Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Determinanten

2x2-Matrizen

Die Determinaten von 2x2-Matrizen

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 10$$

3x3 Matrizen

Sarrus: für 3x3 Matrizen.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Beispiel:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{array} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$- 2 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 2$$

$$= 3$$

Entwicklungssatz von Laplace

Satz 9.1.12: Laplacescher[a] Entwicklungssatz

[a]Pierre-Simon Laplace, 1749 - 1827, frz. Mathematiker

(i) Entwicklung nach der i-ten Spalte:

$$\det(a_{ki}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{ki}.$$

(ii) Entwicklung nach der k-ten Zeile:

$$\det(a_{ki}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}.$$

Dabei folgt die zweite Formel durch Betrachtung von $(a_{ki})^{\mathsf{T}}$ und A_{ki} heißt der *Cofaktor* zu a_{ki} in der Matrix (a_{ki}).

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 4 \cdot 3) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + 0 = -11 + 14 = 3$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 4 \cdot 3) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + 0 = -11 + 14 = 3$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & .. \\ - & + & - & + & - & ... \\ + & - & + & - & + & ... \\ \vdots & & ... & ... & & \vdots \end{pmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (-(-3)) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot (-(-3)) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 2 - 3 \cdot 1) \\
&= -6 \cdot 3 \\
&= -18
\end{aligned}
$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 5 \cdot (2 \cdot 3 - 2 \cdot 4) \\
&= -10
\end{aligned}$$

Rechenregeln für Determinanten

Satz 9.1.4: Determinante der transponierten Matrix

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dann gilt $\det A = \det A^{\mathsf{T}}$.

Satz 9.1.5

Es sei $A = (a_{ik}) \in M(n \times n, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

(i) $\det A$ multipliziert sich mit λ, wenn man eine Zeile[a] mit λ multipliziert (siehe auch Aufgabe A.9.1).

(ii) $\det A$ bleibt unverändert, wenn man ein Vielfaches einer Zeile von A zu einer anderen addiert.

(iii) $\det I = 1$.

[a] die Aussagen gelten auch für Spalten, siehe 9.1.6.

Korollar 9.1.6

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dann gilt

(i) $\det A$ ändert bei Zeilenvertauschungen das Vorzeichen.

(ii) $\det A = 0$, falls die Zeilenvektoren von A linear abhängig sind, insbesondere falls zwei gleiche Zeilen oder eine nur aus Nullen bestehende Zeile auftritt.

(iii) Die in den Sätzen 9.1.4, 9.1.5 und dem Korollar 9.1.6 genannten Eigenschaften bezüglich der Zeilen gelten auch für die Spalten.

(iv) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\det \lambda A = \lambda^n \det A$.

Invertierbarkeit

$$A \text{ ist invertierbar } \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Wie bestimmt man die Inverse einer Matrix?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[Z_2'=Z_2-2Z_1]{Z_3'=Z_3-Z_1}$$

Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[Z_2'=Z_2-2Z_1]{Z_3'=Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2'=Z_2-2Z_1]{Z_3'=Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \text{ tauschen } Z_3]{Z_1'=Z_1+\frac{2}{3}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[Z_2'=Z_2-2Z_1]{Z_3'=Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_2 \text{ tauschen } Z_3]{Z_1'=Z_1+\frac{2}{3}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_2'=-Z_2]{Z_3'=\frac{-1}{3}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[Z_2'=Z_2-2Z_1]{Z_3'=Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_2 \text{ tauschen } Z_3]{Z_1'=Z_1+\frac{2}{3}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_2'=-Z_2]{Z_3'=\frac{-1}{3}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_3'=Z_3-Z_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

Kern und Bild

Definition 6.3.1: Bild und Kern

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann heißt der Unterraum

$$\operatorname{Bild} F := F(V) = \{ F(v) \mid v \in V \}$$

von W das *Bild* von F (vergleiche 1.1.8). Die Menge

$$\operatorname{Ker} F := \{ v \in V \mid F(v) = 0 \}$$

heißt der *Kern* von F.

Kern und Bild

Definition 6.3.1: Bild und Kern

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann heißt der Unterraum

$$\operatorname{Bild} F := F(V) = \{ F(v) \mid v \in V \}$$

von W das *Bild* von F (vergleiche 1.1.8). Die Menge

$$\operatorname{Ker} F := \{ v \in V \mid F(v) = 0 \}$$

heißt der *Kern* von F.

Bild: y ist im Bild von F, wenn es ein $v \in V$ gibt mit $y = F(v)$

Kern und Bild

Definition 6.3.1: Bild und Kern

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann heißt der Unterraum

$$\operatorname{Bild} F := F(V) = \{ F(v) \mid v \in V \}$$

von W das *Bild* von F (vergleiche 1.1.8). Die Menge

$$\operatorname{Ker} F := \{ v \in V \mid F(v) = 0 \}$$

heißt der *Kern* von F.

Bild: y ist im Bild von F, wenn es ein $v \in V$ gibt mit $y = F(v)$

Kern: x ist im Kern von F, wenn gilt $F(x) = 0$

Kern einer Matrix

Kern: x ist im Kern von A, wenn gilt $Ax = 0$

Kern einer Matrix

Kern: x ist im Kern von A, wenn gilt $Ax = 0$ Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker A$$

Kern einer Matrix

Kern: x ist im Kern von A, wenn gilt $Ax = 0$ Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker A$$

Kern einer Matrix

Beispiel 1: Sei $x \in \ker A$. Zeige $A(y + x) = Ay$.

Beispiel 1: Sei $x \in \ker A$. Zeige $A(y + x) = Ay$.

$$A(y + x) = Ay + \underbrace{Ax}_{=0} = Ay$$

Kern einer Matrix

Beispiel 1: Sei $x \in \ker A$. Zeige $A(y + x) = Ay$.

$$A(y + x) = Ay + \underbrace{Ax}_{=0} = Ay$$

Beispiel 2: Sei $x, y \in \ker A$. Zeige $z = x + y \in \ker A$:

Kern einer Matrix

Beispiel 1: Sei $x \in \ker A$. Zeige $A(y+x) = Ay$.

$$A(y+x) = Ay + \underbrace{Ax}_{=0} = Ay$$

Beispiel 2: Sei $x, y \in \ker A$. Zeige $z = x + y \in \ker A$:

Zu zeigen: $Az = 0$

$$Az = A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

Beispiel 3: Sei $x \in \ker A$ und y löst $Ay = b$. Zeige $z = x + y$ löst $Az = b$:

Beispiel 3: Sei $x \in \ker A$ und y löst $Ay = b$. Zeige $z = x + y$ löst $Az = b$:

Zu zeigen: $Az = b$

$$Az = A(x + y) = \underbrace{Ax}_{=0} + Ay = 0 + b = b$$

Beispiel 4: Sei $x \in \ker A$. Zeige $z = 2x \in \ker A$.

Beispiel 3: Sei $x \in \ker A$ und y löst $Ay = b$. Zeige $z = x + y$ löst $Az = b$:

Zu zeigen: $Az = b$

$$Az = A(x+y) = \underbrace{Ax}_{=0} + Ay = 0 + b = b$$

Beispiel 4: Sei $x \in \ker A$. Zeige $z = 2x \in \ker A$.

Zu zeigen: $Az = 0$

$$Az = A(2x) = 2Ax = 2 \cdot 0 = 0$$

Wie finde ich den Kern?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{löse } Ax = 0$$

Forme um in die Zeilenstufenform:

Wie finde ich den Kern?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{löse } Ax = 0$$

Forme um in die Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[Z_3' = Z_3 - Z_2 - Z_1]{Z_2' = Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wie finde ich den Kern?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{löse } Ax = 0$$

Forme um in die Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3' = Z_3 - Z_2 - Z_1]{Z_2' = Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(I)\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$(II)\ x_2 - 2x_3 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 2x_3$

$\Rightarrow x_1 + 2x_3 + 2x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -4x_3$

Wie finde ich den Kern?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{löse } Ax = 0$$

Forme um in die Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[Z_3'=Z_3-Z_2-Z_1]{Z_2'=Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(I)\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
$(II)\ x_2 - 2x_3 = 0$
$\Rightarrow x_2 = 2x_3$
$\Rightarrow x_1 + 2x_3 + 2x_3 = 0$
$\Rightarrow x_1 = -4x_3$

Wähle $x_3 = 1 \ \Rightarrow \ x_2 = 2, \ x_1 = -4$

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = c \cdot (1, 2, -4)^T\}$$

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Differentialgleichungen

DGLs

- Lineare DGL
- Bernoullische DGL
- DGL mit getrennten Variablen

Lineare DGL

Satz 13.2.1: Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\xi \in I$ kein Randpunkt von I. Es seien weiter $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\eta \in \mathbb{R}$. Für

$$y_0 : I \to \mathbb{R},\ y_0(x) := \exp\left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right),$$

$$y : I \to \mathbb{R},\ y(x) := \left(\eta + \int_\xi^x \frac{g(t)}{y_0(t)}dt\right) \cdot y_0(x)$$

gilt dann

(i) y_0 löst das Anfangswertproblem $y' = f(x)y$, $y(\xi) = 1$ und

(ii) y löst das Anfangswertproblem $y' = f(x)y + g(x)$, $y(\xi) = \eta$.

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Lineare DGL

Lineare DGL können auf die Form gebracht werden:

$$y' = f(x)y + g(x)$$

Für eine homogene lineare DGL gilt $g(x) = 0$. Gilt zusätzlich ein Anfangsbedigung, sieht das Anfangswertproblem so aus:

$$y' = f(x)y \qquad y(\xi) = 1$$

Dann löst y_0 das AWP:

$$y_0(x) = \exp\left(\int_{\xi}^{x} f(t)\ dt\right)$$

AWP mit homogener DGL

$$y' = f(x)y \quad y(\xi) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y_0(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\ dt\right)$$

Wieso muss $y(\xi) = 1$ gelten?
Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$

$$y_0(x) = \exp\left(F(x) - F(\xi)\right) \quad \Rightarrow \quad y_0(\xi) = \exp(F(\xi) - F(\xi)) = e^0 = 1$$

AWP mit homogener DGL

$$y' = f(x)y \quad y(\xi) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y_0(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\ dt\right)$$

Wieso muss $y(\xi) = 1$ gelten?
Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$

$$y_0(x) = \exp\left(F(x) - F(\xi)\right) \quad \Rightarrow \quad y_0(\xi) = \exp(F(\xi) - F(\xi)) = e^0 = 1$$

Was wäre für das AWP mit $y(\xi) = c$ für $c \in \mathbb{R}$?

AWP mit homogener DGL

$$y' = f(x)y \quad y(\xi) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y_0(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\ dt\right)$$

Wieso muss $y(\xi) = 1$ gelten?
Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$

$$y_0(x) = \exp\left(F(x) - F(\xi)\right) \quad \Rightarrow \quad y_0(\xi) = \exp(F(\xi) - F(\xi)) = e^0 = 1$$

Was wäre für das AWP mit $y(\xi) = c$ für $c \in \mathbb{R}$?

$$y_0(x) = c \exp\left(\int_\xi^x f(t)dt\right)$$

ist auch Lösung der homogenen DGL und $y_0(\xi) = c$

Beispiel homogene DGL

$$(1 + x^2)y' = 2xy \qquad y(0) = 3$$

Bringe auf die richtige Form:

$$y' = \underbrace{\frac{2x}{1 + x^2}}_{=f(x)} y \qquad y(0) = 3$$

Verwende die Lösungsformel mit $\xi = 0, c = 3$

$$y_0(x) = 3 \exp\left(\int_0^x \frac{2t}{1 + t^2} dt\right) = 3 \exp\left(\int_1^{1+x^2} \frac{1}{u} du\right) = 3 \exp\left(\ln|1 + x^2|\right)$$

Substitution: $u = 1 + t^2,\ u' = 2t$

$$y_0(x) = 3(1 + x^2)$$

Inhomogene Lineare DGL, AWP

AWP der Form:

$$y' = f(x)y + g(x) \qquad y(\xi) = \eta$$

Löse dafür zunächst die homogene DGL und bestimme y_0.

Dann löst $y(x)$ das AWP.

$$y(x) = \left(\eta + \int_\xi^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt\right) \cdot y_0(x)$$

Beispiel inhomogene DGL, AWP

$$y' = \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{=f(x)} y + \underbrace{4x}_{g(x)} \qquad y(0) = 2$$

Löse das homogene DGL mit $\xi = 0$, **ohne** c$=$ 2:

$$y_0(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt\right) = (1 + x^2)$$

Beispiel inhomogene DGL, AWP

$$y' = \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{=f(x)} y + \underbrace{4x}_{g(x)} \qquad y(0) = 2$$

Löse das homogene DGL mit $\xi = 0$, **ohne** c$=$ 2:

$$y_0(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt\right) = (1+x^2)$$

Anschließend löse das inhomogene mit $\eta = 2$

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(2 + \int_0^x \frac{4t}{1+t^2}dt\right)(1+x^2) \\ &= \left(2 + 2\int_1^{1+x^2} \frac{1}{u}du\right)(1+x^2) \\ &= \left(2 + 2\ln|1+x^2|\right)(1+x^2) \end{aligned}$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$(1+x)y' = y - 1 + x^2 \qquad y(0) = 3 \qquad \text{für } x \in (0, \infty)$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$(1+x)y' = y - 1 + x^2 \qquad y(0) = 3 \qquad \text{für } x \in (0, \infty)$$

Forme um:

$$y' = \frac{1}{1+x}y - \underbrace{\frac{1-x^2}{1+x}}_{=1-x}$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$(1+x)y' = y - 1 + x^2 \qquad y(0) = 3 \qquad \text{für } x \in (0,\infty)$$

Forme um:

$$y' = \frac{1}{1+x}y - \underbrace{\frac{1-x^2}{1+x}}_{=1-x}$$

Löse zunächst die homogene DGL

$$y_0(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{1}{1+t}dt\right) = \exp(\ln|(1+x)|) = |1+x|$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$(1+x)y' = y - 1 + x^2 \qquad y(0) = 3 \qquad \text{für } x \in (0, \infty)$$

Forme um:

$$y' = \frac{1}{1+x}y - \underbrace{\frac{1-x^2}{1+x}}_{=1-x}$$

Löse zunächst die homogene DGL

$$y_0(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{1}{1+t}dt\right) = \exp(\ln|(1+x)|) = |1+x|$$

Löse nun das AWP mit $\eta = 3$

$$y(x) = \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t}dt\right)(1+x)$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$y(x) = \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t} dt\right)(1+x)$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t}dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t-2}{1+t}dt\right)(1+x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t}\,dt\right)(1+x)\\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t-2}{1+t}\,dt\right)(1+x)\\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t}{1+t} + \int_0^x \frac{-2}{1+t}\,dt\right)(1+x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t}{1+t} + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x 1 \; dt + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t}{1+t} + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x 1 \; dt + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \Big[t\Big]_0^x + \Big[-2\ln(1+t)\Big]_0^x\right)(1+x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t}{1+t} + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x 1 \; dt + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \Big[t\Big]_0^x + \Big[-2\ln(1+t)\Big]_0^x\right)(1+x) \\
y(x) &= \Big(3 + x - 2\ln(1+x)\Big)(1+x)
\end{aligned}
$$

Bernoullische DGL

Form:

$$y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha} \qquad y(\xi) = \eta$$

Trick: Substituiere mit $z = y^{1-\alpha}$.

$$z' = \left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$$

Bernoullische DGL

Form:

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \qquad y(\xi) = \eta$$

Trick: Substituiere mit $z = y^{1-\alpha}$.

$$z' = \left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$$

Teile die DGL durch y^α und multipliziere mit $(1-\alpha)$.

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha} &= (1-\alpha)\Big(f(x)y^{1-\alpha} + g(x)\Big)\\ z' &= (1-\alpha)f(x)\, z + (1-\alpha)g(x)\end{aligned}$$

Bernoullische DGL

Form:

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \qquad y(\xi) = \eta$$

Trick: Substituiere mit $z = y^{1-\alpha}$.

$$z' = \left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$$

Teile die DGL durch y^α und multipliziere mit $(1-\alpha)$.

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha} &= (1-\alpha)\Big(f(x)y^{1-\alpha} + g(x)\Big)\\ z' &= (1-\alpha)f(x)\,z + (1-\alpha)g(x)\\ z' &= \tilde{f}(x)z + \tilde{g}(x)\end{aligned}$$

Bernoullische DGL

Form:

$$y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha} \qquad y(\xi) = \eta$$

Trick: Substituiere mit $z = y^{1-\alpha}$.

$$z' = \left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$$

Teile die DGL durch y^{α} und multipliziere mit $(1-\alpha)$.

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}} &= (1-\alpha)\Big(f(x)y^{1-\alpha} + g(x)\Big)\\ z' &= (1-\alpha)f(x)\,z + (1-\alpha)g(x)\\ z' &= \tilde{f}(x)z + \tilde{g}(x)\end{aligned}$$

Lineare inhomogene DGL: Löse für z und Substituiere zurück: $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \qquad y(1) = 4$$

Wir identifizieren: $\alpha = \frac{1}{2},\ f(x) = 0,\ g(x) = 1.$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \qquad y(1) = 4$$

Wir identifizieren: $\alpha = \frac{1}{2},\ f(x) = 0,\ g(x) = 1.$

Teile die DGL durch $y^{\frac{1}{2}} = y^{1-\alpha}$ und Multipliziere mit $\frac{1}{2} = 1 - \alpha$.
Substituiere $z = y^{1-\alpha} = y^{\frac{1}{2}}$

$$z' = \frac{1}{2} = \tilde{g}(x)$$

Also $z' = \frac{1}{2}$.

