Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 01

Abgabedatum: 25.04.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

1. Für das Gauß-Verfahren haben wir Umformungsschritte (U1), (U2) und (U3) definiert:
   - Für (U1) haben wir $i \neq k$ gefordert. Führt die Linksmultiplikation von $U_{i,i}$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b zu keinem äquivalenten Gleichungssystem?
   - Für (U2) haben wir $i \neq k$ gefordert. Führt die Linksmultiplikation von $V_{ii}(\lambda)$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b zu keinem äquivalenten Gleichungssystem?
   - Für (U3) haben wir $\lambda \neq 0$ gefordert. Führt die Linksmultiplikation von $W_i(0)$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b zu keinem äquivalenten Gleichungssystem?

2. (A) Lösen linearer Gleichungssysteme

Wir betrachten die Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & +6x_2 & & +5x_4 & = & 5 \\ 4x_1 & +6x_2 & +\ x_3 & +6x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & & +6x_3 & -\ x_4 & = & -1 \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +5x_2 & +10x_3 & = & 12 \\ -x_1 & +\ x_2 & +2x_3 & = & 1 \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +\ x_3 & = & 10 \\ x_1 & -x_2 & +8x_3 & = & 15 \end{array}\right\} \tag{3}$$

(a) Geben Sie für die Systeme (1),(2) und (3) jeweils eine Matrix A und einen Vektor b an, sodass das Gleichungsystem dem Ausdruck $Ax = b$ entspricht. (1)

(b) Bestimmen Sie jeweils $\mathrm{rg}(A)$ sowie die Lösungsmenge des Gleichungssystems. (5)

3. (A) Rang einer Matrix

Berechnen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$. (6)

4. (A) Invertieren von Matrizen

(a) Bestimmen Sie, falls möglich, jeweils die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2+2\iota & 4+\iota \\ 1+\iota & 2+\iota & 3+\iota \\ -1-4\iota & -2+2\iota & -\iota \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}),$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{F}_2).$$

(4)

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung, falls existent, der linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$F(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a+b-c \\ b+c+d \\ a+b+c+d \\ a-c+d \end{pmatrix}.$$

(2)

5. (A) Elementarmatrizen

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie Matrizen $Z_1, \ldots, Z_j$ der Form $U_{ik}, V_{ik}(\lambda), W_i(\lambda)$ wie in der Vorlesung an, sodass

$$Z_j \circ Z_{j-1} \circ \ldots \circ Z_1 \circ A = I,$$

wobei I die Einheitsmatrix in $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ bezeichnet. (6)

6. (T),(NA) Lösen linearer Gleichungssysteme

Wir betrachten folgende Gleichungssysteme:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - \;x_2 & +2x_3 & = & -2 \end{array} \right\} \qquad (4)$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & - \; x_2 & - \; x_3 & +3x_4 & = & 4 \\ -x_1 & + \; x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = & -3 \\ & x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 9 \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = & -2 \end{array}\right\} \tag{5}$$

In Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \lambda x_1 & +4x_2 & +\lambda x_3 & = 1 \\ & -2x_2 & +4x_3 & = 3 \\ 2x1 & +\lambda x_2 & +6x_3 & = 4 \end{array}\right\} \tag{6}$$

(a) Bestimmen Sie für die Systeme (4), (5), (6) jeweils eine Matrix A und einen Vektor b, sodass das Gleichungssystem dem Ausdruck $Ax = b$ entspricht.

(b) Bestimmen Sie jeweils $\mathrm{rg} A$ sowie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

7. (T),(NA) Rang und Invertierbarkeit von Matrizen

Zeigen Sie:

1. Es sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und weiter sei $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix, dann gilt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AB)$.
2. Elementare Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht.
3. Eine quadratische Matrix $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang besitzt, d.h., wenn $\mathrm{rg}(B) = n$.
4. $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn B sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben lässt.
5. $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn $B^\top$ invertierbar ist.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müsen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Üungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere düfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 02

Abgabedatum: 02.05.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

1. Wenn der Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ als Linearkombination aus den Spaltenvektoren von $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ dargestellt werden kann, ist dann $Ax = b$ für $x \in \mathbb{R}^n$ lösbar?
2. Sei $x, y \in \mathbb{R}^n,\ n > 1$, gilt dann $(\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0)$?
3. Sei $v \in \mathbb{R}^2$ und sei $w \in \mathbb{R}^2$ ein zu v orthogonaler Vektor mit $||w|| = 1$. Ist w eindeutig?
4. Kann aus $x, y \in \mathbb{R}^2$ (linear unabhängig) immer mehr als eine Orthonormalbasis mithilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens berechnet werden?

