Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Philipp Rieder

Probeklausur – Bearbeitungzeit 120 Minuten

Hinweise

- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben, davon sind die Aufgaben 1-3 von allen Studierenden zu bearbeiten. Die Aufgaben 4-6 unterscheiden sich für die Module „Angewandte Stochastik" und „Angewandte Stochastik 1" und sind entsprechend gekennzeichnet.
- Die Ergebnisse sind auf 4 Nachkommastellen zu runden.
- Lösungswege sind zu dokumentieren.
- Erlaubte Hilfsmittel: Ein handschriftlich (beidseitig) beschriebenes DIN A4 Blatt und ein nicht-programmierbarer Taschenrechner.

Allgemeiner Teil

Aufgabe 1

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq -e \\ \frac{1}{2e^2}(x+e)^2 & , -e \leq x < 0 \\ \frac{1}{4\pi}x + \frac{3}{4} & , 0 \leq x < \pi \\ 1 & , x \geq \pi \end{cases}$$

Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten

(a) $\mathbb{P}(X = 0)$

(b) $\mathbb{P}(X < 0)$

(c) $\mathbb{P}(X > 0)$

(d) $\mathbb{P}(X \in (-e, -\frac{1}{2}))$

(e) $\mathbb{P}(X \in [-e, 1])$.

Aufgabe 2

Sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor dessen Zähldichte gegeben ist durch

Y	$X = -2$	3	4
1	0.2	0.15	0.1
2	0.15	0.3	0.1

(a) Berechne jeweils die Randzähldichte und Randverteilungsfunktion von X und Y.

(b) Berechne $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ und $\mathbb{E}XY$.

(c) Berechne $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(d) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 3

Seien $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mu = \mathbb{E}X_1$ und
$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Außerdem seien $a \in \mathbb{R}$, $s > 0$ und die Dichte f von X_1 sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x) - a}{s}\right)^2 \right\}, \; x > 0,$$

wobei $\log(x)$ den Logarithmus an der Stelle x bzgl. der Basis e bezeichnet.

(a) Berechne μ. (Hinweis: Führe eine geeignete Substitution zu Beginn der Integration durch.)

(b) Nehme nun an, dass $n = 100$, $\mu = 1$, $\sigma^2 = e - 1 \approx 1.718$ und $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Nähere die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \leq 110)$ mit dem Zentralen Grenzwertsatz an. (Hinweis: Die Funktionswerte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sind dieser Klausur angehängt.)

Angewandte Stochastik (Moodlekurs: „Informatik“)

Aufgabe 4

Die folgende Stichprobe beschriebt die Menge an Getränken (in ml) die von Philipp an verschiedenen Tagen zu sich genommen wird

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1250	1250	1050	900	1200	1750	1800	1700	2000	1550

(a) Berechne den Mittelwert, Median sowie das 25%− und 75%− Quantil der Stichprobe

(b) Skizziere die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe.

Außerdem sei durch

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8,	y_9	y_{10}
22	25	20	15	18	30	28	32	35	26

die Tageshöchsttemperatur (in $°C$) an den jeweiligen Tagen gegeben.

(c) Bestimme die Parameter $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ der Regressionsgeraden.

(d) Prognostiziere anhand Philipps Getränkekonsum die Tageshöchsttemperatur, wenn bekannt ist, dass er 1400 ml getrunken hat.

Aufgabe 5

Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine Stichprobe von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei X_1 durch die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte definiert ist

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \lambda(2x - 1) & x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem sei $\hat{\lambda} = 4(1 - \frac{3}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i)$ ein Schätzer für den Parameter λ.

(a) Prüfe ob $\hat{\lambda}$ erwartungstreu ist.

(b) Prüfe ob $\hat{\lambda}$ stark konsistent ist.

Aufgabe 6

Jede korrekt angekreuzte Antwort gibt einen Punkt, jede falsch angekreuzte Antwort gibt einen Minuspunkt. Wenn Du die Antwort nicht kennst, kannst Du auch keine der beiden

Optionen ankreuzen und erhältst für diesen Teil weder einen Plus- noch einen Minuspunkt. Es können minimal 0 Punkte erreicht werden.

