z_r)^{p_r}} \end{aligned} \tag{12.3}$$

mit Konstanten $C_k^{(\ell)} \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, r$, $\ell = 1, \dots, p_k$.

Bei der Betrachtung reeller Polynome wäre es unnatürlich, eine Darstellung mit komplexen Koeffizenten zu verwenden. Durch folgende Betrachtung erhalten wir aus der Darstellung in Satz 12.2.5 eine rein reelle Darstellung einer rationalen Funktion: Wenn $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle eines Polynoms Q mit reellen Koeffizienten ist, so ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von Q mit derselben Vielfachheit (Aufgabe A.3.32). Faktorisiert man diese Nullstelle heraus, das heißt, schreibt man $Q(x) = (x - z_0)^m \cdot Q_1(x)$ mit einem Polynom Q_1 mit $Q_1(z_0) \neq 0$, dann folgt, dass auch $\overline{z_0}$ die Vielfachheit m hat.

Fasst man nun solche Paare in der Produktdarstellung von Q zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} Q(z) &= a_n \prod_{k=1}^{r_1} (z - x_k)^{p_k} \prod_{k=1}^{r_2} \big((z - z_k)(z - \overline{z_k})\big)^{q_k} \\ &= a_n \prod_{k=1}^{r_1} (z - x_k)^{p_k} \prod_{k=1}^{r_2} (z^2 - 2 \operatorname{Re} z_k z + |z_k|^2)^{q_k}, \end{aligned}$$

wobei x_k für $k = 1, \dots, r_1$ reelle beziehungsweise z_k für $k = 1, \dots, r_2$ echt komplexe Nullstellen von P mit den Vielfachheiten $p_1, \dots, p_{r_1} \in \mathbb{N}$ beziehungsweise $q_1, \dots, q_{r_2} \in \mathbb{N}$ sind. Die reelle Darstellung ist dann

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_{r_1})^{p_{r_1}} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{q_1} \cdots (x^2 + b_{r_2} x + c_{r_2})^{q_{r_2}}$$

mit $p_1 + \cdots + p_{r_1} + 2(q_1 + \cdots + q_{r_2}) = n$, wobei die quadratischen Polynome der Form $x^2 + b_j x + c_j$, $j = 1, \dots, r_2$, keine reellen Nullstellen haben.

Die Zusammenfassung entsprechender Terme in der Partialbruchdarstellung liefert

$$\frac{C_i}{z - z_k} + \frac{C_j}{z - \overline{z_k}} = \frac{(C_i + C_j)z - (C_i + C_j)\operatorname{Re} z_k + \imath(C_i - C_j)\operatorname{Im} z_k}{z^2 - 2\operatorname{Re} z_k + |z_k|^2}.$$

Für eine reelle rationale Funktion muss dieser Ausdruck reell sein, weshalb aus $C_i + C_j = a$ und $C_i - C_j = \imath b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, $C_j = \overline{C_i}$ folgt.

Damit erhalten wir die

Reelle Partialbruchzerlegung 12.2.6

Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine echt gebrochene rationale Funktion und Q möge durch die reelle Produktdarstellung

$$Q(x) = (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{t_1} \cdots (x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{t_\ell}$$

wie oben gegeben sein, dann besitzt R eine *Partialbruchdarstellung* der Form

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{A_i^{(j)}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{t_i} \frac{B_i^{(j)} x + C_i^{(j)}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_i^{(1)}}{x - x_i} + \cdots + \frac{A_i^{(p_i)}}{(x - x_i)^{p_i}} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{B_i^{(1)} x + C_i^{(1)}}{x^2 + b_i x + c_i} + \cdots + \frac{B_i^{(t_i)} x + C_i^{(t_i)}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{t_i}} \right) \end{aligned}$$

mit $A_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ für $i = 1 \dots, k$, $j = 1, \dots, p_i$ und $B_i^{(j)}, C_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, \ell$, $j = 1, \dots, t_i$.

Beispiel 12.2.7 (Einfache Partialbruchzerlegung)**.** Wir betrachten die rationale Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit den Polynomen $P(x) = 2x^2$ und $Q(x) = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$ mit den Nullstellen $2, -1$. Da $\operatorname{grd}(P) = 2 = \operatorname{grd}(Q)$ führen wir zunächst eine Polynomdivision durch: Es gilt

$$2x^2 : (x^2 - x - 2) = 2 + \frac{2x + 4}{x^2 - x - 2}.$$

Aus dem Satz über die reelle Partialbruchdarstellung ist bekannt, dass es Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ geben muss, so dass

$$R_1(x) = \frac{2x+4}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

Wir bestimmen A und B zur Illustration durch drei verschiedene Methoden:

(i) Mit Hilfe von Grenzwerten:

$$A = \lim_{x\to 2}(x-2)R_1(x) = \lim_{x\to 2}\frac{2x+4}{x+1} = \frac{8}{3},$$

da $\lim_{x\to 2}(x-2)\cdot\frac{B}{x+1} = 0$, und

$$B = \lim_{x\to -1}(x+1)R_1(x) = \lim_{x\to -1}\frac{2x+4}{x-2} = -\frac{2}{3},$$

da analog $\lim_{x\to -1}(x-1)\frac{A}{x-2} = 0$. Diese Methode funktioniert nur bei den Koeffizienten zu den Termen mit höchster Ordnung (also $\frac{A_k^{(p_k)}}{(x-x_k)^{p_k}}$), da etwa für $\tilde{R}_1(x) = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$ der Grenzwert $\lim_{x\to 2}(x-2)\tilde{R}_1(x) = \lim_{x\to 2}\left(A_1 + \frac{A_2}{x-2}\right)$ nicht existiert.

(ii) Durch Wertevergleich: Man setzt für x so viele verschiedene Werte außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms ein, wie Koeffizienten gesucht sind, etwa $R_1(-2) = 0$, $R_1(0) = -2$, und bestimmt die Koeffizienten dann über ein lineares Gleichungssystem, hier also

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{A}{-2-2} + \frac{B}{-2+1} = -\frac{1}{4}A - B, \\ -2 &= \frac{A}{-2} + \frac{B}{1} = -\frac{1}{2}A + B. \end{aligned}$$

Daraus folgt $-2 = -\frac{3}{4}A$, also $A = \frac{8}{3}$ und damit $B = -\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$.

(iii) Über Koeffizientenvergleich der beteiligten Monome von $Q(x)R_1(x)$: Es ist

$$Q(x)R_1(x) = 2x+4 = A(x+1) + B(x-2) = x(A+B) + (A-2B),$$

wie man mit Hilfe der Produktdarstellung von Q sieht. Der Koeffizientenvergleich der Faktoren von x^k, $k = 0, 1$, liefert

$$2 = A+B,\ 4 = A-2B.$$

Daraus erhält man $3A = 8$ und in Folge $B = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$.
Bei dieser Methode nutzt man aus, dass die Monome $p_k(x) = x^k$

für $k = 0, \dots, n = \max\{\operatorname{grd}(P), \operatorname{grd}(Q)\}$ linear unabhängig sind (siehe Beispiel 5.4.7 (iii)) und das Polynom auf der rechten Seite daher genau dann mit dem auf der linken Seite übereinstimmt, wenn die jeweiligen Faktoren für x^k, $k = 0, \dots, n$, übereinstimmen. Auch dieses Verfahren führt auf ein lineares Gleichungssystem mit den gesuchten Koeffizienten als Unbekannten.

Beispiel 12.2.8 (Partialbruchzerlegung)**.** Es sei $x \neq 1$ und

$$R(x) = \frac{x^2 + 2x + 7}{(x^3 + x^2 - 2)^2} = \frac{x^2 + 2x + 7}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)^2},$$

dann besitzt R eine Darstellung der Form

$$R(x) = \frac{A_1^{(1)}}{x-1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-1)^2} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + 2x + 2} + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Wir bestimmen $A_1^{(2)}$ über einen Grenzwert:

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} &= (x-1)^2 R(x)\big|_{x=1} = \Bigg\{ A_1^{(1)}(x-1) + A_1^{(2)} \\ &\quad + \left(\frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + 2x + 2} + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{(x^2 + 2x + 2)^2} \right)(x-1)^2 \Bigg\}\Bigg|_{x=1} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 7}{(x^2 + 2x + 2)^2}\bigg|_{x=1} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Wir könnten jetzt den gewonnenen Term von R subtrahieren und das Verfahren fortsetzen oder die komplexen Nullstellen bestimmen und das Verfahren auf die Terme anwenden. Wir multiplizieren stattdessen die Gleichung oben mit dem Nennerpolynom und erhalten

$$\begin{aligned} Q(x)R(x) &= x^2 + 2x + 7 \\ &= A_1^{(1)}(x-1)(x^2 + 2x + 2)^2 + A_1^{(2)}(x^2 + 2x + 2)^2 \\ &\quad + (B_1^{(1)}x + C_1^{(1)})(x-1)^2(x^2 + 2x + 2) \\ &\quad + (B_1^{(2)}x + C_1^{(2)})(x-1)^2 \\ &= x^5 \left(A_1^{(1)} + B_1^{(1)} \right) \\ &\quad + x^4 \left(3A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + C_1^{(1)} \right) \\ &\quad + x^3 \left(4A_1^{(1)} + 4A_1^{(2)} - B_1^{(1)} + B_1^{(2)} \right) \\ &\quad + x^2 \left(8A_1^{(2)} - 2B_1^{(1)} - C_1^{(1)} - 2B_1^{(2)} + C_1^{(2)} \right) \\ &\quad + x \left(-4A_1^{(1)} + 8A_1^{(2)} + 2B_1^{(1)} - 2C_1^{(1)} + B_1^{(2)} - 2C_1^{(2)} \right) \\ &\quad - 4A_1^{(1)} + 4A_1^{(2)} + 2C_1^{(1)} + C_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned}
0 &= A_1^{(1)} + B_1^{(1)},\\
0 &= 3A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + C_1^{(1)},\\
0 &= 4A_1^{(1)} + 4A_1^{(2)} - B_1^{(1)} + B_1^{(2)},\\
1 &= 8A_1^{(2)} - 2B_1^{(1)} - C_1^{(1)} - 2B_1^{(2)} + C_1^{(2)},\\
2 &= -4A_1^{(1)} + 8A_1^{(2)} + 2B_1^{(1)} - 2C_1^{(1)} + B_1^{(2)} - 2C_1^{(2)},\\
7 &= -4A_1^{(1)} + 4A_1^{(2)} + 2C_1^{(1)} + C_1^{(2)}.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem wird gelöst durch

$$\left(A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, C_1^{(1)}, C_1^{(2)}\right) = \left(-\frac{12}{25}, \frac{2}{5}, \frac{12}{25}, \frac{4}{5}, \frac{26}{25}, \frac{7}{5}\right).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
R(x) = \frac{x^2+2x+7}{(x^3+x^2-2)^2} &= -\frac{12}{25(x-1)} + \frac{2}{5(x-1)^2}\\
&\quad + \frac{12x+26}{25(x^2+2x+2)} + \frac{4x+7}{5(x^2+2x+2)^2}.
\end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen 12.2.9. Aufgrund der Linearität des Integrals und der reellen Partialbruchzerlegung genügt es nun offenbar, Ausdrücke der Form

$$\frac{1}{(x-c)^n}, \quad \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}, \quad \frac{x}{(x^2+bx+c)^n} \tag{12.4}$$

mit Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in \mathbb{R}\left(x^2+bx+c \neq 0\right)$ zu integrieren. Es gilt

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-c} = \ln|x-c|.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-c)^{n-1}}$ für $n > 1$.

(iii)
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+bx+c} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4}}\\
&= \frac{4}{4c-b^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2+1}\\
&= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.
\end{aligned}$$

(iv) $$\int \frac{x}{x^2+bx+c}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx - \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+bx+c| - \frac{b}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.$$

(v) Für $n > 1$ gibt es für die verbleibenden Terme in (12.4) Rekursionsformeln, siehe etwa [20, 7.4].

Zusammenfassend erhalten wir damit den

Satz über die Integration rationaler Funktionen 12.2.10

Es sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine nicht notwendigerweise echt gebrochen rationale Funktion. $Q(x)$ sei durch die Produktdarstellung

$$Q(x) = (x-x_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{p_k} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_\ell x+c_\ell)^{q_\ell}$$

gegeben, dabei sind $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von $Q(x)$ mit den Vielfachheiten $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$. Weiter sind $x^2+b_1x+c_1, \ldots, x^2+b_\ell x+c_\ell$ paarweise verschiedene quadratische Polynome, welche keine reelle Nullstellen besitzen, das heißt es gilt $4c_1 - b_1^2, \ldots, 4c_\ell - b_\ell^2 > 0$, und $q_1, \ldots, q_\ell \in \mathbb{N}$. Dann gilt eine Darstellung der Form

$$\int R(x)\,dx = S(x) + \sum_{i=1}^{k} A_i \ln|x-x_i|$$
$$+ \sum_{j=1}^{\ell}\left(B_j \ln|x^2+b_jx+c_j| + C_j \arctan\frac{2x+b_j}{\sqrt{4c_j-b_j^2}}\right).$$

Dabei ist $S(x)$ eine rationale Funktion, welche echt gebrochen ist, falls $R(x)$ es ist, und $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_\ell, C_1, \ldots, C_\ell \in \mathbb{R}$.

Beispiele 12.2.11. (i) Es sei $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$, dann ist für $x \neq 0, 1$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Leftrightarrow 1 = A(x-1) + Bx$$
$$\Leftrightarrow 1 = x(B+A) - A \Leftrightarrow A = -1,\ B = 1.$$

Also gilt $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ und daher ist

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \ln|x-1| - \ln|x|.$$

(ii) Es sei $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2(x+1)}$, dann gilt für $x \neq 0, -1$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2}{x^2(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \\
\Leftrightarrow x^2 + 2 = Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2 &= x^2(A+C) + x(A+B) + B \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} A + C &= 1 \\ A + B &= 0 \\ B &= 2 \end{cases} \Rightarrow B = 2,\ A = -2,\ C = 3.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{2}{x^2}dx + \int \frac{3}{x+1}dx \\
&= -2\ln|x| - \frac{2}{x} + 3\ln|x+1|\,.
\end{aligned}$$

(iii) Es sei $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$, dann ist für $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} \\
\Leftrightarrow 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx &\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow A = 1,\ B = -1,\ C = 0,
\end{aligned}$$

das heißt $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}$. Mit Beispiel 12.1.13 folgt dann

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\,.$$

Bemerkung 12.2.12. Durch Substitution lassen sich die Integrale weiterer Funktionen auf die Integration rationaler Funktionen zurückführen, diese sogenannten *elementar integrierbaren Funktionen* findet man in den Lehrbüchern, siehe zum Beispiel [20, 7.5] oder [27, § 11]. Bezeichnet $R(x,y)$ eine rationale Funktion in x und y, etwa $\frac{2x^3 - xy^2 + y}{xy^2 + x^2y}$, so existieren beispielsweise

(i) $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\int R\left(e^{ax}\right)\,dx$, $\int R(\sinh ax, \cosh ax)\,dx$,

(iv) $\int R(\sin ax, \cos ax)\, dx$,

(v) $\int R(x, \sqrt{x^2 + bx + c})\, dx$.

Für einen Beweis mit einer Anleitung und Beispiele siehe [27, 11.6].

12.3 Das Riemannsche Integral

> Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen. (Galileo Galilei)

Berechnung des Flächeninhalts 12.3.1. Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die für die Anschauung als nicht-negativ angenommen wird. Wir wollen den Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion bestimmen. Näherungsweise können wir den Inhalt bestimmen, indem wir die Fläche durch geeignet gewählte rechteckige Streifen annähern und die Flächeninhalte der Streifen aufsummieren. Konkret unterteilen wir das Intervall dazu in n Teilintervalle mit den Grenzen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Diese Teilintervalle bilden die Grundseiten der Rechtecke. In jedem Teilintervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ wählen wir einen Zwischenpunkt $\xi_k \in I_k$ für $k = 1, \dots, n$, an dem der Funktionswert $f(\xi_k)$ die Höhe des Streifens angibt. Die Näherungssumme ist dann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Wir erwarten, dass die Näherungssummen bei unbegrenzter Verfeinerung der Unterteilung von I gegen den gesuchten Flächeninhalt konvergieren, wenn die Funktion „gut genug" ist.

Neben der geometrischen Interpretation als Flächeninhalt begegnet einem das im Folgenden eingeführte Integral beispielsweise auch an solchen Stellen, in denen Summen mit vielen Summanden sich so darstellen lassen, dass sie umgekehrt über ein Integral approximiert werden können. Da das Rechnen mit Integralen eine wesentliche Vereinfachung gegenüber der Betrachtung von Summen darstellen kann, greift man etwa in der Statistik beziehungsweise bei großen Datenmengen auf dieses Hilfsmittel zurück.

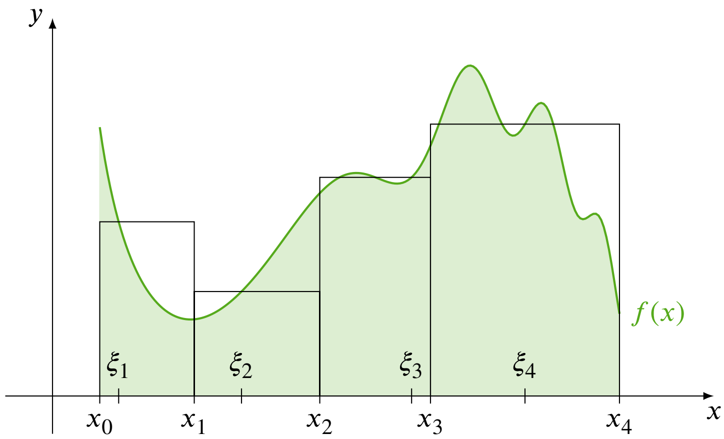


Abbildung 12.2: Näherungssumme (Zwischensumme) für den Flächeninhalt unter der Funktion f.

Definition 12.3.2: Partition, Zerlegung eines Intervalls

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und Punkte $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, so dass I in n kompakte Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, 2 \dots, n$ aufgeteilt wird. Dann heißt das Tupel $\pi := (x_0, x_1, \dots, x_n)$ eine *Partition* oder *Zerlegung* von I. Wir schreiben

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Bemerkungen 12.3.3. (i) Manchmal wird auch die Menge der Teilintervalle als Partition π bezeichnet, dies ist äquivalent zur obigen Definition.

(ii) Die Teilintervalle einer Partition π eines Intervalls I wie oben sind *nicht überlappend*, das heißt je zwei Teilintervalle I_k und I_ℓ haben für $k \neq \ell$ höchstens Randpunkte gemeinsam. Weiter gilt

$$|I| = b - a = x_n - x_0 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \,.$$

Beispiele 12.3.4. Es seien $I = [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$.

(i) Setzen wir $h = \frac{b-a}{n}$, dann teilt die durch $x_k := a + kh$ für $k \in \{0, \dots, n\}$ gegebene Partition

$$\pi : a < a + h < a + 2h < \cdots < a + nh = b$$

das Intervall I in n gleiche Teile ein und wird deshalb *äquidistant* genannt.

(ii) Mit $h = \frac{b-a}{2^n}$ wird durch $x_k = a + kh = a + \frac{k(b-a)}{2^n}$ für $k = 0, \ldots, 2^n$ eine äquidistante Zerlegung der Länge $\frac{b-a}{2^n}$ definiert.

(iii) Es seien $0 < a < b$ und $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, dann wird das Intervall durch die Punkte $x_k = aq^k$ für $k = 0, 1 \ldots, n$ in *geometrischer Progression* in n Teilintervalle unterteilt.

$$\pi : a < aq < aq^2 < \cdots < aq^n = b$$

ist damit ein Beispiel einer nicht äquidistanten Partition.

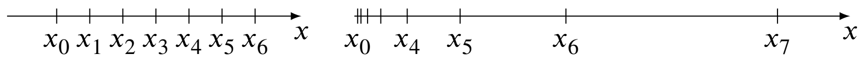


Abbildung 12.3: Partitionen: Äquidistant und in geometrischer Progression.

Definition 12.3.5: Ober-, Unter- und Zwischensummen

Es seien $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Partition von $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ setzen wir

$$M_k := \sup_{I_k} f(x), \quad m_k := \inf_{I_k} f(x).$$

Wir nennen

$$S(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \, |I_k| \,, \text{ beziehungsweise } s(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \, |I_k|$$

die *Riemann-Darbouxsche Ober-* beziehungsweise *Untersumme*[a] von f bezüglich π. Sind für $k \in \{1, \ldots, n\}$ $\xi_k \in I_k$, dann heißt

$$\sigma(\pi, f) = \sigma(\pi, f, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \, |I_k|$$

Riemannsche Zwischensumme von f bezüglich π und ξ_k, $k = 1, \ldots, n$.

[a] Jean Gaston Darboux, 1842-1917, frz. Mathematiker

Beispiel 12.3.6. Wir betrachten die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und die äquidistante Partition $\pi : a < a + \frac{b-a}{n} < \cdots < a + \frac{b-a}{n} n = b$. Dann

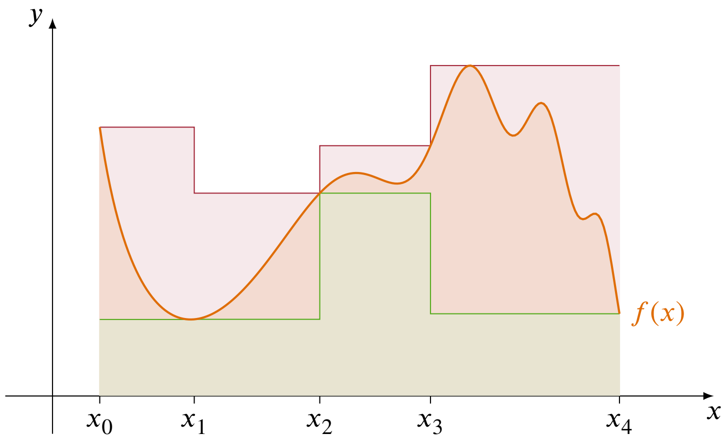


Abbildung 12.4: Ober- und Untersumme. Eine Zwischensumme für dieses Beispiel ist in Abbildung 12.2 dargestellt.

gilt

$$\begin{aligned}
s(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{n} \inf_{\left[a+\frac{b-a}{n}(k-1), a+\frac{b-a}{n}k\right]} x \cdot \frac{b-a}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n}(k-1)\right) \cdot \frac{b-a}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1) \\
&= ab - a^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}. \\
S(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \frac{b-a}{n} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Man sieht hier, dass die Unter- und Obersummen für $n \to \infty$ gegen den gemeinsamen Grenzwert $\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ konvergieren. Dieser Grenzwert entspricht dem geometrisch direkt bestimmbaren Flächeninhalt (unter Beachtung des Vorzeichens: Flächen unterhalb der x-Achse werden subtrahiert) und auch dem Ergebnis mit der aus der Schule bekannten Methode, die wir später als zweiten Hauptsatz in 12.5.7 formulieren werden.

Bemerkungen 12.3.7. (i) Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und $\xi_k \in I_k$ ist $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ und daher gilt

$$s(\pi, f) \leq \sigma(\pi, f) \leq S(\pi, f). \tag{12.5}$$

(ii) Wenn f beschränkt ist, dann existieren

$$M := \sup_I f(x) \text{ und } m = \inf_I f(x).$$

Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt dann $m \leq m_k \leq M_k \leq M$ und damit gilt

$$s(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,|I_k| \geq m \sum_{k=1}^{n} |I_k| = m\,|I|\,,$$
$$S(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,|I_k| \leq M \sum_{k=1}^{n} |I_k| = M\,|I|\,.$$

Folglich ist

$$m\,|I| \leq s(\pi, f) \leq \sigma(\pi, f) \leq S(\pi, f) \leq M\,|I|\,.$$

(iii) Wenn f beschränkt ist, existieren also die Zahlen $s(f) := \sup_\pi s(\pi, f)$ und $S(f) := \inf_\pi S(\pi, f)$. $S(f)$ beziehungsweise $s(f)$ wird auch als *oberes* beziehungsweise *unteres Riemann-Integral* von f über I bezeichnet.

(iv) Ist $\pi_1 \subseteq \pi_2$, das heißt π_2 enthält alle Punkte von π_1 und mehr, dann gilt

$$s(\pi_1, f) \leq s(\pi_2, f) \text{ und } S(\pi_1, f) \geq S(\pi_2, f).$$

Das heißt, bei einer „Verfeinerung“ der Partition werden Untersummen höchstens größer und Obersummen höchstens kleiner.

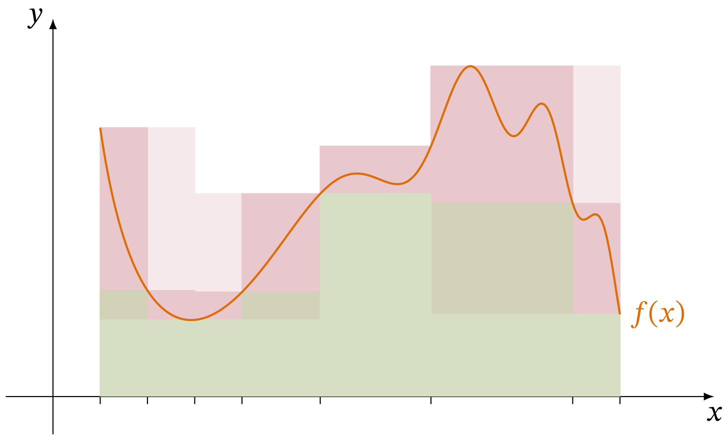


Abbildung 12.5: „Verfeinerung“ einer Partition führt höchstens zu größeren Unter- und kleineren Obersummen.

