Aufgaben zu Induktion

1. $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k$

Induktionsanfang: $n=1$

$$\prod_{k=1}^{1}(1+a_k) = 1+a_k \geq 1+\sum_{k=1}^{1} a_k \quad ✓$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\cdot(1+a_{n+1}) \overset{IH}{\geq} \left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right)(1+a_{n+1})$$

$$= 1 + a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k + \underbrace{\underbrace{a_{n+1}}_{\leq 0}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\leq 0}}_{\geq 0} \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k \quad \square$$

2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

IA: $n=0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} \frac{k}{(k+1)!} = 0 = 1 - \frac{1}{1!}$ ✓

IS: $n \to n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{n+1}{(n+2)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

$$\overset{IH}{=} \frac{n+1}{(n+2)!} + \left(1 - \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+2)}(n+1)!}}\right) = \frac{n+1}{(n+2)!} + \left(1 - \frac{(n+2)}{(n+2)!}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+2)!} \quad \square$$

3. Aufgabe Idee

$$IS = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \overset{IH}{<} \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$$

$$\text{Zz} \quad \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \iff \frac{2n+1}{(2n+2)^2} \leq \frac{1}{2n+3}$$

$$\iff \frac{2n+1}{(2n+2)} \leq \frac{2n+2}{2n+3} \qquad \frac{1}{2} \to \frac{2}{3} \to \frac{3}{4}$$

Aufgaben zum Betrag

1. $|x| < |x+1|$ * $\Rightarrow$ kritischen Stellen $\{0, -1\}$

1. Fall $x \in (-\infty, -1]$ $|x| = -x$ $|x+1| = -(x+1) = -x-1$

$* \iff -x \leq -x-1 \iff 0 \leq -1$ ↯ $\Rightarrow$ für kein $x \in (-\infty, 1)$ erfüllt

2. Fall: $x \in [-1, 0] \Rightarrow |x| = -x$ $|x+1| = x+1$

$* \iff -x \leq x+1 \iff -\frac{1}{2} \leq x$ $\Rightarrow$ gilt $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0]$

3. Fall $x \in [0, \infty]$ $= |x| = x$ $|x+1| = x+1$

$* \iff x \leq x+1 \iff 0 \leq 1$ gilt $\forall x \in [0, \infty)$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $= [-\frac{1}{2}, \infty)$

2. Aufgabe

infimum bei $n \to \infty$ und $m = 1$

$A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$

für $n=1$ ist $\frac{1}{n}$ maximal

für $m \Rightarrow \infty$ ist $\frac{1}{m}$ minimal

$\sup(A) = 1$

$\inf(A) = -1$

maximum, minimum existieren nicht weil supremum und infimum nicht angenommen werden

Aufgaben zu Summen

(1) $\sqrt[n]{1+2n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}} \iff 1+2n < \left(1+\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^n$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Es gilt $\left(1+\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \cancel{1^{n-k}} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^k$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{1}\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^0}_{1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^1 + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^k}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + \underbrace{n \frac{2}{\sqrt{n-1}}}_{>0} + \underbrace{\frac{n\cancel{(n-1)}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^{4}}{\cancel{(n-1)}}}_{2n} > 1+2n$$

$$\Rightarrow 1+2n < \left(1+\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^n \iff \sqrt[n]{1+2n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}} \quad \square$$

(2). $\sum_{k=1}^{n+2} \left(4 \cdot q^{k-1} + \frac{q}{2}\right) = 4 \sum_{k=1}^{n+2} q^{k-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+2} q$

$$\overset{\text{I.S.}}{=} \underbrace{4 \cdot \sum_{k=0}^{n+1 \,=:\, m} q^k}_{4 \cdot \left(\frac{q^{n+2}-1}{q-1}\right)} + \frac{1}{2} \cdot (n+2) \cdot q = 4\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right) + \frac{1}{2}(n+2) \cdot q$$

denn $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

q^{n+1}

$$= \frac{1-q}{1-q}$$

Aufgaben zu Gleichungen lösen

a) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 = p(x)$

↳ 1 ist eine Nullstelle.

⇒ führe Polynomdivision durch

$$(x^3 - x^2 - 2x + 2) : (x - 1) = x^2 - 2$$
$$-(x^3 - x^2)$$
$$-2x + 2$$
$$-(-2x + 2) \quad r(x) = 0$$

Es gilt $p(x) = (1-x)\underbrace{(x^2 - 2)}_{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}$

$\Rightarrow x_1 = 1 \quad , x_2 = (\sqrt{2}) \quad ; x_3 = -(\sqrt{2})$

b) $\log_3(x) + \log_3(x-6) = 3$ $\qquad \log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$

$\Leftrightarrow \log_3(x(x-6)) = 3 \quad \Leftrightarrow (x(x-6)) = 3^3$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$

↳ Mit Mitternachtsformel folgt $\underbrace{x_1 = -3}$ keine Lösung da log nur auf $\mathbb{R}^+$ def. $\quad \underbrace{x_2 = 9}$

c) $\ln(3x + 2) = 5$

$\Leftrightarrow 3x + 2 = e^5 \quad \Leftrightarrow x = \frac{e^5 - 2}{3}$

d) $\underbrace{\ln(\sqrt{x})}_{\ln(x^{\frac{1}{2}})} - 2\ln(x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(x) - 2\ln(x) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow -1 = -\frac{3}{2}\ln(x)$

$\Leftrightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$

e) $3^x \cdot 5^{-2x} = 7^{x+1}$

$\Leftrightarrow \ln(3^x \cdot 5^{-2x}) = \ln(7^{x+1})$

$\Leftrightarrow x \cdot \ln(3) - 2x \cdot \ln(5) = \underbrace{(x+1)\ln(7)}_{x\cdot\ln(7) + \ln(7)} \leftarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(7)}{\ln(3) - 2\ln(5) - \ln(7)}$

f) $e^x \cdot e^{3x} = 2$

$\Leftrightarrow e^{4x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = \ln(2)$

<u>Aufgaben zu Folgen</u>

a) $a_n := \dfrac{n^2+2n+1}{cn^3 - n^2 + n - 1} = \dfrac{\overset{\to 0}{\frac{n^2}{n^3}} + \overset{\to 0}{\frac{2n}{n^3}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}}{\underset{c \neq 0}{c} - \underset{\to 0}{\frac{1}{n}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}} - \underset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ c \neq 0}} a_n = 0$

für $c=0$ gilt $a_n = \dfrac{\overbrace{\frac{n^2}{n^2}}^{1} + \overbrace{\frac{2n}{n^2}}^{\to 0} + \overset{0}{\frac{1}{n^2}}}{-\underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{1} + \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ c=0}} a_n = -1$

b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k}^{\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-(\frac{1}{2})} \;\leftarrow \to 0} - 1 = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$

c) $a_n := \dfrac{2}{\sqrt[n]{3n^2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = 2$

d) $a_n := \sum_{k=1} \frac{2^k}{k!}$ $\# \; e^x = \sum_{k=0} \frac{x^k}{k!}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - 1 = e^2 - 1$$

