Analysis I für I&I

Blatt 10

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) z.z. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Beweis: Wegen $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}{x} = \lim_{x \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$$

$$= \lim_{x \to 0} \Big(1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}}_{\to 0} \Big) = 1$$

b) z.z. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Beweis: da e^x stetig sowie $\ln(x)$ stetig, reicht es, $x = \lim\limits_{n \to \infty} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)$ zu zeigen:

$$\lim_{n \to \infty} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim_{n \to \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Betrachte kontinuierlichen GW $\lim\limits_{y \to \infty}$ (anstatt über natürl. Zahlen):

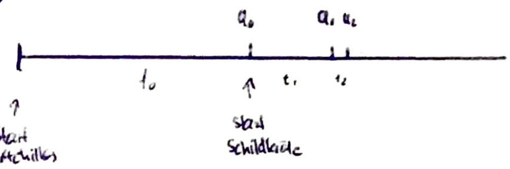
$$\lim_{y \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)}{\frac{1}{y}} \overset{\text{L'H.} \frac{0}{0}}{=} \lim_{y \to \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{x}{1 + \underbrace{\frac{x}{y}}_{\to 0}} = x$$

da der kontinuierliche GW x ist, muss auch der diskrete x sein.

Aufgabe 2

Der Fehler liegt in der Schlussfolgerung, dass $\sum_{k=0}^{\infty} t_k = \infty$ ist, wenn $t_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.
Das muss nämlich nicht so sein: Wir berechnen die t_k.
Es sei V_S = Geschw. Schildkröte, V_A = Geschw. Achilles

$\Rightarrow V_A = 10 \cdot V_S$



$t_0 = \frac{a_0}{V_A}$ (Zeit die A für a_0 braucht)

$\Rightarrow a_1 = t_0 \cdot V_S = \frac{a_0}{V_A} \cdot V_S = \frac{1}{10} a_0$ (was S in Zeit t_0 schafft)

$\Rightarrow t_1 = \frac{a_1}{V_A} = \frac{1}{10} t_0$ (was A für a_1 braucht)

$\Rightarrow a_2 = t_1 \cdot V_S = \frac{1}{10} \cdot t_0 \cdot V_S = \frac{1}{100} a_0$ (was S in Zeit t_1 schafft)

$\Rightarrow t_2 = \frac{1}{100} t_0$ usw

$\Rightarrow T = t_0 + \frac{1}{10} t_0 + \frac{1}{100} t_0 + \ldots = t_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = t_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \cdot t_0 < \infty$

also hat A nach $\frac{10}{9} \frac{a_0}{V_A}$ die Schildkröte eingeholt.

Kann man auch so sehen:

$S_A(t) = V_A \cdot t$ (Position von A nach Zeit t)

$S_S(t) = V_S \cdot t + a_0$ (— " — S — " —)

Gleichsetzen: $S_A(t) = S_S(t) \Leftrightarrow V_A \cdot t = V_S \cdot t + a_0 \Leftrightarrow t = \frac{a_0}{V_A - V_S} = \frac{a_0}{V_A - \frac{1}{10} V_A} = \frac{10}{9} \frac{a_0}{V_A}$

Aufgabe 3

a) $f(x) = \sin(x)$

i) f unendl. oft stet. diff'bar $\Rightarrow$ können Taylor anwenden.

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in (x,a) \text{ bzw. } (a,x)$$

Wir nehmen $a=0$ und betrachten den absoluten Fehler:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

da wir bei $x = \frac{1}{10}$ auswerten wollen und $|f^{(n+1)}(\xi)| = |\cos(\xi)|$ oder $|\sin(\xi)|$, was beides ≤ 1 ist.

$$|R_n(x)| \leq 10^{-4} \Leftarrow \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-4}.$$

Ausprobieren: $n=3$ tut's. (und jedes ≥ 3)

Also ist

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) \approx \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sin(0) \cdot 0.1^0 + \cos(0) \cdot 0.1^1 - \sin(0) \cdot \frac{0.1^2}{2} - \cos(0) \cdot \frac{0.1^3}{3!}$$

$$= 0.1 - \frac{0.1^3}{6} = 0.0998333..$$

[Zum Vergleich: $\sin\left(\frac{1}{10}\right) \overset{TR}{=} 0.09983341....$]

(ii) f als unendliche Reihe?