2. (A) Lösbarkeit und Lösungen

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & +\ x_3 & -2x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +4x_2 & +\ x_3 & +\ x_4 & = 10 \\ 3x_1 & +6x_2 & +\ x_3 & +2x_4 & = 15 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -\ x_4 & = -3 \end{array}\right\}$$

1. Bestimmen Sie mit Satz 7.4.2 und Satz 7.4.4, ob das System lösbar bzw. universell lösbar ist. Ist das System eindeutig lösbar? (2)
2. Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraumes $\mathcal{L}_0$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems. (2)
3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems. (2)

3. (A) Darstellungen von Bilinearformen

1. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^\top Ay = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

eine Bilinearform ist. (2)

2. Es sei umgekehrt $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $e_1, \ldots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $s(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s(e_i, e_j)x_iy_j$. (2)

3. Schließen Sie daraus nun die Existenz einer Matrix $M \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $s(x,y) = x^\top M y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. (2)

4. (A) Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren

Zeigen Sie die Behauptungen zum Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Für linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ liefert das in Beispiel 8.2.9 (i) dargestellte Verfahren Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ mit

1. $||w_i|| = 1$, $i = 1, \ldots, m$, bzgl. der induzierten Norm $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, (1)
2. $\langle w_i, w_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ (3)

Wenden Sie das Verfahren an, um die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

zu orthonormieren . (2)

5. (A) Spur einer Matrix

Die Summe $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ der Diagonalelemente der Matrix $(a_{ij}) = A$ heißt die Spur von (a_{ij}), in Zeichen $\mathrm{Spur} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Spur eine Linearform auf $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist. (3)

(b) Zeigen Sie, dass durch
$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^\top B)$$
ein Skalarprodukt auf $M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert ist. (3)

6. (T),(NA) Bilinearformen und Skalarprodukte Gegeben seien die Abbildungen

$$B_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n j x_j y_j,$$
$$B_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n (-1)^j x_j y_j,$$
$$B_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n x_j y_j^2.$$

Prüfen Sie jeweils, ob B_1, B_2, B_3 eine Bilinearform oder sogar ein Skalarprodukt ist.

7. (T), (NA) Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \left(x - F(x) \in (\mathrm{Bild}(F))^\perp\right) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n \left(\langle x, F(y)\rangle = \langle F(x), y\rangle\right).$$

Gilt das auch, wenn man $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$ ersetzt?

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Üungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 03

Abgabedatum: 07.05.24, 14 Uhr

1. (A) Bilinearformen und Skalarprodukte

Prüfen Sie jeweils für B_1, B_2 und B_3, ob die entsprechende Abbildung eine Bilinearform oder sogar ein Skalarprodukt ist.

a) $B_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sum_{j=1}^n j x_j y_j$ (2)

b) $B_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sum_{j=1}^n (-1)^j x_j y_j$ (2)

c) $B_3 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sum_{j=1}^n x_j y_j^2$ (2)

2. (A) Matrixnormen

Seien $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und seien $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $||\cdot||' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jeweils Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Wir definieren die induzierte **Matrixnorm** auf $M(m \times n, \mathbb{R})$ durch

$$||A|| := \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||'}{||x||}.$$

a) Wir wählen für $||\cdot||$ und für $||\cdot||'$ jeweils die ∞-Norm $||x||_\infty := \max_j |x_j|$.

i) Zeigen Sie (1)

$$||Ax||' \leq \max_j \left(\sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right) \cdot ||x||$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) Zeigen Sie (1)

$$||A|| = \max_j \left(\sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right).$$

