# Analysis I für IGI

# Blatt 11

# Lösungsvorschlag

## Aufgabe 1

$Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\}$

$f(x) = e^x$

a) Es ist $I_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ und da $e^x \nearrow$, ist $m_k = \min_{x \in I_k} f(x) = e^{\frac{k-1}{n}}$, $M_k = \max_{x \in I_k} f(x) = e^{\frac{k}{n}}$

Ferner ist $|I_k| = \frac{1}{n}$. Also ist

$$O(Z_n, f) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| M_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n} (e^{\frac{1}{n}})^k - 1 \right) \overset{\text{geom. } \Sigma}{=} \frac{1}{n} \; \frac{1 - e^{\frac{n+1}{n}}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{n}$$

$$U(Z_n, f) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| m_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{1}{n}})^k \overset{\text{geom. } \Sigma}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} O(Z_n, f) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1 - e^{\frac{n+1}{n}}}{n(1 - e^{\frac{1}{n}})} - \frac{1}{n} \right)$$

Es ist $$\lim_{n\to\infty} n \cdot (1 - e^{\frac{1}{n}}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} -e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

aufgrund der Stetigkeit von $e^x$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1 - e^{\frac{n+1}{n}}}{n(1 - e^{\frac{1}{n}})} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1 - e}{-1} - 0 = e - 1$$

und genauso

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e}{n(1 - e^{\frac{1}{n}})} = e - 1$$

c) Es wird wohl $\int_0^1 e^x dx = e - 1$ gelten.

Das stimmt auch, denn da $e^x$ stetig ist, folgt mit dem Hauptsatz

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

# Aufgabe 2

$f(x) = \lfloor x \rfloor$

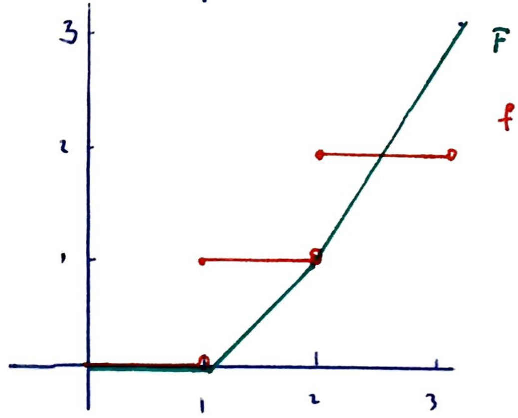
$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

- für $x \in [0,1)$ ist $\lfloor x \rfloor = 0$ und daher $F(x) = 0$
- für $x \in [1,2)$ ist $F(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor\,dt = \int_0^1 \lfloor t \rfloor\,dt + \int_1^x \underbrace{\lfloor t \rfloor}_{=1}\,dt = x-1$
- für $x \in [2,3)$ ist $F(x) = \int_0^1 \lfloor t \rfloor\,dt + \int_1^2 \lfloor t \rfloor\,dt + \int_2^x \underbrace{\lfloor t \rfloor}_{2}\,dt = 0 + 1 + 2\cdot(x-2) = 2x-3$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ x-1, & x \in [1,2) \\ 2x-3, & x \in [2,3) \end{cases}$$

Wegen $\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^-} F(x) = F(1)$ und $\lim_{x\to 2^+} F(x) = \lim_{x\to 2^-} F(x) = F(2)$ ist $F$ in $1$ und $2$ stetig. Für $x \in [0,3) \setminus \{1,2\}$ ist $F$ stetig als Polynom. Also ist $F$ stetig auf $[0,3)$.
Für $x \in [0,3) \setminus \{1,2\}$ ist $F$ diff'bar als Polynom.
Wegen $\lim_{x\to 1^-} F'(x) = 0$ und $\lim_{x \to 1^+} F'(x) = 1$ ist $F$ in $1$ nicht diff'bar. Genauso ist $F$ in $2$ nicht diff'bar.

$\Rightarrow F$ diff'bar auf $[0,3) \setminus \{1,2\}$.




Wir sehen: Da wo $f$ unstetig ist, ist $F$ nicht diff'bar und hat einen "Knick", ist aber stetig.

