

Repetitorium Analysis 1 Mathe

Sommersemester 2022

Vollständige Induktion

§ 1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Dies ist eine Methode, um Aussagen über natürliche Zahlen (\mathbb{N}) zu beweisen. Sei dazu $A(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) eine solche Aussage. Es möge gelten:

- (1) $A(1)$ ist richtig (Induktionsanfang)
- (2) Aus der Richtigkeit von $A(n)$ folgt die Richtigkeit von $A(n + 1)$.
$$\left(\text{kurz: } A(n) \Rightarrow A(n + 1)\right)$$
(Induktionsschritt)

Dann gilt: $A(n)$ ist richtig $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion

- Beispiel $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Aufgaben

Zeige durch vollständige Induktion, dass für beliebige $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq a_i \leq 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt, dass

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k$$

Altklausur

Zeige durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass [12]

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Altklausur 2014

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Ungleichung $\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. [6]

Betrag

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Für $|a|$ gelten dann die folgenden Rechenregeln:

- (i) $|a| = |-a|$ stets; $|a| \geq 0$ stets und $|a| = 0 \iff a = 0$
- (ii) $|ab| = |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- (iii) $|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ und
 $|a + b| \geq |a| - |b|$ sowie $|a + b| \geq |b| - |a|$ stets

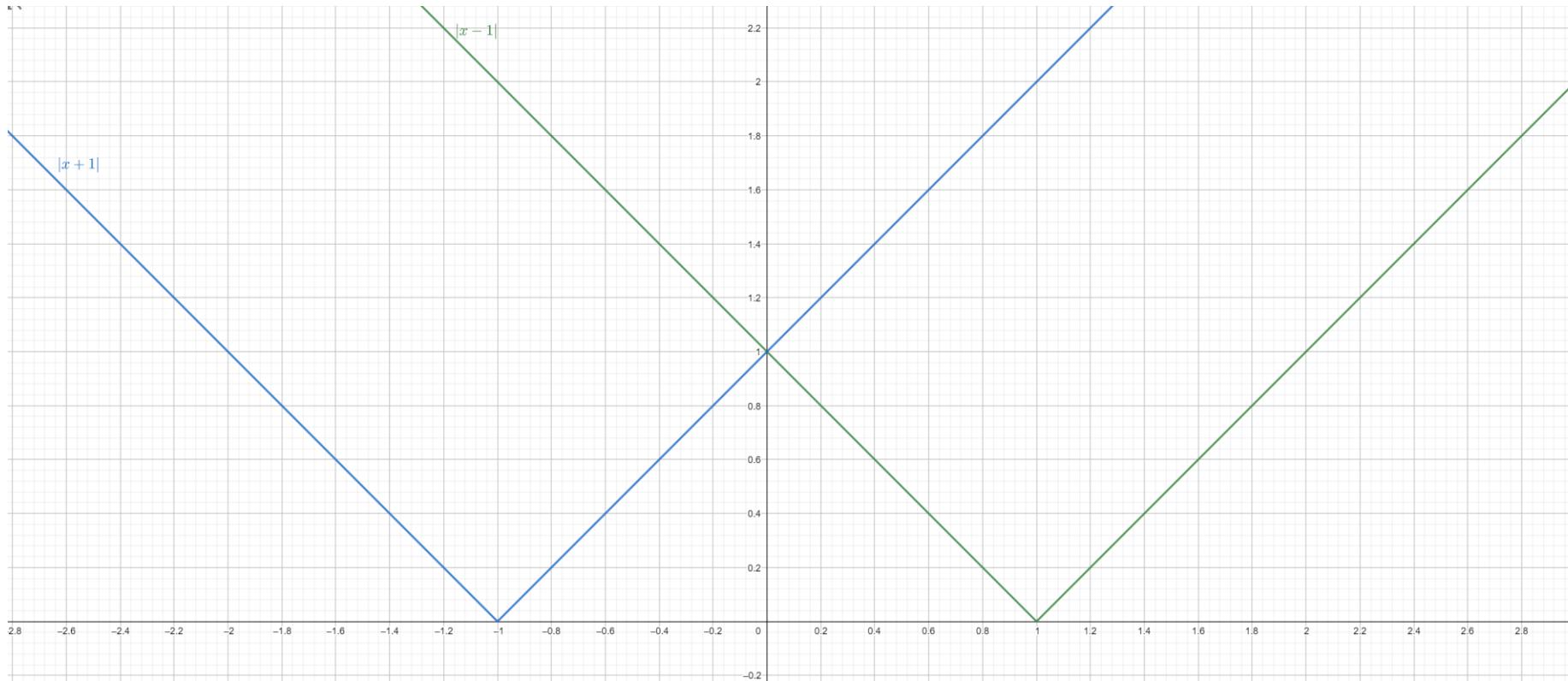
Als geometrisches Modell führt man gerne den **Zahlenstrahl** ein. Das ist eine orientierte skalierte Gerade, meist horizontal gedacht.

Betrag

Beispiel:

Welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichung

$$(*) \quad |x - 1| + |x + 1| < 4 ?$$



Betrag

Bspiel:

Welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichung

$$(*) \quad |x - 1| + |x + 1| < 4 ?$$

Sei M eine Menge

$$\text{Max}(M) = \max_{x \in M} x$$

$$\text{Min}(M) = \min_{x \in M} x$$

$$\sup(M) = \min_x \{x > m \ \forall m \in M\}$$

$$\inf(M) = \max_x \{x < m \ \forall m \in M\}$$

Aufgaben

Blatt 13

- (a) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Betragsungleichung $|x| \leq |x + 1|$ erfüllen.
- (b) Gib, falls existent, Maximum, Supremum, Minimum, Infimum der Menge $A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$ an.

Wichtige Summen und Funktionen



Wichtige Reihen

- $(a + b)^n = \sum_k^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{2q-1}$

Aufgaben

Zeige, dass für alle $n \geq 2$

$$\sqrt[n]{1+2n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

gilt.

Tipp: Kann man direkt ohne Induktion zeigen. Betrachte die rechte Seite potenziert (also $(\dots)^n$) und wende den binomischen Lehrsatz an.

Schreibe folgenden Term ohne Summe

$$\sum_{k=1}^{n+2} \left(4 * q^{k-1} + \frac{q}{2} \right)$$

Wichtige Funktionen

- $\exp(x) = e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ist ein Polynom