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \qquad y(1) = 4$$

Wir identifizieren: $\alpha = \frac{1}{2},\ f(x) = 0,\ g(x) = 1.$

Teile die DGL durch $y^{\frac{1}{2}} = y^{1-\alpha}$ und Multipliziere mit $\frac{1}{2} = 1 - \alpha$.
Substituiere $z = y^{1-\alpha} = y^{\frac{1}{2}}$

$$z' = \frac{1}{2} = \tilde{g}(x)$$

Also $z' = \frac{1}{2}$. Die homogene Lösung ist trivial.
$z_0(x) = \exp\left(\int_1^x 0dt\right) = e^0 = 1$
Also bestimme die inhomogene Lösung

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \qquad y(1) = 4$$

Wir identifizieren: $\alpha = \frac{1}{2},\ f(x) = 0,\ g(x) = 1.$

Teile die DGL durch $y^{\frac{1}{2}} = y^{1-\alpha}$ und Multipliziere mit $\frac{1}{2} = 1 - \alpha$.
Substituiere $z = y^{1-\alpha} = y^{\frac{1}{2}}$

$$z' = \frac{1}{2} = \tilde{g}(x)$$

Also $z' = \frac{1}{2}$. Die homogene Lösung ist trivial.
$z_0(x) = \exp\left(\int_1^x 0 dt\right) = e^0 = 1$
Also bestimme die inhomogene Lösung mit $\xi = 1,\ \eta = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

$$z(x) = \left(2 + \int_0^x \frac{1}{2} dt\right) \cdot 1 = \left(2 + \frac{x-1}{2}\right) = \frac{x+3}{2}$$

$$y(x) = z^2 = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2$$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.$

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

$$z_0(x) = \exp\left(\int_0^x -3t^4 dt\right) = \exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)$$

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

$$z_0(x) = \exp\left(\int_0^x -3t^4 dt\right) = \exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)$$

$$z(x) = \left(1 + \int_0^x -3t^4 e^{\frac{3}{5}t^5} dt\right) e^{-\frac{3}{5}x^5}$$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

$$z_0(x) = \exp\left(\int_0^x -3t^4 dt\right) = \exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)$$

$$z(x) = \left(1 + \int_0^x -3t^4 e^{\frac{3}{5}t^5} dt\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} = \left(1 + \int_0^{\frac{3}{5}x^5} -e^u du\right) e^{-\frac{3}{5}x^5}$$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

$$z_0(x) = \exp\left(\int_0^x -3t^4 dt\right) = \exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)$$

$$z(x) = \left(1 + \int_0^x -3t^4 e^{\frac{3}{5}t^5} dt\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} = \left(1 + \int_0^{\frac{3}{5}x^5} -e^u du\right) e^{-\frac{3}{5}x^5}$$
$$= \left(1 - e^{\frac{3}{5}x^5} + 1\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} = 2e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1$$

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

$$z_0(x) = \exp\left(\int_0^x -3t^4 dt\right) = \exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)$$

$$\begin{aligned} z(x) &= \left(1 + \int_0^x -3t^4 e^{\frac{3}{5}t^5} dt\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} = \left(1 + \int_0^{\frac{3}{5}x^5} -e^u du\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} \\ &= \left(1 - e^{\frac{3}{5}x^5} + 1\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} = 2e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1 \\ y(x) &= z^{-\frac{1}{3}} = \left(2e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1\right)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Getrennte Variablen

Form:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad y(\xi) = \eta \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Trick: Substitutionsregel:

Satz 12.1.10: Substitutionsregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle, $f : I \to J$ differenzierbar und $g : J \to \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion im Intervall J, dann besitzt die Funktion $g \circ f \cdot f' : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion und für $t \in I$ gilt die *Substitutionsregel*

$$\int g(x)\,dx\Big|_{x=f(t)} = \int g(f(t))f'(t)\,dt.$$

$u = y(t),\ u' = y'(t)$:

$$\int_\xi^x \frac{y'(t)}{g(y(t))}dt = \int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(u)}du \quad \Rightarrow \quad \int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(u)}du = \int_\xi^x f(t)dt$$

Beispiel: Getrennte Variablen

$$y' = x(1+y) \qquad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1+y} = x$$

Beispiel: Getrennte Variablen

$$y' = x(1+y) \qquad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1+y} = x$$

Wir identifizieren: $g(y) = 1 + y,\ f(x) = x,\ \xi = 0.$

$$\int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{\xi}^{x} f(t) dt$$

Einsetzen:

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{1+u} du = \Big[\ln|1+u|\Big]_0^{y(x)} = \ln(1 + y(x))$$

$$\int_0^x t\ dt = \frac{1}{2}x^2$$

Beispiel: Getrennte Variablen

$$y' = x(1+y) \qquad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1+y} = x$$

Wir identifizieren: $g(y) = 1 + y,\ f(x) = x,\ \xi = 0.$

$$\int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{\xi}^{x} f(t) dt$$

Einsetzen:

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{1+u} du = \Big[\ln|1+u|\Big]_0^{y(x)} = \ln(1+y(x))$$

$$\int_0^x t\ dt = \frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(1+y(x)) = \frac{1}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{2}x^2} = 1 + y(x)$$

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$$

Aufgabe: Getrennte Variablen

$$y' = e^y \ \sin(x)$$

Aufgabe: Getrennte Variablen

$$y' = e^y \ \sin(x)$$

Wir identifizieren $g(y) = e^y, \ f(x) = \sin(x)$. Kein AWP, also unbestimmte $\xi, \ \eta$.

$$\int_{\eta}^{y(x)} \frac{1}{-e^u} du = \left[e^{-u}\right]_{\eta}^{y(x)} = -e^{y(x)} + e^{-\eta}$$

$$\int_{\xi}^{x} \sin(t) dt = -\cos(x) + \cos(\xi)$$

Aufgabe: Getrennte Variablen

$$y' = e^y \ \sin(x)$$

Wir identifizieren $g(y) = e^y,\ f(x) = \sin(x)$. Kein AWP, also unbestimmte $\xi,\ \eta$.

$$\int_\eta^{y(x)} \frac{1}{-e^u} du = \left[e^{-u}\right]_\eta^{y(x)} = -e^{y(x)} + e^{-\eta}$$

$$\int_\xi^x \sin(t) dt = -\cos(x) + \cos(\xi)$$

$$-e^{y(x)} + e^{-\eta} = -\cos(x) + \cos(\xi) \ \Leftrightarrow \ e^{y(x)} = \cos(x) \underbrace{-\cos(\xi) - e^\eta}_{=c\in\mathbb{R}}$$

$$y(x) = \ln(\cos(x) + c)$$

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisieren

Eigenwerte

Definition 9.3.1: Eigenwert und Eigenvektor

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und weiter sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Eine reelle oder komplexe Zahl λ

heißt *Eigenwert* von F, wenn es einen Vektor $x \in V$, $x \neq 0$, gibt mit

$$Fx = \lambda x. \tag{9.7}$$

x heißt dann *Eigenvektor* von F zum Eigenwert λ.

Definition 9.3.4: Charakteristisches Polynom

$$P_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) \text{ beziehungsweise } P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

heißt das *charakteristische Polynom* von F beziehungsweise A.

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det\big(A - \lambda I\big) \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2 - 4(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0$$

Die Nullstellen sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2 - 4(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0$$

Die Nullstellen sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$ Das bedeutet auch

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2 - 4(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0$$

Die Nullstellen sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_A = \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2 - 4(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0$$

Die Nullstellen sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$
Eigenvektoren bestimmen:

$$[A - \lambda_i I]\vec{x}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \stackrel{\lambda_1=-1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\lambda_1=-1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_3'=3Z_3-2Z_1]{Z_2'=3Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{array}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \stackrel{\lambda_1=-1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3'=3Z_3-2Z_1]{Z_2'=3Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{array}$$

Ein x_i darf immer gewählt werden: Wähle $x_1 = 1$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \stackrel{\lambda_2=2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\lambda_2=2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3'=Z_3-2Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_2+3x_3=0 \\ x_2=-\frac{3}{2}x_3 \\ x_1=-x_3 \end{array}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\lambda_2=2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{Z_3'=Z_3-2Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2x_2+3x_3=0 \\ x_2=-\frac{3}{2}x_3 \\ x_1=-x_3 \end{array}$$

Ein x_i darf immer gewählt werden: Wähle $x_1 = 1$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \overset{\lambda_3=4}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\lambda_3=4} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_3'=Z_3+Z_1]{Z_2'=2Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = \frac{5}{2}x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 = 8x_3 \end{array}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Lösen eines homogenen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_i & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda_i & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\lambda_3=4} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_3'=Z_3+Z_1]{Z_2'=2Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = \frac{5}{2}x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 = 8x_3 \end{array}$$

Ein x_i darf immer gewählt werden: Wähle $x_3 = 1$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{A besitzt die Eigenwerte} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_2 &= 2, \\ \lambda_3 &= 4 \end{aligned}$$

Und die Eigenvektoren:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{A besitzt die Eigenwerte} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 2, \\ \lambda_3 = 4 \end{array}$$

Und die Eigenvektoren:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

A ist diagonalisierbar, mit $B^{-1}AB = D$ mit

$$B = (\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Eigenraum und Vielfachheit (I)

Definition 9.4.8: Vielfachheiten und Eigenraum

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine m-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

(i) m die *algebraische Vielfachheit* von λ_0,

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) =: \dim N_{\lambda_0}$ *geometrische Vielfachheit* von λ_0 und

(iii) $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{ v \mid Av = \lambda_0 v \} = N_{\lambda_0}$ der *Eigenraum* von A zu λ_0.

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Eigenraum und Vielfachheit (I)

Definition 9.4.8: Vielfachheiten und Eigenraum

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine m-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

(i) m die *algebraische Vielfachheit* von λ_0,

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) \;=:\; \dim N_{\lambda_0}$ *geometrische Vielfachheit* von λ_0 und

(iii) $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{ v \mid Av = \lambda_0 v \} = N_{\lambda_0}$ der *Eigenraum* von A zu λ_0.

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

algebraische Vielfachheit: Erkenne ich am charakteristischen Polynom.

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot (t - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots$$

algebraische Vielfachheit vom Eigenwert λ_1 ist m_1.

Algebraische Vielfachheit

algebraische Vielfachheit: Erkenne ich am charakteristischen Polynom.

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot (t - \lambda_2)^{m_2} \cdot ...$$

algebraische Vielfachheit vom Eigenwert λ_1 ist m_1.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 \quad \text{Eigenwert: } \lambda_1 = 1$$

Die algebraische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$ ist 2.

Eigenraum und Vielfachheit (II)

Definition 9.4.8: Vielfachheiten und Eigenraum

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine m-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

(i) m die *algebraische Vielfachheit* von λ_0,

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) =: \dim N_{\lambda_0}$ *geometrische Vielfachheit* von λ_0 und

(iii) $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{ v \mid Av = \lambda_0 v \} = N_{\lambda_0}$ der *Eigenraum* von A zu λ_0.

Abbildung 1.3: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

geometrische Vielfachheit: Erkenne ich an der Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren vom Eigenwert λ.

Finde ich für einen Eigenwert λ 3 l.u. Eigenvektoren, dann ist die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts 3.

Geometrische Vielfachheit

geometrische Vielfachheit: Erkenne ich an der Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren vom Eigenwert λ.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \quad \text{Eigenwert: } \lambda_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ x = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

Der Eigenwert $\lambda_1 = 1$ besitzt nur einen linear unabhängigen Eigenvektor. Seine geometrische Vielfachheit ist 1.

Eigenraum und Vielfachheit

Definition 9.4.8: Vielfachheiten und Eigenraum

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ eine m-fache Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dann heißt

(i) m die *algebraische Vielfachheit* von λ_0,

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) =: \dim N_{\lambda_0}$ *geometrische Vielfachheit* von λ_0 und

(iii) $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = \{ v \mid Av = \lambda_0 v \} = N_{\lambda_0}$ der *Eigenraum* von A zu λ_0.

Abbildung 1.4: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Eigenraum: Ist der Raum, der von den Eigenvektoren aufgespannt wird. Ein Eigenraum gehört zu einem Eigenwert.

Seien $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_1$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ, dann ist
$N_\lambda = \{\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

Eigenraum

Seien $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_1$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ, dann ist
$N_\lambda = \{\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3 \quad \text{einziger Eigenwert: } \lambda_1 = 1$$

Eigenvektoren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenraum:

$$N_{\lambda_1} = \left\{ x = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Diagonalisierbarkeit und Vielfachheit

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn
n = Summe der l.u. Eigenvektoren
aller Eigenwerte ist.

Diagonalisierbarkeit und Vielfachheit

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn
n = Summe der l.u. Eigenvektoren
aller Eigenwerte ist.

Anders Ausgedrückt die
Summe der geometrischen Vielfachheiten = n

Diagonalisierbarkeit und Vielfachheit

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn
n = Summe der l.u. Eigenvektoren
aller Eigenwerte ist.

Anders Ausgedrückt die
Summe der geometrischen Vielfachheiten = n

In diesem Fall gilt auch immer
algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit
für alle Eigenwerte.

Diagonalisierbarkeit und Vielfachheit

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn
n = Summe der l.u. Eigenvektoren
aller Eigenwerte ist.

Anders Ausgedrückt die
Summe der geometrischen Vielfachheiten = n

In diesem Fall gilt auch immer
algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit
für alle Eigenwerte.

Hat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **n paarweise verschiedene Eigenwerte**, dann ist A diagonalisierbar.

Eigenraum und Vielfachheit

Jede Linearkombination von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert ist wieder ein Eigenvektor.

Eigenraum und Vielfachheit

Jede Linearkombination von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert ist wieder ein Eigenvektor.
Seien $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ Eigenvektoren zum EW λ.

$$A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1 \ , \quad A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2 \quad \text{Zu zeigen:} \quad \vec{v}_3 = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \text{ ist ein EV}$$

Also

$$A\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_3$$

Eigenraum und Vielfachheit

Jede Linearkombination von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert ist wieder ein Eigenvektor.
Seien $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ Eigenvektoren zum EW λ.

$$A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1 \ , \quad A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2 \quad \text{Zu zeigen:} \quad \vec{v}_3 = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \text{ ist ein EV}$$

Also

$$A\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_3$$

$$\begin{aligned} A\vec{v}_3 &= A(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \\ &= a_1 A\vec{v}_1 + a_2 A\vec{v}_2 \\ &= a_1\lambda\vec{v}_1 + a_2\lambda\vec{v}_2 \\ &= \lambda(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \\ &= \lambda\vec{v}_3 \end{aligned}$$

Eigenraum und Vielfachheit

Jede Linearkombination von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert ist wieder ein Eigenvektor.

Seien $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ Eigenvektoren zum EW λ.

$$A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1 \ , \quad A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2 \quad \text{Zu zeigen:} \quad \vec{v}_3 = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \text{ ist ein EV}$$

Also

$$A\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_3$$

$$\begin{aligned} A\vec{v}_3 &= A(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \\ &= a_1 A\vec{v}_1 + a_2 A\vec{v}_2 \\ &= a_1\lambda\vec{v}_1 + a_2\lambda\vec{v}_2 \\ &= \lambda(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \\ &= \lambda\vec{v}_3 \end{aligned}$$

Der Eigenraum beschreibt alle Eigenvektoren zu einem Eigenwert.

Aufgabe: Beweise

Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und gilt $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$,
dann hat A nur den Eigenwert 0.

Aufgabe: Beweise

Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und gilt $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$,
dann hat A nur den Eigenwert 0.

Annahme: A besitzt einen Eigenwert $\lambda \neq 0$ mit EV x

$$\begin{aligned}
A^m x &= A^{m-1} A x = A^{m-1} \lambda x \\
&= \lambda A^{m-2} A x = \lambda A^{m-2} \lambda x \\
&= \lambda^2 A^{m-3} A x = \lambda^2 A^{m-3} \lambda x \\
&\dots \\
&= \lambda^m x = 0
\end{aligned}$$

Da $x \neq 0$ (EV) muss gelten $\lambda^m = 0$. Widerspruch zur Annahme.

Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann haben A und A^T das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte.

Aufgabe: Beweise

Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann haben A und A^T das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte.

Mit der Definition des charakteristischen Polynoms

$$p_{A^T}(\lambda) = \det\left(\lambda I - A^T\right) = \det\left((\lambda I)^T - A^T\right) = \det\left((\lambda I - A)^T\right)$$

Aufgabe: Beweise

Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann haben A und A^T das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte.

Mit der Definition des charakteristischen Polynoms

$$p_{A^T}(\lambda) = \det\left(\lambda I - A^T\right) = \det\left((\lambda I)^T - A^T\right) = \det\left((\lambda I - A)^T\right)$$

Aus der Eigenschaft der Determinanten $\det B = \det B^T$ folgt nun die Aussage.

$$p_{A^T}(\lambda) = \det\left((\lambda I - A)^T\right) \det\left(\lambda I - A\right) = p_A(\lambda)$$

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

18. Juli 2024

Universität Ulm

Integralrechnung

Integrationstechniken

- Standardintegrale (Stammfunktionen 12.1.5)
- Substitution
- partielle Integration
- Hilfstechnik Partialbruchzerlegung

Satz 12.1.10: Substitutionsregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle, $f : I \to J$ differenzierbar und $g : J \to \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion im Intervall J, dann besitzt die Funktion $g \circ f \cdot f' : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion und für $t \in I$ gilt die *Substitutionsregel*

$$\int g(x)\,dx\Big|_{x=f(t)} = \int g(f(t))f'(t)\,dt.$$

Korollar 12.1.11

Ist f auf I umkehrbar, so erhält man durch Einsetzen die häufig nützlichere Form der *Substitutionsregel*:

$$\int g(x)\,dx = \int g(f(t)) \cdot f'(t)\,dt\Big|_{t=f^{-1}(x)}.$$

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Wann verwende ich Substitution?

$$\int g(x)\ dx|_{x=f(t)} = \int g(f(t))f'(t)\ dt$$

Beispiel:
Sei $g_1(u) = \cos(u),\ f(t) = \ln t$ und $f'(t) = \frac{1}{t}$.

$$g(f(t)) \cdot f'(t) = \cos(\ln(t)) \cdot \frac{1}{t}$$

Nach der Substitutionsregel gilt also

$$\int \frac{\cos(\ln t)}{t} dt = \int \cos(x) dx|_{x=\ln(t)} = \sin(\ln(t))$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x)dx$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

$$g(u) = u^4,\ f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

$$g(u) = u^4,\ f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

$$g(u) = u^4,\ f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$g(u) = \tfrac{1}{\sqrt{u}},\ f(x) = 1 + x^2,\ f'(x) = 2x$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

$$g(u) = u^4,\ f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$g(u) = \tfrac{1}{\sqrt{u}},\ f(x) = 1 + x^2,\ f'(x) = 2x$$

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$$

Wann verwende ich Substitution

$$\int \sin(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

$$g(u) = u^4,\ f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$g(u) = \tfrac{1}{\sqrt{u}},\ f(x) = 1 + x^2,\ f'(x) = 2x$$

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$$

$$g(u) = u,\ f(x) = \arctan(x),\ f'(x) = \tfrac{1}{1+x^2}$$

Anwendung: Substitution

$$\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx$$

Anwendung: Substitution

$$\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx$$

Wir sehen $f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$.

