Analysis I für I&I
Blatt 3
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) $\sum_{k=1}^{n} \log(k) = \log(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1) = \log(n!)$

b) $\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \sum_{k=0}^{n} (e^x)^k \overset{\text{geom. }\Sigma}{=} \frac{(e^x)^{n+1} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{nx+x} - 1}{e^x - 1}$

c) $\prod_{k=0}^{n} e^{kx} = e^{0x + 1 \cdot x + \ldots + nx} = e^{x \cdot \sum_{k=0}^{n} k} = e^{x \sum_{k=1}^{n} k} = e^{x \cdot \frac{n(n+1)}{2}}$

Aufgabe 2
(numerischer Wert jeweils nicht notwendig)

a) $2^x = 5 \Leftrightarrow x \cdot \ln(2) = \ln(5) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\ln(5)}{\ln(2)}}} \approx 2.32$

b) $\ln(x) + \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x \cdot (x-1)) = 0 \overset{e^{\dots}}{\Leftrightarrow} x(x-1) = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Aber nur $\underline{\underline{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$ darf eingesetzt werden.

c) $2^x \cdot 3^{x+1} = 5^x \Leftrightarrow \ln(2^x \cdot 3^{x+1}) = \ln(5^x) \Leftrightarrow x \cdot \ln(2) + (x+1)\ln(3) = x \cdot \ln(5)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\frac{\ln(3)}{\ln(2) + \ln(3) - \ln(5)}}} \approx -6.03$

d) $\ln(x) - \ln(x^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x^2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = e^{-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e}}$

e) $e^x + e^{-x} = 2$. Setze $y = e^x$ $(\Leftrightarrow x = \ln(y))$

$\Rightarrow y + \frac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow y^2 + 1 = 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow y = 1$

Rücksubstitution: $\underline{\underline{x = \log(1) = 0}}$

f) $x^x + 4^x = 4$

hier kann man nichts vereinfachen, denn für

$$x^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow e^{x\ln(x)} + e^{x\cdot\ln(4)} = 4$$

gibt es keinen (elementaren) einfacheren Ausdruck.

g) $4^x - 2^{x+1} = 3$

$\Leftrightarrow 2^x \cdot 2^x - 2\cdot 2^x = 3 \Leftrightarrow 2^x\cdot(2^x - 2) = 3$

Setze $y = 2^x \left(\Leftrightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(2)}\right)$

$\Rightarrow y(y-2) = 3 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \rightarrow y_1 = 3, (y_2 = -1)$ darf nicht in $\ln(\cdot)$

Rücksubst.

$\Rightarrow x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1.58$

Aufgabe 3

Nach t sec sind $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{56}} \cdot 100\%$ übrig.

a) 2 min = 120 sec

$\Rightarrow$ Nach 2 min sind $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{56}} \approx 0.226$ übrig, und damit 77.4% zerfallen.

b) 3 min = 180 sec

$\Rightarrow$ Nach 3 min sind $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{180}{56}} \approx 0.11$ übrig, das sind 11%

c) Damit 99% zerfallen sind, muss 1% übrig sein. Also:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{56}} \leq 0.01 \Leftrightarrow \frac{x}{56}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(0.01)$$

$$\overset{\ln(\frac{1}{2})<0}{\Leftrightarrow} x \geq 56\cdot\frac{\ln(0.01)}{\ln(1/2)} \approx 372$$

Also nach ~~etwa~~ mindestens 6.2 min.

Aufgabe 4

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = n \cdot \log(n) - \log(n!) \qquad (*)$$

a) Vollst. Induktion

<u>I.A.</u> $n=2$. $\sum_{k=1}^{2-1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = 1 \cdot \log\left(\frac{2}{1}\right) = 2 \cdot \log(2) - \underbrace{\log(2!)}_{=\log(2)}$ ✓

<u>I.S.</u> $n \to n+1$. Gelte $(*)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + n \cdot \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\overset{\text{I.H.}}{=} n \cdot \log(n) - \log(n!) + n\left(\log(n+1) - \log(n)\right)$$

$$= n \cdot \log(n+1) - \log(n!) = \underbrace{n \cdot \log(n+1) + \log(n+1)}_{} - \underbrace{(\log(n+1) + \log(n!))}_{}$$

$$= (n+1)\log(n+1) - \log((n+1)!)$$

Also gilt $(*)$ für $n+1$ und damit $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. ☐

b) Direkt

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (\log(k+1) - \log(k)) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \log(k+1) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \log(k)}_{0 \text{ für } k=1}$$

$$\overset{\text{Ind. Shift 1. Summe}}{=} \sum_{k=2}^{n} (k+1) \cdot \log(k) - \sum_{k=2}^{n-1} k \cdot \log(k) = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} k \cdot \log(k)}_{0 \text{ für } k=1} - \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \log(k)}_{0 \text{ für } k=1} - \sum_{k=2}^{n} k \cdot \log(k)$$

$$= n \cdot \log(n) - \sum_{k=1}^{n} \log(k) \overset{A1)a)}{=} n \cdot \log(n) - \log(n!)$$ ☐

Aufgabe 5

a) Z $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cdot\cos(x)\sin(y)$

Beweis

Wegen der Additionstheoreme ist

$$(1)\quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$

$$(2)\quad \sin(x-y) = \sin(x+(-y)) = \sin(x)\cdot\cos(-y) + \cos(x)\cdot\sin(-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

Subtraktion (1)-(2) liefert

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cdot\cos(x)\sin(y)$$

$\boxtimes$

b) Z $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\cdot\sin(\frac{x}{2})}$

Beweis

Wir folgen dem Hinweis:

$$2\cdot\sin(\tfrac{x}{2})\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kx)\sin(\tfrac{x}{2}) \overset{a)}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(kx+\tfrac{x}{2}\right) - \sin\left(kx-\tfrac{x}{2}\right)\right)$$

$$\overset{\substack{\text{Ind.shift}\\ \text{2.Summe}}}{=} \sum_{k=1}^{n}\sin\left(kx+\tfrac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(kx+\tfrac{x}{2}\right) = \sin\left(nx+\tfrac{x}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) =$$

$$= \sin\left((n+\tfrac{1}{2})x\right) - \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

Damit ist also

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{2\cdot\sin(\frac{x}{2})\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)}{2\cdot\sin(\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2})}{2\cdot\sin(\frac{x}{2})} = \underline{\underline{\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\cdot\sin(\frac{x}{2})}}}$$

$\boxtimes$