Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
SoSe 2021

20 Punkte

Übungen zu: Analysis 1 für Informatik Blatt 08

Hinweise zur Abgabe

Abgabetermin: 21.06.21, 14:00 Uhr
Abgabeformat: Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!
Sonstiges: Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an.

Aufgaben

1. i) Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in welchen Punkten bzw. Bereichen diese stetig sind. Klassifizieren Sie auch die Unstetigkeitsstellen gemäß Beispiel 3.3.6.

a) $f(x) = |\sin(x^3)|$ (2)

b) $f(x) = \exp(24[x])$, wobei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ (2)

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-6x^2}{x^2-9} & : x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \\ 4 & : x = -3 \\ 3 & : x = 3 \end{cases}$ (2)

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x| \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+x^4} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$ (2)

ii) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f Hölderstetig der Ordnung $\alpha > 0$, falls eine Konstante $M > 0$ existiert, sodass (2)

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

für alle $x, y \in D$.
Zeigen Sie, dass eine solche Hölderstetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

2. i) Seien $(a, b), (c, d), -\infty \leq a < b \leq \infty, -\infty \leq c < d \leq \infty$ zwei beliebige Intervalle und $f : (a, b) \to (c, d)$ sei bijektiv und stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ stetig ist. (5)
Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f streng monoton ist.

ii) Zeigen Sie, dass $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist. (1)

iii) Sei $g : (a, b) \to \mathbb{R}, -\infty < a < b < \infty$, gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass g eine stetige Fortsetzung auf $[a, b]$ besitzt, d.h. es gibt eine stetige Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = g(x)$ für alle $x \in (a, b)$. (4)
Hinweis: Cauchy-Kriterium

3. Wir fassen den Erdäquator als Kreis auf. Dann können wir die Temperaturverteilung zu einem beliebigen Zeitpunkt auf diesem durch eine stetige Funktion $T : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ modellieren bzw. beschreiben, indem wir einen Punkt x_0 auf dem Äquator/Kreis auswählen und alle weiteren Punkte auf diesem durch das Bogenmaß, also den Winkel $\vartheta \in [0, 2\pi]$ beschreiben, den diese (gegen den Uhrzeigersinn) mit x_0 einschließen (siehe etwa Abbildung 3.3 im Skript). (10)
Zeigen Sie, dass es zwei auf dem Äquator gegenüberliegende Punkte gibt, an denen die gleiche Temperatur herrscht.
Hinweis: Zwischenwertsatz

4. Wir erarbeiten in dieser Aufgabe einen zu Satz 4.1.6 bzw. Beispiel 4.1.7 alternativen Beweis zur Differenzierbarkeit der Sinus-Funktion sin.

i) Zeigen Sie, dass (6)
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0.$$

ii) Zeigen Sie nun mit Hilfe von Differenzenquotienten, also Definition 4.1.1, dass sin auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$. (4)