Lösungsvorschlag Blatt 5

1) a) Wähle $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$

b) Wähle $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{a_n}{b_n} = n \to \infty$ für $n \to \infty$

c) Wähle $a_n = \frac{42}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\frac{a_n}{b_n} = 42 \to 42$ für $n \to \infty$

d) Wähle $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existiert nicht

2)

a) z.z.: $a_n \leq c \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq c$

Angenommen $a > c \Rightarrow a - c > 0$. Da $a_n \to a$ ex. $\forall \varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > N$, insbesondere auch für $\varepsilon = a - c$

$\Rightarrow |a_n - a| < a - c \ \forall n > N \Leftrightarrow -(a-c) < a_n - a < a - c \ \forall n > N$

$\Leftrightarrow c < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\lightning$. $\square$

b) $a_n < c \ \forall n \in \mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} a < c$

Stimmt nicht. Gegenbeispiel: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $a_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$,

aber $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

3) a)

(i) z.z.: $a_n = o(b_n) \Rightarrow a_n = O(b_n)$

$a_n = o(b_n) \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to 0 \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$ beschränkt $\Rightarrow a_n = O(b_n)$

(ii) z.z.: $a_n, b_n = O(c_n) \Rightarrow a_n + b_n = O(c_n)$

$a_n, b_n = O(c_n) \Rightarrow \left|\frac{a_n}{c_n}\right|$ und $\left|\frac{b_n}{c_n}\right|$ beschränkt $\Rightarrow \left|\frac{a_n + b_n}{c_n}\right|$ beschränkt,

da $\left|\frac{a_n + b_n}{c_n}\right| \leq \left|\frac{a_n}{c_n}\right| + \left|\frac{b_n}{c_n}\right|$ $\Rightarrow a_n + b_n = O(c_n)$

(iii) z.z.: $a_n \sim b_n$ und $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

$a_n \sim b_n$, $b_n \sim c_n \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{c_n} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} = 1 \cdot 1 = 1$ $\square$

b) Die Reihenfolge ist: $e^{(e^n)} > (e^e)^n \overset{①}{>} 2^{n+1} \overset{⑦}{>} e^{\sqrt{n}} > 200n^2 + 53n$

$\overset{②}{>} n^{\frac{3}{2}} + n$ $> n!\left(\frac{e}{n}\right)^n \overset{③}{\equiv} \sqrt{n} \overset{④}{>} \ln(n) \overset{⑥}{>} \ln(\ln(n))$

$\sqrt[3]{n} \overset{⑤}{>}$

Zu 3b) Beweise: (Es wurden nur 5 gefragt):

~~(1)~~

① $2^{n+1} = o((e^e)^n)$, da $\left|\frac{2^{n+1}}{(e^e)^n}\right| = 2\left|\frac{2^n}{(e^e)^n}\right| = 2\left|\left(\frac{2}{e^e}\right)^n\right| \to 0$ für $n \to \infty$

② $n^{\frac{3}{2}} + n = o(200n^2 + 53n)$, da $\left|\frac{n^{\frac{3}{2}}+n}{200n^2+53n}\right| = \left|\frac{n^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}}{200 + \frac{53}{n}}\right| \to 0$ für $n \to \infty$

③ Stirling: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1 = \lim_{n\to\infty}\left(n!\left(\frac{e^n}{n^n}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}\right)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\left(\frac{e}{n}\right)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sqrt{2\pi}$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{n!\left(\frac{e}{n}\right)^n}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ → Weder $n!\left(\frac{e}{n}\right)^n = o(\sqrt{n})$, noch $\sqrt{n} = o\left(n!\left(\frac{e}{n}\right)^n\right)$

④ $\sqrt[3]{n} = o(\sqrt{n})$, da $\left|\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{n^{-\frac{1}{6}}}{1}\right| \to 0$

⑤ $\ln(n) = o(\sqrt[3]{n})$, da jede Wurzel schneller wächst als jede Potenz

⑥ $\ln(\ln(n)) = o(\ln(n))$, da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(n)}{n}\right| = 0$$

⑦ $e^{\sqrt{n}} = o(2^{n+1})$, da $\left|\frac{e^{\sqrt{n}}}{2^{n+1}}\right| = \left|\frac{e^{\sqrt{n}}}{e^{(n+1)\ln(2)}}\right| = e^{\sqrt{n}-(n+1)\ln(2)} \to e^{-\infty} = 0$ für $n \to \infty$

4) a) Betrachte zwei Teilfolgen:

$$a_{2n} = (-1)^{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \to 1 \quad \text{für } n\to\infty$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} = -\frac{2n+1}{2n+2} \to -1 \quad \text{für } n\to\infty$$

$\Rightarrow a_n = (-1)^n\frac{n}{n+1}$ hat die Häufungswerte 1 und -1

b) $a_n = \frac{n i^n + 1}{4n-2}$, beachte $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ etc..

Betrachte vier Teilfolgen:

$$a_{4n} = \frac{4n\, i^{4n}+1}{16n-2} = \frac{4n+1}{16n-2} \to \frac{1}{4}, \quad n\to\infty$$

$$a_{4n+1} = \frac{(4n+1)\, i^{4n+1}+1}{16n+2} = \frac{4ni+i+1}{16n} \to \frac{1}{4}i, \quad n\to\infty$$

$$a_{4n+2} = \frac{(4n+2)\, i^{4n+2}+1}{16n+6} = \frac{-4n-1}{16n+6} \to -\frac{1}{4}, \quad n\to\infty$$

$$a_{4n+3} = \frac{(4n+3)\, i^{4n+3}+1}{16n+10} = \frac{-4ni-3i+1}{16n+10} \to -\frac{1}{4}i, \quad n\to\infty$$

$\Rightarrow a_n$ hat die Häufungswerte $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}i, -\frac{1}{4}i$

5) $f_1(x) = \frac{x+2}{x-1}$ $\quad f_2(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$ $\quad f_3(x) \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)}$ $\quad f_4 = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3}$

Bemerke: $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f_1(x) = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 1^-} f_1(x) = -\infty$ (Pol mit VZW)

$\lim\limits_{x \to 1} f_2(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+2) = 3$

$\lim\limits_{x \to 1} f_3(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-1)(x+2)}{(x-1)} \cancel{\neq 0} = \lim\limits_{x \to 1} (x-1)(x+2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} f_4(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \infty$ (Pol ohne VZW)

$\Rightarrow$ ~~Vielfachheit~~ Sei m die Vielfachheit der Nullstelle im Nenner, p die im Zähler:

- $p > m \Rightarrow$ "$\lim = 0$"
- $p < m \Rightarrow$ "$\lim = \pm\infty$"
- $p = m \Rightarrow$ "$\lim = c \in \mathbb{R}$"