Genau wie oben erhält man $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, und damit

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Wir bestimmen $f^{(k)}(0)$ allgemein:

$$\left.\begin{aligned} f^{(0)}(0) &= f(0) = \sin(0) = 0 \\ f'(0) &= \cos(0) = 1 \\ f''(0) &= -\sin(0) = 0 \\ f'''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ f^{(4)}(0) &= \sin(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ 1, & k = 1, 5, \ldots \\ -1, & k = 3, 7, \ldots \end{cases} = \begin{cases} (-1)^\ell, & \text{falls } k = 2\ell+1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit folgt $\sin(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}$

$\boxed{\text{Übung:}}$ Ähnlich gilt: $\cos(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!}$

b) $f: [-1, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = \sqrt{1+x}$

(i) f ist auf $(-1, \infty)$ unendl. oft diff'bar.

Wir bestimmen die ersten 4 Ableitungen und werten die ersten 3 in $a=0$ aus:

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} (x+1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{3}{8} (x+1)^{-5/2} \Rightarrow f'''(0) = \frac{3}{8}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} (x+1)^{-7/2}$

Damit ist $P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$

(ii) Es ist $|R_3(x)| = \left| \frac{-\frac{15}{16}(\xi+1)^{-7/2}}{4!} x^4 \right|$ mit ξ zw. 0 und x.

$\Rightarrow$ da $|x| \le \frac{1}{5}$ ist $|x^4| \le \frac{1}{625}$ und da $|\xi| \le \frac{1}{5}$ gilt $(\xi+1)^{-7/2} \le \left(\frac{4}{5}\right)^{-7/2}$

also ist $|R_3(x)| \le \frac{5}{128} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-7/2} \cdot \frac{1}{625} = 1.36 \cdot 10^{-4} < \frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$

[Es war leider ein Fehler auf der Angabe – dort wurde nach R_4 gefragt. Mit R_4 funktioniert es aber genauso]

(iii) Wir haben aus (i) und (ii):

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \underbrace{\frac{5}{128} \cdot \frac{x^4}{(1+\xi)^{7/2}}}_{\text{Betrag} \le \frac{1}{4} \cdot 10^{-3}}$$

Um $\sqrt{5}$ und $\sqrt{7}$ zu "erreichen", multiplizieren wir mit $y \in [0,4]$. Dann ist der Fehler $\le y \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} \le 10^{-3}$:

$$\sqrt{y^2(1+x)} = y + \frac{1}{2}yx - \frac{1}{8}yx^2 + \frac{1}{16}yx^3 - yR_4$$

Nun ist mit zB $y = \frac{5}{2}$ (es gehen auch andere!) und $x = -\frac{1}{5}$ $\quad y^2(1+x) = 5$

$\Rightarrow \sqrt{5} \approx \frac{5}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\right) - \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^3) \quad \approx 2.32625$

und mit $y = \frac{5}{2}$ und $x = 3/25$ ist $y^2(1+x) = 7$ und analog

$\Rightarrow \sqrt{7} = \dots \approx 2.64577$

[Zum Vergleich: $\sqrt{5} \overset{TR}{=} 2.236067977$

$\sqrt{7} \overset{TR}{=} 2.64575131$

Aufgabe 4

$$\text{z.z.} \quad \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k, \quad b_k = \sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} c_l a^{l-k}$$

f als Polynom ∞ oft stetig diff'bar und $f^{(n+1)} \equiv 0$

$$\overset{\text{Taylor}}{\Rightarrow} \quad \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Es ist $f'(a) = \sum_{l=0}^{n} l c_l \cdot x^{l-1} = \sum_{l=1}^{n} l \cdot c_l \cdot x^{l-1}$; $f''(a) = \sum_{l=1}^{n} l \cdot (l-1) c_l \cdot x^{l-2} = \sum_{l=2}^{n} l \cdot (l-1) c_l \cdot x^{l-2}$;

$\ldots$; $f^{(k)}(a) = \sum_{l=k}^{n} \frac{l}{(l-k)!} c_l \cdot x^{l-k}$

$$= k! \underbrace{\sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} c_l x^{l-k}}_{b_k} \quad \text{für } k \leq n$$

einsetzen liefert Beh. $\square$

Aufgabe 5

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

$\Rightarrow f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = f^{(4)}(1) = 0$ und $f^{(5)}(1) = 120 > 0$

$\overset{\text{Satz 4.3, 4 gerade}}{\Rightarrow}$ kein Extremum

$g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

$\Rightarrow g'(1) = g''(1) = g^{(3)}(1) = 0$ und $g^{(4)}(1) = 24 > 0$

$\overset{\text{Satz 4.3, 3 ungerade}}{\Rightarrow}$ lok. Min.