Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

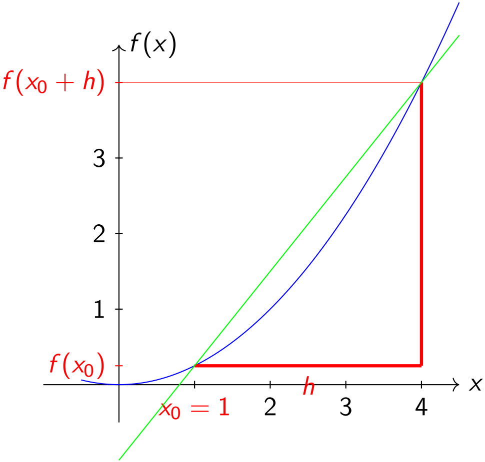
Differentialrechnung

Definition

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

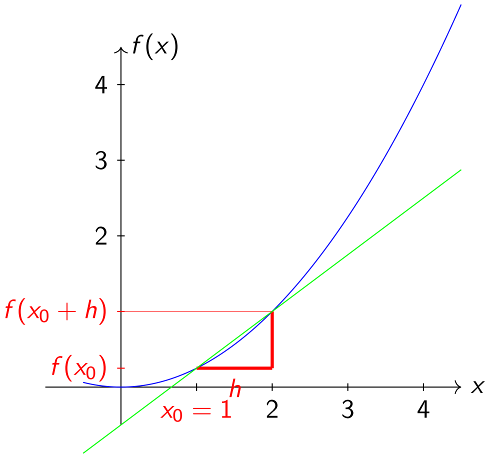
Definition

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



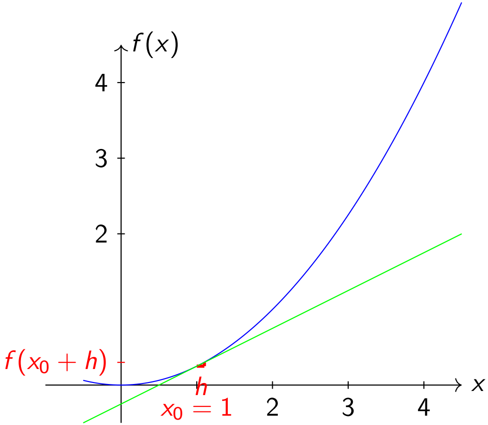
Definition

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Definition

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Anwendung der Definition

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

Herleitung mit der Definition

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x
\end{aligned}$$

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = |x|$ differnzierbar in $x_0 = 0$?

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = |x|$ differnzierbar in $x_0 = 0$?

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0 + h - 0}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(0 + h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 =!?$

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{Differenzierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Grenzwert existiert}$$

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 =!?$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1+h-1}{h} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1+2h+h^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} 2+h = 2 \end{aligned}$$

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 = 1$?

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 = 1$?

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2$$

Ist f differenzierbar?

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 = 1$?

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 = 1$?

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+2h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 + \frac{1}{h} = \infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{x\to 0^-} \frac{h^2+2h}{h} = 2$$

Ist f differenzierbar?

Ableitungsregeln

Ableitungsregeln 11.1.8

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktionen, dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

(i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (Linearität der Ableitung),

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel),

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (Quotientenregel).

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Beispiele: Produktregel und Quotientenregel

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 \sin(x)$$

$$h'(x) = \underbrace{3x^2}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} + \underbrace{x^3}_{f(x)} \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)}$$

