Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 30. April 2021, Abgabe: 29. April

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 1

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 30. April um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 29. April um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Musterlösungen

Aufgabe 1 (1 + 6 = 7 Punkte)

Diese Aufgabe ist kürzer als sie aussieht, ein gutes Verständnis der Erklärungen ist aber wichtig ;)

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um das gleichzeitige Würfeln mit zwei sechsseitigen Würfeln zu beschreiben. Die Grundmenge Ω wählen wir wie in Beispiel 2.1.2 im Skript. Ein Elementarereignis (also ein Element $\omega \in \Omega$ der Grundmenge) gibt also an, welche Zahlen die beiden Würfel zeigen. Beachte, dass die Würfel hier unterscheidbar sind, wir haben also z.B. einen roten Würfel, dem der erste Eintrag von ω entspricht und einen blauen Würfel, dessen Augenzahl im zweiten Eintrag von ω steht. Das Elementarereignis $(4, 2)$ bedeutet dann, dass der rote Würfel eine 4 zeigt, der blaue eine 2; das Elementarereignis $(2, 4)$ aber dass der rote Würfel eine 2 zeigt, der blaue eine 4.

Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit wir berechnen wollen können unter anderem sein:

- A = "Der rote Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4"
- B = "Der rote und der blaue Würfel zeigen die gleiche Zahl"
- C = "Der blaue Würfel zeigt eine größere Zahl als der rote Würfel"

Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ repräsentiert die Menge aller Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit wir später berechnen können. Aus der Intuition des Gegenereignisses (also z.B. "der rote Würfel zeigt *nicht* eine Zahl kleiner als 4" bzw. "der rote Würfel zeigt mindestens 4 Augen") wird klar, wieso es wichtig ist, dass $\mathcal{F}$ auch das Komplement $\overline{A}$ (also das Gegenereignis von A) enthält, wenn A selbst enthalten ist. Mit der zweiten Forderung der (σ-)Vereinigungsstabilität wird ein Mengensystem konstruiert, in dem im Wesentlichen alle intuitiv definierbaren Ereignisse enthalten sind, also auch Vereinigungen von Ereignissen (A oder B tritt ein), Schnitte (A und B tritt ein) und auch kompliziertere wiederholte Anwendung dieser Operationen (z.B. A und B tritt ein, aber nicht C).

(a) Gib eine geeignete σ-Algebra $\mathcal{F}$ an, die alle Ereignisse aus der Liste oben enthält sowie einfache Abwandlungen davon (Ersetze die 4 durch eine beliebige Zahl; Ersetze "rot" durch "blau" und umgekehrt; Ersetze "kleiner" durch "größer"; ...).

Lösung:
$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, also die Potenzmenge.

(b) Gehe davon aus, dass die beiden Würfel fair sind, also jede Seite mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zeigen. Gib das Wahrscheinlichkeitsmaß $P\colon \mathcal{F} \to [0, 1]$ an und gib die Wahrscheinlichkeiten für die drei Ereignisse aus der Liste oben an. Es ist hilfreich, wenn du ein Ereignis als Menge von Elementarereignissen betrachtest.

Lösung:
Da die Würfel fair sind, hat bei unserer Definition jedes Elementarereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit. Es gibt insgesamt 36 Elementarereignisse ($(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)$), also hat jedes Elementarereignis Wahrscheinlichkeit $P(\omega) = \frac{1}{36}$. Für eine Menge $M = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \in \mathcal{F}$ ist $P(M) = \frac{n}{36}$.

- *Elementarereignisse, die in* A *liegen haben die Form* (r, b) *für* $r \in \{1, 2, 3\}$ *und* $b \in \{1, \ldots, 6\}$. *Durch Multiplikation erhält man, dass* 18 *Elementarereignisse* $\omega_1, \ldots, \omega_{18}$ *dieser Form gibt, also* $P(A) = P(\omega_1) + \cdots + P(\omega_{18}) = 18 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{2}$.
- *Ereignisse in* B *haben die Form* (r, r) *für* $a \in \{1, \ldots, 6\}$. *Also* $P(A) = \frac{1}{6}$ *(siehe gerade).*
- *Ereignisse in* C *haben die Form* (r, b) *für* $a \in \{1, \ldots, 5\}$ *und* $b \in \{r + 1, \ldots, 6\}$. $r = 6$ *ist nicht möglich, da* b *dann nicht größer sein kann. Für* $r = 1$ *gibt es* 5 *mögliche Werte von* b*, für* $r = 2$ *gibt es* 4 *mögliche Werte usw. Gesamt gibt es also* $5+4+3+2+1 = 15$ *Elementarereignisse in der geforderten Form. Also* $P(C) = \frac{5}{12}$.