Wichtige Funktionen

- **Logarithmus und Exponentialfunktion (e^x und $\ln(x)$)**

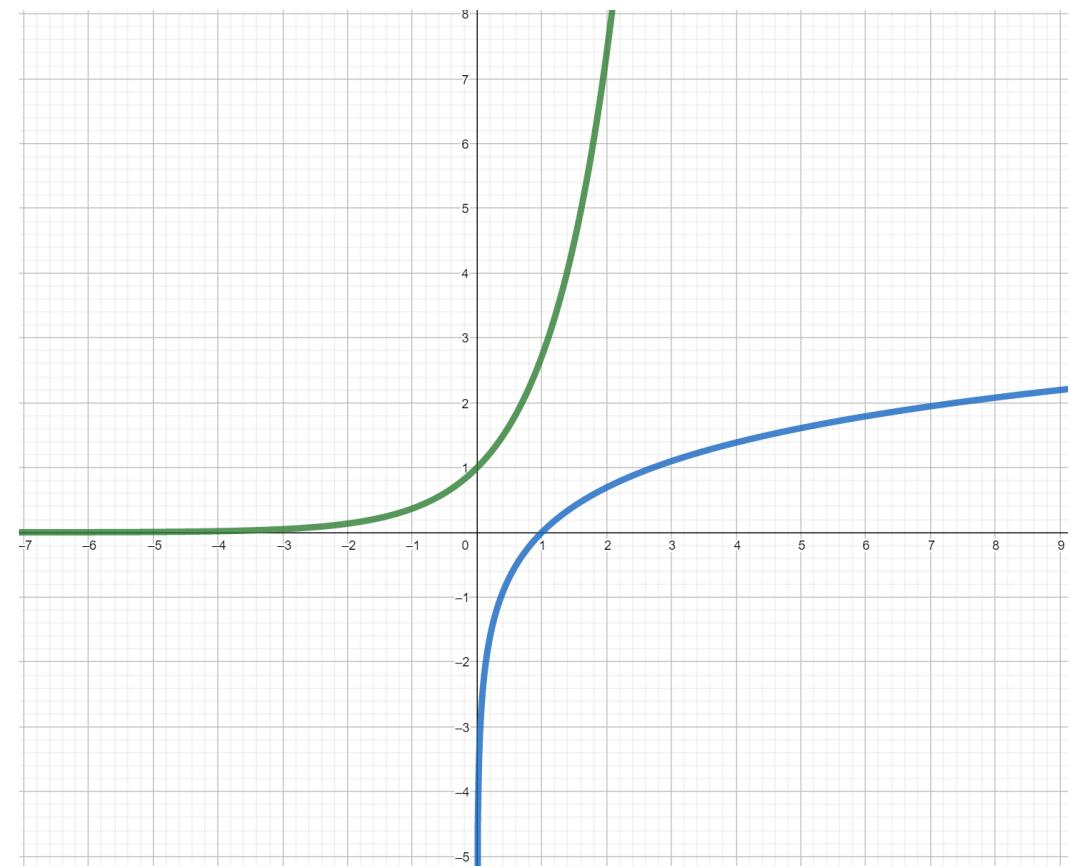
$$\ln(e^x) = x$$

$$\log_a(a^x) = x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(x^a) = a * \log(x)$$



Wichtige Funktionen

(0) Sinus und Kosinus sind 2π -periodisch; der Tangens ist π -periodisch:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x; \tan(x + \pi) = \tan x$$

(i) $\sin(-x) = -\sin x$ ("ungerade Funktion")

$\cos(-x) = \cos x$ ("gerade Funktion")

(ii) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (Pythagoras)

(iii) $-1 \leq \cos x \leq 1, -1 \leq \sin x \leq 1$ stets

(iv) $x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq x$

(v) Nullstellen von $\sin x$: $0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$

Nullstellen von $\cos x$: $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \dots$

Definitionslücken von $\tan x$: $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \dots$

Erwähnt seien noch die beiden Additionstheoreme

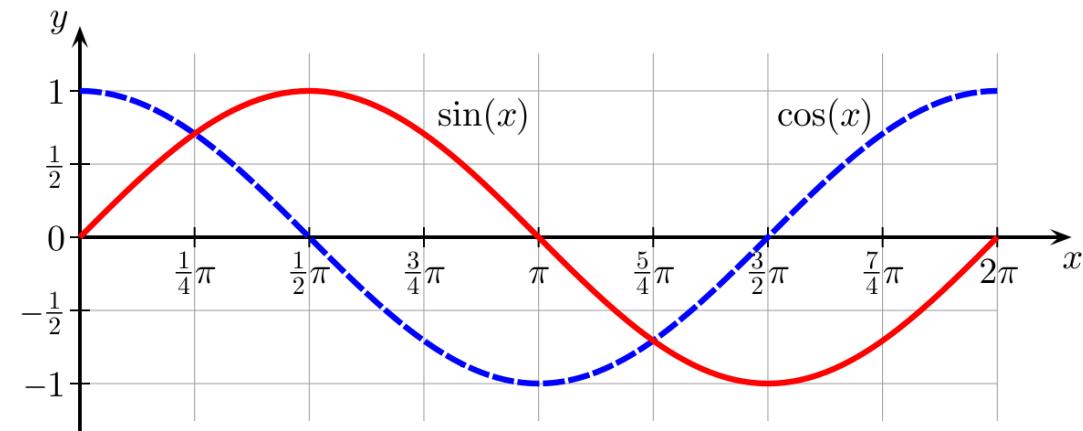
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{und}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

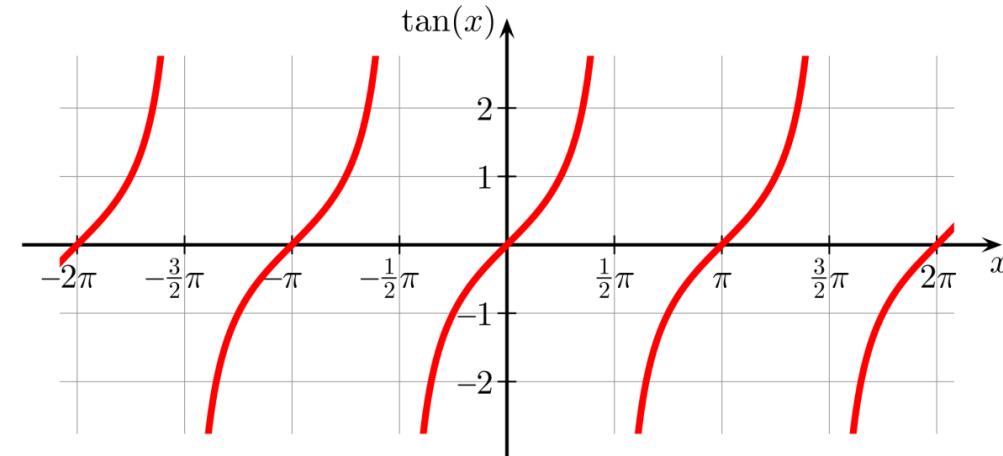
$\arcsin(\sin(x)) = x;$

$\arccos(\cos(x)) = x;$

$\arctan(\tan(x)) = x$



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



Polynomdivision

Bei der Polynomdivision sind zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ eines Polynomringes $R[x]$ gegeben, wobei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ und der Leitkoeffizient von $q(x)$ eine Einheit in R ist, und es wird die Gleichung

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x),$$

nach den gesuchten Polynomen $s(x)$ und $r(x)$ gelöst, und zwar so, dass der Grad von $r(x)$ kleiner als der von $q(x)$ ist.

Bsp: $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$; $q(x) = x - 1$

Aufgaben

Löse folgende Ausdrücke nach x .

(a) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$

(b) $\log_3 x + \log_3(x - 6) = 3$

(c) $\ln(3x + 2) = 5$

(d) $\ln(\sqrt{x}) - 2 \ln(x) + 1 = 0$

(e) $3^x \cdot 5^{-2x} = 7^{x+1}$

(f) $e^x \cdot e^{3x} = 2$

Folgen



Konvergenz von Folgen

Definition:

Gegeben sei eine Folge (a_n) reeller oder komplexer Zahlen. Wir sagen:

(a_n) **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}), falls gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N$.

Wir schreiben dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty,$$

Beispiele:

$$a_n = Fib(n)$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = (-1)^n$$

Zusatz: Fordert man

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \text{mit} \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \quad \forall n > N, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

also eine leicht verschärzte Cauchy-Bedingung, so ist diese auch hinreichend für Konvergenz.

