Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille
Marc Schneble

Sommersemester 16
Blatt 10 (40 Punkte)
21.06.2016

# Übungen zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe: Dienstag, 21.06.2016, bis 14:15 Uhr, H22)

1. Es sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$. Zeige mit der Definition der Differenziertbarkeit, dass $f$ in $(0,\infty)$ differenzierbar ist und bestimme $f'$.

(2 Punkte)

2. Wir definieren die Funktionen $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$
   (a) Zeige, dass
$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$
   (b) Zeige, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   (c) Zeige, dass die Umkehrfunktion von cosh, nämlich arcosh (Areakosinus Hyperbolicus), existiert und gebe den maximalen Definitionsbereich $D$ von arcosh an.
   (d) Berechne arcosh'$(x)$ $\forall x \in D$.
   (e) Zeige, dass $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ für $x \geq 1$.

(2+2+3+3+4 Punkte)

3. Berechne die Ableitungen folgender Funktionen mit Angabe des maximalen Definitionsbereichs.

   a) $f(x) = \log(\log(2x))$
   b) $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$
   c) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$
   d) $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
   e) $\frac{x^{\sqrt{x}}}{2^x}$
   f) $f(x) = x^5 5^x$
   g) $f(x) = \log\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)$
   h) $f(x) = (x\cos x)^x$
   i) $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin 2x}$

(je 2 Punkte)

4. Zeige, dass für alle $x, y < 0$ und $a < b$ folgende Ungleichungen gelten:

   a) $|\cos e^x - \cos e^y| \leq |x - y|$,
   b) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

   *Hinweis:* 1. Mittelwertsatz

(3+3 Punkte)

Bonus 7) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Untersuche, wie oft die durch

$$f(x) := \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion differenzierbar bzw. stetig differenzierbar ist.