Substituieren mit $u = \cos(x),\ u' = -\sin(x)$

Anwendung: Substitution

$$\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx$$

Wir sehen $f(x) = \cos(x), \; f'(x) = -\sin(x)$.

Substituieren mit $u = \cos(x), \; u' = -\sin(x)$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx &= \int \frac{\sin(x)}{\exp(u)} \frac{du}{-\sin(x)} \\ &= \int \frac{-1}{e^u} du \\ &= e^{-u} \end{aligned}$$

Anwendung: Substitution

$$\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx$$

Wir sehen $f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$.

Substituieren mit $u = \cos(x),\ u' = -\sin(x)$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx &= \int \frac{\sin(x)}{\exp(u)} \frac{du}{-\sin(x)} \\ &= \int \frac{-1}{e^u} du \\ &= e^{-u}\end{aligned}$$

Rücksubstituieren $u = \cos(x)$

$$\int \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} dx = e^{-\cos(x)}$$

Partielle Integration

Satz 12.1.8: Partielle Integration

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in I und die Funktion $f \cdot g'$ besitze eine Stammfunktion in I. Dann hat auch $f' \cdot g$

eine Stammfunktion und es gilt

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Beispiele 12.1.9. (i) (a) Wir bestimmen $\int xe^x\,dx$ mit Hilfe partieller Integration. Dafür wählen wir $f(x) = e^x$ mit $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x$ mit $g'(x) = 1$ und erhalten so

$$\int \underbrace{x}_{=g(x)} \underbrace{e^x}_{=f'(x)}\,dx = \underbrace{xe^x}_{f(x)g(x)} - \int \underbrace{1}_{=g'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{=f(x)}\,dx = xe^x - e^x.$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Wann verwende ich partielle Integration?

Eine Funktion mit bekannter Stammfunktion $f'(x)$, eine mit bekannter Ableitung $g(x)$.

$$\int x \ln(x) dx$$

Wann verwende ich partielle Integration?

Eine Funktion mit bekannter Stammfunktion $f'(x)$, eine mit bekannter Ableitung $g(x)$.

$$\int x \ln(x) dx$$

$f'(x) = x,\ g(x) = \ln(x)$.

$$\begin{aligned}
\int x \ln(x) dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2} x dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \\
&= x^2 \left(\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} \right)
\end{aligned}$$

Wann verwende ich partielle Integration?

Eine Funktion mit bekannter Stammfunktion $f'(x)$, eine mit bekannter Ableitung $g(x)$.

$$\int x^2 e^{2x} dx$$

$f'(x) = e^{2x},\ g(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x} dx &= x^2 \frac{1}{2} e^{2x} - \int 2x \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ \text{(nochmal PI)} \qquad &= x^2 e^{2x} - x\frac{1}{2} e^{2x} + \int e^{2x} dx \\ &= xe^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} \end{aligned}$$

Aufgabe: Integration

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx$$

$\frac{d}{dx}\cos(x^2) = -2x\sin(x^2)$

Aufgabe: Integration

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx$$

$\frac{d}{dx}\cos(x^2) = -2x\sin(x^2)$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx = \int_{\cos(0^2)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{e^u}\,du$$

Aufgabe: Integration

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}dx$$

$\frac{d}{dx}\cos(x^2) = -2x\sin(x^2)$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}dx &= \int_{\cos(0^2)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{e^u}du \\ &= \left[e^{-u}\right]_1^{-1}\end{aligned}$$

Aufgabe: Integration

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx$$

$\frac{d}{dx}\cos(x^2) = -2x\sin(x^2)$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx &= \int_{\cos(0^2)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{e^u}\,du \\ &= \left[e^{-u}\right]_1^{-1} \\ &= e - \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen 12.2.8. Aufgrund der Linearität des Integrals und der reellen Partialbruchzerlegung genügt es nun offenbar, Ausdrücke der Form

$$\frac{1}{(x-c)^n}, \quad \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}, \quad \frac{x}{(x^2+bx+c)^n} \tag{12.2}$$

mit Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in \mathbb{R}\left(x^2+bx+c \neq 0\right)$ zu integrieren. Es gilt

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-c} = \ln|x-c|.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-c)^{n-1}}$ für $n > 1$.

(iii)
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+bx+c} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4}} \\
&= \frac{4}{4c-b^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.
\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+bx+c} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx - \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x^2+bx+c} \\
&= \frac{1}{2} \ln|x^2+bx+c| - \frac{b}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.
\end{aligned}$$

Abbildung 1.3: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Rationale Funktionen. zu (iii)

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4c - b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c - b^2}}$$

Rationale Funktionen. zu (iii)

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4c - b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c - b^2}}$$

$$x^2 + bx + c = \underbrace{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}_{= x^2 + bx + \frac{b^2}{4}} - \frac{b^2}{4} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= \underbrace{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}_{=x^2+bx+\frac{b^2}{4}} - \frac{b^2}{4} + c \\ &= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4} \end{aligned}$$

Rationale Funktionen. zu (iii)

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4c - b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c - b^2}}$$

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= \underbrace{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}_{= x^2 + bx + \frac{b^2}{4}} - \frac{b^2}{4} + c \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4} \\ &= \frac{4c - b^2}{4} \left[\frac{4}{4c - b^2} \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

Rationale Funktionen. zu (iii)

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$\begin{aligned}
x^2+bx+c &= \underbrace{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}_{=x^2+bx+\frac{b^2}{4}} - \frac{b^2}{4} + c \\
&= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4} \\
&= \frac{4c-b^2}{4}\left[\frac{4}{4c-b^2}\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + 1\right] \\
&= \frac{4c-b^2}{4}\left[\underbrace{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2}_{=u^2} + 1\right]
\end{aligned}$$

Rationale Funktionen: zu (iii)

$$x^2 + bx + c = \frac{4c - b^2}{4}\left[\underbrace{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2}_{=u^2} + 1\right]$$

$$u = \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \int \frac{4}{4c-b^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2} dx$$

Rationale Funktionen: zu (iii)

$$x^2 + bx + c = \frac{4c - b^2}{4} \left[\underbrace{\left(\frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right)^2}_{=u^2} + 1 \right]$$

$$u = \frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{\sqrt{4c - b^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \int \frac{4}{4c - b^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} \right)^2} dx$$

$$= \frac{4}{4c - b^2} \underbrace{\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}}_{=\frac{1}{u'}} \int \frac{1}{1 + u^2} du$$

Rationale Funktionen: zu (iii)

$$x^2 + bx + c = \frac{4c - b^2}{4}\left[\underbrace{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2}_{=u^2} + 1\right]$$

$$u = \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{4}{4c-b^2} \frac{1}{1+\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{4}{4c-b^2} \underbrace{\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}}_{=\frac{1}{u'}} \int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$$

Rationale Funktionen

Integration rationaler Funktionen 12.2.8. Aufgrund der Linearität des Integrals und der reellen Partialbruchzerlegung genügt es nun offenbar, Ausdrücke der Form

$$\frac{1}{(x-c)^n}, \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}, \frac{x}{(x^2+bx+c)^n} \tag{12.2}$$

mit Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in \mathbb{R}\left(x^2+bx+c \neq 0\right)$ zu integrieren. Es gilt

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-c} = \ln|x-c|.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-c)^{n-1}}$ für $n > 1$.

(iii)
$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4}}$$
$$= \frac{4}{4c-b^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2 + 1}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.$$

(iv)
$$\int \frac{x}{x^2+bx+c} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx - \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$
$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+bx+c| - \frac{b}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}.$$

Abbildung 1.4: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Rationale Funktionen: zu (iv)

$$\frac{x}{x^2+bx+c} = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}(2x+b)}^{x+\frac{b}{2}} - \frac{b}{2}}{x^2+bx+c}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x+b}{x^2+bx+c} - \frac{b}{2}\frac{1}{x^2+bx+c}$$

Rationale Funktionen: zu (iv)

$$\frac{x}{x^2+bx+c} = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}(2x+b)}^{x+\frac{b}{2}} - \frac{b}{2}}{x^2+bx+c}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x+b}{x^2+bx+c} - \frac{b}{2}\frac{1}{x^2+bx+c}$$

Substituiere also $u = x^2+bx+c, \; u' = 2x+b$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+bx+c|$$

Und aus dem hinteren Integral wie vorher.

$$\frac{b}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

Beispiel

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$$

Beispiel

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$$

Forme das Polynom um

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + 1 \right)$$
$$= 2 \cdot \left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)$$

Beispiel

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

Forme das Polynom um

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}(x+1)^2+1\right)$$
$$= 2\cdot\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{1}{2}\ \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan u$$

Substituiert mit $u = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$, $u' = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Lineare Gleichungssysteme

Homogene und inhomogene Gleichungen

Definition 7.4.1: Bezeichnungen in Gleichungssystemen

Ein lineares Gleichungssystem, in dem alle Koeffizienten b_i der rechten Seite gleich 0 sind heißt *homogen*. Ist wenigstens ein $b_i \neq 0$, so heißt das Gleichungssystem *inhomogen*. Es sei (I) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{I}$$

Ferner sei (H) das zu (I) gehörige homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{H}$$

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Bei Matrix: m Anzahl an Zeilen, n Anzahl an Spalten

Lösbarkeit

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Definition 6.3.4: Rang und Defekt

Die Dimensionen von $\operatorname{Bild} F$ und $\operatorname{Ker} F$ erhalten besondere Namen:

(i) $\operatorname{rg} F := \dim \operatorname{Bild} F$, der *Rang* von F und

(ii) $\operatorname{def} F := \dim \operatorname{Ker} F$, der *Defekt* von F.

Abbildung 1.3: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Lösbarkeit

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.4: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 3$$

$\Rightarrow$ Gleichung $Ax = b$ ist **lösbar**

Lösbarkeit (II)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.5: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 3$$

$\Rightarrow$ Gleichung $Ax = b$ ist **nicht lösbar**

Lösbarkeit (III)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.6: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 2$$

$\Rightarrow$ Gleichung $Ax = b$ ist **lösbar**

Lösbarkeit (IV)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.7: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit (IV)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.7: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

Lösbarkeit (IV)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.7: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Lösbarkeit (IV)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.7: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 2$$

Lösbarkeit (IV)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.7: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 2$$

$\Rightarrow$ Gleichung $Ax = b$ ist **lösbar**

Lösbarkeit (V)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.8: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit (V)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.8: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

Lösbarkeit (V)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.8: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Lösbarkeit (V)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.8: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 3$$

Lösbarkeit (V)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.8: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 3$$

$\Rightarrow$ Gleichung $Ax = b$ ist **nicht lösbar**

Universelle Lösbarkeit (I)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.9: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$(A, b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad (A, b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Universelle Lösbarkeit (II)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.10: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 4 & b_3 \end{array}\right)$$

Universelle Lösbarkeit (III)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.11: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Mehr Zeilen als Spalten ist nie universell lösbar.

$$(A, b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad (A, b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Links $x = (1, 1, 2)^T$. $rg\ A \leq n \neq m$

Eindeutige Lösung (inhomogen)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.12: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_A = (1,1,1)^T \qquad x_{B1} = (1,1,1)^T$$

$$x_{B2} = (0,0,2)^T$$

Eindeutige Lösbarkeit (II)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.13: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$(A, b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2 + Z_4}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rg}(A) = 3 = n$. **Eindeutig lösbar** mit $x = (1, 1, 2)^T$

Eindeutige Lösbarkeit (II)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.14: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$(A, b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3'=Z_3-2Z_2+Z_4}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rg}(A) = 3 = n$. **Nicht lösbar**, da $\operatorname{rg}(A, b) \neq \operatorname{rg}(A)$

Nulllösung der Homogenen Gleichung

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.15: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_A = (0,0,0)^T \qquad x_B = c \cdot (1,1,-1)^T$$

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Skalarprodukte und Abstände

Definition 8.1.4: Bilinearform

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, dann ist eine *Bilinearform* auf $V \times W$ eine Abbildung

$$B : V \times W \to \mathbb{K}, \ (v, w) \mapsto B(v, w),$$

die für jedes feste $v \in V$ beziehungsweise jedes feste $w \in W$ eine

Linearform auf W beziehungsweise V ist. Das heißt, für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und alle $w, w_1, w_2 \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(B1) $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$,

(B2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$,

(B3) $B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$,

(B4) $B(v, \lambda w) = \lambda B(v, w)$.

Definition 8.1.11: Symmetrie, Definitheit, Skalarprodukt

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann heißt eine Bilinearform B auf $V \times V$

(i) *symmetrisch*, falls für alle $v, w \in V$ $B(v,w) = B(w,v)$ gilt.

(ii) *positiv definit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{ 0 \} (B(v,v) > 0)$.

(iii) *negativ definit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{ 0 \} (B(v,v) < 0)$.

(iv) *positiv* beziehungsweise *negativ semidefinit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{ 0 \} (B(v,v) \geq 0)$ beziehungsweise ≤ 0.

(v) *indefinit*, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und B weder positiv noch negativ semidefinit ist.

(vi) ein *Skalarprodukt*, falls B positiv definit und symmetrisch ist.

Skalarprodukt

Zeige: ... ist ein Skalarprodukt

Was muss ich zeigen?

- ... ist eine Bilinearform, insbesondere wohldefiniert
- ... ist positiv definit
- ... ist symmetrisch

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Zu zeigen: **1. Bilinearform**:

$x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$

(B1) $\langle x + \tilde{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \tilde{x}, y \rangle$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Zu zeigen: **1. Bilinearform**:

$x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$

(B1) $\langle x + \tilde{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \tilde{x}, y \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x + \tilde{x}, y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \tilde{x}_i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i y_i \\ &= \langle x, y \rangle + \langle \tilde{x}, y \rangle \end{aligned}$$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Zu zeigen: **1. Bilinearform**:

$x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$

(B2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Zu zeigen: **1. Bilinearform**:

$x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$

(B2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned}\langle \lambda x, y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= \lambda \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

(B3) - (B4) analog $\Rightarrow$ $\langle x, y \rangle$ ist eine Bilinearform
positive Definitheit: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

(B3) - (B4) analog $\Rightarrow$ $\langle x, y \rangle$ ist eine Bilinearform
positive Definitheit: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \text{ für alle } i = 1, .., n$$

$\Rightarrow$ $\langle x, y \rangle$ ist positiv definit.

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Symmetrie: Zu zeigen $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Kanonisches Skalarprodukt

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{definiert ein Skalarprodukt}$$

Symmetrie: Zu zeigen $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ &= \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle$ ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform
$=$ **Skalarprodukt**

Orthogonal und Orthonormal

Bedingung für Orthogonalität bezüglich einer Bilinearform:

$\langle x, y \rangle = 0$ Orthonormal: zusätzlich $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$

Orthogonal und Orthonormal

Bedingung für Orthogonalität bezüglich einer Bilinearform:

$\langle x, y \rangle = 0$ Orthonormal: zusätzlich $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$

Orthonormalbasis: Alle Basisvektoren sind zueinander orthogonal und normiert.

Wie bekommt man eine Orthonormalbasis?

Orthogonal und Orthonormal

Bedingung für Orthogonalität bezüglich einer Bilinearform:

$\langle x, y \rangle = 0$ Orthonormal: zusätzlich $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$

Orthonormalbasis: Alle Basisvektoren sind zueinander orthogonal und normiert.
Wie bekommt man eine Orthonormalbasis?