(v) Für beliebige Zerlegungen π, π' gilt $s(\pi, f) \leq S(\pi', f)$, denn

$$s(\pi, f) \leq s(\pi \cup \pi', f) \leq S(\pi \cup \pi', f) \leq S(\pi', f).$$

(vi) Es gilt $s(f) \leq S(f)$. Denn angenommen, es wäre $s(f) > S(f)$, dann sei $s(f) - S(f) =: \varepsilon > 0$ und aus der Supremums- beziehungsweise Infimumseigenschaft von $s(f)$ beziehungsweise $S(f)$ folgt die Existenz von zwei Partitionen $\pi(\varepsilon)$ und $\pi'(\varepsilon)$ mit

$$s(f) - s(\pi, f) < \frac{\varepsilon}{3}, \; S(\pi', f) - S(f) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also ist

$$s(f) - \frac{\varepsilon}{3} < s(\pi, f) \leq S(\pi', f) < S(f) + \frac{\varepsilon}{3}$$

und folglich $s(f) - S(f) < \frac{2\varepsilon}{3}$ im Widerspruch zur Wahl von $\varepsilon = s(f) - S(f)$.

(vii) Da für $k = 1, \dots, n$

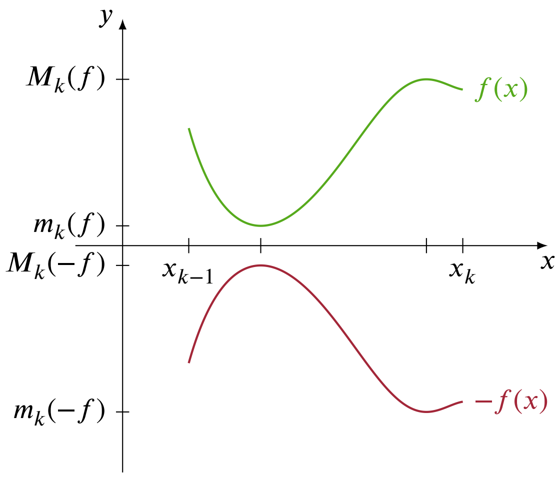


Abbildung 12.6: $m_k(f) = -M_k(-f)$.

$$m_k(f) = \inf_{I_k} f(x) = -\sup_{I_k}(-f(x)) = -M_k(-f)$$

gilt, folgt, dass

$$s(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,|I_k| = -\sum_{k=1}^{n} M_k(-f)\,|I_k| = -S(\pi, -f).$$

Daher können wir uns auf die Betrachtung von Obersummen beschränken.

Definition 12.3.8: Riemann-Integral

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt f über (auf) I *Riemann-integrierbar*, wenn $s(f) = S(f)$ gilt. In diesem Fall heißt der gemeinsame Wert das

Riemann-Intergral von f über I, in Zeichen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx := s(f) = S(f).$$

Wir setzen außerdem

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ und } \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dies sinnvoll, da über einem Intervall ohne Breite keine Fläche sein kann und da bei der Betrachtung des „umgekehrten“ Intervalls „$[b,a]$“ für die Intervalllängen $(x_{k-1} - x_k) = -(x_k - x_{k-1})$ gilt.

Unser Ziel ist es, von dieser Definition über das Infimum beziehungsweise das Supremum der Ober- beziehungsweise Untersummen auf eine Definition mit Hilfe eines Grenzwertes zu kommen. In Beispiel 12.3.6 hat sich bereits angedeutet, dass das funktionieren kann. Für die allgemeine Situation müssen wir noch wenige Vorarbeiten machen.

Definition 12.3.9: Feinheit einer Partition

Ist $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Partition von $I = [a,b]$, so heißt

$$|\pi| := \max\{\, |x_k - x_{k-1}| \mid k = 1, \ldots, n \,\}$$

Feinheit der Partition π.

Lemma 12.3.10: Technisches Hilfslemma

Es seien $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und π, π' zwei Partitionen von I. Es seien $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $\pi' : a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_{n'} = b$ und $M = \sup_I f(x)$, $m = \inf_I f(x)$, dann gilt

$$S(\pi', f) \leq S(\pi, f) + (n-1)(M-m)\,|\pi'|\,.$$

Einen Beweis dieses Lemmas findet man in [20, 8.1.12]. Im Beweis des folgenden Satzes werden wir den Clou des Lemmas ausnutzen, dass der zweite Term auf der rechten Seite der Ungleichung mit Hilfe der Feinheit der Partition π' beliebig klein gemacht werden kann, wenn π eine feste Partition ist.

Satz 12.3.11: Berechnung des Integrals über einen Grenzwert

Es seien I ein kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine *ausgezeichnete Partitionenfolge*, das heißt es gilt $\lim_{k\to\infty} |\pi_k| = 0$. Dann gilt

$$S(f) = \lim_{k\to\infty} S(\pi_k, f), \ s(f) = \lim_{k\to\infty} s(\pi_k, f).$$

Beweis. Nach Definition von $S(f) = \inf_\pi S(\pi, f)$ gibt es eine Partitionenfolge $(\pi'_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{\ell\to\infty} S(\pi'_\ell, f) = S(f)$. Nach Lemma 12.3.10 gilt mit $M = \sup_I f$, $m = \inf_I f$ und $n' = n'(\ell)$ die Ungleichung

$$S(\pi_k, f) \leq S(\pi'_\ell, f) + (n' - 1)(M - m)\,|\pi_k|\,.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir

$$\limsup_{k\to\infty} S(\pi_k, f) \leq S(\pi'_\ell, f)$$

und damit für $\ell \to \infty$, dass

$$\limsup_{k\to\infty} S(\pi_k, f) \leq S(f).$$

Nach Definition von $S(f)$ gilt $\forall k \in \mathbb{N}\,(S(\pi_k, f) \geq S(f))$ und daher

$$\liminf_{k\to\infty} S(\pi_k, f) \geq S(f).$$

Mit dem $\liminf$-$\limsup$-Kriterium, Lemma 3.3.17, folgt dann die Existenz von $\lim_{k\to\infty} S(\pi_k, f)$ und die behauptete Gleichheit. □

Beispiele 12.3.12. (i) Mit dem obigen Satz folgt, dass $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, Riemann-integrierbar ist, wie man mit Beispiel 12.3.6 sofort sieht.

(ii) Die Dirichletsche Sprungfunktion

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, denn, da jedes Intervall (x_k, x_{k+1}) einer beliebigen Partition π von $[0, 1]$ stets sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthält, ist das Supremum der Funktionswerte auf (x_k, x_{k+1}) immer 1 und das Infimum der Funktionswerte immer Null und daher jede Obersumme $1 = \sum_{k=1}^{n(\pi)} 1 \cdot (x_k - x_{k-1})$ und jede Untersumme $0 = \sum_{k=1}^{\pi(n)} 0 \cdot (x_k - x_{k+1})$.

Häufig ist es nützlich, statt Ober- oder Untersummen zu betrachten, über Zwischensummen zu argumentieren. Wir erwähnen daher

Satz 12.3.13: Riemannsche Definition des Integrals

Es seien I ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist f genau dann über I Riemann-integrierbar, wenn für jede ausgezeichnete Partitionsfolge $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und jede Wahl der Zwischenpunkte $\xi_1, \ldots, \xi_n$ mit $\xi_\ell \in I_\ell$ für $\ell = 1, \ldots, n_k$ die Zwischensumme

$$\sigma(\pi_k, f) = \sigma(\pi_k, f, \xi_\ell) = \sum_{\ell=1}^{n_k} f(\xi_\ell)\,|I_\ell|$$

konvergiert. In diesem Fall haben alle Summenfolgen den selben Grenzwert und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(\pi_k, f) = \int_I f(x)\,dx.$$

Beweisidee. Ist f Riemann-integrierbar, dann folgt die Aussage aus der Ungleichung (12.5) in Bemerkung 12.3.7 (i). Gilt umgekehrt die behauptete Konvergenz, dann überlegt man sich, dass man die M_k und m_k beliebig gut durch $f(\xi_k)$ approximieren kann und erhält dadurch die Konvergenz der Ober- und Untersummen gegen den selben Grenzwert. Eine ausführliche Darstellung findet man in [20, 8.2.7]. □

12.4 Klassen integrierbarer Funktionen

> So seltsam es auch klingen mag, die Stärke der Mathematik beruht auf dem Vermeiden jeder unnötigen Annahme und auf ihrer großartigen Einsparung an Denkarbeit.
>
> (Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach)

Welche Funktionen sind jetzt Riemann-integrierbar? Wir beantworten diese Frage für zwei häufig verwendete Klassen von Funktionen:

Satz 12.4.1

Jede monotone Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. O. B. d. A. sei f monoton wachsend. Es sei $I = [a, b]$ und $\pi : a =$

$x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Partition von I. Dann ist

$$\begin{aligned} S(\pi, f) - s(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq |\pi| \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = |\pi| \, (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

und für jede ausgezeichnete Partitionsfolge gilt dann $S(\pi_k, f) - s(\pi_k, f) \to 0$ für $k \to \infty$. □

Satz 12.4.2

Jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Da I kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig auf I. Es existiert also ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, x' \in I \, (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon) \, .$$

Ist π eine Partition von I mit $|\pi| < \delta$, so folgt

$$S(\pi, f) - s(\pi, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \, |I_k| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |I_k| = \varepsilon \, |I| \, .$$

Ist $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionsfolge, so gilt $\lim_{k \to \infty} |\pi_k| = 0$ und daher existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wie oben und ein zugehöriges $n_0(\varepsilon)$ mit $|\pi_k| < \delta$ für alle $k \geq n_0$ und damit $S(\pi_k, f) - s(\pi_k, f) \leq \varepsilon \, |I|$ für alle $k \geq n_0$. □

Satz 12.4.3

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die stückweise monoton[a] oder bis auf endlich viele Punkte stetig ist, dann ist f Riemann-integrierbar.

[a] das heißt, es existiert eine Partition von I in endlich viele Teilintervalle $I_1, \dots, I_n$ so dass f auf I_j monoton ist für $j = 1, \dots, n$.

Beweisidee. Es seien $I = [a, b]$ und $x_1, \dots, x_{n-1}$ die Ausnahmepunkte, $x_0 = a$, $x_n = b$, dann ist f auf $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$ integrierbar und jede Partition π von I wird durch Hinzunahme von $\{ x_1, \dots, x_{n-1} \}$ verfeinert. Die entstehenden Ober-, Unter oder Zwischensummen kann man nun aufspalten in solche, die gegen die Integrale über den I_k konvergieren, woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 12.4.4. Eine weitere Klasse von Riemann-integrierbaren Funktionen sind die *Funktionen von beschränkter Variation*, das sind Funktionen, die sich als Differenz zweier monotoner Funktionen schreiben lassen.

Wie wir in Beispiel 12.3.12 (ii) gesehen haben, gibt es sehr einfach definierbare Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind. Ein weiteres mathematisches Anliegen ist, dass man gerne auf einem vollständigen Raum arbeiten würde (siehe Aufgabe A.12.7), um Konvergenzuntersuchungen sinnvoll durchführen zu können. Dafür benötigt man einen erweiterten Integralbegriff, den des Lebesque[1]-Integrals.

12.5 Eigenschaften des Riemann-Integrals

> Die Mathematik ist die Wissenschaft von dem, was sich von selbst versteht. (Heinrich Heine)

Satz 12.5.1: Linearität des Riemann-Integrals

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ Riemann-integrierbar. Gilt zusätzlich $\exists c > 0 \forall x \in I(|f(x)| \geq c)$, dann ist auch $\frac{1}{f}$ Riemann-integrierbar. Weiter gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die *Linearitätsrelation*

$$\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_I f(x)\, dx + \beta \int_I g(x)\, dx.$$

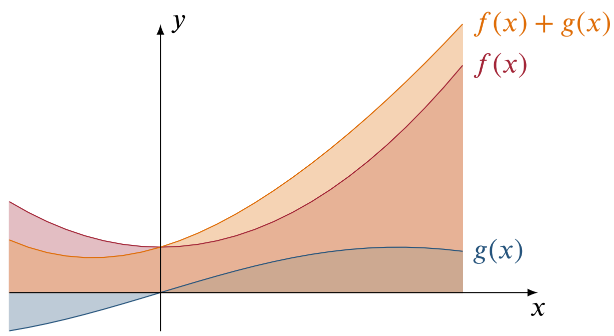


Abbildung 12.7: Zur Linearität des Integrals.

Beweis. (i) Integrierbarkeit von $f \cdot g$: Es seien $|f|, |g| \leq M < +\infty$. Dann

[1] Henri Léon Lebesque, 1875-1941, frz. Mathematiker

gilt für $x, x' \in I$

$$\begin{aligned}
&|(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(x')| \\
&\qquad \le |f(x)g(x) - f(x')g(x)| + |f(x')g(x) - f(x')g(x')| \\
&\qquad\qquad \le M\,(|f(x) - f(x')| + |g(x) - g(x')|)\,.
\end{aligned}$$

Ist $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Partition von I, dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sup_{I_k}(f\cdot g)(x) - \inf_{I_k}(f\cdot g)(x) \\
&\qquad \le M\Big(\sup_{I_k} f(x) - \inf_{I_k} f(x) + \sup_{I_k} g(x) - \inf_{I_k} g(x)\Big),
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
&0 \le S(\pi, f\cdot g) - s(\pi, f\cdot g) \\
&\qquad \le M\,(S(\pi, f) - s(\pi, f) + S(\pi, g) - s(\pi, g))\,.
\end{aligned}$$

Ist nun $(\pi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionenfolge, dann wird die rechte Seite der Ungleichung aufgrund der Integrierbarkeit von f und g beliebig klein, woraus die Behauptung folgt.

(ii) Linearität des Integrals: Zunächst ist die Integrierbarkeit der Funktion $\alpha f + \beta g$ klar. Es sei $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionsfolge und seien $\xi_1, \dots, \xi_{n_k}$, $\xi_\ell \in I_\ell$ beliebig gewählte Zwischenwerte. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx &= \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{n_k} (\alpha f(\xi_\ell) + \beta g(\xi_\ell))\,|I_\ell| \\
&= \alpha \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{n_k} f(\xi_\ell)\,|I_\ell| + \beta \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n_k} g(\xi_\ell)\,|I_\ell| \\
&= \alpha \int_I f(x)\,dx + \beta \int_I g(x)\,dx
\end{aligned}$$

aufgrund der Riemannschen Definition des Integrals. □

Die folgende Aussage ist zum Beispiel nützlich, wenn man stückweise definierte Funktionen untersucht oder Integrale über Teilintervalle betrachten will.

Satz 12.5.2: Additivität des Integrationsbereiches

Es sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ auf I Riemann-integrierbar und $a < c < b$, dann ist f auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Es seien $\varepsilon > 0$ und $\pi_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c$ und $\pi_2 : c = x_n < x_{n+1} < \cdots < x_m = b$ zwei Zerlegungen so gewählt, dass für $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ gilt $|\pi| < \delta$ und

$$S(\pi, f) - s(\pi, f) < \varepsilon.$$

Dann gilt

$$S(\pi_1, f) - s(\pi_1, f) \leq S(\pi, f) - s(\pi, f) < \varepsilon$$

und damit folgt die Integrierbarkeit von f über $[a, c]$, analog zeigt man die Integrierbarkeit über $[c, b]$. Es seien nun $\xi_k \in I_k$ für $k = 1, \ldots, m$ Zwischenstellen, dann gilt

$$\begin{aligned}\sigma(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\,|I_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|I_k| + \sum_{k=n+1}^{m} f(\xi_k)\,|I_k| = \sigma(\pi_1, f) + \sigma(\pi_2, f).\end{aligned} \qquad \square$$

Dass Ungleichungen zwischen Funktionen sich auf entsprechende Ungleichungen zwischen ihren Integralen übertragen, besagt der folgende

Satz 12.5.3: Monotonie des Riemann-Integrals

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\forall x \in I(f(x) \leq g(x))$, dann gilt

$$\int_I f(x)\,dx \leq \int_I g(x)\,dx.$$

Beweis. Es gilt $\forall x \in I(g(x) - f(x) \geq 0)$ und nach Satz 12.5.1 ist $g - f$ integrierbar. Weiter gilt für eine beliebige Partition π und beliebige Zwischenwerte $\xi_k \in I_k$ für alle Teilintervalle der Partition

$$\sigma(\pi, g - f) = \sum_{k=1}^{n} (g - f)(\xi_k)\,|I_k| \geq 0.$$

Daher gilt

$$\int_I (g - f)(x)\,dx \geq 0 \overset{\text{Satz 12.5.1}}{\Longrightarrow} \int_I g(x)\,dx \geq \int_I f(x)\,dx. \qquad \square$$

Satz 12.5.4: Dreiecksungleichung für das Riemann-Integral

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar, dann ist auch die Funktion $|f| : I \to [0, +\infty)$ Riemann-integrierbar auf I und es gilt

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \le \int_I |f(x)|\,dx.$$

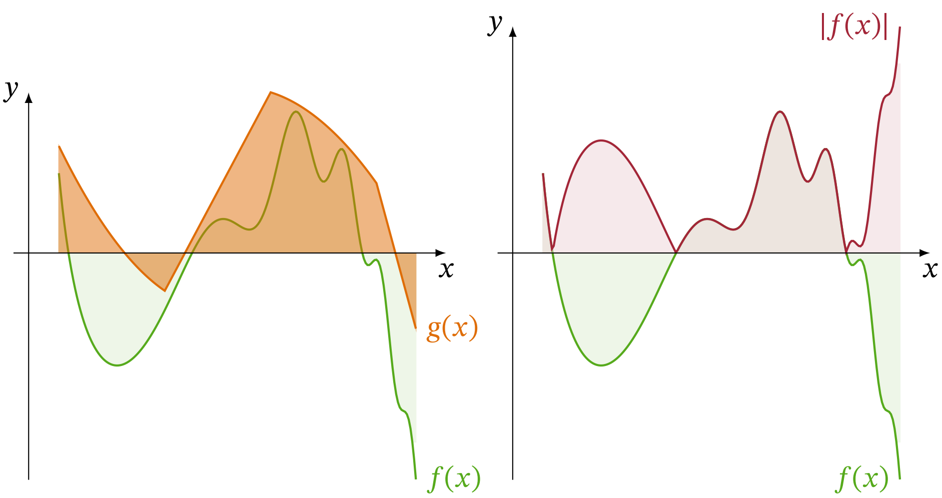


Abbildung 12.8: Monotonie und Dreiecksungleichung für das Integral.

Beweis. Es sei π eine beliebige Zerlegung, dann folgt die Integrierbarkeit von $|f|$ aus

$$\begin{aligned} S(\pi, |f|) - s(\pi, |f|) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{I_k} |f| - \inf_{I_k} |f| \right) |I_k| \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \right) |I_k| = S(\pi, f) - s(\pi, f). \end{aligned}$$

Es sei $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionsfolge von I und $\xi_\ell \in I_\ell$ für $\ell = 1, \ldots, n_k$ seien beliebige Zwischenwerte, dann gilt

$$|\sigma(\pi_k, f, \xi_\ell)| = \left| \sum_{\ell=1}^{n_k} f(\xi_\ell)\,|I_\ell| \right| \le \sum_{\ell=1}^{n_k} |f(\xi_\ell)|\,|I_\ell| = \sigma(\pi_k, |f|, \xi_\ell).$$

Die behauptete Ungleichung folgt jetzt durch Grenzübergang für $k \to \infty$. □

Die Dreiecksungleichung ist wie bei Summen und Reihen ein nützliches Hilfsmittel zur Abschätzung.

Mittelwertsatz der Integralrechnung 12.5.5

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und seien $m, M \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in I (m \leq f(x) \leq M)$. Dann folgen durch Integration die Ungleichungen

$$m\,|I| \leq \int_I f(x)\,dx \leq M\,|I|\,.$$

Das *Integralmittel* $\mu := \frac{1}{|I|} \int_I f(x)\,dx$ genügt also den Ungleichungen $m \leq \mu \leq M$. Ist f stetig, so folgt aus dem Zwischenwertsatz 10.2.7 die Existenz eines $\xi \in I$ mit $\mu = f(\xi)$. Also gilt

$$\int_I f(x)\,dx = f(\xi)\,|I|\,.$$

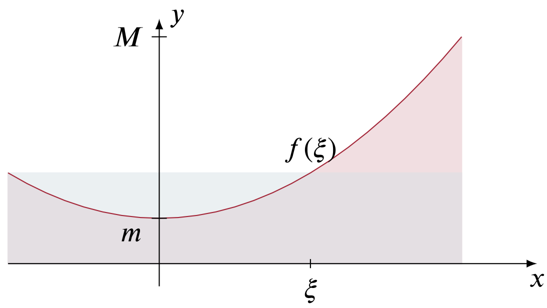


Abbildung 12.9: Zum Mittelwertsatz der Integralrechnung für stetige Funktionen.

Erster Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 12.5.6

Es sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und in $x_0 \in I$ stetig, dann ist die Funktion

$$F(x) := \int_c^x f(t)\,dt$$

für $c \in [a, b]$ in x_0 differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$. Ist also f auf I stetig, dann ist F auf I differenzierbar und es gilt $\forall x \in I (F'(x) = f(x))$, das heißt F ist eine Stammfunktion von f.

Beweis. Es sei $x \in I$, $x \neq x_0$, dann gilt

$$F(x) - F(x_0) = \int_c^x f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Wegen $f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt$ folgt hieraus, dass

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt.$$

Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ kann nun $\delta > 0$ so gewählt werden, dass für $|x-x_0| < \delta$ stets $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Damit ist für $x \in I$ mit $|x-x_0| < \delta$, $x \neq x_0$:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| < \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon\,dx = \varepsilon,$$

das heißt F ist in x_0 differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Zweiter Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 12.5.7

Es sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem kompakten Intervall $I = [a,b]$ und die Ableitung $f := F' : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über I, dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Beweis. Es sei $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Partition von I, dann können wir $F(b) - F(a)$ als Teleskopsumme schreiben:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n (F(t_k) - F(t_{k-1}))\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung gilt

$$F(t_k) - F(t_{k-1}) = F'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

mit Zwischenstellen $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$ für $k = 1, \ldots, n$. Damit haben wir

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \sigma(\pi, f, \xi_k).$$

Ist nun $(\pi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Partitionsfolge und sind die Zwischenstellen $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n = n(\ell)$ gemäß dem Mittelwertsatz gewählt, so folgt aufgrund der Integrierbarkeit von f, dass

$$F(b) - F(a) = \sigma(\pi_\ell, f, \xi_k) \to \int_a^b f(t)\,dt \text{ für } \ell \to \infty.$$ □

Bemerkungen 12.5.8. (i) Der zweite Hauptsatz 12.5.7 liefert den Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral, also Flächeninhalt und Stammfunktion, und damit eine einfache Methode, bei bekannter Stammfunktion den Flächeninhalt auszurechnen.

(ii) Die Integrationstechniken für Stammfunktionen übertragen sich:

(a) Partielle Integration:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx.$$

(b) Etwas aufpassen muss man bei der Substitutionsregel, weil sich auch die Integrationsgrenzen verändern:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\, dx = \int_a^b g(f(t))f'(t)\, dt.$$

Hier kann man alternativ aber zunächst mit der Substitutionsregel eine Stammfunktion bestimmen und dann zurücksubstituieren.

12.6 Uneigentliche Integrale

> Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig. (David Hilbert)

In diesem Abschnitt lassen wir die Voraussetzung der Kompaktheit an das Integrationsintervalls fallen und untersuchen, unter welchen Bedingungen dann das Riemann-Integral einer Funktion existiert. Damit ist dann auch möglich, unbeschränkte Funktionen zu untersuchen, was wir bei der Definition des Riemann-Integrals ausgeschlossen hatten.

Definition 12.6.1: Uneigentliches Integral, Konvergenz

(i) Es sei $I = [a, b)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ auf $[a, c]$ beschränkt und Riemann-integrierbar ist. Der Grenzwert

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx =: \int_a^b f(x)\, dx$$

heißt das *uneigentliche Integral* von f über I, falls er existiert. In dem Fall heißt das Integral *konvergent* und es heißt *absolut konvergent*, wenn das Intergral von $|f|$ über I konvergiert.

(ii) Analog ist das uneigentliche Integral über das halboffene Intervall $I = (a, b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty \}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

(iii) Es sei $I = (a, b)$, $a \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty \}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$, $a < b$, dann definieren wir das uneigentliche Integral von f über I durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

falls für ein, und damit für alle $c \in (a, b)$ die beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite konvergieren.

Bemerkung und Beispiele 12.6.2. (i) Ist $I = (a, b)$, so müssen die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ getrennt betrachtet werden. Das bedeutet, $\lim_{d_1 \to a^+} \int_{d_1}^c f(x)\,dx$ und $\lim_{d_2 \to b^-} \int_c^{d_2} f(x)\,dx$ sind einzeln zu untersuchen. Dies gilt auch, wenn f über $[a, c) \cup (c, b]$ integriert werden soll.

