ulm university universität uulm

Sommersemester 2020

Institut für Stochastik

Dr. Larisa Yaroslavtseva
Freimut von Loeper

Angewandte Stochastik 1

Musterlösung zum Übungsblatt 1

Aufgabe (1)[5 Punkte]

Sei Ω eine Menge und $A, B \subset \Omega$. Geben Sie die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \backslash B$ an:

a) $A = \{1, 5, 6\}$ und $B = \{5, 6, 7\}$,

b) $A = [0, 2]$ und $B = (0, 1] \cup \{2\}$,

c) $A = [0, 1]$ und $B = \mathbb{R} \backslash [0, 1]$,

d) $A = \{\{\circ, \blacksquare\}, \{\triangle\}\}$ und $B = \{\circ, \blacksquare, \triangle, \square\}$,

e) $A = \{\alpha > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty\}$ und $B = \{z \in \mathbb{N} : z^3 - 9z = 0\}$.

Lösung:

a) $A \cap B = \{5, 6\}$, $A \cup B = \{1, 5, 6, 7\}$ und $A \backslash B = \{1\}$

b) Es gilt $B \subset A$. Somit folgt $A \cap B = B = (0, 1] \cup 2$ und $A \cup B = A = [0, 2]$. Ferner gilt $A \backslash B = \{0\} \cup (1, 2)$

c) $A \cap B = \varnothing$ und $A \cup B = \mathbb{R}$. Wegen $A \cap B = \varnothing$ ist $A \backslash B = A = [0, 1]$.

d) $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \{\{\circ, \blacksquare\}, \{\triangle\}, \circ, \blacksquare, \triangle, \square\}$ und $A \backslash B = A = \{\{\circ, \blacksquare\}, \{\triangle\}\}$

e) $A = \{\alpha > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty\} = (1, \infty)$, denn die Reihe divergiert für $\alpha \leq 1$ und konvergiert für $\alpha > 1$ (Beweis mit z.B. Cauchy-Kriterium). Ferner gilt

$$0 = z^3 - 9z \iff 0 = z \cdot (z + 3) \cdot (z - 3) \iff z \in \{0, -3, 3\}.$$

Es folgt: $B = \{z \in \mathbb{N} : z \in \{0, -3, 3\}\} = \{3\}$.

Somit gilt: $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = (1, \infty)$ und $A \backslash B = (1, 3) \cup (3, \infty)$.

Aufgabe (2)[2+6=8 Punkte]

a) Gegeben sei eine Menge Ω und Mengen $A, B \subset \Omega$. Bestimmen Sie alle $C \subset \Omega$ mit

$$(C \cup A)^c \cup (C \cup A^c)^c = B.$$

b) Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und betrachten Sie die Mengen $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ mit

$$A_i = \{2i,\, 2i+1,\, 2i+2, \ldots\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

Erinnerung: Sei Ω eine Menge und $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$. Dann sind die Mengen $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ definiert als

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N} : x \in A_i\},$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \Omega \mid \exists i \in \mathbb{N} : x \in A_i\}.$$

Lösung:

a) Es folgt aus der de Morgansche Regel:

$$\begin{aligned}(C \cup A)^c \cup (C \cup A^c)^c &= ((C \cup A) \cap (C \cup A^c))^c \\ &= ((C \cup (A \cap A^c))^c \\ &= C^c.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$(C \cup A)^c \cup (C \cup A^c)^c = B \iff C^c = B \iff C = B^c.$$

Als Ergebnis erhalten wir: $C = B^c$.

b) Wir erhalten die Mengen:

1. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, da $A_i \subset \mathbb{N}$ und für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$: $n \notin A_n$.
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, da $A_i \subset A_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $A_1 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
3. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c = \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big)^c = \{1\}$ wegen der de Morganschen Regel, $\Omega = \mathbb{N}$ und 2.

Aufgabe (3)[6 Punkte]
Sei Ω eine Menge

und $A, B, C \subset \Omega$ drei Ereignisse. Geben Sie ein Ereignis D an so dass $\omega \in D$ bedeutet

a) alle drei Ereignisse A, B, C treten ein,

b) keines der Ereignisse A, B, C tritt ein,

c) mindestens eines der Ereignisse A, B, C tritt ein,

d) genau eines der Ereignisse A, B, C tritt ein,

e) höchstens eines der Ereignisse A, B, C tritt ein,

f) genau zwei der Ereignisse A, B, C treten ein.

Lösung:

a) $D = A \cap B \cap C$

b) $D = A^c \cap B^c \cap C^c$

c) $D = A \cup B \cup C$

d) $D = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

e) $D = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

f) $D = (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)$

Aufgabe (4)[3 Punkte]

Geben Sie den Ergebnisraum Ω der folgenden Zufallsexperimente an.

a) Eine Münze wird drei mal geworfen.

b) Ein Würfel wird zwei mal geworfen und die Summe der Augenzahen wird gebildet.

c) In einer Schachtel liegen fünf von 1 bis 5 nummerierte Kugeln. Es werden zufällig nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(K,K,K),(Z,K,K),(K,Z,K),(K,K,Z),\\ &(Z,Z,K),(Z,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}\end{aligned}$$

b) $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

c)

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\ &(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),\\ &(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}\end{aligned}$$