Hinweis: Setzen Sie einen geeigneten Vektor für x ein, um in (a) Gleichhei zu erhalten.

b) Nun wählen wir für $||\cdot||$ und für $||\cdot||'$ jeweils die 1-Norm $||x||_1 := \sum_j |x_j|$.

i) Zeigen Sie (1)

$$||Ax||' \leq \max_k \left(\sum_{j=1}^m |a_{jk}| \right) \cdot ||x||$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) Zeigen Sie (1)

$$||A|| = \max_k \left(\sum_{j=1}^m |a_{jk}| \right).$$

c) Schließlich wählen wir für $||\cdot||$ und für $||\cdot||'$ jeweils die Euklidische bzw. 2-Norm $||x||_2 := \sqrt{\sum_j |x_j|^2}$.

i) Zeigen Sie (1)

$$||Ax||' \leq ||A||_F \cdot ||x||$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $||\cdot||_F$ die **Frobenius-Norm**

$$||A||_F := \sqrt{\sum_j \sum_k |a_{jk}|^2}$$

bezeichnet. *Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.*

ii) Zeigen Sie, dass $||\cdot||_F$ **nicht** die von $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ induzierte Matrixnorm ist, indem Sie den Fall $m = n, A = E_n$ betrachten. (1)

3. (A) Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen über ihren jeweiligen Körpern:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R}) \text{ mit } \vartheta, \varphi, r \in \mathbb{R},$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M(4\times 4, \mathbb{R})$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{F}_2)$$

(2)

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

universität ulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 04

Abgabedatum: 16.05.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

1. Für welche $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt die Dreiecksungleichung (N3) in Bemerkung 8.2.4 mit “$<$” anstatt “$\leq$”?

2. Zeigen oder widerlegen Sie für eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $n \in \mathbb{N}$:
   - Wenn A eine Nullzeile hat, ist $\det A$ immer gleich 0.
   - Wenn A eine Nullspalte hat, ist $\det A$ immer gleich 0.
3. Zeigen oder widerlegen Sie: $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

2. (A) Berechne mit möglichst wenig Aufwand die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

(2)

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

(1)

3. (A)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

Wir definieren $d_n := \det(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $d_0 := 1$.

i) Zeigen Sie die Rekursionsgleichung $d_{n+1} = 2d_n - d_{n-1}$ (2)

ii) Folgern Sie per Induktion $d_n = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)

iii) Zeigen Sie außerdem $\det(B_n) = (-1)^{n+1} n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)

4. (A)

(a) Es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie (z.B. durch vollständige Induktion), dass

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

gilt. (2)

(b) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix, deren Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden. Zeigen Sie: $\det A \in \{-1, 1\}$. (1)

(c) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit $A = -A^\top$ und n ungerade. Zeigen Sie: $\det A = 0$. (1)

(d) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ invertierbar. Zeigen Sie: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. (1)

(e) Seien $A, S \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und S invertierbar. Zeigen Sie: $B := S^{-1}AS$ und A haben die gleiche Determinante. (1)

5. (A) Das charakteristische Polynom

Seien

$$A_1, A_2 \in M(3 \times 3, \mathbb{R}),\ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -6 & -5 & 8 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie jeweils das sogenannte charakteristische Polynom

$$P_A(x) = \det(A - x \cdot I_3)$$

mit $x \in \mathbb{R}$ für $A \in \{A_1, A_2\}$ auf . (2)

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von $P_{A_1}(x)$ und $P_{A_2}(x)$. (2)

(c) Sei nun X_A jeweils die Menge der bestimmten Nullstellen von $P_A(x)$ in Aufgabenteil b) für $A \in \{A_1, A_2\}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $(A - xI)v = 0$ für jeweils alle Nullstellen $x \in X_A$ für beide $A \in \{A_1, A_2\}$. (2)

6. (T),(NA) Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 9 & 14 & -8 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 05

Abgabedatum: 23.05.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

Zeigen oder widerlegen sie:

1. Wenn eine Matrix nur positive Einträge hat, sind alle ihre Eigenwerte positiv.
2. Falls A und $-A$ dieselben Eigenwerte besitzen, dann ist A nicht invertierbar.
3. Bei einer Dreiecksmatrix stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen.

