



Übungen Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker: Blatt 1

1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a)

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2, \quad a, b \neq 0$$

(b)

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

(c)

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2},$$

(d)

$$\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

2. Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist der Betrag von z definiert durch

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}},$$

wobei \bar{z} die zu z konjugierte Zahl bezeichnet.

- (a) Berechnen Sie \bar{z} , $|z|$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Re}(\frac{1}{z})$ und $\operatorname{Im}(\frac{1}{z})$ für $z = \frac{12+5i}{2+3i}$ (Hinweis: dritte binomische Formel).

- (b) Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie die Parallelogrammidentität:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

- (c) Zeigen Sie, dass $|zw| = |z||w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt.

3. Es seien $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen zwischen Mengen X, Y, Z . Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (a) f und g sind injektiv $\Rightarrow g \circ f$ ist injektiv.

- (b) f und g sind surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ ist surjektiv.

- (c) Die Inverse von $g \circ f$ ist gegeben durch $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4. Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Beschränktheit und geben Sie ihr Minimum, Maximum, Infimum und Supremum an (falls sie existieren):

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x \leq 24\},$$

$$B = \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$C = \left\{ \frac{m+n}{m \cdot n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Allgemeiner Hinweis:

- Die Vorleistung besteht aus zwei Zulassungsklausuren, die im Laufe des Semesters geschrieben werden. Um diese Leistung zu erreichen, müssen mindestens 30 % der gesamten Punkte erreicht werden. Außerdem müssen in beiden Klausuren jeweils mindestens 20 % der Punkte erreicht werden.