# Aufgabe 3

$f: I \to \mathbb{R}$ stetig. z.z.: $\exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

Beweis Da $I$ kompakt und $f$ stetig nimmt $f$ nach Weierstraß auf $I$ Min und Max an:

$\exists x^+ \in I$ mit $f(x^+) = M = \max_{x \in I} f(x)$, $\exists x^- \in I$ mit $f(x^-) = m = \min_{x \in I} f(x)$

Nun ist $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M \cdot (b-a) \Rightarrow M \geq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

$\int_a^b f(x) \geq \int_a^b m\,dx = m \cdot (b-a) \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

Nach dem ZWS (da $f$ stet) nimmt $f$ jeden Wert zwischen $m$ und $M$ an

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: \quad f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ $\square$

Alternativ Nach dem 1. HDI ist $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

da $F$ stetig und diff'bar $\Rightarrow \exists \xi \in (a,b): \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi) = f(\xi)$ $\square$

# Aufgabe 4

Die Integranden sind auf den gegebenen Integrationsintervallen alle stetig, daher können wir den 2. Hauptsatz anwenden.

a) $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -1 - (-1) = 0$

b) $\int_{-2}^{1} x^2 - 2x + 1 \, dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x]_{-2}^{1} = \frac{1}{3} - (-\frac{26}{3}) = 9$

c) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$

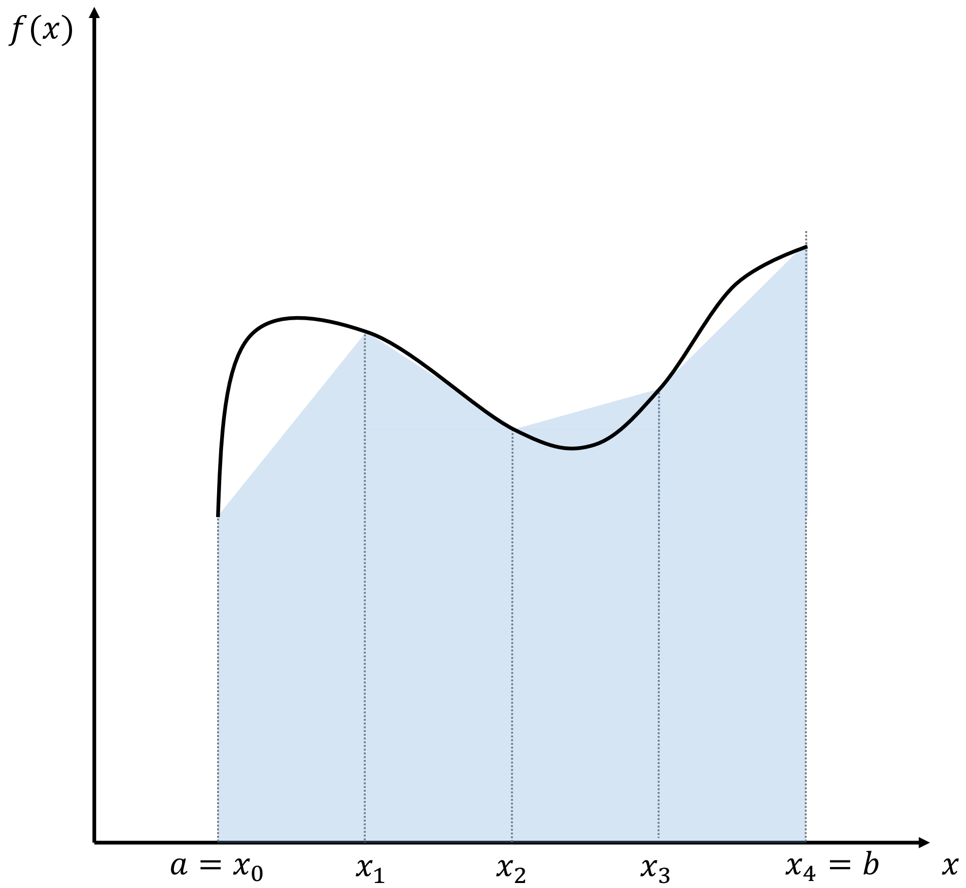
d) $\int_0^3 e^{2x} dx = [\frac{1}{2} e^{2x}]_0^3 = \frac{1}{2} e^6 - \frac{1}{2}$

e) $\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = 1$

f) $\int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx = [\frac{1}{2} \cdot \sin(2x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$

# Blatt 11, Aufgabe 5

(a) Skizze:




**Alternativ:** Rechtecke mit Breite $x_k - x_{k-1}$ und Höhe $\frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}$. Achtung: $f$ nimmt den Wert $\frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}$ nicht notwendigerweise im Mittelpunkt, also $\frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ an.

