ulm university universität uulm

Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
Sommersemester 2017
0 Punkte

Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure

- Extrablatt -

keine Punkte, keine Abgabe. Lösung wird es online geben. Dieses Blatt dient als Vorbereitung für die Klausur, ist aber keine Probeklausur (dafür wäre es bei Weitem zu umfangreich). Die mit einem * gekennzeichneten Aufgaben sind relevant für die 2. Klausur, aber nicht für die 1. Klausur. Kein Anspruch auf Vollständigkeit, alle Blätter sind gleichermaßen relevant.

1. Zeige durch vollständige Induktion, dass für beliebige $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $-1 \le a_i \le 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt, dass

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Lösungsvorschlag:

Vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist

$$\prod_{k=1}^{1}(1+a_k) = 1 + a_1 \ge 1 + \sum_{k=1}^{1} a_k,$$

womit der Induktionsanfang gesichert ist.

Induktionsschritt. Gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass die Behauptung dann auch für $n+1$ gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) &= \left(\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)(1+a_{n+1}) \overset{I.H.}{\ge} \left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right)(1+a_{n+1}) \\ &= 1 + a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k + \underbrace{\underbrace{a_{n+1}}_{\in[-1,0]} \underbrace{\sum\nolimits_{k=1}^{n} a_k}_{\le 0}}_{\ge 0} \ge 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k.\end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung auch für $n+1$ und somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Zeige, dass für alle $n \ge 2$

$$\sqrt[n]{1+2n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

gilt.

Tipp: Kann man direkt ohne Induktion zeigen. Betrachte die rechte Seite potenziert (also $(\dots)^n$) und wende die binomische Formel an.

Lösungsvorschlag:
Wir folgen dem Hinweis. Sei $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^k \\
&= \binom{n}{0}\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^2 + \underbrace{\sum\nolimits_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^k}_{\geq 0} \\
&\geq 1 + n\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{2^2}{n-1} = 1 + \underbrace{n\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^1}_{>0} + 2n \\
&> 1+2n.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$1+2n < \left(1+\frac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^n.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sqrt[n]{1+2n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n-1}},$$

da beide Seiten positiv sind. Damit ist die Aussage gezeigt.

3. (a) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Betragsungleichung $|x| \leq |x+1|$ erfüllen.
   (b) Gib, falls existent, Maximum, Supremum, Minimum, Infimum der Menge $A = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$ an.

Lösungsvorschlag:

(a) Die "kritischen Punkte"der Ungleichung sind -1 und 0, dort ändert sich jeweils das Vorzeichen. Wir nehmen also eine Fallunterscheidung vor.
Fall 1: $x \leq -1$: Dann ist $|x| = -x$ und $|x+1| = -x-1$, weswegen

$$|x| \leq |x+1| \Leftrightarrow -x \leq -x-1 \Leftrightarrow 0 \leq -1$$

Dies ist für kein $x \leq -1$ erfüllt.
Fall 2: $-1 < x \leq 0$: Dann ist $|x| = -x$ und $|x+1| = x+1$, weswegen

$$|x| \leq |x+1| \Leftrightarrow -x \leq x+1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x$$

Also gilt hier die Ungleichung für $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ (da wir uns im Fall $-1 < x \leq 0$ befinden).

Fall 3: $x > 0$: Dann ist $|x| = x$ und $|x+1| = x+1$, weswegen

$$|x| \leq |x+1| \Leftrightarrow x \leq x+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1$$

Dies ist für alle $x > 0$ erfüllt, weswegen die Ungleichung also auch für $x \in (0, \infty)$ gilt. Insgesamt: Wir müssen die Intervalle vereinigen. Die Ungleichung gilt also für $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup (0, \infty)$, also für alle $x \geq -\frac{1}{2}$.

(b) $\sup(A) = 1$ (sieht man für $n = 1$ und m sehr groß), $\inf(A) = -1$ (sieht man für $m = 1$ und n sehr groß), $\min(A)$ und $\max(A)$ existieren nicht (das Supremum und das Infimum wird nicht angenommen).

