Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
SoSe 2021

20 Punkte

**Übungen zu: Analysis 1 für Informatik** Blatt 12

# Hinweise zur Abgabe

**Abgabetermin:** 19.07.21, 14:00 Uhr
**Abgabeformat:** Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!
**Sonstiges:** Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an.

# Aufgaben

**1.** Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale (10)

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\,dx$

ii) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)^2}}\,dx$

iii) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

iv) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}\,dx$

v) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)\,dx$

**2.** (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass es dann ein $\xi \in [a,b]$ mit (10)

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

gibt.

**3.** Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch (10)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

für alle $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass $f$ Riemann-integrierbar ist.
*Hinweis: Sie dürfen (müssen aber nicht!) Satz 5.4.3 verwenden. Beachten Sie, dass $f$ aber zunächst unendlich viele Unstetigkeitsstellen hat.*

**4.** i) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar mit $f([a,b]) \subset [-M,M]$ für ein $M > 0$. Sei weiter $g : [-M,M] \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig (siehe Blatt 09, Aufgabe 2). Zeigen Sie, dass dann $g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ebenfalls Riemann integrierbar ist. (8)

ii) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $\exp(f) : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar ist. (2)