Zeige oder wiederlege $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$

a) stimmt   Sei $N_1 \in \mathbb{N} : n > N_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

sei $N_2 \in \mathbb{N} : n > N_2 \quad |b_n - b| < \varepsilon/2$

sei $N = \max\{N_1, N_2\}$

$c_n := a_n + b_n$

$\lim_{n\to\infty} c_n := c = a + b$

$\Rightarrow$ so gilt $|\underbrace{\overbrace{a_n + b_n}^{c_n}}_{\text{folge}} - \underbrace{\overbrace{(a+b)}^{c}}_{\text{grenzwert}}| \leq \overbrace{|a_n - a|}^{\varepsilon/2} + \overbrace{|b_n - b|}^{<\varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall n > N$

b) Stimmt nicht z.b $a_n = (-1)^n \quad b = (-1)^n \Rightarrow a_n \cdot b_n = 1$

c) $a_n = o(c_n)$ und $b_n = o(c_n)$

$a_n = n = b_n \qquad c_n = n^2 \qquad$ so gilt $\frac{n}{n^2} \to 0 \Rightarrow a_n = o(c_n)$

aber $a_n \cdot b_n = n^2 \qquad$ Es gilt $\frac{n^2}{n^2} \to 1 \Rightarrow a_n \cdot b_n \; != o(c_n)$

<u>Schwer</u>

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3} \qquad a_0 = 0$$

Zeige Beschränktheit : $0 \leq a_n \leq 1$

IA: sei $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{0 + 2}{3} = 2/3$

IS: $a_{n+1} = \frac{\overbrace{a_n^2}^{\leq 1 \; \text{IH}} + 2}{3} \leq \frac{1 + 2}{3} \leq 1$

Z: $a_n \leq a_{n+1}$

IA: $n=1 \quad a_2 > a_1 \quad = \frac{\frac{4}{9}+2}{3} > \frac{2}{3}$ ✓

IS: $a_{n+1} = \frac{\overset{1 < a_{n+1}}{\widetilde{a_n^2}}+2}{3} \overset{\text{I.H}}{\leq} \frac{(a_{n+1})^2+2}{3} = a_{n+2}$ $\square$

b) nach monotonieprinzip (beschränkt, m.s) muss a_n konvergieren

da $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| \to 0$

$$a = \frac{a^2+2}{3} \iff -a^2+3a-2=0$$

↪ MF folgt $a_1 = 1 \quad a_2 = 2$

da $a_n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Aufgaben zu stetigkeit

(1)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \left(\frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \right)$

$$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x^2+1-(x^2-1)}^{2}}{\sqrt{x^2+1} + \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\geq 0 \ \forall x > 1}} = 0$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\overbrace{\sin(x)}^{\leq 1}}}{\ln(\ln(x))}$

sei $x > e$ dann gilt $0 \leq \frac{e^{\sin(x)}}{\ln(\ln(x))} \leq \frac{e^1}{\ln(\ln(x))} \to 0$

② ist $f(x) = \begin{cases} x > 0 & \ldots x \cdot \ldots \\ x \leq 0 & 0 \end{cases}$ stetig

$\lim_{x \to 0_-} f(x) = 0$

Sei a_n beliebige folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

so gilt $\lim_{n \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{a_n}\right)}_{<1} \to 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_+} \Rightarrow$ stetigkeit in $x_0 = 0$

$\forall x \in \mathbb{R} / \{0\}$ gilt, dass f stetig, da composition von stetigen Funktionen

③ $\varepsilon := \sqrt{\delta} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$

$\delta = \varepsilon^2$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ ist 1 ← Behauptung

$|x - a| < \delta$

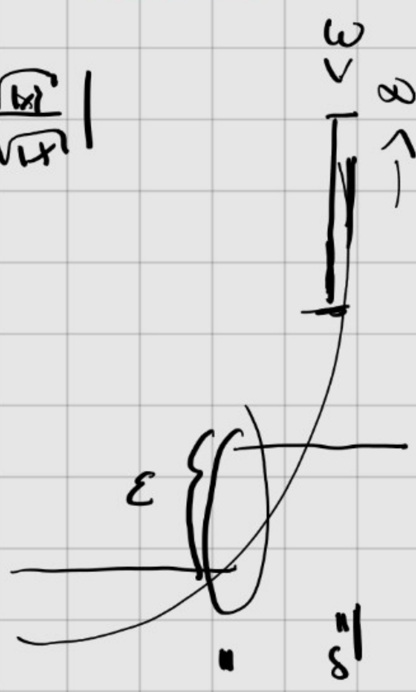
$\Rightarrow |x| < \delta$

$\sqrt{|x|} < \sqrt{\delta}$

Sei $|f(x) - f(0)| = \left|\frac{1}{1+\sqrt{|x|}} - 1\right| < \varepsilon$

Es gilt $\left|\frac{1}{1+\sqrt{|x|}} - 1\right| = \left|\frac{1}{1+\sqrt{|x|}} - \frac{1+\sqrt{|x|}}{1+\sqrt{|x|}}\right|$

$= \left| \frac{\overbrace{\sqrt{|x|}}^{\sqrt{\delta} = \varepsilon}}{\underbrace{1+\sqrt{|x|}}_{\geq 1}} \right| < \varepsilon$



④ $f(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

$\nexists\, x^* \in \mathbb{R} : \mathrm{sig}(x) = 0$

aber $f(-1) < 0 \quad f(1) > 0$

$\Rightarrow$ Aussage ist falsch

$\frac{1}{x}$

Aufgaben zu Differenzierbarkeit

a) $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+h}}{h\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+h}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+h}}{h\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+h}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{a-(a+h)}{h\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+h}(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})} = \frac{-\cancel{h}\ 1}{\cancel{h}\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{a})} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ da $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$

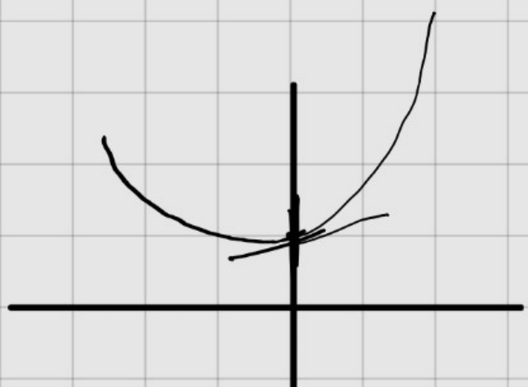
$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{a}+h-\cancel{a}}{h\cdot(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{a}}$

wenn $a=0$
$\Rightarrow$ nicht definiert
$\Rightarrow$ nicht diffbar

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2+bx+c & x\le 0 \\ e^x & x>0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0_-} f(x) = c \\ \lim_{x\to 0_+} f(x) = 1 \end{array}\right\}$ damit f stetig $\Rightarrow c=1$