4. Löse folgende Ausdrücke nach x.

(a) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$

(b) $\log_3 x + \log_3(x-6) = 3$

(c) $\ln(3x+2) = 5$

(d) $\ln(\sqrt{x}) - 2\ln(x) + 1 = 0$

(e) $3^x \cdot 5^{-2x} = 7^{x+1}$

(f) $e^x \cdot e^{3x} = 2$

Lösungsvorschlag:

(a) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$
Wir probieren ± 1 und ± 2 (das sind die Teiler des Absolutterms 2)$\Rightarrow$ $x_1 = 1$ löst die Gleichung. Führe Polynomdivision durch:

$$(x^3 - x^2 - 2x + 2) : (x-1) = x^2 - 2$$

Die weiteren Lösungen sind die von $x^2 - 2 = 0$, also $x_2 = \sqrt{2}$ und $x_3 = -\sqrt{2}$.

(b) $\log_3(x) + \log_3(x-6) = 3$
Mithilfe der Logarithmenregeln folgt:

$$\log_3(x) + \log_3(x-6) = 3 \Leftrightarrow \log_3(x(x-6)) = 3 \Leftrightarrow x(x-6) = 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0$$

Entweder mithilfe der Mitternachtsformel oder, indem man Teiler von -27 ausprobiert, findet man heraus, dass dies durch $x_1 = -3$ und $x_2 = 9$ gelöst wird. Da $\log_3$ (wie jeder andere Logarithmus auch) nur für positive Argumente definiert ist, ist also $x = 9$ die (einzige) Lösung.

(c) $\ln(3x+2) = 5$.

$$\ln(3x+2) = 5 \Leftrightarrow 3x + 2 = e^5 \Leftrightarrow x = \frac{e^5 - 2}{3}$$

(d) $\ln(\sqrt{x}) - 2\ln(x) + 1 = 0$.
Wieder mit den Logarithmenregeln:

$$\ln(\sqrt{x}) - 2\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(x) - 2\ln(x) = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\ln(x) = -1 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$$

(e) $3^x \cdot 5^{-2x} = 7^{x+1}$.
Wieder mit den Logarithmenregeln:

$$3^x \cdot 5^{-2x} = 7^{x+1} \Leftrightarrow x\ln(3) - 2x\ln(5) = (x+1)\ln(7) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(7)}{\ln(3) - 2\ln(5) - \ln(7)}$$

(f) $e^x \cdot e^{3x} = 2$.
Mit den Potenzgesetzen:

$$e^x \cdot e^{3x} = 2 \Leftrightarrow e^{4x} = 2 \ \Leftrightarrow 4x = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\ln(2)$$

5. Bestimme, falls existent, den Grenzwert folgender Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (hier braucht man nicht mit der Definition von Folgenkonvergenz arbeiten). Gib für nicht konvergente Folgen die Menge der Häufungswerte an.

(a) $a_n := \dfrac{n^2 + 2n + 1}{cn^3 - n^2 + n - 1}$, $c \in \mathbb{R}$.

(b) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$

(c) $a_n := \dfrac{2}{\sqrt[n]{3n^2}}$

(d) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k!}$

(e) $a_n := \dfrac{n}{n-1} - \dfrac{2n}{n+1}$

(f) $a_n := \dfrac{1}{((-1)^{n+1} - 2)^n}$

Lösungsvorschlag:

(a) $a_n := \dfrac{n^2 + 2n + 1}{cn^3 - n^2 + n - 1}$, $c \in \mathbb{R}$.
Für $c = 0$ ist mit den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{cn^3 - n^2 + n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

und für $c \neq 0$ ist mit den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{cn^3 - n^2 + n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{c - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{c} = 0$$

(b) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$.

Mit der geometrischen Summenformel folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Kann aber auch alternativ mit der geometrischen Reihe gemacht werden:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

(c) $a_n := \dfrac{2}{\sqrt[n]{3n^2}}$
Mit den Grenzwertsätzen ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{3n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{1\cdot 1\cdot 1} = 2$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$.

(d) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k!}$
Wegen $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - \frac{2^0}{0!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} - 1 = e^2 - 1$$

Nicht vergessen: $0! := 1$ und $a^0 = 1$.

