# Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

# Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisieren

# Eigenwerte

**Definition 9.3.1: Eigenwert und Eigenvektor**

Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und weiter sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Eine reelle oder komplexe Zahl $\lambda$

heißt *Eigenwert* von $F$, wenn es einen Vektor $x \in V$, $x \neq 0$, gibt mit

$$Fx = \lambda x. \tag{9.7}$$

$x$ heißt dann *Eigenvektor* von $F$ zum Eigenwert $\lambda$.

**Definition 9.3.4: Charakteristisches Polynom**

$$P_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) \text{ beziehungsweise } P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

heißt das *charakteristische Polynom* von $F$ beziehungsweise $A$.

**Abbildung 1.1:** Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2 - 4(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0$$

Die Nullstellen sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2 - 4(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0$$

Die Nullstellen sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$ Das bedeutet auch

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det\big(A - \lambda I\big) \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2 - 4(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0$$

Die Nullstellen sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2 - 4(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0$$

Die Nullstellen sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

Eigenvektoren bestimmen:

$$[A - \lambda_i I]\vec{x}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \overset{\lambda_1=-1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \overset{\lambda_1=-1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_3'=3Z_3-2Z_1]{Z_2'=3Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{array}$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \overset{\lambda_1=-1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3'=3Z_3-2Z_1]{Z_2'=3Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{array}$$

Ein $x_i$ darf immer gewählt werden: Wähle $x_1 = 1$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \overset{\lambda_2=2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\lambda_2=2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{Z_3'=Z_3-2Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 &= -\tfrac{3}{2}x_3 \\ x_1 &= -x_3 \end{aligned}$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\lambda_2=2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{Z_3'=Z_3-2Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{array}$$

Ein $x_i$ darf immer gewählt werden: Wähle $x_1 = 1$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \overset{\lambda_3=4}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\lambda_3=4} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_3'=Z_3+Z_1]{Z_2'=2Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = \frac{5}{2}x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 = 8x_3 \end{array}$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\lambda_3=4} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_3'=Z_3+Z_1]{Z_2'=2Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = \frac{5}{2}x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 = 8x_3 \end{array}$$

Ein $x_i$ darf immer gewählt werden: Wähle $x_3 = 1$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Diagonalisieren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{A besitzt die Eigenwerte} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 2, \\ \lambda_3 = 4 \end{array}$$

Und die Eigenvektoren:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Diagonalisieren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ A besitzt die Eigenwerte $$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_2 &= 2, \\ \lambda_3 &= 4 \end{aligned}$$

Und die Eigenvektoren:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

A ist diagonalisierbar, mit $B^{-1}AB = D$ mit

$$B = (\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

# Eigenraum und Vielfachheit (I)

**Definition 9.4.8: Vielfachheiten und Eigenraum**

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine $m$-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

(i) $m$ die *algebraische Vielfachheit* von $\lambda_0$,

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) =: \dim N_{\lambda_0}$ *geometrische Vielfachheit* von $\lambda_0$ und

(iii) $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{ v \mid Av = \lambda_0 v \} = N_{\lambda_0}$ der *Eigenraum* von $A$ zu $\lambda_0$.

**Abbildung 1.2:** Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

# Eigenraum und Vielfachheit (I)

**Definition 9.4.8: Vielfachheiten und Eigenraum**

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine $m$-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

(i) $m$ die *algebraische Vielfachheit* von $\lambda_0$,

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) =: \dim N_{\lambda_0}$ *geometrische Vielfachheit* von $\lambda_0$ und

(iii) $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{ v \mid Av = \lambda_0 v \} = N_{\lambda_0}$ der *Eigenraum* von $A$ zu $\lambda_0$.

**Abbildung 1.2:** Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

**algebraische Vielfachheit:** Erkenne ich am charakteristischen Polynom.

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot (t - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots$$

algebraische Vielfachheit vom Eigenwert $\lambda_1$ ist $m_1$.

# Algebraische Vielfachheit

**algebraische Vielfachheit:** Erkenne ich am charakteristischen Polynom.

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot (t - \lambda_2)^{m_2} \cdot ...$$

algebraische Vielfachheit vom Eigenwert $\lambda_1$ ist $m_1$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \quad p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 \quad \text{Eigenwert: } \lambda_1 = 1$$

Die algebraische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$ ist 2.

# Eigenraum und Vielfachheit (II)

**Definition 9.4.8: Vielfachheiten und Eigenraum**

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine $m$-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

(i) $m$ die *algebraische Vielfachheit* von $\lambda_0$,

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) =: \dim N_{\lambda_0}$ *geometrische Vielfachheit* von $\lambda_0$ und

(iii) $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{ v \mid Av = \lambda_0 v \} = N_{\lambda_0}$ der *Eigenraum* von $A$ zu $\lambda_0$.

**Abbildung 1.3:** Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

**geometrische Vielfachheit:** Erkenne ich an der Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren vom Eigenwert $\lambda$.

Finde ich für einen Eigenwert $\lambda$ 3 l.u. Eigenvektoren, dann ist die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts 3.

# Geometrische Vielfachheit

**geometrische Vielfachheit:** Erkenne ich an der Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren vom Eigenwert $\lambda$.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \quad p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \quad \text{Eigenwert: } \lambda_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; x = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

Der Eigenwert $\lambda_1 = 1$ besitzt nur einen linear unabhängigen Eigenvektor. Seine geometrische Vielfachheit ist 1.

# Eigenraum und Vielfachheit

**Definition 9.4.8: Vielfachheiten und Eigenraum**

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine $m$-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

(i) $m$ die *algebraische Vielfachheit* von $\lambda_0$,

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) =: \dim N_{\lambda_0}$ *geometrische Vielfachheit* von $\lambda_0$ und

(iii) $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{ v \mid Av = \lambda_0 v \} = N_{\lambda_0}$ der *Eigenraum* von $A$ zu $\lambda_0$.

