

## Probeklausur – Bearbeitungszeit 120 Minuten

### Hinweise

- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben, davon sind die Aufgaben 1-3 von allen Studierenden zu bearbeiten. Die Aufgaben 4-6 unterscheiden sich für die Module „Angewandte Stochastik“ und „Angewandte Stochastik 1“ und sind entsprechend gekennzeichnet.
- Die Ergebnisse sind auf 4 Nachkommastellen zu runden.
- Lösungswege sind zu dokumentieren.
- Erlaubte Hilfsmittel: Ein handschriftlich (beidseitig) beschriebenes DIN A4 Blatt und ein nicht-programmierbarer Taschenrechner.

### Allgemeiner Teil

#### Aufgabe 1

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -e \\ \frac{1}{2e^2}(x+e)^2, & -e \leq x < 0 \\ \frac{1}{4\pi}x + \frac{3}{4}, & 0 \leq x < \pi \\ 1, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten

- (a)  $\mathbb{P}(X = 0)$                       (c)  $\mathbb{P}(X > 0)$                       (e)  $\mathbb{P}(X \in [-e, 1])$ .  
(b)  $\mathbb{P}(X < 0)$                       (d)  $\mathbb{P}(X \in (-e, -\frac{1}{2}))$

#### Aufgabe 2

Sei  $(X, Y)$  ein diskreter Zufallsvektor, dessen Zähldichte gegeben ist durch

$Y$	$X = -2$	$3$	$4$
1	0.2	0.15	0.1
2	0.15	0.3	0.1

- (a) Berechne jeweils die Randzähldichte und Randverteilungsfunktion von  $X$  und  $Y$ .  
(b) Berechne  $\mathbb{E}X$ ,  $\mathbb{E}Y$  und  $\mathbb{E}XY$ .

(c) Berechne  $\text{Var}(X)$  und  $\text{Cov}(X, Y)$ .

(d) Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig? Begründe deine Antwort.

### Aufgabe 3

Seien  $X_1, \dots, X_n$  stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $\mu = \mathbb{E}X_1$  und  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ . Außerdem seien  $a \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$  und die Dichte  $f$  von  $X_1$  sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log(x) - a}{s} \right)^2 \right\}, \quad x > 0,$$

wobei  $\log(x)$  den Logarithmus an der Stelle  $x$  bzgl. der Basis  $e$  bezeichnet.

- (a) Berechne  $\mu$ . (Hinweis: Führe eine geeignete Substitution zu Beginn der Integration durch.)
- (b) Nehme nun an, dass  $n = 100$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma^2 = e - 1 \approx 1.718$  und  $X = \sum_{k=1}^n X_k$ . Nähere die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(X \leq 110)$  mit dem Zentralen Grenzwertsatz an. (Hinweis: Die Funktionswerte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sind dieser Klausur angehängt.)

# Angewandte Stochastik

## Aufgabe 4

Die folgende Stichprobe beschreibt die Menge an Getränken (in ml) die von einer Person an verschiedenen Tagen zu sich genommen wird

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
1250	1250	1050	900	1200	1750	1800	1700	2000	1550

- (a) Berechne den Mittelwert, Median sowie das 25%– und 75%– Quantil der Stichprobe
- (b) Skizziere die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe.

Außerdem sei durch

$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$
22	25	20	15	18	30	28	32	35	26

die Tageshöchsttemperatur (in °C) an den jeweiligen Tagen gegeben.

- (c) Bestimme die Parameter  $\hat{\alpha}$  und  $\hat{\beta}$  der Regressionsgeraden.
- (d) Prognostiziere anhand des Getränkekonsum die Tageshöchsttemperatur, wenn bekannt ist, dass die Person 1400 ml getrunken hat.

## Aufgabe 5

Es sei  $X_1, \dots, X_n$  eine Stichprobe von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei  $X_1$  durch die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte definiert ist

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \lambda(2x - 1) & x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem sei  $\hat{\lambda} = 4(1 - \frac{3}{2n} \sum_{i=1}^n X_i)$  ein Schätzer für den Parameter  $\lambda$ .