(b) Implementierung, Plot und Daten.

In R könnte eine Implementierung beispielsweise so aussehen:

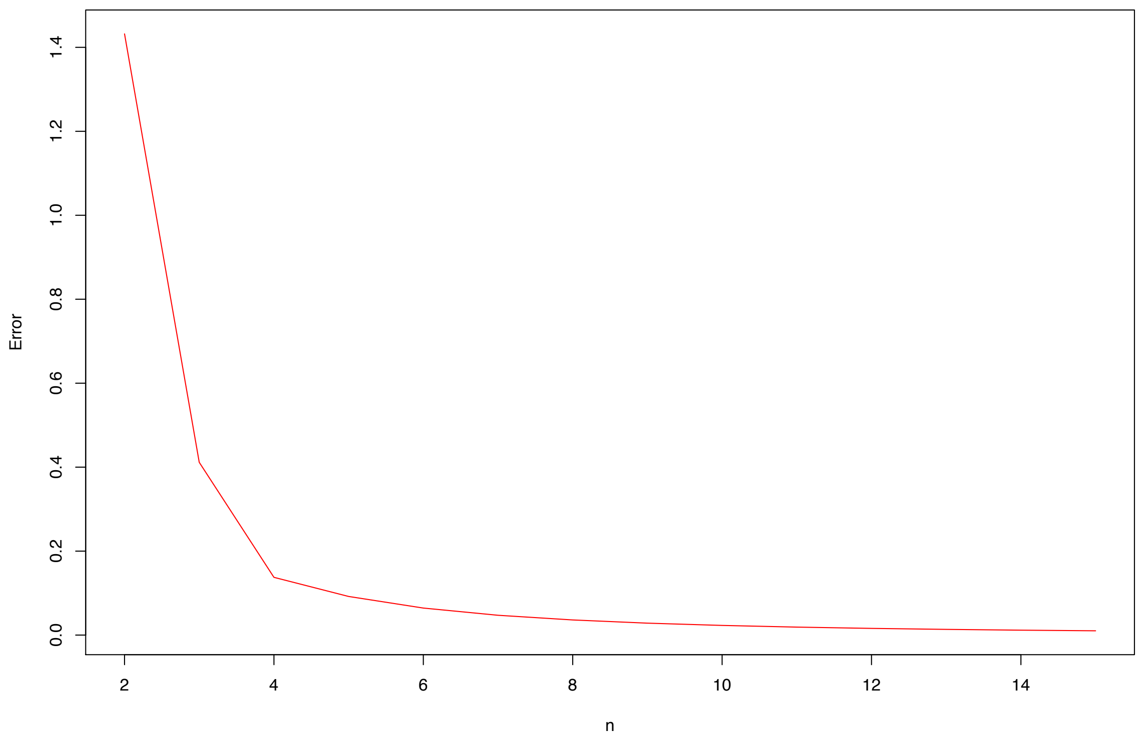
```
integral5b<-function(n,a,b){
  if(n%%1!=0 || n<1){
    warning("n has to be an integer greater than 1, try again.")
    return()
  }
  if(n>=2){
    h=(b-a)/n
    grid=seq(from=a+h,to=b-h,by=h)
    approx<-(h*(exp(-a*a/2)+exp(-b*b/2))/2+h*sum(exp(-grid^2/2)))
  } else {
    approx<-(b-a)/2*(exp(-a*a/2)+exp(-b*b/2))
  }
  trueval<-sqrt(2*pi)*(pnorm(b)-pnorm(a))
  error<-(trueval-approx)
  return(list(approx=approx,error=error))
```

```
for(i in 1:length(n)){
  errors[i]<-integral5b(n[i],a=-6,b=1.5)$error
}

plot(n,errors,type='l',col='red',xlab="n",ylab="Error")

cbind(n,errors)
```