(e) $a_n := \dfrac{n}{n-1} - \dfrac{2n}{n+1}$.
Mit den Grenzwertsätzen ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1} - \frac{2n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 1 - 2 = -1$$

(f) $a_n := \dfrac{1}{((-1)^{n+1}-2)^n}$.
Aufgrund des Terms $(-1)^n$ liegt es nahe, dass eine Untersuchung der geraden und ungeraden Terme zu helfen vermag. Für $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich

$$a_{2n} = \frac{1}{((-1)^{2n+1}-2)^{2n}} = \frac{1}{(-3)^{2n}} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2n} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$
$$a_{2n-1} = \frac{1}{((-1)^{2n-1+1}-2)^{2n-1}} = \frac{1}{(-1)^{2n-1}} = \frac{1}{-1} = -1 \to -1 \text{ für } n \to \infty$$

Damit hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die beiden Häufungswerte 0 und -1. Da diese unterschiedlich sind, kann

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergieren. (Diese Schlussfolgerung nie vergessen!).

6. Betrachte die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+2}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$ und Startwert $a_0 = 0$.

   (a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $0 \leq a_n \leq 1$ und $a_n \leq a_{n+1}$.

   (b) Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert.

   (c) Bestimme den Grenzwert aus (b).

Lösungsvorschlag:

(a) Wir zeigen die Aussagen jeweils durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

- $0 \leq a_n \leq 1$

  Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist

$$a_1 = \frac{a_0^2+2}{3} = \frac{2}{3}$$

  also $0 \leq a_1 \leq 1$.

  Induktionsschritt: Gelte die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen, dass sie auch für $n+1$ gilt.

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3} \begin{cases} \geq \dfrac{0^2+2}{3} = \dfrac{2}{3} \geq 0 \\ \leq \dfrac{1^2+2}{3} = 1 \end{cases}$$

  Also gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

- $a_n \leq a_{n+1}$

  Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist

$$a_2 = \frac{a_1^2+2}{3} = \frac{\frac{4}{9}+2}{3} \geq a_1 = \frac{2}{3}$$

  Induktionsschritt: Gelte die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen, dass sie auch für $n+1$ gilt.

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3} \leq \frac{a_{n+1}^2+2}{3} = a_{n+2}$$

  Also gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Nach (a) handelt es sich bei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Nach Vorlesung (Monotonieprinzip) ist sie also konvergent.

(c) Nach (b) existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann ist aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, weswegen

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+2}{3} = \frac{a^2+2}{3}$$

Wir müssen also die Gleichung $a = \frac{a^2+2}{3}$ lösen. Durch Hinsehen oder mit der Mitternachtsformel bekommt man $a_1 = 2$ und $a_2 = 1$. Da $a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ scheidet a_1 aus, womit also $a = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ folgt.

7. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{-42-2n^2}{n^2+42n}$$

Bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und zeige die Konvergenz mithilfe der Definition der Folgenkonvergenz.

Bemerkung: Noch 7 weitere Aufgaben dieses Typs findet man auf Moodle unter Zusatzmaterial in der Datei "Folgenkonvergenz mit Definition".

Lösungsvorschlag:

Zunächst gilt nach den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-42-2n^2}{n^2+42n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{42}{n^2}-2}{1+\frac{42}{n}} = -2$$

Es sei also $a = -2$ und $\varepsilon > 0$. Wir müssen nun ein N finden, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt:

$$|a_n - a| = |\frac{-42-2n^2}{n^2+42n} + 2| = |\frac{-42-2n^2+2n^2+84n}{n^2+42n}| = |\frac{84n-42}{n^2+42n}| = \frac{84n-42}{n^2+42n} \leq \frac{84n}{n^2} < \varepsilon$$

falls $n > \frac{84}{\varepsilon} =: N$.

8. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$

(b) $\lim_{x\to\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{\ln(\ln(x))}$

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) &= \lim_{x\to\infty} \left((\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right) = 0\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H, } 0/0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\sin(x)}}{\ln(\ln(x))}$

Man bemerke, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ nicht existiert. Allerdings, wie immer, wenn man mit sin() oder cos() zutun hat, kann man die Beschränktheit ausnutzen. Es ist nämlich für $x > e$

$$0 \le \frac{e^{\sin(x)}}{\ln(\ln(x))} \le \frac{e^1}{\ln(\ln(x))} \to 0 \text{ für } x \to \infty$$

Mit dem Einschnürungssatz folgt also, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{\ln(\ln(x))} = 0$$

9. (a) Differenziere folgende Ausdrücke nach x. Die Ableitung braucht nicht vereinfacht werden. Man benenne jeweils zusätzlich die verwendete(n) Ableitungsregel(n).

i. $\dfrac{x^2+2x}{x}$ iii. $(\sin(x)+x^3+2)^3$ v. $x^{\sqrt[3]{x}}$

ii. $\ln(3x)$ iv. $e^{2x+1}\sin(x^2)$ vi. $\ln(\ln(\ln(x)))$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist der letzte Ausdruck (vi.) definiert?

Lösungsvorschlag:

(a) Ableitungen:

i. mit der Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2+2x}{x} = \frac{x(2x+2) - 1\cdot(x^2+2x)}{x^2}$$

oder alternativ mit der Linearität:

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2+2x}{x} = \frac{d}{dx}(x+2) = 1$$

ii. mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\ln(3x) = \frac{1}{3x}\cdot 3$$

iii. mit der Kettenregel und der Linearität:

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)+x^3+2)^3 = 3(\sin(x)+x^3+2)^2\cdot(\cos(x)+3x^2)$$

iv. mit der Produktregel und der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}e^{2x+1}\sin(x^2) = 2\cdot e^{2x+1}\cdot\sin(x^2)+e^{2x+1}\cos(x^2)\cdot 2x$$

v. mit der Produktregel und der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}x^{\sqrt[3]{x}} = \frac{d}{dx}e^{x^{\frac{1}{3}}\ln(x)} = e^{x^{\frac{1}{3}}\ln(x)}\cdot\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\ln(x)+x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}\right)$$

vi. mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\ln(\ln(\ln(x))) = \frac{1}{\ln(\ln(x))\ln(x)x}$$

(b) Der $\ln(x)$ ist nur für $x>0$ definiert. Damit $\ln(\ln(\ln(x)))$ definiert ist, muss also

$$\ln(\ln(x))>0 \Leftrightarrow \ln(x)>1 \Leftrightarrow x>e$$

wobei zwischen den Äquivalenzen jeweils die streng monoton wachsende Exponentialfunktion angewendet wurde. Also ist der Ausdruck für alle $x>e$ definiert.

10. (a) Bestimme mithilfe der Definition der Ableitung die Ableitung der Funktion $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ an einer Stelle $a>0$.

(b) Bestimme mithilfe der Definition der Ableitung die Ableitung der Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sqrt{x}$ an einer Stelle $a>0$.
Ist die Funktion f auch an der Stelle $a=0$ differenzierbar? Zeige oder widerlege die Behauptung.

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{h\sqrt{a}\sqrt{a+h}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{h\sqrt{a}\sqrt{a+h}}\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}} = \lim_{h\to 0}\frac{a-(a+h)}{h\sqrt{a}\sqrt{a+h}(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{a}\sqrt{a+h}(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})} = \frac{-1}{\sqrt{a}\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{a})} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}} = -\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

(b)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Für $a = 0$ wird das nicht funktionieren:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

also ist f an der Stelle $a = 0$ nicht differenzierbar.

11. Bestimme Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, \text{ falls } x \leq 0 \\ e^x, \text{ falls } x > 0 \end{cases}$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion ist.

Lösungsvorschlag:
Für $x < 0$ und für $x > 0$ ist f differenzierbar (und damit auch stetig) als Polynom bzw. als Exponentialfunktion.
Zunächst stellen wir die Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ sicher. Es ist $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = c$ und $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^0 = 1$. Damit folgt $c = 1$ und f ist dann überall stetig.
Für die Differenzierbarkeit in 0 stellt man fest, dass $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x + b = b$ und $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1$. Also wählt man $b = 1$ und dann ist f überall stetig und differenzierbar.

