Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Integralrechnung

Integrationstechniken

- Standardintegrale (Stammfunktionen 12.1.5)
- Substitution
- partielle Integration
- Hilfstechnik Partialbruchzerlegung

Substitution

Satz 12.1.10: Substitutionsregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle, $f : I \to J$ differenzierbar und $g : J \to \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion im Intervall J, dann besitzt die Funktion $g \circ f \cdot f' : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion und für $t \in I$ gilt die *Substitutionsregel*

$$\int g(x)\,dx\Big|_{x=f(t)} = \int g(f(t))f'(t)\,dt.$$

Korollar 12.1.11

Ist f auf I umkehrbar, so erhält man durch Einsetzen die häufig nützlichere Form der *Substitutionsregel*:

$$\int g(x)\,dx = \int g(f(t)) \cdot f'(t)\,dt\Big|_{t=f^{-1}(x)}.$$

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Wann verwende ich Substitution?

$$\int g(x)\; dx|_{x=f(t)} = \int g(f(t))f'(t)\; dt$$

Beispiel:
Sei $g_1(u) = \cos(u),\;\; f(t) = \ln t$ und $f'(t) = \frac{1}{t}$.

$$g(f(t)) \cdot f'(t) = \cos(\ln(t)) \cdot \frac{1}{t}$$

Nach der Substitutionsregel gilt also

$$\int \frac{\cos(\ln t)}{t} dt = \int \cos(x) dx|_{x=\ln(t)} = \sin(\ln(t))$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x)dx$$

$$g(u) = u^4,\ f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

$$g(u) = u^4,\ \ f(x) = \cos(x),\ \ f'(x) = -\sin(x)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

$$g(u) = u^4,\ f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$g(u) = \tfrac{1}{\sqrt{u}},\ f(x) = 1 + x^2,\ f'(x) = 2x$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

$$g(u) = u^4,\ f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$g(u) = \tfrac{1}{\sqrt{u}},\ f(x) = 1 + x^2,\ f'(x) = 2x$$

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

$$g(u) = u^4,\ f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{u}},\ f(x) = 1 + x^2,\ f'(x) = 2x$$

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$$

$$g(u) = u,\ f(x) = \arctan(x),\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Anwendung: Substitution

$$\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx$$

Anwendung: Substitution

$$\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx$$

Wir sehen $f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$.

Substituieren mit $u = \cos(x),\ u' = -\sin(x)$

Anwendung: Substitution

$$\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx$$

Wir sehen $f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$.

Substituieren mit $u = \cos(x),\ u' = -\sin(x)$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx &= \int \frac{\sin(x)}{\exp(u)} \frac{du}{-\sin(x)} \\
&= \int \frac{-1}{e^u} du \\
&= e^{-u}
\end{aligned}$$

Anwendung: Substitution

$$\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx$$

Wir sehen $f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$.

Substituieren mit $u = \cos(x),\ u' = -\sin(x)$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx &= \int \frac{\sin(x)}{\exp(u)} \frac{du}{-\sin(x)} \\ &= \int \frac{-1}{e^u} du \\ &= e^{-u}\end{aligned}$$

Rücksubstituieren $u = \cos(x)$

$$\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx = e^{-\cos(x)}$$

Partielle Integration

Satz 12.1.8: Partielle Integration

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in I und die Funktion $f \cdot g'$ besitze eine Stammfunktion in I. Dann hat auch $f' \cdot g$

eine Stammfunktion und es gilt

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Beispiele 12.1.9. (i) (a) Wir bestimmen $\int xe^x\,dx$ mit Hilfe partieller Integration. Dafür wählen wir $f(x) = e^x$ mit $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x$ mit $g'(x) = 1$ und erhalten so

$$\int \underbrace{x}_{=g(x)} \underbrace{e^x}_{=f'(x)}\,dx = \underbrace{xe^x}_{f(x)g(x)} - \int \underbrace{1}_{=g'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=f(x)}\,dx = xe^x - e^x.$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Wann verwende ich partielle Integration?

Eine Funktion mit bekannter Stammfunktion $f'(x)$, eine mit bekannter Ableitung $g(x)$.

$$\int x \ln(x) dx$$

Wann verwende ich partielle Integration?

Eine Funktion mit bekannter Stammfunktion $f'(x)$, eine mit bekannter Ableitung $g(x)$.

$$\int x \ln(x) dx$$

$f'(x) = x, \; g(x) = \ln(x)$.

$$\begin{aligned} \int x \ln(x) dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \\ &= x^2 \left(\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Wann verwende ich partielle Integration?

