Universität Ulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2019

Übungen Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker: Blatt 8

37. Bestimme die Ableitungen von $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, falls f gegeben ist durch

a) $(x^x)^x$

b) $x^{(x^x)}$

c) $x^{1/x}$

d) $\log\log(1 + x)$

e) $x^{\sin x}$

f) $\sqrt[3]{x^{3/5} + \sin^3(1/x) - \tan^2(x)}$

g) $\dfrac{\cos x}{2 + \sin \log x}$.

38. Die Legendreschen Polynome, P_n, werden durch

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n\right], \quad n \in \mathbb{N},$$

definiert, wobei $\frac{d^n}{dx^n}$ die n-fache Ableitung bezeichne. Man berechne $P_0, P_1, \ldots, P_5$.

39. Es seien $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ zwei offene Intervalle. Betrachte das offene Rechteck $C \subset \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene, welches durch

$$C := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy \text{ mit } x \in I_1, y \in I_2\}$$

definiert ist. Es sei $z_0 \in C$. Eine Funktion $f : C \to \mathbb{C}$ heißt im Punkt z_0 differenzierbar, falls

$$\exists c \in \mathbb{C} : c = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$ in keinem Punkt differenzierbar ist.

40. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Man beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(a) Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \tag{1}$$

(b) Existiert $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$, so ist f in x_0 differenzierbar und es gilt (1).

41. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$.

(a) Gibt es Zahlen $K > 0$ und $\alpha > 1$ mit $|f(x)| \leq K|x|^\alpha$ für $x \in I$, so ist f in 0 differenzierbar.

(b) Gilt $f(0) = 0$ und gibt es $K > 0$ und $\alpha \in (0, 1)$ mit $|f(x)| \geq K|x|^\alpha$ für $x \in I$, so ist f in 0 nicht differenzierbar.

42. (a) Bestimme mithilfe der Definition die Ableitung von $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) Für jede reelle Zahl bezeichnet

$$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

die größte ganze Zahl, welche x nicht übersteigt. Wir definieren die Abbildung

$$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto [x].$$

Diese Abbildung wird auch Gaußklammer genannt.
Sei nun die Funktion f definiert durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}.$$

Man bestimme die links- und rechtsseitige Ableitung von f. Wo ist f differenzierbar?