Repetitorium Analysis 1 Mathe

Sommersemester 2022

Vollständige Induktion

§ 1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Dies ist eine Methode, um Aussagen über natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$) zu beweisen. Sei dazu $A(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ eine solche Aussage. Es möge gelten:

(1) $A(1)$ ist richtig (Induktionsanfang)

(2) Aus der Richtigkeit von $A(n)$ folgt die Richtigkeit von $A(n+1)$.
$\Big($kurz: $A(n) \;\Rightarrow\; A(n+1)\Big)$ (Induktionsschritt)

Dann gilt: $A(n)$ ist richtig $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion

- Beispiel $\sum_{i=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Aufgaben

Zeige durch vollständige Induktion, dass für beliebige $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq a_i \leq 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt, dass

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Altklausur

Zeige durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass [12]

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Altklausur 2014

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Ungleichung $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. [6]

Betrag

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Für $|a|$ gelten dann die folgenden Rechenregeln:

(i) $|a| = |-a|$ stets; $|a| \geq 0$ stets und $|a| = 0 \iff a = 0$

(ii) $|ab| = |a| \cdot |b| \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

(iii) $|a + b| \leq |a| + |b| \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ und

$|a + b| \geq |a| - |b|$ sowie $|a + b| \geq |b| - |a|$ stets

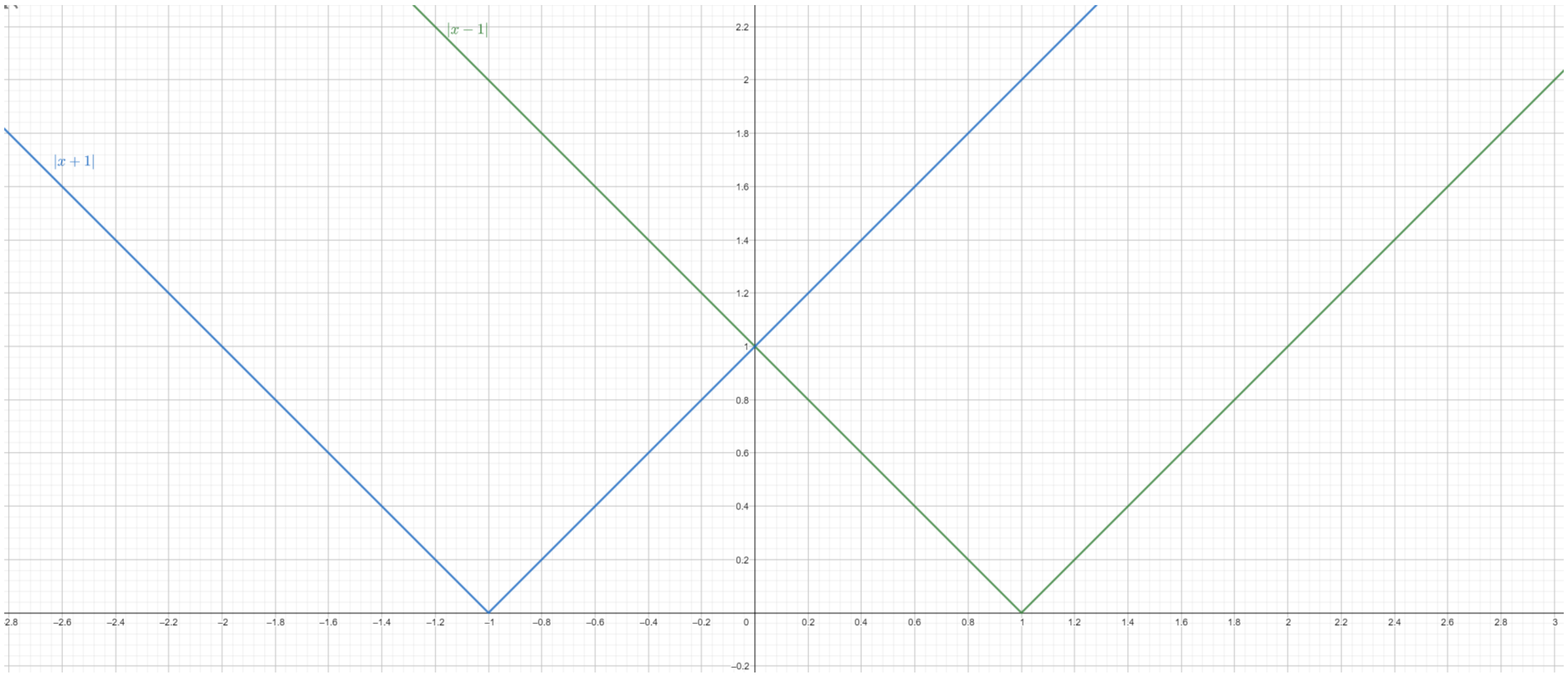
Als geometrisches Modell führt man gerne den **Zahlenstrahl** ein. Das ist eine orientierte skalierte Gerade, meist horizontal gedacht.

Betrag

Bespiel:

Welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichung

$$(*) \quad |x-1| + |x+1| < 4\,?$$



Betrag

Bespiel:

Welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichung

$$(*) \quad |x-1| + |x+1| < 4 \,?$$

Sei M eine Menge

$$Max(M) = \max_{x \in M} x$$
$$Min(M) = \min_{x \in M} x$$
$$\sup(M) = \min_{x}\{x \geq m \;\forall\, m \in M\}$$
$$\inf(M) = \max_{x}\{x \leq m \;\forall\, m \in M\}$$

Aufgaben

Blatt 13

(a) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Betragsungleichung $|x| \leq |x+1|$ erfüllen.

(b) Gib, falls existent, Maximum, Supremum, Minimum, Infimum der Menge $A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$ an.

Wichtige Summen und Funktionen

Wichtige Reihen

- $(a+b)^n = \sum_k^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Aufgaben

Zeige, dass für alle $n \geq 2$

$$\sqrt[n]{1+2n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

gilt.

Tipp: Kann man direkt ohne Induktion zeigen. Betrachte die rechte Seite potenziert (also $(\dots)^n$*) und wende den binomischen Lehrsatz an.*

Schreibe folgenden Term ohne Summe

$$\sum_{k=1}^{n+2} \left(4 * q^{k-1} + \frac{k}{2}\right)$$

Wichtige Funktionen

- $\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
- $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist ein Polynom

Wichtige Funktionen

- **Logarithmus und Exponentialfunktion** $(e^x \; und \; \ln(x))$

$$\ln(e^x) = x$$

$$\log_a(a^x) = x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(x^a) = a * \log(x)$$

Wichtige Funktionen

(0) Sinus und Kosinus sind $2\pi-$ periodisch; der Tangens ist $\pi-$ periodisch:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\ \cos(x+2\pi)=\cos x;\ \tan(x+\pi)=\tan x$$

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ ("ungerade Funktion")
$\cos(-x)=\cos x$ ("gerade Funktion")

(ii) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ (Pythagoras)

(iii) $-1\le\cos x\le 1,\ -1\le\sin x\le 1$ stets

(iv) $x\ge 0\ \Rightarrow\ \sin x\le x$

(v) Nullstellen von $\sin x:\ 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ldots$