Den gleichzeitigen Grenzwert bezeichnet man als *Cauchy-Hauptwert*, falls er existiert. Beispielsweise

$$\lim_{d \to 0^+} \left(\int_a^{c-d} f(x)\,dx + \int_{c+d}^b f(x)\,dx \right) \text{ oder } \lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^c f(x)\,dx.$$

Dieser Wert kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral nicht existiert. So existiert etwa das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ nicht, da $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ nicht existiert. Allerdings gilt

$$\begin{aligned} \lim_{c \to 0} \left(\int_{-1}^{-c} \frac{1}{x}\,dx + \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx \right) &= \lim_{c \to 0} \left[[\ln |x|]_{-1}^{-c} + [\ln |x|]_c^1 \right] \\ &= \lim_{c \to 0} (\ln |-c| - \ln |-1| + \ln |1| - \ln |c|) = \lim_{c \to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

(ii) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \to 0} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \to 0} \left[2\sqrt{x} \right]_c^1 = \lim_{c \to 0} \left(2 - 2\sqrt{c} \right) = 2.$$

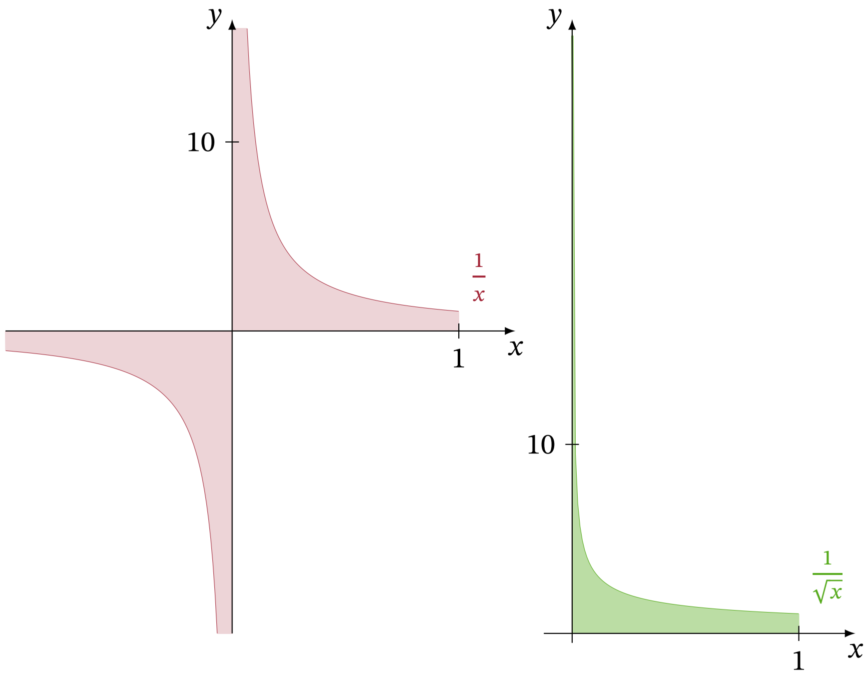


Abbildung 12.10: Uneigentliche Integrale und Cauchy-Hauptwert.

(iii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{c}+1\right) = 1.$

(iv) Man überlegt sich leicht, dass $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha dx$ genau dann existiert, wenn $\alpha > -1$ und $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ genau dann existiert, wenn $\alpha < -1$. Insbesondere existiert $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha dx$ für kein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Folgenkriterium 12.6.3

Es seien $I = [a,b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$, und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem kompaktem Teilintervall $J = [a,c]$, $a < c < b$, Riemann-integrierbar ist, dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^{c_k} f(x)\,dx$$

für jede Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq I$ mit $c_k \to b$ für $k \to \infty$ existiert.

Bemerkung 12.6.4. Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, denn sei $(c'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge, dann muss auch die Folge der Integrale mit der gemischten Obergrenzenfolge $c_1, c'_1, c_2, c'_2, \ldots$ konvergieren, woraus die Behauptung folgt.

Beispiel 12.6.5. Es sei $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $I = (0,1]$. Dann ist $\int_0^1 f(x)\,dx$ nicht konvergent, denn

$$\int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \sum_{\ell=1}^{k-1} \int_{\frac{1}{\ell+1}}^{\frac{1}{\ell}} \frac{1}{x}\,dx \geq \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1}\right) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{\ell+1} \to +\infty$$

für $k \to \infty$. Dies kann man natürlich auch ohne das Folgenkriterium direkt zeigen, da für $0 < c < 1$

$$\int_c^1 f(x)\,dx = -\ln c \to +\infty \text{ für } c \to 0$$

gilt.

Der folgende Satz liefert ein Kriterium für die Existenz des uneigentlichen Integrals, ohne dass der konkrete Grenzwert berechnet werden muss.

Satz 12.6.6

Es sei I ein halboffenes oder offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem kompakten Teilintervall $J \subseteq I$ beschränkt und Riemann-integrierbar ist. Weiter existiere ein $M > 0$, so dass für jedes kompakte Intervall $J \subseteq I$ die Ungleichung

$$\int_J |f(x)|\,dx \leq M < +\infty$$

erfüllt ist - dabei ist M unabhängig von J. Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_I f(x)\,dx$.

Bemerkungen 12.6.7. (i) Wie bei Reihen erhält man ein Majoranten- beziehungsweise Minorantenkriterium durch Vergleich mit konvergenten beziehungsweise divergenten uneigentlichen Integralen.

(ii) Anwendung des Majorantenkriteriums:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{c\to+\infty}\left(\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^c - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx\right)$$
$$= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Da $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ und $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$, konvergiert auch $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Den Integrand direkt im ersten Schritt gegen $\frac{1}{x}$ abzuschätzen, hätte nicht zum Erfolg geführt, da $\int_1^c \frac{1}{x}\, dx = \ln c \to +\infty$ für $c \to +\infty$.

(iii) Für $x > 0$ definieren wir die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt. \tag{12.6}$$

$\Gamma(x)$ ist als uneigentliches Integral für alle $x > 0$ definiert. Durch geeignete Abschätzungen kann man zeigen, dass $\Gamma(x) \to +\infty$ für $x \to 0$ und für $x \to +\infty$. Außerdem gilt $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ woraus mit Hilfe von vollständiger Induktion folgt, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$.

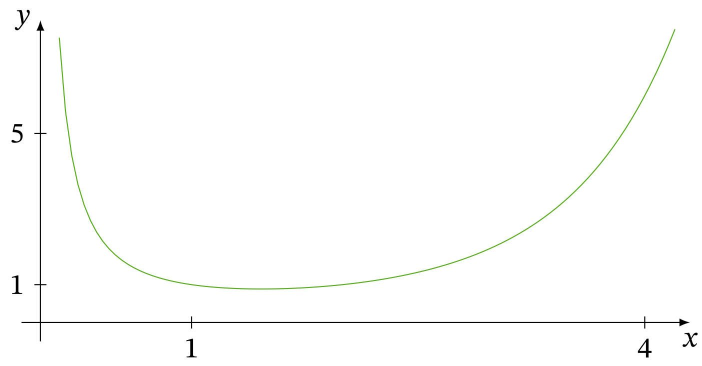


Abbildung 12.11: Die Gammafunktion $\Gamma(x)$.

Wir stellen noch eine Verbindung der Integrationstheorie mit der Theorie der unendlichen Reihen her (vergleiche Abbildung 12.12):

Wir betrachten $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ beziehungsweise $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und stellen $a_k = a_k \cdot 1$ als Rechtecke der Höhe a_k und der Breite 1 dar. Der Wert der Reihe entspricht daher dem des uneigentlichen Integrals über die entsprechende Treppenfunktion. Ist f eine Funktion, die durch die „Ecken" der Rechtecke verläuft, so können wir die Konvergenz oder Divergenz des uneigentlichen Integrals von f über $(0, +\infty)$ mit dem Verhalten der Reihe verknüpfen.

Integralkriterium 12.6.8

Es sei $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ eine nicht-negative, monoton fallende Funktion und für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $a_k := f(k)$. Dann gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ die

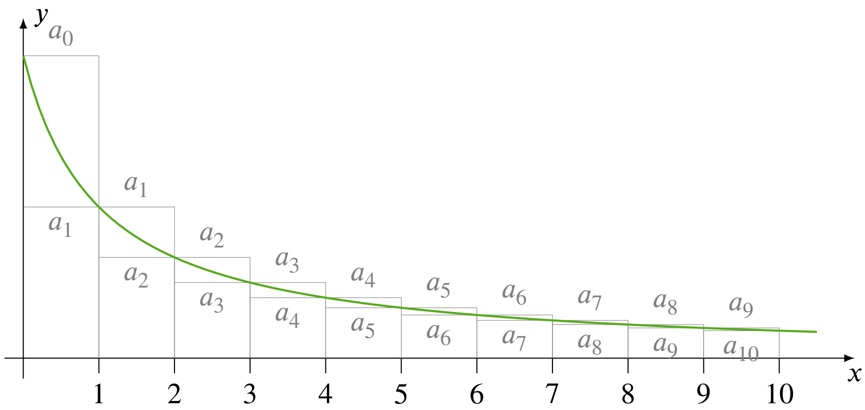


Abbildung 12.12: Veranschaulichung zum Integralkriterium, durch die Rechtecke sind die beiden Summen angedeutet.

Ungleichungen

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} a_k \le \int_0^n f(x)\,dx \le \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergiert.

Beweis. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$x \in [k, k+1] \Rightarrow 0 \le f(k+1) = a_{k+1} \le f(x) \le f(k) = a_k.$$

Integrieren wir die Ungleichungen über x von k bis $k+1$, so folgt

$$a_{k+1}(k+1-k) = a_{k+1} \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le a_k.$$

Die Summe über alle k von 0 bis $n-1$ liefert dann die behaupteten Ungleichungen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_0^n f(x)\,dx \le \sum_{k=0}^{n-1} a_k. \qquad \square$$

Beispiele 12.6.9. (i) Die *Zeta-Reihe* $\zeta(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\mu}$ konvergiert für $\mu > 1$ und divergiert für $\mu \le 1$.

(ii) Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\mu}$ konvergiert für $\mu > 1$ und divergiert für $\mu \le 1$. Für $\mu > 1$ zeigt man hierfür

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\mu} = \left.\frac{(\ln x)^{1-\mu}}{1-\mu}\right|_2^n \to \frac{1}{(\mu-1)(\ln 2)^{\mu-1}} \text{ für } n \to \infty.$$

(iii) Die Euler-Mascheronische[2] Zahl ist definiert durch

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right),$$

hieraus erhalten wir einen Zusammenhang zwischen dem Konvergenzverhalten des Logarithmus und der harmonischen Reihe.

12.7 Fouriertransformation

> Das gründliche Studium der Natur ist die fruchtbarste Quelle für mathematische Entdeckungen.
> (Jean Baptiste Joseph Fourier)

Bei der in diesem Abschnitt zu betrachtenden Fouriertransformation handelt es sich eine Abbildung, die einer geeigneten Funktion eine andere Funktion zuordnet. Vom Prinzip haben wir das schon an vielen anderen Stellen betrachtet, etwa in Abschnitt 3.7, Kapitel 4, bei der Ableitung $f \mapsto f'$, der Suche nach Stammfunktionen $f \mapsto \int f(x)\,dx$ - wobei man sich in dem Fall noch überlegen muss, wie man diese Abbildung eindeutig macht - oder auch beim Taylorpolynom $f \mapsto T^{(n)}f(x_0, x)$. Wie in den vorherigen Fällen können wir mit der Fouriertransformation Informationen über die Funktion gewinnen und Rechnungen oder Überlegungen vereinfachen.

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen, die im Allgemeinen komplexwertig sein dürfen. Für solche Funktionen $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = u(x) + \imath v(x)$ ist das Integral erklärt durch

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I u(x)\,dx + \imath \int_I v(x)\,dx.$$

Das heißt, die Berechnung läuft einfach auf die Berechnung zweier reeller Integrale hinaus, man kann es sich oft aber noch leichter machen, da viele Ableitungsregeln und damit Stammfunktionen auch in dieser Situation anwendbar sind. So ist etwa

$$\begin{aligned}\left(e^{\imath\omega t}\right)' = (\cos\omega t + \imath\sin\omega t)' &= -\omega\sin\omega t + \imath\omega\cos\omega t\\ &= \imath\omega(\cos\omega t + \imath\sin\omega t) = \imath\omega e^{\imath\omega t}\end{aligned}$$

und folglich $\int e^{\imath\omega t}\,dt = \frac{1}{\imath\omega}e^{\imath\omega t}$. Das wiederum bedeutet, dass $e^{\imath\omega t}$ ein Eigenvektor, eine Eigenfunktion der linearen Abbildung $\int$ ist.

[2] Lorenzo Mascheroni, 1750-1800, ital. Mathematiker

Definition 12.7.1: Fouriertransformation

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$, dann heißt f *Fourier-transformierbar* und die *Fouriertransformation* (FT) von f ist definiert durch

$$\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \omega \mapsto \mathcal{F}f(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\imath\omega t}\, dt.$$

Die Funktion $\hat{f}(\omega) := (\mathcal{F}f)(\omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt die *Fouriertransformierte* (FT) von f.

Bemerkungen 12.7.2. (i) $\mathcal{F}f$ überführt f in eine neue Funktion $\hat{f}$, wofür das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}\, dt$ berechnet werden muss. Daher wird die Fouriertransformation auch als *Integraltransformation* bezeichnet.

(ii) Für die Ausgangsfunktion f verwendet man oft die Variable t und spricht von einer Funktion im *Zeitbereich*. Für die Zielfunktion $\hat{f}$ benutzt man oft ω und spricht von einer Funktion im *Frequenzbereich*.

(iii) In jedem Wert $\hat{f}(\omega)$ stecken Informationen über f aus ganz $\mathbb{R}$.

(iv) $\hat{f} = \mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist eine komplexwertige Funktion. Die zugehörige reellwertige Funktion $|\hat{f}| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Amplitudenspektrum*.

(v) Neben der häufig in der Mathematik verwendeten Definition 12.7.1 werden auch

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}\, dt \text{ und } \mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi\imath\omega t}\, dt$$

sowie weitere Abwandlungen (Vorfaktoren, Vorzeichen im Exponenten) benutzt. Die grundlegenden Überlegungen und Schlussfolgerungen bleiben aber jeweils die selben, nur die Formeln unterscheiden sich leicht in den Konstanten.

(vi) Die Fouriertransformation hat Anwendungen in verschiedensten Bereichen insbesondere auch außerhalb der Mathematik, siehe etwa [7, Abschnitt 3.7] oder [26, Abschnitt 7.11] und die dort genannte Literatur.

Beispiel 12.7.3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$$

beschreibt den sogenannten *Rechtecksimpuls* (siehe Abbildung 12.13). Die Fouriertransformierte von f lautet

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\imath\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\imath\omega t}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \cos(\omega t) - \imath \sin(\omega t)\, dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} \cos(\omega t)\, dt \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\omega}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0, \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} & \text{für } \omega = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Die Funktion $\frac{\sin x}{x} := \operatorname{sinc} x$ heißt *Sinus cardinalis*, *Kardinalsinus* oder *sinc-Funktion*. Diese ist auf $\mathbb{R}$ insbesondere stetig, denn $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0$.

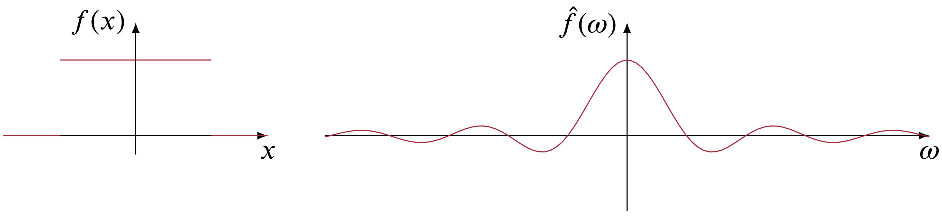


Abbildung 12.13: Der Rechteckimpuls und seine Fouriertransformation.

Satz 12.7.4: Verhalten der Fouriertransformierten bei $\pm\infty$

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und Fourier-transformierbar, dann ist $\hat{f}$ beschränkt und stetig und es gilt

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Satz 12.7.5: Rechenregeln für die Fouriertransformation

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourier-transformierbar, $a, b \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \ni c > 0$, dann gilt für $\omega \in \mathbb{R}$

(i) Linearität:

$$(af(t) + bg(t))^\wedge(\omega) = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega).$$

(ii) Translation (Verschiebung):

(a) $(f(t+h))^\wedge(\omega) = e^{\imath h\omega} \hat{f}(\omega)$,

(b) $(e^{-\imath h t} f(t))^\wedge(\omega) = \hat{f}(\omega + h)$.

(iii) Streckung:

$$(f(ct))^\wedge(\omega) = \frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

(iv) Ableitung im Zeitbereich: Falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ stetig differenzierbar sind und f' Fourier-transformierbar ist, gilt

$$(f')^\wedge(\omega) = \imath\omega\hat{f}(\omega).$$

(v) Ableitung im Frequenzbereich: Falls $t \mapsto tf(t)$ Fourier-transformierbar ist, dann ist $\hat{f}$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \hat{f}'(\omega) = (-\imath t f(t))^\wedge(\omega).$$

Beweis. Folgt durch direktes Ausrechnen. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-\imath\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\lim_{c\to-\infty} \int_c^0 f'(t)e^{-\imath\omega t}\, dt + \lim_{c\to+\infty} \int_0^c f'(t)e^{-\imath\omega t}\, dt \right) \\
&\overset{\text{PI}}{=} \lim_{c\to-\infty} \left(\left[\frac{f(t)e^{-\imath\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{t=c}^0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^0 f(t)(-\imath\omega)e^{-\imath\omega t}\, dt \right) \\
&\quad + \lim_{c\to\infty} \left(\left[\frac{f(t)e^{-\imath\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{t=0}^c - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c f(t)(-\imath\omega)e^{-\imath\omega t}\, dt \right) \\
&= \imath\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}\, dt = \imath\omega\hat{f}(\omega),
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass für das Restintegral gilt $\int_{\pm c}^{\pm\infty} f(t)\,dt \to 0$ für $c \to +\infty$, da sonst das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ für eine (stückweise) stetige Funktion nicht existieren würde (Aufgabe A.12.19). □

Beispiel 12.7.6. Es sei $g(t) = 4f(t) + e^{\imath t} f(7t)$. Berechne $\hat{g}$ in Abhängigkeit von $\hat{f}$.

$$\begin{aligned}
(g(t))^\wedge(\omega) &= 4\hat{f}(\omega) + (e^{\imath t} f(7t))^\wedge(\omega) \\
&= 4\hat{f}(\omega) + (f(7t))^\wedge(\omega - 1) \\
&= 4\hat{f}(\omega) + \frac{1}{7}\hat{f}\left(\frac{\omega - 1}{7}\right).
\end{aligned}$$

Beispiel 12.7.7 (Anwendung der Fouriertransformation)**.** Die Fouriertransformation kann man zum Lösen von Differenzialgleichungen nutzen (siehe auch Kapitel 13). Wir betrachten beispielsweise die folgende lineare Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$y'(t) + 3y(t) = f(t). \tag{12.7}$$

Annahme: y, y', f sind Fourier-transformierbar, dann gilt

$$\begin{aligned} & & (y'(t))^\wedge(\omega) + (3y(t))^\wedge(\omega) &= (f(t))^\wedge(\omega) \\ &\Leftrightarrow & \imath\omega\hat{y}(\omega) + 3\hat{y}(\omega) &= \hat{f}(\omega) \\ &\Leftrightarrow & \hat{y}(\omega) &= \frac{\hat{f}(\omega)}{3+\imath\omega}. \end{aligned}$$

Jetzt muss man noch $\hat{y}$ zurücktransformieren, das heißt aus $\hat{y}(\omega)$ wieder $y(t)$ berechnen, um die Lösung $y(t)$ zu erhalten. Dazu brauchen wir aber zunächst eine Transformation, welche die Fouriertransformierte in die ursprüngliche Funktion zurückführt.

Definition 12.7.8: Inverse Fouriertransformation

Existieren die auftretenden Integrale und ist f stetig und Fourier-transformierbar, so ist die *inverse Fouriertransformation* oder *Fourierumkehrtransformation* $\mathcal{F}^{-1}$ von $\hat{f}$ definiert als

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{\imath\omega t}\, d\omega.$$

Bemerkung 12.7.9. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und Fourier-transformierbar und die inverse Fouriertransformierte von $\hat{f}$ existiere, dann gilt

$$\begin{aligned} f(t) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{-\imath\omega t'}\, dt' e^{\imath\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')e^{\imath\omega(t-t')}\, dt'\, d\omega. \end{aligned}$$

Definition 12.7.10: Faltung

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dann ist die *Faltung* $f \star g$ von f und g (falls existent) definiert als

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\, du.$$

Satz 12.7.11: Faltung und Fouriertransformation

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourier-transformierbar, dann gilt

(i) Die Faltung ist kommutativ, also $(f \star g)(t) = (g \star f)(t)$.

(ii) Glättungseigenschaften:

  (a) Ist f (oder g) stetig, so ist $f \star g$ stetig.

  (b) Ist f stetig differenzierbar, so ist $f \star g$ stetig differenzierbar mit $(f \star g)'(t) = (f' \star g)(t)$.

(iii) Faltungssatz im Zeitbereich: Die Faltung $f \star g$ ist Fourier-transformierbar mit

$$\widehat{(f \star g)}(\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega).$$

(iv) Faltungssatz im Frequenzbereich: Ist auch die inverse Fourier-transformation auf f und g anwendbar, so gilt

$$\widehat{(f \cdot g)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\hat{f} \star \hat{g})(\omega).$$

Beispiel 12.7.12 (Fortsetzung von 12.7.7)**.** Wir hatten gezeigt, dass

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{3 + \imath\omega}$$

die Fouriertransformierte der Lösung der Differenzialgleichung (12.7) ist. Jetzt erhalten wir die Lösung von (12.7) durch die inverse Fouriertransformation $y(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{y}(\omega))$. Zur Berechnung von $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{3+\imath\omega}\right)$ machen wir folgende Vorbetrachtung: Setze

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} \cdot e^{-3t} & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-\imath\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} \sqrt{2\pi} e^{-3t} e^{-\imath\omega t}\, dt \\ &= \left[-\frac{1}{3 + \imath\omega} e^{(-3-i\omega)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3 + \imath\omega}, \end{aligned}$$

da $\left|e^{-(3+\imath\omega)t}\right| = e^{-3t}\left|e^{-\imath\omega t}\right| = e^{-3t} \to 0$ für $t \to +\infty$. Also ist $\hat{y}(\omega) = \hat{g}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega)$

und damit

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{y}(\omega))(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}(\omega)\cdot\hat{f}(\omega))(t)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}((\widehat{g\star f}))(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g\star f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f\star g)(t)\\
&= \int_0^{+\infty} f(t-u)e^{-3u}\,du.
\end{aligned}$$

In vielen Anwendungsfällen ist die Fouriertransformierte nur auf einem beschränkten Intervall von Null verschieden (*bandbegrenzt*). Beispielsweise genügt es völlig, für Tonübertragungen nur die Frequenzen im wahrnehmbaren Bereich zu berücksichtigen. Der folgende Satz besagt, dass dann ein Signal f eindeutig durch die Werte an den Stellen $\frac{k}{2c}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und einer von der Bandbreite abhängigen Variablen $c > 0$ beschrieben und rekonstruierbar ist. Das Signal muss also nur an diesen Stellen „abgetastet“ werden.

Abtast- oder Sampling-Theorem 12.7.13

Es sei f stetig, fourier-transformierbar und $\forall \omega \in \mathbb{R} \setminus [-c, c]\,(\hat{f}(\omega) = 0)$, dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2c}\right)\operatorname{sinc}(2cx - k). \tag{12.8}$$

Bemerkungen 12.7.14. (i) Die Reihe ist hier als „Doppelreihe“ und Summe der Grenzwerte der beiden Partialsummenfolgen für $k \to \pm\infty$ zu lesen.

(ii) Will man das durch f gegebene Signal übertragen, kann man also an den Stellen $x \neq \frac{k}{2c}$ entsprechend versetzt weitere Informationen über den selben Kanal übertragen.

(iii) Das Theorem wird oft nach Nyquist[3] und Shannon[4] benannt, wurde aber zuerst von Kotelnikow[5] entdeckt.

(iv) Eine Herleitung findet man etwa in [26], eine Beschreibung aus Signalübertragungssicht liefert zum Beispiel [12].

Anwendungsbeispiele sind etwa

(v) Parallele Übertragung mehrerer Telefongespräche über eine Leitung.

---

[3] Harry Nyquist, 1889-1976, schwed.-amerik. Ingenieur
[4] Claude Elwood Shannon, 1916-2001, amerik. Mathematiker
[5] Wladimir Alexandrowitsch Kotelnikow, 1908-2005, sowj. Elektrotechniker

(vi) Effiziente Speicherung etwa von Bild- und Tonsignalen.

(vii) Weiter erlauben gepulste Signale Methoden der Fehlerkorrektur und Rauschunterdrückung.

Die Abtastrate $\frac{1}{2c}$ spielt eine wichtige Rolle:

(viii) Ist $c > 0$ die kleinstmögliche Zahl, so dass $\hat{f}(\omega) = 0$ für $|\omega| > c$, so wird die daraus resultierende Anzahl $2c$ an Abtastpunkten in einem Intervall der Länge 1 als *Nyquist-Rate* bezeichnet.

(ix) Für jede größere Zahl $c' > c$ gilt die Formel ebenfalls, allerdings mit dem Nachteil, dass man mehr Abtastpunkte benötigt.

(x) Wird eine Abtastrate unterhalb der Nyquist-Rate verwendet oder eine Funktion betrachtet, die nicht bandbegrenzt ist, kommt es wie in Bemerkung 4.2.2 (i) zum *Alias-Effekt* (siehe auch Beispiel 4.2.3).

(xi) Im Alltag begegnet einem der Alias-Effekt zum Beispiel in der Form von scheinbar rückwärts drehenden Rädern in Filmaufnahmen.

Kapitel 13

Elementare Differenzialgleichungen

13.1 Motivation

> Die Wissenschaft ist eine Differenzialgleichung. Religion ist eine Randbedingung. (Alan Turing)

Viele Probleme führen auf Gleichungen, in denen eine unbekannte beziehungsweise gesuchte Funktion und ihre Ableitungen auftreten. Fundamentale physikalische Formeln sind häufig in dieser Form notiert, beispielsweise „$F = m \cdot a$“, das die Beschleunigung a (zweite Ableitung nach dem Ort) mit der sie bewirkenden Kraft in Verbindung setzt. In der Theorie neuronaler Netze modelliert man die Weiterleitung von Signalen über Transmittermoleküle im Gehirn als Differenzialgleichungen in der Zeit. Anders als in der Idealvorstellung von instantaner Weitergabe und Verarbeitung von Eingabedaten (siehe etwa Beispiel B.3.2) wird dabei berücksichtigt, dass chemische und elektrische Prozesse Zeit benötigen.