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad\qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad\qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{||w_1||^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad\qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{||w_1||^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad\qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad\qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \qquad\qquad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{||w_j||^2} w_j$$

Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

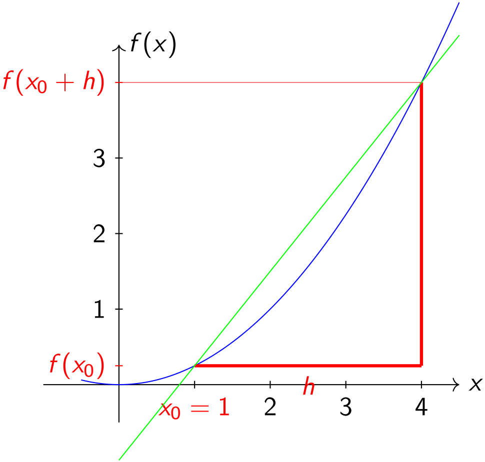
Differentialrechnung

Definition

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

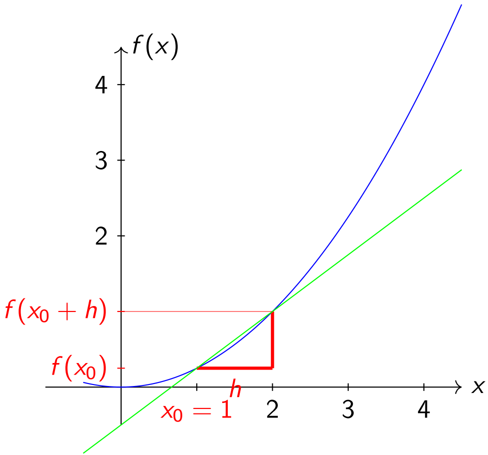
Definition

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



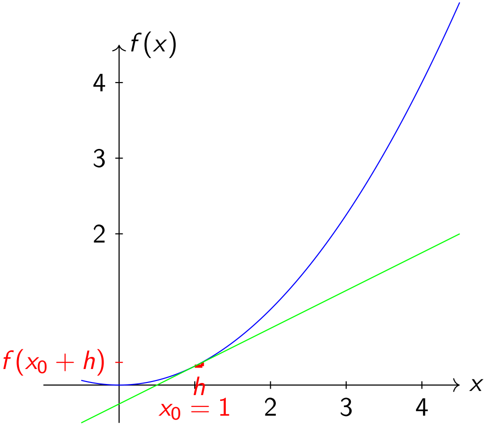
Definition

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Definition

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Anwendung der Definition

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

Herleitung mit der Definition

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x
\end{aligned}$$

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = |x|$ differnzierbar in $x_0 = 0$?

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{Differenzierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Grenzwert existiert}$$

Ist $f(x)=|x|$ differnzierbar in $x_0=0$?

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{0+h-0}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(0+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 =!?$

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 =!?$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1+h-1}{h} = 1 \\
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1+2h+h^2-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} 2+h = 2
\end{aligned}$$

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 = 1$?

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 = 1$?

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2$$

Ist f differenzierbar?

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 = 1$?

Wann ist etwas nicht differenzierbar?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzierbar $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert

Ist $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ differnzierbar in $x_0 = 1$?

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(2+2h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} 2 + \frac{1}{h} = \infty$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{x \to 0^-} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$$

Ist f differenzierbar?

Ableitungsregeln 11.1.8

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktionen, dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$ und falls $g(x_0) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

(i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (Linearität der Ableitung),

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel),

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (Quotientenregel).

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Beispiele: Produktregel und Quotientenregel

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 \sin(x)$$

$$h'(x) = \underbrace{3x^2}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} + \underbrace{x^3}_{f(x)} \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)}$$

Beispiele: Produktregel und Quotientenregel

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 \sin(x)$$

$$h'(x) = \underbrace{3x^2}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} + \underbrace{x^3}_{f(x)} \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{4}x^4}{1 + x^2}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{(1 + x^2)x^3 - \frac{1}{4}x^4 2x}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \qquad \Rightarrow g_1(f_1(x)) =$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \qquad \Rightarrow g_1(f_1(x)) = \ln(x^2)$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \qquad \Rightarrow g_1(f_1(x)) = \ln(x^2)$$

$$g_2(u) = u^2, f_2(x) = 1 - \sin(x) \qquad \Rightarrow g_2(f_2(x)) =$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \qquad \Rightarrow g_1(f_1(x)) = \ln(x^2)$$

$$g_2(u) = u^2, f_2(x) = 1 - \sin(x) \qquad \Rightarrow g_2(f_2(x)) = (1 - \sin(x))^2$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \quad \Rightarrow g_1(f_1(x)) = \ln(x^2)$$

$$g_2(u) = u^2, f_2(x) = 1 - \sin(x) \quad \Rightarrow g_2(f_2(x)) = (1 - \sin(x))^2$$

$$g_3(u) = e^x, f_3(x) = 1 - 2x^2 \quad \Rightarrow g_3(f_3(x)) =$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$g_1(u) = \ln(u), f_1(x) = x^2 \quad \Rightarrow g_1(f_1(x)) = \ln(x^2)$$

$$g_2(u) = u^2, f_2(x) = 1 - \sin(x) \quad \Rightarrow g_2(f_2(x)) = (1 - \sin(x))^2$$

$$g_3(u) = e^x, f_3(x) = 1 - 2x^2 \quad \Rightarrow g_3(f_3(x)) = e^{1-2x^2}$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sin(x^2)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sin(x^2)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \sin(u)$ und $f(x) = x^2$.
$g'(u) = \cos(u)$ und $f'(x) = 2x$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sin(x^2)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \sin(u)$ und $f(x) = x^2$.
$g'(u) = \cos(u)$ und $f'(x) = 2x$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sqrt{2x - \cos(x)}$$

$h(x) = g(f(x))$ mit

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sqrt{2x - \cos(x)}$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \sqrt{u}$ und $f(x) = 2x - \cos(x)$.

$g'(u) =$

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sqrt{2x - \cos(x)}$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \sqrt{u}$ und $f(x) = 2x - \cos(x)$.

$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ und $f'(x) = 2 + \sin(x)$.

Kettenregel

Satz 11.1.10: Kettenregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wenn f in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$h(x) = \sqrt{2x - \cos(x)}$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \sqrt{u}$ und $f(x) = 2x - \cos(x)$.

$g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ und $f'(x) = 2 + \sin(x)$.

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x - \cos(x)}} \cdot (2 + \sin(x))$$

Kettenregel

$$h(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \ln(u)$ und $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
$g'(u) = \frac{1}{u}$ und $f'(x) = \ldots$

Kettenregel

$$h(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \ln(u)$ und $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
$g'(u) = \frac{1}{u}$ und $f'(x) = \ldots$

$f(x) = q(r(x))$ mit $q(u) = \sqrt{u}$ und $r(x) = 1 + x^2$.
$q'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ und r'(x) = 2x

Kettenregel

$$h(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \ln(u)$ und $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
$g'(u) = \frac{1}{u}$ und $f'(x) = \ldots$

$f(x) = q(r(x))$ mit $q(u) = \sqrt{u}$ und $r(x) = 1 + x^2$.
$q'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ und r'(x) = 2x

$$f'(x) = q'(r(x)) \cdot r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

Kettenregel

$$h(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = \ln(u)$ und $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
$g'(u) = \frac{1}{u}$ und $f'(x) = \ldots$

$f(x) = q(r(x))$ mit $q(u) = \sqrt{u}$ und $r(x) = 1 + x^2$.
$q'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ und r'(x) = 2x

$$f'(x) = q'(r(x)) \cdot r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

Daraus folgt für $h'(x)$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2}$$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1 - x^3}\right)^{\cos(x)}$$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right) \cdot \cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right) \cdot \cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x) \cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1 - x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1 - x^3}\right) \cdot \cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1 - x^3}\right) \cdot \cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x) \cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1 - x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1 - x^3}$

$s(x) = v(w(x))$ mit $v(u) = \sqrt{u}$ und $w(x) = 1 + x^3$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

$s(x) = v(w(x))$ mit $v(u) = \sqrt{u}$ und $w(x) = 1 + x^3$

$s'(x) = v'(w(x))w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^{\mathbf{3}}}}\cdot(-3x^2)$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

$s(x) = v(w(x))$ mit $v(u) = \sqrt{u}$ und $w(x) = 1 + x^3$

$s'(x) = v'(w(x))w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}\cdot(-3x^2)$

$q'(x) = p'(s(x))\cdot s'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\cdot\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} = \frac{-3x^2}{2(1-x^3)}$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

$s(x) = v(w(x))$ mit $v(u) = \sqrt{u}$ und $w(x) = 1 + x^3$

$s'(x) = v'(w(x))w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}\cdot(-3x^2)$

$q'(x) = p'(s(x))\cdot s'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\cdot\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} = \frac{-3x^2}{2(1-x^3)}$

$f'(x) = q'(x)r(x) + q(x)r'(x) = \frac{-3x^2}{2(1-x^3)}\cos(x) + \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)(-\sin(x))$

Aufgabe: Kettenregel

$$h(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$$

$h(x) = g(f(x))$ mit $g(u) = e^x$ und $f(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\cdot\cos(x)\right)$.

$f(x) = q(x)\cdot r(x)$ mit $q(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)$ und $r(x) = \cos(x)$

$q(x) = p(s(x))$ mit $p(u) = \ln(u)$ und $s(x) = \sqrt{1-x^3}$

$s(x) = v(w(x))$ mit $v(u) = \sqrt{u}$ und $w(x) = 1 + x^3$

$s'(x) = v'(w(x))w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}\cdot(-3x^2)$

$q'(x) = p'(s(x))\cdot s'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\cdot\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} = \frac{-3x^2}{2(1-x^3)}$

$f'(x) = q'(x)r(x) + q(x)r'(x) = \frac{-3x^2}{2(1-x^3)}\cos(x) + \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)(-\sin(x))$

$$h'(x) = \left(\sqrt{1-x^3}\right)^{\cos(x)}\left[\frac{-3x^2}{2(1-x^3)}\cos(x) - \ln\left(\sqrt{1-x^3}\right)\sin(x)\right]$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\ \frac{x^2}{(a^3-x^3)^2}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\;\frac{x^2}{(a^3-x^3)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3}\right) = \frac{1}{3a^6}\left(\frac{x^3}{a^3-x^3}\right)^{-1}\frac{(a^3-x^3)3x^2-x^3(-3x^2)}{(a^3-x^3)^2}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\;\frac{x^2}{(a^3-x^3)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3}\right) &= \frac{1}{3a^6}\left(\frac{x^3}{a^3-x^3}\right)^{-1}\frac{(a^3-x^3)3x^2-x^3(-3x^2)}{(a^3-x^3)^2}\\ &= \frac{1}{3a^6}\;\frac{a^3-x^3}{x^3}\;\frac{3a^3x^2-3x^5+3x^5}{(a^3-x^3)^2}\\ &= \frac{1}{a^3}\;\frac{1}{x}\;\frac{1}{a^3-x^3}\end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\;\frac{x^2}{(a^3-x^3)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3}\right) &= \frac{1}{3a^6}\left(\frac{x^3}{a^3-x^3}\right)^{-1}\frac{(a^3-x^3)3x^2-x^3(-3x^2)}{(a^3-x^3)^2}\\ &= \frac{1}{3a^6}\;\frac{a^3-x^3}{x^3}\;\frac{3a^3x^2-3x^5+3x^5}{(a^3-x^3)^2}\\ &= \frac{1}{a^3}\;\frac{1}{x}\;\frac{1}{a^3-x^3} = \frac{1}{a^3}\;\frac{a^3-x^3}{x(a^3-x^3)^2}\end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\,\frac{x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\frac{x^3}{x(a^3-x^3)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3}\right) &= \frac{1}{3a^6}\left(\frac{x^3}{a^3-x^3}\right)^{-1} \frac{(a^3-x^3)3x^2 - x^3(-3x^2)}{(a^3-x^3)^2} \\ &= \frac{1}{3a^6}\,\frac{a^3-x^3}{x^3}\,\frac{3a^3x^2-3x^5+3x^5}{(a^3-x^3)^2} \\ &= \frac{1}{a^3}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{a^3-x^3} = \frac{1}{a^3}\,\frac{a^3-x^3}{x(a^3-x^3)^2}\end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmtem Integral

$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3} = F(x)$$

AUs Übersichtsgründen getrennte Rechnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^3(a^3-x^3)}\right) = \frac{1}{3a^3}\frac{3x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\;\frac{x^2}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{a^3}\frac{x^3}{x(a^3-x^3)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3}\right) &= \frac{1}{3a^6}\left(\frac{x^3}{a^3-x^3}\right)^{-1}\frac{(a^3-x^3)3x^2-x^3(-3x^2)}{(a^3-x^3)^2}\\ &= \frac{1}{3a^6}\;\frac{a^3-x^3}{x^3}\;\frac{3a^3x^2-3x^5+3x^5}{(a^3-x^3)^2}\\ &= \frac{1}{a^3}\;\frac{1}{x}\;\frac{1}{a^3-x^3} = \frac{1}{a^3}\;\frac{a^3-x^3}{x(a^3-x^3)^2}\end{aligned}$$

$$F'(x) = \frac{1}{a^3}\left(\frac{x^3+a^3-x^3}{x(a^3-x^3)^2}\right) = \frac{1}{x(a^3-x^3)^2}$$

Beispiel: Gleichung mit unbestimmten Integral

$$\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} = F(x)$$

Analog mit Ableitung lösen.

Beispiel: Gleichung mit unbestimmten Integral

$$\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + \frac{1}{2a^3} \arctan\frac{x}{a} = F(x)$$

Analog mit Ableitung lösen.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{4a^3} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \dots = \frac{1}{2a^2} \frac{1}{a^2 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2a^3} \arctan\frac{x}{a} = \dots = \frac{1}{2a^2} \frac{1}{a^2 - x^2}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2a^2} \frac{a^2 - x^2 + a^2 + x^2}{(a^2 + x^2)(a^2 - x^2)} = \frac{1}{a^4 - x^4}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Herleitung: Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f.

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Herleitung: Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f.

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Leite $f \circ f^{-1}$ ab.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(f^{-1}(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x$$
$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = 1$$

Also gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beispiel: $f(x) = x^2$ und $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad (f^{-1})'(x) = ?$$

Beispiel: $f(x) = x^2$ und $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad (f^{-1})'(x) = ?$$

Damit gilt:

$$f'(f^{-1}(x)) = 2\sqrt{x}$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion lässt sich also berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $f^{-1}(x) = x^2$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f^{-1}(x) = x^2 \qquad (f^{-1})'(x) = ?$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $f^{-1}(x) = x^2$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f^{-1}(x) = x^2 \qquad (f^{-1})'(x) = ?$$

Damit gilt:

$$f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2x}$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion lässt sich also berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{2x}} = 2x$$

$f(x) = \cos x$ und $f^{-1}(x) = \arccos x$

$$\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$$

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$f^{-1}(x) = \arccos x \qquad f^{-1}(x) = ?$$

$f(x) = \cos x$ und $f^{-1}(x) = \arccos x$

$$\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$$

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$f^{-1}(x) = \arccos x \qquad f^{-1}(x) = ?$$

Bestimme $f'(f^{-1}(x))$

$$\begin{aligned} f'(f^{-1}(x)) &= -\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} \\ &= -\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

$f(x) = \cos x$ und $f^{-1}(x) = \arccos x$

$$\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$$

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$$
$$f^{-1}(x) = \arccos x \qquad f^{-1}(x) = ?$$

Bestimme $f'(f^{-1}(x))$

$$\begin{aligned} f'(f^{-1}(x)) &= -\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} \\ &= -\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Also gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe: $f(x) = \tanh(x)$ und $f^{-1}(x) = Artanh(x)$

Zeige

$$f'(x) = \frac{d}{dx} Artanh(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

mit $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)},\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Aufgabe: $f(x) = \tanh(x)$ und $f^{-1}(x) = Artanh(x)$

Zeige

$$f'(x) = \frac{d}{dx} Artanh(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

mit $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ Bestimme die Ableitung von $\tanh(x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

Aufgabe: $f(x) = \tanh(x)$ und $f^{-1}(x) = Artanh(x)$

Zeige

$$f'(x) = \frac{d}{dx} Artanh(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

mit $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ Bestimme die Ableitung von $\tanh(x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{mit} \quad f^{-1}(x) = Artanh(x)$$

$$\frac{d}{dx} Artanh(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2\left(Artanh(x)\right)} = \frac{1}{1-x^2}$$

Mathematatik für Informatiker

1. Mittelwertsatz

Definition Erster Mittelwertsatz

Korollar 11.2.8: Erster Mittelwertsatz

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b), dann gilt

$$\exists \xi \in (a, b)\left(f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right).$$

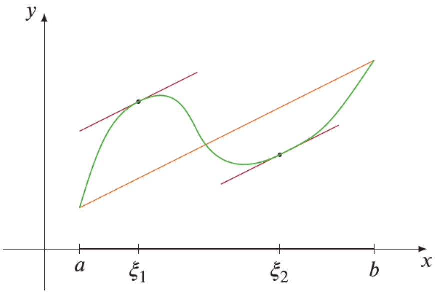


Abbildung 11.6: Zum ersten Mittelwertsatz.

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

1. Mittelwertsatz

Kann auf jede beliebige Funktion angewandt werden. Man braucht nur: $f(x)$, a und b

1. Mittelwertsatz

Kann auf jede beliebige Funktion angewandt werden. Man braucht nur: $f(x), a$ und b

Sei $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2},\ a = 0,\ b = 1$:

$$\exists \xi \in (0,1):\ 2\xi e^{\xi^2} = \frac{e^1 - e^0}{1 - 0} \ \Leftrightarrow\ 2\xi e^{\xi^2} = e - 1$$

1. Mittelwertsatz

Kann auf jede beliebige Funktion angewandt werden. Man braucht nur: $f(x), a$ und b

Sei $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2},\ a = 0,\ b = 1$:

$$\exists \xi \in (0,1):\ 2\xi e^{\xi^2} = \frac{e^1 - e^0}{1 - 0} \ \Leftrightarrow\ 2\xi e^{\xi^2} = e - 1$$

Sei $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x},\ a = 1,\ b = e$

$$\exists \xi \in (1,e):\ \frac{1}{\xi} = \frac{\ln(e) - \ln(1)}{e - 1} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\xi} = \frac{1}{e - 1}$$

Kann auf jede beliebige Funktion angewandt werden. Man braucht nur: $f(x), a$ und b

Sei $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2},\ a = 0,\ b = 1$:

$$\exists \xi \in (0,1):\ 2\xi e^{\xi^2} = \frac{e^1 - e^0}{1-0} \ \Leftrightarrow\ 2\xi e^{\xi^2} = e - 1$$

Sei $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x},\ a = 1,\ b = e$

$$\exists \xi \in (1,e):\ \frac{1}{\xi} = \frac{\ln(e) - \ln(1)}{e-1} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\xi} = \frac{1}{e-1}$$

Sei $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x),\ a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}$

$$\exists \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right):\ \cos(\xi) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \ \Leftrightarrow\ \cos(\xi) = \frac{2}{\pi}$$

Anwendung: Ungleichungen

Tutoriumsaufgabe: Zeige: für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Was muss ich wissen: $\frac{d}{dx} arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+y^2}$ für $x > y$

Anwendung: Ungleichungen

Tutoriumsaufgabe: Zeige: für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Was muss ich wissen: $\frac{d}{dx} arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+y^2}$ für $x > y$

Außerdem mit $a < \xi < b$: $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2}$

Wähle $f(x) = \arctan x$.