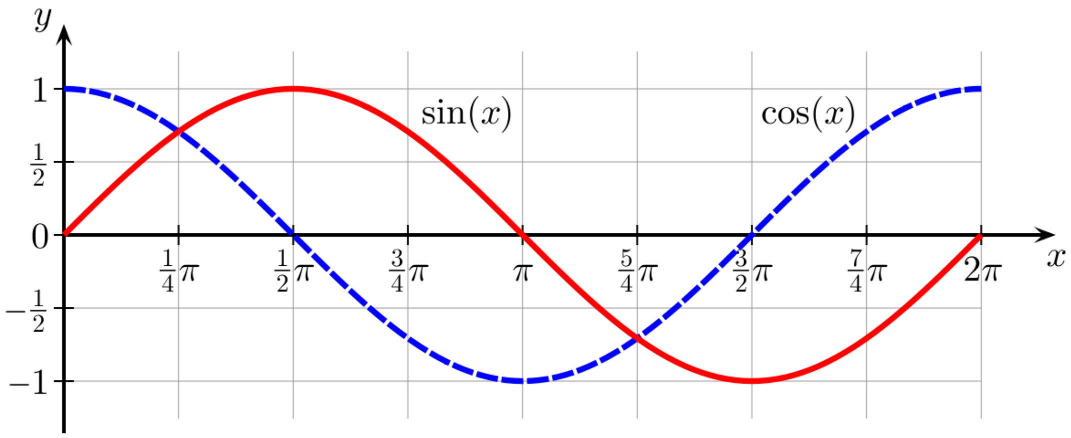
Nullstellen von $\cos x:\ \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ldots$

Definitionslücken von $\tan x:\ \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ldots$

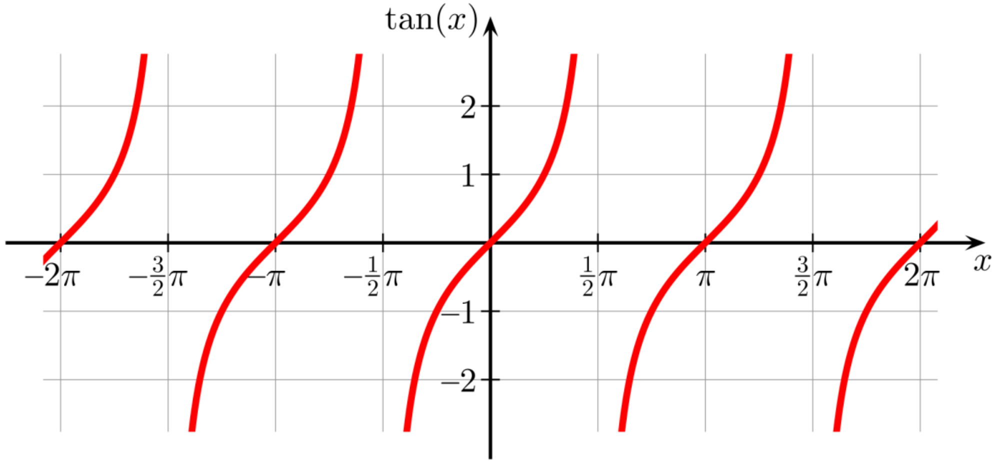
Erwähnt seien noch die beiden Additionstheoreme

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \quad \text{und}$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$



$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



$$\arcsin(\sin(x))=x;$$
$$\arccos(\cos(x))=x;$$
$$\arctan(\tan(x))=x$$

Polynomdivision

Bei der Polynomdivision sind zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ eines Polynomringes $R[x]$ gegeben, wobei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ und der Leitkoeffizient von $q(x)$ eine Einheit in R ist, und es wird die Gleichung

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x),$$

nach den gesuchten Polynomen $s(x)$ und $r(x)$ gelöst, und zwar so, dass der Grad von $r(x)$ kleiner als der von $q(x)$ ist.

Bsp: $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4\ ; q(x) = x - 1$

Aufgaben

Löse folgende Ausdrücke nach x.

(a) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$

(b) $\log_3 x + \log_3(x-6) = 3$

(c) $\ln(3x+2) = 5$

(d) $\ln(\sqrt{x}) - 2\ln(x) + 1 = 0$

(e) $3^x \cdot 5^{-2x} = 7^{x+1}$

(f) $e^x \cdot e^{3x} = 2$

Folgen

Konvergenz von Folgen

Definition:

Gegeben sei eine Folge (a_n) reeller oder komplexer Zahlen. Wir sagen: (a_n) **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), falls gilt:

$$\text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\ n > N.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a,\ n \to \infty,$$

Zusatz: Fordert man

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \quad \text{mit } |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \quad \forall\ n > N, \quad \forall\ p \in \mathbb{N},$$

also eine leicht verschärfte Cauchy-Bedingung, so ist diese auch hinreichend für Konvergenz.

Beispiele:

$a_n = Fib(n)$

$a_n = \frac{1}{n}$

$a_n = (-1)\hat{}n$

[Epsilon-Definition: Grafik](https://www.geogebra.org/m/Gn4Y8Bfu)

https://www.geogebra.org/m/Gn4Y8Bfu

Konvergenz von Folgen

Beispiele:

$$a_n = Fib(n)$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = (-1)\hat{}n$$

Konvergenz von Folgen

Nützliche Eigenschaften zu Grenzwerten und Konvergenz

Existieren die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so existieren auch die folgenden Grenzwerte und können wie angegeben berechnet werden:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$

Ist zusätzlich $b \neq 0$, so ist auch $b_n \neq 0$ ab einem gewissen Index N_0 und für die Teilfolge der $n > N_0$, dann gilt

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$

<u>Sandwichtheorem</u>: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert und $\lim_{n\to\infty} b_n =$ a und $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n > m \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$

Wichtige Grenzwerte: $\lim_{n\to\infty} a\frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} a * n = \infty$;

Konvergenz von Folgen

<u>Beispiel</u>

(ii) $$\frac{6n^2 - n + 3}{4n^2 + 1}$$

Konvergenz von Folgen

O-o-Symbolik

Landausche O-o-Symbolik: (Edmund Landau,1877 - 1938)

Für Folgen $(a_n), (b_n)$ aus $\mathbb{R}$ schreibt man oft:

- $a_n = O(b_n)$, falls $\left|\frac{a_n}{b_n}\right|$ beschränkt ist bzw.
- $a_n = o(b_n)$, falls $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to 0$ gilt und
- $a_n \sim b_n$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ gilt. (Hier sagt man dann auch: (a_n) und (b_n) verhalten sich **asymptotisch gleich**).

z.B.

$$3n^2 + 6n - 4 = O(n^2); \;\; n^7 = o(7^n); \;\; n^3 \sim n^3 + n^2; \; n \ln n = o(n^2).$$

Konvergenz von Folgen

Bolzano-Weierstraß und Teilfolgen

Bei nicht konvergenten Folgen führt man oft Ersatzbegriffe ein:

- Gegeben (a_n) . Streicht man einige Folgenglieder weg (endlich viele oder unendlich viele, aber so, dass noch eine Folge "übrig bleibt"),so spricht man von einer **Teilfolge.**

  Hat diese einen Grenzwert s , so nennt man s einen **Häufungswert** von (a_n).