- (a) Prüfe, ob  $\hat{\lambda}$  erwartungstreu ist.
- (b) Prüfe, ob  $\hat{\lambda}$  stark konsistent ist.

## Aufgabe 6

Jede korrekt angekreuzte Antwort gibt einen Punkt, jede falsch angekreuzte Antwort gibt einen Minuspunkt. Wenn Du die Antwort nicht kennst, kannst Du auch keine der beiden Optionen ankreuzen und erhältst für diesen Teil weder einen Plus- noch einen Minuspunkt. Es können minimal 0 Punkte erreicht werden.

	Richtig	Falsch	
(a)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Eine $\sigma$ -Algebra besteht aus mindestens aus zwei Elementen: dem Grundraum $\Omega$ und der leeren Menge
(b)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Die Fläche unter der Dichtefunktion einer absolut stetigen Zufallsvariabel ist gleich Eins
(c)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Seien $X$ und $Y$ Zufallsvariablen mit $Cov(X, Y) = 0$ . Dann sind $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig.
(d)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Bei einer Standardnormalverteilung hat jeder Wert $x \in \mathbb{R}$ die gleiche Wahrscheinlichkeit.
(e)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Der Vorteil eines Kerndichteschätzes ist, dass er eine (möglicherweise) stetige Funktion durch eine Treppenfunktion approximiert.
(f)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Erwartungstreue Schätzer sind immer schwach konsistent
(g)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Eine Quantilfunktion ist die verallgemeinerte Inverse der Verteilungsfunktion.

# Angewandte Stochastik 1

## Aufgabe 4

Zum Lernen für die Klausur in Angewandter Stochastik findet sich eine Lerngruppe aus 10 Studierenden zusammen. Um den Lernplan zu besprechen treffen sie sich in einer Ulmer Kneipe und stoßen mit ihren Getränken an. Dabei werden sie direkt mit einer Problemstellung konfrontiert, die so auch in der Klausur gefragt werden könnte.

- (a) Wie oft hört man die Gläser klingen, wenn jeder mit jedem genau einmal anstößt?

Die Gruppe besteht aus sechs Studierenden, die ihre Übungsblätter gewissenhaft bearbeitet haben und vier lediglich die Lösungen abgeschrieben haben. Aus Erfahrungen ist bekannt, das Studierende, welche die Blätter selbst bearbeitet haben, mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% die Klausur bestehen, Abschreiber nur mit 60%.

- (b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Studierende der Gruppe nicht bestehen?
- (c) Wenn eine Person nicht besteht, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein Abschreiber ist?

## Aufgabe 5

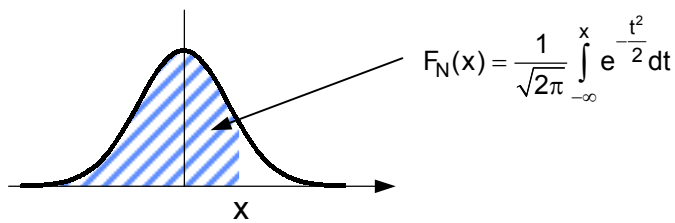
Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ . Hierbei sei  $\mathcal{B}([0, 1])$  die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra auf dem Intervall  $[0, 1]$  sowie  $\lambda$  das Lebesguemaß auf  $[0, 1]$  (Das Lebesguemaß weist einem Intervall seine Länge zu, es gilt also z.B.  $\lambda([0.1, 0.5]) = 0.4$ ). Konstruiere auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum eine Zufallsvariable  $X$ , so dass  $X \sim \text{Poi}(\beta)$  mit  $\beta > 0$ , d.h. eine Zufallsvariable die poissonverteilt mit dem Parameter  $\beta > 0$  ist. Zeige, dass für deine konstruierte Zufallsvariable  $X$  tatsächlich  $X \sim \text{Poi}(\beta)$  gilt.