Anwendung: Ungleichungen

Tutoriumsaufgabe: Zeige: für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Was muss ich wissen: $\frac{d}{dx} arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+y^2}$ für $x > y$

Außerdem mit $a < \xi < b$: $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2}$

Wähle $f(x) = \arctan x$. Nach 1. MWS existiert ein $\xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a}$$

Anwendung: Ungleichungen

Tutoriumsaufgabe: Zeige: für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Was muss ich wissen: $\frac{d}{dx} arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+y^2}$ für $x > y$

Außerdem mit $a < \xi < b$: $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2}$

Wähle $f(x) = \arctan x$. Nach 1. MWS existiert ein $\xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a}$$

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

Multipliziere mit $(b-a) > 0$, daraus folgt die Ungleichung.

Aufgabe: Mittelwertsatz

Zeige: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$

Aufgabe: Mittelwertsatz

Zeige: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ Wähle $f(x) = \ln(x),\ b = x, a = 1$, was sagt der Mittelwertsatz?

Aufgabe: Mittelwertsatz

Zeige: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ Wähle $f(x) = \ln(x),\ b = x, a = 1$, was sagt der Mittelwertsatz?

Es existiert ein $\xi \in (1, x)$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi) \qquad \text{also} \qquad \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{1}{\xi}$$

Aufgabe: Mittelwertsatz

Zeige: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ Wähle $f(x) = \ln(x),\ b = x, a = 1$, was sagt der Mittelwertsatz?

Es existiert ein $\xi \in (1, x)$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi) \qquad \text{also} \qquad \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{1}{\xi}$$

Also gilt für ein $\xi \in (1, x)$ auch

$$\ln(x) = \frac{x - 1}{\xi}$$

Aufgabe: Mittelwertsatz

Zeige: $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ Wähle $f(x) = \ln(x),\ b = x, a = 1$, was sagt der Mittelwertsatz?

Es existiert ein $\xi \in (1, x)$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi) \qquad \text{also} \qquad \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{1}{\xi}$$

Also gilt für ein $\xi \in (1, x)$ auch

$$\ln(x) = \frac{x - 1}{\xi}$$

Da $1 < \xi < x$ folgen die Ungleichungen:

$$\ln(x) > \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad \ln(x) < \frac{x - 1}{1} = x - 1$$

Anwendung: Grenzwert

Bestimme: $\lim_{n\to\infty} n(1-\cos(\frac{1}{n}))$

Anwendung: Grenzwert

Bestimme: $\lim_{n\to\infty} n(1 - \cos(\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{n}) - (-\cos(0))}{\frac{1}{n} - 0}$

Anwendung: Grenzwert

Bestimme: $\lim_{n\to\infty} n(1-\cos(\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{n})-(-\cos(0))}{\frac{1}{n}-0}$

Wähle $f(x) = -\cos(x), f'(x) = \sin(x)$.
Nach dem 1. MWS existiert ein $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$, sodass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{n})-(-\cos(0))}{\frac{1}{n}-0} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(\xi_n)}_{=f'(\xi_n)}$$

Anwendung: Grenzwert

Bestimme: $\lim_{n\to\infty} n(1-\cos(\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{n})-(-\cos(0))}{\frac{1}{n}-0}$

Wähle $f(x) = -\cos(x), f'(x) = \sin(x)$.
Nach dem 1. MWS existiert ein $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$, sodass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{n})-(-\cos(0))}{\frac{1}{n}-0} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(\xi_n)}_{=f'(\xi_n)}$$

da $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ gilt, $\lim_{n\to\infty} \sin(\xi_n) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

Zweiter Mittelwertsatz

Definition: Zweiter Mittelwertsatz

Zweiter Mittelwertsatz 11.2.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Abbildung 2.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Definition: Zweiter Mittelwertsatz

Zweiter Mittelwertsatz 11.2.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Abbildung 2.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Bestimme: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}, \qquad a > 0,\ \beta \neq 0$:

Definition: Zweiter Mittelwertsatz

Zweiter Mittelwertsatz 11.2.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Abbildung 2.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Bestimme: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}, \qquad a > 0,\ \beta \neq 0$:

Wähle $f(x) = x^\alpha,\ g(x) = x^\beta,\ b = x,\ a = a > x$.
Dann sagt der Mittelwertsatz: Es gibt ein $\xi \in (a, x)$ mit

$$\alpha \xi^{\alpha - 1}(x^\alpha - a^{alpha}) = \beta \xi^{\beta - 1}(x^\beta - a^\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha \xi^{\alpha - 1}}{\beta \xi^{\beta - 1}} = \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$$

Definition: Zweiter Mittelwertsatz

Zweiter Mittelwertsatz 11.2.6

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Abbildung 2.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Bestimme: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}, \qquad a > 0,\ \beta \neq 0$:

Wähle $f(x) = x^\alpha,\ g(x) = x^\beta,\ b = x,\ a = a > x$.
Dann sagt der Mittelwertsatz: Es gibt ein $\xi \in (a, x)$ mit

$$\alpha \xi^{\alpha - 1}(x^\alpha - a^{alpha}) = \beta \xi^{\beta - 1}(x^\beta - a^\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha \xi^{\alpha - 1}}{\beta \xi^{\beta - 1}} = \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$$

Für $x \to a$ geht $\xi \to a$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\ a^{\alpha - \beta}$$

Identitätssatz

Definition: Identitätssatz

Identitätssatz für differenzierbare Funktionen 11.2.9

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbare Funktionen, dann gilt

(i) $\forall x \in I(f'(x) = 0) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in I(f(x) = c)$, das heißt wenn die

Ableitung von f für alle $x \in I$ verschwindet, dann ist f konstant.

(ii) $\forall x \in I(f'(x) = g'(x)) \wedge \exists x_0 \in I(f(x_0) = g(x_0)) \Rightarrow \forall x \in I(f(x) = g(x))$.

Abbildung 3.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Anwendung: Reihendarstellungen

Zeige:

$$\sin x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ mit } \cos x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Anwendung: Reihendarstellungen

Zeige:

$$\sin x = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ mit } \cos x = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sum_0^\infty (-1)^k \frac{(2k+1)x^{2k+1-1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
&= \cos x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\sin(0) = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{0^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$$

Nach Identitätsatz (ii) gilt Gleichheit.

Anwendung: Reihendarstellungen

Zeige:

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für } x \in (0,1)$$

Hinweis: $\operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Anwendung: Reihendarstellungen

Zeige:

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für } x \in (0,1)$$

Hinweis: $\operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right)' = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = -\frac{1}{1+x^2}$$

Gezeigt: $\forall \in I = (0,1) : f'(x) = g'(x)$. Noch zu zeigen:

$$\exists x_0 \in I : f(x_0) = g(x_0)$$

Anwendung: Reihendarstellungen

Zeige:

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für } x \in (0,1)$$

Hinweis: $\operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right)' = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = -\frac{1}{1+x^2}$$

Gezeigt: $\forall \in I = (0,1) : f'(x) = g'(x)$. Noch zu zeigen:

$$\exists x_0 \in I : f(x_0) = g(x_0)$$

$$g(0) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{0^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} = \operatorname{arccot}(0)$$

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Partialbruchzerlegung

Reelle Partialbruchzerlegung 12.2.5

Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine echt gebrochene rationale Funktion und Q möge durch die reelle Produktdarstellung

$$Q(x) = (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{t_1} \cdots (x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{t_\ell}$$

wie oben gegeben sein, dann besitzt R eine *Partialbruchdarstellung* der Form

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{A_i^{(j)}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{t_i} \frac{B_i^{(j)} x + C_i^{(j)}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_i^{(1)}}{x - x_i} + \cdots + \frac{A_i^{(p_i)}}{(x - x_i)^{p_i}} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{B_i^{(1)} x + C_i}{x^2 + b_i x + c_i} + \cdots + \frac{B_i^{(t_i)} x + C_i^{(t_i)}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{t_i}} \right) \end{aligned}$$

mit $A_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ für $i = 1 \ldots, k$, $j = 1, \ldots, p_i$ und $B_i^{(j)}, C_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, \ell$, $j = 1, \ldots, t_i$.

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Partialbruchzerlegung

- $Q(x)$ in Produkt umschreiben
- Bestimmung von $k, p_1, .., p_k$, aus Linearfaktoren (NST) und $l, t_1, ..., t_l$ aus Polynomen 2. Grades
- Summanden bestimmen
- Auf einen Nenner bringen
- Nach Potenz von x ordnen
- Koeffizientenvergleich
- Gleichungssystem lösen
- Einsetzen der Koeffizienten

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{3}{((x-1)(x+3))^2} = \frac{3}{(x-1)^2(x+3)^2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{3}{((x-1)(x+3))^2} = \frac{3}{(x-1)^2(x+3)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+3} + \frac{A_4}{(x+3)^2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{3}{((x-1)(x+3))^2} = \frac{3}{(x-1)^2(x+3)^2}$$

$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+3} + \frac{A_4}{(x+3)^2}$$

$$\frac{2x+1}{(x^2-4)^2} = \frac{2x+1}{((x-2)(x+2))^2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{((x-1)(x+3))^2} &= \frac{3}{(x-1)^2(x+3)^2}\\ &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+3} + \frac{A_4}{(x+3)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{2x+1}{(x^2-4)^2} = \frac{2x+1}{((x-2)(x+2))^2}$$

$$= \frac{2x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

Summanden bestimmen (II)

Vorsicht:

$$\frac{2x+4}{x^2+3x+2} = \frac{2x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\frac{2x+4}{x^2+3x+3} = \frac{Bx+C}{x^2+3x+3}$$

Da x^2+3x+3 **keine Nullstellen** besitzt.

Summanden bestimmen (II)

Vorsicht:

$$\frac{2x+4}{x^2+3x+2} = \frac{2x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\frac{2x+4}{x^2+3x+3} = \frac{Bx+C}{x^2+3x+3}$$

Da x^2+3x+3 **keine Nullstellen** besitzt.

Wie überprüfe ich das am schnellsten?

Bei Polynomen zweiten Grades: Mitternachtformel besitzt keine Lösungen für

$$b^2 - 4ac < 0$$

da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Summanden bestimmen (III)

$$\frac{3x-1}{x^2-2x+2} = \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

Da gilt $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$

$$\frac{3x+1}{x^2-4x+5} = \frac{Bx+C}{x^2-4x+5}$$

da $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$

$$\frac{2x+4}{x^2+4x+3} = \frac{2x+4}{(x+3)(x+1)}$$

da $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1$$

Summanden bestimmen (iv)

Vorsicht wenn: Grad Zähler $\geq$ Grad Nenner

$$\frac{x^4+3x}{x^3+3x^2-x-3}: \qquad \text{Grad Zähler} = 4 \geq 3 = \text{Grad Nenner}$$

Polynomdivision:

$$(x^4+3x):(x^3+3x^2-x-3) = x-3+\frac{10x^2-3x-9}{x^3+3x^2-x-3}$$

x^2+3x^2-x-3 hat die Nullstellen $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=3$. Also:

$$\frac{x^4+3x}{x^3+3x^2-x-3} = x-3+\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-3}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) = 10x^2 - 3x - 9$$

Setze für x die Nullstellen des Nenners ein.

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) = 10x^2 - 3x - 9$$

Setze für x die Nullstellen des Nenners ein. z.B. $x = -1$

$$A_1(-1-1)(-1-3) + A_2\underbrace{(-1+1)}_{=0}(-1-3) + A_3(-1-1)\underbrace{(-1+1)}_{=0} = 10 + 3 - 9$$

$$8A_1 = 4$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) = 10x^2 - 3x - 9$$

Setze für x die Nullstellen des Nenners ein. z.B. $x = -1$

$$A_1(-1-1)(-1-3) + A_2\underbrace{(-1+1)}_{=0}(-1-3) + A_3(-1-1)\underbrace{(-1+1)}_{=0} = 10 + 3 - 9$$

$$8A_1 = 4$$

$A_1 = \frac{1}{2}$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) = 10x^2 - 3x - 9$$

Setze für x die Nullstellen des Nenners ein. z.B. $x = 1$

$$A_1 \underbrace{(1-1)}_{=0}(1-3) + A_2(1+1)(1-3) + A_3 \underbrace{(1-1)}_{=0}(-1+1) = 10 - 3 - 9$$

$$-4A_2 = -2$$

$A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) = 10x^2 - 3x - 9$$

Setze für x die Nullstellen des Nenners ein. z.B. $x = 1$

$$A_1(3-1)\underbrace{(3-3)}_{=0} + A_2(3+1)\underbrace{(3-3)}_{=0} + A_3(3-1)(3+1) = 90 - 9 - 9$$

$$8A_3 = 72$$

$A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $A_3 = 9$ $\quad\Rightarrow\quad$ $R(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{9}{x-3}$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$R(x) = \frac{A_1(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2x - A_2}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1 \cdot (x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2x - A_2}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{x\overbrace{(A_1 + A_2)}^{=5} + \overbrace{2A_1 - A_1}^{=1}}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2x - A_2}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{x\overbrace{(A_1+A_2)}^{=5} + \overbrace{2A_1 - A_1}^{=1}}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 5 & &\Rightarrow A_1 = 5 - A_2 \\ 2A_1 - A_2 = 1 &= 2(5-A_2) - A_2 & &\Rightarrow \ 10 - 3A_2 = 1 \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2x - A_2}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{x\overbrace{(A_1+A_2)}^{=5} + \overbrace{2A_1 - A_1}^{=1}}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 = 5 \qquad & \Rightarrow A_1 = 5 - A_2 \\ 2A_1 - A_2 = 1 = 2(5-A_2) - A_2 \quad & \Rightarrow \quad 10 - 3A_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_2 = 3 \;\Rightarrow A_1 = 5-3 = 2 \;\Rightarrow R(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$$

Beispiel

$$R(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{1x+4}{(x+2)^2} \;\Rightarrow Q(x) = (x-x_1)^2$$

$$\Rightarrow \; R(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

Beispiel

$$R(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{1x+4}{(x+2)^2} \Rightarrow Q(x) = (x-x_1)^2$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

$$R(x) = \frac{A_1(x+2)}{(x+2)\cdot(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

Beispiel

$$R(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{1x+4}{(x+2)^2} \;\Rightarrow Q(x) = (x-x_1)^2$$

$$\Rightarrow \; R(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x+2)\cdot(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Beispiel

$$R(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{1x+4}{(x+2)^2} \Rightarrow Q(x) = (x-x_1)^2$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x+2)\cdot(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A_1 x + 2A_1 + A_2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x \overbrace{A_1}^{=1} + \overbrace{A_2 + 2A_1}^{=4}}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Beispiel

$$R(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{1x+4}{(x+2)^2} \;\Rightarrow Q(x) = (x-x_1)^2$$

$$\Rightarrow \; R(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x+2)\cdot(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x\overbrace{A_1}^{=1} + \overbrace{A_2 + 2A_1}^{=4}}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$A_1 = 1 \; A_2 = 2 \;\Rightarrow\; R(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

Beispiel: Partialbruchzerlegung

Zerlegung von $\frac{4x^2+x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$:

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

Beispiel: Partialbruchzerlegung

Zerlegung von $\frac{4x^2+x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$:

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Bx+c)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

Beispiel: Partialbruchzerlegung

Zerlegung von $\frac{4x^2+x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$:

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Bx+c)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

$$= \frac{x^3(A_1+B) + x^2(A_1+A_2-2B+C) + x(A_2+B-2C) - 2A_1 + 2A_2 + C}{Q(x)}$$

Partialbruchzerlegung

Zerlegung von $\frac{0x^3+4x^2+1x+0}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$:

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Bx+c)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

$$= \frac{x^3 \overbrace{(A_1+B)}^{=0} + x^2 \overbrace{(A_1+A_2-2B+C)}^{=4} + x \overbrace{(A_2+B-2C)}^{=1} \overbrace{-2A_1+2A_2+C}^{=0}}{Q(x)}$$

Partialbruchzerlegung

Gleichungssystem lösen:

$$
\begin{aligned}
A_1 + B &= 0 && \Rightarrow A_1 = -B \\
-2A_1 + 2A_2 + C &= 0 \Rightarrow 2B + 2A_2 + C = 0 && \Rightarrow C = -2B - 2A_2 \\
A_1 + A_2 - 2B + C &= 4 \Rightarrow -B + A_2 - 2B - 2B - 2A_2 = 4 && \Rightarrow A_2 = -5B - 4 \\
A_2 + B - 2C &= 1 \Rightarrow -25B - 24 = 1 && \Rightarrow B = -1
\end{aligned}
$$