Beispiel 13.1.1. Wir betrachten ein radioaktives Präparat mit N_0 Kernen und der Zerfallskonstanten $\lambda \geq 0$. Das bedeutet, dass für die Anzahl der Kerne $N(t)$ zum Zeitpunkt t (ungefähr) gilt

$$N(t) - N(t_0) = -\lambda N(t_0)\,(t - t_0)\,.$$

Die zugrunde liegende Überlegung ist, dass die Veränderung in der Anzahl der Kerne N, $\Delta N = N(t) - N(t_0)$, für kleine zeitliche Veränderungen $\Delta t = t - t_0$ proportional zum Bestand ist. Aus der Gleichung erhalten wir $\frac{N(t)-N(t_0)}{t-t_0} = -\lambda N(t_0)$ und durch Grenzübergang $t \to t_0$

$$N' = -\lambda N.$$

Eine Lösung der obigen Gleichung kann man raten: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}$.

Statt radioaktiven Kernen kann man das Beispiel auch mit einer Population von Lebewesen betrachten - weil man dann meist den Tod zunächst vernachlässigt, hätte man dann $N' = \lambda N$ mit einem $\lambda \geq 0$.

Als weiteres einführendes und prominentes Beispiel einer Differenzialgleichung betrachten wir den harmonischen Oszillator. Schwingungsphänomene aller Art können derart beschrieben werden, wir betrachten hier eine anschauliche Situation.

Beispiel 13.1.2 (Harmonischer Oszillator)**.** Eine als punktförmig angenommene Masse m schwinge an einer Feder mit Federkonstante k (die Masse der Feder sei vernachlässigbar klein).

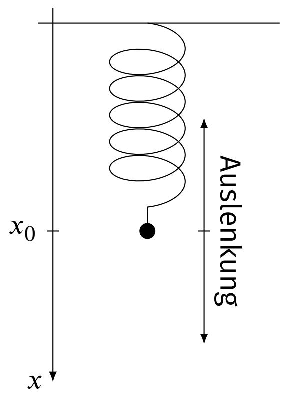


Abbildung 13.1: Harmonischer Oszillator.

Gesucht ist die Auslenkung x der Feder zur Zeit t. Es gilt das Newtonsche Bewegungsgesetz „$F = m \cdot a$“.

$$F_{\text{Feder}} = -kx = mx''.$$

Lösungen sind $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Dies sieht man sofort, weil $(c_1 \cos \omega t)'' = (-c_1 \omega \sin \omega t)' = -c_1 \omega^2 \cos \omega t$ und analog $(c_2 \sin \omega t)'' = -c_2 \omega^2 \sin \omega t$ gilt. Anders gesagt: $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ sind Eigenfunktionen zum Eigenwert $-\omega^2$ der linearen Abbildung mit $f \mapsto f''$.

Für eine eindeutige Lösung benötigt man die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \; x'(0) = v_0.$$

Also die Lage der Masse und die Geschwindigkeit der Masse zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 \cos(\omega 0) + c_2 \sin(\omega 0) = c_1 \stackrel{!}{=} x_0, \\ \dot{x}(0) &= -c_1 \omega \sin(\omega 0) + c_2 \omega \cos(\omega 0) \\ &= c_2 \omega \stackrel{!}{=} v_0 \end{aligned}$$

und daraus
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$
Setzen wir $\tan\delta = \frac{x_0\omega}{v_0}$, $A = \frac{x_0}{\sin\delta}$, dann ist mit $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$$x(t) = A \sin\delta \cos(\omega t) + A \cos\delta \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \delta).$$

Das heißt, die Lösung ist eine Sinusschwingung mit der *Frequenz* ω, der *Amplitude* A und einer *Phasenverschiebung* δ.

Definition 13.1.3: Differenzialgleichung

(i) $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ seien nichtleere Intervalle. Die Menge $M = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (n-dimensionales) *Rechteck*.

(ii) Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $\varphi : M \to \mathbb{R}$ eine stetige[a] Funktion. Weiter seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. y nennen wir eine *Lösung der expliziten (gewöhnlichen) Differenzialgleichung* (DGL) *erster Ordnung*

$$y' = \varphi(x, y),$$

wenn y stetig differenzierbar ist sowie jeweils für alle $x \in I$ gilt, dass $(x, y(x)) \in M$ und $y'(x) = \varphi(x, y(x))$.

(iii) Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck, $\varphi : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(\xi, \eta) \in M$. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, dann heißt $y : I \to \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems* (AWP)

$$y' = \varphi(x, y), \;\; y(\xi) = \eta,$$

wenn y eine Lösung der Differenzialgleichung $y' = \varphi(x, y)$ ist und zusätzlich $\xi \in I$ mit $y(\xi) = \eta$ gilt.

(iv) $y : I \to \mathbb{R}$, mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, heißt eine *Lösung der expliziten Differenzialgleichung n-ter Ordnung*

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

wenn gilt

- y ist n-mal stetig differenzierbar,
- $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in M$ für alle $x \in I$ und
- $y^{(n)}(x) = \varphi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ für alle $x \in I$.

Für $(\xi, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ heißt $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),\ y^{(k)}(\xi) = \eta_k \text{ für } k = 0, \dots, n-1,$$

wenn y die Differenzialgleichung $y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ löst und $y^{(k)}(\xi) = \eta_k$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$ gilt.

[a] Ersetzt man in der Definition von Stetigkeit die Beträge durch Normen, erhält man eine Definition für Funktionen mehrerer Variablen.

Beispiel 13.1.4. $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = e^{\alpha x}$ ist eine Lösung der Differenzialgleichung $y' = \alpha y$ und des Anfangswertproblems $y' = \alpha y$, $y(0) = 1$. Hier ist also $\varphi(x, y) = \varphi(y) = \alpha y$. φ ist auf beliebigen Rechtecken im $\mathbb{R}^2$ und insbesondere dem $\mathbb{R}^2$ selbst definiert, um das Anfangswertproblem lösen zu können, muss zumindest $(0, 1)^\mathsf{T}$ im gewählten Rechteck enthalten sein.

Bemerkungen 13.1.5. (i) Jede explizite Differenzialgleichung n-ter Ordnung, $y^{(n)} = \varphi\big(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}\big)$, lässt sich auf ein System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung zurückführen, etwa

$$\begin{aligned}
\big(y^{(0)}\big)' &= y^{(1)},\\
\big(y^{(1)}\big)' &= y^{(2)},\\
&\vdots\\
\big(y^{(n-2)}\big)' &= y^{(n-1)},\\
\big(y^{(n-1)}\big)' &= \varphi(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}).
\end{aligned}$$

Schreibt man $y = y^{(0)} = y_1$, $y' = y^{(1)} = y_2$ und so weiter bis $y_n = y^{(n-1)}$, erhält man mit der Vektorschreibweise $y = (y_1, \dots, y_n)^\mathsf{T}$ das System

$$y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \varphi(x, y_1, \dots, y_n). \end{pmatrix}$$

Komponentenweise handelt es sich dabei um Differenzialgleichungen erster Ordnung. Für Systeme von Differenzialgleichungen erster Ordnung existieren Lösungsverfahren, die mit dieser Umformung auf Differenzialgleichungen n-ter Ordnung anwendbar sind.

(ii) Allgemeiner nennt man

$$F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0$$

mit einer stetigen Funktion F und einer Funktion $y \in C^n$ eine ***gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung***. Die Stetigkeit von F ist hier im Sinne von Aufgabe A.10.21 auf dem $\mathbb{R}^{n+2}$ zu interpretieren. Aus dieser ***impliziten*** Darstellung lässt sicht unter geeigneten Voraussetzungen eine explizite Darstellung der Differenzialgleichung gewinnen (sogenannter ***Satz über implizite Funktionen***, siehe etwa [21]).

(iii) Bei der Lösung von Differenzialgleichungen oder Anfangswertproblemen stellen sich folgende Fragen:

   (a) Gibt es immer eine Lösung?
   (b) Ist die Lösung eindeutig?
   (c) Wie erhält man die Lösung?

   Die Reihenfolge ist typisch mathematisch.

In den folgenden Abschnitten betrachten wir Lösungstechniken für verschiedene Spezialfälle von φ.

13.2 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Tausend Wege führen zu Fehlern, zur Wahrheit führt nur einer.
(Jean-Jaques Rousseau)

Wir betrachten wieder die Situation aus dem ersten und dem obigen Beispiel und verallgemeinern dahingehend, dass $y' = f \cdot y$, wobei f nun auch eine Funktion sein darf. Mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung 12.5.6 kann man sich folgende Aussage überlegen:

Satz 13.2.1: Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\xi \in I$ kein Randpunkt von I. Es seien weiter $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\eta \in \mathbb{R}$. Für

$$y_0 : I \to \mathbb{R},\ y_0(x) := \exp\left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right),$$
$$y : I \to \mathbb{R},\ y(x) := \left(\eta + \int_\xi^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt\right) \cdot y_0(x)$$

gilt dann

(i) y_0 löst das Anfangswertproblem $y' = f(x)y$, $y(\xi) = 1$ und

(ii) y löst das Anfangswertproblem $y' = f(x)y + g(x)$, $y(\xi) = \eta$.

Beweis. (i) $y_0(\xi) = 1$, $y_0'(x) = \left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right)' y_0(x) = f(x)y_0(x)$ für alle $x \in I$ nach dem ersten Hauptsatz 12.5.6.

(ii) $y(\xi) = \eta$ und für alle $x \in I$ gilt

$$y'(x) = \frac{g(x)}{y_0(x)} y_0(x) + \left(\eta + \int_\xi^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt\right) f(x) y_0(x) = g(x) + f(x)y(x). \quad \square$$

Beispiele 13.2.2. (i) Das Anfangswertproblem $y' = x \cdot y$, $y(1) = 3$, also $f(x) = x$ und $\xi = 1$, wird gelöst durch

$$y(x) = 3 \exp\left(\int_1^x t\,dt\right) = 3e^{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}.$$

Dies kann man sich entweder so überlegen, dass $y_0(x) = \exp\left(\int_1^x t\,dt\right)$ das Anfangswertproblem mit $y(1) = 1$ löst und man daher mit dem Faktor 3 das Gewünschte erreicht, oder man verwendet formal $g = 0$ in der Lösungsformel.

(ii) Das Anfangswertproblem $y' = x + y$, $y(0) = 2$, das heißt $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $\xi = 0$ und $\eta = 2$ lösen wir in zwei Schritten:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= \exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \exp\left(\int_0^x 1\,dt\right) = e^x, \\
y(x) &= \left(2 + \int_0^x te^{-t} dt\right) e^x = \left(2 + \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt\right) e^x \\
&= \left(2 + \left[-e^{-t} - te^{-t}\right]_0^x\right) e^x = \left(3 - e^{-x} - xe^{-x}\right) e^x \\
&= 3e^x - x - 1.
\end{aligned}$$

(iii) Das Anfangswertproblem $y' = 3x^2y + x^2$, $y(0) = 1$, wird mit $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x^2$, $\xi = 0$, $\eta = 1$ gelöst mit

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= \exp\left(\int_0^x 3t^2 dt\right) = e^{x^3}, \\
y(x) &= \left(1 + \int_0^x t^2 e^{-t^3} dt\right) e^{x^3} = \left(1 - \frac{1}{3}\left[e^{-t^3}\right]_0^x\right) e^{x^3} \\
&= \left(1 - \frac{1}{3}e^{-x^3} + \frac{1}{3}e^0\right) e^{x^3} = \frac{4}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Test:

$$y'(x) = \frac{4}{3} 3x^2 e^{x^3} = 3x^2\left(\frac{4}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}\right) + x^2.$$

Außerdem ist $y(0) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$.

Bemerkungen 13.2.3. (i) $y' = f(x) \cdot y$ bezeichnet man als *lineare, homogene Differenzialgleichung erster Ordnung*, $y' = f(x) \cdot y + g(x)$ bezeichnet man als *lineare, inhomogene Differenzialgleichung erster Ordnung*.

(ii) Wenn man $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ annimmt, kann man die Lösungsformel der homogenen Differenzialgleichung leicht herleiten:

$$y'(x) = f(x)y(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\ln(y(x)) = f(x)$$

für alle $x \in I$. Ist F nun eine Stammfunktion von f, beispielsweise $F(x) = \int_\xi^x f(t)\,dt$, so erhält man

$$\ln(y(x)) = F(x) + c \Rightarrow y(x) = e^{F(x)+c} = \tilde{c}e^{F(x)}.$$

(iii) Die Lösungsformel für die inhomogene Differenzialgleichung erhält man mittels einer Methode, die als *Variation der Konstanten* bezeichnet wird: Ist F eine Stammfunktion von f, so ist für alle $c \in \mathbb{R}$ $y(x) = ce^{F(x)}$ eine Lösung von $y' = f(x)y$. Man macht nun den Ansatz

$$y(x) = c(x)e^{F(x)} \tag{13.1}$$

um das inhomogene Problem zu lösen:

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x). \tag{13.2}$$

Setzt man nun (13.1) in (13.2) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} y'(x) &= c'(x)e^{F(x)} + c(x)f(x)e^{F(x)} = c'(x)e^{F(x)} + f(x)y(x) \\ &\overset{!}{=} f(x)y(x) + g(x) \\ \Leftrightarrow c'(x)e^{F(x)} &= g(x) \Leftrightarrow c'(x) = \frac{g(x)}{e^{F(x)}}. \end{aligned}$$

Ist dann $F(x) = \int_\xi^x f(t)\,dt$ und somit $F(\xi) = 0$, so folgt mit

$$c(x) = \int_\xi^x \frac{g(t)}{e^{F(t)}}dt + \eta,$$

dass $c(\xi) = \eta$ und $y(\xi) = c(\xi)e^{F(\xi)} = \eta$. Also erfüllt die Lösung das Anfangswertproblem.

Wir zeigen als nächstes: Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x)y + g(x) \\ y(\xi) = \eta \end{cases} \tag{AWP}$$

ist immer in der in 13.2.1 angegebenen Form darstellbar.

Lemma 13.2.4: Darstellung der Lösung

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\xi \in I$ mit $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subseteq I$ für ein $\delta > 0$ und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x)y + g(x)$, $y(\xi) = \eta$. Dann ist

$$y(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right)\left(\eta + \int_\xi^x \frac{g(t)}{\exp\left(\int_\xi^t f(u)\,du\right)} dt\right).$$

Beweis. Wir definieren $y_0 : I \to \mathbb{R}$, $y_0(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right)$. Dann gilt $y_0(x) > 0$ für alle $x \in I$ und weiter

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_0(x)}\right) &= \frac{y'(x)y_0(x) - y(x)y_0'(x)}{y_0^2(x)} \\ &= \frac{(f(x)y(x) + g(x))y_0(x) - y(x)f(x)y_0(x)}{y_0^2(x)} = \frac{g(x)}{y_0(x)}.\end{aligned}$$

Also folgt mit dem zweiten Hauptsatz 12.5.7

$$\frac{y(x)}{y_0(x)} - \eta = \frac{y(x)}{y_0(x)} - \frac{y(\xi)}{y_0(\xi)} = \int_\xi^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt$$

und damit die Behauptung. □

Definition 13.2.5: Bernoullische Differenzialgleichung

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann heißt

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$$

eine *Bernoullische Differenzialgleichung*.

Bemerkungen 13.2.6. (i) Hier betrachten wir das Rechteck $I \times (0, +\infty)$, das heißt $y > 0$, beziehungsweise im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ auch $I \times \mathbb{R}$ beziehungsweise Teilrechtecke davon.

(ii) Für $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ ergeben sich lineare Differenzialgleichungen:

- $\alpha = 0$: $y' = f(x)y + g(x)$ (inhomogene lineare Differenzialgleichungen),
- $\alpha = 1$: $y' = (f(x) + g(x))y$ (homogene lineare Differenzialgleichungen).

Lösungsansatz im Fall $\alpha \notin \{0, 1\}$ 13.2.7. Wir versuchen, auch diesen Fall auf eine lineare Differenzialgleichung zurückzuführen, dabei gehen wir zunächst davon aus, dass alle Rechenschritte erlaubt sind und rechtfertigen das Vorgehen später. Wir haben

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \Rightarrow \frac{y'}{y^\alpha} = f(x)\frac{y}{y^\alpha} + g(x)$$
$$\Leftrightarrow y^{-\alpha}y' = f(x)y^{1-\alpha} + g(x).$$

Setzen wir $z = y^{1-\alpha}$, so ist $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, also

$$\frac{z'}{1-\alpha} = f(x)z + g(x) \Leftrightarrow z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x).$$

Also erhalten wir die gesuchte Lösung y der Bernoullischen Differenzialgleichung, wenn wir zunächst die inhomogene lineare Differenzialgleichung

$$z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x)$$

lösen und danach $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ setzen.

Gilt $y > 0$, so ist die Division durch y^α erlaubt und die Herleitung damit grob gesprochen in Ordnung. Genauer gilt: Wenn $y : I \to (0, +\infty)$ eine Lösung von $y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$ ist, dann gilt für

$$\begin{aligned}
&z : I \to (0, +\infty),\ z(x) = y^{1-\alpha}(x),\\
&z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)(f(x)y(x) + g(x)y^\alpha(x))\\
&\qquad = (1-\alpha)f(x)y^{1-\alpha}(x) + (1-\alpha)g(x)\\
&\qquad = (1-\alpha)f(x)z(x) + (1-\alpha)g(x),
\end{aligned}$$

das heißt z genügt einer linearen Differenzialgleichung.

Beispiele 13.2.8. (i) $y' = \sqrt{y}$, $y(1) = 4$, also ist $y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$ mit $f(x) = 0$, $g(x) = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Wir setzen $z = \sqrt{y} = y^{1-\frac{1}{2}}$, dann muss

$$z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y' = \frac{1}{2},\ z(1) = \sqrt{y(1)} = 2$$

gelten. Damit ist

$$z(x) = 2 + \int_1^x \frac{1}{2}dt = 2 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{x+3}{2}$$

und folglich $y = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2$.

Schematisch war das Vorgehen also: Setze $z = y^{1-\alpha}$, $z(1) = y^{1-\alpha}(1)$, löse $z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x) = \frac{1}{2}$ mit $z(1) = \sqrt{y(1)}$ und setze anschließend $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} = z^2$.

(ii) $y' = x^4y + x^4y^4$, $y(0) = 1$, das heißt $f(x) = x^4 = g(x)$, $\alpha = 4$. Ansatz: $z = y^{1-4} = \frac{1}{y^3}$. Damit ist

$$z' = \frac{-3}{y^4}y' = -\frac{3}{y^4}(x^4y + x^4y^4) = -3x^4y^{-3} - 3x^4 = -3x^4z - 3x^4$$

und $z(0) = 1$. Die Lösung z ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} z(x) &= \underbrace{\exp\left(\int_0^x (-3t^4)\,dt\right)}_{=\exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)}\left(1 - \int_0^x 3t^4 e^{\frac{3}{5}t^5}\,dt\right) \\ &= e^{-\frac{3}{5}x^5}\left(1 - \left[e^{\frac{3}{5}t^5}\right]_0^x\right) = e^{-\frac{3}{5}x^5}\left(1 - e^{\frac{3}{5}x^5} + e^0\right) \\ &= 2e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1. \end{aligned}$$

Damit haben wir $y = z^{\frac{1}{1-4}} = \left(2e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1\right)^{-\frac{1}{3}}$.

13.3 Getrennte Variablen

Die Wahrheit hat tausend Hindernisse zu überwinden, um unbeschädigt zu Papier zu kommen und von Papier wieder zu Kopf. (Georg Christoph Lichtenberg)

Definition 13.3.1: Differenzialgleichung mit getrennten Variablen

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, dann heißt eine Differenzialgleichung der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

Differenzialgleichung mit getrennten Variablen und

$$y' = f(x)g(y),\ \ y(\xi) = \eta \text{ für } \xi \in I,\ \ \eta \in J$$

das zugehörige Anfangswertproblem.

Lösungsansatz für das AWP mit getrennten Variablen 13.3.2.

(i) Wenn $g(\eta) = 0$, dann ist $y : I \to \mathbb{R}$, $y(x) = \eta$ eine Lösung des Anfangswertproblems.

(ii) Ist $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ (dies kann im Fall $g(\eta) \neq 0$ aufgrund der Stetigkeit von g durch eine geeignete Wahl von J stets erreicht werden) und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems, also insbesondere $y(x) \in J$ für alle $x \in I$, dann folgt für alle $x \in I$

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x). \tag{13.3}$$

Es seien nun $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_\xi^x f(t)\,dt$ und $G : J \to \mathbb{R}$, $G(y) = \int_\eta^y \frac{1}{g(u)} du$, dann folgt aus (13.3)

$$\begin{aligned} &\int_\xi^x \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_\xi^x f(t)\,dt \\ \Leftrightarrow &\int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(u)} du = \int_\xi^x f(t)\,dt \Leftrightarrow G(y(x)) = F(x), \end{aligned}$$

wobei $u = y(t)$, $\frac{du}{dt} = y'(t)$ substituiert wurde. Aus dieser Gleichung erhält man dann die Lösung des Anfangswertproblems durch Auflösen nach $y(x)$.

Liegt nur eine Differenzialgleichung ohne Anfangswertproblem vor, so erhält man die Lösungen, in dem man die Integrale durch unbestimmte Integrale (Stammfunktionen) ersetzt und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ addiert:

$$\int \frac{1}{g(u)} du = \int f(t)\,dt + c$$

und dann auflöst.

Unter der Voraussetzung $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ ist die Funktion $G : J \to \{\, g(y) \mid y \in J \,\}$ stets bijektiv nach Lemma 11.2.11 und daher folgt $y(x) = G^{-1}(F(x))$.

Beispiele 13.3.3. (i) $y' = x(1+y)$, $y(0) = 0$, das heißt $f(x) = x$, $g(y) = 1 + y$. Es gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2, \\ G(y) &= \int_0^y \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^y = \ln(1+y). \\ \Rightarrow \ln(1+y) &= \frac{1}{2}x^2 \\ \Rightarrow 1 + y &= e^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow y = e^{\frac{1}{2}x^2} - 1. \end{aligned}$$

In der Praxis kann man auch so vorgehen, dass man die zu $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$ umgeformte Gleichung integriert und den Weg über F und G dadurch etwas abkürzt.

(ii) $y' = x(1+y)$, $y(0) = -1$, also $f(x) = x$, $g(y) = 1 + y$ und $g(\eta) = g(y(0)) = 0$. Es gilt: $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = -1$ ist eine Lösung.

(iii) $y' = \frac{3x^2+4x+2}{2(y+1)}$, $y(0) = 1$. Mit $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$ und $g(y) = (2(y+1))^{-1}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (3t^2 + 4t + 2)\, dt = x^3 + 2x^2 + 2x, \\ G(y) &= \int_1^y 2(u+1)\, du = \left[(u+1)^2\right]_1^y = (y+1)^2 - 4. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (y+1)^2 - 4 = x^3 + 2x^2 + 2x &\Rightarrow (y+1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \\ &= (x^3 + 2x) + 2(x^2 + 2) = (x+2)(x^2+2) \\ &\Rightarrow y + 1 = \pm\sqrt{(x+2)(x^2+2)} \text{ für } x > -2 \\ &\Rightarrow y = -1 \pm \sqrt{(x+2)(x^2+2)} \text{ für } x > -2. \end{aligned}$$

Aus $y(0) = 1$ folgt dann $y(x) = -1 + \sqrt{(x+2)(x^2+2)}$ für $x > -2$.

(iv) $y' = e^y \sin x$, also $f(x) = \sin x$, $g(y) = e^y > 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_\xi^x \sin t\, dt = [-\cos t]_\xi^x = \cos \xi - \cos x, \\ G(y) &= \int_\eta^y e^{-u} du = [-e^{-u}]_\eta^y = e^{-\eta} - e^{-y}. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$e^{-\eta} - e^{-y} = \cos \xi - \cos x \Rightarrow e^{-y} = \cos x + \underbrace{e^{-\eta} - \cos \xi}_{=:c}.$$

Also insgesamt

$$-y = \ln(\cos x + c) \Rightarrow y = -\ln(\cos x + c).$$

Die gesuchte Lösung ist also die Funktion $y(x) = -\ln(\cos x + c)$ auf einem Intervall I mit $\cos x + c > 0$ für alle $x \in I$.

(v) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$, $y(1) = 1$. Ansatz: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, beziehungsweise $y(x) = z(x) \cdot x$. Dann ist

$$y'(x) = z(x) - \frac{1}{z^2(x)} = \underbrace{z'(x) \cdot x + z(x)}_{\text{Ansatz}}.$$

Also

$$z' = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{x} = g(z) \cdot f(x).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x), \\ G(z) &= \int_1^z \left(-u^2\right) du = \left[-\frac{1}{3}u^3\right]_1^z = -\frac{z^3 - 1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{z^3 - 1}{3} &= \ln x \Leftrightarrow z^3 = 1 - 3\ln x \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{1 - 3\ln x}. \end{aligned}$$

Also ist $y(x) = x\sqrt[3]{1 - 3\ln(x)}$ auf einem Intervall I mit $1 \in I$ und $1 - 3\ln x > 0$ für alle $x \in I$, beispielsweise $\left(0, e^{\frac{1}{3}}\right)$.

