Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, den 30.04.
um 23:59 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Lösungsvorschlag Analysis 1: Blatt 1

1. Verifiziere folgende Identitäten mittels vollständiger Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$ (1)

Lösungsvorschlag: Induktionsanfang: Es ist $\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = 1 = 1^3$, also gilt die Aussage für $n = 1$.
Induktionshypothese: Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Induktionsschluss $n \to n+1$: Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{\text{IH}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}\\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)(n+1)^2}{4} = \frac{(n^2+4n+4)(n+1)^2}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

und somit gilt die Aussage auch für $n+1$.

(b) $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ für $x \neq 1$. (1)

Lösungsvorschlag: Induktionsanfang: Es gilt

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1 = \frac{x^{0+1}-1}{x-1}.$$

Induktionshypothese: Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} x^i &= \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) + x^{n+1} \overset{\text{IH}}{=} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{x^{n+1}(x-1)}{x-1}\\ &= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+2}-x^{n+1}}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1},\end{aligned}$$

also ist die Aussage auch für $n+1$ wahr.

(c) $\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ für alle $n \geq 2$. (1)

Lösungsvorschlag: Induktionsanfang: Es gilt:

$$\prod_{j=2}^{2}\left(1-\frac{1}{j^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\cdot 2}.$$

Für $n = 2$ ist die Aussage also wahr.
Induktionshypothese: Die Aussage gelte nun für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\prod_{j=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{j^2}\right) &= \left(\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \overset{\text{IH}}{=} \frac{n+1}{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= \frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{2n(n+1)^2} = \frac{(n+1)^3-(n+1)}{2n(n+1)^2} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1-1)}{2n(n+1)^2}\\ &= \frac{(n+1)n(n+2)}{2n(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

Die Aussage ist also auch für $n+1$ erfüllt.

2. Man beweise die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \geq 4$ gilt $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$. (1)

Lösungsvorschlag: IA: Es gilt für $n = 4$:

$$4 \cdot \sqrt{4} = 8 > 6 = 4 + \sqrt{4}.$$

IH: Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.
IS: $n \to n+1$:

$$(n+1)\cdot\sqrt{n+1} = n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1} > n\cdot\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \overset{\text{IH}}{>} n+\sqrt{n}+\sqrt{n+1} > n+1+\sqrt{n+1},$$

da $\sqrt{n} > 1$ für alle $n \geq 4$. Somit gilt die Aussage auch für $n+1$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - 6n^2 + 14n$ durch 3 teilbar. (1)

Lösungsvorschlag: IA: Es gilt $1^3 - 6 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 = 9 = 3 \cdot 3$. IH: Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
IS: $n \to n+1$: Es gilt

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 14(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 6(n^2 + 2n + 1) + 14n + 14\\ &= (n^3 - 6n^2 + 14n) + 3n^2 + 3n - 12n + 1 - 6 + 14\\ &= (n^3 - 6n^2 + 14n) + 3n^2 - 9n + 9\\ &= (n^3 - 6n^2 + 14n) + 3(n^2 - 3n + 3).\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist der erste Term durch 3 teilbar. Außerdem ist der zweite Term ein Vielfaches von 3. Somit ist auch die Summe ein Vielfaches von 3, denn

$$(n^3 - 6n^2 + 14n) + 3(n^2 - 3n + 3) = 3k + 3(n^2 - 3n + 3) = 3 \cdot (k + n^2 - 3n + 3)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Für die Zahlenfolge $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$ gilt (1)

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Lösungsvorschlag: IA: Es gelten

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$$

und

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Somit ist die Aussage für $n = 0$ und $n = 1$ erfüllt.
IH: Die Aussage gelte für $n-1$ und n.
IS: Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}f_{n+1} = f_n + f_{n-1} &\overset{\text{IH}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{2+2\sqrt{5}+4}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{2-2\sqrt{5}+4}{4}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],\end{aligned}$$

denn $2 \pm \sqrt{5} + 4 = 1 \pm \sqrt{5} + 5 = (1 \pm \sqrt{5})^2$. Somit folgt die Aussage für $n+1$.

Hinweis zu (c): Erste und zweite binomische Formel.

3. Es seien A und B Teilmengen einer Menge X. Man bestimme die folgenden Mengen:

(a) $(A^c \cup B) \cap (A \cap B^c)$ (0,5)

Lösungsvorschlag: Mit $A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$ folgt $(A^c \cup B) \cap (A \cap B^c) = (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B)^c = \emptyset$

(b) $(A^c \cup B) \cup (A \cap B^c)$ (0,5)

Lösungsvorschlag: Analog ist $(A^c \cup B) \cup (A \cap B^c) = (A^c \cup B) \cup (A^c \cup B)^c = X$.

(c) $(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B)$ (0,5)

Lösungsvorschlag: Es gilt $(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B) = (A \cap B)^c \cap (A \cup B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Man nennt diesen Ausdruck die symmetrische Differenz von A und B und schreibt dafür auch $A \triangle B$.

(d) $(A^c \cup B^c) \cap (A \cap B)$ (0,5)

Lösungsvorschlag: Es ist $(A^c \cup B^c) \cap (A \cap B) = (A \cap B)^c \cap (A \cap B) = \emptyset$.

4. Es seien U und V zwei Mengen und es seien $X, A \subset U$ und $Y, B \subset V$. Man zeige folgenden Aussagen:

(a) $(X \times Y) \cap (A \times B) = (X \cap A) \times (Y \cap B)$ (1)

Lösungsvorschlag: Es gilt

$$\begin{aligned}
(X \times Y) \cap (A \times B) &= \{(u,v) \in U \times V \,|\, x \in X \wedge y \in Y\} \cap \{(u,v) \in U \times V \,|\, a \in A \wedge b \in B\} \\
&= \{(u,v) \in u \times V \,|\, c \in X \wedge d \in Y \wedge c \in A \wedge d \in B\} \\
&= \{(u,v) \in U \times V \,|\, c \in X \cap A \wedge d \in Y \cap B\} \\
&= (X \cap A) \times (Y \cap B).
\end{aligned}$$

(b) $(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ (1)

Lösungsvorschlag: Es gilt

$$\begin{aligned}
(X \times Y) \setminus (A \times B) &= \{(u,v) \in U \times V \,|\, u \in X \wedge v \in Y\} \setminus \{(u,v) \in U \times V \,|\, u \in A \wedge v \in B\} \\
&= \{(u,v) \in U \times V \,|\, u \in X \wedge v \in Y\} \cap \{(u,v) \in U \times V \,|\, u \in A \wedge v \in B\}^c \\
&= \{(u,v) \in U \times V \,|\, u \in X \wedge v \in Y\} \cap \{(u,v) \in U \times V \,|\, u \notin A \vee v \notin B\} \\
&= \{(u,v) \in U \times V \,|\, u \in X \wedge v \in Y \wedge (u \notin A \vee v \notin B)\} \\
&= \{(u,v) \in U \times V \,|\, (u \in X \wedge v \in Y \wedge u \notin A) \vee (u \in X \wedge v \in Y \wedge v \notin B)\} \\
&= \{(u,v) \in U \times V \,|\, u \in X \wedge v \in Y \wedge u \notin A\} \cup \{(u,v) \in U \times V \,|\, u \in X \wedge v \in Y \wedge v \notin B\} \\
&= ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))
\end{aligned}$$