[Epsilon-Definition: Grafik](#)

Konvergenz von Folgen

Beispiele:

$$a_n = Fib(n)$$
$$a_n = \frac{1}{n}$$
$$a_n = (-1)^n$$

Konvergenz von Folgen

Nützliche Eigenschaften zu Grenzwerten und Konvergenz

Existieren die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, so existieren auch die folgenden Grenzwerte und können wie angegeben berechnet werden:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Ist zusätzlich $b \neq 0$, so ist auch $b_n \neq 0$ ab einem gewissen Index N_0 und für die Teilfolge der $n > N_0$, dann gilt

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Sandwichtheorem: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ existiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n > m \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

Wichtige Grenzwerte: $\lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a * n = \infty$;

Konvergenz von Folgen

Beispiel

$$(ii) \frac{6n^2 - n + 3}{4n^2 + 1}$$

Konvergenz von Folgen

O-o-Symbolik

Landausche O-o-Symbolik: (Edmund Landau, 1877 - 1938)

Für Folgen $(a_n), (b_n)$ aus \mathbb{R} schreibt man oft:

- $a_n = O(b_n)$, falls $\left| \frac{a_n}{b_n} \right|$ beschränkt ist bzw.
- $a_n = o(b_n)$, falls $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \rightarrow 0$ gilt und
- $a_n \sim b_n$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ gilt. (Hier sagt man dann auch: (a_n) und (b_n) verhalten sich **asymptotisch gleich**).

z.B.

$$3n^2 + 6n - 4 = O(n^2); \quad n^7 = o(7^n); \quad n^3 \sim n^3 + n^2; \quad n \ln n = o(n^2).$$

Konvergenz von Folgen

Bolzano-Weierstraß und Teifolgen

Bei nicht konvergenten Folgen führt man oft Ersatzbegriffe ein:

- Gegeben (a_n) . Streicht man einige Folgenglieder weg (endlich viele oder unendlich viele, aber so, dass noch eine Folge "übrig bleibt"), so spricht man von einer **Teifolge**.

Hat diese einen Grenzwert s , so nennt man s einen **Häufungswert** von (a_n) .

Zum Beispiel hat die Folge $a_n = (-1)^n$ die beiden Häufungswerte

$$1 \quad (= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}) \quad \text{und} \quad -1 \quad (= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}).$$

- Satz von **Bolzano-Weierstraß**: Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Unter den Häufungswerten gibt es dann einen größten, den man den **limes superior** nennt ($\limsup a_n$) und auch einen kleinsten, den **limes inferior** ($\liminf a_n$). Also ist z.B.

$$\liminf(-1)^n = -1 \quad \text{und} \quad \limsup(-1)^n = 1.$$

Aufgaben

Blatt_13

5. Bestimme, falls existent, den Grenzwert folgender Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (hier braucht man nicht mit der Definition von Folgenkonvergenz arbeiten). Gib für nicht konvergente Folgen die Menge der Häufungswerte an.

(a) $a_n := \frac{n^2+2n+1}{cn^3-n^2+n-1}$, $c \in \mathbb{R}$.

(d) $a_n := \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!}$

(b) $a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$

(e) $a_n := \frac{n}{n-1} - \frac{2n}{n+1}$

(c) $a_n := \frac{2}{\sqrt[n]{3n^2}}$

(f) $a_n := \frac{1}{((-1)^{n+1}-2)^n}$

Zeige oder widerlege

(a) Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, so ist auch die Folge $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(b) Das Produkt zweier divergenter Folgen ist divergent.

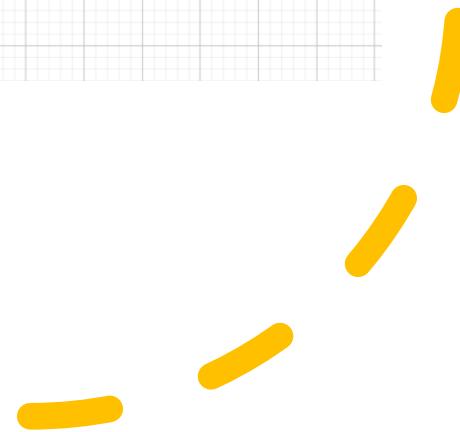
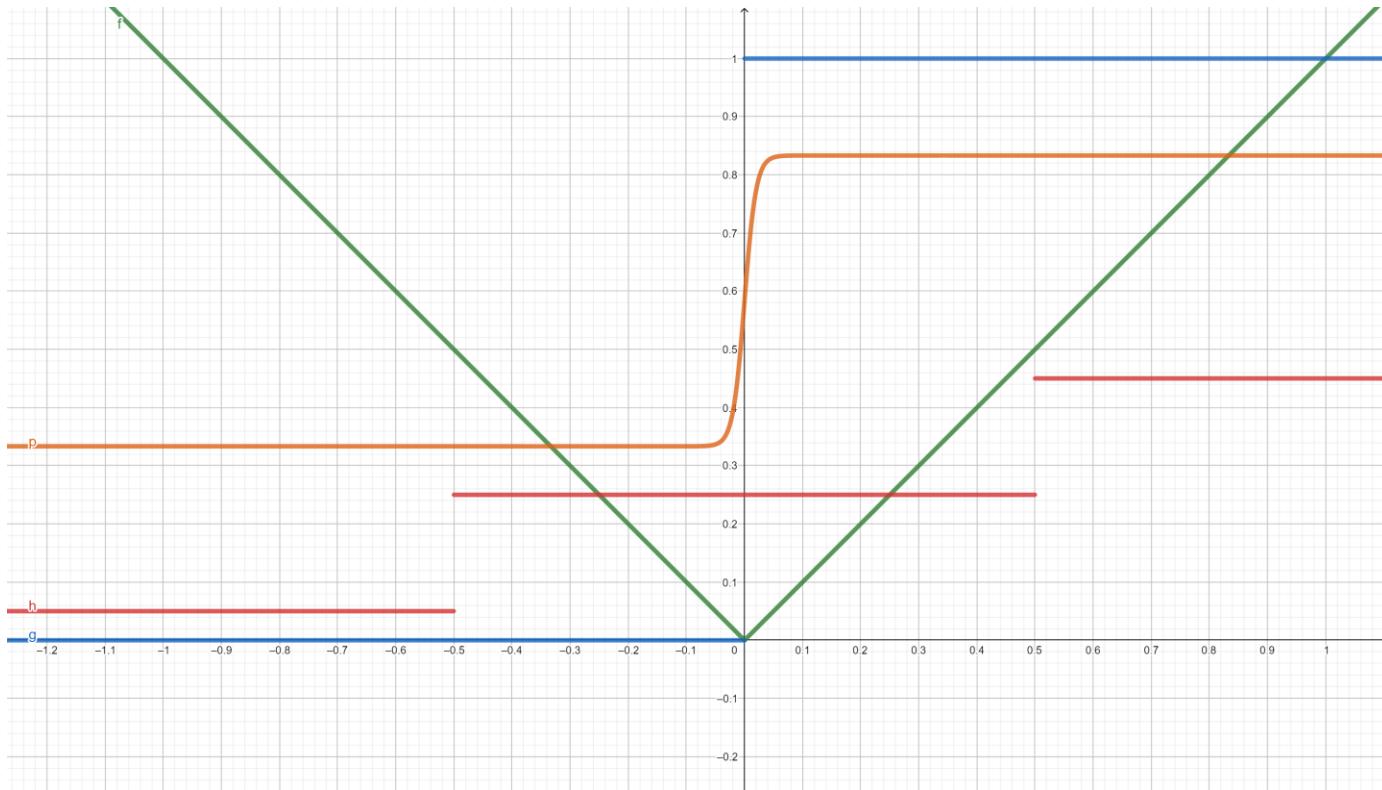
(c) Ist $a_n = o(c_n)$ und $b_n = o(c_n)$, so ist auch $a_n \cdot b_n = o(c_n)$.