Bemerkung 13.3.4. Eine Differenzialgleichung der Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ wird *homogene Differenzialgleichung* genannt. Die Bezeichnung ist etwas unglücklich, da man bei Differenzialgleichungen wie bei linearen Gleichungssystemen auch dann von einer homogenen Gleichung spricht, wenn die rechte Seite Null ist. Der Ansatz $z = \frac{y}{x}$ führt dabei auf eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen:

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y' - z}{x} = \frac{f(z) - z}{x}.$$

A.7 Aufgaben zu Kapitel Lineare Gleichungssysteme

> Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte, und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen.
> (Carl Friedrich Gauß)

Aufgabe A.7.1: Lösen linearer Gleichunggsysteme

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme für x_1, x_2, x_3 und $x_4 \in \mathbb{R}$:

(i)
$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -3 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -2 \end{aligned}$$

(iii) In Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 &= 1 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x1 + \lambda x_2 + 6x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe A.7.2

Bestimmen Sie alle Polynome $P \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ mit den Eigenschaften

$$P(0) = 1,\ P(1) = 1,\ P(-1) = -3,\ P(2) = 3.$$

Aufgabe A.7.3: Simultanes Lösen

Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie A^{-1} und B^{-1},

(ii) Lösen Sie $AX = C$ und

(iii) Lösen Sie $YB = C$.

Aufgabe A.7.4: Inverse bestimmen

(i) Bestimmen Sie, falls möglich, jeweils die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1+\imath & 2+\imath & 3+\imath \\ 1-\imath & 2-\imath & 3-\imath \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung, falls existent, der linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$F(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a+b-c \\ b+c+d \\ a+b+c+d \\ a-c+d \end{pmatrix}.$$

Aufgabe A.7.5: Allgemeine lineare Gruppe

Zeigen Sie, dass die Menge

$$GL(n) := \{\, A \in K^{n\times n} \mid A \text{ ist ivertierbar} \,\}$$

bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die *allgemeine lineare Gruppe*, bilden. Ist sie für $n \geq 3$ abelsch?

Aufgabe A.7.6: Basis mit Gauß-Verfahren bestimmen

Lösen Sie diese Aufgabe mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

(i) Ergänzen Sie $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu einer Basis des

$\mathbb{R}^5$.

(ii) Es sei U der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\6\\5\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\3\end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix}2\\3\\5\\-4\end{pmatrix}$$

aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^4$. Wählen Sie aus $\{ v_1, \dots, v_5 \}$ eine Basis von U.

Aufgabe A.7.7: Licht aus!

Unter Lights out finden Sie ein kleines Rätsel implementiert. Wählen Sie den Knopf „Random“, um eine zufällige Ausgangskonfiguration zu erhalten. Klickt man auf eines der Felder, ändert sich sein Zustand und der Zustand der angrenzenden Felder (gemeinsame Seite). Ziel ist es, alle Felder „auszuschalten“. Wir nummerieren die Felder wie folgt:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Da es nur zwei Zustände und neun Felder gibt, beschreiben wir die Konfiguration durch $b \in \mathbb{F}_2^9$, dabei bedeute $b_i = 1$, das i-te Feld ist an und $b_i = 0$, das i-te Feld ist aus.
Eine Lösungsstrategie können wir ebenfalls als einen Vektor $x \in \mathbb{F}_2^9$ beschreiben, wenn wir beispielsweise vereinbaren, dass $x_i = 1$ bedeutet, dass wir Feld i anklicken und $x_i = 0$, dass wir Feld i nicht anklicken.

(i) Angenommen, die Anfangskonfiguration ist gegeben durch

$$b = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^\top$$

und die Strategie durch

$$x = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)^\top.$$

Bestimmen Sie einen Vektor $y \in \mathbb{F}_2^9$, der die Felder nach Ausführung der Strategie beschreibt.

(ii) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{F}_2^{9\times 9}$, so dass für jede Strategie $x \in \mathbb{F}_2^9$ der Vektor $y = Ax$ das Ergebnis nach der Strategie x angibt, das heißt, für alle $i \in \{1, \dots, 9\}$ ist

$$y_i = \begin{cases} 1, & x \text{ ändert den Zustand von Feld } i, \\ 0, & x \text{ ändert den Zustand von Feld } i \text{ nicht.} \end{cases}$$

(iii) Begründen Sie, dass zu einer beliebigen Anfangskonfiguration $b \in \mathbb{F}_2^9$ eine Strategie $x \in \mathbb{F}_2^9$ existiert, die das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst. Das heißt, durch die Strategie x werden genau die Felder von b „ausgeschaltet".

(iv) Lösen Sie $Ax = b$ für jede beliebige Ausgangskonfiguration $b \in \mathbb{F}_2^9$ und probieren Sie sie aus.

Aufgabe A.7.8: Rang einer Matrix

Berechnen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe A.7.9: Rang des Produkts, Rang und Inverse

Zeigen Sie

(i) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und weiter sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix, dann gilt $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(AB)$.

(ii) Elementare Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht.

(iii) Eine quadratische Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang besitzt, das heißt, wenn $\operatorname{rg}(B) = n$.

(iv) $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn B sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben lässt.

(v) $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn B^T invertierbar ist.

Aufgabe A.7.10: Elementarmatrizen

Man schreibe folgende Matrizen als Produkt von Elementarmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & -\imath 2 & \imath \\ 3 & 0 & \imath 2 \\ \imath & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Aufgabe A.7.11: Rang und Lösbarkeit

Wir betrachten die reellen linearen Gleichungssysteme $A_i x = b_i$ für $i = 1, 2$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Können Sie bereits ohne Rechnung vorab Aussagen über die Lösbarkeit, universelle oder eindeutige Lösbarkeit der Gleichungssysteme machen?

(ii) Bestimmen Sie $\operatorname{rg} A_i$ und $\operatorname{rg}(A_i, b_i)$ für $i = 1, 2$.

(iii) Untersuchen Sie jeweils, ob das Gleichungssystem lösbar, universell lösbar oder eindeutig lösbar ist.

(iv) Bestimmen Sie $\mathcal{L}(A_i, b_i) = \{\, x \mid A_i x = b_i \,\}$ für $i = 1, 2$.

Aufgabe A.7.12: Lösbarkeit und Lösungen

Wir betrachten die Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 \phantom{{}+x_3} + 5x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 6x_4 &= 6 \\ 2x_1 \phantom{{}+6x_2} + 6x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}\right\} \tag{A.3}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 9 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}\right\} \tag{A.4}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 &= 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}\right\} \tag{A.5}$$

Bearbeiten Sie für jedes der Gleichungssysteme die folgenden Aufgabenstellungen:

(i) Bestimmen Sie mit den Rangkriterien, ob das System lösbar beziehungsweise universell lösbar ist. Ist das System eindeutig lösbar?

(ii) Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraumes $\mathcal{L}_0$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

(iii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

A.8 Aufgaben zu Kapitel Skalarprodukte und Abstände

Die Mathematik ist mehr ein Tun als eine Lehre.
(Luitzen Egbertus Jan Brouwer)

Aufgabe A.8.1: Spur als Linearform

Zeigen Sie, dass die Spur eine Linearform auf $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe A.8.2: Bilinearformen und Skalarprodukte

Gegeben seien die Abbildungen

$$B_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} j x_j y_i,$$

$$B_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y_i,$$

$$B_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j y_i^2.$$

Prüfen Sie jeweils, ob B_1, B_2, B_3 eine Bilinearform oder sogar ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe A.8.3: Darstellung von Bilinearformen

(i) Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto x^\top A y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

eine Bilinearform ist.

(ii) Es sei umgekehrt $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $e_1, \ldots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $s(x, y) = \sum_{i,j=1}^n s(e_i, e_j) x_i y_j$.

(iii) Schließen Sie daraus nun die Existenz einer Matrix $M \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $s(x, y) = x^\top M y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe A.8.4: Bilinearformen und Basen

Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B : V \times V \to \mathbb{K}$ eine nicht ausgeartete Bilineaform. Weiter sei $\mathcal{B} = \{ v_1, \ldots, v_n \}$ ein *Orthonormalsystem* bezüglich B, das heißt,

$$B(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $\mathcal{B}$ ist eine Basis von V.

(ii) $\forall v \in V \forall i \in \{ 1, \ldots, n \} (B(v, v_i) = 0 \Rightarrow v = 0)$.

(iii) Für jedes $v \in V$ ist die Darstellung $v = \sum_{i=1}^n B(v, v_i) v_i$ eindeutig.

Aufgabe A.8.5: Bilinearformen und Linearformen

Die Matrixdarstellung einer Linearform $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ergibt sich mit einem Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ zu $F(x) = a^\top x$.

(i) Es seien F und G Linearformen auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $B(x, y) := F(x)G(y)$ eine Bilinearform definiert.

(ii) Es seien nun $n = 3$ und F durch $a_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie G durch $a_G = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie eine Matrix $M \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, so dass $B(x, y) = x^\top M y$.

Aufgabe A.8.6: Skalarprodukt über die Spur

Zeigen Sie: Durch $\langle A, B\rangle := \operatorname{Spur}\left(A^{\mathsf{T}} B\right)$ wird auf $M(n \times n, \mathbb{R})$ ein Skalarprodukt definiert (siehe auch Aufgabe A.6.19).

Aufgabe A.8.7: Projektionen und Skalarprodukt

Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \left(x - F(x) \in (\operatorname{Bild} F)^{\perp}\right) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n \left(\langle x, F(y)\rangle = \langle F(x), y\rangle\right).$$

Gilt das auch, wenn man $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$ ersetzt?

Aufgabe A.8.8: Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Zeigen Sie die Behauptungen zum Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Für linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ liefert das in Beispiel 8.2.9 (i) dargestellte Verfahren Vektoren $w_1, \dots, w_m$ mit

(i) $\|w_i\| = 1$, $i = 1, \dots, m$, bezüglich der induzierten Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$,

(ii) $\langle w_i, w_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Wenden Sie das Verfahren an, um die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

zu orthonormieren.

Aufgabe A.8.9: Orthogonale und unitäre Matrizen

(i) Zeigen Sie, dass orthogonale beziehungsweise unitäre Matrizen als Abbildungen auf dem $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{C}^n$ Längen und Winkel erhalten, das heißt, für $x, y \in \mathbb{R}^n$ beziehungsweise $x, y \in \mathbb{C}^n$ und eine orthogonale beziehungsweise unitäre Matrix A gilt bezüglich des Standardskalarprodukts und der dadurch induzierten Norm

$$\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle \text{ und } \|x\| = \|Ax\|.$$

(ii) Im Quantencomputing wird ein Qubit, die Überlagerung der klassischen Zustände eines Bits 0 und 1 - geschrieben als $|0\rangle$ und $|1\rangle$ - mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ dargestellt als

$$\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle.$$

Zu diesem Qubit gehört der Zustandsvektor $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass durch unitäre 2×2-Matrizen ein Zustandsvektor in einen Zustandsvektor überführt wird, unitäre Matrizen also Veränderungen von Qubits beschreiben.

Aufgabe A.8.10: Matrixnormen aus Vektornormen

Zeigen Sie, dass jede Norm $\|\cdot\|_a$ auf dem $\mathbb{R}^n$ durch $\|A\|_a := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}$ eine Norm auf $M(n\times n, \mathbb{R})$ *induziert*.

Aufgabe A.8.11: Winkel zwischen Vektoren

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung lässt sich auf einem Vektorraum V mit Skalarprodukt ein Winkel zwischen zwei Vektoren $x, y \in V$ definieren. Lösen Sie dafür den Betrag auf und unterscheiden Sie die Fälle, dass einer der Vektoren Null ist oder nicht. Sie erhalten daraus einen Wert in $[-1, 1]$, den Sie als trigonometrische Funktion des Winkels zwischen x und y auffassen können. Da wir bereits $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$ vereinbart haben, folgt die Wahl der trigonometrischen Funktion. Bestimmen Sie die Winkel zwischen

(i) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\pi\\ \sqrt{2}\\ 3\end{pmatrix}$.

Aufgabe A.8.12: Französische Eisenbahnmetrik

In Frankreich fuhren früher die meisten Züge über Paris. Wenn man also von einem Ort x zu einem Ort y wollte, reiste man direkt von x nach y, wenn beide auf einer Verbindung nach Paris lagen, oder man reiste von x nach Paris und dann von Paris nach y. Wir formulieren dies wie folgt um: Es seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass durch

$$\rho(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|, & x,y \text{ sind linear abhängig,} \\ \|x\| + \|y\|, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik gegeben ist.

Aufgabe A.8.13: Induzierte Metrik

(i) Es sei (M,N) ein normierter Raum, zeigen Sie, dass durch $d(x,y) := N(x-y)$ eine Metrik auf M gegeben ist, die durch N *induzierte Metrik*.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine Metrik an, die nicht durch eine Norm induziert wird.

Aufgabe A.8.14: Metrik gesucht

Es sei $M = \{A,B,C,D\}$ eine Menge. Vervollständigen Sie die unten stehende Tabelle für d so, dass $d : M \times M \to \mathbb{N}_0$ eine Metrik auf M definiert. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

d	A	B	C	D
A		2		3
B			1	
C				
D		1		

Aufgabe A.8.15: Hadamard-Matrizen und Hamming-Abstand

Wir betrachten die Matrizen aus Beispiel 8.1.16.

(i) Zeigen Sie für H_2 und H_4 die Behauptung, dass $HH^\top = H^\top H = nI$.

(ii) Ersetzen Sie in H_4 alle Einträge -1 durch 0 und berechnen Sie die Hamming-Abstände der Zeilen (oder Spalten) zueinander.

(iii) Die Zeilen der eben erstellten Matrix seien die zulässigen Codewörter. Sie erhalten in einer Übertragung den Vektor $(1\ 0\ 1\ 1)^{\mathsf{T}}$ übermittelt. Was tun Sie?

(iv) Eine Matrix H_8 erhalten Sie durch $H_8 = \begin{pmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{pmatrix}$. Ersetzen Sie wieder -1 durch 0 und betrachten Sie die Zeilen als zulässige Codewörter. Haben Sie bezüglich einer Übertragung der Gestalt $(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^{\mathsf{T}}$ nun andere Möglichkeiten? Wie ist es bei $(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)^{\mathsf{T}}$?

A.9 Aufgaben zu Kapitel Determinanten und das Eigenwertproblem

> Kein Mensch lernt denken, indem er die fertig geschriebenen Gedanken anderer liest, sondern dadurch, dass er selbst denkt.
>
> (Mihai Eminescu)

Aufgabe A.9.1: Linearität der Determinante

Zeigen Sie, dass für eine Matrix $(a_1, \dots, a_n) \in M(n \times n, \mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\begin{aligned}\det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + b, a_{i+1}, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ + \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n).\end{aligned}$$

Was bedeutet das zusammen mit Satz 9.1.5 (i), wenn Sie $\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ als Funktion der Zeilen der Matrix betrachten?

Aufgabe A.9.2: Eigenschaften der Determinante

(i) Zeigen Sie, dass $\det A = 0$, falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, n ungerade und A *schiefsymmetrisch* ist, das heißt, $A = -A^{\mathsf{T}}$.

(ii) Ist A invertierbar, so gilt $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

(iii) Es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, zeigen Sie (zum Beispiel durch vollständige Induktion), dass

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

gilt.

Aufgabe A.9.3

Zeigen Sie, dass für $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ $\det \lambda A = \lambda^n \det A$ gilt (Korollar 9.1.6 (iv)).

Aufgabe A.9.4: Spaltenumformungen

Zeigen Sie, dass man analog zu den Lemmata 7.2.1, 7.2.2 und 7.2.3 durch Multiplikation von rechts mit invertierbaren Matrizen entsprechende Spaltenoperationen an einer Matrix durchführen kann. Siehe auch Aufgabe A.6.13.

Aufgabe A.9.5: Determinante berechnen

Man berechne jeweils Rang und Determinante von

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Weiter bestimme man die Determinante von

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha & 3 & 2-\alpha \\ \alpha+2 & 2 & 8 & \alpha \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -\alpha & -1 & \alpha-5 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 9 & 14 & -8 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, \vartheta, \varphi, r \in \mathbb{R}$ gilt (man beachte die Eigenschaften von Sinus und Kosinus 3.7.21).

Aufgabe A.9.6: Determinaten über $\mathbb{F}_2$

Bestimmen Sie die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{F}_2)$.

Aufgabe A.9.7: Orthogonale Matrizen

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über orthogonale Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, siehe 8.2.9 (ii):

(i) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt bezeichnet.

(ii) $\det A \in \{ 1, -1 \}$.

(iii) Zeigen Sie, dass die orthogonalen Matrizen A mit $\det A = 1$ eine Untergruppe von $O(n)$ bilden, diese wird mit $SO(n)$ bezeichnet.

Aufgabe A.9.8: Multiplikation von Dreiecksmatrizen

Es seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ obere Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie, dass $A \cdot B$ ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix ist und bestimmen Sie die Hauptdiagonalelemente.

Aufgabe A.9.9: Ähnlichkeit

Es seien $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei Basen des $\mathbb{R}^n$.

(i) Zeigen Sie, dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ zueinander ähnlich sind.

(ii) Argumentieren Sie umgekehrt, dass zueinander ähnliche Matrizen stets Darstellungsmatrizen der selben linearen Abbildung bezüglich verschiedener Basen sind.

Aufgabe A.9.10

Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren von

$$A, B \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \; A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe A.9.11: Aussagen zu Eigenwerten

Zeigen Sie

(i) Ist $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ symmetrisch, so sind alle Eigenwerte von A reell.

(ii) $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann nicht invertierbar, wenn 0 ein Eigenwert von A ist.

(iii) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ invertierbar und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, dann ist $\lambda \neq 0$ und $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

(iv) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, dann ist für $m \in \mathbb{N}$ λ^m ein Eigenwert von A^m.

(v) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und gilt[a] $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$, dann hat A nur den Eigenwert Null.

(vi) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dann haben A und A^T das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte.

(vii) Es sei $g(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ ein beliebiges Polynom und $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $g(\lambda)$ ein Eigenwert der Matrix $g(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k$, wobei $A^0 := I$.

[a] A heißt dann *nilpotent*.

Aufgabe A.9.12: Produkte

Es seien $A, S \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und S invertierbar.

(i) Zeigen Sie, dass $B = S^{-1}AS$ und A das gleiche charakteristische Polynom besitzen.

(ii) Zeigen Sie, dass AS und SA das gleiche charakteristische Polynom besitzen.

Aufgabe A.9.13: Diagonalisierung

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A sowie seine Nullstellen.

(ii) Geben Sie für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge von $(A - \lambda I)x = 0$ an.

(iii) Gegegeben seien $M \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ Zeigen Sie: Gilt $\det(M - \lambda I) = 0$, so existiert $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit $Mx = \lambda x$.

(iv) Es sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ durch $x \mapsto Ax$ gegeben. Finden Sie mit Hilfe der obigen Teilaufgaben eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe A.9.14: Fibonacci-Folge

Wir betrachten erneut die Fibonacci-Folge, siehe Beispiel 3.1.4 (iii), mit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n \geq 2$.

(i) Bestimmen Sie $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$.

(ii) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

(iii) Bestimmen Sie A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Folgern Sie aus dem letzten Schritt, dass das n-te Glied der Fibonacci-Folge die Darstellung

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

besitzt.

Aufgabe A.9.15: Parameterabhängigkeit

Für $s, t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} 1+s & 1 \\ -s^2 + s(t-1) & t-s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gegeben. Für welche Werte von s und t ist $A(s,t)$ diagonalisierbar? Bestimmen Sie für diese Werte $S(s,t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $S^{-1}(s,t)A(s,t)S(s,t)$

Diagonalgestalt hat.

Aufgabe A.9.16

Es sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie Basen der Eigenräume von A.

(ii) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(iii) Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

Führen Sie die obigen Schritte auch für die folgenden Matrizen durch, falls möglich:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe A.9.17: Matrix und charakteristisches Polynom

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass $P_A(A) = 0$. Das bedeutet, wenn Sie in das charakteristische Polynom P_A als Variable die Matrix A einsetzen, ergibt sich die Nullmatrix.

Aufgabe A.9.18

Zeigen Sie

(i) Eine nilpotente[a] Matrix $0 \neq A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist nicht diagonalisierbar.

(ii) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, so sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal (bezüglich des Standardskalarprodukts).

[a] siehe Aufgabe A.9.11.

Aufgabe A.9.19: Ähnliche Matrizen

(i) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom und die gleiche Determinante besitzen.

(ii) Zeigen Sie, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf $M(n \times n, \mathbb{K})$ ist.

Aufgabe A.9.20: Invertierbare Matrizen

Die Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ werde durch $S \in M(n \times n, \mathbb{K})$ diagonalisiert. Zeigen Sie, dass auch A^{-1} durch S diagonalisiert wird.

Aufgabe A.9.21: Eigenwert 1 der Google-Matrix

Es sei $G = \left(g_{ij}\right) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix deren Spaltensummen alle 1 sind, das heißt

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \left(\sum_{i=1}^{n} g_{ij} = 1 \right).$$

Zeigen Sie, dass ein Eigenwert von G 1 ist.

Aufgabe A.9.22: Matrixpotenz

Es sei A eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$.

(i) Zeigen Sie, dass A^k diagonalisierbar ist und die Eigenwerte $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ besitzt.

(ii) Es seien nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Eigenwerte betragsmäßig der Größe nach sortiert und wir nehmen zusätzlich an, dass es einen betragsmäßig größten Eigenwert gibt:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| .$$

Es sei $q = q^{(0)} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots a_n v_n$ mit $a_1 \neq 0$ und $q^{(k)} = A q^{(k-1)}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $q^{(k)} = A^k q^{(0)}$ und weiter

$$q^{(k)} = a_1 \lambda_1 \left(v_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1} \right)^k v_i \right).$$

Erläutern Sie, warum dadurch ein Näherungsverfahren für den Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 gegeben ist.

A.10 Aufgaben zu Kapitel Stetige Funktionen

> Das Denken gehört zu den größten Vergnügungen der menschlichen Rasse. (Bertold Brecht)

Aufgabe A.10.1: Funktionsgrenzwerte

(i) Bestimmen Sie, für welche $a \in (0, +\infty)$ und $b \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-5} - \sqrt{ax+b} \right)$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

(ii) Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert:

(a) $\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3x} \right)$,

(b) $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$,

(c) $\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$,

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$,

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x}$,

(f) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

Aufgabe A.10.2: Weitere Funktionsgrenzwerte

Es seien $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Zeigen Sie, dass

(i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$,

(ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$,

(iii) $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

Für $x \in (0, 1)$ definieren wir $f(x)$ durch

$$\sin x = \frac{x(60 - 7x^2) + x^7 f(x)}{60 + 3x^2}.$$

(iv) Bestimmen Sie $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Aufgabe A.10.3: Spezielle monotone Funktionen

Zeigen Sie, dass für jede monoton wachsende Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ein *Fixpunkt* existiert, das heißt, ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Aufgabe A.10.4: ε-δ-Kriterium für Stetigkeit

Zeigen Sie mit Hilfe von Definition 10.2.1, dass

(i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ${}_1f(x) = \frac{1}{3}x$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist,

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$ überall stetig ist,

(iii) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = 5\,|x^2 - 2| + 3$ in $x_0 = 1$ stetig ist,

(iv) $f_4 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist,

(v) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ stetig ist,

(vi) $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_6(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ in $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

Aufgabe A.10.5: Prominente Unstetigkeit zweiter Art

Geben Sie Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in}$ an, so dass $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = 0$ und $\lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{x_k} \neq \lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{y_k}$ (siehe Beispiel 10.2.6 (iv)).

Aufgabe A.10.6: Stetigkeit spezieller zusammengesetzter Funktionen

Es seien f, g stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, f^+ und f^- auf I stetig sind.

Aufgabe A.10.7

Zeigen Sie: Ist $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $x \mapsto x \cdot g(x)$ in $x_0 = 0$ stetig.

Aufgabe A.10.8: Dirichlet-Funktion

(i) Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nirgendwo stetig ist.

(ii) Finden Sie alle Punkte $x \in [0,1]$, in denen $f : [0,1] \to [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1-x, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe A.10.9: Stetigkeit einer speziellen Funktion

Gegeben sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \wedge \operatorname{ggT}(p,q) = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist stetig in jedem $x_0 \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ und unstetig in jedem $x_0 \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Nutzen Sie etwa, dass beispielsweise für $r = \frac{p}{q}$ die durch $x_n = r + \frac{\sqrt{2}}{n}$ definierte Folge nicht in $\mathbb{Q}$ liegt und das *Archimedische Prinzip*:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \left(m \geq n \Rightarrow m \geq \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Aufgabe A.10.10: Existenz von a-Stellen

(i) Zeigen Sie, dass jedes Polynom ungeraden Grades mindestens eine (reelle) Nullstelle besitzt und schließen Sie daraus, dass jedes $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ mindestens einen reellen Eigenwert besitzt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_4(x+16) + x4^x - 6$, mindestens eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe A.10.11: Fixpunkte von Selbstabbildungen

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass es mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

Aufgabe A.10.12: Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a+2}, & x \leq 1, \\ x^2 + b, & x > 1 \end{cases}$$

in $x = 1$ stetig ist und $f(-1) = 1$ gilt.

Aufgabe A.10.13: Geeignet verschieben

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Geben Sie eine Konstante C an, so dass $g : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + C$ auf $[a, b]$ positiv ist.

Aufgabe A.10.14: Gleichmäßige Stetigkeit

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ eine Cauchy-Folge.

(i) Geben Sie ein Beispiel an, in dem $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ immer eine Cauchy-Folge ist, wenn f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe A.10.15: Approximation gleichmäßig stetiger Funktionen

Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Konstruieren Sie eine *Treppenfunktion*,das heißt, eine stückweise konstante Funktion auf $[0, 1]$, so dass gilt

$$\forall x \in [0, 1]\, (|f(x) - T(x)| < \varepsilon)\,.$$

Aufgabe A.10.16: Maximums- und Supremumsfunktion stetiger Funktionen

Es seien $f_1, f_2, \ldots$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

(i) Es sei $N \in \mathbb{N}$ fest. Zeigen Sie, dass

$$g(x) = \max\{ f_1(x), \dots, f_N(x) \}$$

eine auf I stetige Funktion ist.

