Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille, Marc Schneble

Sommersemester 16
05.08.2016, 12 Uhr s.t.

1. Klausur zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

Gesamtpunktzahl: 107 Punkte
Hinreichende Punktzahl zum Bestehen der Klausur: 45 Punkte

1. Es seien $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$,

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{2^k}{5^{k+2}}$,

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

(4+5+8 Punkte)

2. Untersuche die nachstehenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k^2}{1+k^3}\right)^2$, b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$, c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{k}\right)^k, a \geq 0$.

(6+3+6 Punkte)

3. Bestimme das größtmögliche offene Konvergenzintervall von

$$\sum_{k=1}^{\infty} k! \cdot \left(\frac{2(x-3)}{k}\right)^k.$$

(6 Punkte)

4. Zeige mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{|x|}}$$

   im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

(8 Punkte)

5. (a) Formuliere den Zwischenwertsatz.
   (b) Zeige, dass es *genau* ein $x \geq 0$ gibt mit $e^x + \sqrt{x} = 3$.

(6+10 Punkte)

6. Der Tangenshyperbolicus ist definiert als $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ mit

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

a) Zeige, dass die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{Artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ existiert und dass diese durch

$$\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \ \forall x \in (-1,1)$$

gegeben ist.

b) Zeige, dass $\operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(10+7 Punkte)

7. Es sei $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{1+x}$. Bestimme $T^{(3)}f(0,x)$, also das Taylorpolynom 3. Ordnung von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(6 Punkte)

8. Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{-x^3+1}{x^4+x^2}.$$

(a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f.

(b) Bestimme

$$\int \frac{\log^5(x)+1}{x(\log^4(x)+\log^2(x))}\,\mathrm{d}x.$$

(8+14 Punkte)

Viel Erfolg!