$g(x) = x^2+bx+c \qquad h(x) = e^x$
$g'(x) = 2x+b \qquad h'(x) = e^x$



$\lim g'(x) = \lim h'(x)$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^-}}_{b} \qquad \underbrace{\lim_{x \to 0^+}}_{1}$$

$\Rightarrow b = 1$ dann ist f diffbar

Einschub für Fragen

e^x, x, $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $f(x) = c$

sind stetig und so auch deren Kompositionen sofern definiert

Aufgaben Differenzieren

① i) $\frac{x^2 + 2x}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} x + 2 = 1$

ii) $\ln(3x) \Rightarrow \frac{d}{dx} \underbrace{\ln(\overset{g(x)}{\widetilde{3x}})}_{f(x)} = \overset{f'(g(x)) \cdot g'(x)}{\frac{1}{3x} \cdot 3}$

iii) $(\sin(x) + x^3 + 2)^3 := f(x)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 3(\sin(x) + x^3 + 2)^2 \cdot (\cos(x) + 3x^2)$

iv) $\underbrace{e^{2x+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x^2)}_{g(x)}$ $f'(x) = e^{2x+1} \cdot 2$ $g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} e^{2x+1} \cdot \sin(x^2) = (e^{2x+1} \cdot 2 \cdot \sin(x^2)) + (e^{2x+1} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x)$

v) $x^{\sqrt[3]{x}}$

$x^{\sqrt[3]{x}} = e^{\ln(x^{\sqrt[3]{x}})} = e^{\sqrt[3]{x} \cdot \ln(x)}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^{\sqrt[3]{x}} = e^{x^{1/3} \cdot \ln(x)} \cdot \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x}\right)$

c

vi) $\ln(\ln(\ln(x))) := f(x)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{(\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$\ln(1) = 0$

$\ln(e) = 1$

$f(x) \ : \ (e, \infty) \to \mathbb{R}$

(2) $$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad +1$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) \cdot x^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

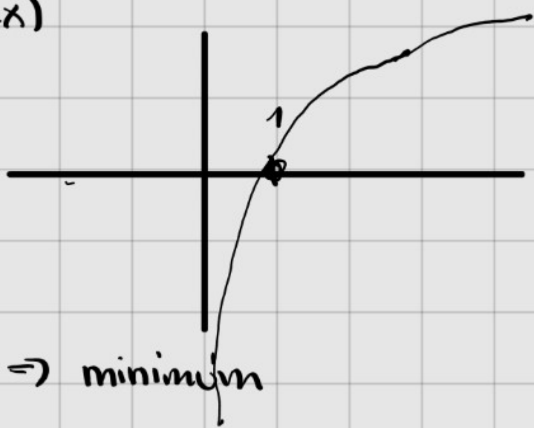
b) $$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{d}{dx} \frac{\overbrace{\sin(x)}^{F}}{\underbrace{\cos(x)}_{g}} = \frac{\overbrace{(\cos(x)^2 + \sin(x)^2)}^{1}}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

(3) $g(x) = x \cdot \ln(x) - x \qquad I = [\frac{1}{e}, e]$

a) $g(x)$ ist stetig $\forall x \in (0, \infty) \supseteq I$

da I abgeschlossen ung g stetig $\Rightarrow \exists$ Maximum und Minimum

b) $$g'(x) = 1 \cdot \ln(x) + \frac{\overbrace{x}^{1}}{x} - 1 = \ln(x)$$



$\ln(x) = 0 \iff x = 1$

$\Rightarrow$ Extremstelle bei $x=1$ von $g(x)$

Es gilt $g''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g''(1) > 0 \Rightarrow$ minimum

$$g(\tfrac{1}{e}) = \tfrac{1}{e} \cdot \ln(\tfrac{1}{e}) - \tfrac{1}{e} = \tfrac{1}{e} \cdot (\overbrace{\ln(1)}^{0} - \overbrace{\ln(e)}^{1}) - \tfrac{1}{e}$$

$= \frac{1}{e} \cdot -1 - \frac{1}{e} = \frac{-2}{e}$

$g(1) = 1 \cdot \overbrace{\ln(1)}^{0} - 1 = -1 < g(\frac{1}{e})$

$g(e) = e \cdot \overbrace{\ln(e)}^{1} - e = 0 > -1 \quad \Rightarrow g(1)$ ist glob. minimum

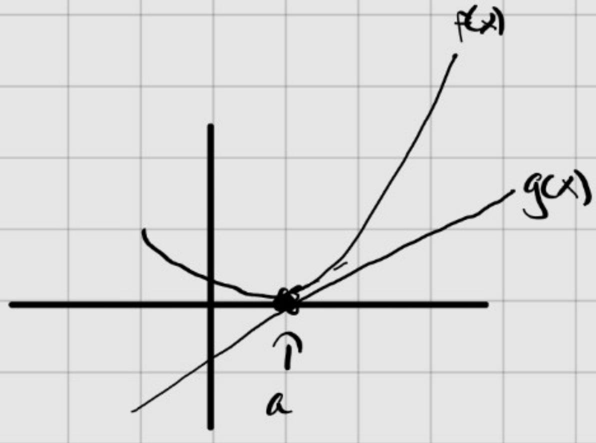
Da $g(e) > g(\frac{1}{e})$ ist $g(e) = 0$ das globale maximum

d) $I = (\frac{1}{e}, e)$ ein glob. maximum bzw minimum ?

$\Rightarrow$ glob minimum existiert

$\forall x \in I \ \exists y : f(x) < f(y) \quad \Rightarrow$ kein glob Maximum vorhanden

(4) $x \geq 0 \quad \overbrace{\ln(1+x)}^{f(x)} \geq \overbrace{x - \frac{1}{2}x^2}^{g(x)}$



Es gilt $\ln(1+0) = 0 = 0 - \frac{1}{2}0^2 = 0$

$\Rightarrow f(0) = g(0)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad g'(x) = 1 - x$

$\forall x \geq a \quad f'(x) \geq g'(x)$

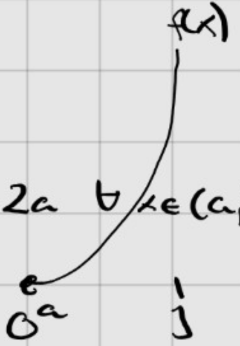
$\Rightarrow f(x) \geq g(x) \ \forall x \geq a$

Es gilt $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x$

$\Leftrightarrow 1 \geq (1-x)(1+x) = 1 - \underbrace{x^2}_{\geq 0}$

$\Rightarrow f'(x) > g'(x) \ \forall x \geq 0 \ \Rightarrow f(x) \geq g(x) \ \forall x \geq 0$

