05. Juli 2024

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Sabrina Weber

Angewandte Stochastik – Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 05. Juli 2024 um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen vor Beginn der Übung über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als *exakt zwei Dateien* ab: Eine PDF-Datei für die theoretischen Aufgaben und eine R- oder R-Markdown-Datei (Dateiendung *.R* bzw. *.RMD*) für die Programmieraufgaben. Andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Bearbeitet das Übungsblatt in *Gruppen von 3- 4 Personen* und gebt bitte euren jeweiligen Studiengang an. Nur eine Person aus der Gruppe soll das Übungsblatt abgeben. Beachtet außerdem die Hinweise zu den Übungen in Moodle.

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega)$. Sei weiterhin $Y = g(X)$. Bestimme in den folgenden Fällen $\mathbb{E}[Y^r]$, $r \in \mathbb{N}$, und $\mathrm{Var}(Y)$:

(a) $X(\Omega) = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \ldots, 4\pi\} = \{k\pi/2 \mid k = 0, \ldots, 8\}$ und X ist gleichverteilt[1], $g(x) = \sin(x)$.

(b) $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, $p \in (0, 1)$, $g(x) = 2^x$.

(c) $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$ und $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $g(x) = e^{2x}$.

Aufgabe 2 (2 + 1 = 3 Punkte)

Es sei X eine beliebige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$[2] und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die Zufallsvariable Y sei definiert durch $Y = \mathbb{1}_A(X)$. Zeige:

(a) $\mathbb{E}[Y^r] = P(X \in A)$, $r \in \mathbb{N}$

(b) $\mathrm{Var}(Y) = P(X \in A) - P(X \in A)^2$

[1] d.h. X nimmt alle Werte in $X(\Omega)$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit an

[2] Grundsätzlich ist es irrelevant, welchen Wahrscheinlichkeitsraum man wählt. Zur Anschauung kannst du einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum verwenden.

Aufgabe 3 (3 + 2 + 3 + 3 = 11 Punkte)

Für die Aufgabenteile (b), (c) und (d) ist das Vorlesungsvideo 7 relevant.
Es sei eine Zufallsstichprobe von stochastisch unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ gegeben, wobei $\lambda > 0$ unbekannt sei.

(a) Zeige: $\min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.

(b) Zeige, dass $n \cdot \min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für $1/\lambda$ ist.

(c) Berechne die mittlere quadratische Abweichung des Schätzers aus b) für $1/\lambda$.

(d) Zeige, dass der Schätzer aus b) weder stark noch schwach konsistent für $1/\lambda$ ist.

Aufgabe 4 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

Es seien X und Y Zufallsvariablen mit $0 < \mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$.

(a) Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ wird $\mathbb{E}[(X - aY)^2]$ minimal?

(b) Zeige, dass die Zufallsvariablen $X - Y$ und $X + Y$ genau dann unkorreliert sind, wenn $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$.

(c) Gib ein Beispiel für X und Y so, dass $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$, aber $X - Y$ und $X + Y$ nicht stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 5 (2 + 1 = 3 Punkte)

Es sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $Y = X^2$.

(a) Bestimme die Kovarianz von X und Y

(b) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 6 (je 1 Punkt = 6 Bonuspunkte)

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichtefunktion $f(x, y)$. Die Dichte der Randverteilungen seinen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. Gib an, welche Aussagen korrekt sind:

Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es können minimal 0 Punkte erreicht werden.

(a) X und Y sind abhängige Zufallsvariablen, da sie eine gemeinsame Dichtefunktion besitzen.

(b) Sind X und Y unkorreliert, so gilt $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

(c) Falls $(X, Y) \sim N(\mu, K)$ und $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, so gilt X und Y unkorreliert.

(d) Falls $(X, Y) \sim N(\mu, K)$ und die Nichtdiagonalelemente von K gleich Null sind, so ist der Korrelationskoeffizient von X und Y gleich Null.

(e) Falls $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, so ist der Korrelationskoeffizient von X und Y negativ.

(f) Für stochastisch abhängige Zufallsvariablen X und Y sind die standardisierten Zufallsvariablen stochastisch unabhängig.