Partialbruchzerlegung

Gleichungssystem lösen:

$$
\begin{aligned}
A_1 + B &= 0 & &\Rightarrow A_1 = -B \\
-2A_1 + 2A_2 + C &= 0 \Rightarrow 2B + 2A_2 + C = 0 & &\Rightarrow C = -2B - 2A_2 \\
A_1 + A_2 - 2B + C &= 4 \Rightarrow -B + A_2 - 2B - 2B - 2A_2 = 4 & &\Rightarrow A_2 = -5B - 4 \\
A_2 + B - 2C &= 1 \Rightarrow -25B - 24 = 1 & &\Rightarrow B = -1
\end{aligned}
$$

$$A_1 = 1,\ A_2 = 1,\ B = -1,\ C = 0$$

Partialbruchzerlegung

Gleichungssystem lösen:

$$
\begin{aligned}
A_1 + B &= 0 & &\Rightarrow A_1 = -B \\
-2A_1 + 2A_2 + C &= 0 \Rightarrow 2B + 2A_2 + C = 0 & &\Rightarrow C = -2B - 2A_2 \\
A_1 + A_2 - 2B + C &= 4 \Rightarrow -B + A_2 - 2B - 2B - 2A_2 = 4 & &\Rightarrow A_2 = -5B - 4 \\
A_2 + B - 2C &= 1 \Rightarrow -25B - 24 = 1 & &\Rightarrow B = -1
\end{aligned}
$$

$$A_1 = 1,\ A_2 = 1,\ B = -1,\ C = 0$$

Also gilt:

$$R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-x}{x^2+2x+2}$$

Aufgabe: Beispiel

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x + 3}{x^3 + 4x^2 + 9x + 10}$$

Hinweis: Q(-2) $= 0$

Aufgabe: Beispiel

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x + 3}{x^3 + 4x^2 + 9x + 10}$$ Hinweis: Q(-2) = 0

$$(x^3 + 4x^2 + 9x + 10) : (x + 2) = x^2 + 2x + 5$$

Aufgabe: Beispiel

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x+3}{x^3+4x^2+9x+10} \qquad \text{Hinweis: Q(-2) = 0}$$

$$(x^3+4x^2+9x+10) : (x+2) = x^2+2x+5$$

$$R(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

Aufgabe: Beispiel

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x+3}{x^3+4x^2+9x+10} \qquad \text{Hinweis: Q(-2) = 0}$$

$$(x^3+4x^2+9x+10) : (x+2) = x^2+2x+5$$

$$R(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

$$R(x) = \frac{A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$

$$= \frac{x^2(\overbrace{A+B}^{=0}) + x(\overbrace{2A+2B+C}^{=4}) + \overbrace{5A+2C}^{=3}}{Q(x)} \left(= \frac{0x^2+4x+3}{Q(x)} \right)$$

$$A=-1,\ B=1,\ C=4 \quad \Rightarrow \quad R(x) = \frac{-1}{x+2} + \frac{x+4}{x^2+2x+5}$$

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Satz von Taylor

Satz von Taylor

Satz von Taylor 11.3.5

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei f auf (a, b) n-mal differenzierbar und $(n-1)$-mal stetig differenzierbar in I. Dann gilt die *Taylorsche Formel*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$= T^{(n-1)} f(x_0, x) + R_n(x_0, x)$$

für alle $x \in I$ mit einem $\xi = x_0 + t(x - x_0)$ für ein $t \in (0, 1)$ und

$$R_n(x_0, x) := \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$f(x) = T^{n-1} f(x_0, x) + R_n(x_0, x) \quad \Rightarrow \quad f(x) - T^{n-1} f(x_0, x) = R_n(x_0, x)$$

Beispiel: Satz von Taylor

Bestimme den Wert für $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf eine Genauigkeit von 10^{-6}.

Beispiel: Satz von Taylor

Bestimme den Wert für $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf eine Genauigkeit von 10^{-6}.

Wähle $f(x) = \cos(x),\ x_0 = 0,\ x = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

$$T^{n-1}f(x_0, x) = \cos(0) - \sin(0)x - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 - ....$$

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\left(10^{-1}\right)^n$$

für ein $\xi \in (0, \frac{1}{10})$.

Beispiel: Satz von Taylor

Bestimme den Wert für $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf eine Genauigkeit von 10^{-6}.

Wähle $f(x) = \cos(x),\ x_0 = 0,\ x = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

$$T^{n-1}f(x_0, x) = \cos(0) - \sin(0)x - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 - \ldots.$$

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\left(10^{-1}\right)^n$$

für ein $\xi \in (0, \frac{1}{10})$. Bestimme n: Wenn $n = 5$ gilt:

$$R_n(0, 10^{-1}) = \frac{\sin(\xi)}{5!}10^{-5} \leq \frac{1}{120}10^{-5} < 10^{-6}$$

Beispiel: Satz von Taylor

Bestimme den Wert für $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf eine Genauigkeit von 10^{-6}.

Wähle $f(x) = \cos(x),\ x_0 = 0,\ x = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

$$T^{n-1}f(x_0, x) = \cos(0) - \sin(0)x - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 - ....$$

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\left(10^{-1}\right)^n$$

für ein $\xi \in (0, \frac{1}{10})$. Bestimme n: Wenn $n = 5$ gilt:

$$R_n(0, 10^{-1}) = \frac{\sin(\xi)}{5!}10^{-5} \leq \frac{1}{120}10^{-5} < 10^{-6}$$

$$f(x) \approx 1 - 0 \cdot 10^{-1} - \frac{1}{2}10^{-2} + \frac{0}{6}10^{-3} + \frac{1}{24}10^{-4} = 1 - \frac{1}{200} + \frac{1}{240000}$$

Aufgabe: Satz von Taylor

Sei $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ für alle $x > -1$.
Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Bestimme ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (0, \delta)$ gilt:

$$|f(x) - T^{(2)}f(0,x)| < \epsilon$$

Hinweis: $f^{(3)}(x) = \frac{3x+18}{8(x+1)^{\frac{7}{2}}}$

Aufgabe: Satz von Taylor

Sei $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ für alle $x > -1$.
Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Bestimme ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (0, \delta)$ gilt:

$$|f(x) - T^{(2)}f(0,x)| < \epsilon$$

Hinweis: $f^{(3)}(x) = \frac{3x+18}{8(x+1)^{\frac{7}{2}}}$

$$|f(x) - T^{(2)}f(0,x)| = |R_3(0,x)| = \left|\frac{3\xi + 18}{48(\xi+1)^{\frac{7}{2}}}x^3\right| \overset{\xi<\delta}{<} \left|\frac{3\delta + 18}{48}\delta^3\right|$$

Da $\xi \in (0,x)$ und $x \in (0,\delta)$ gilt $\xi < x < \delta$

Aufgabe: Satz von Taylor

Sei $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ für alle $x > -1$.
Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Bestimme ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (0, \delta)$ gilt:

$$|f(x) - T^{(2)} f(0, x)| < \epsilon$$

Hinweis: $f^{(3)}(x) = \frac{3x+18}{8(x+1)^{\frac{7}{2}}}$

$$|f(x) - T^{(2)} f(0, x)| = |R_3(0, x)| = \left| \frac{3\xi + 18}{48(\xi + 1)^{\frac{7}{2}}} x^3 \right| \overset{\xi < \delta}{<} \left| \frac{3\delta + 18}{48} \delta^3 \right|$$

Da $\xi \in (0, x)$ und $x \in (0, \delta)$ gilt $\xi < x < \delta$
Sei $\delta \leq 2$, also $3\delta + 18 \leq 24$

$$|R_3(0, x)| < \frac{24}{48} \delta^3 = \frac{1}{2} \delta^3 < \epsilon$$

Wähle $\delta = \min \left(2,\ (2\epsilon)^{\frac{1}{3}} \right)$

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

18. Juli 2024

Universität Ulm

Grenzwerte

Grenzwerte bestimmen

Als Produkt schreiben und Kürzen:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+7)}{x-2} = 9$$

Grenzwerte bestimmen

Als Produkt schreiben und Kürzen:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-14}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+7)}{x-2}=9$$

Höchste Potenz ausklammern

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+12x^2-13}{3x^4-7x^3+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(6+12x^{-2}-13x^{-4})}{x^4(3-7x^{-1}+2x^{-3}+x^{-4})}=\frac{6}{3}=2$$

Grenzwerte bestimmen mit Folgen

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Wähle zwei Nullfolgen und zeige, dass sie auf unterschiedliche Grenzwerte führen. Widerspruch zur Eindeutigkeit.

Grenzwerte bestimmen mit Folgen

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Wähle zwei Nullfolgen und zeige, dass sie auf unterschiedliche Grenzwerte führen. Widerspruch zur Eindeutigkeit.

Sei (x_k) eine Nullfolge mit $x_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_k|}{x_k} = \lim_{k \to \infty} 1 = 1$$

Sei (y_k) eine Nullfolge mit $y_k \leq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|y_k|}{y_k} = \lim_{k \to \infty} -1 = -1$$

Grenzwerte bestimmen mit Folgen

Ist $f(x)$ stetig?

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{|x| \cos \frac{1}{x^2}}{1+x^4} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{array} \right\}$$

Sei (x_k) eine beliebige Nullfolge. Dann gilt.

Grenzwerte bestimmen mit Folgen

Ist $f(x)$ stetig?

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{|x| \cos \frac{1}{x^2}}{1+x^4} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{array} \right\}$$

Sei (x_k) eine beliebige Nullfolge. Dann gilt.

$$0 \leq |\lim_{k \to \infty} f(x_k)| = \lim_{k \to \infty} \frac{|x_k| \cos\left(\frac{1}{x_k^2}\right)}{1 + x_k^4} \leq \lim_{k \to \infty} |x_k| = 0$$

Grenzwerte bestimmen mit Folgen

Ist $f(x)$ stetig?

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{|x| \cos \frac{1}{x^2}}{1+x^4} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{array} \right\}$$

Sei (x_k) eine beliebige Nullfolge. Dann gilt.

$$0 \leq |\lim_{k\to\infty} f(x_k)| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_k| \cos\left(\frac{1}{x_k^2}\right)}{1+x_k^4} \leq \lim_{k\to\infty} |x_k| = 0$$

Also gilt für $f(x)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$f(x)$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$

Stetigkeit: $\epsilon - \delta$-Definition

Stetigkeit: $\epsilon - \delta$-Definition

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0)$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

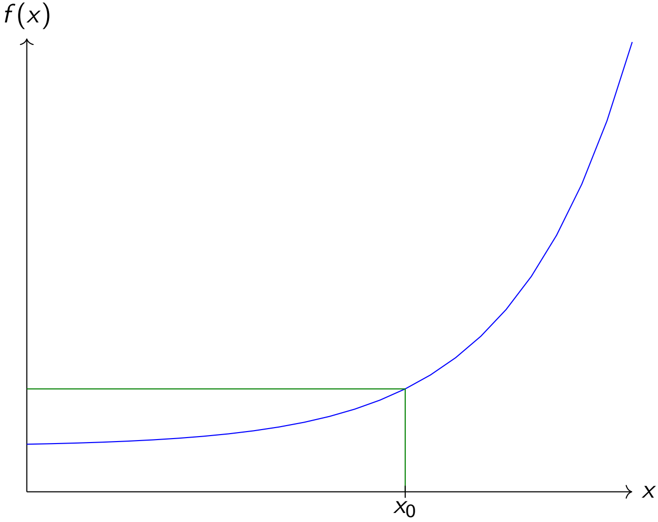
Stetigkeit: $\epsilon - \delta$-Definition

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0)$$

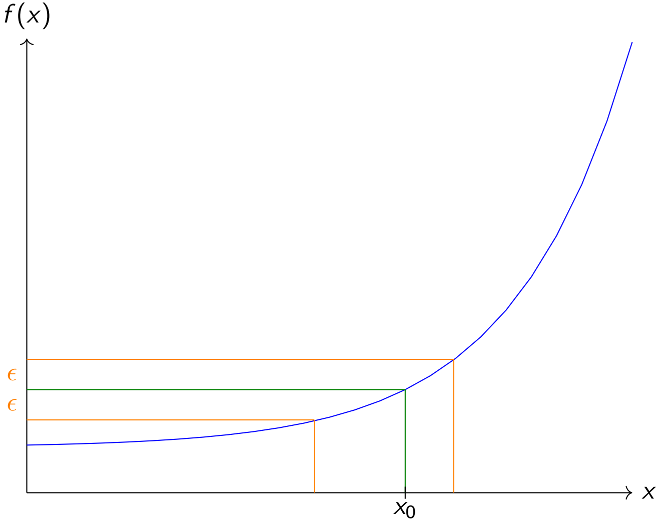
$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$$x \in U_\delta(x_0) \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$$

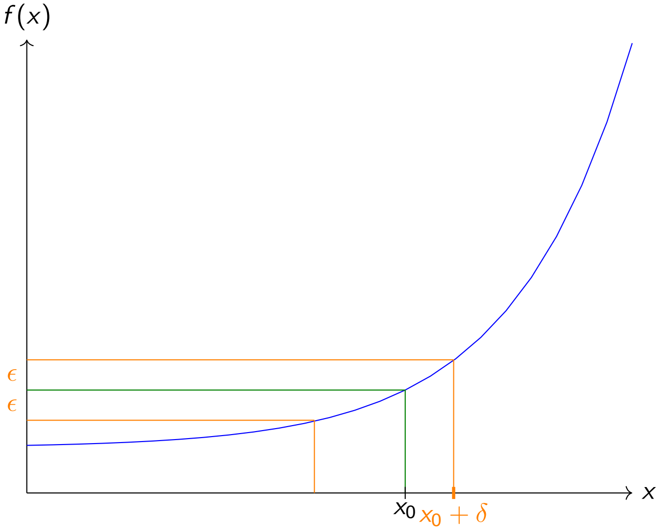
Bedeutung $\epsilon - \delta$



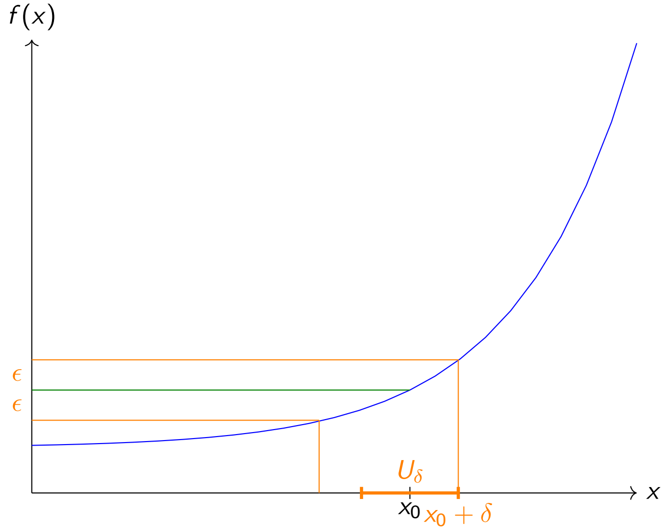
Bedeutung s$\epsilon - \delta$



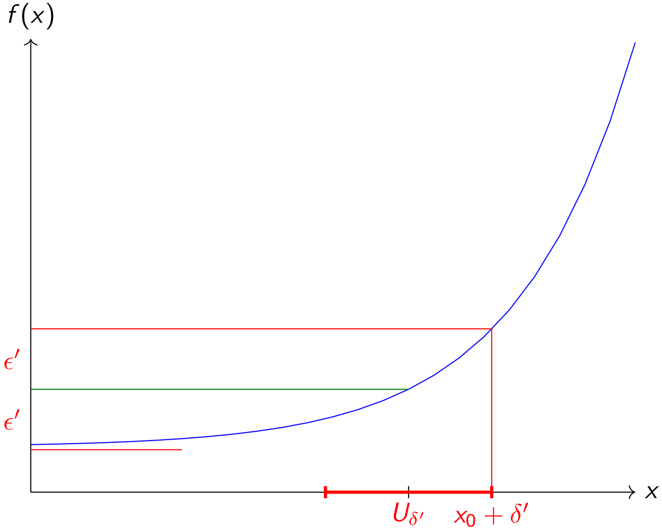
Bedeutung $\epsilon - \delta$



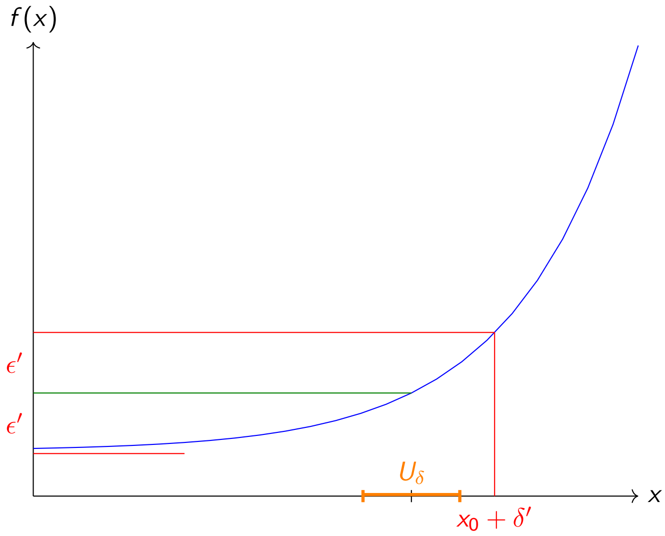
Bedeutung $\epsilon - \delta$



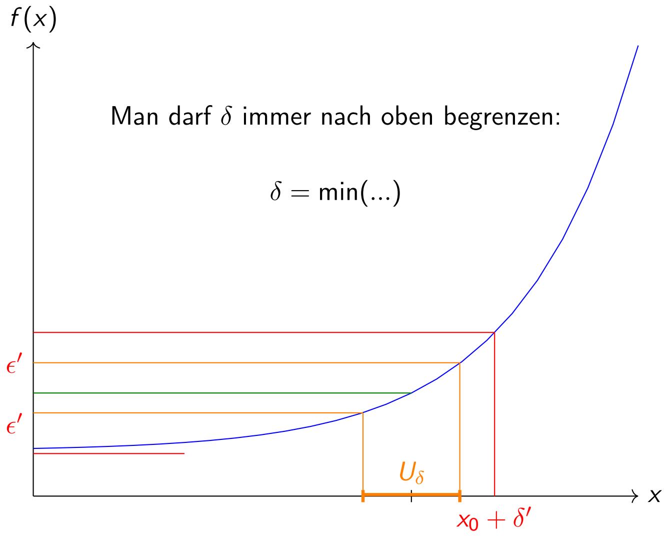
Bedeutung $\epsilon - \delta$



Bedeutung $\epsilon - \delta$



Bedeutung $\epsilon - \delta$



Wichtige Tricks zum umformen

Das muss man mindestens einmal finden: $|x - x_0| < \delta$

Wichtige Tricks zum umformen

Das muss man mindestens einmal finden: $|x - x_0| < \delta$

3. binomische Formel: $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\ |x + x_0|$