(5) $b^2 > -a^2 + 2ab \qquad b > a > 0$



$f(x) = x^2$ ist stetig diffbar $\quad f'(x) = 2x < 2a \quad \forall x \in (a,b)$

$\exists\, \xi \in (a,b)$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = \underbrace{f'(\xi)}_{>2a = f'(a)} \cdot (b-a)$

$f'(\xi) \in \underbrace{(2a, 2b)}_{f(a),\, f'(b)}$

eingesetzt $\rightarrow b^2 - a^2 > 2a(b-a)$

$b^2 - a^2 > 2ab - 2a^2$

$b^2 > 2ab - a^2 \qquad \square$

Aufgaben zu ⊕ l'Hopital

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)\cdot x} - \frac{\sin(x)}{x \cdot \sin(x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overset{\to 0}{x - \sin(x)}}{\underset{\to 0}{x\cdot\sin(x)}} \overset{⊕}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overset{\to 0}{1 - \cos(x)}}{\underset{\to 0}{x\cdot\cos(x)} + \underset{\to 0}{\sin(x)}}$

$\overset{⊕}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overset{\to 0}{\sin(x)}}{\underbrace{-x\cdot\sin(x)}_{\to 0} + \underbrace{\cos(x) + \cos(x)}_{\substack{2\cos(x) \\ \to 2}}} = \frac{0}{2} = 0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\overbrace{1 - \cos(2x)}^{\to 0}}{\underbrace{x\cdot\sin(x)}_{\to 0}} \overset{⊕}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overset{\to 0}{2\sin(2x)}}{\underset{\to 0}{x\cdot\cos(x)} + \underset{\to 0}{\sin(x)}}$

$\overset{⊕}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overset{\to 4}{4\cos(2x)}}{\underbrace{-x\cdot\sin(x)}_{\to 0} + \underbrace{\cos(x) + \cos(x)}_{\substack{2\cos(x) \\ \to 2}}} = \frac{4}{2} = 2$

$f(x) = \exp(|x^3|) = e^{|x^3|}$ f ist stetig diffbar $\forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{|x^3|} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x^3} = 1 = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{|x^3|}$

Zz ist $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{(x^3)}-1}{x} \overset{\oplus}{=} \lim_{x\to 0_+} 3x^2 e^{x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0_-} \frac{e^{-x^3}-1}{x} \overset{\oplus}{=} \lim_{x\to 0_-} -3x^2 e^{-x^3} = 0$$

diffbar $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ exestiert

Aufgaben zu Taylor

① $f(x) = \ln(1+x)$

$f^{(0)}(x) = \ln(1+x)$; $f^{(0)}(a) = 0$

$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}$; $f^{(1)}(a) = 1$

$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f^{(2)}(a) = -1$

$f^{(3)}(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$ $f^{(2)}(a) = 2$

a) $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{k!} (x-a)^k$

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$= \frac{f^{(0)}(0)}{1} \cdot 1 + \frac{f^{(1)}(0)}{1} \cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6} \cdot x^3$$

$$= 0 + 1 \cdot x + \left(-\frac{1}{2}\right) x^2 + \frac{2}{6} x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

b) Sei $|x| \leq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in (0,x)$ oder $(x,0)$

$$|R_3(x)| = |f(x) - R_3(x)| = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot x^4$$

Es gilt $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$

ist maximal bei $\xi = -1/2$

$$\Rightarrow |f^{(4)}(\xi)| = \left|\frac{-6}{(1+\xi)^4}\right| \leq \left|\frac{-6}{(\frac{1}{2})^4}\right|$$

max bei $x = 1/2, x = -1/2$

$$\Rightarrow |R_3(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot x^4\right| \leq \frac{\frac{6}{\cancel{(\frac{1}{2})^4}}}{4!} \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{6}{4!} = \frac{1}{4}$$

② $\underline{\sin(x)}$

$f^{(0)}(x) = \sin(x)$ bei $a=0$

$f^{(1)}(x) = \cos(x)$ $\sin(0) = 0$

$f^{(2)}(x) = -\sin(x)$ $\cos(0) = 1$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$ $-\cos(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = f^{(0)}(x)$ $-\sin(0) = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = 0 + \frac{1 \cdot x}{1!} + 0 - \frac{1 \cdot x^3}{3!} + 0 + \frac{1 \cdot x^5}{5!} \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} \sin(x)$$

Es gilt analog $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{2k!}$

$$e^{i\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k}{k!} = \frac{(\pi)^0}{0!} + \frac{(i \cdot \pi)^1}{1!} + \frac{-1 \cdot \pi^2}{2!} + \frac{-i \cdot \pi^3}{3!}$$

$$+ \frac{1 \cdot \pi^4}{4!} + \frac{i \cdot \pi^5}{5!} \quad \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\pi^{2k}}{2k!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\pi^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

a) ... $e^{i\pi}$

$$= \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i \underbrace{\sin(\pi)}_{0} = e$$

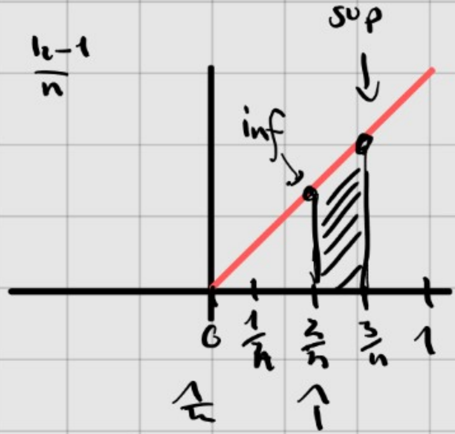
$$\Rightarrow e^{i\pi} + 1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) + 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

Aufgaben zu Integrale

1. $f(x) = x \qquad Z = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$

$$m_k = \inf_{[z_{k-1}, z_k]} f(x) = \inf_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} x = \frac{k-1}{n}$$

$$M_k = \sup_{[z_{k-1}, z_k]} f(x) = \sup_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} x = \frac{k}{n}$$



$$U(Z, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \overbrace{\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n + 0$$

$$\overset{\text{Gaus}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{n^2+n}{2n^2} - \frac{n}{n^2} = \frac{\overset{\to 1}{\frac{n^2}{n^2}} + \overset{\to 0}{\frac{n}{n^2}}}{\underbrace{\frac{2n^2}{n^2}}_{\to 2}} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}$$

$\Rightarrow$ so gilt $\lim_{n \to \infty} U(Z, f) = \frac{1}{2}$

$$O(Z_k, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{Gaus}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+n}{n^2 \cdot 2} = \frac{\underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}}{1 \cdot 2} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} O(Z_n, f) = \frac{1}{2}$$

b) Ja, da $\lim_{n \to \infty} O(Z_n, f) = \lim_{n \to \infty} U(Z_n, f)$

c) Ja der $Z_n \subseteq [0,1]$ mit $z_0 = 0$ und $z_n = 1$
und $\lim_{n \to \infty} U(Z_n, f) = \int_{z_0}^{z_n} f(x)\, dx = 1/2$