Die Daten stellen sich tabellarisch wie folgt dar:

| $n$ | Error | $n$ | Error |
|---|---|---|---|
| 2 | 1.43209589 | 9 | 0.02840902 |
| 3 | 0.41155647 | 10 | 0.02297894 |
| 4 | 0.13756096 | 11 | 0.01897031 |
| 5 | 0.09197580 | 12 | 0.01592686 |
| 6 | 0.06435527 | 13 | 0.01356173 |
| 7 | 0.04715993 | 14 | 0.01168724 |
| 8 | 0.03602144 | 15 | 0.01017642 |

Und der Plot sieht so aus:



(c) Fehlerabschätzung.

Wir betrachten

$$E(h) = \int_a^b f(x)dx - T_h(f).$$

Das ist der (signierte) Integrationsfehler. Dem Hinweis folgend betrachten wir

$$E_k(h) = \int_{I_k} f(t)dt - \frac{h}{2}\big(f(x_{k-1}+h) + f(x_{k-1})\big)$$

Wir schreiben $x$ statt $x_{k-1}$:

$$= \int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{h}{2}\big(f(x+h) + f(x)\big)$$

Da $f$ zweimal stetig diff'bar (insbesondere also stetig), folgt mit einer Stammfunktion $F$ mit $F' = f$ und dem HDI

$$= F(x+h) - F(x) - \frac{h}{2}\big(f(x+h) + f(x)\big)$$

Da $F$ und $f$ nach dem HDI bzw. nach Voraussetzung diff'bar sind, folgt wegen $F' = f$

$$E_k'(h) = f(x+h) - \frac{1}{2}f(x+h) - \frac{h}{2}f'(x+h) - \frac{1}{2}f(x)$$
$$E_k''(h) = f'(x+h) - \frac{1}{2}f'(x+h) - \frac{h}{2}f''(x+h) - \frac{1}{2}f'(x+h) = -\frac{h}{2}f''(x+h)$$

Und mit $M_2 = \max\limits_{x\in I}|f''(x)|$ (was aufgrund der Stetigkeit von $f''$ sowie der Kompaktheit von $I_k$ existiert) folgt schließlich

$$|E_k''(h)| = \frac{h}{2}|f''(x+h)| \;\leq\; \frac{h}{2}\max_{x\in I_k}|f''(x)| \leq \frac{h}{2}M_2$$

da wegen $I_k \subset I$ gilt, dass $\max\limits_{x\in I_k}|f''(x)| \leq \max\limits_{x\in I}|f''(x)|$. Bemerke, dass $E_k'(0) = E_k(0) = 0$. Damit, und dem Hauptsatz der D/I-Rechnung folgt

$$|E_k'(h)| = |E_k'(h) - E_k'(0)| = |\int_0^h E_k''(x)\ dx| \leq \int_0^h |E_k''(x)|\ dx \;\leq \int_0^h \frac{x}{2}M_2\ dx = \frac{h^2}{4}M_2$$
$$|E_k(h)| = |E_k(h) - E_k(0)| = \;|\int_0^h E_k'(x)\ dx| \;\leq \int_0^h |E_k'(x)\ |\ dx \leq \int_0^h \frac{x^2}{4}M_2\ dx = \frac{h^3}{12}M_2$$

Der gesamte Fehler ist offensichtlich die Summe der Einzelfehler:

$$|E(h)| = |\sum_{k=1}^n E_k(h)| \leq \sum_{k=1}^n |E_k(h)| \leq \sum_{k=1}^n \frac{h^3}{12}M_2 = n\frac{h^3}{12}M_2 = \frac{(b-a)h^2}{12}M_2$$

da $h = \dfrac{b-a}{n}$. Insgesamt folgt also

$$|E(h)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12}M_2 = \mathcal{O}(h^2)$$

Halbiert man also $h$ (die Länge der Teilintervalle), was eine Verdopplung von $n$ bedeutet, so verviertelt sich der maximale Fehler.