Erweitern mit 3. binomischer Formel:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{x} - \sqrt{x_0}\ \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

Wichtige Tricks zum umformen

Das muss man mindestens einmal finden: $|x - x_0| < \delta$

3. binomische Formel: $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\ |x + x_0|$

Erweitern mit 3. binomischer Formel:

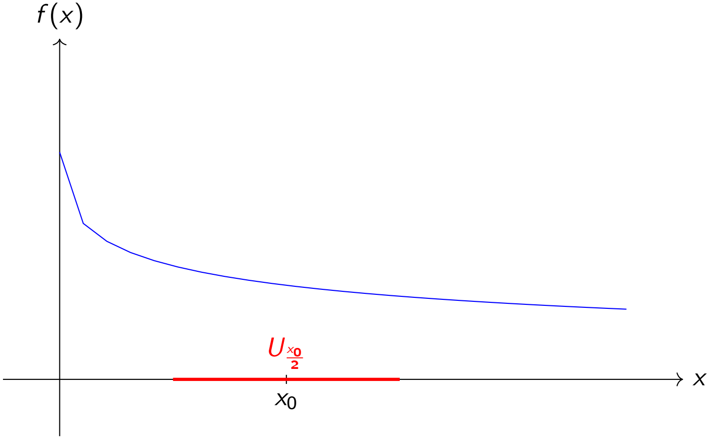
$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{x} - \sqrt{x_0}\ \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

Nützliche Abschätzungen:

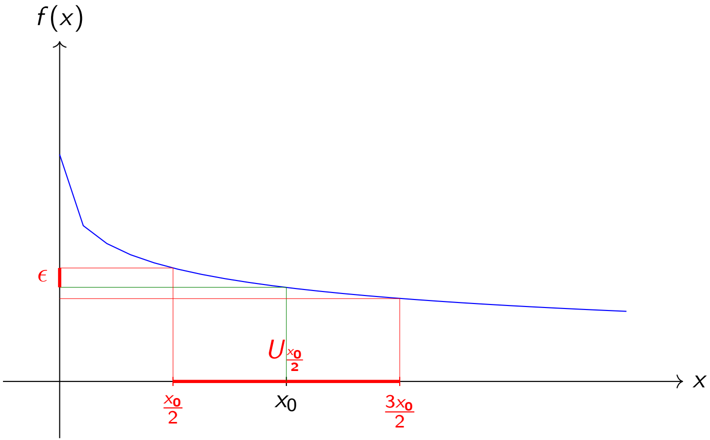
$$1 + \sqrt{x} \geq 1\ , \quad a + x^2 \geq a$$

$$\text{Wenn } \delta \leq \frac{x_0}{2} \qquad \Rightarrow \frac{x_0}{2} \leq x \leq \frac{3x_0}{2}$$

Abschätzung $\delta \leq \frac{x_0}{2}$



Abschätzung $\delta \leq \frac{x_0}{2}$



Beispiel: $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ ist zu zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \quad (\Leftrightarrow |x - x_0| < \delta)$$
$$|x^2 - x_0^2| < \epsilon$$

Beispiel: $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ ist zu zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \quad (\Leftrightarrow |x - x_0| < \delta)$$
$$|x^2 - x_0^2| < \epsilon$$

Zunächst geschickt umformen:

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \; |x + x_0| &= |x - x_0| \; |x \overbrace{- x_0 + x_0}^{=0} + x_0| \\ &\leq |x - x_0| \; (|x - x_0| + 2|x_0|) \\ &< \; \delta(\delta + 2|x_0|) < \epsilon \end{aligned}$$

Beispiel: $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ ist zu zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \quad (\Leftrightarrow |x - x_0| < \delta)$$
$$|x^2 - x_0^2| < \epsilon$$

Zunächst geschickt umformen:

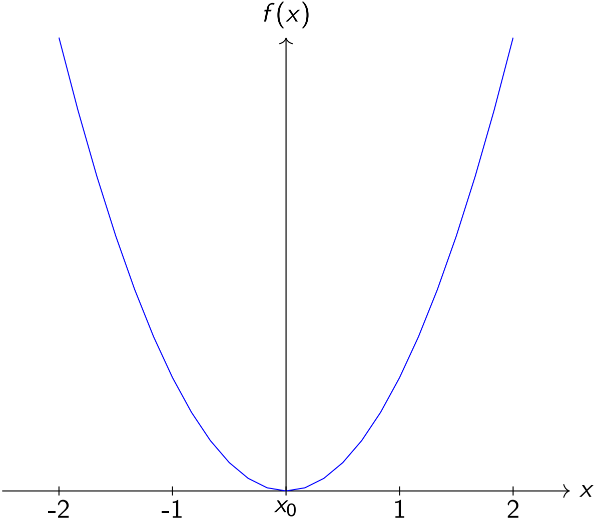
$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \; |x + x_0| &= |x - x_0| \; |x \overbrace{- x_0 + x_0}^{=0} + x_0| \\ &\leq |x - x_0| \; (|x - x_0| + 2|x_0|) \\ &< \; \delta(\delta + 2|x_0|) < \epsilon \end{aligned}$$

Schätze δ ab: $\delta \leq 1$

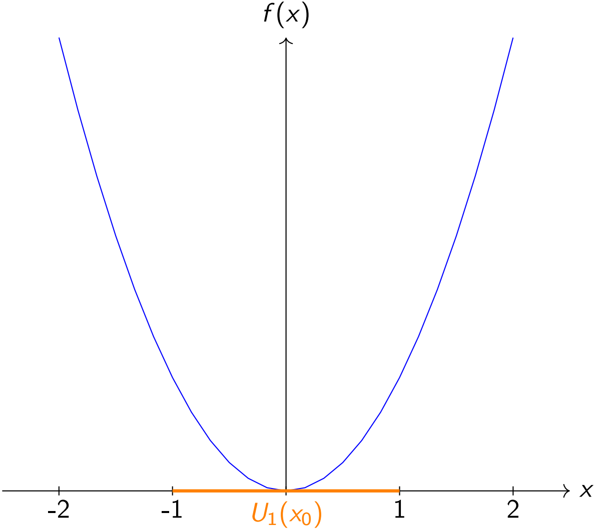
$$\Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \delta(1 + 2|x_0|) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}$$

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$$

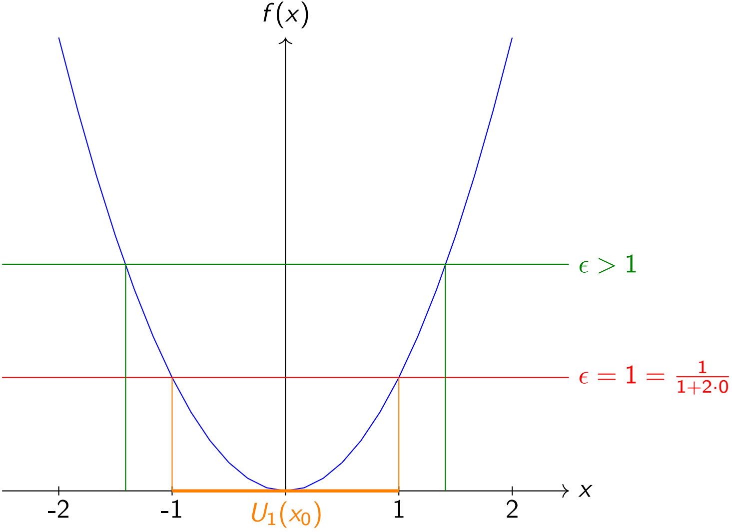
Was bedeutet $\delta \leq 1$



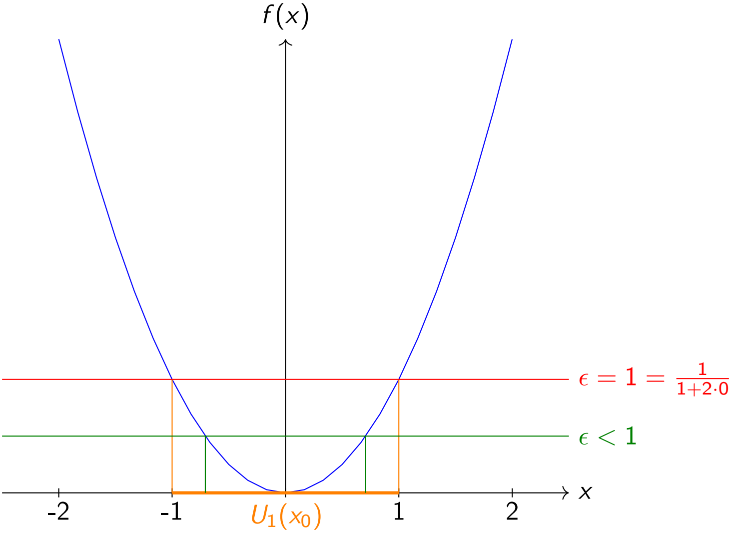
Was bedeutet $\delta \leq 1$



Was bedeutet $\delta \leq 1$



Was bedeutet $\delta \leq 1$



Beispiel: $f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$

Geschicktes umformen:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{2}{1+\sqrt{x}} - \frac{2}{1+\sqrt{x_0}}\right| = \left|\frac{2(1+\sqrt{x_0}) - 2(1+\sqrt{x})}{\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{\geq 1}\underbrace{(1+\sqrt{x_0})}_{\geq 1}}\right|$$

$$\leq 2|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}|$$

(Erweitern mit $\sqrt{x_0} + \sqrt{x}$)
$$= 2\frac{|x_0 - x|}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$

Geschicktes umformen:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{2}{1+\sqrt{x}} - \frac{2}{1+\sqrt{x_0}}\right| = \left|\frac{2(1+\sqrt{x_0}) - 2(1+\sqrt{x})}{\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{\geq 1}\underbrace{(1+\sqrt{x_0})}_{\geq 1}}\right|$$

$$\leq 2|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}|$$

(Erweitern mit $\sqrt{x_0} + \sqrt{x}$)

$$= 2\frac{|x_0 - x|}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}}$$

Zum Abschätzen, wähle $\delta \leq \frac{x_0}{2}$.

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$

Geschicktes umformen:

$$|f(x) - f(x)| = \left|\frac{2}{1+\sqrt{x}} - \frac{2}{1+\sqrt{x_0}}\right| = \left|\frac{2(1+\sqrt{x_0}) - 2(1+\sqrt{x})}{\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{\geq 1}\underbrace{(1+\sqrt{x_0})}_{\geq 1}}\right|$$

$$\leq 2|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}|$$

(Erweitern mit $\sqrt{x_0} + \sqrt{x}$)
$$= 2\frac{|x_0 - x|}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}}$$

Zum Abschätzen, wähle $\delta \leq \frac{x_0}{2} \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{\frac{x_0}{2}}$.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2\overbrace{|x - x_0|}^{<\delta}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{\frac{x_0}{2}}} < \frac{2}{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{x_0}}\delta < \epsilon$$

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$

Geschicktes umformen:

$$|f(x) - f(x)| = \left|\frac{2}{1+\sqrt{x}} - \frac{2}{1+\sqrt{x_0}}\right| = \left|\frac{2(1+\sqrt{x_0}) - 2(1+\sqrt{x})}{\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{\geq 1}\underbrace{(1+\sqrt{x_0})}_{\geq 1}}\right|$$

$$\leq 2|\sqrt{x_0} - \sqrt{x}|$$

(Erweitern mit $\sqrt{x_0} + \sqrt{x}$) $\qquad = 2\dfrac{|x_0 - x|}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}}$

Zum Abschätzen, wähle $\delta \leq \frac{x_0}{2} \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{\frac{x_0}{2}}$.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2\overbrace{|x - x_0|}^{<\delta}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{\frac{x_0}{2}}} < \frac{2}{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{x_0}}\delta < \epsilon$$

$$\delta = \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{x_0}}{2}\epsilon\right)$$

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 10.2.17: Gleichmäßige Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $D :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\right).$$

Abbildung 3.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Unterschied zu Stetigkeit?

Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 10.2.17: Gleichmäßige Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $D :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Abbildung 3.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Unterschied zu Stetigkeit?

Es existiert ein δ, dass für alle $x_1, x_2 \in D$ gelten muss.

Schlussfolgerung:

Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 10.2.17: Gleichmäßige Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $D :\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

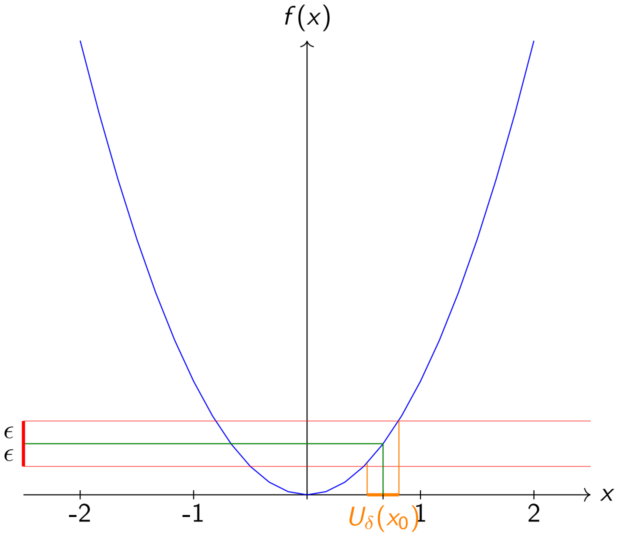
Abbildung 3.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Unterschied zu Stetigkeit?

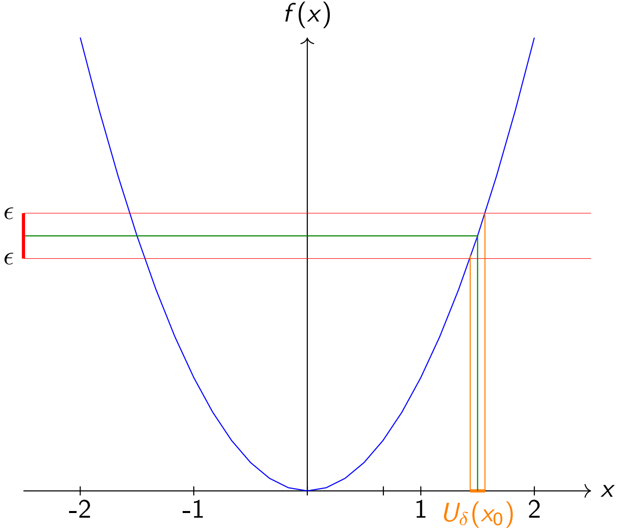
Es existiert ein δ, dass für alle $x_1, x_2 \in D$ gelten muss.

Schlussfolgerung: δ darf nicht von x_0 abhängen, wenn f(x) auf $\mathbb{R}$ definiert ist.

Abhängigkeit von δ von x_0



Abhängigkeit von δ von x_0



Sind $f(x) = x^2$ und $\tilde{f}(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$ glm. stetig?

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$$

Sind $f(x) = x^2$ und $\tilde{f}(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$ glm. stetig?

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$$

Hängt von x_0 ab, also **nicht** gleichmäßig stetig.

Für $\tilde{f} : (0, \infty) \to \mathbb{R};\ \tilde{f} = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$:

$$\delta = \min\left(\frac{x_0}{2},\ \frac{(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{x_0}}{2}\epsilon\right)$$

Hängt von x_0 ab, also **nicht** gleichmäßig stetig.

Was wäre für $f : [a, b] \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$

Vorher:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right) \overset{|x_0|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Jetzt: Sei $M = \max(|a|, |b|)$. Wähle

$$\delta = \frac{\epsilon}{1 + 2M}$$

Was wäre für $f : [a, b] \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$

Vorher:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}\right) \overset{|x_0| \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Jetzt: Sei $M = \max(|a|, |b|)$. Wähle

$$\delta = \frac{\epsilon}{1 + 2M}$$

da für alle $x_0 \in [a, b]$ gilt:

$$\frac{\epsilon}{1 + 2M} \leq \frac{\epsilon}{1 + 2|x_0|}$$

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = 3x - 2$

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = 3x - 2$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$?

