Analysis I für IBI

Blatt 8

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)' = ?$

Wir vermuten: $\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'(a) = \sum_{k=1}^{n}\left(f_k'(a) \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n} f_\ell(x)\right)$ (also n Summanden, in jedem wird genau eines der f_i abgeleitet.)

Vollständige Induktion nach n

I.A. $n=1$: $(f_1)'(a) = \sum_{k=1}^{1} f_k'(a)\cdot 1$ ✓ (leeres Produkt: $\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq 1}}^{1} f_\ell(x) = 1$)

I.S. Gelte Beh. für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1} f_i\right)'(a) = \left(\prod_{i=1}^{n} f_i \cdot f_{n+1}\right)'(a) \overset{\text{Produkt-regel}}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'(a)\cdot f_{n+1}(a) + \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(a)\right)\cdot f_{n+1}'(a)$$

$$\overset{\text{Ind.hyp.}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k'(a)\cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n} f_\ell(a)\right) f_{n+1}(a) + f_{n+1}'(a)\cdot \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq n+1}}^{n} f_\ell(a)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} f_k'(a) \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n+1} f_\ell(a)\right) + f_{n+1}'(a) \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq n+1}}^{n} f_\ell(a) = \sum_{k=1}^{n+1} f_k'(a) \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n+1} f_\ell(a) \qquad \boxtimes$$

Aufgabe 2

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

als Funktion von r: $f(r) = \pi r^2 h$. Elastizität: $E(a) = a \cdot \frac{f'(a)}{f(a)} = a \cdot \frac{2\pi a h}{\pi a^2 h} = 2$

$\Rightarrow$ Fehler von x% bewirkt Fehler von 2x%

als Funktion von h: $f(h) = \pi r^2 h$. Elastizität: $E(a) = a \frac{f'(a)}{f(a)} = a \cdot \frac{\pi r^2}{\pi r^2 a} = 1$

$\Rightarrow$ Fehler von y% bewirkt Fehler von y%

Aufgabe 3

$\arccos(x)' = ?$

Mit Formel für Umkehrfunktion:

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sqrt{\sin^2(\arccos(x))}}$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

Zeigen nun die Identität: $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x) \iff \underbrace{\arcsin(x) + \arccos(x) - \frac{\pi}{2}}_{=f(x)} = 0$

$f(x)$ ~~stetig und~~ diff'bar als Summe diff'barer Fkt mit

$$f'(x) = \arcsin'(x) + \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

$\Rightarrow f(x) = \text{const} = f(1) = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow$ Beh. $\varnothing$

Aufgabe 4

a) Es seien $a, b \in (1,\infty)$ und $a \leq b$. Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ist stetig und diff'bar auf $[1,\infty)$ mit $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. OBdA $a<b$. $\Rightarrow$ nach dem MWS gibt es ein $\xi \in (1,\infty)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}}{b-a} = f'(\xi) = \frac{1}{3} \cdot \xi^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}} \leq \frac{1}{3}$$

denn $f'(\xi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}} \leq \frac{1}{3}$, da $\xi^2 \geq 1$

$\Rightarrow \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} \leq \frac{1}{3}(b-a)$ (da $b>a$ können wir obige Ungl. mit $(b-a)$ multiplizieren)

b) $f(x) = 2x^7 + x^5 - \sin(x) + 2x$

f stetig und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists x^* \in (-\infty,\infty) : f(x^*) = 0$

Zeigen noch: Diese Nullstelle ist eindeutig.

Dazu: $f'(x) = \underbrace{14x^6 + 5x^4}_{\geq 0} \underbrace{- \cos(x) + 2}_{>0} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv, also aus $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Rightarrow$ es kann nur eine Nullstelle geben

c) $f, g: I \to \mathbb{R}$, $f(0) = g(0)$, $f'(x) \geq g'(x)$

z.z. $f(x) \geq g(x) \; \forall x \in I$.

Betrachte $h(x) = f(x) - g(x)$

h ist stetig und diff'bar als Summe stet./diff'barer Funktion mit

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0 \; \forall x \in I$$

Also ist h monoton wachsend $\Rightarrow h(x) \geq h(0) = f(0) - g(0) = 0 \quad \forall x \in I$

und damit $\quad f(x) - g(x) \geq 0 \; \forall x \in I$ $\boxtimes$

Aufgabe 5

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

~~Nullstellen:~~ $\cancel{f(x) = 0 \Rightarrow x(2x^2 + 3x - 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{-3+\sqrt{105}}{4}, x_3 = \frac{-3-\sqrt{105}}{4}}$

Extrema notwendig: $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad \Rightarrow x_1^* = 1, \; x_2^* = -2$$

Betrachte 2. Ableitung: $f''(x) = 12x + 6$

$$\Rightarrow f''(x_1^*) > 0, \; f''(x_2^*) < 0$$

$\Rightarrow$ lok. Min. bei $x_1^* = 1$, lok Max bei $x_2^* = -2$

b) $f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + x + 1)$ auf $[-0.5, 2]$

Notwendig für Extrema im Inneren: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (x^2 + x + 1) + e^{-x} \cdot (2x + 1) = e^{-x}(-x^2 + x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 1$$

Zweite Abltg: $f''(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (-x^2 + x) + e^{-x}(-2x + 1) = e^{-x}(x^2 - 3x + 1)$

$f''(x_1) = f''(0) > 0 \quad \Rightarrow$ lok Min mit $f(0) = 1$

$f''(x_2) = f''(1) < 0 \quad \Rightarrow$ lok Max mit $f(1) \approx 1.1$

Betrachte nun auch den Rand:

x	-0.5	0	1	2
$f(x)$	1.24	1	1.1	0.95
	glob. Max	lok Min	lok Max	glob Min

c) $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $\quad x$ sd $\sum_{k=1}^{n} (x-a_k)^2$ minimal?

$$f(x) := \sum_{k=1}^{n} (x-a_k)^2$$

notw. für Min: $f'(x) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 2(x-a_k) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x - \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$

betrachte $f''(x) = \sum_{k=1}^{n} 2 = 2n > 0 \rightarrow$ Min. bei $x = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$ (das ist btw der Durchschnitt der a_k)

Aufgabe 6

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_0) = x_0$, $|f'(x_0)| < 1$.

$f_1(x) := f(x)$; $f_{n+1}(x) := f(f_n(x))$

z.z. $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = 0$

Wir zeigen zunächst: $f_n'(x_0) = (f'(x_0))^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$

Induktion nach n:

$n=0$: $f_0'(x_0) = f'(x_0)$ ✓

$n \to n+1$: $f_{n+1}'(x_0) = \left(f(f_n(x_0))\right)' \overset{\text{Kettenregel}}{=} f'(\underbrace{f_n(x_0)}_{x_0}) \cdot f_n'(x_0) \overset{\text{I.H.}}{=} f'(x_0)(f'(x_0))^{n+1} = (f'(x_0))^{n+2}$

Damit folgt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = \lim_{n\to\infty} (f'(x_0))^{n+1} = 0, \text{ da } |f'(x_0)| < 1$$