Schwer

Betrachte die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$ und Startwert $a_0 = 0$.

- (a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $0 \leq a_n \leq 1$ und $a_n \leq a_{n+1}$.
- (b) Zeige, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert.
- (c) Bestimme den Grenzwert aus (b).

Funktions- grenzwerte und Stetigkeit



Definition

Definition:

Gegeben sei eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Stelle $a \in D$.

Wir sagen:

f ist **konvergent** für x gegen a gegen den Wert s ,

wenn gilt:

Für jede Folge x_n aus D mit $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ gilt $f(x_n) \rightarrow s$.

Wir notieren diese Situation in der Form

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = s,$$

Existiert $s = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und ist zusätzlich $s = f(a)$, so nennt man f **stetig** an der Stelle a .

Analog definiert man Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = s, \text{ falls } f(x_n) \rightarrow s \text{ für alle Folgen } x_n \text{ mit } x_n \rightarrow \pm\infty$$

und auch **einseitige** Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

(es werden nur Testfolgen x_1 mit $x_n < a$ bzw. $x_n > a$ zugelassen.)

Schließlich reden von **linksseitiger** bzw. **rechtsseitiger Stetigkeit** bei a , falls

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{gilt.}$$

Epsilon-Delta-Kriterium

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = s \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ mit : } x \in D, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-s| < \varepsilon.$$

Beispiele

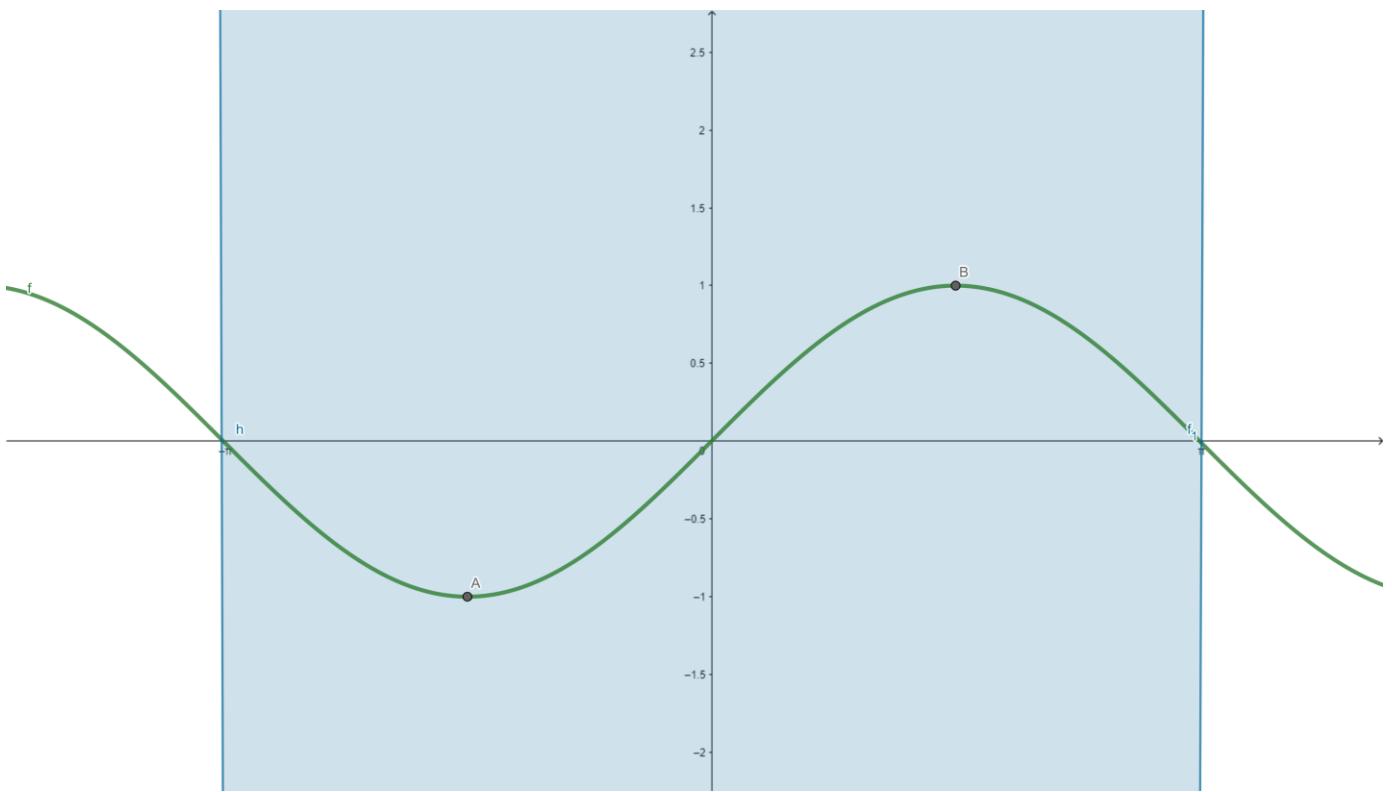
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq 1 \\ x & \text{if } x > 1 \end{cases}$
- $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Wichtige Eigenschaften

- Hintereinanderausführung: Ist g eine weitere reelle Funktion, deren Definitionsbereich den Wertebereich von f umfasst und die in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist die Komposition $g \circ f$ stetig in x_0 .
- Algebraische Operationen: Ist g eine weitere reelle Funktion mit demselben Definitionsbereich wie f , die ebenfalls in x_0 stetig ist, dann sind die punktweise definierten Funktionen $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ ebenfalls stetig in x_0 . Im letzten Fall ist allerdings zu beachten, dass der Definitionsbereich der zusammengesetzten Funktion sich als D_f ohne die Nullstellenmenge von g ergibt. Insbesondere darf x_0 selbst in diesem Fall also keine Nullstelle von g sein.
- Maximum/Minimum: Unter den gleichen Voraussetzungen wie im vorherigen Punkt sind die punktweise definierten Funktionen $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ stetig in x_0 .

- Zwischenwertsatz: Die Funktion nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.
- Satz vom Minimum und Maximum: f ist beschränkt und Infimum und Supremum seiner Funktionswerte werden auch als Funktionswert angenommen. Es handelt sich also tatsächlich um Minimum und Maximum. Dieser von Weierstraß bewiesene Satz, bisweilen auch Extremwertsatz genannt, liefert nur die Existenz dieser Extremwerte. Für ihr praktisches Auffinden sind häufig Aussagen aus der Differentialrechnung nötig.

Analyse der Sätze



Aufgaben

Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin(x)}}{\ln(\ln(x))}$

Es sei $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

(a) Zeige, dass f stetig ist.

4. Zeige mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{|x|}}$$

im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die jeden ihrer Werte genau zweimal annimmt (d.h. es ist nicht möglich, dass für jedes $y \in f([0, 1])$ die Gleichung $f(x) = y$ immer genau zwei Lösungen in $[0, 1]$ besitzt). (12)

Zeige oder widerlege

Es sei $I = [a, b]$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Dann hat f im Intervall I eine Nullstelle.

Differenzierbarkeit

Definition

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

gibt. In diesem Falle nennen wir f **differenzierbar** bei a und bezeichnen diesen Grenzwert mit

$$f'(a) \quad \text{oder} \quad \frac{df}{da} \quad \text{oder} \quad \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}.$$

Aufgaben

Blatt_13

- (a) Bestimme mithilfe der Definition der Ableitung die Ableitung der Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ an einer Stelle $a > 0$.
- (b) Bestimme mithilfe der Definition der Ableitung die Ableitung der Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ an einer Stelle $a > 0$.
Ist die Funktion f auch an der Stelle $a = 0$ differenzierbar? Zeige oder widerlege die Behauptung.