  Zum Beispiel hat die Folge $a_n = (-1)^n$ die beiden Häufungswerte

  $$1 \;(= \lim_{n\to\infty} a_{2n}) \quad \text{und} \quad -1 \;(= \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}).$$

- Satz von **Bolzano-Weierstraß**: Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

  Unter den Häufungswerten gibt es dann einen größten, den man den **limes superior** nennt ($\limsup a_n$) und auch einen kleinsten, den **limes inferior** ($\liminf a_n$). Also ist z.B.

  $$\liminf(-1)^n = -1 \quad \text{und} \quad \limsup(-1)^n = 1.$$

https://www.geogebra.org/m/fhh3Ggeb

Aufgaben

Blatt_13

5. Bestimme, falls existent, den Grenzwert folgender Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (hier braucht man nicht mit der Definition von Folgenkonvergenz arbeiten). Gib für nicht konvergente Folgen die Menge der Häufungswerte an.

   (a) $a_n := \frac{n^2+2n+1}{cn^3-n^2+n-1}$, $c \in \mathbb{R}$.

   (b) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

   (c) $a_n := \frac{2}{\sqrt[n]{3n^2}}$

   (d) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}$

   (e) $a_n := \frac{n}{n-1} - \frac{2n}{n+1}$

   (f) $a_n := \frac{1}{((-1)^{n+1}-2)^n}$

Zeige oder wiederlege

(a) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so ist auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(b) Das Produkt zweier divergenter Folgen ist divergent.

(c) Ist $a_n = o(c_n)$ und $b_n = o(c_n)$, so ist auch $a_n \cdot b_n = o(c_n)$.

Schwer

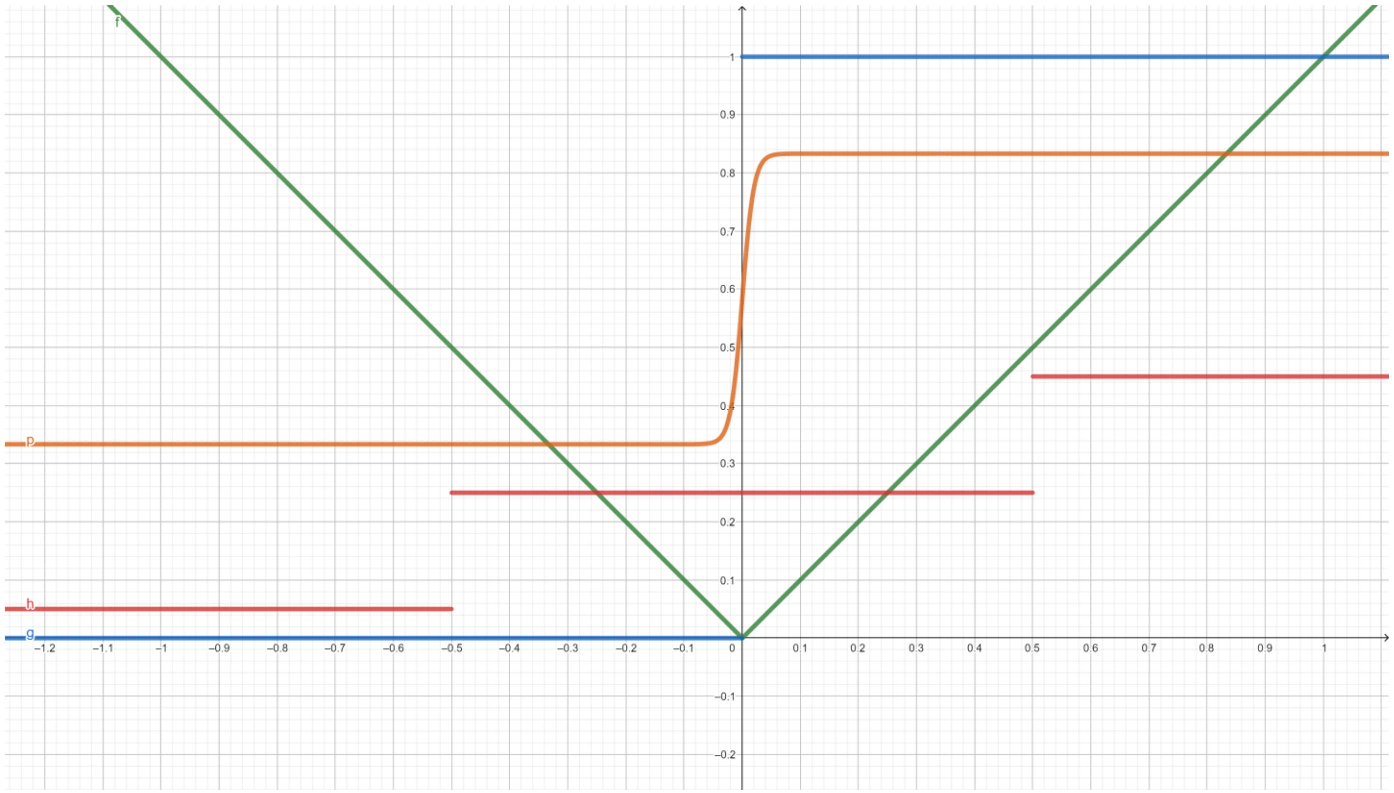
Betrachte die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$ und Startwert $a_0 = 0$.

(a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $0 \leq a_n \leq 1$ und $a_n \leq a_{n+1}$.

(b) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.

(c) Bestimme den Grenzwert aus (b).

Funktions-grenzwerte und Stetigkeit



Definition

Definition:

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $a \in D$.

Wir sagen:

f ist **konvergent** für x gegen a gegen den Wert s,

wenn gilt:

Für jede Folge x_n aus D mit $x_n \to a$, $x_n \neq a$ gilt $f(x_n) \to s$.

Wir notieren diese Situation in der Form

$$\lim_{x \to a} f(x) = s,$$

Existiert $s = \lim_{x \to a} f(x)$ und ist zusätzlich $s = f(a)$, so nennt man f **stetig** an der Stelle a .

Analog definiert man Grenzwerte für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = s, \text{falls } f(x_n) \to s \text{ für alle Folgen } x_n \text{ mit } x_n \to \pm\infty$$

und auch **einseitige** Grenzwerte

$$\lim_{x \to a-} f(x), \lim_{x \to a+} f(x)$$

(es werden nur Testfolgen x_1 mit $x_n < a$ bzw. $x_n > a$ zugelassen.)

