Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

1. Mittelwertsatz

Definition Erster Mittelwertsatz

Korollar 11.2.8: Erster Mittelwertsatz

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b), dann gilt

$$\exists \xi \in (a, b)\left(f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right).$$

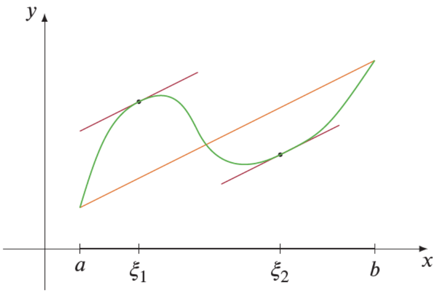

Abbildung 11.6: Zum ersten Mittelwertsatz.

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

1. Mittelwertsatz

Kann auf jede beliebige Funktion angewandt werden. Man braucht nur: $f(x)$, a und b

1. Mittelwertsatz

Kann auf jede beliebige Funktion angewandt werden. Man braucht nur: $f(x), a$ und b

Sei $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2},\ a = 0,\ b = 1$:

$$\exists \xi \in (0,1):\ 2\xi e^{\xi^2} = \frac{e^1 - e^0}{1 - 0} \ \Leftrightarrow\ 2\xi e^{\xi^2} = e - 1$$

Kann auf jede beliebige Funktion angewandt werden. Man braucht nur: $f(x), a$ und b

Sei $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2},\ a = 0,\ b = 1$:

$$\exists \xi \in (0,1):\ 2\xi e^{\xi^2} = \frac{e^1 - e^0}{1 - 0} \ \Leftrightarrow\ 2\xi e^{\xi^2} = e - 1$$

Sei $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x},\ a = 1,\ b = e$

$$\exists \xi \in (1,e):\ \frac{1}{\xi} = \frac{\ln(e) - \ln(1)}{e - 1} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\xi} = \frac{1}{e - 1}$$

1. Mittelwertsatz

Kann auf jede beliebige Funktion angewandt werden. Man braucht nur: $f(x), a$ und b

Sei $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2},\ a = 0,\ b = 1$:

$$\exists \xi \in (0,1):\ 2\xi e^{\xi^2} = \frac{e^1 - e^0}{1 - 0} \ \Leftrightarrow\ 2\xi e^{\xi^2} = e - 1$$

Sei $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x},\ a = 1,\ b = e$

$$\exists \xi \in (1,e):\ \frac{1}{\xi} = \frac{\ln(e) - \ln(1)}{e - 1} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\xi} = \frac{1}{e - 1}$$

Sei $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x),\ a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}$

$$\exists \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right):\ \cos(\xi) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \ \Leftrightarrow\ \cos(\xi) = \frac{2}{\pi}$$

Anwendung: Ungleichungen

Tutoriumsaufgabe: Zeige: für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Was muss ich wissen: $\frac{d}{dx} arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+y^2}$ für $x > y$

Anwendung: Ungleichungen

Tutoriumsaufgabe: Zeige: für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Was muss ich wissen: $\frac{d}{dx} arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+y^2}$ für $x > y$

Außerdem mit $a < \xi < b$: $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2}$

Wähle $f(x) = \arctan x$.

Anwendung: Ungleichungen

Tutoriumsaufgabe: Zeige: für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Was muss ich wissen: $\frac{d}{dx} arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+y^2}$ für $x > y$

Außerdem mit $a < \xi < b$: $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2}$

Wähle $f(x) = \arctan x$. Nach 1. MWS existiert ein $\xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a}$$

Anwendung: Ungleichungen

Tutoriumsaufgabe: Zeige: für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Was muss ich wissen: $\frac{d}{dx} arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+y^2}$ für $x > y$

Außerdem mit $a < \xi < b$: $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2}$

Wähle $f(x) = \arctan x$. Nach 1. MWS existiert ein $\xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a}$$

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

Multipliziere mit $(b-a) > 0$, daraus folgt die Ungleichung.

Aufgabe: Mittelwertsatz

Zeige: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$

Aufgabe: Mittelwertsatz

Zeige: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ Wähle $f(x) = \ln(x),\ b = x, a = 1$, was sagt der Mittelwertsatz?

Aufgabe: Mittelwertsatz

Zeige: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ Wähle $f(x) = \ln(x),\ b = x, a = 1$, was sagt der Mittelwertsatz?

Es existiert ein $\xi \in (1, x)$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi) \qquad \text{also} \qquad \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{1}{\xi}$$

Aufgabe: Mittelwertsatz

Zeige: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ Wähle $f(x) = \ln(x),\ b = x, a = 1$, was sagt der Mittelwertsatz?

Es existiert ein $\xi \in (1, x)$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi) \qquad \text{also} \qquad \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{1}{\xi}$$

Also gilt für ein $\xi \in (1, x)$ auch

$$\ln(x) = \frac{x - 1}{\xi}$$

Aufgabe: Mittelwertsatz

Zeige: $1-\frac{1}{x} < \ln x < x-1$ für alle $x \in (0,\infty)$ Wähle $f(x) = \ln(x),\ b = x, a = 1$, was sagt der Mittelwertsatz?