Bestimme Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & \text{falls } x \leq 0 \\ e^x, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

eine auf ganz \mathbb{R} differenzierbare Funktion ist.

Regeln

$$\begin{aligned}f(x) &= x^n : \\ \frac{(a+h)^n - a^n}{h} &\underset{\text{Binomi}}{=} \frac{a^n + na^{n-1}h + \binom{n}{2}a^{n-2}h^2 + \dots + h^n - a^n}{h} = \\ &= na^{n-1} + h\binom{n}{2}a^{n-1} + \dots + h^{n-1} \rightarrow na^{n-1}, \quad h \rightarrow 0.\end{aligned}$$

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$c \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(c \cdot f\right)' = c \cdot f'$$

$$\left(f + g\right)' = f' + g'$$

$$\left(f - g\right)' = f' - g'$$

$$\left(f \cdot g\right)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

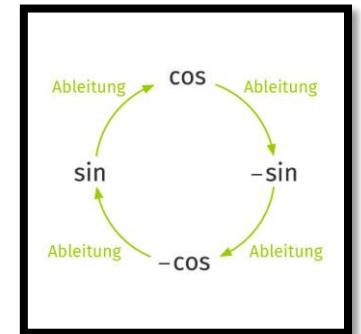
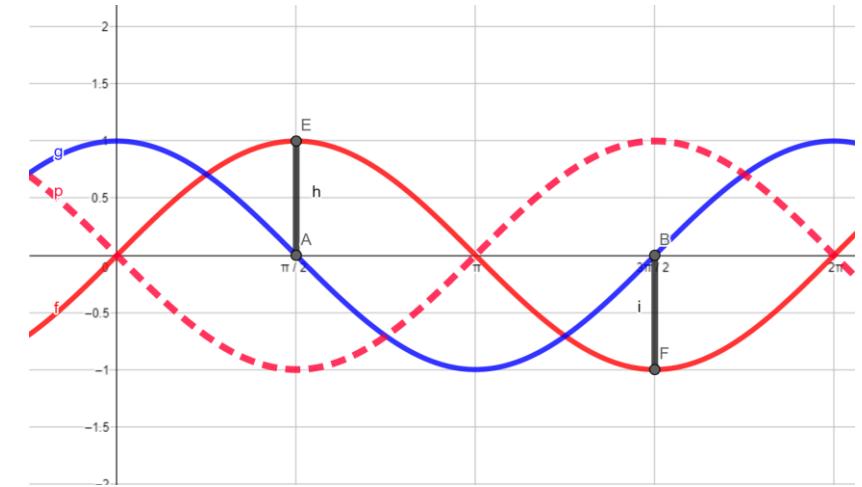
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(f \circ g\right)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a.$$

Weiter wichtige Eigenschaften

- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(a)$ ist Extremstelle $\Rightarrow f'(a) = 0$
- $f(a)$ ist (lokales) Maximum $\Leftrightarrow f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$
 - $f(x)$ ist in Umgebung von a streng konkav
- $f(a)$ ist (lokales) Minimum $\Leftrightarrow f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$
 - $f(x)$ ist in Umgebung von a streng konvex



Aufgaben

Blatt 13

(a) Differenziere folgende Ausdrücke nach x . Die Ableitung braucht nicht vereinfacht werden. Man benenne jeweils zusätzlich die verwendete(n) Ableitungsregel(n).

i. $\frac{x^2+2x}{x}$

iii. $(\sin(x) + x^3 + 2)^3$

v. $x^{\sqrt[3]{x}}$

ii. $\ln(3x)$

iv. $e^{2x+1} \sin(x^2)$

vi. $\ln(\ln(\ln(x)))$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist der letzte Ausdruck (vi.) definiert?

a) Zeige, dass $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ gilt (Tipp: Verwende die Reihendarstellung)

b) Bestimme $\frac{d}{dx} \tan(x)$ (Tipp: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$)

Altklausur

14. Gegeben sei die Funktion $g(x) = x \ln x - x$ auf dem Intervall $[\frac{1}{e}, e]$.

- Begründe, zunächst ohne Rechnung, wieso die Funktion g auf $[\frac{1}{e}, e]$ ein (globales) Maximum und (globales) Minimum annimmt.
- Bestimme dieses (glob.) Maximum und (glob.) Minimum.
- Besitzt g auch auf dem Intervall $(\frac{1}{e}, e)$ ein (glob.) Maximum und (glob.) Minimum?

Wichtige Sätze

Satz 3.3 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung):

Es sei

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar auf (a, b) und in den Randpunkten a und b immerhin stetig. Dann gibt es eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (\iff f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)).$$

Satz 3.2 (Satz von Rolle):

Es sei

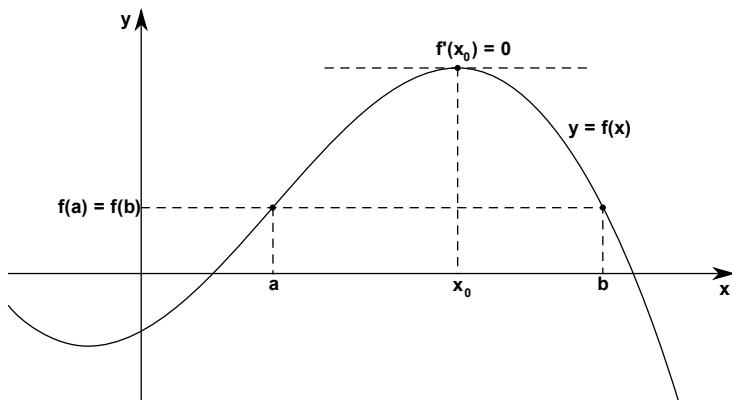
$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar auf (a, b) und in den Randpunkten a und b (wenigstens) stetig. Weiter gelte

$$f(a) = f(b).$$

Dann gibt es (mindestens) ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = 0.$$



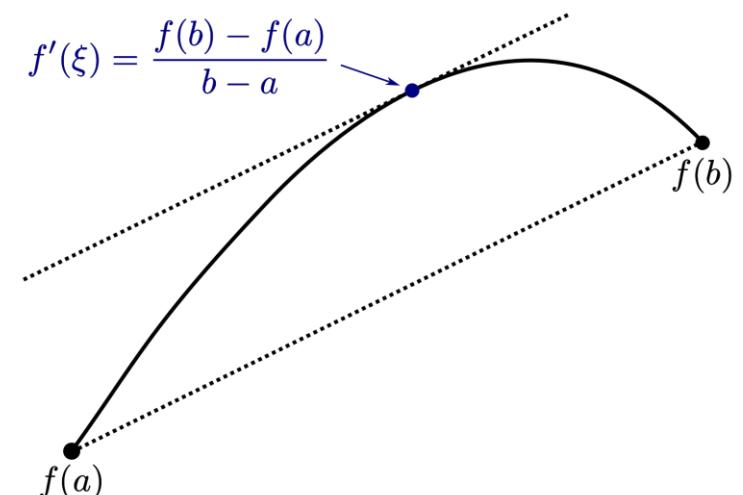
Satz 4.1 (Monotonie-Kriterien):

Es sei

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar auf (a, b) und stetig bei a und b . Dann gilt:

- (i) f ist monoton wachsend auf $[a, b] \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.
- (ii) Gilt $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, so ist f streng monoton wachsend auf $[a, b]$.
- (iii) f ist monoton fallend auf $[a, b] \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.
- (iv) Gilt $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$, so ist f streng monoton fallend auf $[a, b]$.



