Dr. J.-W. Liebezeit
M. Scheibchen

Blatt 02
02.05.2014

Übungen zu Analysis I für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe bis Freitag, 09.05.2014 um 08:20 Uhr, H3)

1. Zeige die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

   (a) Für alle $n \geq 3$ gilt: $2n + 1 < 2^n$,

   (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \geq -1$ gilt: $(1+a)^n \geq 1 + na + (n-1)a^2$.

(2+4 Punkte)

2. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Berechne den Wert der folgenden Summen:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ für $n \geq 2$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+1)$ für $n \geq 1$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k 2^{n-k}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

(6 Punkte)

3. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne den Wert der folgenden Doppelsummen:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} \frac{k^2}{l(2l-1)}$

   Hinweis: Beachte den Summanden für $k = n$.

(2+3 Punkte)

4. **Einschließungskriterium**

   Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ für die gilt: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$.

   Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

(5 Punkte)

5. Im Folgenden ist jeweils das n-te Glied einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ angegeben. Untersuche die Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{(n-1)^2}{2n^3+n^2+8}$

(b) $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{3n^2+8}$

(c) $a_n = (-1)^n \dfrac{1+n}{2-n}$

(d) $a_n = \dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$

(e) $a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right)$

(f) $a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$

(g) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

(h) $a_n = \sqrt{n^2+n}-n$

(i) $a_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$

(9 Punkte)

6. Bestimme mit Hilfe der Grenzwertsätze den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und finde für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt.

(a) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+2n+2}$

(b) $a_n = \dfrac{n^2+\frac{3}{2}n+1}{2n^2+n+1}$

Hinweis: Verwende für $N(\varepsilon)$ die Abrundungsfunktion

$$\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ \lfloor x\rfloor = \max\{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x \,\},$$

oder die Aufrundungsfunktion

$$\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ \lceil x\rceil = \min\{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x \,\}.$$

(5+5 Punkte)