(ii) Es sei für jedes feste $x \in I$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Wir setzen

$$g(x) = \sup\{ f_n(x) \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Nach Voraussetzung ist g auf I definiert. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass g nicht stetig sein muss.

Aufgabe A.10.17: Vollständigkeit

Es sei $C([a,b])$ die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$.

(i) Zeigen Sie, dass $C([a,b])$ mit der Supremumsnorm, Beispiel 8.2.6, einen normierten Raum bildet.

(ii) Ist $C([a,b])$ hinsichtlich der Supremumsnorm vollständig (im Sinne von Bemerkung 3.3.21 (ii))?

Aufgabe A.10.18: Gleichmäßige Konvergenz

Kann es eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$, stetiger Funktionen geben, die punktweise aber nicht gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert?

Aufgabe A.10.19: Funktionsgrenzwerte mit anderen Mitteln

Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

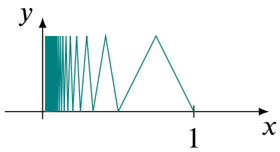
existiert, indem Sie auf die Darstellung von e^x als Potenzreihe zurückgreifen.

Aufgabe A.10.20: Gleichmäßige Stetigkeit

Zeigen Sie: Die Funktion f, die für $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ die Paare gleicher Seiten eines gleichschenkliges Dreieck beschreibt, das heißt

$$f(x) = \begin{cases} 2n(n+1)x - 2n, & x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{n(n+1)}\right] \wedge n \in \mathbb{N}, \\ -2n(n+1)x + 2n + 2, & x \in \left[\frac{2n+1}{n(n+1)}, \frac{1}{n}\right] \wedge n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ist definiert auf $(0, 1]$ und dort stetig aber nicht gleichmäßig stetig.



Aufgabe A.10.21: Stetigkeit auf metrischen Räumen

Die Definition der Stetigkeit setzt nur die Möglichkeit voraus, Abstände messen zu können. Formulieren Sie ausgehend von Definition 10.2.1 eine Definition von Stetigkeit für Funktionen $f : M_1 \to M_2$ mit metrischen Räumen (M_1, d_1) und (M_2, d_2).

A.11 Aufgaben zu Kapitel Differenzialrechnung

> Die Menschen, die den richtigen Weg gehen wollen, müssen auch von Irrwegen wissen. (Aristoteles)

Aufgabe A.11.1: Definition der Ableitung

Bestimmen Sie mit Hilfe der Definition die Ableitung von $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $(0, +\infty)$.

Aufgabe A.11.2: Ableitungsregeln

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich an.

(i) $f_1(x) = \log(\log(2x))$,

(ii) $f_2(x) = 2x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$,

(iii) $f_3(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$,

(iv) $f_4(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$,

(v) $f_5(x) = \frac{x^{\sqrt{x}}}{2^x}$,

(vi) $f_6(x) = x^5 5^x$,

(vii) $f_7(x) = \log\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)$,

(viii) $f_8(x) = (x \cos x)^x$,

(ix) $f_9(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin 2x}$.

Aufgabe A.11.3: Linearität der Ableitung

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $D : \mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}_{\leq n}[x]$, $D(P)(x) = P'(x)$, das heißt, D bildet ein Polynom P auf seine Ableitung ab.

(i) Zeigen Sie, dass D eine lineare Abbildung ist.

(ii) Geben Sie die Darstellungsmatrix von D bezüglich der Basis $\{1, x, \ldots, x^n\}$ an.

Aufgabe A.11.4: Eindeutigkeit von Lösungen

Zeigen Sie, dass es genau ein $x \in [0, +\infty)$ gibt mit $e^x + \sqrt{x} = 3$.

Aufgabe A.11.5: Mittelwertsatz

Zeigen Sie, dass für $x, y \in (-\infty, 0)$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ folgende Ungleichungen gelten.

(i) $|\cos e^x - \cos e^y| \leq |x - y|$.

(ii) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

Aufgabe A.11.6

Zeigen Sie

(i) $(1+x)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{x}{2}$ für $x \geq 0$.

(ii) $\log(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ für $x > 0$.

Aufgabe A.11.7: Identitätssatz

Zeigen Sie für $x \in (-1, 1)$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Aufgabe A.11.8: Ableitung der Umkehrfunktion geometrisch

Zeigen Sie die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion geometrisch: Den Graph der Umkehrfunktion erhält man als Spiegelung des Graphen der Funktion an der durch $x = y$ gegebenen ersten Winkelhalbierenden. Die Spiegelung der Tangente an den Graph der Funktion in einem festen Punkt liefert die Tangente an den Graph der Umkehrfunktion. Bestimmen Sie daraus die Gleichung der Tangente an den Graph der Umkehrfunktion.

Aufgabe A.11.9: Zwischenwertsatz für die Ableitung

Es sei I ein Intervall und $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist $f'(I)$ ein Intervall oder ein Punkt.

Aufgabe A.11.10: Ableitungen höherer Ordnung

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Untersuchen Sie, wie oft die durch

$$f(x) := \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion differenzierbar beziehungsweise stetig differenzierbar ist.

Aufgabe A.11.11: Taylorreihe

Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ die n-te Ableitung von f durch

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{4(x-n)}{(x+1)^{n+2}}$$

gegeben ist.

(ii) Stellen Sie eine zu f gehörige Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf.

(iii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche diese Potenzreihe absolut konvergiert.

Aufgabe A.11.12: Potenzreihenansatz

Gesucht ist eine Funktion y mit $y'' = y$ und $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ (Anfangswertproblem, vergleiche auch Definition 13.1.3). Lösen Sie dieses Problem durch einen Potenzreihenansatz, $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, und bestimmen Sie dafür a_k für $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe A.11.13: Hinreichendes $(n+1)$-te Ableitungskriterium

Zeigen Sie die Bemerkung 11.3.10.

Aufgabe A.11.14: Partielle Ableitungen

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^3 x_3^2$,

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cos x_2)$,

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2^2 x_1 + 3x_1^2 x_3^3 \\ x_3 x_1^2 + 2x_2 x_1 \end{pmatrix}$,

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^4}, & (x_1, x_2)^\top \neq (0,0)^\top, \\ 0, & (x_1, x_2)^\top = (0,0)^\top. \end{cases}$ Beachten Sie hier, dass die partielle Ableitung in $(0,0)^\top$ mit Hilfe der Definition bestimmt werden muss – warum ist das so?

Aufgabe A.11.15: Mehrdimensionaler Satz von Taylor

Geben Sie für die folgenden Funktionen die Näherungsdarstellung über das Taylorpolynom erster Ordnung aus (11.2) an.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_1^2 x_2)$, $x_0 = (1, 0)^\top$,

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \sin x_2^3 \ln\left(x_1^2 + 1\right) \\ \sqrt{1 + x_1^2 x_2^6} \end{pmatrix}$, $x_0 = \left(1, \sqrt[3]{\pi}\right)$.

A.12 Aufgaben zu Kapitel Integralrechnung

Quäl dich, du Sau! (Udo Bölts)

Aufgabe A.12.1: Stammfunktionen bestimmen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion und prüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie zeigen, dass es sich tatsächlich um Stammfunktionen handelt.

(i) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$,

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$,

(iii) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$,

(iv) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}\, dx$,

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2 - 12x + 13}\, dx$,

(vi) $\displaystyle\int x^2 \cos x\, dx$,

(vii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\, dx$,

(viii) $\displaystyle\int \sin(2x) \cos(4x)\, dx$,

(ix) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln^2 x}}\, dx$,

(x) $\displaystyle\int \ln^2 x \, dx$,

(xi) $\displaystyle\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$ für $r > 0$.

Aufgabe A.12.2: Partialbruchzerlegung

Führen Sie für die folgenden rationalen Funktionen eine reelle Partialbruchzerlegung durch und bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion.

(i) $\dfrac{1}{x^4 - 1}$,

(ii) $\dfrac{x^5 + 1}{x^4 + x^2}$,

(iii) $\dfrac{x + 2}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$,

(iv) $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

Aufgabe A.12.3: Elementar integrierbare Funktionen

Die folgenden Integrale können durch Substitution auf Integrale rationaler Funktionen zurückgeführt werden. Finden Sie geeignete Substitutionen und bestimmen Sie die jeweilige Stammfunktion.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} \, dx$,

(ii) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{2x+1}}{4x^2 + x + 1}$,

(iii) $\displaystyle\int \tan^2 x \, dx$,

(iv) $\displaystyle\int \frac{1}{2 - e^{-x}} \, dx$,

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{2\cos^2 x + 3\sin^2 x} \, dx$.

Aufgabe A.12.4

(i) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{A.6}$$

Zeigen Sie, dass f keine Stammfunktion besitzt.

(ii) Geben Sie eine in mindestens einem Punkt unstetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

(iii) Was können Sie daraus allgemein für die Unstetigkeitsstellen differenzierbarer Funktionen vermuten?

Aufgabe A.12.5: Zwischensummen

Es seien $a, b \in (0, +\infty)$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

(i) Zeigen Sie, dass durch $x_j = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{n}}$, $j = 0, \dots, n$, eine ausgezeichnete Partitionenfolge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a, b]$ gegeben ist.

(ii) Durch $\xi_j = x_j$ für $j = 1, \dots, n$ sind Zwischenstellen dieser Partition gegeben. Bestimmen Sie die zugehörige Riemannsche Zwischensumme.

(iii) Bestimmen Sie über die Zwischensumme aus (ii) das Integral $\int_a^b \frac{1}{x} dx$.

Aufgabe A.12.6: Riemannsche Zwischensummen

Arbeiten Sie die Beweisidee von Satz 12.3.13 detailiert aus.

Aufgabe A.12.7: Vektorraum der integrierbaren Funktionen

Es sei I ein Intervall und $\mathcal{R}(I)$ die Menge der auf I Riemann-integrierbaren Funktionen.

(i) Zeigen Sie $\mathcal{R}(I)$ bildet einen reellen Vektorraum, einen Unterraum von $\mathbb{R}^I$. Von welcher Dimension ist $\mathcal{R}(I)$?

(ii) Zeigen Sie: Durch $F : \mathcal{R}(I) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_I f(x)\, dx$, ist eine Linearform gegeben.

(iii) Es sei $L^2(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$ die Menge der Funktionen $f \in \mathcal{R}(I)$ für die $\int_I |f(x)|^2\, dx$ existiert[a]. Zeigen Sie, dass für $f, g \in L^2(I)$ durch $\langle f, g\rangle := \int_I f(x) \cdot g(x)\, dx$ ein Skalarprodukt auf $L^2(I)$ definiert ist.

(iv) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt auf $C(I)$ eine Norm induziert, auf $\mathcal{R}(I)$ aber nicht.

(v) Ist der Vektorraum $C(I)$ bezüglich der induzierten Norm vollständig (vergleiche Aufgabe A.10.17)?

[a] im Allgemeinen versteht man darunter sogar eine noch größere Klasse von Funktionen, wenn man einen weitergehenden Integralbegriff zur Verfügung hat. In dem Sinne ist die Inklusion hier als Teil unserer Definition für diese Aufgabe zu lesen.

Aufgabe A.12.8: Eigenschaften des Riemann-Integrals

(i) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} + 2\sqrt{3x+1} + \arctan x\, dx.$

(ii) Bestimmen Sie für die Funktion f aus (A.6) das Integral $\int_{-\pi}^{2} f(x)\, dx$. Ergibt sich hieraus ein Widerspruch zu dem obigen Ergebnis oder den Hauptsätzen?

Aufgabe A.12.9: Hauptsätze der Differenzial- und Integralrechnung

(i) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die *Taylorsche Formel* mit dem Integral-Restglied: Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in C^n(I)$, dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt.$$

(ii) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin^2 x}\, dx,$

(b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln^2 x}}\, dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^2}\, dx,$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3 + x}\, dx,$

(e) $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \, dx.$

(iii) Berechnen Sie für ein paar der bereits betrachteten unbestimmten Integrale das bestimmte Integral über selbst gewählte, geeignete Intervalle. Betrachten Sie insbesondere auch solche Integrale, die über die Substitutionsregel bestimmt wurden, und berechnen Sie diese auch so, dass Sie im Verfahren auch die Intervallgrenzen substituieren.

Aufgabe A.12.10: Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig sowie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare, nicht-negative Funktion. Zeigen Sie, dass dann ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx$$

existiert.

Aufgabe A.12.11: Orthogonale Polynome

Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $p_k(x) := x^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, seien die Monome.

(i) Bestimmen Sie aus den Monomen vom Grad 0 bis 5 mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens 8.2.9 (i) die *orthogonalen Polynome* P_0 bis P_5 bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe A.12.7.

(ii) Betrachten Sie die kanonische Abbildung von $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$ in den $\mathbb{R}^6$. Bilden die Bilder von $P_0, \dots, P_5$ auch dort eine Orthonormalbasis bezüglich des kanonischen Skalarprodukts?

Aufgabe A.12.12: Orthogonalitätsrelationen

Zeigen Sie

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx)\, dx = 0$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } n = m = 0, \\ \pi & \text{für } n = m, n \geq 1, \\ 0 & \text{für } n \neq m. \end{cases}$

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{für } n = m, n \geq 1, \\ 0 & \text{für } n \neq m \text{ oder } n = m = 0. \end{cases}$

Aufgabe A.12.13: Orthonormalsystem

Bestimmen Sie Vorfaktoren a_k und b_k beziehungsweise c_k, so dass $\{\, a_k \cos(kx) \mid k \in \mathbb{N}_0 \,\} \cup \{\, b_k \sin(kx) \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ beziehungsweise $\{\, c_k e^{\imath kx} \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ ein Orthonormalsystem bilden bezüglich des in Aufgabe A.12.7 genannten Skalarprodukts und der dadurch induzierten Norm. Das heißt, es soll gelten $\langle a_k \cos(kx), a_\ell \cos(\ell x)\rangle = \delta_{k\ell}$, $\langle b_k \sin(k), b_\ell \sin(\ell x)\rangle = \delta_{k\ell}$ und $\langle a_k \cos(kx), b_k \sin(\ell x)\rangle = 0$ beziehungsweise $\left\langle c_k e^{\imath kx}, c_\ell e^{\imath \ell x}\right\rangle = \delta_{k\ell}$. Man beachte dabei Aufgabe A.12.12.

Aufgabe A.12.14: Laufzeitanalyse Quicksort

In Anhang B.1.2 ist der Quicksort-Sortieralgorithmus dargestellt. Wir nehmen im Folgenden an, dass eine Liste mit n Elementen paarweise verschiedenen Elementen gegeben ist.

(i) Argumentieren Sie, dass im günstigsten Fall (die entstehenden Teillisten sind immer (fast) gleich groß) die Laufzeit $\mathcal{O}(n \log n)$ ist (man wähle dafür $n = 2^k$ wie in Aufgabe A.3.34).

(ii) Leiten Sie her, dass die Laufzeit im ungünstigsten Fall (eine der entstehenden Teillisten ist in jedem Schritt leer) $\mathcal{O}(n^2)$ ist.

(iii) Es sei $H_k := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ die k-te *harmonische Zahl*. Zeigen Sie $\ln k \leq H_k \leq 1 + \ln k$.

(iv) Im durchschnittlichen Fall werde für $n > 1$ im ersten Schritt das der Größe nach k-te ausgewählt. Für den Rechenaufwand betrachten wir den Durchschnitt über alle möglichen Werte von k. Es ist dann

$$t(n) = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(t(k-1) + t(n-k)\right).$$

Erläutern Sie diese Formel.

(v) Vereinfachen Sie die Formel (betrachten Sie die Werte in der Klammer).

(vi) Stellen Sie damit eine Rekursionsformel für $t(n+1)$ auf und schätzen Sie diese mit Hilfe der harmonischen Zahlen ab.

(vii) Zeigen Sie, dass die durchschnittliche Laufzeit $\mathcal{O}(n \log n)$ ist.

Aufgabe A.12.15: Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$,

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2} dx$,

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$ – betrachten Sie dabei zunächst das Integral nur auf $[0,1]$.

Aufgabe A.12.16: Gamma-Funktion

In (12.6) wurde die Gamma-Funktion für $x > 0$ über ein uneigentliches Integral definiert.

(i) Zeigen Sie, dass das Integral für alle $x > 0$ absolut konvergiert. Betrachten Sie dazu die Teile über $(0,1]$ und $[1,+\infty)$ getrennt und schätzen Sie dort den Integrand ab.

(ii) Zeigen Sie, dass für $x > 0$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und insbesondere für $n \in \mathbb{N}$ $\Gamma(n+1) = n!$ gilt.

Aufgabe A.12.17: Cauchy-Hauptwerte

Bestimmen Sie die Cauchy-Hauptwerte der folgenden uneigentlichen Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$,

(ii) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$,

(iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x(x+x-x^2)} dx.$

Aufgabe A.12.18: Integralkriterium

Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die folgenden Reihen für $\alpha > 1$ konvergieren und für $\alpha \leq 1$ divergieren.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$,

(ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$.

Aufgabe A.12.19: Verhalten von Funktionen

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existiere.

(i) Zeigen Sie, dass dann $\lim_{c\to+\infty} \int_{\pm x}^{\pm\infty} f(x)\,dx = 0$ gilt.

(ii) Geben Sie ein Beispiel einer solchen Funktion $f(x)$ an, für die nicht $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ gilt.

Aufgabe A.12.20: Fouriertransformierte

Bestimmen Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen, dabei ist jeweils $a > 0$.

(i) $f_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a, \\ 0, & |t| > a. \end{cases}$

(ii) $f_2(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

(iii) $f_3(t) = e^{-a|t|}$.

A.13 Aufgaben zu Kapitel Elementare Differenzialgleichungen

Da ist das Problem, suche die Lösung; Du kannst Sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus. (David Hilbert)

Aufgabe A.13.1

Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen und geben Sie ihren (maximalen) Definitionsbereich an.

(i) $y' = \frac{2y}{\sqrt{1-x^2}}$,

(ii) $y' = -\frac{3}{x}y + x$,

(iii) $y' = \cos^2 x \cos^2(2y)$.

Aufgabe A.13.2

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

(i) $y' + y \tan x = \sin(2x)$, $y(0) = 1$,

(ii) $y' = \frac{\sin y}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$,

(iii) $(1 + x^2)y'' = 1 - 2xy'$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$,

(iv) $y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$, $y(2) = 4$,

(v) $y' = \arctan\left(e^{y-\cos y} \sin y\right) e^{\sin x}$, $y(0) = 0$,

(vi) $xy' - 4y = x^2y^3$, $y(1) = 1$,

(vii) $y' = 2y \cos x \sin x + e^{-\cos^2 x}$, $y(0) = 3$,

(viii) $y' = (1 + x^2)y^2$, $y(0) = \frac{3}{4}$.

Anhang B

Ergänzungen

In diesem Kapitel werden ergänzende Themen dargestellt, die den Rahmen dessen sprengen würden, was in der Vorlesung darstellbar ist.

B.1 Sortieralgorithmen

> Alle Ungenauigkeiten in diesem Register lassen sich dadurch erklären, dass es mit Hilfe eines Computers sortiert wurde.
>
> (Donald Ervin Knuth)

Ausgangsproblem: Eine gegebene Liste von Elementen soll der Größe nach sortiert werden. Eine Grundidee von Sortieralgorithmen ist dabei die Methode „Teile und herrsche“: Das Problem wird in Teilprobleme möglichst gleichen Typs zerlegt. Die Teilprobleme werden dann mit der gleichen Methode so lange weiter zerlegt, bis die resultierenden Teilprobleme „klein genug“ sind. Anschließend setzt man mit den Lösungen der Teilprobleme die Lösung des ursprünglichen Problems zusammen.

Mergesort B.1.1. Der Mergesort-Algorithmus ist durch folgenden Pseudocode gegeben:

```
MERGESORT(P, Q, A)
                // sortiere Einträge der Liste A zwischen den Indizes P und Q
if P < Q                              // triviale Liste muss nicht sortiert werden
     M := (P + Q) div 2                                  // Division mit Rest
     MERGESORT(P, M, A)                                   // Verfahren auf eine
     MERGESORT(M + 1, Q, A)                 // und die andere Hälfte anwenden
     MERGE(P, M, Q, A)                          // Führe das Ergebnis zusammen
```

Dabei ist MERGE gegeben durch

```
MERGE(U, L, O, A)
                    // Unterer Index, mittlerer Index, oberer Index, Liste
H := U                                              // Initialisierung
I := U
J := L + 1
B := []                                             // leere Liste
while H ≤ L and J ≤ O                               // H durchläuft untere,
                                       // J obere Hälfte der Indizes
    if A[H] ≤ A[J]       // wenn Element mit Index H (untere Hälfte)
                  // kleiner als das Element mit Index J (obere Hälfte) ist
        B[I] := A[H]     // setze unteres Element als Element I der
        neuen Liste
        H := H + 1
    else
        B[I] := A[J]                                // sonst das obere
        J := J + 1
    I := I + 1                                      // erhöhe I
if H > L                              // Abbruchbedingung H > L:
// Alle Elemente aus der unteren Hälfte und die mit den Indizes L + 1
bis J − 1
                           // aus der oberen sind bereits in B sortiert
    for K := J to O
        B[I] := A[K]
        I := I + 1
else                                  // Abbruchbedingung J > O:
  // Die Elemente mit den Indizes U bis H − 1 aus der unteren Hälfte
// der Indizes und alle Elemente aus der oberen Hälfte        // sind
bereits in B sortiert
    for K := H to L
        B[I] := A[K]
        I := I + 1
for K := U to O                       // Schreibe sortierte Liste in A
    A[K] := B[K]
```

Aufruf ist für eine Liste A mit N Einträgen dann MERGESORT(1,N,A). Die sortierte Liste ist anschließend in A. Eine Laufzeitbetrachtung darf in Aufgabe A.3.34 durchgeführt werden.

Quicksort B.1.2. Gegeben sei wieder eine Liste L (endliche Folge) mit n Elementen. Das Quicksort-Verfahren funktioniert wie folgt:

(i) Brich ab, wenn L nicht mindestens 2 Elemente enthält.

(ii) Wähle ein beliebiges[1] Element x der Liste.

[1] es gibt auch Varianten, in denen x nicht zufällig gewählt wird. Das Auswahlverfahren für x kann die Laufzeit beeinflussen.

(iii) Teile die Liste in drei Listen auf: Die Liste L_1, die alle Elemente von L enthält, die kleiner als x sind, die Liste L_2 mit Elementen von L, die gleich x sind, und die Liste L_3, deren Elemente alle größer als x sind.

(iv) Wende das Verfahren auf L_1 und L_2 an.

B.2 Quaternionen

> Man kann Mathematik nicht einfach als etwas Abstraktes betrachten, das nur für sich allein existiert. (Hannah Fry)

Die Idee bei der Konstruktion der komplexen Zahlen ein Element $\imath$ mit $\imath^2 = -1$ hinzuzufügen wird bei Quaternionen verallgemeinert (die ursprüngliche Konstruktion von Hamilton[2] bestand darin, den Quotien von zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ zu definieren): Die Menge der *Quaternionen*

$$\mathcal{Q} := \{\, \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \,\}$$

mit „normaler Addition und Multiplikation“ und

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

bilden dann einen *Schiefkörper*. Ein Schiefkörper ist ein Ring $(\mathcal{Q}, +, \cdot)$, in dem $(\mathcal{Q} \setminus \{\, 0 \,\}, \cdot)$ eine Gruppe ist (anders gesagt ein Körper, in dem die Multiplikation nicht notwendigerweise kommutativ ist). Weiter können die Quaternionen als vierdimensionaler reeller Vektorraum aufgefasst werden mit der Basis 1, i, j, k.

Auf der Menge der Quaternionen lässt sich wie in den komplexen Zahlen ein Betrag definieren (vergleiche auch mit der Definition der kanonischen Norm im $\mathbb{R}^4$, Definition 8.2.1):

$$|\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$$

Die Quaternionen der Länge 1 werden etwa in der Programmierung von Computerspielen verwendet, um Rotationen im Raum darzustellen (siehe etwa [10] und vergleiche Aufgaben A.6.17 und A.6.16). Die Hintereinanderausführung von mehreren Rotationen lässt sich dann einfach als Produkt der beteiligten Quaternionen darstellen und realisieren. Dies hat (informatische) Vorteile gegenüber anderen Formen der Darstellung und Umsetzung, für die auf die genannte Literatur verwiesen wird.

[2]William Rowan Hamilton, 1805 - 1865, irischer Mathematiker.

Um zusätzlich zu einer Rotation eine Translation bei einer Bewegung zu berücksichtigen, können sogenannte *duale Quaternionen* eingeführt. Hierbei wird jede Komponente α, β, γ und δ um eine duale Komponente zu $\hat{\alpha} = \alpha + \varepsilon\alpha'$ erweitert, wobei ε die *duale Einheit* mit $\varepsilon^2 = 0$ ist.

