Lösungsvorschlag Blatt 9

1) a) $(\sinh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - (-e^{-x})\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh(x)$

$\cosh(x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh(x)$

b) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left((e^{x})^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2\right)$

$- \frac{1}{4}\left((e^x)^2 - 2e^{-x}e^{x} + (e^{-x})^2\right) = \frac{1}{4}\left(4e^x e^{-x}\right) = \frac{1}{4}\left(4e^0\right) = 1$

c) $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sinh$ ~~mono~~ streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \begin{cases} > 0 & , x > 0 \\ < 0 & , x < 0 \\ = 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \cosh$ streng monoton steigend auf $\mathbb{R}^+$, streng monoton fallend auf $\mathbb{R}^-$ (~~Extremum~~ Extremum bei 0, also keine strenge Monotonie auf $[0,\infty)$ bzw $(-\infty, 0]$)

d) Es gilt $W = [1, \infty)$.

Injektivität: Folgt aus der strengen Monotonie (siehe c) ~~und~~

Surjektivität: Folgt aus der strengen Monotonie und da darum, dass $\cosh(0) = 1$, $\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = +\infty$

e) Arcosh ist stetig als Umkehrfunktion einer stetigen und streng monotonen Funktion. Arcosh ist differenzierbar als Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion im Innern von W.

Aus b) folgt: $\cosh'(x) = \sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$

$$\Rightarrow (\operatorname{arcosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{\cosh(\operatorname{arcosh}(x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

f) z.z.: $\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$. Setze $e^x = u$ $(\Leftrightarrow x = \ln(u))$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) \overset{!}{=} y$$

$$\Leftrightarrow uy = \frac{1}{2}(u^2+1) \Leftrightarrow u^2 - 2uy + 1 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

Es gilt: $x \to \infty \Rightarrow u \to \infty \Rightarrow y \to \infty$. Das ist nur der Fall für $u = y + \sqrt{y^2-1}$

Resubstitution: $x = \ln(u) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = \ln\left(\cosh(x) + \sqrt{\cosh^2(x) - 1}\right)$ □

(z.z.: $e^x \geq 1+x$) 2) Sei $x \geq 0$. Betrachte $h(x) = e^x - 1 - x$, $h'(x) = e^x - 1$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $h'(x) \geq 0 \ \forall x \geq 0$

h monoton wachsend für $x \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0) = 0 \ \forall x \geq 0 \Rightarrow$ Beh. für $x \geq 0$

Sei $x < 0$. Betrachte $\tilde{h}(x) = h(-x)$

$\Rightarrow \tilde{h}(x) = e^{-x} + x - 1$, $\tilde{h}'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^x}$ für $x > 0$

$\Rightarrow \tilde{h}'(0) = 0$, $\tilde{h}'(x) > 0$ für $x > 0 \Rightarrow \tilde{h}$ ist monoton ~~wachsend~~ wachsend

$\Rightarrow \tilde{h}(x) \geq \tilde{h}(0) = 0 \quad \rightarrow h(-x) \geq h(0) \ \forall x > 0 \rightarrow h(x) \geq h(0) \ \forall x < 0$

$\Rightarrow h(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ □

3) a) $$\lim_{x\to\infty} e^{-2x} x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2e^{2x}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = 0$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)\sin(x)}{2x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - \cos^2(x)}{1} = -1$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \lim \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x\cos(x) + \sin(x)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim \frac{\sin(x)}{-x\sin(x) + 2\cos(x)} = 0$$

d) $$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x)}$$

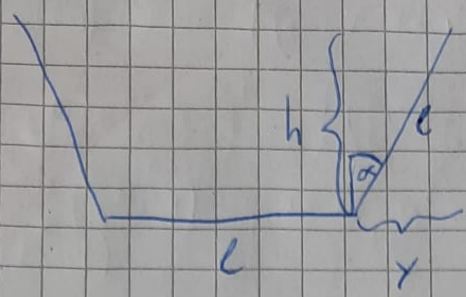
Betrachte $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x) \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$\Rightarrow$ da e^x stetig: $$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x)} = e^0 = 1$$

e) $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\left(\arctan(x) - \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\arctan(x) - \frac{\pi}{2}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{-x^2} = -1$$

f) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^m+1)}{\ln(x^n)} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^m+1} m x^{m-1}}{\frac{1}{x^n} n x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{m}{n} \frac{x^m}{x^m+1} = \frac{m}{n}$$

4)



$\Rightarrow$ Flächeninhalt: $(l+y)h$

Es gilt: $\sin(\alpha) = \frac{y}{l}$, $\cos\alpha = \frac{h}{l}$

$\Rightarrow f(\alpha) = A = (l + l\sin(\alpha))\cdot l\cos(\alpha) = l^2(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha))$

α sollte zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen. Wir maximieren f:

$$f'(\alpha) = l^2(-\sin(\alpha) + \underbrace{\cos^2(\alpha)}_{1-\sin^2(\alpha)} - \sin^2(\alpha)) = l^2(-2\sin^2(\alpha) - \sin(\alpha) + 1)$$

$$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow -2\sin^2(\alpha) - \sin(\alpha) + 1 = 0 \Rightarrow (\sin(\alpha))_1 = -1,\ (\sin(\alpha))_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\alpha_1 = \frac{3\pi}{2}\right),\ \alpha_2 = \frac{\pi}{6}$$

$f''(\alpha) = l^2(-4\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)) \Rightarrow f''(\alpha_2) < 0 \Rightarrow$ lok. Max. bei $\frac{\pi}{6}$

Wegen $f(0) = l^2$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ ~~ist~~, $f(\frac{\pi}{6}) = l^2 \frac{3}{4}\sqrt{3}$ ist bei $\alpha = \frac{\pi}{6}$ auch ein globales Max. $\Rightarrow \frac{\pi}{6} = 30°$ optimal