Aufgaben

Altklausur

16. Zeige, dass für alle $x \geq 0$ gilt, dass $\ln(1 + x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$.

Zeige, dass $b^2 > -a^2 + 2ab$ $b > a > 0$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes

Satz von l'Hospital

Satz 4.5 (Grenzwertregeln von l'Hospital):

(Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital, 1661-1704)

Es sei $I = [a - \eta, a) \subset \mathbb{R}$, ($\eta > 0$, $a \in \mathbb{R}$) oder $I = (K, \infty)$, $K > 0$,

und es seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf I mit

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Gilt dann

(i) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 0$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) oder

(ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \infty$ oder $-\infty$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$),

so existiert auch $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$),

und dieser Grenzwert ist auch $= \alpha$.

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Aufgaben

Altklausur

6. Bestimme, falls existent, den Grenzwert

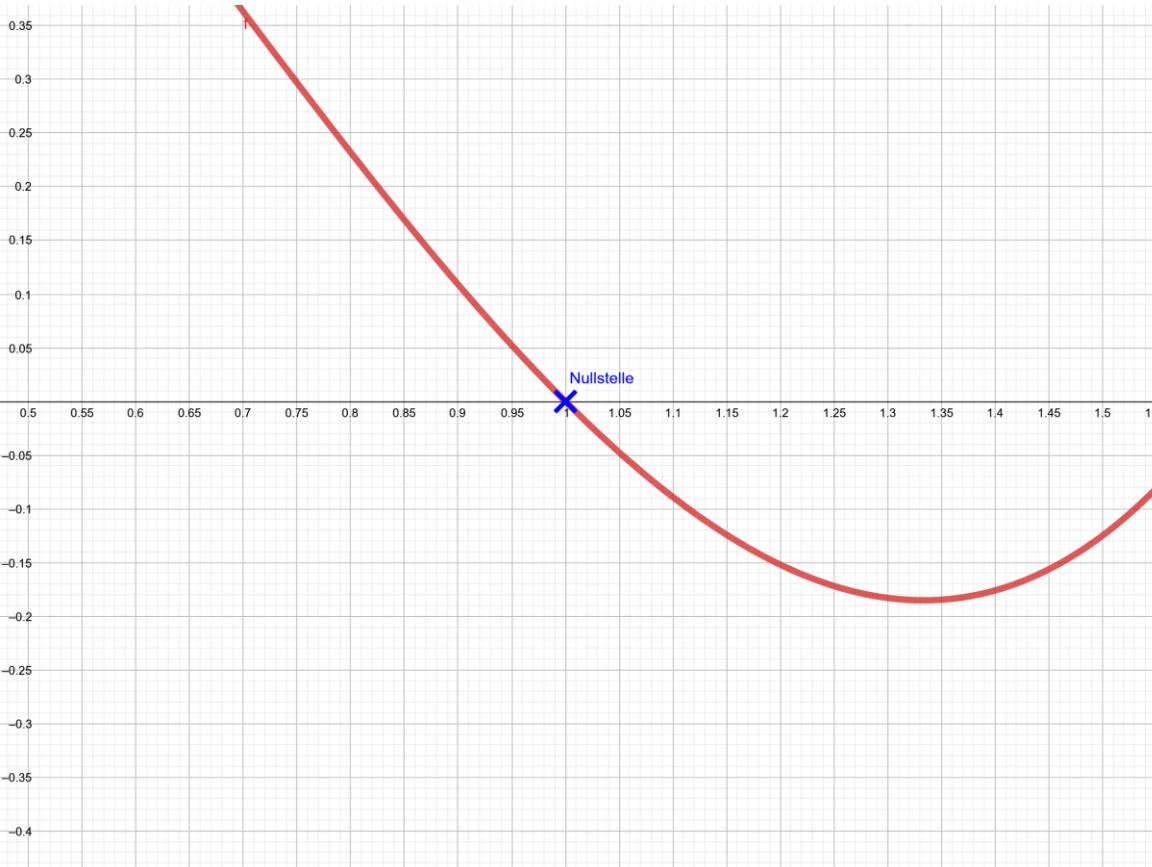
[10]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin(x)}$$

Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \exp(|x^3|)$. Zeige oder widerlege, dass f stetig differenzierbar ist.

(8 Punkte)