Schließlich reden von **linksseitiger** bzw. **rechtsseitiger Stetigkeit** bei a, falls

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad \text{gilt.}$$

Esilon-Delta-Kriterium

$$\lim_{x \to a} f(x) = s \iff \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ mit} :\ x \in D,\ |x - a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - s| < \varepsilon.$$

https://www.geogebra.org/m/mj2bXA5y

Beispiele

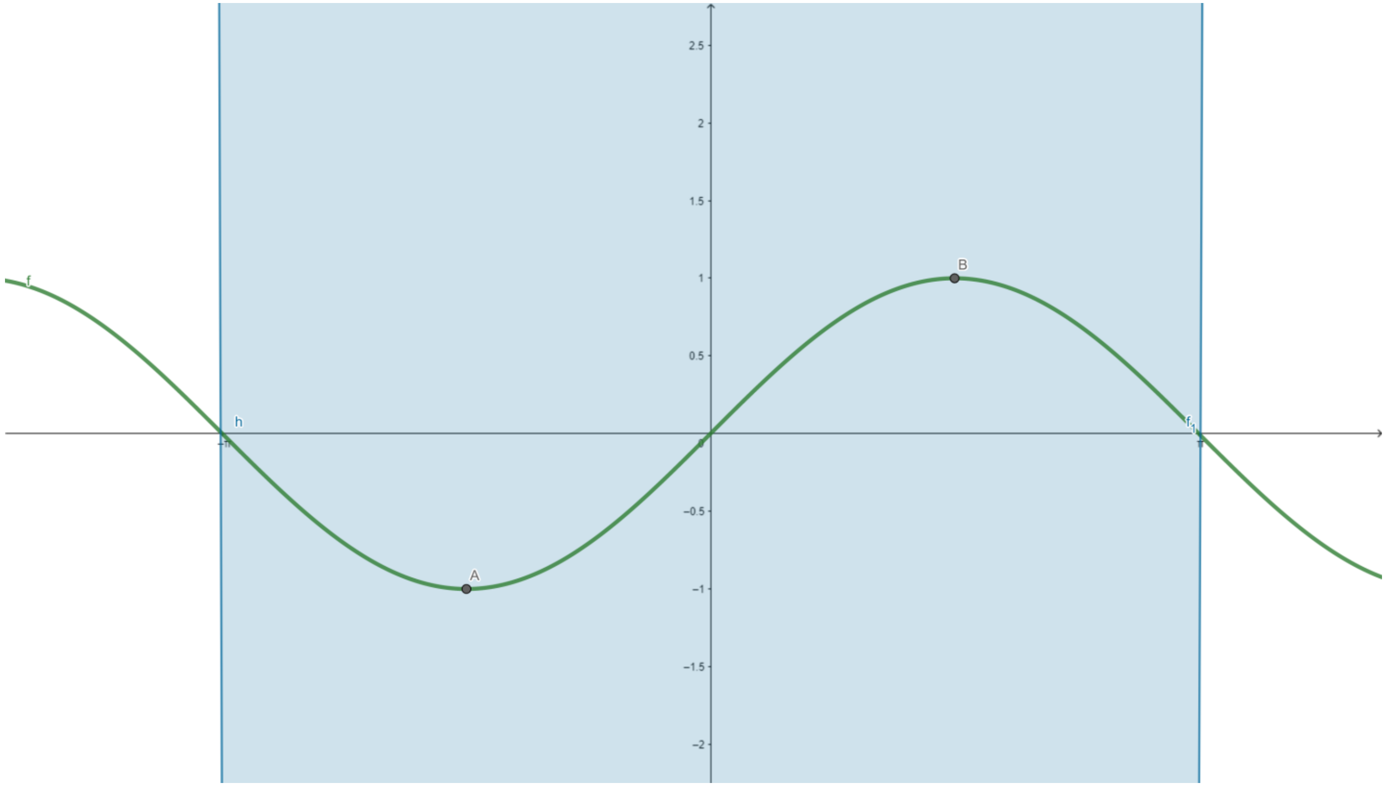
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $\mathrm{g}(x) = \begin{cases} 1 \; if \; x \leq 1 \\ x \; if \; x > 1 \end{cases}$
- $h(x) = x \sin(\frac{1}{x})$

Wichtige Eigenschaften

- Hintereinanderausführung: Ist g eine weitere reelle Funktion, deren Definitionsbereich den Wertebereich von f umfasst und die in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist die Komposition $g \circ f$ stetig in x_0.
- Algebraische Operationen: Ist g eine weitere reelle Funktion mit demselben Definitionsbereich wie f, die ebenfalls in x_0 stetig ist, dann sind die punktweise definierten Funktionen $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ ebenfalls stetig in x_0. Im letzten Fall ist allerdings zu beachten, dass der Definitionsbereich der zusammengesetzten Funktion sich als D_f ohne die Nullstellenmenge von g ergibt. Insbesondere darf x_0 selbst in diesem Fall also keine Nullstelle von g sein.
- Maximum/Minimum: Unter den gleichen Voraussetzungen wie im vorherigen Punkt sind die punktweise definierten Funktionen $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ stetig in x_0.

- Zwischenwertsatz: Die Funktion nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.
- Satz vom Minimum und Maximum: f ist beschränkt und Infimum und Supremum seiner Funktionswerte werden auch als Funktionswert angenommen. Es handelt sich also tatsächlich um Minimum und Maximum. Dieser von Weierstraß bewiesene Satz, bisweilen auch *Extremwertsatz* genannt, liefert nur die Existenz dieser Extremwerte. Für ihr praktisches Auffinden sind häufig Aussagen aus der Differentialrechnung nötig.

Analyse der Sätze



Aufgaben

Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin(x)}}{\ln(\ln(x))}$

Es sei $f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\begin{cases}x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x\neq 0,\\ 0 & \text{für } x=0.\end{cases}$

(a) Zeige, dass f stetig ist.

4. Zeige mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die Funktion f: $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{|x|}}$$

im Punkt $x_0=0$ stetig ist.

Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ gibt, die jeden ihrer Werte genau zweimal annimmt (d.h. es ist nicht möglich, dass für jedes $y\in f([0,1])$ die Gleichung $f(x)=y$ immer genau zwei Lösungen in $[0,1]$ besitzt). (12)

Zeige oder wiederlege

Es sei $I=[a,b]$ und $f:I\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(a)>0$ und $f(b)<0$. Dann hat f im Intervall I eine Nullstelle.

Differenzier-barkeit

Definition

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

gibt. In diesem Falle nennen wir f **differenzierbar** bei a und bezeichnen diesen Grenzwert mit

$$f'(a) \quad \text{oder} \quad \frac{df}{da} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=a}.$$

https://www.geogebra.org/m/wmpAtRAR

Aufgaben

Blatt_13

(a) Bestimme mithilfe der Definition der Ableitung die Ableitung der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ an einer Stelle $a > 0$.

(b) Bestimme mithilfe der Definition der Ableitung die Ableitung der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ an einer Stelle $a > 0$.
Ist die Funktion f auch an der Stelle $a = 0$ differenzierbar? Zeige oder widerlege die Behauptung.

Bestimme Konstanten $b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & \text{falls } x \leq 0 \\ e^x, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion ist.