B.3 Matrixdarstellungen

> Mathematik ist die Kunst, zu vereinfachen.
>
> (Hélène Esnault)

Darstellungen mit Hilfe von Matrizen treten an vielen weiteren Stellen auf. Wir betrachten exemplarisch

Beispiel B.3.1 (Schnelle Fouriertransformation)**.** Die Formel (4.1) lässt sich mit Hilfe der N-ten Einheitswurzeln beziehungsweise konkret der ersten nichttrivialen $w = e^{\imath \frac{2\pi}{N}}$ wie folgt schreiben. Es gilt genau dann

$$a_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k e^{\imath 2\pi \frac{jk}{N}} \text{ für } j = 0, \dots, N-1,$$

wenn

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ 1 & w^3 & w^6 & \dots & w^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & w^{(N-1)} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}}_{=:F_N} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_N \end{pmatrix}.$$

Die Matrix F_N bezeichnet man als *Fouriermatrix*, sie ist symmetrisch ($F_N = F_N^\top$), aber nicht hermitesch (dazu müsste $F_N^\top = \overline{F_N}$ sein, siehe 8.1.15). Weiter ist $\frac{1}{\sqrt{N}} F_N$ unitär, siehe auch Aufgabe A.4.3 und Beispiel 8.2.9 (iii). Daran sieht man auch, dass der Vorfaktor $\frac{1}{N}$ daher stammt, dass er von F_N und ihrer Inversen auf nur eine Matrix geschoben wurde. Für die Betrachtungen hinsichtlich des Rechenaufwandes ist der Faktor aber nicht relevant. Die Reduktion des Aufwands durch die schnelle Fouriertransformation, siehe 4.2.1, wenn $N = 2n$ ist, sieht man in der Matrixdarstellung bereits daran, dass die Matrix F_N, die keine Nullen enthält, durch Matrizen mit vielen Nullen ersetzt wird. Die konkrete Darstellung der Sortierung in Elemente mit geraden und ungeraden Indizes,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \vdots \\ \hat{a}_2 n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_4 \\ \vdots \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \vdots \\ \hat{a}'_n \\ \hat{a}''_1 \\ \vdots \\ \hat{a}''_n \end{pmatrix}$$

erhält man über Elementarmatrizen U_{ik}, siehe Lemma 7.2.1. Die Fouriertransformation der Vektoren $(a'_1, \dots, a'_n)^\top$ und $(a''_1, \dots, a''_n)^\top$ erfolgt dann wie oben mit $F_{\frac{N}{2}} = F_n$ und die anschließende Zusammenführung der transformierten Größen zu den gesuchten a_k lässt sich dann wie folgt realisieren:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & w & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & w^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & w^{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & -w & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & -w^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -w^{n-1} \end{pmatrix}}_{=:M} \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \\ a''_1 \\ \vdots \\ an'' \end{pmatrix}.$$

Kürzer und übersichtlicher ist die Darstellung, wenn man $M = \begin{pmatrix} I_n & D_n \\ I_n & -D_n \end{pmatrix}$ schreibt, wobei I_n die n-dimensionale Einheitsmatrix und D_n die Diagonalmatrix mit den Einträgen 1, w, w^2, ..., w^{n-1} auf der Hauptdiagonalen ist. Insgesamt haben wir also eine Darstellung der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} = \frac{1}{2n} \begin{pmatrix} I_n & D_n \\ I_n & -D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Zeilen-} \\ \text{permutationen} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{2n} \end{pmatrix}.$$

Als nächsten Schritt der schnellen Fouriertransformation würde man nun die Einträge F_n in der mittleren Matrix entsprechend darstellen:

$$\begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & D & & \\ I & -D & & \\ & & I & D \\ & & I & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & & & \\ & F & & \\ & & F & \\ & & & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Zeilen-} \\ \text{permutationen} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $F = F_{\frac{n}{2}}$ und die Potenzen in D gehören zur n-ten Einheitswurzel aus F_n, in den freien Bereichen stehen Nullen.

Beispiel B.3.2 (Maschinelles Lernen)**.** Wir betrachten ein künstliches neuronales Netz. Im (beinahe) einfachsten Fall betrachten wir ein Neuron, dass n Eingangssignale $x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathsf{T}}$ empfängt und daraus ein Ausgangssignal berechnet. Dazu werden die Eingangssignale gewichtet in eine Funktion gegeben, das heißt, das Ausgangssignal bestimmt sich aus $f\left(\sum_{k=1}^{n} w_k x_k\right)$. Die Anforderungen an f hängen davon ab, was man noch untersuchen können will. Beispielsweise ist Monotonie eine sinnvolle Forderung, um mit einem stärkeren Eingangssignal ein stärkeres (oder schwächeres) Ausganssignal zu bekommen. Differenzierbarkeit würde man fordern, um die Gewichte über ein Gradientenverfahren anpassen zu können. Die Anpassung der Gewichte $w_1, \dots, w_n$, so dass bei einem festen Eingangssignal das gewünschte Ausgangssignal herauskommt, wird als „Lernen" bezeichnet. Will man etwa eine künstliche Intelligenz beim Helloween-Klassiker „Heavy Metal (Is The Law)" den Publikumsteil mitsingen lassen, wären geeignete Eingangssignale etwa x_1 ob „Heavy Metal" gesungen wurde, x_2 in welcher Tonlage, x_3 in welcher Geschwindigkeit, x_4 eine Rückkopplung, wie oft man welchen Teil bereits ausgegeben hat, und so weiter. Je nach Eingangssignal ist dann das Ausgangssignal „Hey!", „Heavy Metal" oder gar nichts. „Singt" das neuronale Netz an den falschen Stellen mit, müssen eventuell die Gewichte angepasst werden. Im allgemeinen

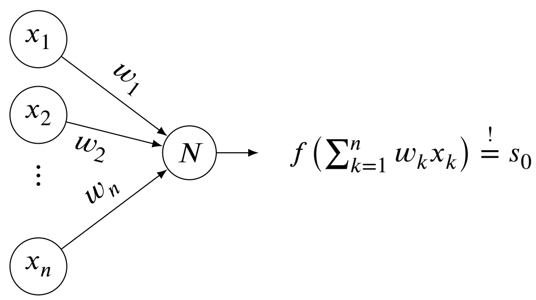


Abbildung B.1: Ein lernendes Neuron in einem künstlichen neuronalen Netz.

hat man nicht nur ein Neuron, das die Eingangssignale verarbeitet, sondern m Neuronen und entsprechend nicht nur einen Vektor $(w_1, \dots, w_n)$ von Gewichten, sondern eine Matrix

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ w_{m1} & w_{m2} & \dots & w_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die j-te Ausgabe wird dann von einer Funktion f_j bestimmt, deren Argument die j-te Komponente von $W \cdot x$ ist.

Beispiel B.3.3 (Computergrafik)**.** Bilder können als Matrizen $(a_{ij}) \in M(m \times$

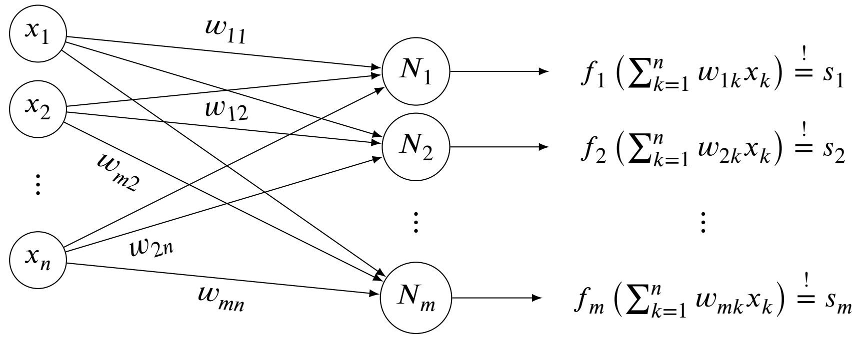


Abbildung B.2: m Neuronen in einem künstlichen neuronalen Netz mit n Eingangssignalen.

$n, \mathbb{N})$ dargestellt werden, bei denen der Eintrag a_{ij} etwa einen Zahlenwert für die Graustufe des Pixels (i, j) darstellt. Viele Filter lassen sich dann als Faltung darstellen (vergleiche auch (4.3) und siehe [22]):

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} g_{i-k,\, j-\ell},$$

wobei man hier fordert, dass g in den Indizes translationsinvariant ist. Um hier eine lineare Abbildung ohne den Umweg über das hinter dieser Formel stehende diskretisierte Integral zu sehen, identifiziert man die $m \times n$-Matrizen der Bilder mit Vektoren im $\mathbb{R}^{mn}$, etwa $\left(b_{ij}\right) \mapsto \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{(n-1)i+j} \\ \vdots\ b_{nm} \end{pmatrix}$, die Matrix G wird dann mit einem Vektor $A \in \mathbb{R}^{mn}$ multipliziert und die obigen Gleichung wird im Sinne der Regel „Zeile mal Spalte“ interpretiert, wobei A den Spaltenvektor liefert:

$$b_{(n-1)i+j} = \sum_{r=1}^{n+m} \tilde{g}_{(n-1)i+j,\, r} a_r$$

Damit ist $G \in M(mn \times (m+n))$. Die Einträge von G wiederholen sich und sind durch die Gleichungen festgelegt:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \sum_{r=1}^{n+m} \tilde{g}_{1r} a_r = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} a_{(n-1)k+\ell}\, g_{1-k,\, 1-\ell} \\
b_2 &= \sum_{r=1}^{n+m} \tilde{g}_{2r} a_r = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} a_{(n-1)k+\ell}\, g_{2-k,\, 1-\ell} \\
\vdots & \quad\ \vdots \\
b_n m &= \sum_{r=1}^{n+m} \tilde{g}_{nm,\, r} a_r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} a_{(n-1)k+\ell}\, g_{m-k,\, n-\ell}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$G = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0,-1} & g_{0,-2} & \cdots & g_{0,1-n} & g_{-1,0} & \cdots & g_{1-m,1-n} \\ g_{10} & g_{1,-1} & g_{1,-2} & \cdots & g_{1,1-n} & g_{0,0} & \cdots & g_{2-m,1-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m-1,n-1} & g_{m-1,n-2} & g_{m-1,n-3} & \cdots & g_{m-1,0} & g_{m-2,n-1} & \cdots & g_{0,0} \end{pmatrix}$$

B.4 Hauptachsentransformation

> Ich mag es, die imaginären Grenzen zu überschreiten, welche die Menschen zwischen verschiedenen Bereichen ziehen - es ist sehr erfrischend. (Maryam Mirzakhani)

Neben der Frage nach einer Basis bezüglich der eine gegebene lineare Abbildung eine möglichst einfach Darstellungsmatrix besitzt, spielt das Auffinden möglichst geeigneter Basen über die Eigenwerte und Eigenvektoren auch in anderen Situationen eine Rolle. Klassisch-geometrisch ist die Frage nach einer möglichst einfachen Darstellung einer quadratischen Gleichung in n Variablen durch Wahl eines geeigneten Koordinatensystems.

Eine Anwendung im Bereich der Datenanalyse ist die *Hauptkomponentenanalyse* (siehe zum Beispiel [2]), die etwa in den Bereichen Künstliche Intelligenz und Data Science verwendet wird, um große Datenmengen sinnvoller beschreiben und ggf. die zu betrachtenden Dimensionen reduzieren zu können. Letzteres wird auch als Faktoranalyse bezeichnet. Beispielsweise sind für Fallversuche im Vakuum weder Farbe noch Form eines Objektes relevant und könnten als Informationen gestrichen werden. Für die Hauptkomponentenanalyse stochastischer Daten, die man typischerweise erwarten muss und die wir als Vektoren auffassen, wird die sogenannte Kovarianzmatrix betrachtet. Das Verfahren selbst ist dann völlig analog zum im Folgenden dargestellten geometrisch-anschaulichen Beispiel, eine Darstellung findet man zum Beispiel in [23].

Wie betrachten zunächst die allgemeine Situation und das allgemeine Vorgehen. Gegeben ist eine Gleichung der Form

$$x^\top Ax + b^\top x + c = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c = 0.$$

Dabei kann $A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ als symmetrisch angenommen werden und es sind $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Liegt $b \in \operatorname{Bild} A$, dann kann durch eine Translation $x \mapsto x + x_0\ b$ in der Gleichung eliminiert werden, andernfalls kann c eliminiert werden: Im ersten Fall wählt man x_0 als Lösung von $2Ax = -b$, im zweiten gibt es ein $\tilde{x} \in \operatorname{Ker} A$ mit $b^\top\tilde{x} \neq 0$ und man wählt $x_0 = -\frac{c}{b^\top\tilde{x}}\tilde{x}$. Dass dieses Vorgehen zu den entsprechenden Resultaten führt, rechnet man leicht selbst nach. Wir werden im Folgenden diese Unterscheidung erst in einem späteren Schritt durchführen. Der zweite Fall ist für die Reduzierung von Dimensionen interessant, da aus einem nichttrivialen Kern folgt, dass die Matrix mindestens einen Eigenwert Null hat. In Richtung eines dazugehörigen Eigenvektors treten keine Informationen auf, in einer Basis aus Eigenvektoren ließe sich die dazugehörige Dimension einsparen.

Zunächst werden die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von A bestimmt sowie ggf. orthonormiert, da A symmetrisch ist, geht das immer. Es sei nun B die orthogonale Matrix, deren Spalten die orthonormierten Eigenvektoren von A sind, dann treten nach der Substitution von $x = By$ in der Gleichung keine gemischten Glieder mehr auf, sie hat die Form

$$y^\top Dy + b^\top By + c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k y_k + c = 0,$$

wobei D die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten λ_1 bis λ_n auf der Hauptdiagonalen ist. Die linearen Terme kann man nun durch quadratische Ergänzung im Fall $\lambda_i \neq 0$ durch Substitution eliminieren:

$$\lambda_i y_i^2 + \tilde{b}_i y_i = \lambda_i \left(y_i + \frac{\tilde{b}_i}{2\lambda_i} \right)^2 - \frac{\tilde{b}_i^2}{4\lambda_i^2} = \lambda_i \tilde{y}_i^2 - \frac{\tilde{b}_i^2}{4\lambda_i^2}.$$

Der konstante Term wird dann zu c hinzugefügt. Dass beim Eigenwert Null nur ein Summand $\tilde{b}_{r+1} y_{r+1}$ übrig bleiben muss, erreicht man durch Wahl einer geeigneten Basis zu diesem Eigenwert.

Abschließend kann man durch eine Skalierung mit $\sqrt{\lambda_i}$ beziehungsweise $\sqrt{-\lambda_i}$ für die von Null verschiedenen Eigenwerte die sogenannte Normalform erreichen, es können dann drei Fälle eintreten:

$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 = 0, \tag{B.1}$$
$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 = 1, \tag{B.2}$$
$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 = y_{r+1}. \tag{B.3}$$

Quadratische Kurven, $n = 2$ **B.4.1.**

$x_1^2 + x_2^2 = 0$	Punkt
$x_1^2 - x_2^2 = 0$	Geradenpaar mit Schnittpunkt
$x_1^2 = 0$	Gerade (Doppelgerade)
$x_1^2 + x_2^2 = 1$	Kreis, Ellipse
$x_1^2 - x_2^2 = 1$	Hyperbel (-paar)
$-x_1^2 - x_2^2 = 1$	leere Menge
$x_1^2 = 1$	paralleles Geradenpaar
$-x_1^2 = 1$	leere Menge
$x_1^2 = x_2$	Parabel

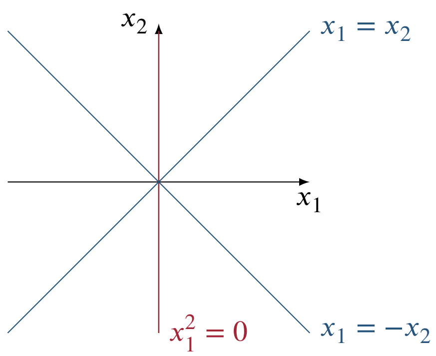


Abbildung B.3: Doppelgeraden und Geradenpaar mit Schnittpunkt.

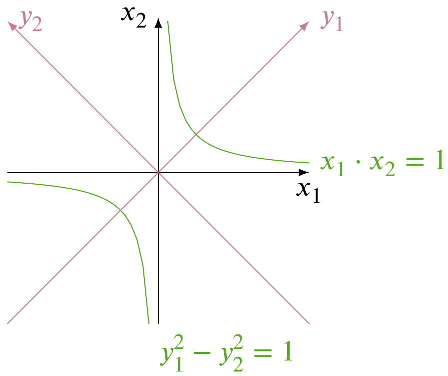


Abbildung B.4: Hyperbelpaar mit Achsen.

Die Gleichungen, die durch Vertauschen der Variablen x_1 und x_2 aus diesen hervorgehen, sind nicht aufgeführt.

Der Fall $n = 3$ **B.4.2.** Von den Flächen zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^3$ führen wir nur diejenigen auf, in denen alle drei Koordinaten explizit auftreten – die anderen können wir als Zylinder über einer Kurve zweiter Ordnung auffassen (siehe Abbildung B.5). Ferner lassen wir die Gleichungen, deren Lösungsmenge leer ist oder die sich durch Vertauschen der Variablen aus aufgeführten Gleichungen ergeben, fort.

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	Punkt
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	(Doppel-) Kegel
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	Kugel, Ellipsoid
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$	einschaliges Hyperboloid
$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$	zweischaliges Hyperboloid
$x_1^2 + x_2^2 = x_3$	elliptisches Paraboloid
$x_1^2 - x_2^2 = x_3$	hyperbolisches Paraboloid

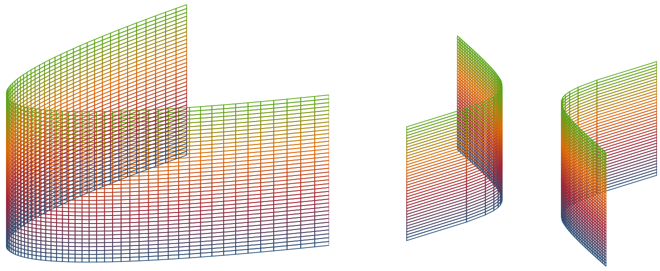


Abbildung B.5: Beispiele für Zylinder über Kurven zweiter Ordnung.

(Sattelfläche)

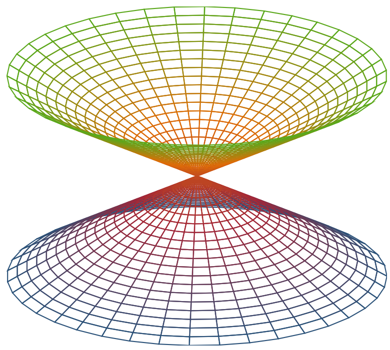


Abbildung B.6: Doppelkegel.

Beispiel B.4.3 (Hauptachsentransformation mit Hilfe der Eigenvektoren)**.** Wir zeigen die Hauptachsentransformation am Beispiel. Es sei die Gleichung

$$f(x) = 2x_1^2 - 72x_1x_2 + 23x_2^2 + 140x_1 - 20x_2 + 50 = 0$$

gegeben. Die Koeffizienten der quadratischen Terme mit einer Variablen, sind die Elemente auf der Hauptachse der Matrix A in der Darstellung $f(x) = x^\top Ax + b^\top x + c = 0$, die gemischt quadratischen Terme für x_ix_j werden mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ jeweils dem Eintrag a_{ij} und a_{ji} zugeordnet. Konkret ist also $A = \begin{pmatrix} 2 & -36 \\ -36 & 23 \end{pmatrix}$. Die Koeffizienten der linearen Terme liefern b, hier also $b = \begin{pmatrix} 140 \\ -20 \end{pmatrix}$. Der konstante Term liefert c, also $c = 50$. Das Verfahren ist dann wie folgt

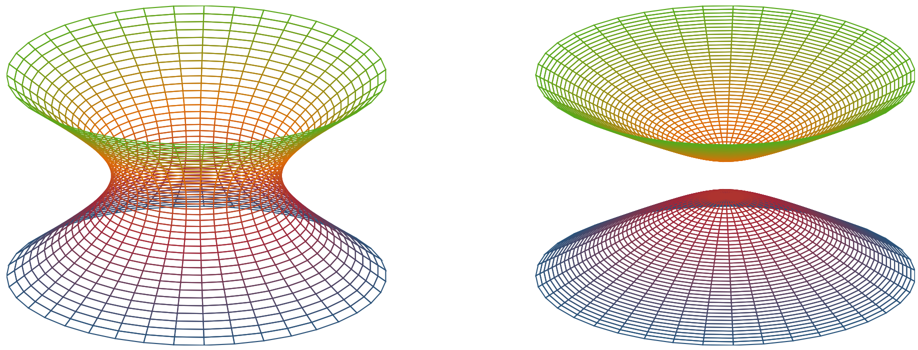


Abbildung B.7: Ein- und zweischaliges Hyperboloid

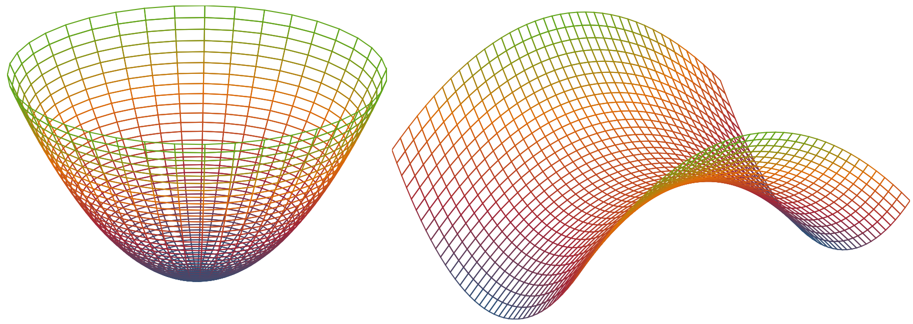


Abbildung B.8: Elliptisches und hyperbolisches Paraboloid

(i) Bestimmung der Eigenwerte[3] von A:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -36 \\ -36 & 23-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(23-\lambda)-36^2 \\ &= 46-25\lambda+\lambda^2-1296 = \lambda^2-25\lambda-1250 \\ &= (\lambda+25)(\lambda-50).\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind daher $\lambda_1 = 50$ und $\lambda_2 = -25$.

(ii) Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren[4]: Zu λ_1: Gesucht ist eine Lösung $x \neq 0$ von $(A-\lambda_1 I)x = 0$. Das Gauß-Verfahren liefert

$$\begin{pmatrix} -48 & -36 \\ -36 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{12}Z_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -36 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2+9Z_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $x_1 = -\frac{3}{4}x_2$, eine Lösung ist $b_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Für λ_2 verfahren wir

[3] da A reell und symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte reell

[4] Bei Vielfachheiten der Eigenwerte müssen die Eigenvektoren zu gleichen Eigenwerten orthogonal zueinander gewählt werden. Dies erreicht man mit dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt, Beispiel 8.2.9 (i).

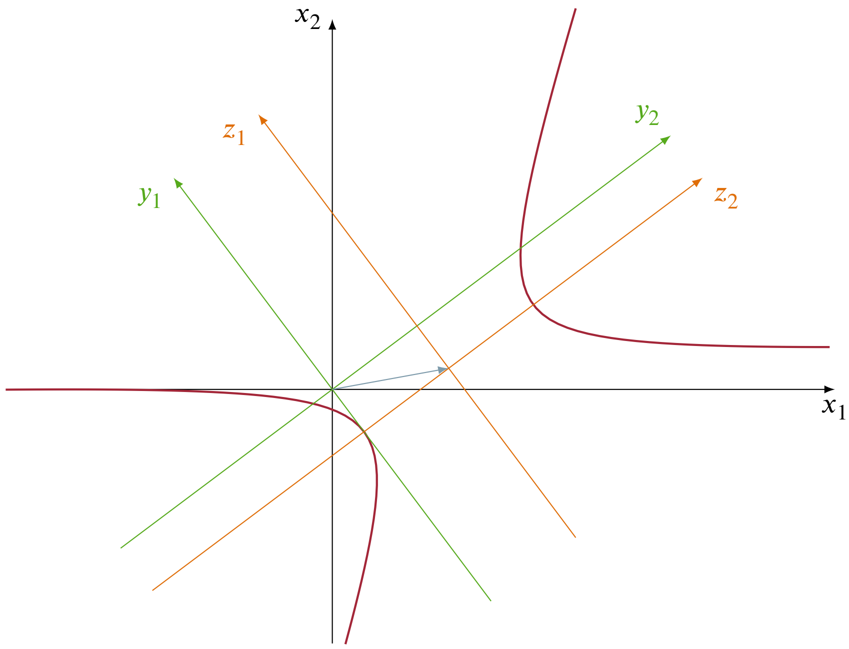


Abbildung B.9: Hauptachsenstransformation am Beispiel einer Hyperbel illustriert: Basiswechsel (Substitution), Translation des Ursprungs. Während die Darstellung in den x_1-x_2-Koordinaten kompliziert ist, ist sie die Normalform in den $z1$-z_2-Koordinaten einfach.

analog[5]:

$$\begin{pmatrix} 27 & -36 \\ -36 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{9}Z_1} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -36 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2+12Z_1} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $x_1 = \frac{4}{3}x_2$, eine Lösung ist $b_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir wählen $B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ und dividieren noch jeden Vektor b_i durch $\sqrt{b_i^\top b_i}$, damit die Matrix orthogonal wird, die neue Matrix ist $\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Diese Matrix vermittelt eine Spiegelung an der x_2-Achse und eine Drehung um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel $\arccos \frac{3}{5}$, vergleiche Abbildung B.9.

[5]Im konkreten Fall könnte man auch einfach einen zu b_1 orthogonalen Vektor b_2 wählen, da bekannt ist, dass A diagonalisierbar ist und zur Basis aus Eigenvektoren nur noch ein Vektor fehlt.

(iii) Wir substituieren $x = \tilde{B}y$, dann ist

$$f(x) = f(\tilde{B}y) = y^\top \tilde{B}^\top A \tilde{B} y + b^\top \tilde{B} y + c$$

und aus der Konstruktion folgt[6] $\tilde{B}^\top A \tilde{B} = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$. Weiter ist

$$b^\top \tilde{B} = \frac{1}{5}(140, -20)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(3\cdot 140 + 4\cdot 20, 4\cdot 140 - 3\cdot 20) = (100, 100).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \qquad & \Leftrightarrow f(\tilde{B}y) = 0 \\ & \Leftrightarrow 50y_1^2 - 25y_2^2 + 100y_1 + 100y_2 + 50 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2y_1^2 - y_2^2 + 4y_1 + 4y_2 + 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2(y_1+1)^2 - 2 - (y_2-2)^2 + 4 + 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2(y_1+1)^2 - (y_2-2)^2 = -4 \\ & \Leftrightarrow -\frac{(y_1+1)^2}{2} + \frac{(y_2-2)^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

(iv) Durch Translation (Substitution) $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 1 \\ y_2 - 2 \end{pmatrix} = y + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ erhalten wir die Gestalt

$$\frac{z_2^2}{4} - \frac{z_1^2}{2} = 1 \tag{B.4}$$

und daraus durch erneute Substitution (Spiegelung und Skalierung) mit $\tilde{z}_1 = \frac{z_2}{2}$, $\tilde{z}_2 = \frac{z_1}{\sqrt{2}}$ die Normalform

$$\tilde{z}_1^2 - \tilde{z}_2^2 = 1,$$

das heißt, durch $f(x) = 0$ ist eine Hyperbel gegeben, vergleiche Abbildung B.9.