2. (A) Diagonalisieren von Matrizen

Es sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie Basen der Eigenräume von A. (2)
2. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. (1)
3. Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$. (1)

Führen Sie die obigen Schritte 1 und 2 auch für die Matrix B statt A durch, falls möglich:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)

3. (A) Die Fibonacci-Folge

Wir betrachten die Fibonacci-Folge mit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n \geq 2$.

1. Bestimmen Sie eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$. (2)
2. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A. (2)
3. Bestimmen Sie A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. (1)

4. Folgern Sie aus dem letzten Schritt, dass das n-te Glied der Fibonacci-Folge die Darstellung

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

besitzt. (1)

4. (A) Eigenschaften von Eigenwerten

Zeigen Sie

(a) Ist $A \in M(2\times 2,\mathbb{R})$ symmetrisch, so sind alle Eigenwerte von A reell . (1)

(b) Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann ist $-\lambda$ ein Eigenwert von $-A$. (1)

(c) $A \in M(n\times n,\mathbb{K})$ ist genau dann nicht invertierbar, wenn 0 ein Eigenwert von A ist . (1)

(d) Ist $A \in M(n\times n,\mathbb{K})$ invertierbar und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, dann ist $\lambda \neq 0$ und $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1} . (1)

(e) Ist $A \in M(n\times n,\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, dann ist für $m \in \mathbb{N}$ auch λ^m ein Eigenwert von A^m . (1)

(f) Ist $A \in M(n\times n,\mathbb{K})$, dann haben A und $A^\top$ das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte . (1)

5. (A) Diagonalisierbarkeit von Matrizen

a) Eine Matrix $A \in M(n\times n,\mathbb{R})$ heißt nilpotent, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, für dass $A^m = 0$ gilt. Zeigen Sie:

i) Falls $A \in M(n\times n,\mathbb{R})$ nilpotent ist, dann hat A nur den Eigenwert 0. (2)

ii) Falls $0 \neq A \in M(n\times n,\mathbb{R})$ nilpotent ist, ist A nicht diagonalisierbar. (1)

b) Zeigen Sie: Ist $A \in M(n\times n,\mathbb{R})$ symmetrisch, so sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal (bzgl. des Standardskalarprodukts). (3)

6. (T),(NA) Es sei $A \in M(3\times 3,\mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie Basen der Eigenräume von A.
2. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
3. Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

Führen Sie die obigen Schritte auch für die folgende Matrix durch, falls möglich:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. (T), (NA)

(a) Es sei $G = (g_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix, deren Spaltensummen alle 1 sind, d.h.

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \left(\sum_{i=1}^{n} g_{ij} = 1 \right).$$

Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert von G ist.

(b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen über orthogonale Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

(a) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt bezeichnet.

(b) $\det A \in \{1, -1\}$.

(c) Zeigen Sie, dass die orthogonalen Matrizen A mit $\det A = 1$ eine Untergruppe von $O(n)$ bilden. Diese wird mit $SO(n)$ bezeichnet.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.

- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 06

Abgabedatum: 28.05.24, 14 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge.
- Falls a konvergent ist, ist dann die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?
- Falls a bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, ist dann die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?

(b) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, falls der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert in jedem Punkt aus $\mathbb{R}$ übereinstimmen?

(c) Falls eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Werte 0 und 1 annimmt, nimmt sie dann auch den Wert 0.5 an?

2. (A) Funktionsgrenzwerte mit dem ϵ-δ-Kriterium

Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ-δ-Kriteriums (Definition 10.1.3), dass für jedes $x_0 \in [0,5]$ der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{2}{1+\sqrt{x}}$$

existiert. (6)

3. (A) Grenzwerte spezieller Funktionen

Es seien $\alpha, \beta \in (0,+\infty)$. Zeigen Sie, dass

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$, (2)

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, (2)

(c) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$. (2)

Hinweis: Nutzen Sie die Reihendarstellung der Exponentialfunktion und führen Sie Teil b) auf Teil a) zurück.