Regeln

$f(x) = x^n$:

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} \underbrace{=}_{\text{Binomi}} \frac{a^n + na^{n-1}h + \binom{n}{2}a^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - a^n}{h} =$$

$$= na^{n-1} + h\binom{n}{2}a^{n-1} + \ldots + h^{n-1} \to na^{n-1}, \; h \to 0.$$

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$c \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(c \cdot f\right)' = c \cdot f'$$

$$\left(f+g\right)' = f' + g'$$

$$\left(f-g\right)' = f' - g'$$

$$\left(f \cdot g\right)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

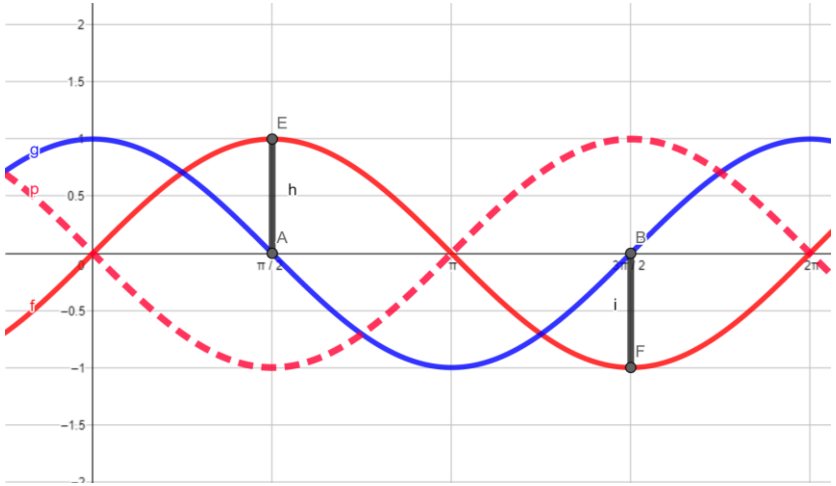
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(f \circ g\right)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

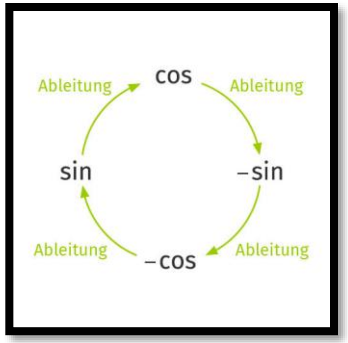
$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a.$$

Weiter wichtige Eigenschaften

- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{d}{dx} \arcsin(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$



- $f(a)\ ist\ Extremstelle \Rightarrow f'(a) = 0$
- $f(a)\ ist\ (lokales)\ Maximum\ \Leftrightarrow f'(a) = 0\ und\ f''(a) < 0$
  - $f(x)\ ist\ in\ Umgebung\ von\ a\ streng\ konkav$
- $f(a)\ ist\ (lokales)\ Minimum\ \Leftrightarrow f'(a) = 0\ und\ f''(a) > 0$
  - $f(x)\ ist\ in\ Umgebung\ von\ a\ streng\ konvex$



Aufgaben

Blatt 13

(a) Differenziere folgende Ausdrücke nach x. Die Ableitung braucht nicht vereinfacht werden. Man benenne jeweils zusätzlich die verwendete(n) Ableitungsregel(n).

i. $\frac{x^2+2x}{x}$

ii. $\ln(3x)$

iii. $(\sin(x)+x^3+2)^3$

iv. $e^{2x+1}\sin(x^2)$

v. $x^{\sqrt[3]{x}}$

vi. $\ln(\ln(\ln(x)))$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist der letzte Ausdruck (vi.) definiert?

a) Zeige, dass $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ gilt (Tipp: Verwende die Reihendarstellung)

b) Bestimme $\frac{d}{dx}\tan(x)$ (Tipp: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$)

Altklausur

14. Gegeben sei die Funktion $g(x) = x\ln x - x$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

(a) Begründe, zunächst ohne Rechnung, wieso die Funktion g auf $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ ein (globales) Maximum und (globales) Minimum annimmt.

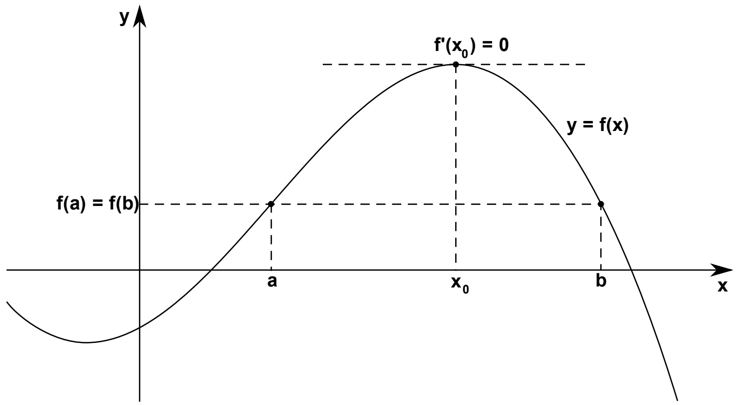
(b) Bestimme dieses (glob.) Maximum und (glob.) Minimum.

(c) Besitzt g auch auf dem Intervall $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ ein (glob.) Maximum und (glob.) Minimum?

Wichtige Sätze

Satz 3.3 (1. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung):
Es sei
$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$
differenzierbar auf (a,b) und in den Randpunkten a und b immerhin stetig. Dann gibt es eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \quad (\iff \quad f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)).$$

Satz 3.2 (Satz von Rolle):
Es sei
$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$
differenzierbar auf (a,b) und in den Randpunkten a und b (wenigstens) stetig. Weiter gelte
$$\boxed{f(a) = f(b).}$$
Dann gibt es (mindestens) ein $\xi \in (a,b)$ mit
$$f'(\xi) = 0.$$



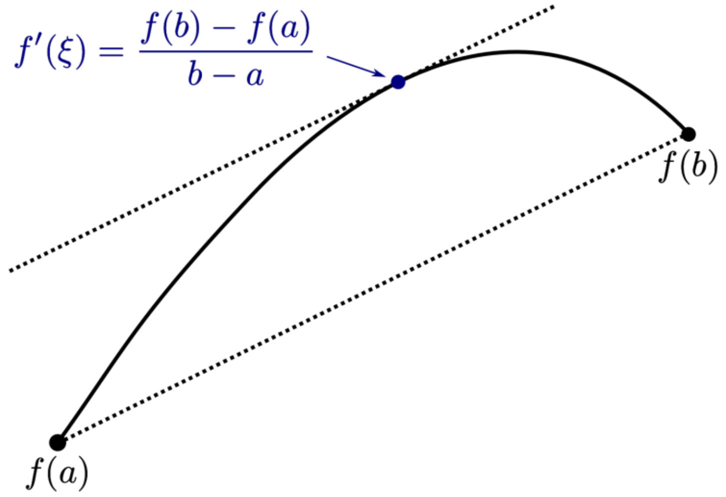
Satz 4.1 (Monotonie-Kriterien):
Es sei
$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$
differenzierbar auf (a,b) und stetig bei a und b. Dann gilt:

(i) f ist monoton wachsend auf $[a,b]$ $\iff$ $f'(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in (a,b)$.

(ii) Gilt $f'(x) > 0 \;\; \forall \;\; x \in (a,b)$, so ist f streng monoton wachsend auf $[a,b]$.

(iii) f ist monoton fallend auf $[a,b]$ $\iff$ $f'(x) \leq 0 \;\; \forall\, x \in (a,b)$.

(iv) Gilt $f'(x) < 0 \;\; \forall \;\; x \in (a,b)$, so ist f streng monoton fallend auf $[a,b]$.



