24. Mai 2024

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Sabrina Weber

# **Angewandte Stochastik** – Übungsblatt 3

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 24. Mai 2024 um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen vor Beginn der Übung über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als *exakt zwei Dateien* ab: Eine PDF-Datei für die theoretischen Aufgaben und eine R- oder R-Markdown-Datei (Dateiendung *.R* bzw. *.RMD*) für die Programmieraufgaben. Andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Bearbeitet das Übungsblatt in *Gruppen von 3- 4 Personen* und gebt bitte euren jeweiligen Studiengang an. Nur eine Person aus der Gruppe soll das Übungsblatt abgeben. Beachtet außerdem die Hinweise zu den Übungen in Moodle.

## Aufgabe 1 (1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

Betrachte das zweimalige Würfeln eines fairen Würfels. Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ beschreibe die Größere der beiden geworfenen Augenzahlen (d.h. wurde z.B. eine 3 und eine 2 gewürfelt, so hat $X$ den Wert 3).

(a) Gib einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an.

(b) Bestimme die kleinste Menge $C$, so dass $\mathbb{P}(X \in C) = 1$.

(c) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\{p_k\}$ von $X$ mit der Menge $C$ aus Teil (b), d.h. gib für alle $x_k \in C$ jeweils $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ an.

## Aufgabe 2 (2 + 3 = 5 Punkte)

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Hierbei sind $\mathcal{B}([0,1])$ die Borel'sche $\sigma$-Algebra auf dem Intervall $[0,1]$ (d.h. alle Teilmengen von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, die in $[0,1]$ liegen) sowie $\lambda$ das Lebesguemaß auf $[0,1]$, d.h. $\lambda$ ordnet jedem Teilintervall von $[0,1]$ seine Länge zu (insbesondere also $\lambda([0,1]) = 1$. Im Folgenden sei stets $p \in (0,1)$ beliebig aber fest vorgegeben. Konstruiere Zufallsvariablen $X, Y$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ mit

(a) $X \sim \mathrm{Bin}(1, p)$, sowie

(b) $Y \sim \mathrm{Bin}(2, p)$.

Begründe auch, warum es sich bei deiner Wahl um Zufallsvariablen handelt.

## Aufgabe 3  (3 + 1 = 4 Punkte)

Beim Lotto "6 aus 49" betrage der aktuelle Jackpot 15 Millinonen Euro. Es sei bekannt, dass an der nächsten Ziehung 5 Millionen Spieler teilnehmen, von denen jeder jeweils genau einen Tipp abgegeben hat. Den Jackpot gewinnt man, wenn man die "6 Richtigen" und zusätzlich die auf dem Tippschein bereits vorher aufgedruckte Superzahl (eine der Zahlen $0, \dots, 9$) hat.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Spieler den Jackpot gewinnt (der Gewinner ihn also mit keinem anderen Spieler teilen muss), wenn davon ausgegangen wird, dass sowohl die Tipps der Spieler als auch die Superzahl zufällig ist (also ohne System getippt wurde)?

(b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit in (a) auch approximativ mit dem "Gesetz der seltenen Ereignisse". Gib das Ergebnis auf neun Nachkommastellen gerundet an.

## Aufgabe 4  (3 + 2 + 2 = 7 Punkte )

An der Haltestelle "Lehrer Tal" fahren abwechselnd Busse[1] der Linien 2 und 5 zur Universität ab. Teilweise sind die Busse jedoch so voll, dass nicht alle Busse tatsächlich halten. Es sei bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bus der Linie 2 an der Haltestelle "Lehrer Tal" hält $1/3$ ist, während die Wahrscheinlichkeit bei der Linie 5 eine Konstante $p \in (0, 1)$ ist.
Du kommst an der Haltestelle "Lehrer Tal" an, und beschließt, den nächsten Bus, der an der Haltestelle anhält, zur Uni zu nehmen. Laut Fahrplan (von dem wir ausnahmsweise mal davon ausgehen, dass er korrekt ist) ist der nächste Bus ein Bus der Linie 2.

(a) Die Zufallsvariable $X$ sei wie folgt definiert: Für $k \in \mathbb{N}$ beschreibe $\{X = k\}$ das Ereignis "Der $k$-te ankommende Bus ist der erste Bus, der anhält". Bestimme die Zähldichte von $X$. *Hinweis: Unterscheide zwischen k gerade und k ungerade.*

(b) Die Zufallsvariable $Y$ sei die Nummer der Buslinie mit der du an der Uni ankommen wirst, d.h. $Y \in \{2, 5\}$. Bestimme die Zähldichte von $Y$.

(c) Für welchen Wert von $p$ gilt $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 5)$?

## Aufgabe 5  (2 + 2 = 4 Punkte)

Gegeben sei eine Zufallsvariable $X \sim Geo(p)$ für einen Parameter $p \in (0, 1)$, die der geometrischen Verteilung folgt.

(a) Berechne die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $X$.

(b) Zeige, dass die geometrische Verteilung gedächtnislos ist, d.h., es gilt für $n, k = 1, 2, \dots$:

$$P(X = n + k | X > k) = P(X = n) .$$

[1] O.B.d.A. Straßenbahnen sind Busse.

## Statistik

Für die folgende Aufgabe sind die Vorlesungsvideos zu Statisik 1-3 relevant.

### Aufgabe 6 (1 + 3 + 2 + 3 = 9 Punkte)

Die folgende Stichprobe beschriebt das Gewicht von 10 Bananen (in Gramm).

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 179 | 172 | 150 | 206 | 198 | 230 | 247 | 205 | 182 | 179 |

(a) Gib die Ordnungsstatistiken an.

(b) Berechne folgende Größen

(i) Arithmetischer Mittelwert

(ii) geometrischer Mittelwert

(iii) harmonischer Mittelwert

(iv) Median

(v) 25%-Quantil

(vi) 75%-Quantil

**Programmieraufgaben**

Lade auf Moodle den kompletten Datensatz *bananas.csv* herunter. Achte bei den folgenden Aufgaben auf eine korrekte Beschriftung der Achsen.

(c) Plotte in R die empirische Verteilungsfunktion der Nettogewichte aller Bananen.

(d) Zeige drei Boxplots, jeweils für das Gewicht der Schalen, das Nettogewicht sowie das Gesamtgewicht der Bananen. Plotte die drei Boxplots in einen Plot.