Analysis für Informatiker und Ingenieure

Blatt 2

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) z.z. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Angenommen, $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, also $\exists x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ mit $x^2 = 3$, wobei p, q teilerfremd (sonst kürze man).

$\Rightarrow x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 3 \Leftrightarrow p^2 = 3q^2 \Rightarrow p^2$ durch 3 teilbar $\overset{p^2 \text{ Quadratzahl}}{\Longrightarrow}$ p durch 3 teilbar.

Also: $p = 3r$, $r \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \left(\frac{3r}{q}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow 9r^2 = 3q^2 \Leftrightarrow 3r^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ durch 3 teilbar $\overset{q^2 \text{ Quadratzahl}}{\Longrightarrow}$ q durch 3 teilbar.

Also: sowohl p als auch q durch 3 teilbar $\lightning$

A1)b) siehe letzte Seite

Aufgabe 2

a) z.z. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Alternativ: Induktionsbeweis nach n (und Identität über Summe von Binomialkoeffizienten benutzen)

Beweis: Nach dem binom. Lehrsatz $(x=y=1)$ ist

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}}$$

$\varnothing$

kombinatorische Begründung:

Die Potenzmenge (Menge aller TM) einer n-elementigen Menge hat 2^n Elemente.

Diese Potenzmenge hat andererseits $\binom{n}{0} = 1$ 0-elementige, $\binom{n}{1}$ 1-elementige, $\binom{n}{2}$ 2-elementige, ..., $\binom{n}{n-1}$ $n-1$-elementige und $\binom{n}{n} = 1$ n-elementige Teilmengen.

Also ist $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

b) z.z. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} = z$

Beweis

Versuchen, binom. Lehrsatz anzuwenden:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \overset{\text{für } k=0 \text{ ist Term } 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \overset{\text{Index-shift}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \binom{n}{k+1} z^{k+1} (1-z)^{n-(k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!} z^{k+1} (1-z)^{n-1-k} = z \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{(n-1)!}{((n-1)-k)!\,k!}}_{=\binom{n-1}{k}} z^k \cdot (1-z)^{(n-1)-k}$$

$$\overset{\text{binom. Lehrsatz}}{=} z \cdot (z + 1 - z)^{n-1} = \underline{\underline{z}}$$

$\varnothing$

c) $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$

Beweis

Induktion nach k

I.A. k=0 $\quad \sum_{j=0}^{0} (-1)^j \binom{n}{j} = \binom{n}{0} = 1 = (-1)^0 \binom{n-1}{0}$ ✓

I.S. k→k+1

Gelte Aussage für ein $k < n-1$. Zu zeigen: $\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k+1}$

Dazu benutzen wir die Formel $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n}{k+1}$ (*) aus dem Skript

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} + (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1} \overset{\text{I.H.}}{=} (-1)^k \cdot \binom{n-1}{k} + (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k+1}$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot \left(\binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k} \right) \overset{(*)}{=} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k+1}$$ ⊠

Aufgabe 3

Die Induktion muss bei n=2 beginnen, also ist der I.A. falsch gesetzt. Der Induktionsschritt hat implizit benutzt, dass $n+1 \geq 3$ (für $n+1=2$ wäre ja das Pferd Nummer 2 nicht in beiden Mengen enthalten). Eigentlich wurde also gezeigt, dass die Aussage für n=1 gilt und für 2→3, 3→4 usw., aber nicht von 1 nach 2.

Aufgabe 4

a) $\binom{516}{2} = 132{,}870$ Handschläge

b) $\binom{40}{20} = 137{,}846{,}528{,}820$ Möglichkeiten. (Wähle 20 aus 40 aus und schicke sie in Raum 1, den Rest in Raum 2)

c) Es gibt 6 richtige und 43 falsche. Also:

$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{wähle 3 richtige}} \cdot \underbrace{\binom{43}{3}}_{\text{und 3 falsche}} = 246{,}820$$

Wahrscheinlichkeit: $\dfrac{\#\text{Günstige}}{\#\text{Mögliche}} = \dfrac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 0.017$

Aufgabe 5

a) $2x^2+4x+2=0$

$\Leftrightarrow 2\cdot(x^2+2x+1)=0$

$\Leftrightarrow 2\cdot(x+1)^2=0$ (Alternativ: Mitternachtsformel)

$\Leftrightarrow$

$x=-1$

b) $x^3+2x^2-x-2=0$

-2 hat die Teiler $\pm1, \pm2$.

Probieren liefert: $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=-2$

mehr kann es nicht geben.

(Alternativ: Raten, Polynomdivision, MNF)

c) $\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}=0$

Substituiere $y=x^2$

$\Rightarrow \frac{1}{10}y^2-\frac{9}{5}y+\frac{81}{10}=0$

$\Rightarrow y_{1,2}=\dfrac{9/5\pm\sqrt{(9/5)^2-4\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{81}{10}}}{\frac{2}{10}}=9$

Rücksubst: $x_1=3\ (=\sqrt{9})$

$x_2=-3$

d) $x^4+x^3-2x^2-x+1=0$

$+1$ hat Teiler ±1

$\Rightarrow x_1=1$ und $x_2=-1$

Polynomdivision durch $(x-1)(x+1)=x^2-1$:

$$
\begin{array}{l}
(x^4+x^3-2x^2-x+1):(x^2-1)=x^2+x-1 \\
-(x^4-x^2) \\
\hline
\quad x^3-x^2 \\
\quad -(x^3-x) \\
\hline
\qquad -x^2+1 \\
\qquad -x^2+1 \\
\hline
\end{array}
$$

Restliche Nullstellen sind die von x^2+x-1

$\Rightarrow x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, also $x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x-1+x}{x(x-1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)} = 1 \Leftrightarrow 2x-1 = x^2-x$

$\Leftrightarrow x^2-3x+1 = 0$

MNF: $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$, also $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Nachtrag

A1b $\sqrt{4} = 2$ ist natürlich rational. Wir gehen analog vor:

Ang. $\exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$: $\frac{p}{q} = \sqrt{4} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 4 \Rightarrow p^2 = 4q^2$

Also p^2 durch 4 teilbar. $\Rightarrow$ p durch 2 teilbar (nicht dun bedingt durch 4, zB $2^2=4$)

Setze $p = 2r$

$\Rightarrow \left(\frac{2r}{q}\right)^2 = 4 \Rightarrow 4\frac{r^2}{q^2} = 4 \Rightarrow \frac{r^2}{q^2} = 1 \Rightarrow r^2 = q^2$

wieder eingesetzt:

$\left(\frac{2r}{q}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{2r}{r}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$, also kein Widerspruch.