Eine Funktion mit bekannter Stammfunktion $f'(x)$, eine mit bekannter Ableitung $g(x)$.

$$\int x^2 e^{2x} dx$$

$f'(x) = e^{2x},\ g(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x} dx &= x^2 \frac{1}{2} e^{2x} - \int 2x \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ \text{(nochmal PI)} \qquad &= x^2 e^{2x} - x \frac{1}{2} e^{2x} + \int e^{2x} dx \\ &= xe^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} \end{aligned}$$

Aufgabe: Integration

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx$$

$\frac{d}{dx}\cos(x^2) = -2x\sin(x^2)$

Aufgabe: Integration

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx$$

$\frac{d}{dx}\cos(x^2) = -2x\sin(x^2)$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx = \int_{\cos(0^2)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{e^u}\,du$$

Aufgabe: Integration

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}dx$$

$\frac{d}{dx}\cos(x^2) = -2x\sin(x^2)$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}dx &= \int_{\cos(0^2)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{e^u}du \\ &= \left[e^{-u}\right]_1^{-1}\end{aligned}$$

Aufgabe: Integration

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx$$

$\frac{d}{dx}\cos(x^2) = -2x\sin(x^2)$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx &= \int_{\cos(0^2)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{e^u}\,du \\
&= \left[e^{-u}\right]_1^{-1} \\
&= e - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen 12.2.8. Aufgrund der Linearität des Integrals und der reellen Partialbruchzerlegung genügt es nun offenbar, Ausdrücke der Form

$$\frac{1}{(x-c)^n}, \quad \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}, \quad \frac{x}{(x^2+bx+c)^n} \tag{12.2}$$

mit Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in \mathbb{R}\left(x^2+bx+c \neq 0\right)$ zu integrieren. Es gilt

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-c} = \ln|x-c|.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-c)^{n-1}}$ für $n > 1$.

(iii)
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4}} \\ &= \frac{4}{4c-b^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+bx+c}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx - \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+bx+c| - \frac{b}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.\end{aligned}$$

Abbildung 1.3: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Rationale Funktionen. zu (iii)

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4c - b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c - b^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$x^2+bx+c = \underbrace{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}_{=x^2+bx+\frac{b^2}{4}} - \frac{b^2}{4} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= \underbrace{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}_{=x^2+bx+\frac{b^2}{4}} - \frac{b^2}{4} + c \\ &= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4} \end{aligned}$$

Rationale Funktionen. zu (iii)

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= \underbrace{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}_{=x^2+bx+\frac{b^2}{4}} - \frac{b^2}{4} + c \\ &= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4} \\ &= \frac{4c-b^2}{4}\left[\frac{4}{4c-b^2}\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

Rationale Funktionen. zu (iii)

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$\begin{aligned}
x^2+bx+c &= \underbrace{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}_{=x^2+bx+\frac{b^2}{4}} - \frac{b^2}{4} + c \\
&= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4} \\
&= \frac{4c-b^2}{4}\left[\frac{4}{4c-b^2}\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + 1\right] \\
&= \frac{4c-b^2}{4}\left[\underbrace{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2}_{=u^2} + 1\right]
\end{aligned}$$

Rationale Funktionen: zu (iii)

$$x^2 + bx + c = \frac{4c - b^2}{4}\left[\underbrace{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2}_{=u^2} + 1\right]$$

$$u = \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \int \frac{4}{4c-b^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2} dx$$

Rationale Funktionen: zu (iii)

$$x^2 + bx + c = \frac{4c - b^2}{4}\left[\underbrace{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2}_{=u^2} + 1\right]$$

$$u = \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{4}{4c-b^2}\frac{1}{1+\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2}dx$$

$$= \frac{4}{4c-b^2}\underbrace{\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}}_{=\frac{1}{u'}}\int \frac{1}{1+u^2}du$$

Rationale Funktionen: zu (iii)

$$x^2 + bx + c = \frac{4c - b^2}{4}\left[\underbrace{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2}_{=u^2} + 1\right]$$

$$u = \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{4}{4c-b^2} \frac{1}{1+\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{4}{4c-b^2} \underbrace{\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}}_{=\frac{1}{u'}} \int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c-b^2}}$$

Integration rationaler Funktionen 12.2.8. Aufgrund der Linearität des Integrals und der reellen Partialbruchzerlegung genügt es nun offenbar, Ausdrücke der Form

$$\frac{1}{(x-c)^n}, \quad \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}, \quad \frac{x}{(x^2+bx+c)^n} \tag{12.2}$$

mit Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in \mathbb{R}\left(x^2+bx+c \neq 0\right)$ zu integrieren. Es gilt

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-c} = \ln|x-c|.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-c)^{n-1}}$ für $n > 1$.

(iii)
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4}} \\ &= \frac{4}{4c-b^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+bx+c} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx - \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x^2+bx+c} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+bx+c| - \frac{b}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.\end{aligned}$$

Abbildung 1.4: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Rationale Funktionen: zu (iv)

$$\frac{x}{x^2+bx+c} = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}(2x+b)}^{x+\frac{b}{2}} - \frac{b}{2}}{x^2+bx+c}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{2x+b}{x^2+bx+c} - \frac{b}{2}\frac{1}{x^2+bx+c}$$

Rationale Funktionen: zu (iv)

$$\frac{x}{x^2+bx+c} = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}(2x+b)}^{x+\frac{b}{2}} - \frac{b}{2}}{x^2+bx+c}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x+b}{x^2+bx+c} - \frac{b}{2}\frac{1}{x^2+bx+c}$$

Substituiere also $u = x^2+bx+c,\ u' = 2x+b$

$$\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+bx+c|$$

Und aus dem hinteren Integral wie vorher.

$$\frac{b}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

Beispiel

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$$

Beispiel

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$$

Forme das Polynom um

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + 1 \right)$$
$$= 2 \cdot \left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)$$

Beispiel

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

Forme das Polynom um

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}(x+1)^2+1\right)$$
$$= 2\cdot\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{1}{2}\,\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan u$$

Substituiert mit $u = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$, $u' = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$