Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II

Blatt 03

Lösung

1. (A) Bilinearformen und Skalarprodukte

Prüfen Sie jeweils für B_1, B_2 und B_3, ob die entsprechende Abbildung eine Bilinearform oder sogar ein Skalarprodukt ist.

(2)

a) $B_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n jx_jy_j$

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass B_1 symmetrisch ist, denn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} B_1(x,y) &= \sum_{j=1}^n jx_jy_j \\ &= \sum_{j=1}^n jy_jx_j \\ &= B_1(y,x). \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass B_1 eine Bilinearform ist. Seien dazu $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} B_1(x+\lambda x', y) &= \sum_{j=1}^n j(x+\lambda x')_jy_j \\ &= \sum_{j=1}^n j(x_j+\lambda x'_j)y_j \\ &= \sum_{j=1}^n jx_jy_j + j\lambda x'_jy_j \\ &= \sum_{j=1}^n jx_jy_j + \lambda \sum_{j=1}^n jx'_jy_j \\ &= B_1(x,y) + \lambda B_1(x',y). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} B_1(x, y+\lambda y') &\overset{\text{Symmetrie}}{=} B_1(y+\lambda y', x) \\ &= B_1(y,x) + \lambda B_1(y',x) \\ &\overset{\text{Symmetrie}}{=} B_1(x,y) + \lambda B_1(x,y'). \end{aligned}$$

B_1 ist außerdem positiv definit, denn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} B_1(x,x) &= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{j}_{\geq 1} x_j x_j \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_j x_j}_{\geq 0 \forall j \in \{1,\dots,n\}, >0 \text{ für mind. ein } j} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Somit ist B_1 eine positiv definite, symmetrische Bilinearform und damit ein Skalarprodukt. (2)

b) $B_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y_j$

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass B_2 eine Bilinearform ist. Seien dazu $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} B_2(x+\lambda x', y) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j (x+\lambda x')_j y_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j (x_j + \lambda x'_j) y_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y_j + (-1)^j \lambda x'_j y_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x'_j y_j \\ &= B_2(x,y) + \lambda B_2(x', y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B_2(x, y+\lambda y') &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j (y+\lambda y')_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j (y_j + \lambda y'_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y_j + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j \lambda y'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y'_j \\ &= B_2(x,y) + \lambda B_2(x, y'). \end{aligned}$$

B_2 ist nicht positiv definit, denn bspw. für $x = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ gilt $B_2(x,x) = -1 \not> 0$. Somit ist B_2 kein Skalarprodukt. (2)

c) $B_3 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j y_j^2$

Lösung: B_3 ist keine Bilinearform, denn für $x = y = y' = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$B_3(x, y+y') = 4 \neq 2 = B_3(x,y) + B_3(x,y').$$

Somit kann B_3 auch kein Skalarprodukt sein.

2. (A) Matrixnormen

Seien $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und seien $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $||\cdot||' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jeweils Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Wir definieren die induzierte **Matrixnorm** auf $M(m \times n, \mathbb{R})$ durch

$$||A|| := \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||'}{||x||}.$$

a) Wir wählen für $||\cdot||$ und für $||\cdot||'$ jeweils die ∞-Norm $||x||_\infty := \max_j |x_j|$.

i) Zeigen Sie (1)

$$||Ax||' \leq \max_j \left(\sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right) \cdot ||x||$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung:

$$\begin{aligned} ||Ax||' &= \left|\left|(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k)_j\right|\right|_\infty \\ &= \max_j |\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k| \\ &\leq \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk} x_k| \\ &= \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \underbrace{|x_k|}_{\leq ||x||_\infty} \\ &\leq \max_j \left(\sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right) \cdot ||x|| \end{aligned}$$

ii) Zeigen Sie (1)

$$||A|| = \max_j \left(\sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right).$$

Hinweis: Setzen Sie einen geeigneten Vektor für x ein, um in (a) Gleichhei zu erhalten.

Lösung: Es gilt

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \overset{\text{i)}}{\leq} \max_j (\sum_{k=1}^n |a_{jk}|).$$

Für "$\geq$" wählen wir ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, für das alle "$\leq$" im Beweis zu "$=$" werden. Sei dazu

$$\max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| = \sum_{k=1}^n |a_{j_0 k}|$$

für ein $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Sei dann $\tilde{x} = (\mathrm{sgn}(a_{j_0 k}))_k$. Dann ist $||\tilde{x}||_\infty = 1$

