Mathematatik für Informatik II - Tutorium - Woche 6

Aufgabe 6

Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ-δ-Kriteriums (Definition 10.1.3), dass für jedes $x_0 \in [2, 5]$ der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{1 - x^2}$$

existiert.

Aufgabe 6

Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ-δ-Kriteriums (Definition 10.1.3), dass für jedes $x_0 \in [2, 5]$ der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{1 - x^2}$$

existiert.

Funktionsgrenzwerte

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f konvergiert gegen a für $x \to x_0$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \left(x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \right)$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ-δ-Kriteriums (Definition 10.1.3), dass für jedes $x_0 \in [2, 5]$ der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{1 - x^2}$$

existiert.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$, sodass $\delta < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{100}\right\}$.
Sei $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$. Zunächst gilt

$$|x + x_0| \leq |x| + |x_0| = |x - x_0 + x_0| + |x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0| \quad (*)$$

Aufgabe 6

Beweis: ... Zeige nun $\left|\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x_0^2}\right| < \varepsilon$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x_0^2}\right| &= \left|\frac{1-x_0^2-(1-x^2)}{(1-x^2)(1-x_0^2)}\right| \\
&= \left|\frac{x^2-x_0^2}{(1-x^2)(1-x_0^2)}\right| \\
&= \frac{|x-x_0|\,|x+x_0|}{|(1-x^2)(1-x_0^2)|} \overset{(*)}{<} \frac{\delta(\delta+2|x_0|)}{|1-x^2|\,|1-x_0^2|}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

O.B.d.A. sei $\delta < \frac{1}{2}$. Mit $x_0 \in [2,5]$ folgt $x \geq \frac{3}{2}$, womit $x^2 \geq \frac{9}{4} > 2$. Somit gilt

$$1 - x^2 < -1 \implies \left|1 - x^2\right| \geq 1 \implies \frac{\delta(\delta + 2|x_0|)}{|1 - x^2| \left|1 - x_0^2\right|} \geq \frac{\delta(\delta + 2|x_0|)}{\left|1 - x_0^2\right|}$$

Mit dem selben Argument sieht man $\left|1 - x_0^2\right| \geq 1$. Ebenso gilt nach Voraussetzung $2|x_0| \leq 10$ und wir schließen somit

$$\left|\frac{1}{1 - x^2} - \frac{1}{1 - x_0^2}\right| \leq \delta(\delta + 10) < \varepsilon$$

Es existiert also der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{1-x^2}$ für alle $x_0 \in [2,5]$ nach dem ϵ-δ-Kriterium.

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x}$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$,
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$,
6. $\lim_{x\to \infty} \frac{6x^4+12x^2-13}{3x^4-7x^3+2x+1}$.

Aufgabe 7

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Schreibe

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} =: f(x)$$

Die Reihe besitzt den Konvergenzradius $R = \infty$, d.h. $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. sei nun $|x| \leq 1$ (da wir den Grenzwert für $x \to 0$ betrachten). Aus den Konvergenzkriterien für Reihen folgern wir:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \left(\left| \sum_{k=N+1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Aufgabe 7

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

... Beachte das $\left|x^{2k}\right| \leq \left|x^k\right| \leq |x| \overset{x\to 0}{\to} 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei nun $|x| \overset{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{2N}$, dann ist

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\sin x}{x} - \underbrace{1}_{\text{siehe Folie 11}}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} - 1\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{N}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \sum_{k=N+1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\right| \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left|(-1)^k\right| \frac{\left|x^{2k}\right|}{(2k+1)!} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\overset{(2)}{\leq} \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

(1) Diese Abschätzung erhalten wir erst am Ende unserer Rechnung.

(2) Nach Annahme gilt $|x| \leq 1$, womit $\left|x^{2k}\right| \leq |x|$ und somit

$$\sum_{k=1}^{N} |(-1)^k| \cdot \frac{\left|x^{2k}\right|}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=1}^{N} |x|\,.$$

Insgesamt soll nun $\sum_{k=1}^{N} |x| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$ gelten. Wir wissen $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ und da $x_0 = 0$ folgt $|x| = |x - 0| < \delta$, womit

$$\sum_{k=1}^{N} |x| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{N} \delta + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \Rightarrow \delta \leq \frac{\varepsilon}{2N},$$

womit sich unsere Abschätzung in (1) ergibt. Somit kann $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2N}\right\}$ gesetzt werden. $(\triangle)$

Aufgabe 7

($\triangle$) Beachte: $N = N(\varepsilon)$ ist ebenfalls von ε abhängig. Die Existenz eines solchen N dürfen wir jedoch annehmen, da wir wissen das die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Der Grenzwert konnte wie folgt bestimmt werden: Startet man mit

$$\left|\frac{\sin x}{x} - a\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} - a\right| = \left|\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \sum_{k=N+1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} - a\right|,$$

sieht man im Term $\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k+1)!}$ eine Konstante, $(-1)^0 \frac{x^{2\cdot 0}}{(2\cdot 0+1)!} = 1$. Somit sind das nullte Reihenglied und der Grenzwert die einzigen Konstanten in unserem Term (alle anderen Reihenglieder lassen sich durch δ oder ε abschätzen). Damit der gesamte Term also für alle $\varepsilon > 0$ nach oben beschränkt wird, müssen sich das nullte Reihenglied und der Grenzwert rauskürzen. Wir ,,raten" daher $a = 1$ und unsere Rechnung bestätigt diese Wahl.

Aufgabe 7

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x}$

Mit Aufgabenteil 1 folgt

$$\frac{\sin x - x}{x} = \frac{\sin x}{x} - 1 \overset{x\to 0}{\to} 1 - 1 = 0.$$

Aufgabe 7

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$

Mit Aufgabenteil 1 folgt

$$\frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \frac{-\sin^2 x}{x^2} = \left(-\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right) \overset{x\to 0}{\to} -1 \cdot 1 = -1$$

Aufgabe 7

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

Analog zu 1. Schreibe

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} =: f(x)$$

und beachte, dass f den Konvergenzradius $R = \infty$ besitzt und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Aufgabe 7

4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

... Wieder sei $|x| < \dfrac{\varepsilon}{2N}$ und o.B.d.A. $|x| \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{(k+1)!} \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \right| \\
&< \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

5. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, $x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ beliebig. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{x_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,0)$, $y_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ beliebig. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|y_n|}{y_n} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1.$$

Somit existiert der Grenzwert nach dem Folgekriterium nicht, da $1 \neq -1$.

Aufgabe 7

6. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6x^4 + 12x^2 - 13}{3x^4 - 7x^3 + 2x + 1}$

Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4 + 12x^2 - 13}{3x^4 - 7x^3 + 2x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{6 + \frac{12}{x^2} - \frac{13}{x^4}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = \frac{6}{3} = 2.$$