SoSe 2023
5. Mai 2023

INSTITUT FÜR STOCHASTIK

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Philipp Rieder

Angewandte Stochastik – Übungsblatt 1

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 5. Mai 2023 um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen vor Beginn der Übung über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als *exakt zwei Dateien* ab: Eine PDF-Datei für die theoretischen Aufgaben und eine R- oder R-Markdown-Datei (Dateiendung *.R* bzw. *.RMD*) für die Programmieraufgaben. Andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Bearbeitet das Übungsblatt in *Gruppen von 3- 4 Personen* und gebt bitte euren jeweiligen Studiengang an. Nur eine Person aus der Gruppe soll das Übungsblatt abgeben. Beachtet außerdem die Hinweise zu den Übungen in Moodle.

Aufgabe 1 (1 + 6 = 7 Punkte)

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um das gleichzeitige Würfeln mit zwei sechsseitigen Würfeln zu beschreiben. Die Grundmenge Ω wählen wir wie in Beispiel 2.1.2 im Skript. Ein Elementarereignis (also ein Element $\omega \in \Omega$ der Grundmenge) gibt also an, welche Zahlen die beiden Würfel zeigen. Beachte, dass die Würfel hier unterscheidbar sind, wir haben also z.B. einen roten Würfel, dem der erste Eintrag von ω entspricht und einen blauen Würfel, dessen Augenzahl im zweiten Eintrag von ω steht. Das Elementarereignis $(4, 2)$ bedeutet dann, dass der rote Würfel eine 4 zeigt, der blaue eine 2; das Elementarereignis $(2, 4)$ aber dass der rote Würfel eine 2 zeigt, der blaue eine 4.

Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit wir berechnen wollen können unter anderem sein:

- A = "Der rote Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4"
- B = "Der rote und der blaue Würfel zeigen die gleiche Zahl"
- C = "Der blaue Würfel zeigt eine größere Zahl als der rote Würfel"

Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ repräsentiert die Menge aller Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit wir später berechnen können. Aus der Intuition des Gegenereignisses (also z.B. "der rote Würfel zeigt *nicht* eine Zahl kleiner als 4" bzw. "der rote Würfel zeigt mindestens 4 Augen") wird klar, wieso es wichtig ist, dass $\mathcal{F}$ auch das Komplement $\overline{A}$ (also das Gegenereignis von A) enthält, wenn A selbst enthalten ist. Mit der zweiten Forderung der (σ-)Vereinigungsstabilität wird ein Mengensystem konstruiert, in dem im Wesentlichen alle intuitiv definierbaren Ereignisse enthalten sind, also auch Vereinigungen von Ereignissen (A oder B tritt ein), Schnitte (A und B tritt ein) und auch kompliziertere wiederholte Anwendung dieser Operationen (z.B. A und B tritt ein, aber nicht C).

(a) Gib eine geeignete σ-Algebra $\mathcal{F}$ an, die alle Ereignisse aus der Liste oben enthält sowie einfache Abwandlungen davon (Ersetze die 4 durch eine beliebige Zahl; Ersetze "rot" durch "blau" und umgekehrt; Ersetze "kleiner" durch "größer"; ...).

(b) Gehe davon aus, dass die beiden Würfel fair sind, also jede Seite mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zeigen. Gib das Wahrscheinlichkeitsmaß $P\colon \mathcal{F} \to [0, 1]$ an und gib die Wahrscheinlichkeiten für die drei Ereignisse aus der Liste oben an. Es ist hilfreich, wenn du ein Ereignis als Menge von Elementarereignissen betrachtest.

Aufgabe 2 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

Gib für folgende zufällige Ereignisse einen möglichst einfachen Grundraum Ω an. Verwende dabei nur mathematische Ausdrücke und Definitionen. Beschreibe auch kurz in Worten, welchem (Elementar-)Ereignis ein einzelnes Element $\omega \in \Omega$ entspricht.

(a) Du sitzt vor dem H22 und beobachtest, wieviele Studierende den Hörsaal nach der letzten Vorlesung verlassen

(b) Du triffst an der Uni einen Kommilitonen und fragst ihn, ob er Zeit hat, um mit dir essen zu gehen und falls ja, in welches Speiselokal der Uni (Mensa, Burger Bar, Westside Diner) er gehen möchte.[1]

(c) Du jobbst in einer Bar und notierst dir, wieviele Kunden du an einem Tag bedienst und wieviel Geld jeder einzelne für seine Drinks ausgibt. [2]

Aufgabe 3 (0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 3 Punkte)

Sei $\Omega = \{5, 6, 7, 8, 9, 16, 17, 18, 19, 20\}$ mit Teilmengen $A = \{6, 8, 16, 18, 20\}$, $B = \{5, 7, 9, 17, 19\}$, $C = \{16, 17, 18, 19\}$ und $D = \{6, 9, 20\}$. Schreibe folgende Mengen als Aufzählung ihrer Elemente:

(a) $A \cup C$

(b) $A \cap B$

(c) C^c

(d) $C^c \cap D$

(e) $(\Omega \setminus C)^c$

(f) $A \setminus C$

Aufgabe 4 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Betrachte folgende Ereignisse bzgl. der Wertentwicklung des Bitcoinkurses nach einem Jahr:

- A = "Der Kurs steigt um weniger als 5%, fällt aber nicht."
- B = "Der Kurs steigt um 5 - 10%."

[1] Wir gehen davon aus, dass sich dein Kommilitone bzgl. der Lokalwahl entscheiden kann und nicht einfach „mir egal wo" sagt.

[2] Du könntest auch keinen Kunden bedient haben.

- C = “Der Kurs steigt über 10%.”

Betrachte die folgenden Ereignisse

(a) $A \cup B$

(b) $(A \cup B \cup C)^c$

(c) $B^c \cap C^c$

Beschreibe die Ereignisse in (a)-(c) jeweils zunächst in Worten und bestimme ihre Wahrscheinlichkeit, falls bekannt ist, dass $P(A) = 0.4$ und $P(B) = P(C) = 0.05$

Aufgabe 5 (1 + 4 + 2 + 5 = 12 Punkte)

Begründe, ob es sich bei den Ereignissystemen $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_4$ um σ-Algebren handelt.

(a) $\Omega = \{23, U, \varepsilon, ☺, \square, ☼\}$ und $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset,\ \Omega,\ \{23, U, \varepsilon, ☺\},\ \{23, \square, ☼\},\ \{U, \varepsilon, ☺\},\ \{23\}\}$

(b) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, wobei A eine nichtleere Teilmenge von Ω ist.

(c) $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{F}_3 = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$

(d) $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}_4 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \subseteq [0,1] \text{ oder } A^c \subseteq [0,1]\}$

Aufgabe 6 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Im Folgenden ist $(\Omega, \mathcal{F})$ stets ein Maßraum und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In welchen Fällen ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum?

(a) $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\},\ \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\{k\}) = (1/2)^k,\ k \in \Omega$

(b) $\Omega = \mathbb{R},\ \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(A) = \mathbb{1}_A(0),\ A \in \mathcal{F}$, wobei

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Indikatorfunktion bezeichnet.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt, $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\},\ \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und
$\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in A} \frac{2j}{n(n+1)},\ A \in \mathcal{F}$