Aufgaben

Altklausur

16. Zeige, dass für alle $x \geq 0$ gilt, dass $\ln(1+x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$.

Zeige, dass $b^2 > -a^2 + 2ab \quad b > a > 0$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes

Satz von l'Hospital

Satz 4.5 (Grenzwertregeln von l'Hospital):
(Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital, 1661-1704)

Es sei $I = [a-\eta, a) \subset \mathbb{R}$, $(\eta > 0,\ a \in \mathbb{R})$ oder $I = (K, \infty)$, $K > 0$,
und es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I mit

$$\lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Gilt dann

(i) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} g(x) = 0 \quad (a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ oder

(ii) $\lim\limits_{x\to a-} g(x) = \infty$ oder $-\infty \quad (a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$,

so existiert auch $\lim\limits_{x\to a-} \dfrac{f(x)}{g(x)} \left(\text{bzw. } \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$,
und dieser Grenzwert ist auch $= \alpha$.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Aufgaben

Altklausur

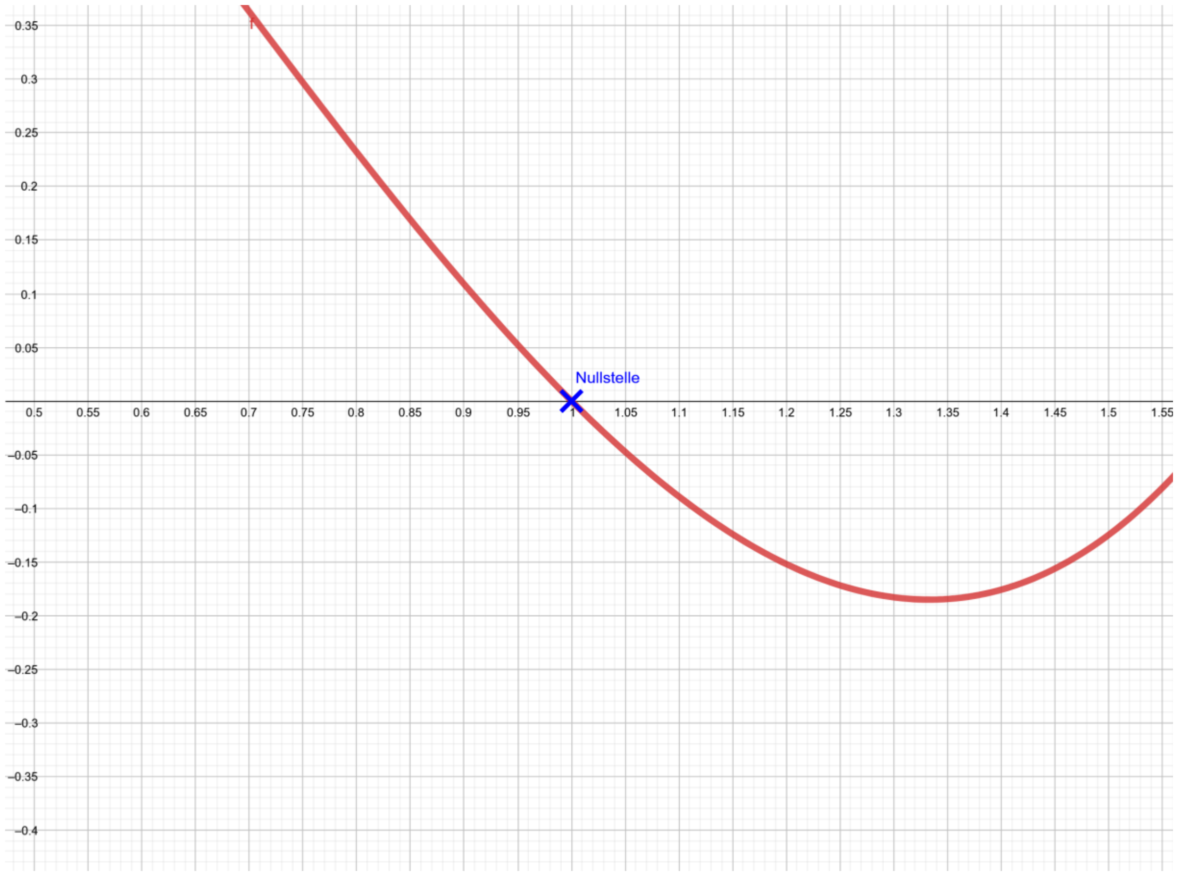
6. Bestimme, falls existent, den Grenzwert [10]

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin(x)}$$

Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \exp\left(\left|x^3\right|\right)$. Zeige oder widerlege, dass f stetig differenzierbar ist.

(8 Punkte)

Nullstellen Verfahren



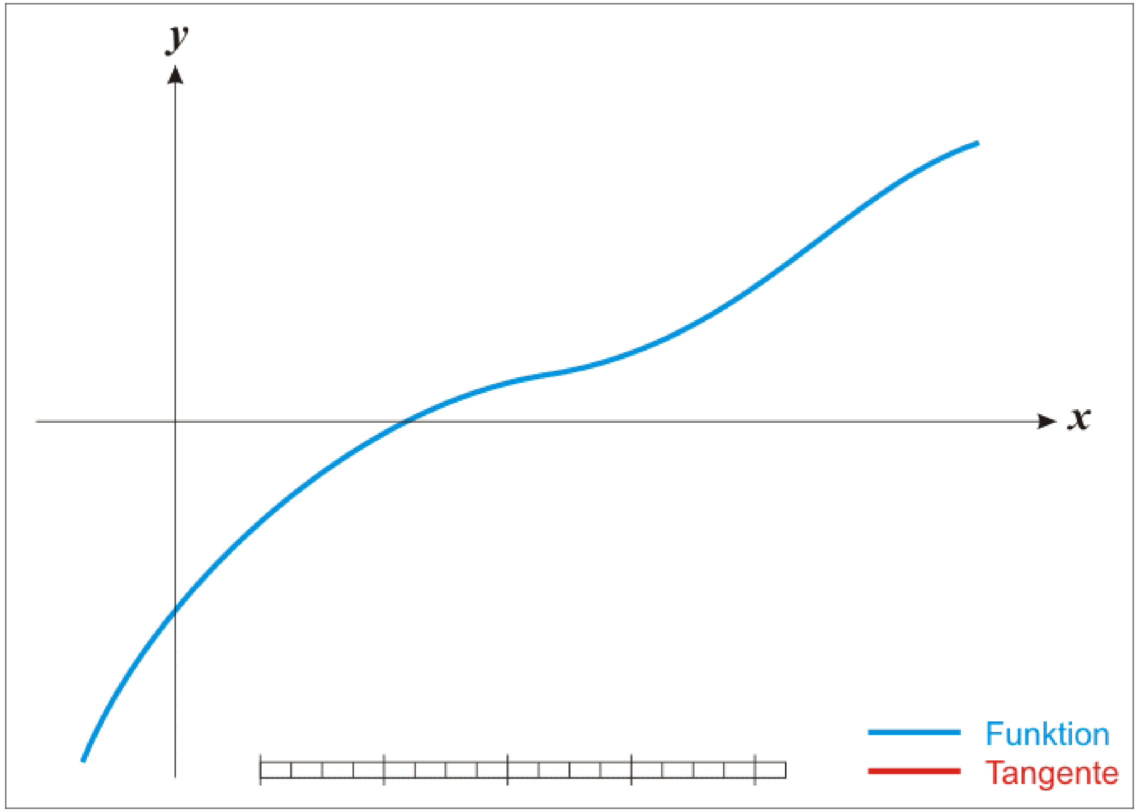
https://www.geogebra.org/m/wmpAtRAR

Newton Verfahren

- Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\begin{aligned} & t(x) = 0 \\ \iff & f(a) + f'(a)(x-a) = 0 \\ \iff & x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)} \\ \iff & x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \end{aligned}$$