**Abbildung 1.4:** Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

**Eigenraum:** Ist der Raum, der von den Eigenvektoren aufgespannt wird. Ein Eigenraum gehört zu einem Eigenwert.

Seien $\vec{v}_1, \ \vec{v}_2, \ \vec{v}_1$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda$, dann ist
$N_\lambda = \{\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

# Eigenraum

Seien $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_1$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda$, dann ist
$N_\lambda = \{\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3 \quad \text{einziger Eigenwert: } \lambda_1 = 1$$

Eigenvektoren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenraum:

$$N_{\lambda_1} = \left\{ x = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

# Diagonalisierbarkeit und Vielfachheit

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn
**n = Summe der l.u. Eigenvektoren**
aller Eigenwerte ist.

# Diagonalisierbarkeit und Vielfachheit

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn
**n = Summe der l.u. Eigenvektoren**
aller Eigenwerte ist.

Anders Ausgedrückt die
**Summe der geometrischen Vielfachheiten = n**

# Diagonalisierbarkeit und Vielfachheit

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn
**n = Summe der l.u. Eigenvektoren**
aller Eigenwerte ist.

Anders Ausgedrückt die
**Summe der geometrischen Vielfachheiten = n**

In diesem Fall gilt auch immer
**algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit**
für alle Eigenwerte.

# Diagonalisierbarkeit und Vielfachheit

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn
**n = Summe der l.u. Eigenvektoren**
aller Eigenwerte ist.

Anders Ausgedrückt die
**Summe der geometrischen Vielfachheiten = n**

In diesem Fall gilt auch immer
**algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit**
für alle Eigenwerte.

Hat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **n paarweise verschiedene Eigenwerte**, dann ist $A$ diagonalisierbar.

# Eigenraum und Vielfachheit

Jede Linearkombination von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert ist wieder ein Eigenvektor.

# Eigenraum und Vielfachheit

Jede Linearkombination von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert ist wieder ein Eigenvektor.
Seien $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ Eigenvektoren zum EW $\lambda$.

$$A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1 \ , \quad A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2 \quad \text{Zu zeigen:} \quad \vec{v}_3 = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \text{ ist ein EV}$$

Also

$$A\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_3$$

# Eigenraum und Vielfachheit

Jede Linearkombination von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert ist wieder ein Eigenvektor.
Seien $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ Eigenvektoren zum EW $\lambda$.

$$A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1 \ , \quad A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2 \quad \text{Zu zeigen:} \quad \vec{v}_3 = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \text{ ist ein EV}$$

Also

$$A\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_3$$

$$\begin{aligned} A\vec{v}_3 &= A(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \\ &= a_1A\vec{v}_1 + a_2A\vec{v}_2 \\ &= a_1\lambda\vec{v}_1 + a_2\lambda\vec{v}_2 \\ &= \lambda(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \\ &= \lambda\vec{v}_3 \end{aligned}$$

# Eigenraum und Vielfachheit

Jede Linearkombination von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert ist wieder ein Eigenvektor.
Seien $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ Eigenvektoren zum EW $\lambda$.

$$A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1\ , \quad A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2 \quad \text{Zu zeigen:} \quad \vec{v}_3 = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \text{ ist ein EV}$$

Also

$$A\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_3$$

$$\begin{aligned} A\vec{v}_3 &= A(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \\ &= a_1 A\vec{v}_1 + a_2 A\vec{v}_2 \\ &= a_1\lambda\vec{v}_1 + a_2\lambda\vec{v}_2 \\ &= \lambda(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \\ &= \lambda\vec{v}_3 \end{aligned}$$

Der Eigenraum beschreibt alle Eigenvektoren zu einem Eigenwert.

# Aufgabe: Beweise

Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und gilt $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$,
dann hat $A$ nur den Eigenwert 0.

# Aufgabe: Beweise

Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und gilt $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$,
dann hat $A$ nur den Eigenwert 0.

Annahme: $A$ besitzt einen Eigenwert $\lambda \neq 0$ mit EV $x$

$$\begin{aligned}
A^m x &= A^{m-1} A x = A^{m-1} \lambda x \\
&= \lambda A^{m-2} A x = \lambda A^{m-2} \lambda x \\
&= \lambda^2 A^{m-3} A x = \lambda^2 A^{m-3} \lambda x \\
&\ldots \\
&= \lambda^m x = 0
\end{aligned}$$

Da $x \neq 0$ (EV) muss gelten $\lambda^m = 0$. Widerspruch zur Annahme.

# Aufgabe: Beweise

Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann haben $A$ und $A^T$ das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte.

# Aufgabe: Beweise

Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann haben $A$ und $A^T$ das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte.

Mit der Definition des charakteristischen Polynoms

$$p_{A^T}(\lambda) = \det\left(\lambda I - A^T\right) = \det\left((\lambda I)^T - A^T\right) = \det\left((\lambda I - A)^T\right)$$

# Aufgabe: Beweise

Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann haben $A$ und $A^T$ das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte.

Mit der Definition des charakteristischen Polynoms

$$p_{A^T}(\lambda) = \det\left(\lambda I - A^T\right) = \det\left((\lambda I)^T - A^T\right) = \det\left((\lambda I - A)^T\right)$$

Aus der Eigenschaft der Determinanten $\det B = \det B^T$ folgt nun die Aussage.

$$p_{A^T}(\lambda) = \det\left((\lambda I - A)^T\right) \det\left(\lambda I - A\right) = p_A(\lambda)$$