12. (a) Zeige, dass

$$\cos(x + x') = \cos(x)\cos(x') - \sin(x)\sin(x')$$

für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt. Benutze dazu die Funktion

$$g(x) = \cos(x)\cos(a - x) - \sin(x)\sin(a - x)$$

(b) Zeige mithilfe des Additionstheorems aus (a), dass $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ gilt. Zeige außerdem, dass $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir folgen dem Hinweis. Es ist zu vermuten, dass es irgendwas mit einer Ableitung zutun hat, die immer 0 ist. g ist sicher differenzierbar für jedes feste $a \in \mathbb{R}$ mit

$$g'(x) = -\sin(x)\cos(a-x) + \cos(x)\sin(a-x) - \cos(x)\sin(a-x) + \sin(x)\cos(a-x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist g konstant mit

$$g(x) = g(0) = \cos(a)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir haben also für jedes x und für jedes a

$$\cos(a) = \cos(x)\cos(a-x) - \sin(x)\sin(a-x)$$

Setzt man hier nun $a = x + x'$ ein, so erhält man

$$\cos(x+x') = \cos(x)\cos(x') - \sin(x)\sin(x')$$

was zu zeigen war.

(b) Setzt man $x' = -x$ in (a) ein, so erhält man wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$, dass

$$1 = \cos(0) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

was die erste Behauptung ist. Setzt man $x' = 2\pi$, so erhält man

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x)$$

da $\sin(2\pi) = 0$ und $\cos(2\pi) = 1$. Damit ist alles gezeigt.

13. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass eine Konstante C existiert, sodass die Funktion $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x) + C$ positiv auf I ist.

Lösungsvorschlag:
Da f stetig und I kompakt nimmt f nach dem Satz von Weierstraß Minimum und Maximum an. Es gibt also ein globales Minimum m mit $f(x) \geq m$ für alle $x \in I$. Wir setzen nun $C = |m| + 1$ (oder + irgendeine andere Zahl; braucht man, da nach *positiver* Funktion gefragt war, also > 0). Dann ist

$$\tilde{f}(x) = f(x) + C = f(x) + |m| + 1 \geq m + |m| + 1 \geq 1 > 0$$

(Bemerkung: Die Idee ist also, f so weit nach oben zu schieben, dass der Graph von f stets oberhalb der x Achse liegt. Die Frage ist nur, wie weit...)

14. Gegeben sei die Funktion $g(x) = x \ln x - x$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

(a) Begründe, zunächst ohne Rechnung, wieso die Funktion g auf $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ ein (globales) Maximum und (globales) Minimum annimmt.

(b) Bestimme dieses (glob.) Maximum und (glob.) Minimum.

(c) Besitzt g auch auf dem Intervall $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ ein (glob.) Maximum und (glob.) Minimum?

Lösungsvorschlag:

(a) Die Funkton g ist als Produkt/Summe stetiger und differenzierbarer Funktionen stetig und differenzierbar auf dem kompakten Intervall $I = \left[\frac{1}{e}, e\right]$. Da g insbesondere stetig ist, folgt mit dem Satz von Weierstraß, dass g auf I Minimum und Maximum annimmt.

(b) Wir betrachten zunächst das Intervallinnere, also $\left(\frac{1}{e}, e\right)$. Notwendig für ein lokales Extremum ist das verschwinden der ersten Ableitung. Diese berechnet sich mit der Produktregel als

$$g'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

Nun ist

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Also kommt als Kandidat für ein Extremum im Inneren des Intervalls die Stelle $x^* = 1$ in Frage, die insbesondere auch im Intervall $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ liegt. Wir betrachten die 2. Ableitung an der Stelle x^* um das Extremum zu charakterisieren:

$$g''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g''(x^*) > 0$$

womit es sich also bei x^* um eine lokale Minimalstelle handelt mit $g(1) = -1$. Nun betrachten wir noch die Randpunkte:

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} \ln(e) - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}$$

und

$$g(e) = e \ln(e) - e = 0$$

Durch Vergleich der Funktionswerte ist also -1 das globale Minimum (an der Stelle $x = 1$) und 0 das globale Maximum (an der Stelle $x = e$).

(c) Die Existenz des globalen Minimums und Maximums ist auf dem offenen Intervall $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ nicht mehr durch den Satz von Weierstraß gesichert. Obige Rechnung zeigt: g nimmt zwar das globale Minimum -1 an, aber kein globales Maximum.