Beispiele: Produktregel und Quotientenregel

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 \sin(x)$$

$$h'(x) = \underbrace{3x^2}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} + \underbrace{x^3}_{f(x)} \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{4}x^4}{1 + x^2}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{(1 + x^2)x^3 - \frac{1}{4}x^4 2x}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \qquad \Rightarrow g_1(f_1(x)) =$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \qquad \Rightarrow g_1(f_1(x)) = \ln(x^2)$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \qquad \Rightarrow g_1(f_1(x)) = \ln(x^2)$$

$$g_2(u) = u^2, f_2(x) = 1 - \sin(x) \qquad \Rightarrow g_2(f_2(x)) =$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \qquad \Rightarrow g_1(f_1(x)) = \ln(x^2)$$

$$g_2(u) = u^2, f_2(x) = 1 - \sin(x) \qquad \Rightarrow g_2(f_2(x)) = (1 - \sin(x))^2$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \qquad \Rightarrow g_1(f_1(x)) = \ln(x^2)$$

$$g_2(u) = u^2, f_2(x) = 1 - \sin(x) \qquad \Rightarrow g_2(f_2(x)) = (1 - \sin(x))^2$$

$$g_3(u) = e^x, f_3(x) = 1 - 2x^2 \qquad \Rightarrow g_3(f_3(x)) =$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \qquad \Rightarrow g_1(f_1(x)) = \ln(x^2)$$

$$g_2(u) = u^2, f_2(x) = 1 - \sin(x) \qquad \Rightarrow g_2(f_2(x)) = (1 - \sin(x))^2$$

$$g_3(u) = e^x, f_3(x) = 1 - 2x^2 \qquad \Rightarrow g_3(f_3(x)) = e^{1-2x^2}$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sin(x^2)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sin(x^2)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \sin(u)$ und $f(x) = x^2$.
$g'(u) = \cos(u)$ und $f'(x) = 2x$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sin(x^2)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \sin(u)$ und $f(x) = x^2$.
$g'(u) = \cos(u)$ und $f'(x) = 2x$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sqrt{2x - \cos(x)}$$

$h(x) = g(f(x))$ mit

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sqrt{2x - \cos(x)}$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \sqrt{u}$ und $f(x) = 2x - \cos(x)$.

$g'(u) =$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sqrt{2x - \cos(x)}$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \sqrt{u}$ und $f(x) = 2x - \cos(x)$.

$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ und $f'(x) = 2 + \sin(x)$.

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sqrt{2x - \cos(x)}$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \sqrt{u}$ und $f(x) = 2x - \cos(x)$.

$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ und $f'(x) = 2 + \sin(x)$.

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x - \cos(x)}} \cdot (2 + \sin(x))$$

Kettenregel

$$h(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \ln(u)$ und $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
$g'(u) = \frac{1}{u}$ und $f'(x) = \ldots$

Kettenregel

$$h(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \ln(u)$ und $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
$g'(u) = \frac{1}{u}$ und $f'(x) = \dots$

$f(x) = q(r(x))$ mit $q(u) = \sqrt{u}$ und $r(x) = 1 + x^2$.
$q'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ und $r'(x) = 2x$

Kettenregel

$$h(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \ln(u)$ und $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
$g'(u) = \frac{1}{u}$ und $f'(x) = \dots$

$f(x) = q(r(x))$ mit $q(u) = \sqrt{u}$ und $r(x) = 1 + x^2$.
$q'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ und r'(x) = 2x

$$f'(x) = q'(r(x)) \cdot r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

Kettenregel

$$h(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \ln(u)$ und $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
$g'(u) = \frac{1}{u}$ und $f'(x) = \ldots$

$f(x) = q(r(x))$ mit $q(u) = \sqrt{u}$ und $r(x) = 1 + x^2$.
$q'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ und r'(x) = 2x

$$f'(x) = q'(r(x)) \cdot r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

Daraus folgt für $h'(x)$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2}$$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1 - x^3}\right)^{\cos(x)}$$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1 - x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1 - x^3}\right) \cdot \cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

$s(x) = v(w(x))$ mit $v(u) = \sqrt{u}$ und $w(x) = 1 + x^3$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

$s(x) = v(w(x))$ mit $v(u) = \sqrt{u}$ und $w(x) = 1 + x^3$

$s'(x) = v'(w(x))w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}\cdot(-3x^2)$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

$s(x) = v(w(x))$ mit $v(u) = \sqrt{u}$ und $w(x) = 1 + x^3$

$s'(x) = v'(w(x))w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}\cdot(-3x^2)$