In der Darstellung (B.4) beziehungsweise der letzten Substitution sind die Inversen der Skalierungsfaktoren die Längen der *Hauptachsen* (hier also 2 und $\sqrt{2}$).

Eine Anwendung kann beispielsweise in der Robotik darin bestehen, die Orientierung eines Objekts mit einer annähernd entsprechenden Form zu bestimmen.

[6]kann gerne nachgerechnet werden, muss aber nicht – was das Schöne ist.

Anhang C

Lernziele

C.1 Darstellung der Lernziele

Entscheidend ist, was hinten rauskommt. (Helmut Kohl)

Die üblichen Modulbeschreibungen lassen in der Regel nicht den Platz, um bezüglich der Inhlate und Lernziele ins Detail zu gehen, daher sind in diesem Abschnitt die mit den Lehrveranstaltungen Mathematik für Informatik I und II verbundenen Erwartungen hinsichtlich der zu erwerbenden Kenntnisse und Fertigkeiten ausführlicher dargestellt. Es handelt sich um zum Teil hinsichtlich der Reihenfolge überarbeitete Formulierungen, wie sie aufgrund der Anforderungen aus der Informatik für die Abstimmung über die neu auszugestaltende mathematische Grundausbildung erstellt worden sind.

Übergeordnete Lernziele sind: Die Studierenden sind in der Lage, die Begriffe und wesentlichen Aussagen gemäß der Modulinhalte zu benennen. Sie können konkrete Fragestellungen im Kontext der Modulinhalte verorten und daraus Lösungsansätze ableiten.

Die Studierenden kennen die üblichen Beweismethoden (direkter, indirekter Beweis, Beweis durch Widerspruch, Beweis durch vollständige Induktion, Diagonalargumente werden behandelt), können diese anwenden und sind in der Lage, zu entscheiden, welche Methode geeignet ist, um einen konkreten Beweis durchzuführen.

C.1.1 Mathematik für Informatik 1

Die Studierenden erkennen und beschreiben die Mengenlehre als eine wesentliche Grundlage. Sie kennen die aussagen- und prädikatenlogische Notation und wenden diese an. Sie untersuchen Relationen und Funktionen auf wichtige Eigenschaften. Sie bestimmen und arbeiten mit Äquivalenzklassen und Klasseneinteilungen. Die Studierenden formulieren mathematische Aussagen mit Hilfe von Aussagen- und Prädikatenlogik unter Verwendung der naiven Mengenlehre.

Die Studierenden kennen grundlegende algebraische Strukturen, sie untersuchen bzw. bestimmen sie und rechnen in ihnen in konkreten Fällen. Die Studierenden rechnen mit Permutationen, sie stellen Permutationen in Zyklenschreibweise und als Produkt von Transpositionen dar. Die Studierenden rechnen in endlichen Gruppen und Körpern sowie mit reellen und komplexen Zahlen. Sie stellen reelle Zahlen in verschiedenen Stellenwertsystemen dar und rechnen die Darstellungen ineinander um. Sie arbeiten mit dem Summenzeichen und interpretieren Ausdrücke mit Fakultäten kombinatorisch. Sie untersuchen Mengen auf ihre Mächtigkeit und Abzählbarkeit. Sie wenden die Rechenregeln für Ungleichungen an und lösen Ungleichungen mit Beträgen in den reellen und komplexen Zahlen.

Die Studierenden untersuchen Folgen auf Konvergenz und nutzen dafür die Definition, die Grenzwertsätze, das Einschließungskriterium, das liminf=limsup-Kriterium sowie weitere Aussagen. Sie zerlegen Folgen in geeignete Teilfolgen und umgekehrt. Sie bestimmen die Häufungswerte von Folgen. Sie beschreiben, untersuchen und bestimmen das Verhalten von Folgen mit Hilfe der Landau-Symbole. Sie kennen und nutzen das Cauchy-Kriterium für Konvergenzuntersuchungen sowie Vollständigkeit in nicht geordneten Mengen. Die Studierenden beschreiben Reihen als Folgen mit spezieller Struktur und untersuchen sie auf Konvergenz. Sie berechnen Reihenwerte für spezielle Reihen sowie Cauchy-Produkte von Reihen. Die Studierenden bestimmen die Konvergenzradien von Potenzreihen und erläutern ihn geometrisch in der Gaußschen Zahlenebene. Sie kennen die Potenzreihendarstellungen wichtiger Funktionen und nutzen diese, um ihre Eigenschaften nachzuweisen. Die Studierenden kennen elementare Funktionen, ihre Eigenschaften sowie ihr Verhalten und nutzen diese zur Untersuchung und Konstruktion weiterer Funktionen. Sie arbeiten mit Umkehrfunktionen und wenden insbesondere die Logarithmenrechenregeln an.

Die Studierenden stellen komplexe Zahlen in der Polarkoordinatendarstellung dar und nutzen diese, um Produkte und Wurzeln komplexer Zahlen zu bestimmen. Sie beschreiben die Diskrete Fouriertransformation als Annäherung eines Signals durch ein trigonometrisches Polynom. Sie bestimmen die Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms in konkreten Fällen durch Schnelle Fouriertransformation und nutzen diese Technik in informatischen Anwendungen.

Die Studierenden rechnen in Vektorräumen, sie kennen die grundlegenden Begriffe und können diese anwenden. Sie bestimmen Erzeugendensysteme, Basen und Dimensionen gegebener Vektorräume und untersuchen Mengen von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit. Sie ergänzen in konkreten Fällen gegebene Vektoren zu Basen bzw. tauschen Basisvektoren durch andere Vektoren aus. Die Studierenden kennen und arbeiten mit dem Untervektorraumbegriff und bestimmen Dimensionen von Untervektorräumen auch mit Hilfe der Dimensionsformel. Sie erklären die im bisherigen Verlauf des Moduls behandelten Beispiele im Vektorraumkontext.

Die Studierenden erläutern Homomorphismen als strukturerhaltende Abbildungen zwischen algebraischen Strukturen und nutzen diese Eigenschaft in konkreten Fällen. Sie erklären die Notwendigkeit, zusätzlich Bijektivität zu fordern, an Beispielen. Die Studierenden kennen Eigenschaften von Vektorraumhomomorphismen hinsichtlich Erzeugendensystemen und Basen sowie linearer Unabhängigkeit und wenden diese an. Sie bestimmen Kern, Bild, Rang und Defekt von gegebenen Vektorraumhomomorphismen und arbeiten mit diesen Begriffen auch theoretisch. Sie wenden Kriterien für Surjektivität, Injektivität und Bijektivität von Vektorraumhomomorphismen an. Sie erkennen die algebraische Struktur auf der Menge der Vektorraumhomomorphismen zwischen zwei Vektorräumen.

Die Studierenden beschreiben die Matrixdarstellung von Vektorraumhomomorphismen als Darstellung bezüglich gegebener Basen. Sie bestimmen in konkreten Fällen die Matrixdarstellung und berechnen die Darstellung bei Basiswechseln. Die Studierenden rechnen mit Matrizen, untersuchen sie auf Regularität und bestimmen Kern und Rang von Matrizen. Sie nutzen die algebraische Struktur auf der Menge der $m \times n$-Matrizen.

C.1.2 Mathematik für Informatik 2

Die Studierenden erkennen lineare Gleichungssysteme in der Praxis und verwenden den Gauß-Algorithmus um sie zu lösen. Sie beschreiben den Algorithmus formal und setzen ihn als Hintereinanderausführung von Elementarmatrizen um. Sie interpretieren den Gauß-Algorithmus als Basiswechsel und nutzen ihn zum simultanen Lösen eines Gleichungssystems für verschiedene rechte Seiten, insbesondere zur Untersuchung auf Invertierbarkeit und ggf. die Berechnung der inversen Matrix. Die Studierenden kennen und nutzen Begrifflichkeiten und Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme und die Struktur und Dimension des Lösungsraums.

Die Studierenden kennen Bilinearformen und Skalarprodukte und beschreiben diese auf endlich-dimensionalen Vektorräumen mit Hilfe von Matrizen. Sie untersuchen Matrizen auf die Eigenschaften der durch sie gegebenen Bilinearformen. Die Studierenden kennen die Begriffe Norm und Metrik und untersuchen damit gegebene Strukturen. Sie konstruieren Normen bzw. Metriken auf Mengen mit konkreten Eigenschaften bzw. mit konkreten, inhaltlich motivierten Zielstellungen. Die Studierenden normieren Vektoren und Matrizen und orthonormieren Basen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

Die Studierenden berechnen Determinanten mit Hilfe der Rechenregeln (normierte, alternierende Multilinearform), über Blockmatrizen und in Mischverfahren mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Sie nutzen sie, um im Rahmen der Modulinhalte Fragestellungen zu beantworten. Die Studierenden kennen und identifizieren Eigenwertprobleme und bestimmen im endlich-dimensionalen Fall Eigenwerte und Eigenvektoren. Die Studierenden wenden notwendige und hinreichende Kriterien zur Diagonalisierung von Matrizen an, sie bestimmen die (orthogonale, unitäre) Basiswechselmatrix, die eine gegebene diagonalisierbare Matrix diagonalisiert. Die Studierenden kennen und nutzen Kriterien für die Diagonalisierbarkeit von Matrizen.

Die Studierenden untersuchen Funktionsgrenzwerte mit Hilfe der ε-δ-Definition, sie untersuchen Funktionen mit der ε-δ-Definition und dem Folgenkriterium auf Stetigkeit. Sie identifizieren und charakterisieren Unstetigkeitsstellen. Sie kennen und nutzen die Eigenschaften stetiger Funktionen und erkennen die zugrundeliegende Vektorraumstruktur. Die Studierenden wenden die Eigenschaften stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen an und nutzen die Supremumsnorm (gleichmäßige Konvergenz) für die Untersuchung von Funktionenfolgen. Die Studierenden nutzen die Aussagen zur gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen, um Aussagen über die Stetigkeit von Grenzfunktionen zu machen. Sie erkennen, dass der Vektorraum der stetigen Funktionen hinsichtlich der Supremumsnorm nicht vollständig ist.

Die Studierenden differenzieren gegebene Funktionen mit Hilfe der Rechenregeln und ggf. mit Hilfe der Definition, insbesondere differenzieren sie Potenzreihen. Sie untersuchen stückweise definierte Funktionen auf Differenzierbarkeit. Sie kennen die Eigenschaften differenzierbarer Funktionen und die Mittelwertsätze und wenden beides an. Sie nutzen den Satz von Taylor zur Approximation von Funktionen. Die Studierenden wenden notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz von Extrema an. Die Studierenden berechnen partielle Ableitungen, indem die anderen Variablen als Konstanten betrachtet werden.

Die Studierenden bestimmen Stammfunktionen mit Hilfe bekannter Ableitungen, partieller Integration und der Substitutionsregel. Sie können Ober- und Untersummen zur Approximation des Riemann-Integrals nutzen und beschreiben Ideen, diese Approximation zu verbessern. Sie kennen stetige und monotone Funktionen als Klassen integrierbarer Funktionen. Sie wenden den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung an, um Integrale zu berechnen. Sie definieren mit Hilfe des Integrals ein Skalarprodukt und die zugehörige Norm auf dem Raum der stetigen Funktionen und erkennen, dass auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen nicht alle Normen äquivalent sind.

Die Studierenden erkennen explizite Differenzialgleichungen in allgemeinen Situationen. Sie wenden die Lösungsformeln und -ansätze in den behandelten Fällen an.

C.2 Lernzielkontrolle

> Es ist ein Narr, der an die Hand gelobet und Bürge wird für seinen Nächsten. (Sprüche 17:18)

Inwieweit die Lernziele erreicht wurden, wird über die Übungsaufgaben und die Prüfungen festgestellt.

Wenn man den Stoff erarbeitet, dürfte es insbesondere am Anfang eines Studiums schwierig sein, aus den trotz aller Ausführlichkeit noch recht allgemein formulierten Lernzielen abzuleiten, wie man sich zusätzlich zur Bearbeitung der Aufgaben eine Lernzielkontrolle in Form einer Prüfung vorstellen kann.

Es sollen daher Beispiele gegeben werden, wie die Lernzielkontrolle in Prüfungsaufgaben konkret aussehen kann. Hervorzuheben ist dabei, dass die mathematische Ausbildung nicht darauf abzielt, dass man hinterher einen Standardsatz an möglichen Aufgabenstellungen bearbeiten kann, sondern dass man einen Standardsatz an „mathematischen Werkzeugen" zur Verfügung hat, mit dem man eine große Breite an Aufgabenstellungen bearbeiten kann. Ein präsentierter oder geübter Einsatz eines mathematischen Werkzeugs darf gerne dazu führen, dass es in einer ähnlichen Situation wieder zur Hand genommen wird, soll den weiteren Einsatz aber nicht einschränken. Einen Hammer kann man nicht nur zum Einschlagen von Nägeln sondern auch zum Ausbeulen, Zertrümmern, Musizieren, als Türstopper oder bei entsprechendem Gewicht beim Sport einsetzen…

Beispiel C.2.1 (Berechnung von Reihenwerten)**.** In Aufgabe A.3.15 wird neben Linearität die Bekanntheit der Werte von geometrischen Reihen ausgenutzt. Im weiteren Verlauf treten weitere Reihen und Reihendarstellungen von Funktionen auf, deren Werte man angeben kann. So können sich die Lernziele „Berechnung von Reihenwerten" und „Kenntnis elementarer Funktionen" anschließend zum Beispiel in einer Aufgabe der Form

- Bestimmen Sie den Wert von $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^{k+1}}{k!}+\frac{(-1)^{k+1}\pi}{(2k+1)!}\right)$

wiederfinden.

Beispiel C.2.2. Geübt wird das Rechnen mit komplexen Zahlen und die Arbeit mit den komplexen n-ten Einheitswurzeln $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$. Ob diese beiden Lernziele erreicht wurden, kann etwa über den Beweis der Aussage

$$\xi \in \{\, \xi_0, \dots, \xi_{n-1} \,\} \Leftrightarrow \overline{\xi} \in \{\, \xi_0, \dots, \xi_{n-1} \,\}$$

geprüft werden.

Beispiel C.2.3. Mit der Untersuchung des Integrals

$$\int_0^3 \frac{x}{x^3 + 2x^2 - x - 2}\,dx$$

lassen sich über eine konkrete Aufgabenstellung die Themen lineare Gleichungssysteme, Partialbruchzerlegung, Integration rationaler Funktionen, Eigenschaften des Integrals sowie uneigentliche Integrale verknüpfen. Anders lässt sich aber auch eine Fragestellung auf Verständnis und Überblick formulieren, denn da der Integrand einen Pol im Integrationsbereich hat, kann das uneigentliche Integral nicht existieren (Bemerkung 12.6.2 (iv)).

In den Übungsaufgaben wird des Öfteren Bezug genommen auf Themen früherer Kapitel. Diese Aufgaben liefern also weitere Gelegenheiten zum Nachweis, dass diese Themen tatsächlich erarbeitet wurden, auch wenn die konkrete Aufgabe zu umfangreich für eine Klausur ist.

Anhang D

Zusammenfassungen

Manche Themen werden in den anderen Modulen der informatischen Studiengänge bereits früher benötigt, als sie im Rahmen des normalen Gangs dieses Moduls verfügbar sind. In diesem Anhang sind diese Themen kurz dargestellt.

D.1 Matrizenrechnung

> Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die Inkompetenz von Vodafone West. Aber beim Universum bin ich mir noch nicht ganz sicher. (frei nach Albert Einstein)

- Eine *Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{D.1}$$

Die Zahlen sind in Zeilen und Spalten angeordnet (wie in einer Tabelle). In (D.1) hat die Matrix m Zeilen und n Spalten und wird daher auch als $m \times n$-Matrix bezeichnet („m kreuz n“). Die Schreibweise mit doppelten Indizes a_{ij} ist üblich, die erste Zahl (i) bezeichnet die Zeile, die zweite (j) die Spalte. Man kann auch andere Buchstaben verwenden. Beispielsweise $B = (b_{k\ell}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & 2 \end{pmatrix}$ eine Matrix mit 3 Zeilen und 4 Spalten, also eine 3×4-Matrix. Der Eintrag b_{23} ist -1, die dritte Zeile ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\pi & 2 \end{pmatrix}$, die zweite Spalte ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Matrizen treten in verschiedenen Situationen auf und entsprechend können die Einträge einer Matrix (die Zahlen) unterschiedlich interpretiert werden beziehungsweise unterschiedliche Bedeutungen haben.
- Unter geeigneten Voraussetzungen lassen sich Matrizen addieren, multiplizieren mit Zahlen und mit anderen Matrizen beziehungsweise mit einem Vektor. Das Ergebnis kann in der konkreten Situation eine Bedeutung und praktische Relevanz haben.

Multiplikation von Matrizen mit Zahlen D.1.1. Ist λ eine Zahl und $A = (a_{ij})$ eine Matrix, dann ist $\lambda \cdot A$ durch (λa_{ij}) erklärt, das heißt, jeder Eintrag der Matrix wird mit λ multipliziert. Es ist zum Beispiel

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 6 \\ -12 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 6 \\ 6 & 12 \\ -24 & -34 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 & \pi & 18 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{\pi}{3} & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Addition von Matrizen D.1.2. Sind $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Matrizen mit der selben Anzahl von Zeilen und Spalten, also beides $m \times n$-Matrizen für die selben Zahlen m und n, dann lässt sich eine Addition erklären:

$$C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = A + B.$$

Das bedeutet, man addiert für jede Zeile und jede Spalte die Einträge von A und B in dieser Zeile und Spalte und erhält den Eintrag der Matrix $C = A + B$. Das Ergebnis ist dann wieder eine $m \times n$-Matrix. Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & 2 \end{pmatrix}$ sind beides 3×4-Matrizen, sie haben jeweils 3 Zeilen und 4 Spalten. Ihre Summe ist

$$A + B = \begin{pmatrix} -4+2 & 3+4 & -2+5 & 0+7 \\ 1+1 & 1+3 & 1+(-1) & 1+\pi \\ 10+0 & 9+0 & 8+(-\pi) & 7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1+\pi \\ 10 & 9 & 8-\pi & 9 \end{pmatrix} = C.$$

Multiplikation von Matrizen mit Matrizen D.1.3. Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_{j\ell})$ eine $n \times k$-Matrix, das heißt, B hat genauso viele Zeilen wie A Spalten hat, dann kann man das Produkt von A und B wie folgt erklären: $A \cdot B = C = (c_{i\ell})$, wobei sich der Eintrag von C in der i-ten Zeile und ℓ-ten Spalte wie folgt berechnet: Man multipliziert a_{i1} mit $b_{1\ell}$, a_{i2} mit $b_{2\ell}$, a_{i3} mit $b_{3\ell}$ und so weiter bis schließlich a_{in} mit $b_{n\ell}$ und addiert alle Produkte. Das Gesamtergebnis ist dann eine $m \times k$-Matrix.

Weil man bei der Durchführung jeweils eine feste Zeile von A und eine feste Spalte von B durchläuft, kann man sich das Vorgehen kurz als „Zeile mal Spalte“ merken.

Beispielsweise[1] ist

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -2 & \pi & 18 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 6 \\ -12 & -17 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-2)2 + \pi(-1) + 18 \cdot 3 + 0(-12) & (-2)4 + \pi 3 + 18 \cdot 6 + 0(-17) \\ 3 \cdot 2 + 6(-1) + 9 \cdot 3 + (-4)(-12) & 3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 6 + (-4)(-17) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 50 - \pi & 100 + 3\pi \\ 75 & 152 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Achtung: Die Reihenfolge der Matrizen darf bei der Multiplikation in der Regel auch dann nicht vertauscht werden, wenn es von den Zeilen- und Spaltenzahlen her möglich wäre.

Matrix-Vektor-Multiplikation D.1.4. Der Fall, dass man eine Matrix und einen Vektor miteinander multiplizieren will, ist bereits in der Multiplikation von Matrizen enthalten. Man interpretiert dabei einen Vektor mit n Einträgen als Matrix mit einer Zeile und n Spalten („Zeilenvektor“) oder als eine Matrix mit n Zeilen und einer Spalte („Spaltenvektor“), je nachdem, ob man ihn von links mit einer $n \times \ell$- oder von rechts mit einer $m \times n$-Matrix multiplizieren will. Zur Verdeutlichung schauen wir uns die möglichen Fälle beispielhaft an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3(-3) + 4 \cdot 0 \\ -2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 5(-3) + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \pi & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \pi 1 + 2(-2) & \pi 2 + 2 \cdot 6 & \pi 3 + 2 \cdot 5 & \pi 4 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pi - 4 & 2\pi + 12 & 3\pi & 10 & 4\pi + 14 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3(-4) + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} \equiv -3,$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 7 \\ -4 \cdot 1 & -4 \cdot 3 & -4 \cdot 7 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 14 \\ -4 & -12 & -28 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass die Multiplikation eines Zeilen- mit einem Spaltenvektor (in dieser Reihenfolge) mit gleich vielen Einträgen formal eine 1×1-Matrix ergibt, die dann als Zahl gelesen wird. Außerdem ist das genau das, was bei der Multiplikation zweier Matrizen für jeden Eintrag durchgeführt wird („Zeile mal Spalte“).

---

[1] wo keine Verwechslungsgefahr besteht, wird $\cdot$ im Folgenden weggelassen, um Platz zu sparen.

Literaturverzeichnis

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Das BUCH der Beweise*, Springer Verlag, Berlin, 2018

[2] Rüdiger W. Brause, *Neuronale Netze: eine Einführung in die Neuroinformatik*, Teubner, Stuttgart, 1995

[3] Sergey Brin, Lawrence Page, *The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine*, Computer Networks and ISDN Systems, 30, 1998, S. 107-111

[4] Kurt Bryan, Tanya Leise, *The $25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google*, SIAM Review, 48, 3, S. 569-581, 2006

[5] Howie Choset, *Principles of robot motion: theory, algorithms, and implementation*. MIT Press, Cambridge, 2005

[6] Antonia Creswell, Tom White, Vincent Dumoulin, Kai Arulkumaran, Biswa Sengupta, Anil A. Bharath, *Generative Adversarial Networks*, IEEE Signal Processing Magazine, vol. 35, no. 1, S. 53-65, Jan. 2018

[7] Gerald B. Folland, *Fourier analysis and its applications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009

[8] Michael L. Fredman, Robert Endre Tarjan, *Fibonacci Heaps and Their Uses in Improved Network Optimization Algorithms*, Journal of the ACM, Volume 34, Issue 3, Juli 1987, Seiten 596-615

[9] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, John Hopkins University Press, Baltimore, 2013

[10] Jason Gregory, *Game Engine Architecture*, A K Peters/CRC Press, Boston, 2018

[11] N. A. Grigor'ev, *Regular simplexes inscribed into a cube and Hadamard matrices*, Geometry of positive quadratic forms, Collection of articles, Trudy Mat. Inst. Steklov., 152, 1980, 87–88; Proc. Steklov Inst. Math., 152 (1982), Seiten 97–98

[12] Richard W. Hamming, *Information und Codierung*, VCH, Weinheim, 1987

[13] Godfrey Harold Hardy, *A Mathematician's Apology*. University Press, Cambridge, 1940

[14] Taher H. Haveliwala, Sepandar D. Kamvar, *The Second Eigenvalue of the Google Matrix*, Technical Report, Stanford InfoLab, 2003

[15] David Hilbert, *Über das Unendliche*. Mathematische Annalen, 95 (1): Seiten 161-190, 1926

[16] Matthias Homeister, *Quantum Computing verstehen*, Springer Vieweg, Wiesbaden, 2022

[17] Shmuel T. Klein, Miri Kopel Ben-Nissan, *On the Usefulness of Fibonacci Compression Codes*, The Computer Journal, Volume 53, Issue 6, Juli 2010, Seiten 701–716.

[18] Donald Ervin Knuth, *The art of computer programming*, Band 3: Sorting and Searching, Addison-Wesley, 1998

[19] Ze-Nian Li, Mark S. Drew, Jiangchuan Liu, *Fundamentals of Multimedia*, Springer, Cham, 2021

[20] Friedmar Schulz, *Analysis I*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2011

[21] Friedmar Schulz, *Analysis II*. Oldenbourg Verlag, München, 2013

[22] Wesley E. Snyder, Hairong Qi, *Machine Vision*, Cambrdige University Press, Cambridge, 2004

[23] Gilbert Strang, *Introduction to linear algebra*. Cambridge Press, 2021

[24] David Tall, *The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere*, The Mathematical Gazette, 66, 435, Seiten 11-22, 1982

[25] Jeffrey David Ullman, *Principles of Database Systems*, Computer Science Press, Rockville, 1982

[26] James S. Walker, *Fourier Analysis* Oxford University Press, Oxford, 1988

[27] Wolfgang Walter, *Analysis 1*. Springer-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1999

[28] Edmund Weitz, *Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker*. Springer Spektrum, Berlin, 2021

Die verlinkten Titel sind aus dem Netz dem Universität Ulm abrufbar ggf. nach Einwahl über VPN. Für Bücher, die nicht in der Universitätsbibliothek verfügbar sind, lohnt es sich eventuell, einen Kaufwunsch anzugeben.

Index