26. April 2024

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Sabrina Weber

Angewandte Stochastik – Übungsblatt 1

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 26. April 2024 um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen vor Beginn der Übung über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als *exakt zwei Dateien* ab: Eine PDF-Datei für die theoretischen Aufgaben und eine R- oder R-Markdown-Datei (Dateiendung *.R* bzw. *.RMD*) für die Programmieraufgaben. Andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Bearbeitet das Übungsblatt in *Gruppen von 3- 4 Personen* und gebt bitte euren jeweiligen Studiengang an. Nur eine Person aus der Gruppe soll das Übungsblatt abgeben. Beachtet außerdem die Hinweise zu den Übungen in Moodle.

Aufgabe 1 (1 + 6 = 7 Punkte)

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um das gleichzeitige Würfeln mit zwei sechsseitigen Würfeln zu beschreiben. Die Grundmenge Ω wählen wir wie in Beispiel 2.1.2 im Skript. Ein Elementarereignis (also ein Element $\omega \in \Omega$ der Grundmenge) gibt also an, welche Zahlen die beiden Würfel zeigen. Beachte, dass die Würfel hier unterscheidbar sind, wir haben also z.B. einen roten Würfel, dem der erste Eintrag von ω entspricht und einen blauen Würfel, dessen Augenzahl im zweiten Eintrag von ω steht. Das Elementarereignis $(4, 2)$ bedeutet dann, dass der rote Würfel eine 4 zeigt, der blaue eine 2; das Elementarereignis $(2, 4)$ aber dass der rote Würfel eine 2 zeigt, der blaue eine 4.

Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit wir berechnen wollen können unter anderem sein:

- A = “Der rote Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4”
- B = “Der rote und der blaue Würfel zeigen die gleiche Zahl”
- C = “Der blaue Würfel zeigt eine größere Zahl als der rote Würfel”

Die σ-Algebra $\mathcal{F}$ repräsentiert die Menge aller Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit wir später berechnen können. Aus der Intuition des Gegenereignisses (also z.B. “der rote Würfel zeigt *nicht* eine Zahl kleiner als 4” bzw. “der rote Würfel zeigt mindestens 4 Augen”) wird klar, wieso es wichtig ist, dass $\mathcal{F}$ auch das Komplement $\overline{A}$ (also das Gegenereignis von A) enthält, wenn A selbst enthalten ist. Mit der zweiten Forderung der (σ-)Vereinigungsstabilität wird ein Mengensystem konstruiert, in dem im Wesentlichen alle intuitiv definierbaren Ereignisse enthalten sind, also auch Vereinigungen von Ereignissen (A oder B tritt ein), Schnitte (A und B tritt ein) und auch kompliziertere wiederholte Anwendung dieser Operationen (z.B. A und B tritt ein, aber nicht C).

(a) Gib eine geeignete σ-Algebra $\mathcal{F}$ an, die alle Ereignisse aus der Liste oben enthält sowie einfache Abwandlungen davon (Ersetze die 4 durch eine beliebige Zahl; Ersetze "rot" durch "blau" und umgekehrt; Ersetze "kleiner" durch "größer"; ...).

(b) Gehe davon aus, dass die beiden Würfel fair sind, also jede Seite mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zeigen. Gib das Wahrscheinlichkeitsmaß $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ an und gib die Wahrscheinlichkeiten für die drei Ereignisse aus der Liste oben an. Es ist hilfreich, wenn du ein Ereignis als Menge von Elementarereignissen betrachtest.

Aufgabe 2 (0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 3 Punkte)

Sei $\Omega = \{5, 6, 7, 8, 9, 16, 17, 18, 19, 20\}$ mit Teilmengen $A = \{6, 8, 16, 18, 20\}$, $B = \{5, 7, 9, 17, 19\}$, $C = \{16, 17, 18, 19\}$ und $D = \{6, 9, 20\}$. Schreibe folgende Mengen als Aufzählung ihrer Elemente:

(a) $A \cup C$

(b) $A \cap B$

(c) C^c

(d) $C^c \cap D$

(e) $(\Omega \setminus C)^c$

(f) $A \setminus C$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. Zeige, dass

$$P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \tag{1}$$

Aufgabe 4 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Betrachte folgende Ereignisse bzgl. der Wertentwicklung des Bitcoinkurses nach einem Jahr:

- A = "Der Kurs steigt um weniger als 5%, fällt aber nicht."
- B = "Der Kurs steigt um 5 - 10%."
- C = "Der Kurs steigt über 10%."

Betrachte die folgenden Ereignisse

(a) $A \cup B$

(b) $(A \cup B \cup C)^c$

(c) $B^c \cap C^c$

Beschreibe die Ereignisse in (a)-(c) jeweils zunächst in Worten und bestimme ihre Wahrscheinlichkeit, falls bekannt ist, dass $P(A) = 0.4$ und $P(B) = P(C) = 0.05$

Aufgabe 5 (2 + 5 = 7 Punkte)

Begründe, ob es sich bei den Ereignissystemen $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ um σ-Algebren handelt.

(a) $\Omega = \{23, U, \varepsilon, ☺, \square, ☼\}$ und $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset,\ \Omega,\ \{23, U, \varepsilon, ☺\},\ \{23, \square, ☼\},\ \{U, \varepsilon, ☺\},\ \{23\}\}$

(b) $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \subseteq [0,1] \text{ oder } A^c \subseteq [0,1]\}$

Aufgabe 6 (3 + 4 = 7 Punkte)

Im Folgenden ist $(\Omega, \mathcal{F})$ stets ein Maßraum und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In welchen Fällen ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum?

(a) $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\},\ \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\{k\}) = (1/2)^k,\ k \in \Omega$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt, $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\},\ \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und
$\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in A} \frac{2j}{n(n+1)},\ A \in \mathcal{F}$