4. (A) Weitere Funktionsgrenzwerte

Berechnen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x-14}{x-2}$, (2)

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2+24x}$, (2)

(iii) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)}\right)$. (2)

5. (A) Ein impliziter Grenzwert Für $x \in (0,1)$ definieren wir $f(x)$ durch

$$\sin x = \frac{x(60-7x^2)+x^7 f(x)}{60+3x^2}.$$

Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} f(x)$. (6)

Hinweis: Nutzen Sie die Reihendarstellung des Sinus und stellen Sie die Gleichung nach x um.

6. (T),(NA) Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ-δ-Kriteriums (Definition 10.1.3), dass für jedes $x_0 \in [2,5]$ der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{1-x^2}$$

existiert.

7. (T),(NA)

Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x}$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$,
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$,
6. $\lim_{x\to \infty} \frac{6x^4+12x^2-13}{3x^4-7x^3+2x+1}$.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 07

Abgabedatum: 06.06.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Ist die Verkettung von stetigen Funktionen stetig?

(b) Ist die kleinste obere Schranke eines kompakten Intervalls immer in diesem enthalten?

(c) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gilt dann $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$?

(d) Sei I ein Intervall und sei f eine auf I definierte Funktion. Existiert dann ein $x_+ \in I$ mit $f(x_+) > f(x)\ \forall x \in I$?

(e) Das ε-δ-Kriterium aus Def. 10.2.1 für Stetigkeit besagt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Welche der folgenden Aussagen sind bzw. sind nicht äquivalent zum ε-δ-Kriterium?

- $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
- $\neg \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon)$.

2. (A) Stetigkeit

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 5\,|x^2 - 2| + 3$ in $x_0 = 1$ stetig ist, (2)

ii) $f_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist. (2)

(b) In Beispiel 10.2.6 (iv) steht, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [0,1]$ mit $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ bei $x = 0$ eine sogenannte Unstetigkeit zweiter Art besäße.

i) Geben Sie zunächst Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in}$ an, so dass $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = 0$ und $\lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{x_k} \neq \lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{y_k}$. (1)

ii) Verwenden Sie die beiden Folgen aus (i) dazu, die genannte Unstetigkeit zweiter Art bei $x = 0$ zu beweisen. (1)

3. (A) Stetigkeit

a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a+2}, & x \leq 1, \\ x^2 + b, & x > 1 \end{cases}$$

in $x = 1$ stetig ist und $f(-1) = 1$ gilt. (2)

b) Zeigen Sie mithilfe der Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$$

im Punkt $x_0 = 1$ stetig ist. (3)

c) Zeigen Sie: Ist $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $x \mapsto x \cdot g(x)$ in $x_0 = 0$ stetig. (1)

4. (A) Stetigkeit

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_4(x + 16) + x4^x - 6$, mindestens eine Nullstelle besitzt. (2)

b) Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in welchen Punkten bzw. Bereichen diese stetig sind. Klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen gemäß Beispiel 10.2.6.

i) $f(x) = \exp(24[x])$, wobei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} |\ k \leq x\}$ (2)

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-6x^2}{x^2-9} : x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\} \\ 4 : x = 3 \\ 3 : x = -3 \end{cases}$ (2)

5. (A) Grenzwertsätze für Funktionsgrenzwerte

Es seien $f, g \colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \lim_{x \to x_0} g(x) = b$. Beweisen Sie die folgenden nach Lemma 10.1.8 geltenden Aussagen jeweils mithilfe von Satz 10.1.6 und den Grenzwertsätzen 3.1.17 für Folgen.

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \left(\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha a \right)$. (1.5)

(b) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$. (1.5)

(c) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$. (1.5)

(d) Wenn $b \neq 0$, dann gilt $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$. (1.5)

6. (T),(NA)

Zeigen Sie, dass jedes Polynom ungeraden Grades mindestens eine (reelle) Nullstelle besitzt und schließen Sie daraus, dass jedes $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ mindestens einen reellen Eigenwert besitzt.

