Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
Sommersemester 2017
24+4 Punkte

Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure

- Übungsblatt 5 -

Abgabe: Freitag, den 26.5.2017 um 08:10 im Hörsaal 22

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Finde *Nullfolgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 42$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existiert nicht.

Bemerkung: Aus dieser Aufgabe folgt, dass im Fall "$\frac{0}{0}$" alles passieren kann.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(a) Zeige: Ist $a_n \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ für ein $c \in \mathbb{R}$, so gilt auch $a \leq c$.
Tipp: Nimm $a > c$ an und führe dies auf einen Widerspruch.

(b) Angenommen $a_n < c \ \forall n \in \mathbb{N}$. Gilt dann auch $a < c$?

Aufgabe 3: (6 Punkte)

(a) Zeige:

(i) $a_n = \mathrm{o}(b_n) \Rightarrow a_n = \mathcal{O}(b_n)$

(ii) $a_n, b_n = \mathcal{O}(c_n) \Rightarrow a_n + b_n = \mathcal{O}(c_n)$

(iii) $a_n \sim b_n, b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$ wobei $\sim$ hier *asymptotisch gleich* bedeutet.

(b) Um die Laufzeit von Algorithmen zu vergleichen kann man zum Beispiel die folgenden "Klassen"verwenden:

$$\mathcal{O}(1),\ \mathcal{O}(\ln(n)),\ \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}}),\ \mathcal{O}(n),\ \mathcal{O}(n\ln(n)),\ \mathcal{O}(n^2); \mathcal{O}(n^3);\ \mathcal{O}(2^n)$$

Ordne die folgenden Folgen (es ist jeweils das $n$te Glied gegeben) der jeweils "günstigsten"(im Sinne von Laufzeit) Klasse zu und sortiere sie anschließend aufsteigend nach asymptotischer Wachstumsgeschwindigkeit (Ergebnis genügt, ausnahmsweise keine Nachweise nötig). Benutze *nur* die o.g. Klassen.

$$2^{n+1};\ n^{\frac{3}{2}} + n;\ \sqrt{n}\ln(n) + \frac{1}{2^n};\ \frac{n^3}{\ln(n)};\ 200n^2 + 53n;\ n!\left(\frac{e}{n}\right)^n;\ \ln(\ln(n))$$

Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz
Sommersemester 2017
24+4 Punkte

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Bestimme alle Häufungswerte folgender Folgen (die konvergenten Teilfolgen sind jeweils anzugeben):

(a) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

(b) $b_n = \dfrac{n}{3} - \left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor$ wobei $\lfloor x \rfloor$ die untere Gaußklammer bezeichnet, also die größte ganze Zahl $\leq x$.

(c) $c_n = \dfrac{n \cdot i^n + 1}{4n - 2}$ mit der imaginären Einheit $i^2 = -1$.

(d) $d_n = (-1)^{\frac{n^2(n+1)^2}{2}} \cdot \dfrac{2n+1}{n}$

Aufgabe 5: (2 Punkte und 4 Zusatzpunkte)[1]

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Folge.
In dieser Aufgabe wollen wir folgendes Resultat zeigen:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist genau dann konvergent, wenn } \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

(a) Zeige zunächst die Richtung $\Rightarrow$, zeige also, dass wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, dann $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ gilt.
Bemerkung: Kann man in einer Zeile begründen.

(b) Zeige: Ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \bar{s}$, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein N, sodass $a_n < \bar{s} + \varepsilon \ \forall n > N$.
Tipp und Bemerkung: Widerspruchsbeweis und Satz von Bolzano Weierstraß. Ein ganz analoges Resultat gilt für den $\liminf$ *und muss nicht gezeigt werden.*

(c) Zeige nun unter Benutzung von (b) die Rückrichtung, zeige also, dass wenn $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ gilt, dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren muss.
Bemerkung: Offensichtlich ist dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

[1] (a) gibt reguläre 2 Punkte, (b) und (c) geben jeweils 2 Zusatzpunkte