Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
SoSe 2021

20 Punkte

Übungen zu: Analysis 1 für Informatik Blatt 06

Hinweise zur Abgabe

Abgabetermin: 07.06.21, 14:00 Uhr
Abgabeformat: Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!
Sonstiges: Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an.

Aufgaben

1. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir Funktionen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\sinh(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \cosh(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

i) Zeigen Sie, dass $\sinh, \cosh$ wohldefiniert sind, also dass die Reihen in der Definitionsvorschrift für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. (3)

ii) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

a) $2\sinh(x) = e^x - e^{-x}, 2\cosh(x) = e^x + e^{-x}$ (4)

b) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$. (3)

Die Funktion sinh nennt man *Sinus Hyperbolicus* und cosh nennt man *Cosinus Hyperbolicus.*

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen: (10)

i) $\log_2 x = 10$

ii) $\log_{10}(4x - 2) = 1$

iii) $\log_x 4 = 3$, $(x > 0)$

iv) $\log_2 x + \log_2(x - 6) = 3$

v) $2x^2 - 5x = 3$

vi) $\sin(x) = \sin(2x)$, $(0 \leq x < 2\pi)$

vii) $27^x = 6^{x+1}$

viii) $8^{4x-5}27^{5x-3} = 18 \cdot 16^{3x-4}9^{4x+5}$

ix) $4^x + 4 = 2^{x+2} + 2^x$

x) $\sin^2(x) - \sin(x) = 2$, $(0 \leq x < 2\pi)$

3. Zeigen Sie, dass e irrational ist. (10)
Hinweis: Nehmen Sie an, es gibt $p, q \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{p}{q} = e$. Dann gilt insbesondere $\frac{p}{q} = e = \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} + \sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!}$

4. Sei $D \subset \mathbb{R}$ nicht-leer und $f : D \to \mathbb{R}$ sei eine reelle, streng monoton wachsende Funktionen. Sei weiter $V = f(D)$ und $g : D \to V$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ und $h : V \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

i) Zeigen Sie, dass $h \circ f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist. (2)

ii) Zeigen Sie, dass f injektiv und g bijektiv ist. (3)

iii) Zeigen Sie, dass auch $g^{-1} : V \to D$ streng monoton wachsend ist. (3)

iv) Zeigen Sie, dass $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist. (2)