7. (T), (NA) Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in welchen Punkten bzw. Bereichen diese stetig sind. Klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen gemäß Beispiel 10.2.6.

a) $f(x) = |\sin(x^3)|$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x| \cos(\frac{1}{x^2})}{1+x^4} : x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\} \\ 1 : x = 0 \end{cases}$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 08

Abgabedatum: 13.06.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Gibt es eine differenzierbare Funktion, die nicht stetig ist?

(b) Folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit Lipschitz-Stetigkeit?

(c) Folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit Stetigkeit?

(d) Ist jede invertierbare Funktion differenzierbar?

2. (A) Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig auf I ist. (2)

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist. (4)

3. (A) Ableitungsregeln

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich an.

a) $f_1(x) = \log(\log(2x))$, (0.5)

b) $f_2(x) = 2x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, (0.5)

c) $f_3(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, (0.5)

d) $f_5(x) = \frac{x^{\sqrt{x}}}{2^x}$, (0.5)

e) $f_6(x) = x^5 5^x$, (0.5)

f) $f_7(x) = \log\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)$, (0.5)

g) $f_8(x) = (x \cos x)^x$, (1)

h) $f_4(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, (1)

i) $f_9(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin 2x}$. (1)

4. (A) Aussagen zur Differenzierbarkeit

Sei I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $x_0 \in I$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Gibt es Zahlen $K > 0$ und $\alpha > 1$ mit $|f(x)| \leq K\,|x|^\alpha$ für $x \in I$, so ist f in 0 differenzierbar. (2)

b) Gilt $f(0) = 0$ und gibt es $K > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ mit $|f(x)| \geq K\,|x|^\alpha$ für $x \in I$, so ist f in 0 nicht differenzierbar. (2)

c) Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

(2)

5. (A) Monotonieverhalten

a) Bestimmen Sie, auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}$ die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. (2)

b) Begründen Sie, welche der beiden Zahlen 2024^{2025} und 2025^{2024} größer ist. (1)

c) Zeigen Sie, dass es genau ein paar natürlicher Zahlen n, m gibt mit $n < m$ und $n^m = m^n$. (3)

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass ln *auf seinem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend ist.*

6. (T),(NA)

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen und geben Sie jeweils ihren maximalen Definitionsbereich an.

1. $f_1(x) = (x^x)^x$
2. $f_2(x) = x^{(x^x)}$
3. $f_3(x) = x^{\frac{1}{x}}$
4. $f_4(x) = \ln\ln(1 + x)$
5. $f_5(x) = x^{\sin(x)}$
6. $f_6(x) = \sqrt[3]{x^{3/5} + \sin^3(1/x) - \tan^2(x)}$
7. $f_7(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin\log x}$

7. (T),(NA)

Zeigen Sie, dass für $x, y \in (-\infty, 0)$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ folgende Ungleichungen gelten.

1. $|\cos e^x - \cos e^y| \leq |x - y|$.
2. $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

Hinweis: Verwenden Sie den 1. Mittelwertsatz.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 09

Abgabedatum: 20.06.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Muss eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf ganz $[a,b]$ differenzierbar sein, damit der Mittelwertsatz anwendbar ist?

(b) Ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion immer stetig?

(c) Folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit Differenzierbarkeit?

2. (A) Mittelwertsätze

a) Zeigen Sie, dass es genau ein $x \in [0, +\infty)$ gibt mit $e^x + \sqrt{x} = 3$. (2)

b) Berechnen Sie mithilfe der Mittelwertsätze:

  a) $\lim_{n\to\infty} n(1 - \cos(1/n))$ (2)

  b) $\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ für $a > 0$, $\beta \neq 0$. (2)

3. (A) Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$ (1.5)

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ (1.5)

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos(3x))}{\log(\cos(2x))}$ (1.5)

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(x) + e^x + e^{-x} - 4}{x^4}$ (1.5)

4. (A) Sinus und Kosinus Hyperbolicus

Wir haben im letzen Semester auf Blatt 9 gezeigt, dass die Funktionen sinh, cosh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

mit der Eigenschaft $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ gegeben sind.

a) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion von cosh, nämlich arcosh (Areakosinus Hyperbolicus), existiert und geben Sie größtmögliche Mengen I, J an, so dass arcosh:$I \to J$ existiert, mit $1 \in I$. (2)

b) Berechnen Sie $\operatorname{arcosh}'(x)\ \forall x \in I$. (2)

c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ für $x \geq 1$. (2)

5. (A) Lipschitz-Stetigkeit und Differenzenquotienten

Sei $a < b$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $L \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

  a) $|f'(x)| \leq L\ \forall x \in (a, b)$

  b) $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\ \ \forall x, y \in (a, b)$, d.h., f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. (3)

b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|\,.$$

(1)

c) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist f zweimal stetig differenzierbar auf (a, b), so gilt für alle x_0 in (a, b):

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

(2)

6. (T),(NA)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(3x)}{\tan(5x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

7. (T),(NA)

Zeigen Sie für $x \in (-1, 1)$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k + 1}.$$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 10

Abgabedatum: 27.06.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Gilt die Umkehrung des Satzes von Rolle (11.2.5)? In anderen Worten, seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a,b) differenzierbar. Weiter existiere ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Gilt dann $f(a) = f(b)$?

(b) Gilt die Umkehrung des 1. Mittelwertsatzes (11.2.8)? In anderen Worten, seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die gilt

$$\exists \xi \in (a,b) \left(f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

Ist f dann stetig und auf (a,b) differenzierbar?

(c) Hilft der Satz von L'Hospital nur in den Fällen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ weiter?

(d) Für welche Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ gilt, dass das entsprechende Lagrangesche Restglied $R_n(x_0, x)$ gleich 0 ist?

(e) Welche Bedingung muss eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ erfüllen, sodass die Taylorreihe $Tf(x_0, x)$ von f mit Entwicklungspunkt x_0 existiert?

2. (A) Taylorpolynome

a) Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(\cos(x))$. Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom $T^{(2)}f(0,x)$ von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (3)

b) Zeigen Sie, dass für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ die Abschätzung

$$\left| f(x) - T^{(2)}f(0,x) \right| \leq \frac{2}{3}x^3$$

gilt. (3)

3. (A) Kurvendiskussionen

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x)e^{2x}$ durch (Nullstellen, Monotonieintervalle, Extremstellen (lok. Max./Min), Verhalten für $x \to \pm\infty$.) (6)

4. (A) Partielle Ableitungen

Berechnen Sie jeweils alle ersten partiellen Ableitungen von

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^3 x_3^2,$ (1)

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cos x_2),$ (1)

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2^2 x_1 + 3x_1^2 x_3^3 \\ x_3 x_1^2 + 2x_2 x_1 \end{pmatrix},$ (2)

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^4}, & (x_1, x_2)^\top \neq (0,0)^\top, \\ 0, & (x_1, x_2)^\top = (0,0)^\top. \end{cases}$ (2)

Beachten Sie bei d), dass die partielle Ableitung in $(0,0)^\top$ mit Hilfe der Definition bestimmt werden muss – warum ist das so?

5. (A) Stammfunktionen

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k \, dx,\ x \in (-1, 1)$ (1,5)

b) $\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1 + \ln^2(x)}} \, dx$ (1,5)

c) $\int \sin(2x) \cos(4x) \, dx$ (1,5)

d) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$ (1,5)

Hinweis zu Teil d): Führen Sie die Substitution $x = \sinh(u)$ durch.

6. (T),(NA)

a) Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Taylor $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf einen Fehler von 10^{-4} genau.

b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von

   a) $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2)^\top \neq (0,0)^\top, \\ 0, & (x_1, x_2)^\top = (0,0)^\top. \end{cases}$

c) Sei $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x) e^x$. Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f und überprüfen Sie, ob es sich dort um lokale Maxima oder Minima handelt.

7. (T),(NA)

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \ln^2(x) \, dx$

b) $\int \frac{3x^2}{x^3+1} \, dx$

c) $\int \arctan(3x) \, dx$

d) $\int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \, dx$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 11

Abgabedatum: 04.07.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Nennen Sie eine nicht Riemann-integrierbare Funktion.

(b) Ist jede stetige Funktion Riemann-integrierbar?

(c) Ist jede monoton wachsende Funktion Riemann-integrierbar?