②

a) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx = -\cos(x) \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - \cos(0) = 0$

b) $\int_{-2}^{1} x^2 - 2x + 1\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_{-2}^{1} = 9$

c) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^3 e^{2x}\, dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^3 = \frac{1}{2}e^6 - \frac{1}{2}$

e) $\int_1^e \frac{1}{x}\, dx = [\ln(x)]_1^e = 1 - 0 = 1$

f) $\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\, dx = \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} \cdot 2)}{2} - \frac{\sin(0)}{2} = 0$

② i) $\int \overset{g(x)}{x}\, \overset{f'(x)}{e^{-x}}\, dx \overset{P.I}{=} x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x})\, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x}$

ii) $\int 2^{x-1} dx = \int \frac{2^x}{2} dx = \frac{1}{2} \int 2^x dx = \frac{1}{2} \int e^{\ln(2^x)}\, dx$

$= \frac{1}{2} \int e^{x \ln(2)}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{x \ln(2)}$

iv) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 - 1}}\, dx = 2 \int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}\, dx$

$u = x^3 - 1$

$du = u' \cdot dx$

$du = 3x^2 \cdot dx$

$d = \frac{du}{3x^2}$

$= 2 \int \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{\cancel{3x^2}}{\cancel{3x^2}}\, du$

$= 2 \cdot \sqrt{u} = 2 \cdot \sqrt{x^3 - 1}$

$$③ \quad \int_0^{\pi} \underbrace{\overset{f'(x)}{\cos(x)} \cdot \overset{g(x)}{\cos(x)}}_{=: h(x)} \, dx = \underbrace{[\sin(x) \cdot \cos(x)]_0^{\pi}}_{=: b(x)} \overset{\ominus}{+} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(x) \cdot \sin(x) \, dx}_{*:=}$$

$$* = \int_0^{\pi} 1 - \cos(x)^2 = \int_0^{\pi} 1 - \int_0^{\pi} \cos^2(x)$$

$$\Rightarrow h(x) = b(x) + \pi - h(x) \iff h(x) = \frac{b(x) + \pi}{2}$$

<u>Einschub für Fragen</u>

$$\int_a^b f(\overset{u}{\varphi(x)}) \cdot \underbrace{\varphi'(x) \, dx}_{du} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, du$$

Bsp.: $\displaystyle\int_0^2 x \cdot \cos(x^2 + 1) \, dx$

$\varphi(x) := u = x^2 + 1$

$\varphi'(x) = 2x$

$du = 2x \cdot dx$

$\iff dx = \dfrac{du}{2x}$

$$= \int_{\varphi(0)=1}^{\varphi(2)=5} \cancel{x} \cdot \cos(u) \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^5 \cos(u) \, du = [\sin(u)]_1^5$$

$$\int x^2 \cdot \cos(x^2) \, dx$$

sei $u = x^2 \iff \sqrt{u} = x$

$\Rightarrow du = 2x \cdot dx$

$dx = \dfrac{du}{2x}$

$$= \int x^2 \cdot \frac{\cos(u)}{2x} \cdot du$$

$$= \int x \cdot \cos(u) \cdot du = \int \sqrt{u} \cdot \cos(u) \cdot du$$

Partialbruch zerlegung

Bsp.: $$\frac{1}{x^2 \cdot (x+1)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x+1} := *$$

ist null für $x=-1$

$$\Leftrightarrow \frac{1 \cdot \cancel{(x+1)}}{x^2 \cdot \cancel{(x+1)}} = \frac{c_1 \cdot \widetilde{(x+1)}}{x} + \frac{c_2 \cdot (x+1)}{x^2} + c_3 \frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}$$

für $x=-1$ gilt $1 = 0 + 0 + c_3 \Rightarrow \underline{\underline{c_3 = 1}}$

$$* \Leftrightarrow \frac{1 \cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x+1)} = \frac{c_1 \cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x}} + \frac{c_2 \cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{c_3 \cdot x^2}{(x+1)}$$

für $x=0$ gilt

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = c_1 \cdot 0 + c_2 + c_3 \cdot 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_2 = 1}}$$

Sei $x=1$ da c_2, c_3 schon berechnet

so gilt $$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{c_1}{1} + \frac{\overset{\shortparallel\,1}{c_2}}{1} + \frac{\overset{\shortparallel\,1}{c_3}}{(1+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = c_1 + 3/2$$

$$\Leftrightarrow -1 = c_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)}$$

Das ist praktisch da

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx = \underbrace{\int \frac{-1}{x}\,dx}_{-\ln(x)} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2}\,dx}_{-\frac{1}{x}} + \underbrace{\int \frac{1}{(1+x)}\,dx}_{\ln(1+x)}$$

was passiert bei erweiterung mit x

$$\frac{1 \cdot \cancel{x}}{\underbrace{x^{2}}_{0}(1+x)} = \frac{c_1 \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{c_2 \cdot \cancel{x}}{\underbrace{x^{2}}_{0}} + \frac{c_3 \cdot x}{(x+1)}$$

Setze $x=0$ $\Rightarrow$ ↯ Funktiert nür für höchste Potenz der Nullstelle

Aufgaben zu PBZ

a) $$\int \frac{2x+1}{x^2-9}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x+3)(x-3)}\,dx$$

so gilt also $$\frac{2x+1}{(x+3)(x-3)} \overset{PBZ}{=} \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-3)} := *$$

$$* \Leftrightarrow \frac{(2x+1)\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{A(x-3)}{(x+3)} + \frac{B\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}$$

Setze $x = 3$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot 3+1}{(3+3)} = A\cdot 0 + B \Leftrightarrow B = \frac{7}{6}$$

$$* \Leftrightarrow \frac{(2x+1)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-3)} = \frac{A\cdot\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}} + \frac{B\overbrace{(x+3)}^{\text{ist 0 für } x=-3}}{(x-3)}$$

$\Rightarrow$ Setze $x = -3$

$$\frac{(-6+1)^{=-5}}{-6} = A + 0B \iff \frac{5}{6} = A$$

So ist $\frac{2x+1}{x^2-9} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{x+3} + \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{x-3}$

So gilt $\int \frac{2x+1}{x^2-9}\,dx = \frac{5}{6}\int \frac{1}{x+3}\,dx + \frac{7}{6} \cdot \int \frac{1}{x-3}\,dx$

$$= \frac{5}{6} \cdot \ln(|x+3|) + \frac{7}{6} \cdot \ln(|x-3|)$$

b) $\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)}\,dx$ Nullstellen sind $(0, 0, 1)$

PBZ
$\Rightarrow$ $\frac{2x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)} := *$

$$C = \left.\frac{(2x-1)\cancel{(x-1)}}{x^2\cancel{(x-1)}}\right|_{x=1} = 1$$

$$B = \left.\frac{(2x-1)\cdot\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x-1)}\right|_{x=0} = 1 \qquad \Rightarrow C = 1 = B$$