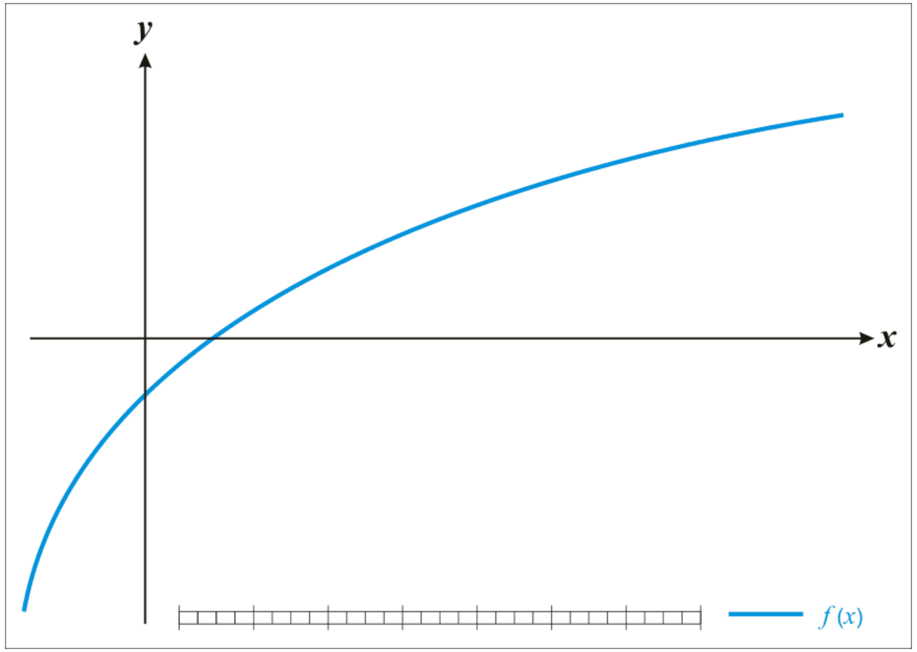


https://www.geogebra.org/m/cwwry7ym

Bisektionsverfahren

- Algorithmus:

1. Setze $l = a$ und $r = b$.
2. Teste, ob $[l, r]$ eine Nullstelle enthält. Wenn nicht: Abbruch.
3. Teste, ob $r - l < \varepsilon$ ist. Wenn ja, ist das Lösungsintervall gefunden.
4. Sonst teile $[l, r]$ in der Mitte und setze das Verfahren mit beiden Teilintervallen rekursiv bei 2. fort.



https://www.geogebra.org/m/wtP9zP2f

Entwicklungs-satz von Taylor

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.}$$

Entwicklungssatz von Taylor

- Beispiel: e^x im Entwicklungspunkt 0

- Restglied

Satz 5.2 (Taylor): (Brook Taylor, 1685-1731)

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal differenzierbar auf I, $a \in I$, und es sei

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

der (Fehler)-Rest zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylorpolynom . Dann gibt es eine Stelle ξ , gelegen zwischen a und x mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{(Formel von Taylor/Lagrange).}$$

https://www.geogebra.org/m/bhuZTaW3

Aufgaben

Altklausur

17. Betrachte die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(1 + x)$

(a) Zeige, dass das dritte Taylorpolynom $P_3(x)$ von f mit Entwicklungspunkt $a = 0$ gegeben ist durch

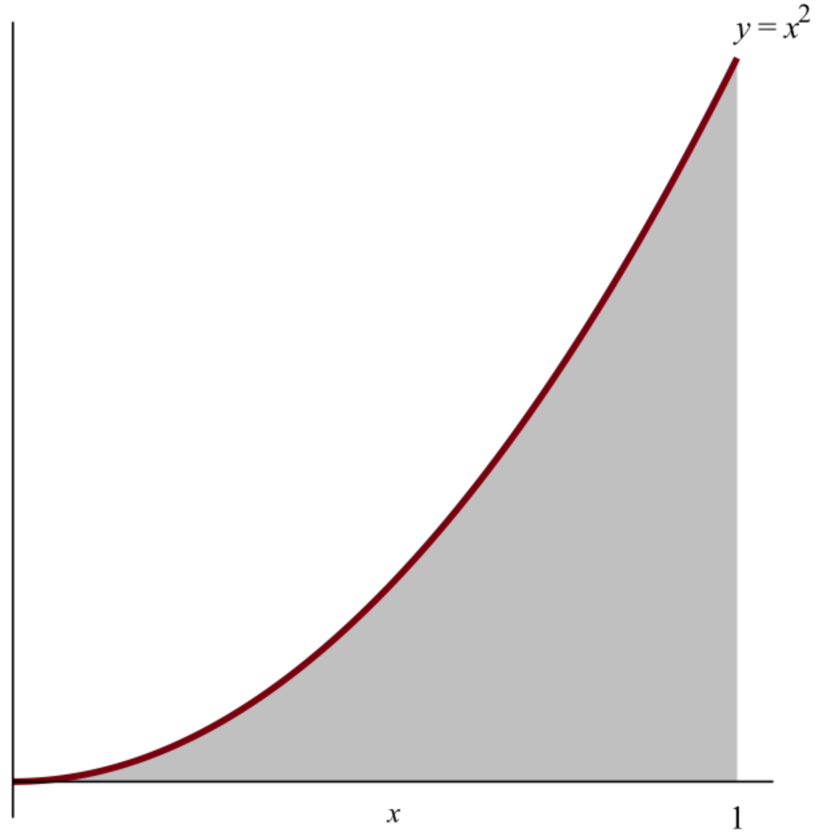
$$P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

(b) Zeige für $|x| \leq \frac{1}{2}$ die Restgliedabschätzung $|R_3(x)| = |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4}$.

a) Bestimme die Reihendarstellung von $\sin(x)$, $\cos(x)$ mit Hilfe von Taylor

b) Zeige, dass, $e^{i\pi} - 1 = 0$ Tipp(Verwende die Reihendarstellung und a)

Riemann-Integral



Riehmann-Integral

Ist $Z = \{ x_0, \ldots, x_n \}$ eine solche Zerlegung von $[a, b]$, so seien

$$m_k := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad \text{und} \quad M_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \; 1 \leq k \leq n$$

