Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 05

Abgabedatum: 23.05.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

Zeigen oder widerlegen sie:

1. Wenn eine Matrix nur positive Einträge hat, sind alle ihre Eigenwerte positiv.
2. Falls A und $-A$ dieselben Eigenwerte besitzen, dann ist A nicht invertierbar.
3. Bei einer Dreiecksmatrix stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen.

2. (A) Diagonalisieren von Matrizen

Es sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie Basen der Eigenräume von A. (2)
2. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. (1)
3. Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$. (1)

Führen Sie die obigen Schritte 1 und 2 auch für die Matrix B statt A durch, falls möglich:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)

3. (A) Die Fibonacci-Folge

Wir betrachten die Fibonacci-Folge mit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n \geq 2$.

1. Bestimmen Sie eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$. (2)
2. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A. (2)
3. Bestimmen Sie A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. (1)

4. Folgern Sie aus dem letzten Schritt, dass das n-te Glied der Fibonacci-Folge die Darstellung

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

besitzt. (1)

4. (A) Eigenschaften von Eigenwerten

Zeigen Sie

(a) Ist $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ symmetrisch, so sind alle Eigenwerte von A reell . (1)

(b) Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann ist $-\lambda$ ein Eigenwert von $-A$. (1)

(c) $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann nicht invertierbar, wenn 0 ein Eigenwert von A ist . (1)

(d) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ invertierbar und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, dann ist $\lambda \neq 0$ und $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1} . (1)

(e) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, dann ist für $m \in \mathbb{N}$ auch λ^m ein Eigenwert von A^m . (1)

(f) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dann haben A und $A^\top$ das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte . (1)

5. (A) Diagonalisierbarkeit von Matrizen

a) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt nilpotent, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, für dass $A^m = 0$ gilt. Zeigen Sie:

   i) Falls $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ nilpotent ist, dann hat A nur den Eigenwert 0. (2)

   ii) Falls $0 \neq A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ nilpotent ist, ist A nicht diagonalisierbar. (1)

b) Zeigen Sie: Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, so sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal (bzgl. des Standardskalarprodukts). (3)

6. (T),(NA) Es sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie Basen der Eigenräume von A.
2. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
3. Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

Führen Sie die obigen Schritte auch für die folgende Matrix durch, falls möglich:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. (T), (NA)

(a) Es sei $G = (g_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix, deren Spaltensummen alle 1 sind, d.h.

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \left(\sum_{i=1}^{n} g_{ij} = 1 \right).$$

Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert von G ist.

(b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen über orthogonale Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

(a) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt bezeichnet.

(b) $\det A \in \{1, -1\}$.

(c) Zeigen Sie, dass die orthogonalen Matrizen A mit $\det A = 1$ eine Untergruppe von $O(n)$ bilden. Diese wird mit $SO(n)$ bezeichnet.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.