Dr. J.-W. Liebezeit
M. Scheibchen

Blatt 07
06.06.2014

Übungen zu Analysis I für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe bis Freitag, 13.06.2014 um 08:20 Uhr, H3)

1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = 1 + x^2$. Finde für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ein $\delta := \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

   (5 Punkte)

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen stetig? Sofern es Unstetigkeitsstellen gibt: Bestimme jeweils die Art der Unstetigkeit (Sprung, hebbare Unstetigkeitsstelle, Pol, Unstetigkeit 2. Art) und behebe hebbare Unstetigkeitsstellen durch Setzen geeigneter Funktionswerte.

   (a) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2 - 2x - 8}$ (b) $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}{x^2 - x - 2}$

   (4+4 Punkte)

3. Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a-2}, & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 + b, & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

   bei $x = 1$ stetig ist und $f(-1) = 1$ gilt.

   (5 Punkte)

4. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und die Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ sei stetig auf $[a, b]$. Zeige, dass es mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.
   Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - x$.

   (7 Punkte)

5. Berechne mit Hilfe der Definition jeweils die Ableitung folgender Funktionen für alle x aus dem Definitionsbereich.

   (a) $f(x) = x^3$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

   (4+4 Punkte)