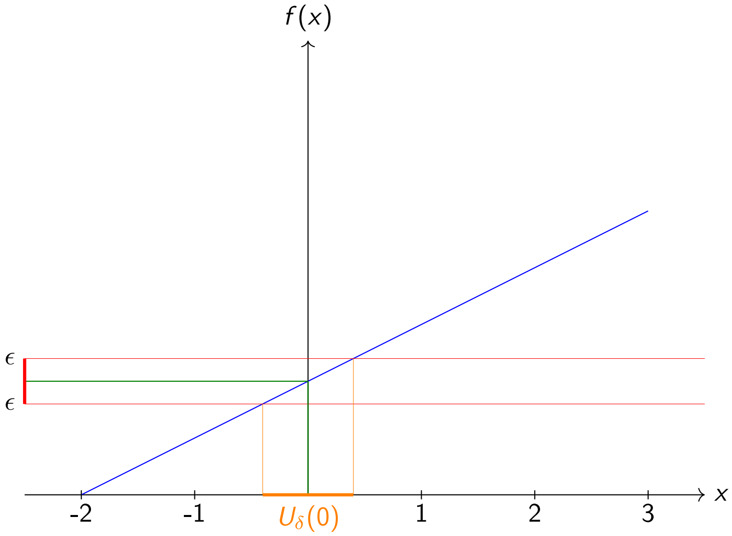
Sei $x \in U_\delta(x_0)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |3x - 2 - 3x_0 + 2| &= |3x - 3x_0| \\ &= 3|x - x_0| \\ &< 3\delta < \epsilon \end{aligned}$$

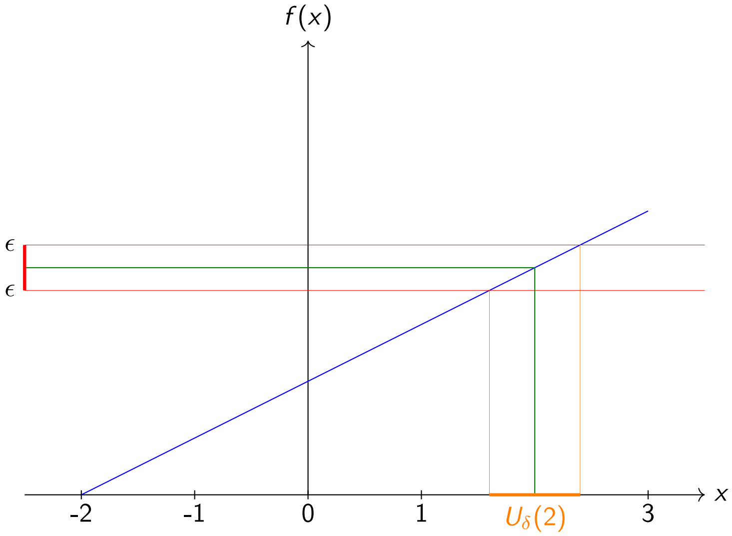
$$\delta = \frac{\epsilon}{3}$$

f ist gleichmäßig stetig, da δ nicht von x_0 abhängt.

Gleichmäßige Stetigkeit von linearen Funktionen



Gleichmäßige Stetigkeit von linearen Funktionen



Alternative Form

Nicht mit Kanonen auf Spatzen schießen

$\epsilon - \delta$ nur benutzen, wenn es konkret dransteht!

- Zeige mit der Definition...
- Zeige mit Hilfe der $\epsilon - \delta$-Definition...

Stattdessen:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Beispiel 1:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \cos(\pi x) & \text{für } x < 1 \\ x - 2 & \text{für } x \geq 1 \end{array} \right\}$$

Beispiel 1:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \cos(\pi x) & \text{für } x < 1 \\ x - 2 & \text{für } x \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 2) &= -1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos(\pi x) &= -1 \\ f(1) &= -1 \end{aligned}$$

f ist stetig in $x_0 = 1$.

Beispiel 2:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 0 \\ \ln(x+1) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Beispiel 2:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 0 \\ \ln(x+1) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \ln(x+1) = 0$$

$$f(0) = 0$$

f ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

Beispiel 3:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = -1 \\ \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 3:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = -1 \\ \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} \lim_{x \to -1^+} (x+2) = 1$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} \lim_{x \to -1^-} (x+2) = 1$$

$$f(0) = 0$$

f ist nicht stetig in $x_0 = -1$.

Unstetigkeiten

Beispiele 10.2.6 (Klassifizierung von Unstetigkeitsstellen). (i) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1, \\ x-1, & x \ge 1, \end{cases}$$

hat in $x_0 = 1$ eine *Sprungstelle*. Rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren, sind aber verschieden.

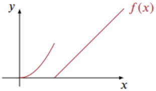


Abbildung 10.6: Funktion mit Sprungstelle.

(ii) *Hebbare Unsstetigkeit* (in $x_0 = 2$):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ 0, & x = 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren und stimmen überein, stimmen aber nicht mit dem Funktionswert an der Stelle überein. Die Unstetigkeit kann durch Setzen eines anderen Wertes für $f(x_0)$ behoben werden.

(iii) *Polstelle*: Einer der Funktionsgrenzwerte $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ist $\pm\infty$. Der andere Grenzwert existiert ggf. uneigentlich. Beispiel: $x_0 = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ sonst.

(iv) *Unstetigkeit zweiter Art*: Der Funktionsgrenzwert in x_0 existiert auch im uneigentlichen Sinn weder von links noch von rechts. Beispiel:

Abbildung 4.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz 10.2.7

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert für jeden *Zwischenwert* $y \in (f(a), f(b))$ ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = y$.

Abbildung 4.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Aufgabe: Zeige, dass $e^{2x} + 3x^2 = 4$ auf $\mathbb{R}$ eine Lösung besitzt.

Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz 10.2.7

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert für jeden *Zwischenwert* $y \in (f(a), f(b))$ ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = y$.

Abbildung 4.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Aufgabe: Zeige, dass $e^{2x} + 3x^2 = 4$ auf $\mathbb{R}$ eine Lösung besitzt.

Wähle $I = [0, 1]$ als kompaktes Intervall und $f(x) = e^{2x} + x^2$. f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Außerdem gilt:

$$f(0) = e^0 + 0 = 1 < 4 \ , \quad f(1) = e^2 + 1 > 2^2 + 1 = 5 > 4$$

Nach ZWS existiert in $\xi \in I \subset \mathbb{R}$ mit $f(\xi) = 4$. ξ ist ein Lösung der Gleichung.

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

19. Juli 2024

Universität Ulm

Übersicht

Übersicht Freitag

- Stetigkeit

Pause+Fragen

- Aufgaben
- Differentialrechnung
- MWS und Id-Satz
- Satz von Taylor

Pause+Fragen

- Aufgaben
- Partialbruchzerlegung
- Integrieren

Pause+Fragen

- Aufgaben

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

21. Juli 2024

Universität Ulm

Übersicht

Übersicht Freitag

- Stetigkeit

Pause+Fragen

- Aufgaben
- Differentialrechnung
- MWS und Id-Satz
- Satz von Taylor

Pause+Fragen

- Aufgaben
- Partialbruchzerlegung
- Integrieren

Pause+Fragen

- Aufgaben

Übersicht Dienstag

- Aufgaben
- Integralrechnung
- Differentialgleichungen

Pause+Fragen

- Aufgaben
- Lineare Gleichungssysteme
- Determintanten
- Skalarprodukte

Pause+Fragen

- Aufgaben
- Eigenwerte
- Alles was noch offen ist

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

21. Juli 2024

Universität Ulm

Aufgaben Stetigkeit

2. i) Zeigen Sie, dass es eine Lösung der Gleichung $e^x - x = \frac{3}{2}$ auf $[0, +\infty)$ gibt.

ii) Es sei $f : [-4, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^3 - 2x^2 + x - 4$. Bestimmen Sie ein (kompaktes) Intervall I, so dass $f : [-4, 2] \to I$ surjektiv ist.
Hinweis: Zwischendurch können Abschätzungen nützlich sein.

iii) Zeigen Sie, dass $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ in $x_0 = 0$ nicht stetig ist und benennen Sie die Art der Unstetigkeit.

2 a) Zeige mit Hilfe der Definition, dass $f(x) = \sqrt{x}$ stetig auf $(0, \infty)$.

b) Zeige mit Hilfe der Definition dass $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

4. (a) Es sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wann heißt f auf D stetig? (2)

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Was bedeutet die Sprechweise „f ist stetig in a fortsetzbar“? (2)

(c) Geben Sie eine Funktion an, die in $x_0 = 2$ definiert, aber nicht stetig ist (mit Beweis). (2)

(d) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 1 \\ \sin(\pi x), & x \leq 1 \end{cases}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 1$. (6)

(e) Untersuchen Sie die Funktion f aus Teilaufgabe (d) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit für alle Punkte $x_0 \neq 1$. (3)

Abbildung 0.1: Liebezeit

Aufgaben Differenzierbarkeit

3. i) Zeigen Sie mit Hilfe des Identitätssatzes für differenzierbare Funktionen, dass für $x \in$ ~~(0, 2)~~ (-1,1) gilt

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

ii) Bestimmen Sie mit Hilfe der Definition die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf $(0, +\infty)$.

(d) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ \sin(\pi x), & x \leq 1 \end{cases}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 1$. (6)

(e) Untersuchen Sie die Funktion f aus Teilaufgabe (d) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit für alle Punkte $x_0 \neq 1$. (3)

5. (a) Zeigen Sie, dass für $a \neq 0$ gilt $\int \frac{x}{\sin^2(ax)} dx = -\frac{x}{a}\cot(ax) + \frac{1}{a^2}\ln\sin(ax)$ und geben Sie eine weitere, andere Stammfunktion von $\frac{x}{\sin^2(ax)}$ an. (4)

Abbildung 0.2: Liebezeit

(c) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion Arsinh. [3 P]
Hinweis: Sie müssen dafür nicht Aufgabe 4b gelöst haben.

5. Bestimme mit Hilfe der Definition der Differenzierbarkeit die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{-2}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(5 Punkte)

8. a) Formuliere den ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.
   b) Zeige die Ungleichung
$$\log(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \quad \forall x > 0.$$
   Hinweis: Betrachte dazu die Hilfsfunktion $f(t) := \log(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$. Es darf außerdem ohne Beweis verwendet werden, dass $(1+t)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{t}{2}$ für $t \geq 0$.

(5+10 Punkte)

5. Zeigen Sie mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes für alle $x > y > 0$ die Ungleichung [6 P]
$$\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}.$$

Abbildung 0.3: Liebezeit

Aufgaben Themen Freitag

2. (a) Gegeben sei die rationale Funktion $R(x) = \frac{1}{(x^2 - a^2)^2}$ mit $a \neq 0$. Leiten Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten der Partialbruchdarstellung von R her. (7)

2. i) Bestimmen Sie $\int t^2 \ln t \, dt$.

ii) Es sei $P(x)$ ein reelles Polynom mit

- einer einfachen Nullstellen bei $x_0 = 2$,
- einer dreifachen Nullstelle bei $x_0 = -\frac{3}{2}$
- einem Paar von doppelten komplexen Nullstelle bei $z_0 = 1 - \imath$ und $\overline{z_0} = 1 + \imath$.

Welche Gestalt hat die reelle Partialbruchdarstellung von $\frac{1}{P(x)}$?

Hinweis: Gesucht ist ein Ausdruck der Gestalt $\frac{A}{\cdots} + \cdots$ mit (hier nicht zu bestimmenden) Konstanten $A, \ldots$.

Abbildung 0.4: Liebezeit

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass für eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die Funktion $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ auf $[a,b]$ stetig ist. (7)

6. (a) Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \begin{cases} k^2 x, & 0 \le x < \frac{1}{2k}, \\ k^2\left(\frac{1}{k} - x\right), & \frac{1}{2k} \le x < \frac{1}{k}, \\ 0, & \frac{1}{k} \le x \le 1. \end{cases}$

(1) Skizzieren Sie f_1, f_2 und f_3. (3)

(2) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $f(x) = 0$ konvergiert.
Erinnerung: Das heißt, für (jedes) fest gewählte $x \in [0,1]$ gilt $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) = 0$. (2)

(3) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \neq \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx$ gilt. (4)
Hinweis: Berechnen Sie $\int_0^1 f_k(x)\,dx$.

(b) Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann für $x, x_0 \in (a,b)$ gilt (4)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Aufgaben Integrale und DGL

ii) Bestimmen Sie $\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x}$.

iii) Es sei $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos^2 t \, dt$. Bestimmen Sie $F(\pi)$.

ii) Bestimmen Sie $\int \frac{\tan^n ax}{\cos^2 ax} dx$ $(a \neq 0)$ - betrachten Sie ggf. zunächst den Fall $n = 1$.

ii) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil i) die Lösung des Anfangswertproblem (5)

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 - 1} y + x + 1, y(2) = 1$$

für $x \geq 2$.

Aufgaben LGS, Determinanten und SP

1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Was ist eine Linearform auf V? (1)

(b) Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Geben Sie die durch das Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|$ an. (1)

(c) Zeigen Sie, dass die induzierte Norm die Parallelogramm-Identität erfüllt, das heißt, für alle $x, y \in V$ gilt (3)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

(d) Es sei $C(I)$ die Menge der stetigen Funktionen auf einem Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Begründen Sie, warum für $f, g \in C(I)$ durch $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ ein Skalarprodukt definiert ist. (7)
Hinweis: Dass $C(I)$ ein reeller Vektorraum ist, muss nicht gezeigt werden.

(e) Was ist ein metrischer Raum? (4)

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(a) Was ist ein Skalarprodukt auf V (erläutern Sie die Eigenschaften explizit)? (6)

(b) Es sei nun $V = \mathbb{C}^n$ mit der kanonischen Basis und $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Ist durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{y_j} = x^\top A \overline{y}$ immer ein Skalarprodukt auf V gegeben (Begründung)? (2)

(c) Es seien V und A wie in Teilaufgabe (b). Welche Eigenschaften von A sind notwendig bzw. hinreichend (Beweis/Herleitung), damit durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{y_j} = x^\top A \overline{y}$ ein Skalarprodukt auf V gegeben ist? (9)

(d) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{C}^n$ zusammen mit $d : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $d(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ ein metrischer Raum ist. (4)

(e) Wird die Metrik aus Teilaufgabe (d) durch eine Norm induziert? Wenn ja, geben Sie die Norm an. (2)

Aufgabe LGS

2. (a) Gegeben sei die rationale Funktion $R(x) = \frac{1}{(x^2 - a^2)^2}$ mit $a \neq 0$. Leiten Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten der Partialbruchdarstellung von R her. (7)

(b) Es sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie Kriterien für die Lösbarkeit und die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems $Ax = b$ an. (2)

(c) Es seien A, b und x wie in Teilaufgabe (b) und $v \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $Ax = b$. Zeigen Sie, dass für $w \in \operatorname{Ker} A$ auch $v + w$ eine Lösung von $Ax = b$ ist. (2)

(d) Aufgrund welchen Satzes ist die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems aus Teilaufgabe (a) gegeben? (1)

Aufgaben Eigenwerte

2. (a) Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Angenommen, das charakteristische Polynom von A hat die Form

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 + 12\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda.$$

(1) Geben Sie n an. (1)

(2) Ist A invertierbar (mit Begründung)? (2)

3. (a) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F : V \to V$ linear. Was ist ein Eigenwert von F? (2)

(b) Es sei nun $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

(1) Erläutern Sie, was es heißt, dass A diagonalisierbar ist. (1)

(2) Was können Sie über die Transformationsmatrix aussagen, die A diagonalisiert? (1)

(c) Ist $\lambda = 2$ ein Eigenwert der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$? Wenn ja, geben Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert λ an. (5)

(d) Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = e^{\lambda x}$ ein Eigenvektor der linearen Abbildung $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ ist. (2)

Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

19. Juli 2024

Universität Ulm

2. i) Zeigen Sie, dass es eine Lösung der Gleichung $e^x - x = \frac{3}{2}$ auf $[0, +\infty)$ gibt.

ii) Es sei $f : [-4, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^3 - 2x^2 + x - 4$. Bestimmen Sie ein (kompaktes) Intervall I, so dass $f : [-4, 2] \to I$ surjektiv ist.
Hinweis: Zwischendurch können Abschätzungen nützlich sein.

iii) Zeigen Sie, dass $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ in $x_0 = 0$ nicht stetig ist und benennen Sie die Art der Unstetigkeit.

2 a) Zeige mit Hilfe der Definition, dass $f(x) = \sqrt{x}$ stetig auf $(0, \infty)$.

b) Zeige mit Hilfe der Definition dass $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

4. (a) Es sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wann heißt f auf D stetig? (2)

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Was bedeutet die Sprechweise „f ist stetig in a fortsetzbar“? (2)

(c) Geben Sie eine Funktion an, die in $x_0 = 2$ definiert, aber nicht stetig ist (mit Beweis). (2)

(d) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 1 \\ \sin(\pi x), & x \leq 1 \end{cases}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 1$. (6)

(e) Untersuchen Sie die Funktion f aus Teilaufgabe (d) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit für alle Punkte $x_0 \neq 1$. (3)

Abbildung 0.1: Liebezeit

Aufgaben Differenzierbarkeit

3. i) Zeigen Sie mit Hilfe des Identitätssatzes für differenzierbare Funktionen, dass für $x \in \cancel{(0,2)}$ $(-1,1)$ gilt

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

ii) Bestimmen Sie mit Hilfe der Definition die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf $(0, +\infty)$.

(d) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ \sin(\pi x), & x \leq 1 \end{cases}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 1$. (6)

(e) Untersuchen Sie die Funktion f aus Teilaufgabe (d) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit für alle Punkte $x_0 \neq 1$. (3)

5. (a) Zeigen Sie, dass für $a \neq 0$ gilt $\int \frac{x}{\sin^2(ax)} dx = -\frac{x}{a}\cot(ax) + \frac{1}{a^2}\ln\sin(ax)$ und geben Sie eine weitere, andere Stammfunktion von $\frac{x}{\sin^2(ax)}$ an. (4)

Abbildung 0.2: Liebezeit

ii) Bestimmen Sie $\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x}$.

iii) Es sei $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos^2 t \, dt$. Bestimmen Sie $F(\pi)$.

ii) Bestimmen Sie $\int \frac{\tan^n ax}{\cos^2 ax} dx \; (a \neq 0)$ - betrachten Sie ggf. zunächst den Fall $n = 1$.

2. i) Bestimmen Sie $\int t^2 \ln t \, dt$.

ii) Es sei $P(x)$ ein reelles Polynom mit

- einer einfachen Nullstellen bei $x_0 = 2$,
- einer dreifachen Nullstelle bei $x_0 = -\frac{3}{2}$
- einem Paar von doppelten komplexen Nullstelle bei $z_0 = 1 - \imath$ und $\overline{z_0} = 1 + \imath$.

Welche Gestalt hat die reelle Partialbruchdarstellung von $\frac{1}{P(x)}$?

Hinweis: Gesucht ist ein Ausdruck der Gestalt $\frac{A}{\cdots} + \cdots$ mit (hier nicht zu bestimmenden) Konstanten $A, \ldots$.

Abbildung 0.3: Liebezeit