und $\sum_{k=1}^n a_{j_0k}\tilde{x}_k = \sum_{k=1}^n |a_{j_0k}|$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n |a_{j_0k}| &= \sum_{k=1}^n a_{j_0k}\tilde{x}_k \\
&\leq \max_j |\sum_{k=1}^n a_{jk}\tilde{x}_k| \\
&\leq \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}\tilde{x}_k| \\
&= \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \\
&= \sum_{k=1}^n |a_{j_0k}|.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \max_j |\sum_{k=1}^n a_{jk}\tilde{x}_k| \stackrel{*}{=} \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}\tilde{x}_k|$.
Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}
||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \geq \frac{||A\tilde{x}||_\infty}{||\tilde{x}||_\infty} = ||A\tilde{x}||_\infty &= \left|\left|(\sum_{k=1}^n a_{jk}\tilde{x}_k)_j\right|\right|_\infty \\
&= \max_j |\sum_{k=1}^n a_{jk}\tilde{x}_k| \\
&\stackrel{*}{=} \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}\tilde{x}_k| \\
&= \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}|.
\end{aligned}$$

b) Nun wählen wir für $||\cdot||$ und für $||\cdot||'$ jeweils die 1-Norm $||x||_1 := \sum_j |x_j|$.

   i) Zeigen Sie (1)

$$||Ax||' \leq \max_k \left(\sum_{j=1}^m |a_{jk}|\right) \cdot ||x||$$

   für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
||Ax||_1 &= \left|\left|(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k)_j\right|\right|_1 \\
&= \sum_{j=1}^{m} |\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{jk}x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{jk}| \cdot |x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |x_k| \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \max_k \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|\right) \\
&= \max_k \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|\right) ||x||_1
\end{aligned}
$$

ii) Zeigen Sie (1)

$$
||A|| = \max_k \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|\right).
$$

Lösung: Es gilt

$$
||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||_1}{||x||_1} \overset{\text{i)}}{\leq} \max_k (\sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|).
$$

Für "$\geq$" sei zunächst

$$
\max_k \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}| = \sum_{j=1}^{m} |a_{jk_0}|
$$

für ein $k_0 \in \{1, \dots, n\}$. Sei dann $\tilde{x} = \mathrm{e}_{k_0} = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k_0\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0\right)$.
Dann ist $||\tilde{x}||_1 = 1$ und somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||_1}{||x||_1} \geq \frac{||A\tilde{x}||_1}{||\tilde{x}||_1} = ||A\tilde{x}||_1 &= \left|\left|(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\tilde{x}_k)_j\right|\right|_1 \\
&= \sum_{j=1}^{m} |\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\tilde{x}_k| \\
&= \sum_{j=1}^{m} |a_{jk_0}| \\
&= \max_k \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|\right).
\end{aligned}
$$

c) Schließlich wählen wir für $||\cdot||$ und für $||\cdot||'$ jeweils die Euklidische bzw. 2-Norm $||x||_2 := \sqrt{\sum_j |x_j|^2}$.

i) Zeigen Sie (1)

$$||Ax||' \leq ||A||_F \cdot ||x||$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $||\cdot||_F$ die **Frobenius-Norm**

$$||A||_F := \sqrt{\sum_j \sum_k |a_{jk}|^2}$$

bezeichnet. *Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.*
Lösung:

$$\begin{aligned} ||Ax||_2 &= \left\| (\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k)_j \right\|_2 \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \right|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |\langle (a_{jk})_k, x\rangle|^2} \\ &\overset{\text{C. S.}}{\leq} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(||(a_{jk})_k||_2 \cdot ||x||_2 \right)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2}\, ||x||_2 \\ &= ||A||_F \cdot ||x||_2 \end{aligned}$$

ii) Zeigen Sie, dass $||\cdot||_F$ **nicht** die von $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ induzierte Matrixnorm ist, indem Sie den Fall $m = n, A = E_n$ betrachten. (1)
Lösung: Seien $m = n$ und $A = E_n$. Dann gilt für alle $x \neq 0$, dass

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |\delta_{jk}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} 1} = \sqrt{n} \neq 1 = \frac{||x||_2}{||x||_2} = \frac{||Ax||_2}{||x||_2}.$$

Daraus folgt, dass $||A|| = 1$ und somit $||A||_F \neq ||A||$.

3. (A) Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen über ihren jeweiligen Körpern:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R}) \text{ mit } \vartheta, \varphi, r \in \mathbb{R},$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M(4\times 4, \mathbb{R})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{F}_2)$$ (2)

(2)

Lösung:

$$\begin{aligned}
\det A &\overset{\text{Sarrus}}{=} r^2 \cos^3\vartheta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta + 0 \\
&\quad + r^2 \cos^2\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta + r^2 \sin^2\varphi \cos^3\vartheta - 0 \\
&= r^2(\cos^3\vartheta \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta + \cos^2\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta + \sin^2\varphi \cos^3\vartheta) \\
&= r^2(\cos^3\vartheta \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \sin^2\vartheta \cos\vartheta \underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1}) \\
&= r^2 \cos\vartheta \underbrace{(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)}_{=1} = r^2 \cos\vartheta
\end{aligned}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{Z_2-(Z_1+Z_3+Z_4)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det C \overset{\text{Sarrus}}{=} 1 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1 = 1$$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.