Für $x = -1$ gilt (wähle $x \in \mathbb{R}/\{0,1\}$)

$$\frac{2\cdot(-1)-1}{1(-2)} = \frac{A}{-1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{-2}$$

$$\iff \frac{3}{2} = -a + \overbrace{1 \quad -\tfrac{1}{2}}^{1/2}$$

$$\iff 1 = -a \iff a = -1$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x-1}{x^2(x-1)}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)}\,dx$$

$$= -\ln(|x|) + \left(-\frac{1}{x}\right) + \ln(|x-1|)$$

<u>wahr oder falsch?</u>

a) Die summe divergenter Folgen ist divergent

Falsch da sei $a_n = (-1)^n$ $b_n = (-1)^{n+1}$

$-1, 1 - 1, 1 \dots$

$1, -1, 1, -1$

$\Rightarrow a_n + b_n = 0, 0, 0, \dots,$

alternativ $a_n = n$ $b_n = -n$ den $a_n + b_n = 0, 0, \dots$

b) Ist wahr da

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{b}\right)^k - 1 \overset{G.R}{=} \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{b} - 1} - 1$$

so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overset{\to 0}{\frac{1}{b^{n+1}}} - 1}{\frac{1}{b} - 1} - 1 \overset{b>1}{=} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{b}} - 1$

c) Ist eine funktion f in a stetig, dann ist sie auch diffbar in a

Falsch da sei $f(x) = |x|$ und $a = 0$

So ist $f(x)$ stetig in a aber $f(x)$ nicht diffbar in a

d) Sei $f'(a)=0 \Rightarrow$ lok. max oder min

Falsch sei $f(x)=x^3$ so gilt $f'(x)=3x^2$
und $f'(0)=0$

da $f'(x) \geq 0 \ \forall x$ gilt $f(x)$ m.w.
$\Rightarrow$ keine lokale Extremstelle bei $a=0$

Altklausur 2

a) Sei $m_1 \neq m_2$ maxima von A
o.b.d.A ist $m_1 > m_2$

da $m_1 \in A$ ist $m_2 \neq \max_{x \in A} x$ da $m_1 \in A$
und $m_1 > m_2$ ↯
$\Rightarrow$ eindeutigkeit

b) sei $a_n = \frac{1}{n}$ so gilt $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
Sei $b_n = n^2$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot n^2 = \lim_{n \to \infty} n = \infty$

c) Falsch da sei $a_n = \frac{1}{n}$ so gilt $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
aber $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 = a$

d) ist falsch sei $\underline{I} = [1,2]$ ist kompakt und $f(x)=x$
so ist f diffbar aber $f(x) > 0 \ \forall x \in \underline{I}$

Zusatzblatt

a) Die Aussage ist richtig

Sei $\varepsilon > 0$ So $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon/2 \ \forall n > N_1$
und $|b_n - b| < \varepsilon/2 \ \forall n > N_2$

so gilt $(a_n + b_n) := c_n$ und $a + b := c$

$$\lim_{n\to\infty} |c_n - c| = \lim_{n\to\infty} |a_n + b_n - (a+b)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |a_n - a + b_n - b| \leq \lim_{n\to\infty} \underbrace{|a_n - a|}_{\substack{<\varepsilon/2 \\ \forall n > N_1}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{<\varepsilon/2 \\ \forall n > N_2}}$$

$< \varepsilon \quad \forall n > \max\{N_1, N_2\}$

d) $f, g \ (a, \infty)$ beide positiv $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $g(x)$ beschränkt
Dann existiert $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Falsch Sei $a = 1$

1. möglichkeit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x} \cdot (\sin(x) + 2)$
so gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\cancel{\frac{1}{x}} \cdot 1}{\cancel{\frac{1}{x}} \cdot (\sin(x) + 2)}$

limes ist nicht gegeben da $\sin(x)$ periodisch

2. möglichkeit : $a = 1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{ein}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{ein}}{=} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x \to \infty$$

f) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{-1}$ s.m.w ?

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\underbrace{f'(f^{-1}(x))}_{} =: *}$$

da $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ so auch $f'(f^{-1}(x))$

gilt $\frac{1}{*} > 0 \Rightarrow (f^{-1}(x))' > 0 \Rightarrow f^{-1}$ s.m.w

Einschub für Fragen

$$g'(x) = 1 \qquad f(x) = e^x$$

$$\int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f'(x)} \, dx = x \cdot e^x - \underbrace{\int 1 \cdot e^x \, dx}_{e^x} = (x-1)e^x$$

weitere Aufgaben

a) z.z. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

$$f'(a) + g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} + \lim_{x \to a} \frac{g(a) - g(x)}{a - x}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x) + g(a) - g(x)}{a - x} = \lim_{x \to a} \frac{(f(a) + g(a)) - (f(x) + g(x))}{a - x}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(a) - (f+g)(x)}{a - x} = (f+g)'(a)$$

b) $\mathcal{L}(f) : I \to \mathbb{R} \quad \mathcal{L}(f) := \frac{f'}{f}$ Sei $f, g > 0$

z.z. $\mathcal{L}(f \cdot g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$:

ZZ $L(f\cdot g) = L(f) + L(g)$

$$L(f\cdot g) = \frac{(f\cdot g)'}{f\cdot g} = \frac{f'\cdot g + f\cdot g'}{f\cdot g} = \frac{f'\cdot \cancel{g}}{f\cdot \cancel{g}} + \frac{\cancel{f}\cdot g'}{\cancel{f}\cdot g}$$

$$= L(f) + L(g) \quad \square$$

Aufgabe 4 Altklausur 2

a) ZZ $(c\cdot f)'(a) = c\cdot f'(a)$

$$(c\cdot f)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{c\cdot f(a+h) - c\cdot f(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} c\cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c\cdot f'(a)$$

b) $f''(a) \geq 0$ konvex $\quad f''(a) \leq 0$ konkav $\quad$ f ist positiv, konkav

ZZ $\frac{1}{f}$ convex ist

$f=1 \quad g=f$

$$\text{Es gilt } \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{0\cdot f - 1\cdot f'}{f^2} = \left(\frac{-f'}{f^2}\right)'$$

$$\text{Es gilt } \left(\frac{-f'}{f^2}\right)' = \frac{-f''\cdot f^2 + f'\cdot 2f\cdot f'}{f^4} = \frac{\overbrace{\underbrace{-f''}_{>0}\cdot \underbrace{f^2}_{>0}}^{>0} + \overbrace{\underbrace{(f')^2}_{>0}\cdot \underbrace{2f}_{>0}}^{>0}}{\underbrace{f^4}_{>0}}$$

