ulm university universität uulm

1. Klausur Analysis I für Ing/Inf

2.8.2014

1. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit entweder $a_1, \dots, a_n \geq 0$ oder $-1 \leq a_1, \dots, a_n \leq 0$. Zeigen Sie die Ungleichung [6]
$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

2. Untersuchen Sie mit Hilfe der Definition die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei [5]
$$a_n = \frac{2n^3+3n^2-8n}{3n^3-2n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

3. Zeigen Sie, dass der folgende Schluss im Allgemeinen falsch ist: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Folgen mit $a_n + b_n \to c \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$, dann existieren auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. [3]

4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz. [5+4]

   (a) $\displaystyle\sum_{k=}^{\infty}(-1)^k\frac{3^k+2}{4^k-6}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{k=}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$.

5. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Geben Sie eine Konstante C an, so dass die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, $gf(x) = f(x) + C$ auf I positiv ist. [4]

6. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := \begin{cases} e^{x+1} & \text{für } < -1, \\ -\dfrac{x^2}{2} + 3 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 3 - x & \text{für } 0 < x < 2, \\ e^{-x+2} & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$
   Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ f stetig oder differenzierbar ist. [12]

7. Zeigen Sie, dass $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1}{2}\arctan x$ eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^4}$ auf $(-1, 1)$ ist. [6]

8. Berechnen Sie, falls existent, folgende Integrale. Leiten Sie dabei ggf. verwendete Stammfunktionen her. [5+11]

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$,

   (b) $\displaystyle\int_0^2\frac{4x^2+2x+9}{(x-1)(x^2+x+3)}dx$.

   Hinweis: Wenn Sie bei der Partialbruchdarstellung in 8b Schwierigkeiten haben, können Sie statt dessen die Funktion $\dfrac{x}{x^2+2x+3} + \dfrac{4}{x-1}$ untersuchen (Punktabzug falls die Partialbruchzerlegung fehlt).

Viel Erfolg!