Dr. Gerhard Baur
Lars von der Heide
Sommersemester 2022
Punktzahl: 20

Übungen Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure: Blatt 6

Aufgabe 1: (3+3)

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ stetig? Begründe jeweils.

$$f_1(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x < 0 \\ x^2 - 1, \text{ falls } x \geq 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0 \end{cases} \qquad f_3(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

Tipp für f_3: Betrachte $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{Z}$ separat.

b) Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die folgende Funktion stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist und $f(-7) = -13$ gilt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \begin{cases} ax + b, \text{ falls } x \leq 0 \\ e^{bx}, \text{ falls } x > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2: (3)

Es sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeige, dass ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = x^*$ existiert.

Aufgabe 3: (2+2+2)

a) Wir betrachten die Gleichung

$$e^{-x} + \cos(7x + 1) - 3x^2 + x^3 + xe^{x^3} = 0$$

Zeige, dass diese Gleichung eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt.

b) Wir betrachten die Gleichung

$$\sin(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Zeige, dass diese Gleichung unendlich viele Lösungen in $\mathbb{R}$ besitzt.

c) Bestimme den Wert von $\sqrt{2}$ auf zwei Nachkommastellen genau, indem du das Bisektionsverfahren auf die Funktion anwendest, welche durch die Gleichung $f(x) = x^2 - 2$ gegeben ist. Benutze dafür das Startintervall $[1, 2]$.

Aufgabe 4: (3+2)

Bestimme mit der *Definition der Ableitung* die Ableitung von

a) $f(x) = \sqrt{x}$ an einer Stelle $a > 0$. Was gilt für $a = 0$? Untersuche f hier auf (rechtsseitige) Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ an einer Stelle $a \neq 1$.