$q'(x) = p'(s(x))\cdot s'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\cdot\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} = \frac{-3x^2}{2(1-x^3)}$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

$s(x) = v(w(x))$ mit $v(u) = \sqrt{u}$ und $w(x) = 1 + x^3$

$s'(x) = v'(w(x))w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}\cdot(-3x^2)$

$q'(x) = p'(s(x))\cdot s'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\cdot\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} = \frac{-3x^2}{2(1-x^3)}$

$f'(x) = q'(x)r(x) + q(x)r'(x) = \frac{-3x^2}{2(1-x^3)}\cos(x) + \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)(-\sin(x))$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

$s(x) = v(w(x))$ mit $v(u) = \sqrt{u}$ und $w(x) = 1 + x^3$

$s'(x) = v'(w(x))w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}\cdot(-3x^2)$

$q'(x) = p'(s(x))\cdot s'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\cdot\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} = \frac{-3x^2}{2(1-x^3)}$

$f'(x) = q'(x)r(x) + q(x)r'(x) = \frac{-3x^2}{2(1-x^3)}\cos(x) + \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)(-\sin(x))$

$$h'(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)}\left[\frac{-3x^2}{2(1-x^3)}\cos(x) - \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\sin(x)\right]$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\ \frac{x^2}{(a^3-x^3)^2}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\ \frac{x^2}{(a^3-x^3)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3}\right) = \frac{1}{3a^6}\left(\frac{x^3}{a^3-x^3}\right)^{-1}\frac{(a^3-x^3)3x^2 - x^3(-3x^2)}{(a^3-x^3)^2}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\;\frac{x^2}{(a^3-x^3)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3}\right) &= \frac{1}{3a^6}\left(\frac{x^3}{a^3-x^3}\right)^{-1}\frac{(a^3-x^3)3x^2 - x^3(-3x^2)}{(a^3-x^3)^2} \\ &= \frac{1}{3a^6}\;\frac{a^3-x^3}{x^3}\;\frac{3a^3x^2-3x^5+3x^5}{(a^3-x^3)^2} \\ &= \frac{1}{a^3}\;\frac{1}{x}\;\frac{1}{a^3-x^3}\end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3 - x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3 - x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{a^3 - x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3 - x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3} \frac{3x^2}{(a^3 - x^3)^2} = \frac{1}{a^3} \frac{x^2}{(a^3 - x^3)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{a^3 - x^3}\right) &= \frac{1}{3a^6} \left(\frac{x^3}{a^3 - x^3}\right)^{-1} \frac{(a^3 - x^3)3x^2 - x^3(-3x^2)}{(a^3 - x^3)^2} \\
&= \frac{1}{3a^6} \frac{a^3 - x^3}{x^3} \frac{3a^3x^2 - 3x^5 + 3x^5}{(a^3 - x^3)^2} \\
&= \frac{1}{a^3} \frac{1}{x} \frac{1}{a^3 - x^3} = \frac{1}{a^3} \frac{a^3 - x^3}{x(a^3 - x^3)^2}
\end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\,\frac{x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\frac{x^3}{x(a^3-x^3)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3}\right) &= \frac{1}{3a^6}\left(\frac{x^3}{a^3-x^3}\right)^{-1}\frac{(a^3-x^3)3x^2-x^3(-3x^2)}{(a^3-x^3)^2}\\
&= \frac{1}{3a^6}\,\frac{a^3-x^3}{x^3}\,\frac{3a^3x^2-3x^5+3x^5}{(a^3-x^3)^2}\\
&= \frac{1}{a^3}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{a^3-x^3} = \frac{1}{a^3}\,\frac{a^3-x^3}{x(a^3-x^3)^2}
\end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\,\frac{x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\frac{x^3}{x(a^3-x^3)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3}\right) &= \frac{1}{3a^6}\left(\frac{x^3}{a^3-x^3}\right)^{-1}\frac{(a^3-x^3)3x^2-x^3(-3x^2)}{(a^3-x^3)^2}\\
&= \frac{1}{3a^6}\,\frac{a^3-x^3}{x^3}\,\frac{3a^3x^2-3x^5+3x^5}{(a^3-x^3)^2}\\
&= \frac{1}{a^3}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{a^3-x^3} = \frac{1}{a^3}\,\frac{a^3-x^3}{x(a^3-x^3)^2}
\end{aligned}$$

