Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
SoSe 2021

20 Punkte

Übungen zu: Analysis 1 für Informatik Blatt 04

Hinweise zur Abgabe

Abgabetermin: 25.05.21, 14:00 Uhr
Abgabeformat: Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!
Sonstiges: Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an.

Aufgaben

1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

i) Falls $\limsup_{m\to\infty} x_m \leq x_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (4)

ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Falls $\limsup_{m\to\infty} x_m \leq x_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (6)

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

i) Zeigen Sie: Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, dann ist $(|x_{n+1} - x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. (3)

ii) Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung von i), d.h.: Falls $(|x_{n+1} - x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. (7)

3. Eine (punktförmige) Schnecke kriecht auf einem Gummiband mit einer konstanten Geschwindigkeit von 5cm/h. Das Gummiband hat zu Beginn eine Länge von 1m. Am Ende jeder Stunde wird das Band homogen um 1m gedehnt (homogen bedeutet hier etwa, dass alle Punkte ihre relative Position behalten, z.B. bleibt der Mittelpunkt des Bandes nach dem Dehnen weiterhin der Mittelpunkt). (10)
Wenn die Schnecke am linken Ende startet, erreicht sie dann in endlicher Zeit das rechte Ende? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

i) Falls $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|$ konvergiert, dann konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (5)
Hinweis: Das Cauchy-Kriterium und die Dreiecksungleichung für Summen ($|\sum a_k| \leq \sum |a_k|$) *könnten hilfreich sein.*

ii) Falls $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nicht-negativ ist und $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert, dann ist $(nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. (5)