Nullstellen Verfahren

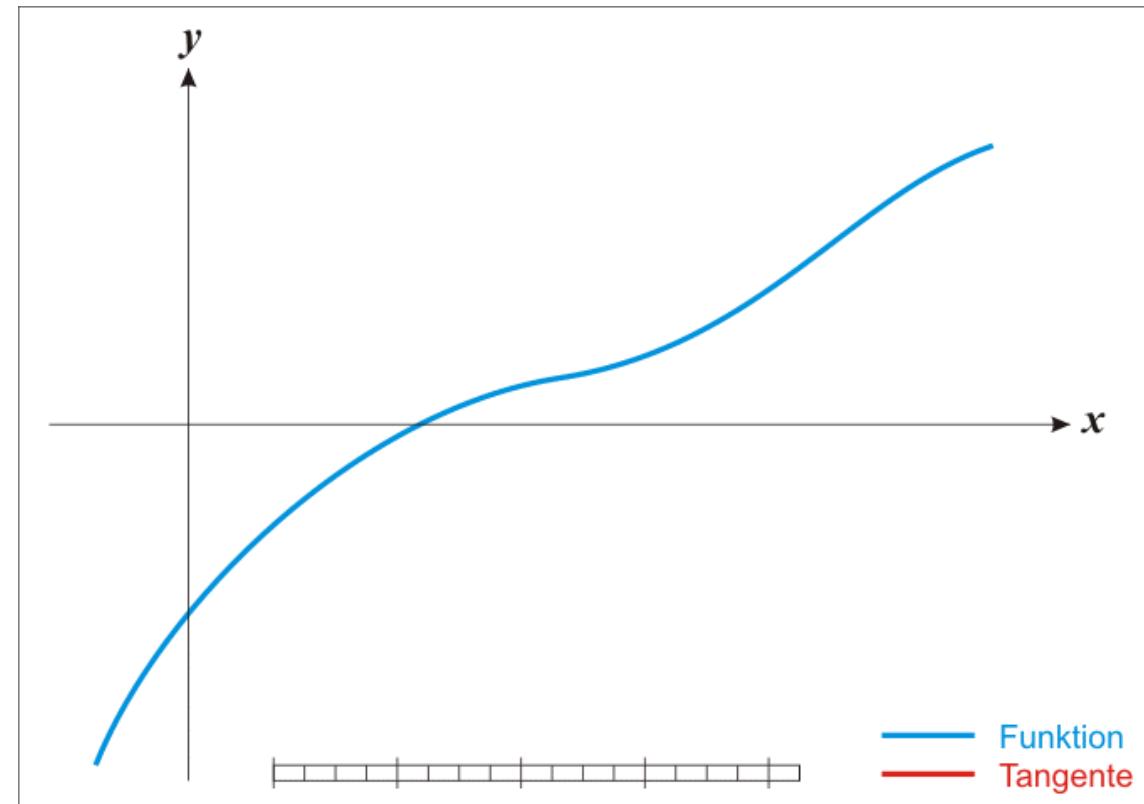


Newton Verfahren

- Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

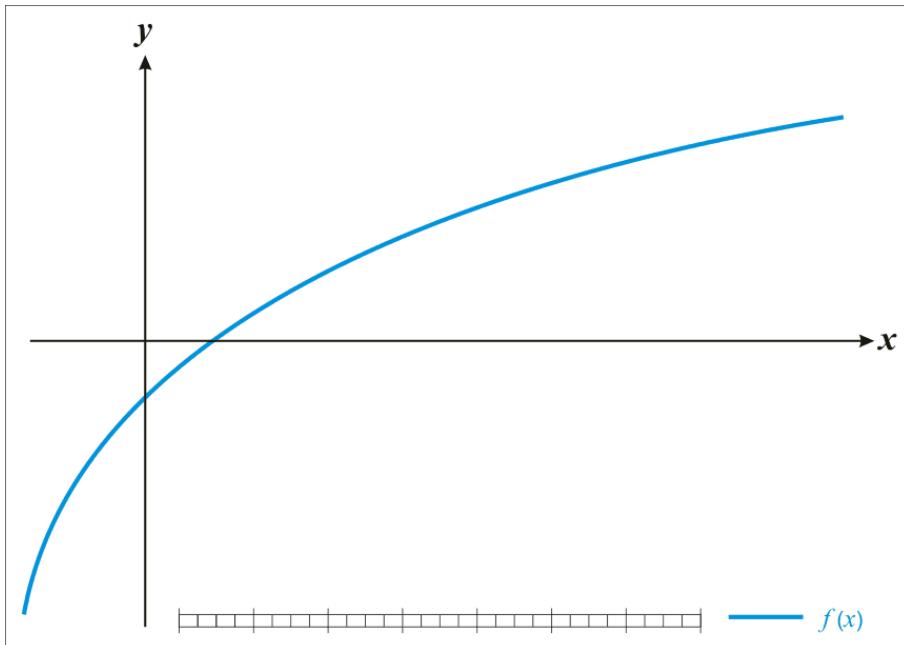
$$\begin{aligned} t(x) &= 0 \\ \iff f(a) + f'(a)(x - a) &= 0 \\ \iff x - a &= -\frac{f(a)}{f'(a)} \\ \iff x &= a - \frac{f(a)}{f'(a)} \end{aligned}$$



Bisektionsverfahren

- Algorithmus:

1. Setze $l = a$ und $r = b$.
2. Teste, ob $[l, r]$ eine Nullstelle enthält. Wenn nicht: Abbruch.
3. Teste, ob $r - l < \varepsilon$ ist. Wenn ja, ist das Lösungsintervall gefunden.
4. Sonst teile $[l, r]$ in der Mitte und setze das Verfahren mit beiden Teilintervallen rekursiv bei 2. fort.



Entwicklungs- satz von Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$



Entwicklungssatz von Taylor

- Beispiel: e^x im Entwicklungspunkt 0

- Restglied

Satz 5.2 (Taylor): (Brook Taylor, 1685-1731)

Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal differenzierbar auf I , $a \in I$, und es sei

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

der (Fehler)-Rest zwischen $f(x)$ und dem n -ten Taylorpolynom. Dann gibt es eine Stelle ξ , gelegen zwischen a und x mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (\text{Formel von Taylor/Lagrange}).$$

Aufgaben

Altklausur

17. Betrachte die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(1 + x)$

- (a) Zeige, dass das dritte Taylorpolynom $P_3(x)$ von f mit Entwicklungspunkt $a = 0$ gegeben ist durch

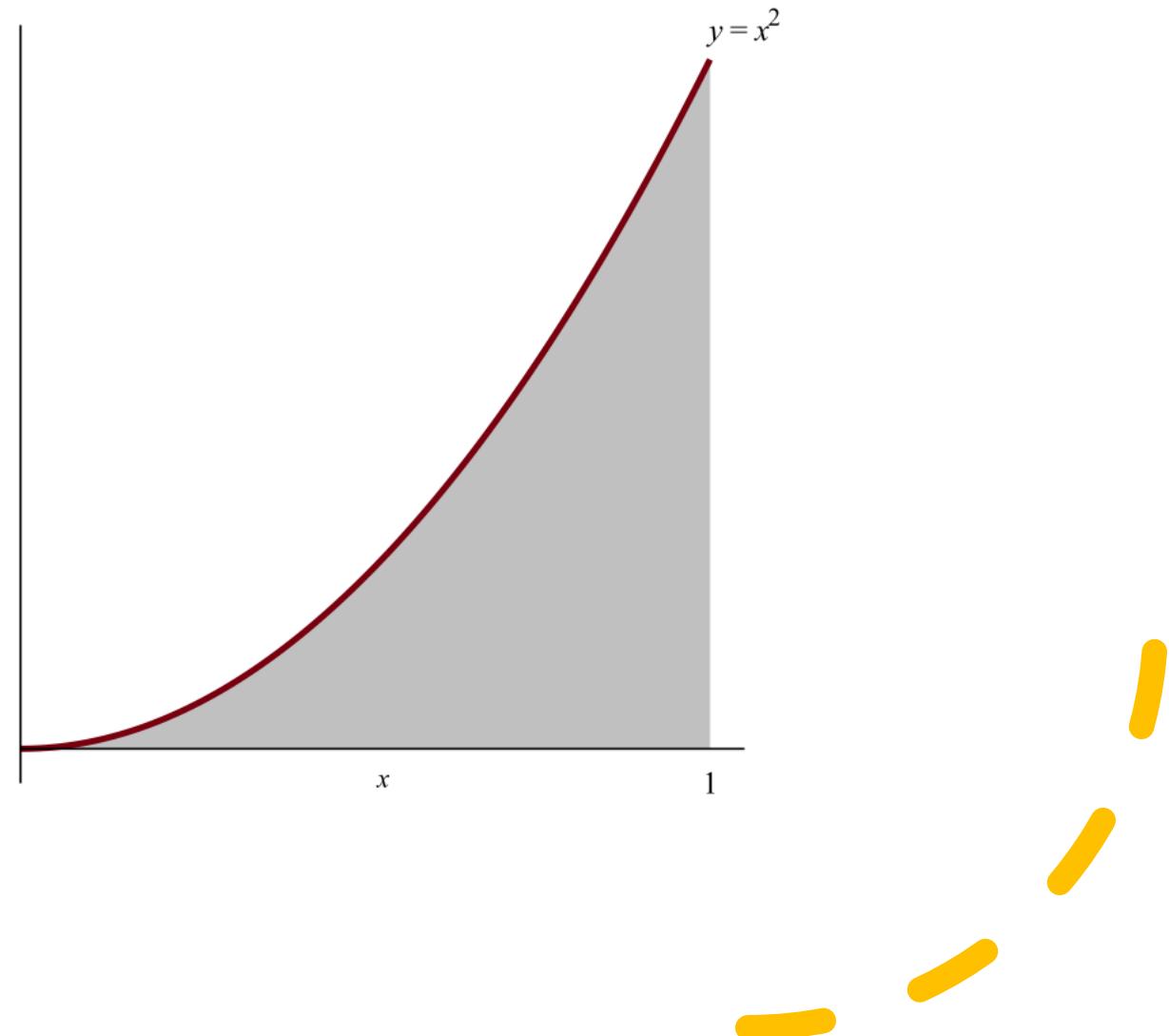
$$P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

- (b) Zeige für $|x| \leq \frac{1}{2}$ die Restgliedabschätzung $|R_3(x)| = |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4}$.

a) Bestimme die Reihendarstellung von $\sin(x)$, $\cos(x)$ mit Hilfe von Taylor

b) Zeige, dass, $e^{i\pi} - 1 = 0$ Tipp (Verwende die Reihendarstellung und a)