15. Zeige, dass die Gleichung $e^x = \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}$ *genau eine* Lösung zwischen 0 und 1 hat. Die Lösung braucht nicht berechnet werden.

Lösungsvorschlag:
Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ mit } h(x) = e^x - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$

Es reicht also zu zeigen, dass die Funktion h genau eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ hat.
Die Funktion h ist als Summe/Quotient stetiger und differenzierbarer Funktionen stetig und differenzierbar. Ferner ist

$$h(0) = e^0 - \frac{1}{0+\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1 < 0$$

und

$$h(1) = e^1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = e^1 - \frac{2}{3} > 0$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x^* \in I$ mit $h(x^*) = 0$, was die Existenz einer Nullstelle zeigt.
Nun müssen wir noch die Eindeutigkeit der Nullstelle beweisen. Dazu betrachten wir die erste Ableitung:

$$h'(x) = e^x + \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} > 0$$

Also ist h streng monoton wachsend auf I und damit ist die Nullstelle eindeutig.

16. Zeige, dass für alle $x \geq 0$ gilt, dass $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{1}{2}x^2$.

Lösungsvorschlag:
Betrachte die Hilfsfunktion $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$$

Wir müssen nun zeigen, dass $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ ist. h ist als Summe differenzierbarer Funktionen differenzierbar mit

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

für alle $x \geq 0$. Damit ist also h monoton wachsend, woraus

$$h(x) \geq h(0) = 0$$

für $x \geq 0$ folgt. Damit ist alles gezeigt.

17. Betrachte die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(1+x)$

    (a) Zeige, dass das dritte Taylorpolynom $P_3(x)$ von f mit Entwicklungspunkt $a = 0$ gegeben ist durch
    $$P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

    (b) Zeige für $|x| \leq \frac{1}{2}$ die Restgliedabschätzung $|R_3(x)| = |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Funktion f ist unendlich oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten 3 Ableitungen und werten sie in $a = 0$ aus:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f^{(0)}(0) = \ln(1) = 0\\
f^{(1)}(x) &= f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f^{(1)}(0) = \frac{1}{1+0} = 1\\
f^{(2)}(x) &= f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f^{(2)}(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1\\
f^{(3)}(x) &= f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2
\end{aligned}$$

Mit der Formel für das Taylorpolynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

folgt für $n = 3$ und $a = 0$

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 0 + 1 \cdot x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

(b) Es sei $|x| \leq \frac{1}{2}$. Da f unendlich oft diff'bar ist, folgt mit dem Satz von Taylor, dass ein $\xi \in (0, x)$ oder $\in (x, 0)$ existiert mit

$$|R_3(x)| = |P_3(x) - f(x)| = |\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4|$$

Es ist

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}.$$

Da $|x| \leq \frac{1}{2}$ ist auch $|\xi| \leq \frac{1}{2}$. Also ist

$$|f^{(4)}(\xi)| = \frac{6}{(1+\xi)^4} \leq \frac{6}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$$

Damit folgt schließlich wegen $|x| \leq \frac{1}{2}$, dass

$$|R_3(x)| = |\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4| \leq |\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}||x^4| \leq \frac{\frac{6}{(\frac{1}{2})^4}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{4!} = \frac{6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

was zu zeigen war.

18. Wir definieren die Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ und } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Zeige für $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(b) $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und $\cosh'(x) = \sinh(x)$

(c) Zeige, dass cosh auf $[0, \infty)$ eine Umkehrfunktion, besitzt. Diesen nennen wir arccosh : $[1, \infty) \to [0, \infty)$.

(d) Bestimme die Ableitung des arccosh für $x \in (1, \infty)$.

(e) Zeige mit (d), dass $\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Lösungsvorschlag:

(a) Zeigen: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

- Möglichkeit 1: Direkt nachrechnen.

