



Übungen Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure: Blatt 4

Aufgabe 1:

(8)

Im Folgenden ist jeweils das n -te Folgenglied der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben. Berechne mithilfe der Grenzwertsätze den Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so er existiert.

(a) $a_n := \frac{(n-1)^3}{2n^4 + \pi n - 2}$

(e) $a_n := \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}}$

(b) $a_n := \frac{\binom{n}{2}}{n^2 + 1}$

(f) $a_n := \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$

(c) $a_n := \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k$

(g) $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^k}$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$.

(d) $a_n := \sqrt{n^2 + n} - n$

(h) $a_n := \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$

Hinweise: Es dürfen alle Grenzwertsätze, Kriterien und Grenzwerte bekannter Folgen aus der Vorlesung benutzt werden. Es ist hier nicht notwendig, die Definition von Folgenkonvergenz zu benutzen.

Für ausgewählte Folgen gibt es auf Seite 2 kleine Tipps, wie man vorgehen kann, falls man nicht weiterkommt.

Aufgabe 2:

(0,5+2,5)

Es sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_0 := 0$ und $a_n := \sqrt{2 + a_{n-1}}$.

(a) Schreibe die ersten 3 Folgenglieder dieser Folge auf.

(b) Zeige, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Hinweis: Zeige, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist (jeweils Induktion) und benutze ein Kriterium aus der Vorlesung. Bestimme anschließend den Grenzwert.

Aufgabe 3:

(2+2)

Im Folgenden ist jeweils das n -te Folgenglied der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben. Bestimme den Grenzwert der Folgen mithilfe der Grenzwertsätze und zeige die Konvergenz mithilfe der Definition, finde also zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein N , sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

(a) $a_n := \frac{n}{2n+4}$

(b) $a_n := \frac{2n^3 + 3n^2 - 8n}{3n^3 - 2n}$

Aufgabe 4:

(1+1+3)

Zeige oder widerlege:

- (a) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, so ist der Grenzwert eindeutig.
- (b) Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen. Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, so sind sowohl $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.
- (c) Es seien zwei nicht-negative Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben (nicht notwendigerweise konvergent). Wir betrachten die Folge der *arithmetischen* bzw. *geometrischen* Mittel $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$A_n := \frac{a_n + b_n}{2} \text{ bzw. } G_n := \sqrt{a_n b_n}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeige oder widerlege:

- (i) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- (ii) Ist $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Tipps zu Aufgabe 1:

- (d): Als Bruch mit wurzelfreiem Zähler schreiben.
- (f): Zunächst das n te Folgenglied umschreiben, sodass kein Produktzeichen vorkommt.
- (g): Fallunterscheidung.
- (h): Einschnürungssatz.