Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, den 17.07. um 12 Uhr

Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 12

46. Man zeige mittels der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass die Wurzelfunktion $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist. (1)

47. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch (2)

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & x \in \mathbb{Q} \text{ mit teilerfremder Darstellung } x = m/n, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Man zeige, dass f in jedem irrationalen Punkt stetig, aber in jedem rationalen Punkt unstetig ist.
Hinweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 1/\varepsilon$.

48. Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen: (4)

(a) Ist $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig, dann gibt es ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$.

(b) Ist g auf $[0,1]$ definiert und beschränkt, so ist $x \mapsto xg(x)$ in 0 stetig.

(c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ stetig, so muss f konstant sein.

(d) Jede stetige Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

49. Es seien $f_1, f_2, \ldots$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Für jedes feste $x \in I$ sei die Folge $(f_1(x), f_2(x), \ldots)$ nach oben beschränkt. Wir definieren die Funktion $g(x) := \sup(f_1(x), f_2(x), \ldots)$. Man gebe ein Beispiel, das zeigt, dass die Funktion g nicht stetig zu sein braucht. (1)

50. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$. Seien $\alpha, M > 0$ Konstanten, sodass (2)

$$|f(z) - f(w)| \leq M|z - w|^\alpha$$

für alle $z, w \in D$ gilt. Man zeige, dass f in D stetig ist.