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 - ((e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2)}{4} \\ &= \frac{4e^x e^{-x}}{4} = \frac{4}{4} = 1\end{aligned}$$

- Möglichkeit 2: Betrachte die Hilfsfunktion

$$h(x) = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$$

Dann ist h differenzierbar und mit Teil (b) (sorry für die Reihenfolge, sollte man andersrum machen) folgt

$$h'(x) = 2\cosh(x)\sinh(x) - 2\sinh(x)\cosh(x) = 0$$

Also ist h konstant mit $h(x) = h(0) = 1$.

(b) sinh und cosh sind beide differenzierbar als Summe differenzierbarer Funktionen und mit der Kettenregel folgt

$$\sinh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \cosh(x)$$
$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

(c) Für $x > 0$ ist

$$\cosh'(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$$

da für $x > 0$ gilt, dass $e^x > e^{-x}$. Also ist cosh auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend und damit umkehrbar. Da cosh das Intervall $[0,\infty)$ auf $[1,\infty)$ abbildet, bildet also arccosh von $[1,\infty)$ nach $[0,\infty)$ ab.

(d) Da cosh differenzierbar ist, ist auch arccosh differenzierbar und für $x \in (1,\infty)$ gilt mit der Umkehrformel und (a)

$$\operatorname{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arccosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arccosh}(x)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(e) Betrachte die Funktion

$$h(x) = \operatorname{arccosh}(x) - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

Dann ist h als Verkettung diff'barer Funktionen diff'bar und mit Teil (d) folgt für jedes $x > 1$

$$h'(x) = \operatorname{arccosh}'(x) - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x + \sqrt{x^2-1}} = 0$$

Also ist h konstant mit

$$h(x) = h(1) = \operatorname{arccosh}(1) - \ln(1 + \sqrt{1^2-1}) = 0 - 0 = 0$$

für alle x da wegen $\cosh(0) = 1$ gilt, dass $\operatorname{arccosh}(1) = 0$. Daraus folgt die Behauptung.

Natürlich kann man auch beide Seiten der Gleichung ableiten und sehen, dass die beiden Ableitungen gleich sind und anschließend einen Wert einsetzen, anstatt die Hilfsfunktion h zu benutzen

19. (a) Bestimme folgende unbestimmten Integrale:

i. $\int xe^{-x}\ dx$

ii. $\int 2^{x-1}\ dx$

iii. $\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)}\ dx$

iv. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\ dx$

(b) * Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so dass $\int_1^a \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\ dx = 2\sqrt{7}$ gilt.

(c) Berechne $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\ dx$.

Lösungsvorschlag:

(a) Stammfunktionen bestimmen.

i.
$$\int xe^{-x}\ dx \overset{PI}{=} -xe^{-x} - \int -e^{-x}\ dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

ii.
$$\int 2^{x-1}\ dx = \frac{1}{2}\int 2^x\ dx = \frac{1}{2}\int e^{x\ln(2)}\ dx = \frac{1}{2\ln(2)}e^{x\ln(2)} = \frac{1}{2\ln(2)}2^x = \frac{1}{\ln(2)}2^{x-1}$$

Welche der drei rechten Ausdrücke man als Lösung angibt, ist egal.

iii. Um dieses Integral zu bestimmen, berechnen wir die Partialbruchzerlegung. Diese hat die Form
$$\frac{2x-1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$$
Mit der Zuhaltemethode folgt
$$b = \frac{2x-1}{(x-1)}\ |_{x=0} = 1$$
$$c = \frac{2x-1}{x^2}\ |_{x=1} = 1$$
Also haben wir schonmal
$$\frac{2x-1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$
Hier setzen wir nun einen beliebigen Wert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ein, zum Beispiel $x = -1$:
$$\frac{-3}{-2} = -a + 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow a = -1$$

Damit haben wir nun die PZB und können die Stammfunktion berechnen:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)}\ dx &= -\int \frac{1}{x}\ dx + \int \frac{1}{x^2}\ dx + \int \frac{1}{x-1}\ dx \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x-1|\end{aligned}$$

iv. Mit der Substitutionsregel folgt

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\ dx = 2\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}\ dx = 2\sqrt{x^3-1}$$