	Richtig	Falsch	
(a)	☐	☐	Eine σ-Algebra besteht aus mindestens aus zwei Elementen: dem Grundraum Ω und der leeren Menge.
(b)	☐	☐	Die Fläche unter der Dichtefunktion einer absolutstetigen Zufallsvariable ist gleich Eins.
(c)	☐	☐	Seien X und Y Zufallsvariablen mit $Cov(X, Y) = 0$. Dann sind X und Y unabhängig.
(d)	☐	☐	Bei der Standartnormalverteilung hat jeder Wert $x \in \mathbb{R}$ die gleiche Wahrscheinlichkeit.
(e)	☐	☐	Erwartungstreue Schätzer sind immer schwach konsistent.
(f)	☐	☐	Ein Vorteil eines Kerndichteschätzers ist, dass er eine (möglicherweise) stetige Funktion durch ein Treppenfunktion approximiert.
(g)	☐	☐	Eine Quantilfunktion ist die spezille verallgemeinerte Inverese der Verteilungsfunktion.

Angewandte Stochastik 1 (Moodlekurs: „CSE“)

Aufgabe 4

Zum Lernen für die Klausur in Angewandter Stochastik findet sich eine Lerngruppe aus 10 Studierenden zusammen. Um den Lernplan zu besprechen treffen sie sich in einer Ulmer Kneipe und stoßen mit ihren Getränken an. Dabei werden sie direkt mit einer Problemstellung konfrontiert, die so auch in der Klausur gefragt werden könnte.

(a) Wie oft hört man die Gläser klingen, wenn jeder mit jedem genau einmal anstößt?

Die Gruppe besteht aus sechs Studierenden die ihre Übungsblätter gewissenhaft bearbeitet haben und vier die lediglich die Lösungen abgeschrieben haben. Aus Erfahnrungen ist bekannt, das Studierende, welche die Blätter selbst bearbeitet haben mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% bestehen, Abschreiber nur mit 60%.

(b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Studierende der Gruppe nicht besthen?

(c) Wenn genau zwei nicht bestehen, wie hoch ist die Wahrschenlichkeit, dass es zwei Abschreiber sind?

Aufgabe 5

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1], \lambda)$. Hierbei sei $\mathcal{B}([0,1])$ die Borel'sche σ-Algebra auf dem Intervall $[0,1]$ sowie λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$ (Das Lebesguemaß weist einem Intervall seine Länge zu, es gilt also z.B. $\lambda([0.1, 0.5]) = 0.4)$). Konstruiere eine Zufallsvariable X, so dass $X \sim \text{Poi}\ (\beta)$ mit $\beta > 0$, d.h. eine Zufallsvariable die poissonverteilt mit dem Parameter $\beta > 0$ ist. Zeige, dass für deine konstruierte Zufallsvariable X tatsächlich $X \sim \text{Poi}(\beta)$ gilt.

Aufgabe 6

Jede korrekt angekreuzte Antwort gibt einen Punkt, jede falsch angekreuzte Antwort gibt einen Minuspunkt. Wenn Du die Antwort nicht kennst, kannst Du auch keine der beiden Optionen ankreuzen und erhältst für diesen Teil weder einen Plus- noch einen Minuspunkt.

Es können minimal 0 Punkte erreicht werden.

	Richtig	Falsch	
(a)	☐	☐	Eine σ-Algebra besteht aus mindestens aus zwei Elementen: dem Grundraum Ω und der leeren Menge.
(b)	☐	☐	Ereignis und Gegenereignis sind nicht stochastisch unabhängig.
(c)	☐	☐	Eine Verteilungsfunktion ist rechtsseitig stetig.
(d)	☐	☐	Die Fläche unter der Dichtefunktion einer absolutstetigen Zufallsvariable ist gleich Eins.
(e)	☐	☐	Eine Zufallsvaraible kann auch negative Werte annhemnen.
(f)	☐	☐	Seien X und Y Zufallsvariablen mit $Cov(X, Y) = 0$. Dann sind X und Y unabhängig.
(g)	☐	☐	Bei der Standartnormalverteilung hat jeder Wert $x \in \mathbb{R}$ die gleiche Wahrscheinlichkeit.