Riemann- Integral



Riemann-Integral

Ist $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine solche Zerlegung von $[a, b]$, so seien

$$m_k := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad \text{und} \quad M_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad 1 \leq k \leq n$$

(beachte: $m_k > -\infty$, $M_k < \infty$, denn f ist beschränkt), und wir nennen

$$U = U(Z) = U(Z; f) := \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

die zu Z (und f) gehörige **Untersumme** und

$$O = O(Z) = O(Z; f) := \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

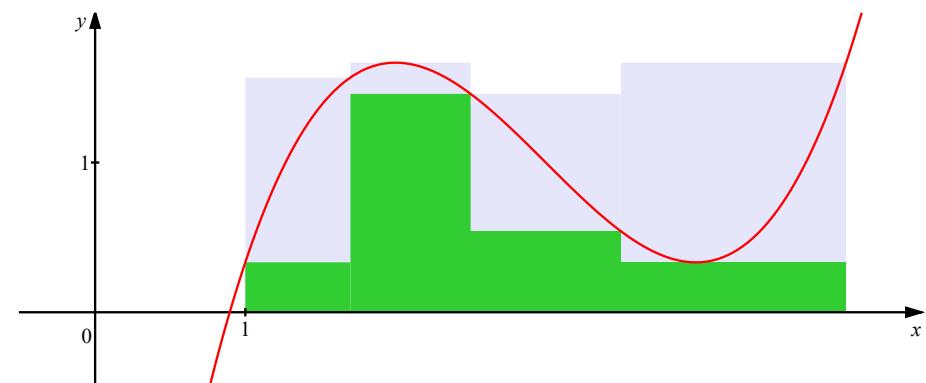
die zu Z (und f) gehörige **Obersumme**.

Wir nennen f (**Riemann**)-integrierbar über $[a, b]$, wenn Oberintegral und Unterintegral von f übereinstimmen, d.h. wenn

$$\int_a^{-b} f(x) dx = \int_{-a}^b f(x) dx$$

gilt. Dieser (gemeinsame) Wert heißt dann das (**Riemann**)-Integral von f über $[a, b]$, und wir bezeichnen es kurz mit

$$\int_a^b f(x) dx$$



Integral Regeln

(Integrationsregeln):

Gegeben seien $f, g \in R[a, b]$, $(a < b)$, $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(\alpha) \quad f+g \in R[a, b] \quad \text{mit} \quad \int_a^b f(x)+g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

sowie

$$c \cdot f \in R[a, b] \quad \text{mit} \quad \int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx \quad (\text{Linearität})$$

$$(\beta) \quad f \cdot g \in R[a, b] \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} \in R[a, b], \quad \text{falls} \quad \frac{1}{g} \quad \text{beschränkt ist.}$$

(leider **ohne** Formel !)

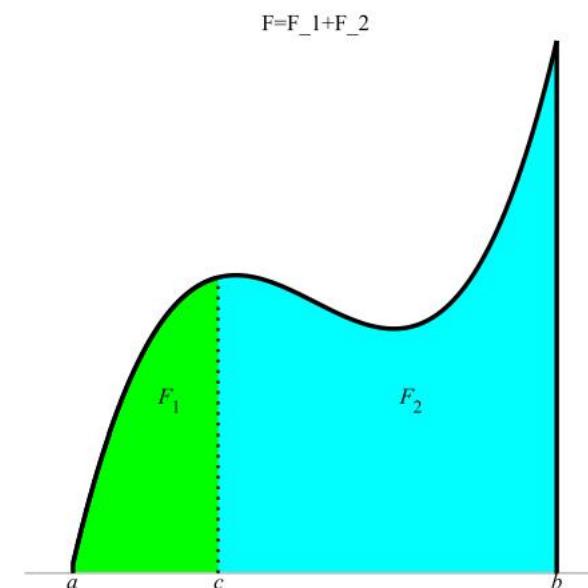
$$(\gamma) \quad |f| \in R[a, b] \quad \text{mit} \quad \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$(\delta) \quad f \leq g \quad \text{auf} \quad [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx. \quad (\text{Monotonie})$$

(v) Additivität des Integrals:

Es sei $f \in R[a, b]$, und es sei $a < c < b$. Dann gilt $f \in R[a, c]$ und $f \in R[c, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$



Hauptsatz

Satz 2.2 (1. Hauptsatz der D/I-Rechnung):

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Dann ist das unbestimmte Integral

$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t) dt$$
 eine Stammfunktion von f , also:

\mathcal{F}' existiert $\forall x \in [a, b]$ und es ist $\mathcal{F}'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Satz 2.3 (2. Hauptsatz der D/I-Rechnung):

Es sei $f \in R[a, b]$, und es sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f .
Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \left(= F(x) \Big|_a^b \right).$$

Aufgaben

- a) Sei $f(x) = x$ und $Z = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ Bestimme Ober- und Untersumme
- b) Ist f Riemann-integrierbar
- c) Zeige mit Hilfe von a) : $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$

Blatt 11

Berechne folgende Integrale:

$$1. \int_0^{2\pi} \sin(x) \, dx$$

$$4. \int_0^3 e^{2x} \, dx$$

$$2. \int_{-2}^1 x^2 - 2x + 1 \, dx$$

$$5. \int_1^e \frac{1}{x} \, dx$$

$$3. \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$6. \int_0^{\pi/2} \cos(2x) \, dx$$

Wichtige Regeln

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx.$$

Bsp: $\int_0^a \sin(2x) \, dx$

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx &= \left[f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx \\ &= f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx. \end{aligned}$$

Bsp: $\int_2^{10} \ln(x) * x \, dx$

Partialbruchzerlegung

Gegeben seien (reelle) Polynome $p(x)$, $q(x)$ mit $\text{grad } p < \text{grad } q$. Dann lässt sich der rationale Ausdruck $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ schreiben als Summe von endlich vielen sogenannten **Partialbrüchen**. Ein Partialbruch ist dabei ein Ausdruck von folgender Gestalt:

- $\frac{\text{const.}}{x-a}, \frac{\text{const.}}{(x-a)^2}, \dots, \frac{\text{const.}}{(x-a)^k}$, falls a k -fache Nullstelle von $q(x)$ ist, d.h. $q(x) = (x-a)^k r(x)$, $r(x)$ Polynom mit $r(a) \neq 0$.

(i) $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x+2}$. Die Koeffizienten c_1 bzw. c_2 erhält man am einfachsten durch die "Zuhaltemethode":

$$\text{(ii)} \quad \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x+1}.$$

Aufgaben

8. Berechnen Sie, falls existent, folgende Integrale. Leiten Sie dabei ggf. verwendete Stamfunktionen her. [5+11]

a) $\int_0^\pi \cos^2 x \, dx$

b) $\int_0^2 \frac{4x^2 + 2x + 9}{(x - 1)(x^2 + x + 3)} \, dx.$

Hinweis: Wenn Sie bei der Partialbruchzerlegung in 8b) Schwierigkeiten haben, können Sie stattdessen die Funktion $\frac{x}{x^2 + 2x + 3} + \frac{4}{x - 1}$ untersuchen (Punktabzug, falls die Partialbruchzerlegung fehlt).

Blatt 13

i. $\int xe^{-x} \, dx$

iii. $\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)} \, dx$

ii. $\int 2^{x-1} \, dx$

iv. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}} \, dx$

(b) * Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so dass $\int_1^a \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}} \, dx = 2\sqrt{7}$ gilt.

(c) Berechne $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x \, dx.$