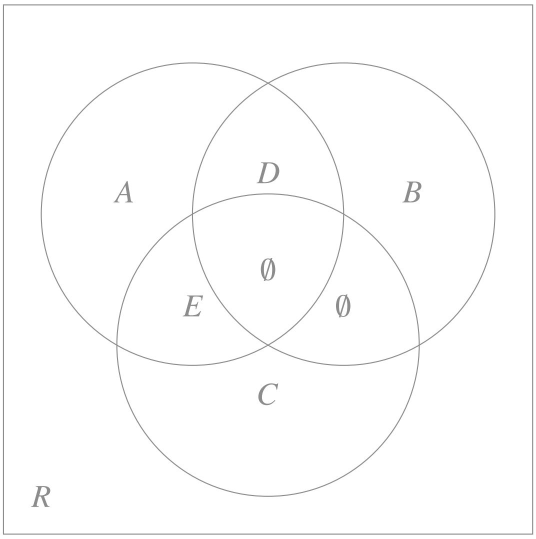
Aufgabe 2 (6 Punkte)

Mache dich mit Mengendiagrammen (Euler- und Venn-Diagramme) vertraut, siehe z.B. Abbildung 2.2 im Skript und den kurzen aber sehr anschaulichen Wikipedia-Artikel dazu: `https://de.wikipedia.org/wiki/Mengendiagramm`. In einem Mengendiagramm werden Ereignisse $A, B, \ldots \subset \mathcal{F}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ als Kreise (oder andere Formen) dargestellt und die Überschneidungen dieser Formen repräsentieren den Schnitt von Ereignissen. In einem Venn-Diagramm werden alle möglichen Schnitte von Kreisen dargestellt, auch wenn die Schnitte der entsprechenden Mengen leer sind.

Zeichne ein Venn-Diagramm das die 3 Ereignisse aus Aufgabe 1 zueinander in Relation setzt. Inklusive dem äußeren Bereich, der in keinem der drei Kreise enthalten ist, sollten 8 voneinander getrennte Bereiche sichtbar sein. Gib für jeden dieser Bereiche eine Beschreibung und ein Elementarereignis an, das im Bereich liegt. Gib an, falls ein Bereich leer ist, also kein Elementarereignis enthält.

Lösung:
Bezeichne

- A = *"Der rote Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4". z.B.* $(2, 4) \in A$
- B = *"Der rote und der blaue Würfel zeigen die gleiche Zahl". z.B.* $(3, 3) \in A$
- C = *"Der blaue Würfel zeigt eine größere Zahl als der rote Würfel". z.B.* $(2, 4) \in A$



Die weiteren Bereiche sind dann

- $\emptyset$ = *Die leere Menge, also das unmögliche Ereignis.*
- D = *"Beide Würfel zeigen die gleiche Zahl, die kleiner als 4 ist". z.B.* $(3, 3) \in D$
- E = *"Der rote Würfel zeig eine Zahl kleiner als 4, der blaue Würfel zeigt eine größere Zahl als der rote Würfel". z.B.* $(3, 5) \in D$
- R = *"Alle anderen Ereignisse". z.B.* $(5, 1) \in R$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige, dass die Definition 2.2.2 im Skript definierte Klasse $\sigma(U)$ tatsächlich eine σ-Algebra ist.

Lösung:

- *Aus $A \in \sigma(U)$ folgt, dass $A \in F$ für alle σ-Algebren F mit $U \subset F$. Da F σ-Algebren sind, folgt auch $\overline{A} \in F$ für alle σ-Algebren F mit $U \subset F$ und damit $\overline{A} \in \sigma(U)$.*
- *Für (unendliche) Vereinigungen gilt ein ähnliches Argument: Seien $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(U)$, dann gilt auch $A_i \in F$ für alle σ-Algebren F mit $U \subset F$, also auch $\cup_{i \geq i} A_i \in F$ für alle σ-Algebren F mit $U \subset F$ und damit $\cup_{i \geq i} A_i \in \sigma(U)$.*

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeige, dass die im Skript definierte Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ (also $d = 1$) alle abgeschlossenen Intervalle (also Intervalle der Form $[a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) enthält.

Lösung:

Es ist $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(U)$ wobei U alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält. Insbesondere sind für beliebige $a, b \in \mathbb{R}, b > a$ die Mengen $(-\infty, a), (b, \infty), \mathbb{R} \in U \subset \sigma(U)$. Nach Definition einer ($\sigma-$)Algebra gilt dann auch $M = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ und damit $[a, b] = \overline{M} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 5 (5 Bonuspunkte)

Führe die Induktion aus dem Beweis von Folgerung 2.2.1, Teil 4) bis zum Ende durch.

Lösung:

Sei $n > 2$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^{n} A_i) &= P(\cup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) \\
&\overset{\text{Satz 2.2.1, 2)}}{=} P(\cup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\cup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n) \\
&= P(\cup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\cup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)) \\
&\overset{\text{I.A.}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i \le n-1} P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_i}) + \\
&\quad\quad P(A_n) - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i \le n-1} P((A_{k_1} \cap A_n) \cap \cdots \cap (A_{k_i} \cap A_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i < n} P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_i}) + \\
&\quad\quad P(A_n) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i = n} P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i < n} P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_i}) + \\
&\quad\quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i = n} P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i \le n} P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_i}).
\end{aligned}
$$

$\square$