## Aufgabe 6

Jede korrekt angekreuzte Antwort gibt einen Punkt, jede falsch angekreuzte Antwort gibt einen Minuspunkt. Wenn Du die Antwort nicht kennst, kannst Du auch keine der beiden Optionen ankreuzen und erhältst für diesen Teil weder einen Plus- noch einen Minuspunkt. Es können minimal 0 Punkte erreicht werden.

	Richtig	Falsch	
(a)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Eine $\sigma$ -Algebra besteht aus mindestens zwei Elementen: dem Grundraum $\Omega$ und der leeren Menge.
(b)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Ereignis und Gegenereignis sind nicht stochastisch unabhängig.
(c)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Eine Verteilungsfunktion ist rechtsseitig stetig.
(d)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Die Fläche unter der Dichtefunktion einer absolutstetigen Zufallsvariable ist gleich Eins.
(e)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Eine Zufallsvariable kann auch negative Werte annehmen.
(f)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Seien $X$ und $Y$ Zufallsvariablen mit $Cov(X, Y) = 0$ . Dann sind $X$ und $Y$ unabhängig.
(g)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Bei der Standardnormalverteilung hat jeder Wert $x \in \mathbb{R}$ die gleiche Wahrscheinlichkeit.

# Tabelle der Standardnormalverteilung ( $\mu = 0, \sigma = 1$ )



$$F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ablesebeispiel:  $F_N(2,36) = 0,990863$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,500000	0,503989	0,507978	0,511967	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,10	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345
0,20	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,30	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,40	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,50	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,60	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,70	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,80	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,90	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,00	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,10	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,878999	0,881000	0,882977
1,20	0,884930	0,886860	0,888767	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,30	0,903199	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,40	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888
1,50	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,60	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,70	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959071	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,80	0,964070	0,964852	0,965621	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,90	0,971284	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705
2,00	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,10	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,20	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,30	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576
2,40	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,50	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,60	0,995339	0,995473	0,995603	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,70	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,80	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,90	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
3,00	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999
3,10	0,999032	0,999064	0,999096	0,999126	0,999155	0,999184	0,999211	0,999238	0,999264	0,999289
3,20	0,999313	0,999336	0,999359	0,999381	0,999402	0,999423	0,999443	0,999462	0,999481	0,999499
3,30	0,999517	0,999533	0,999550	0,999566	0,999581	0,999596	0,999610	0,999624	0,999638	0,999650
3,40	0,999663	0,999675	0,999687	0,999698	0,999709	0,999720	0,999730	0,999740	0,999749	0,999758
3,50	0,999767	0,999776	0,999784	0,999792	0,999800	0,999807	0,999815	0,999821	0,999828	0,999835
3,60	0,999841	0,999847	0,999853	0,999858	0,999864	0,999869	0,999874	0,999879	0,999883	0,999888
3,70	0,999892	0,999896	0,999900	0,999904	0,999908	0,999912	0,999915	0,999918	0,999922	0,999925
3,80	0,999928	0,999930	0,999933	0,999936	0,999938	0,999941	0,999943	0,999946	0,999948	0,999950
3,90	0,999952	0,999954	0,999956	0,999958	0,999959	0,999961	0,999963	0,999964	0,999966	0,999967
4,00	0,999968	0,999970	0,999971	0,999972	0,999973	0,999974	0,999975	0,999976	0,999977	0,999978
4,10	0,999979	0,999980	0,999981	0,999982	0,999983	0,999983	0,999984	0,999985	0,999985	0,999986
4,20	0,999987	0,999987	0,999988	0,999988	0,999989	0,999989	0,999990	0,999990	0,999991	0,999991
4,30	0,999991	0,999992	0,999992	0,999993	0,999993	0,999993	0,999993	0,999994	0,999994	0,999994
4,40	0,999995	0,999995	0,999995	0,999995	0,999995	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996
4,50	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999998	0,999998	0,999998