(d) Ist jede Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar?

2. (A) Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$ (1)

b) $\int \frac{x^3+2x^2-1}{x(x-1)}\,dx$ (1)

c) $\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$ (1)

d) $\int \frac{\log(x)}{x\left(\log^2(x)+\log(x)-2\right)}\,dx$ (1,5)

e) $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$ (1,5)

3. (A) Höhere trigonometrische Integrale

Sei $f_n(x) := \sin^n(x)$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie eine rekursive Darstellung für

$$\int f_n(x)\,dx$$

der Form

$$\int f_n(x)\,dx = g_n(x)f_{n-1}(x) + \alpha_n \int f_{n-2}\,dx,$$

wobei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\alpha_n \in \mathbb{R}$. (6)

4. (A) Zwischensummen

Es seien $a, b \in (0, +\infty)$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Zeigen Sie, dass durch $x_j = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{n}}$, $j = 0, \ldots, n$, eine ausgezeichnete Partitionenfolge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a, b]$ gegeben ist. (2)

b) Durch $\xi_j = x_j$ für $j = 1, \ldots, n$ sind Zwischenstellen dieser Partition gegeben. Bestimmen Sie die zugehörige Riemannsche Zwischensumme. (2)

c) Bestimmen Sie über die Zwischensumme aus b das Integral $\int_a^b \frac{1}{x} dx$. (2)

5. (A) Stetigkeit und Stammfunktionen

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f keine Stammfunktion besitzt. (3)

b) Geben Sie (mit Beweis) eine in mindestens einem Punkt unstetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche dennoch eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt. (3)

6. (T),(NA)

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \frac{1}{x^3+x} \, dx$

b) $\int \frac{x^5+1}{x^4+x^2} \, dx$

c) $\int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} \, dx$

7. (T),(NA)

Berechnen Sie die Ober- und Untersumme von $f = \exp : [0,1] \to \mathbb{R}$ für die Zerlegung $Z_n = \{x_i | i = 0, \ldots, n\}$ mit $x_i = \frac{i}{n}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\lim_{n \to \infty} \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} |x_i - x_{i-1}| = 0$$

und bestimmen Sie mit diesen Ergebnissen den Wert des Integrals $\int_0^1 e^x dx$.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 12

Abgabedatum: 11.07.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Ist jede Lipschitz-stetige Funktion integrierbar?

(b) Impliziert $\int\limits_a^b f(x)\,dx, \int\limits_a^b g(x)\,dx < \infty$, dass $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx < \infty$?

(c) Impliziert $\int\limits_a^b f(x)\,dx, \int\limits_a^b g(x)\,dx < \infty$, dass $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx < \infty$?

(d) Gibt es nicht ausgezeichnete Partitionenfolgen?

2. (A) Bestimmte Integrale

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

a) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (1)

b) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{4x-1}}\,dx$ (1)

c) $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^2+1}{x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1}\,dx$ (2)

d) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx$ (1)

e) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{x^4+4}\,dx$ (1)

3. (A) Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sowie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare, nicht-negative Funktion. Zeigen Sie, dass dann ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

existiert. (6)

4. (A) Aussagen über Riemann-integrierbarkeit

a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar mit $f([a,b]) \subseteq [-M,M]$ für ein $M > 0$. Sei weiter $g : [-M,M] \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig. Zeigen Sie, dass dann $g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ebenfalls Riemann-integrierbar ist. (4)

b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $\exp \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. (2)

5. (A) Uneigentliche Integrale und das Integralkriterium

a) Bestimmen Sie alle Kombinationen von $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\int\limits_1^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\,dx$ konvergiert. (3)

b) Bestimmen Sie alle $\mu > 0$, sodass

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{\log(\log(k))^{-\mu}}{k\log(k)}$$

konvergiert. (3)

6. (T),(NA)

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\,dx$

b) $\int\limits_1^e \frac{\log(x)}{x\sqrt{1+\log(x)^2}}\,dx$

c) $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

d) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3+x}\,dx$

e) $\int\limits_1^e x^2\log(x)\,dx$

7. (T),(NA)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.