Klausur Mathematik für Informatik 2

27.7.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Was ist eine Linearform auf V? (1)

(b) Es sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Geben Sie die durch das Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|$ an. (1)

(c) Zeigen Sie, dass die induzierte Norm die Parallelogramm-Identität erfüllt, das heißt, für alle $x, y \in V$ gilt (3)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

(d) Es sei $C(I)$ die Menge der stetigen Funktionen auf einem Intervall $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Begründen Sie, warum für $f, g \in C(I)$ durch $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ ein Skalarprodukt definiert ist. (7)
Hinweis: Dass $C(I)$ ein reeller Vektorraum ist, muss nicht gezeigt werden.

(e) Was ist ein metrischer Raum? (4)

2. (a) Gegeben sei die rationale Funktion $R(x) = \frac{1}{(x^2-a^2)^2}$ mit $a \neq 0$. Leiten Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten der Partialbruchdarstellung von R her. (7)

(b) Es sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie Kriterien für die Lösbarkeit und die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems $Ax = b$ an. (2)

(c) Es seien A, b und x wie in Teilaufgabe (b) und $v \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $Ax = b$. Zeigen Sie, dass für $w \in \operatorname{Ker} A$ auch $v + w$ eine Lösung von $Ax = b$ ist. (2)

(d) Aufgrund welchen Satzes ist die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems aus Teilaufgabe (a) gegeben? (1)

3. (a) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F : V \to V$ linear. Was ist ein Eigenwert von F? (2)

(b) Es sei nun $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

(1) Erläutern Sie, was es heißt, dass A diagonalisierbar ist. (1)

(2) Was können Sie über die Transformationsmatrix aussagen, die A diagonalisiert? (1)

(c) Ist $\lambda = 2$ ein Eigenwert der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$? Wenn ja, geben Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert λ an. (5)

(d) Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = e^{\lambda x}$ ein Eigenvektor der linearen Abbildung $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ ist. (2)

Bitte wenden!

(e) Begründen Sie mit Teilaufgabe (d), warum $C^\infty(\mathbb{R})$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum ist. (3)

4. (a) Es sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wann heißt f auf D stetig? (2)

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Was bedeutet die Sprechweise „f ist stetig in a fortsetzbar"? (2)

(c) Geben Sie eine Funktion an, die in $x_0 = 2$ definiert, aber nicht stetig ist (mit Beweis). (2)

(d) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 1 \\ \sin(\pi x), & x \leq 1 \end{cases}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 1$. (6)

(e) Untersuchen Sie die Funktion f aus Teilaufgabe (d) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit für alle Punkte $x_0 \neq 1$. (3)

5. (a) Zeigen Sie, dass für $a \neq 0$ gilt $\int \frac{x}{\sin^2(ax)} dx = -\frac{x}{a} \cot(ax) + \frac{1}{a^2} \ln \sin(ax)$ und geben Sie eine weitere, andere Stammfunktion von $\frac{x}{\sin^2(ax)}$ an. (4)

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass für eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ auf $[a, b]$ stetig ist. (7)
Hinweis: Wenn Sie die Definition nicht kennen, erfragen Sie diese bei der Aufsicht. Sie erhalten dann aber keine Punkte auf Aufgabe 4 (a).

(c) Geben Sie eine andere Begründung für die Stetigkeit von F aus Teilaufgabe (b) an. (2)

6. (a) Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \begin{cases} k^2 x, & 0 \leq x < \frac{1}{2k}, \\ k^2\left(\frac{1}{k} - x\right), & \frac{1}{2k} \leq x < \frac{1}{k}, \\ 0, & \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$

(1) Skizzieren Sie f_1, f_2 und f_3. (3)

(2) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen $f(x) = 0$ konvergiert.
Erinnerung: Das heißt, für (jedes) fest gewählte $x \in [0, 1]$ gilt $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) = 0$. (2)

(3) Zeigen Sie, dass $\int_0^1 f(x)\, dx \neq \lim_{k \to \infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx$ gilt. (4)
Hinweis: Berechnen Sie $\int_0^1 f_k(x)\, dx$.

(b) Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann für $x, x_0 \in (a, b)$ gilt (4)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Viel Erfolg!