Es existiert ein $\xi \in (1,x)$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(\xi) \qquad \text{also} \qquad \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \frac{1}{\xi}$$

Also gilt für ein $\xi \in (1,x)$ auch

$$\ln(x) = \frac{x-1}{\xi}$$

Da $1 < \xi < x$ folgen die Ungleichungen:

$$\ln(x) > \frac{x-1}{x} = 1-\frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad \ln(x) < \frac{x-1}{1} = x-1$$

Anwendung: Grenzwert

Bestimme: $\lim_{n\to\infty} n(1 - \cos(\frac{1}{n}))$

Anwendung: Grenzwert

Bestimme: $\lim_{n\to\infty} n(1-\cos(\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{n})-(-\cos(0))}{\frac{1}{n}-0}$

Anwendung: Grenzwert

Bestimme: $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\cos(\frac{1}{n})) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{n})-(-\cos(0))}{\frac{1}{n}-0}$

Wähle $f(x) = -\cos(x), f'(x) = \sin(x)$.
Nach dem 1. MWS existiert ein $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$, sodass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{n}) - (-\cos(0))}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(\xi_n)}_{=f'(\xi_n)}$$

Anwendung: Grenzwert

Bestimme: $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\cos(\frac{1}{n})) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{n})-(-\cos(0))}{\frac{1}{n}-0}$

Wähle $f(x) = -\cos(x), f'(x) = \sin(x)$.
Nach dem 1. MWS existiert ein $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$, sodass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{n})-(-\cos(0))}{\frac{1}{n}-0} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(\xi_n)}_{=f'(\xi_n)}$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$ gilt, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\xi_n) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

Zweiter Mittelwertsatz

Definition: Zweiter Mittelwertsatz

Zweiter Mittelwertsatz 11.2.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Abbildung 2.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Definition: Zweiter Mittelwertsatz

Zweiter Mittelwertsatz 11.2.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Abbildung 2.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Bestimme: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}, \qquad a > 0,\ \beta \neq 0$:

Definition: Zweiter Mittelwertsatz

Zweiter Mittelwertsatz 11.2.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Abbildung 2.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Bestimme: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}, \qquad a > 0,\ \beta \neq 0$:

Wähle $f(x) = x^\alpha,\ g(x) = x^\beta,\ b = x,\ a = a > x$.
Dann sagt der Mittelwertsatz: Es gibt ein $\xi \in (a, x)$ mit

$$\alpha\xi^{\alpha-1}(x^\alpha - a^{alpha}) = \beta\xi^{\beta-1}(x^\beta - a^\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha\xi^{\alpha-1}}{\beta\xi^{\beta-1}} = \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$$

Definition: Zweiter Mittelwertsatz

Zweiter Mittelwertsatz 11.2.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Abbildung 2.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Bestimme: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}, \qquad a > 0,\ \beta \neq 0$:

Wähle $f(x) = x^\alpha,\ g(x) = x^\beta,\ b = x,\ a = a > x.$
Dann sagt der Mittelwertsatz: Es gibt ein $\xi \in (a, x)$ mit

$$\alpha \xi^{\alpha - 1}(x^\alpha - a^{alpha}) = \beta \xi^{\beta - 1}(x^\beta - a^\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha \xi^{\alpha-1}}{\beta \xi^{\beta-1}} = \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$$

Für $x \to a$ geht $\xi \to a$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\ a^{\alpha - \beta}$$

Identitätssatz

Definition: Identitätssatz

Identitätssatz für differenzierbare Funktionen 11.2.9

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbare Funktionen, dann gilt

(i) $\forall x \in I(f'(x) = 0) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in I(f(x) = c)$, das heißt wenn die

Ableitung von f für alle $x \in I$ verschwindet, dann ist f konstant.

(ii) $\forall x \in I(f'(x) = g'(x)) \land \exists x_0 \in I(f(x_0) = g(x_0)) \Rightarrow \forall x \in I(f(x) = g(x))$.

Abbildung 3.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Anwendung: Reihendarstellungen

Zeige:

$$\sin x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ mit } \cos x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Anwendung: Reihendarstellungen

Zeige:

$$\sin x = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ mit } \cos x = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sum_0^\infty (-1)^k \frac{(2k+1)x^{2k+1-1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
&= \cos x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\sin(0) = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{0^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$$

Nach Identitätsatz (ii) gilt Gleichheit.

Anwendung: Reihendarstellungen

Zeige:

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für } x \in (0,1)$$

Hinweis: $\operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Anwendung: Reihendarstellungen

Zeige:

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für } x \in (0,1)$$

Hinweis: $\operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)' = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = -\frac{1}{1+x^2}$$

Gezeigt: $\forall \in I = (0,1) : f'(x) = g'(x)$. Noch zu zeigen:

$$\exists x_0 \in I : f(x_0) = g(x_0)$$

Anwendung: Reihendarstellungen

Zeige:

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für } x \in (0,1)$$

Hinweis: $\operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right)' = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = -\frac{1}{1+x^2}$$

Gezeigt: $\forall \in I = (0,1) : f'(x) = g'(x)$. Noch zu zeigen:

$$\exists x_0 \in I : f(x_0) = g(x_0)$$

$$g(0) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{0^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} = \operatorname{arccot}(0)$$