(beachte: $m_k > -\infty$, $M_k < \infty$, denn f ist beschränkt), und wir nennen

$$U = U(Z) = U(Z; f) := \sum_{k=1}^{n} m_k \, (x_k - x_{k-1})$$

die zu Z (und f) gehörige **Untersumme** und

$$O = O(Z) = O(Z; f) := \sum_{k=1}^{n} M_k \, (x_k - x_{k-1})$$

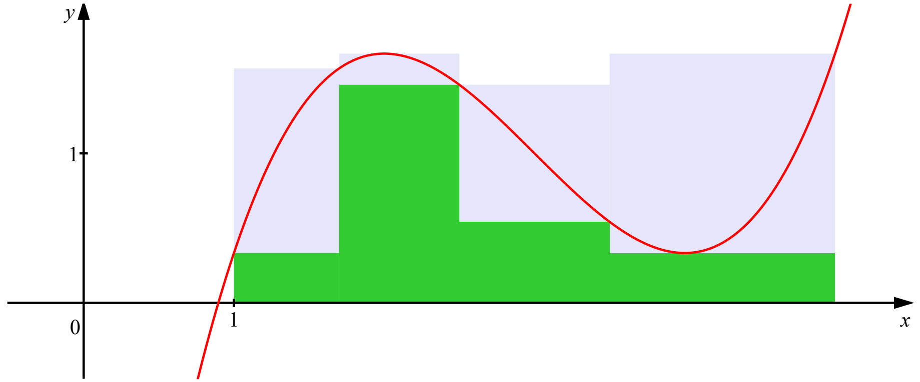
die zu Z (und f) gehörige **Obersumme**.

Wir nennen f **(Riemann-)integrierbar** über $[a, b]$, wenn Oberintegral und Unterintegral von f übereinstimmen, d.h. wenn

$$\int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x) \, dx$$

gilt. Dieser (gemeinsame) Wert heißt dann das **(Riemann-)-Integral** von f über $[a, b]$, und wir bezeichnen es kurz mit

$$\int_a^b f(x) \, dx$$



https://www.geogebra.org/m/qrgbJExb

Integral Regeln

(Integrationsregeln):

Gegeben seien $f, g \in R[a,b], (a < b),\ c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(α) $f+g \in R[a,b]$ mit $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

sowie

$c \cdot f \in R[a,b]$ mit $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ (Linearität)

(β) $f \cdot g \in R[a,b]$ und $\frac{f}{g} \in R[a,b]$, falls $\frac{1}{g}$ beschränkt ist.

(leider **ohne** Formel !)

(γ) $|f| \in R[a,b]$ mit $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ (Dreiecksunglei-

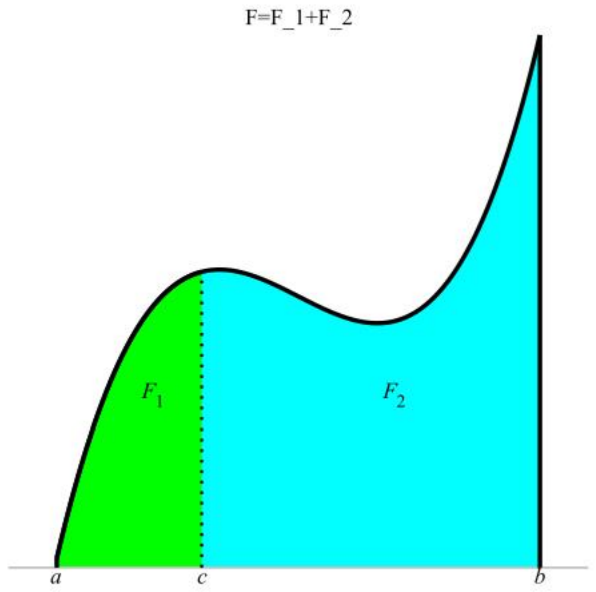
chung)

(δ) $f \leq g$ auf $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$ (Monotonie)

(v) Additivität des Integrals:

Es sei $f \in R[a,b]$, und es sei $a < c < b$. Dann gilt $f \in R[a,c]$ und $f \in R[c,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



Hauptsatz

Satz 2.2 (1. Hauptsatz der D/I-Rechnung):

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{stetig}}$ auf $[a,b]$. Dann ist das unbestimmte Integral $\mathcal{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$ eine Stammfunktion von f , also:

$\mathcal{F}'$ existiert $\forall\ x \in [a,b]$ und es ist $\mathcal{F}'(x) = f(x) \quad \forall\ x \in [a,b]$.

Satz 2.3 (2. Hauptsatz der D/I-Rechnung):

Es sei $f \in R[a,b]$, und es sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f .
Dann gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \quad \Big(= F(x)\Big|_a^b \Big).$$

Aufgaben

a) Sei $f(x) = x$ und $Z = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ Bestimme Ober- und Untersumme

b) Ist f Riehmann- integrierbar

c) Zeige mit Hilfe von a) : $\int_0^1 x \; dx = \frac{1}{2}$

Blatt 11

Berechne folgende Integrale:

1. $\int_0^{2\pi} \sin(x) \; dx$
2. $\int_{-2}^{1} x^2 - 2x + 1 \; dx$
3. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} \; dx$
4. $\int_0^3 e^{2x} \; dx$
5. $\int_1^e \frac{1}{x} \; dx$
6. $\int_0^{\pi/2} \cos(2x) \; dx$

Wichtige Regeln

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bsp: $\int_0^a \sin(2x)\,dx$

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Bsp: $\int_2^{10} \ln(x) * x\,dx$

Partialbruchzerlegung

Gegeben seien (reelle) Polynome $p(x)$, $q(x)$ mit grad $p <$ grad q. Dann lässt sich der rationale Ausdruck $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ schreiben als Summe von endlich vielen sogenannten **Partialbrüchen.** Ein Partialbruch ist dabei ein Ausdruck von folgender Gestalt:

- $\frac{\text{const.}}{x-a}, \frac{\text{const.}}{(x-a)^2}, \ldots, \frac{\text{const.}}{(x-a)^k}$, falls a $k-$ fache Nullstelle von $q(x)$ ist, d.h. $q(x) = (x-a)^k r(x)$, $r(x)$ Polynom mit $r(a) \neq 0$.

(i) $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x+2}$. Die Koeffizienten c_1 bzw. c_2 erhält man am einfachsten durch die "Zuhaltemethode":

(ii) $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x+1}$.

Aufgaben

8. Berechnen Sie, falls existent, folgende Integrale. Leiten Sie dabei ggf. verwendete Stammunktionen her. [5+11]

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{4x^2+2x+9}{(x-1)(x^2+x+3)}\,\mathrm{d}x.$

   Hinweis: Wenn Sie bei der Partialbruchzerlegung in 8b) Schweigkeiten haben, können Sie stattdessen die Funktion $\dfrac{x}{x^2+2x+3}+\dfrac{4}{x-1}$ untersuchen (Punktabzug, falls die Partialbruchzerlegung fehlt).

Blatt 13

i. $\int xe^{-x}\,dx$

ii. $\int 2^{x-1}\,dx$

iii. $\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)}\,dx$

iv. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$

(b) * Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so dass $\int_1^a \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx = 2\sqrt{7}$ gilt.

(c) Berechne $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\,dx$.