(b) Der Integrand $\frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}$ ist stetig auf $(1,a]$, hat aber einen Pol bei $x=1$. Es handelt sich also um ein uneigentliches Integral und wir führen eine Grenzwertbetrachtung durch. Wir benutzen die bereits berechnete Stammfunktion aus (a) iv.:

$$\begin{aligned}\int_1^a \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\ dx &= \lim_{b\to 1}\int_b^a \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\ dx = \lim_{b\to 1}\left[2\sqrt{x^3-1}\right]_b^a \\ &= \lim_{b\to 1}\left(2\sqrt{a^3-1} - 2\sqrt{b^3-1}\right) = 2\sqrt{a^3-1} \overset{!}{=} 2\sqrt{7} \Leftrightarrow a = 2\end{aligned}$$

Die Wahl $a=2$ leistet also Gewünschtes.

(c) Wir führen zwei mal partielle Integration durch:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\ dx &= \left[\sin(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)e^x\ dx \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\pi}{4}} - \left(\left[\cos(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\sin(x)e^x\ dx\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\pi}{4}} - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\pi}{4}} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\ dx \\ &= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\ dx\end{aligned}$$

da $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (Wenn man das nicht weiß, kann man auch einfach mit $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ weitermachen). Insgesamt haben wir also

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\ dx = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\ dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\ dx = \frac{1}{2}$$

20. Zeige oder widerlege:

(a) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so ist auch die Folge $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b$.

(b) Das Produkt zweier divergenter Folgen ist divergent.

(c) Ist $a_n = o(c_n)$ und $b_n = o(c_n)$, so ist auch $a_n \cdot b_n = o(c_n)$.

(d) Es seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ beide positiv und es gelte $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und g sei beschränkt, es existiere also eine Zahl $c > 0$ mit $g(x) < c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(e) Es sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Dann hat f im Intervall I eine Nullstelle.

(f) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die Inverse f^{-1} streng monoton wachsend.

(g) * Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dann existiert (also konvergiert) das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\, dx$.

Lösungsvorschlag:

(a) Das stimmt.
Wir zeigen die Aussage. Es sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ gibt es Zahlen N_1 und N_2, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N_2$. Für $n > N := \max(N_1, N_2)$ gelten dann beide Ungleichungen und man hat mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $n > N$. Also konvergiert die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Definition der Folgenkonvergenz und hat den Grenzwert $a + b$.
Bemerkung: Ob man nun am Ende $< \varepsilon$ wie hier oder $< 2\varepsilon$ herausbekommt, ist egal.

(b) Das stimmt nicht.
Wir geben ein Gegenbeispiel: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = b_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind sowohl $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, aber

$$a_n \cdot b_n = (-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1 \to 1 \text{ für } n \to \infty$$

womit also $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(c) Das stimmt **nicht**.
Es sei $a_n = b_n = n$ und $c_n = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_n = o(c_n)$ und $b_n = o(c_n)$, da $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$, aber $a_n \cdot b_n \neq o(c_n)$, da $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \neq 0$.
Hinweis: Für $+$ statt $\cdot$ hätte es gestimmt.

(d) Das stimmt nicht.
Wir geben ein Gegenbeispiel. Sei $a = 1$ und $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}(\sin(x) + 2)$. Dann sind

sowohl f als auch g positiv, g ist beschränkt und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sin(x)+2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sin(x)+2}$$

welcher nicht existiert.

(e) Das stimmt nicht zwangsläufig.
Wir geben ein Gegenbeispiel. $I = [0,1]$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \ [0,1) \\ -1 \text{ für } x = 1 \end{cases}$$

Dann ist zwar $f(0) = 1 > 0$ und $f(-1) = -1 < 0$ aber f hat keine Nullstelle.
Bemerkung: Der Satz von Weierstraß lässt sich nicht anwenden, da keine Stetigkeit vorausgesetzt wurde.

(f) Das stimmt.
Wir zeigen die Behauptung. Wegen $f'(x) > 0$ ist f streng monoton wachsend, womit die Inverse definiert ist. Mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion folgt

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} > 0$$

da $f'(x) > 0$. Also ist auch f^{-1} streng monoton wachsend.

(g) Das stimmt nicht.
Wir geben ein Gegenbeispiel. Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Dann ist ist f stetig und beschränkt und es gilt

$$\int_1^\infty f(x)\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\ dx = \lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty$$