$$F'(x) = \frac{1}{a^3}\left(\frac{x^3+a^3-x^3}{x(a^3-x^3)^2}\right) = \frac{1}{x(a^3-x^3)^2}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmten Integral

$$\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} = F(x)$$

Analog mit Ableitung lösen.

Beispiel: Gleichung mit unbestimmten Integral

$$\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + \frac{1}{2a^3} \arctan\frac{x}{a} = F(x)$$

Analog mit Ableitung lösen.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{4a^3} \ \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = ... = \frac{1}{2a^2} \ \frac{1}{a^2 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2a^3} \arctan\frac{x}{a} = ... = \frac{1}{2a^2} \ \frac{1}{a^2 - x^2}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2a^2} \ \frac{a^2 - x^2 + a^2 + x^2}{(a^2 + x^2)(a^2 - x^2)} = \frac{1}{a^4 - x^4}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Herleitung: Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f.

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Herleitung: Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f.

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Leite $f \circ f^{-1}$ ab.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(f^{-1}(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x$$
$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = 1$$

Also gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beispiel: $f(x) = x^2$ und $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad (f^{-1})'(x) = ?$$

Beispiel: $f(x) = x^2$ und $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad f'(x) = 2x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad\qquad (f^{-1})'(x) = ?$$

Damit gilt:

$$f'(f^{-1}(x)) = 2\sqrt{x}$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion lässt sich also berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $f^{-1}(x) = x^2$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f^{-1}(x) = x^2 \qquad (f^{-1})'(x) = ?$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $f^{-1}(x) = x^2$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f^{-1}(x) = x^2 \qquad (f^{-1})'(x) = ?$$

Damit gilt:

$$f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2x}$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion lässt sich also berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{2x}} = 2x$$

$f(x) = \cos x$ und $f^{-1}(x) = \arccos x$

$$\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$$

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$f^{-1}(x) = \arccos x \qquad f^{-1}(x) = ?$$

$f(x) = \cos x$ und $f^{-1}(x) = \arccos x$

$$\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$$

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$f^{-1}(x) = \arccos x \qquad f^{-1}(x) = ?$$

Bestimme $f'(f^{-1}(x))$

$$\begin{aligned} f'(f^{-1}(x)) &= -\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} \\ &= -\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

$f(x) = \cos x$ und $f^{-1}(x) = \arccos x$

$$\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$$

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$f^{-1}(x) = \arccos x \qquad f^{-1}(x) = ?$$

Bestimme $f'(f^{-1}(x))$

$$\begin{aligned} f'(f^{-1}(x)) &= -\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} \\ &= -\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Also gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Aufgabe: $f(x) = \tanh(x)$ und $f^{-1}(x) = Artanh(x)$

Zeige

$$f'(x) = \frac{d}{dx} Artanh(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

mit $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)},\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Aufgabe: $f(x) = \tanh(x)$ und $f^{-1}(x) = Artanh(x)$

Zeige

$$f'(x) = \frac{d}{dx} Artanh(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

mit $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ Bestimme die Ableitung von $\tanh(x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

Aufgabe: $f(x) = \tanh(x)$ und $f^{-1}(x) = Artanh(x)$

Zeige

$$f'(x) = \frac{d}{dx} Artanh(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

mit $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ Bestimme die Ableitung von $\tanh(x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{mit} \quad f^{-1}(x) = Artanh(x)$$

$$\frac{d}{dx} Artanh(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2\left(Artanh(x)\right)} = \frac{1}{1-x^2}$$