<0

$>0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ konvex

f ist konkav $\Rightarrow f''(a) \leq 0$

Blatt 08

Bestimme lim $\quad g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ mit MWS

$x \to \infty$

Sei $I = [x, x+1]$ sei $f(x) := \sqrt{x}$

Dann gilt mit MWS $\exists\, \xi \in (x, x+1)$

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \cdot (x+1-x) = \underbrace{\sqrt{x+1}}_{f(x+1)} - \underbrace{\sqrt{x}}_{f(x)} = f'(\xi) \cdot 1$$

Es gilt $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

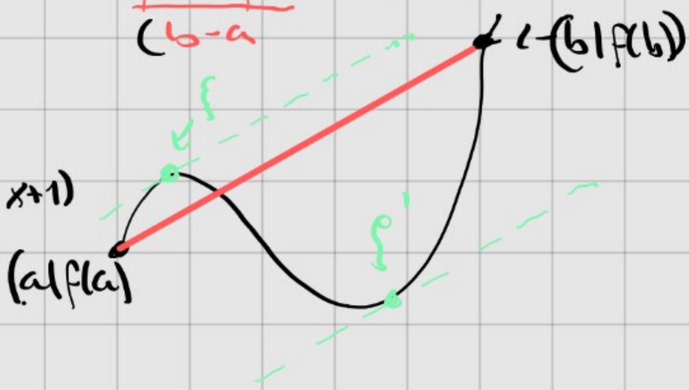
$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}_{>0} \leq \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\geq f'(\xi)}}_{\to 0} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$$

$\exists\, \xi \in (a,b)$:

$* \quad \frac{f(b)-f(a)}{(b-a} = f'(\xi)$

$* \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

$$f'(\xi) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi}} < \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ da } \xi \in (x, x+1)$$



b) Zeige, dass $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x^7 + x^5 - \sin(x) + 2x$ genau eine Nullstelle hat

$$\text{Es gilt } f'(x) = 14x^6 + 5x^4 \underbrace{-\cos(x)}_{\leq 1} + 2 \geq 14x^6 + 5x^4 + 1$$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow f$ s.m.w

$$\text{Es gilt } f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 - \underbrace{\sin(-1)}_{\geq -1} - 2 \leq -4$$

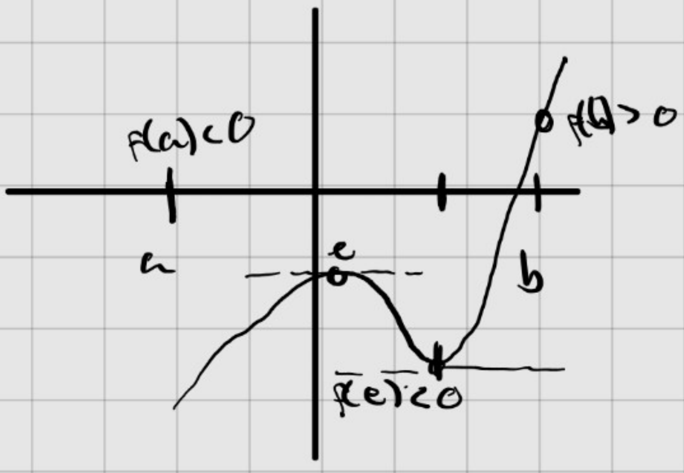
$\Rightarrow f(-1) < 0$

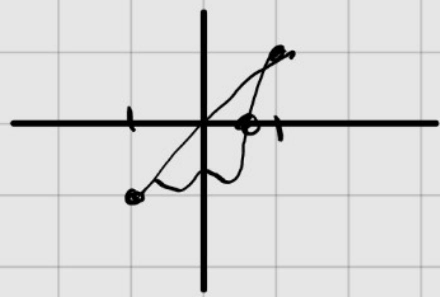
$$\text{Es gilt } f(1) = 2 \cdot 1 + 1 \overbrace{-\sin(1)}^{\leq 1} + 2 \geq 1$$

$\Rightarrow$ ZWS da f stetig $f(-1) < 0$ und $f(1) > 0$

$\exists\, \xi \in (-1, 1) : f(\xi) = 0$

und da f s.m.w ist dies die einzige Nullstelle.





Aufgaben zu ε - δ

a) Zeige, dass $f(x) = \frac{1}{3}x$ stetig ist mit Hilfe des ε-δ-Krit.

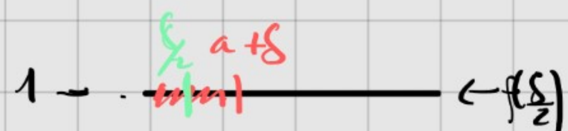
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \underbrace{|x-a| < \delta}_{} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ f stetig in a

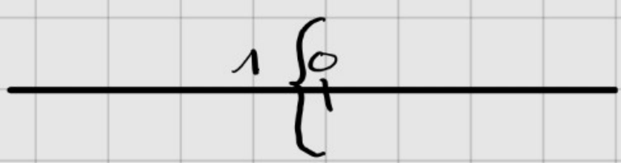
b) Zeige, dass $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x \leq 0 \end{cases}$ nicht stetig in $a=0$ ist.

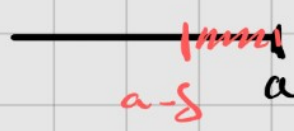
a) Sei $\delta = 3\varepsilon$ bzw $\frac{1}{3}\delta = \varepsilon$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}a\right| = \frac{1}{3}\overbrace{|(x-a)|}^{<\delta = 3\varepsilon} < \frac{1}{3} \cdot 3\varepsilon = \varepsilon$$



b) Sei $\varepsilon = 1$





$\rightarrow |x-a|<\delta \leftarrow f(a)$

Sei $x = \frac{\delta}{2} \Rightarrow |x-a|<\delta$

$\Rightarrow |f(x)-f(a)| = 2 > 1 = \varepsilon$ egal wie klein δ ist

Aufgaben zu Taylor

a) $\sin(\frac{1}{10}) \approx$ fehler $\leq 10^{-4}$ $a=0$

$$10^{-4} = R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

$$= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \cdot x^{n+1} \right|$$

Sei $x = 1/10 \Rightarrow \xi \in (0, 1/10)$

da $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$ da $\pm\sin(\xi), \pm\cos(\xi) \leq 1$

Es gilt $\frac{\overbrace{|f^{(n+1)}(\xi)|}^{\leq 1}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \leq \frac{1 \cdot \overbrace{x^{n+1}}^{\leq (\frac{1}{10})^{n+1}}}{(n+1)!} \leq \frac{1 \cdot (\frac{1}{10})^{n+1}}{n+1!}$

Es soll gelten $(\frac{1}{10})^4 \geq \frac{(\frac{1}{10})^{n+1}}{(n+1)!}$ gilt für $n=3$

$$\Rightarrow f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k}_{T(x,a)} < \left(\frac{1}{10}\right)^4$$

