Universität Ulm
29.03.2021

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
WiSe 20/21

90 Punkte

Klausur: Lineare Algebra für Informatik

1. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= b_1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= b_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= b_4 \end{aligned}$$

mit festem $(b_1, b_2, b_3, b_4)^\top \in \mathbb{R}^4$.

i) Ist das gegebene lineare Gleichungssystem für alle $(b_1, b_2, b_3, b_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ lösbar? (2)

ii) Formulieren Sie die Frage nach der Existenz einer Lösung des Systems als Fragestellung für eine lineare Abbildung F. Geben Sie eine Bedingung an F an, sodass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. (4)

iii) Angenommen, das lineare Gleichungssystem ist lösbar. Welche Dimension hat die Lösungsmenge mindestens, welche höchstens? (4)
Erinnerung: Ist U ein Unterraum, dann ist für einen affinen Unterraum $U' = v + U = \{ x \mid x = v + u \wedge u \in U \}$ definiert, dass $\dim U' = \dim U$.

iv) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens die Lösungsmenge und schließlich deren Dimension im Fall (7)

$$(b_1, b_2, b_3, b_4)^\top = (1, 1, 0, 1)^\top.$$

2. i) Bestimmen Sie τ^{-1} und $\mathrm{sgn}(\tau)$ für die Permutation (4)

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_6.$$

ii) Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation mit $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = -1$ gilt. (3)

3. Es sei $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ der Raum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 und durch $\mathcal{B} = \{ 1, x, x^2 \}$ sei eine Basis von V gegeben.

i) Wann heißt ganz allgemein eine Abbildung H zwischen zwei $\mathbb{R}$-Vektorräumen W und U ein Isomorphismus? (2)

ii) Zeigen Sie, dass V isomorph zu $\mathbb{R}^3$ ist, indem Sie einen Isomorphismus $F : V \to \mathbb{R}^3$ angeben. Begründen Sie auch, dass F die Eigenschaften eines Isomorphismus erfüllt. (6)

iii) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ und $G : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, sodass $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(G)$. (2)
Bestimmen Sie $G(P)(x)$ für allgemeines $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

4. Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und für $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $A(v_1, ..., v_n) = (v_1|...|v_n) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ als die $(n \times n)$-Matrix mit Spalten $v_1, ..., v_n$. Seien nun $a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(v) = \det(A(a_1, ..., a_{n-1}, v))$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

i) Begründen Sie, dass F eine Linearform ist. (2)

ii) Zeigen Sie, dass F genau dann surjektiv ist, wenn $a_1, ..., a_{n-1}$ linear unabhängig sind. (8)

5. Betrachten Sie die Quadrik

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) := x^\top A x + b^\top x + c = 0\},$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c = 1$$

i) Begründen Sie, dass es eine orthogonale Matrix B gibt, für welche $B^\top AB$ in Diagonalgestalt ist. (2)

ii) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von A gegeben sind durch $-1, 1, 2$. (6)

iii) Bestimmen Sie nun eine solche orthogonale Matrix B, wie in Teil i). (8)

6. Seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

i) Geben Sie eine Formel für Spur$(A \circ B)$ an. (2)

ii) Zeigen Sie, dass die Gleichung (6)

$$A \circ B - B \circ A = I_n$$

niemals erfüllt ist.

7. i) Es sei $K \neq \emptyset$ eine Menge und $R \subset K \times K$. Wann heißt R eine Äquivalenzrelation? (3)

ii) Auf $M(n \times n, \mathbb{C})$ ist durch $ARB :\Leftrightarrow$ “die Mengen der Eigenwerte von A und B sind gleich” eine Relation erklärt. Handelt es sich bei R um eine Äquivalenzrelation? Welche Eigenschaften sind erfüllt, welche ggf. nicht? (3)

iii) Wann heißen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ ähnlich? (2)

iv) Zeigen Sie, dass aus der Ähnlichkeit von $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ auch ARB folgt, die Umkehrung im Allgemeinen aber falsch ist. (8)

8. Seien (6)

$$A = \begin{pmatrix} 1+\iota & 0 & 0 \\ 0 & 1-\iota & 2 \\ 0 & 1+\iota & 1+2\iota \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & \iota & -\iota \\ 0 & 0 & 1 \\ 1+\iota & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie eine Matrix $C \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$, sodass $CA = B$.
Hinweis: Wie würden Sie vorgehen, wenn $B = I_3$ die Einheitsmatrix wäre?

Viel Erfolg!