



1. (NA) Minifragen

- (a) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge.
- Falls a konvergent ist, ist dann die Folge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent?
 - Falls a bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, ist dann die Folge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent?
- (b) Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, falls der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert in jedem Punkt aus \mathbb{R} übereinstimmen?
- (c) Falls eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Werte 0 und 1 annimmt, nimmt sie dann auch den Wert 0.5 an?

2. (A) Funktionsgrenzwerte mit dem ϵ - δ -Kriterium

Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ - δ -Kriteriums (Definition 10.1.3), dass für jedes $x_0 \in [0, 5]$ der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{1 + \sqrt{x}}$$

existiert. (6)

3. (A) Grenzwerte spezieller Funktionen

Es seien $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Zeigen Sie, dass

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$, (2)
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, (2)
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$. (2)

Hinweis: Nutzen Sie die Reihendarstellung der Exponentialfunktion und führen Sie Teil b) auf Teil a) zurück.

4. (A) Weitere Funktionsgrenzwerte

Berechnen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2}$, (2)

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2 + 24x}, \quad (2)$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \right). \quad (2)$$

5. (A) **Ein impliziter Grenzwert** Für $x \in (0, 1)$ definieren wir $f(x)$ durch

$$\sin x = \frac{x(60 - 7x^2) + x^7 f(x)}{60 + 3x^2}.$$

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (6)

Hinweis: Nutzen Sie die Reihendarstellung des Sinus und stellen Sie die Gleichung nach x um.

6. (T),(NA) Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ - δ -Kriteriums (Definition 10.1.3), dass für jedes $x_0 \in [2, 5]$ der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{1 - x^2}$$

existiert.

7. (T),(NA)

Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x},$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x},$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2},$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x},$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x},$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 12x^2 - 13}{3x^4 - 7x^3 + 2x + 1}.$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.