Anmerkung $\frac{(\frac{1}{10})^4}{24} < (\frac{1}{10})^4 < \frac{(\frac{1}{10})^3}{6}$

$3=n$ $n=2$

$$T_3(x,0) = \sin(0)\cdot 1 + \cos(0)\cdot x - \frac{\sin(0)\cdot x^2}{2} - \frac{\cos(0)\cdot x^3}{6}$$

Es gilt $T_3(\frac{1}{10}, 0) < 10^{-4}$

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$ $\quad c=0 \quad n=3 \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+x)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow T_3(x,0) = \frac{1}{1} + \frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x}{1} - \frac{\frac{1}{4}\cdot 1\cdot x^2}{2} + \frac{3/8\cdot 1\cdot x^3}{6}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(1+x)^{5/2}}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}\frac{1}{(1+x)^{7/2}}$$

$$R_3(x) = |f(x) - T_3(x,0)| = \left| \frac{-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{(1+\underset{\sim}{\xi})^{7/2}}}{24}\cdot \underset{\sim}{x}^4 \right|$$

für $\xi \in (0, 1/5) \cup (-1/5, 0)$

$$R_3(x) \leq \frac{\frac{15}{16}\overbrace{\frac{1}{(4/5)^{7/2}}}^{1,36}}{24}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^4}_{\frac{1}{625}} < \frac{1}{4}\cdot 10^{-3}$$

Altklausur 1 Aufgabe 2

$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{2}{n+1}\cdot a_n$

a) IA: $n=1$

Es gilt $a_2 = \frac{2}{1+1}\cdot a_1 = 1\cdot 2 \leq a_1$ ✓

IS: $n \to n+1$

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+1+1} \cdot a_{n+1} \overset{IH}{\leq} \underbrace{\frac{2}{n+1} \cdot \overbrace{a_n}^{\geq a_{n+1}}}_{a_{n+1}} = a_{n+1}$$

b) $0 \leq a_n \leq 2$

$a_n \geq 0$ da $\underbrace{a_{n-1}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\frac{2}{n+1}}_{\geq 0} \geq 0$

IA $n=1$ mit a) folgt $a_2 \leq 2$

IS $n \to n+1$ IH := $a_{n+1} \geq a_n$ z.z. $a_{n+2} \geq a_{n+1}$

$$a_{n+2} = \underbrace{\frac{2}{n+2}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{a_{n+1}}_{\leq 2 \text{ IH}} \leq 2$$

c) da a_n m.s und a_n beschränkt

$\Rightarrow$ a_n konvergiert.

Es muss gelten für $\lim_{n \to \infty} a_n := a$

$a = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0} \cdot a$ $\Rightarrow$ $a = 0$ denn sonst nicht lösbar

$\Rightarrow a = 0 = \lim_{n \to \infty} a_n$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k} = 2 \cdot \frac{1}{n!} \xrightarrow{0}$$

<u>Aufgabe 7 Altklausur 2</u>

$f(x) = x \cdot e^{-2x} \qquad I = [0,1]$

a) da I kompakt und $f(x)$ stetig weil Komposition stetiger Funkt. nimmt f ein maximum und minimum auf I an

b) $f'(x) = e^{-2x} + x \cdot (-2)\, e^{-2x} = \underbrace{(1-2x)} \underbrace{e^{-2x}}_{>0}$

$\Rightarrow f'(0{,}5) = 0 \cdot e^{-2x} = 0$

Betrachte ränder $f(0) = 0 \cdot e^{-2 0} = 0$, $f(1) \approx 0.14$

für $x = 0.5$ gilt $f(0.5) = \frac{1}{2} \cdot e^{-1} \approx \frac{0.37}{2}$

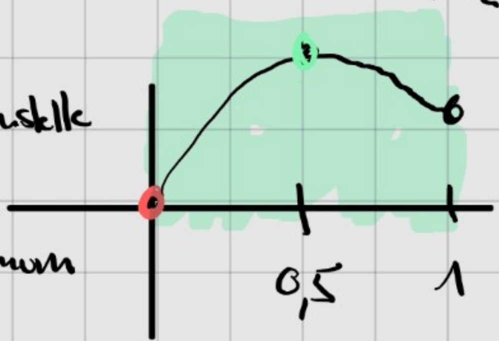
$\Rightarrow f(\frac{1}{2}) > f(1) > f(0)$

Da $f'(x)$ nur eine Nullstelle in I $\Rightarrow$ $f(\frac{1}{2})$ ist globales max.

Da $f(\frac{1}{2})$ einzig Extremstelle

$\Rightarrow$ $f(0)$ ein globales minimum ist

da $f(0) < f(1)$



c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x \cdot e^{-2x} \; \left(= \frac{1}{e^{2x}}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^{2x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$

Aufgabe 8 Klausur 2

i) $\int \overset{g(x)}{x} \cdot \overset{f'(x)}{\sin(2x)}\, dx = -\frac{x \cdot \cos(2x)}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2}\, dx$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{*}$

löse $* = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{4}\cdot \sin(2x)$

$\Rightarrow \int x\cdot\sin(2x) = \frac{-x\cdot\cos(2x)}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)$

ii) Bestimme PBZ von $\frac{(-x+7)}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)}$

$A = \frac{(-x+7)}{x+2}\Big|_{x=1} = \frac{6}{3} = 2$ //

$B = \frac{-x+7}{x-1}\Big|_{x=-2} = \frac{9}{-3} = -3$ //

$\Rightarrow \int \frac{-x+7}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \frac{2}{(x-1)}\,dx - 3\cdot\int\frac{1}{(x+2)}\,dx$

$= 2\cdot\ln(|x-1|) - 3\ln(|x+2|) + C$

Altklausur 1 Aufgabe 3b)

$a_n := \frac{4n^2+9}{2n^2+2n+3}$ mit a) $a = 2$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow |a_n - a| = \left|\frac{4n^2+9}{2n^2+2n+3} - 2\right|$

$= \left|\frac{4n^2+9-2\cdot(2n^2+2n+3)}{2n^2+2n+3}\right|$

$= \left|\frac{\cancel{4n^2}+9-\cancel{4n^2}-4n-6}{2n^2+2n+3}\right| = \left|\frac{3-4n}{2n^2+2n+3}\right|$

$< \varepsilon/2$ $< \varepsilon/2$

$$\leq \left|\frac{3-4n}{2n^2}\right| \leq \left|\frac{3}{2n^2}\right| + \left|\frac{4\cancel{n}}{2n^{\cancel{2}}}\right| = \underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2}}_{>0} + 2\,\frac{1}{n}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2} \iff \frac{3}{n^2} < \varepsilon \iff n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$2\,\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \iff 4\cdot\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{4}{\varepsilon} < n$$

$\Rightarrow$ Sei $N > \max\{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}, \frac{4}{\varepsilon}\}$

$\Rightarrow \forall n > N$ gilt $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$