ulm university universität ulm

1.Klausur Analysis I für Ing. & Inf.

02.08.2014

1. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit entweder $a_1, \dots, a_n \geq 0$ oder $-1 \leq a_1, \dots, a_n \leq 0$. Zeigen Sie die Ungleichung [6]
$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) = (1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
2. Untersuchen Sie mit Hilfe der Definition die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei [5]
$$a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 - 8n}{3n^3 - 2n} \forall n \in \mathbb{N}.$$
3. Zeigen Sie, dass der folgende Schluss im Allgemeinen falsch ist: [3]
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Folgen mit $a_n + b_n \to c \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$, dann existieren auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz. [5+4]
a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{3^k + 2}{4^k - 6}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$
5. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $I = [a, b]$ und $F : I \to \mathbb{R}$ stetig. Geben Sie eine Konstante C an, so dass die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + C$ auf I positiv ist. [4]
6. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := \begin{cases} e^{x+1} & \text{für } x < -^1, \\ -\frac{x^2}{2} + 3 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 3 - x & \text{für } 0 < x < 2, \\ e^{-x+2} & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$
Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ f stetig oder differenzierbar ist. [12]
7. Zeigen Sie, dass $F(x) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x^2}{1-x^4}$ auf $(-1; 1)$ ist. [6]
8. Berechnen Sie, falls existent, folgende Integrale. Leiten Sie dabei ggf. verwendete Stammunktionen her. [5+11]
a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x^2 + 2x + 9}{(x-1)(x^2 + x + 3)} \, \mathrm{d}x$.
Hinweis: Wenn Sie bei der Partialbruchzerlegung in 8b) Schwieigkeiten haben, können Sie stattdessen die Funktion $\frac{x}{x^2 + 2x + 3} + \frac{4}{x-1}$ untersuchen (Punktabzug, falls die Partialbruchzerlegung fehlt).

Viel Erfolg!

ulm university universität uulm

2. Klausur Analysis I für Ing/Inf

7.10.2014

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Ungleichung $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. [6]

2. Untersuchen Sie mit Hilfe der Definition die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei [5]
$$a_n = \frac{-\pi n^5 + \sqrt{2}n^4 - 2n}{-n^5 - \sqrt{3}n^4 + 26} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

3. Zeigen Sie, dass der folgende Schluss im Allgemeinen falsch ist: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ eine Folge mit $x_n \to x_0 \in [a, b]$ für $n \to \infty$, dann existiert auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. [3]

4. Gegeben sei die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}(x-2)^n$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und das resultierende Konvergenzintervall. [4]

5. Es seien $I = [1, 2]$ und $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+x-4}{x+1}$.
   (a) Zeigen Sie: f besitzt in I eine Nullstelle. [3]
   (b) Bestimmen Sie eine Zahl C so, dass die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + C$ auf I nicht negativ ist. [4]

6. (a) Zeigen Sie $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sin x}}{\ln(\ln(x))} = 0$. [4]
   (b) Die Funktion $f(x) = \ln(\cosh x)$ soll um 0 durch ein Polynom dritten Grades angenähert werden. Bestimmen Sie ein geeignetes Polynom mit dem Satz von Taylor. [6]
   Hinweis: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

7. Zeigen Sie: $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{6}\sin^3(2x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = \cos^3(2x)$ auf $\mathbb{R}$. [4]

8. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
   (a) Zeigen Sie, dass durch $x_j = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{n}}$, $j = 0, \dots, n$, eine ausgezeichnete Partitionenfolge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a, b]$ gegeben ist. [3]
   (b) Durch $\xi_j = x_j$ für $j = 1, \dots, n$ sind Zwischenstellen dieser Partition gegeben. Bestimmen Sie die zugehörige Riemannsche Zwischensumme. [2]
   (c) Bestimmen Sie über die Zwischensumme aus 8b das Integral $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x}$. [5]

9. Berechnen Sie, falls existent, folgendes Integral. Leiten Sie dabei ggf. verwendete Stammfunktionen her. [16]
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

Viel Erfolg!

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille, Marc Schneble

Sommersemester 16
05.08.2016, 12 Uhr s.t.

1. Klausur zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

Gesamtpunktzahl: 107 Punkte
Hinreichende Punktzahl zum Bestehen der Klausur: 45 Punkte

1. Es seien $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$,
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{5^{k+2}}$,
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} x \cdot \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

(4+5+8 Punkte)

2. Untersuche die nachstehenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.
   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k^2}{1+k^3}\right)^2$
   b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$
   c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k^2}{1+k^3}\right)^k, a \geq 0$.

(6+3+6 Punkte)

3. Bestimme das größtmögliche offene Konvergenzintervall von

$$\sum_{k=1}^{\infty} k! \cdot \left(\frac{2(x-3)}{k}\right)^k$$

.

(6 Punkte)

4. Zeige mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass die Funktion f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{|x|}}$$

im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

(8 Punkte)

5. a) Formuliere den Zwischenwertsatz.
   b) Zeige, dass es *genau* ein $x \geq 0$ gibt mit $e^x + \sqrt{x} = 3$.

(6+10 Punkte)

6. Der Tangenshyperbolicus ist definiert als tanh: $\mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ mit
$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$
   a) Zeige, dass die Ableitung der Umkehrfunktion Artanh:$(-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert und dass diese durch
$$\text{Artanh}'(x) = \frac{1}{1 - x^2} \forall x \in (-1, 1)$$
   gegeben ist.
   b) Zeige, dass $\text{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(10+7 Punkte)

7. Es sei $f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Bestimme $T^{(3)}f(0, x)$, also das Taylorpolynom 3. Ordnung von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(6 Punkte)

8. Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) := \frac{-x^3 + 1}{x^4 + x^2}.$$
   a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f.
   b) Bestimme
$$\int \frac{\log^5(x) + 1}{x(\log^4(x) + \log^2(x))} \mathrm{d}x.$$

(8+14 Punkte)

Viel Erfolg!

Dies ist eine von Studenten mit LaTeX erstellte Version des Originals - bitte verzeiht Tippfehler und nicht immer ganz optimales Format.

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille, Marc Schneble

Sommersemester 2016
05.08.2016 12 Uhr s.t.

2. Klausur zu Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Gesamtpunktzahl: 110 Punkte
Hinreichende Punktzahl zum Bestehen der Klausur: 45 Punkte

1. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte.

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}$,

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(x)\ln(1 - x)$.

   (4+9 Punkte)

2. Zeige mit Hilfe der Definition der Folgenkonvergenz, dass die Folge $(a_n)_{n\in n}$ gegeben durch

   $$a_n = \frac{2n^2 - 3}{-3n^2 + 2n - 1}, n \in \mathbb{N}$$

   konvergiert.

   (9 Punkte)

3. Untersuche die nachstehenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{k+2}^2\right)$,

   b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} + \sqrt{k^2 + k} - k\right)^k$

   (5 + 9 Punkte)

4. Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$, sodass

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a - \frac{2}{3}} & \text{für } x > 1 \\ bx^3 + 1 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$$

   stetig in $x_0 = 1$ ist und $f(-1) = -1$ gilt.

   (7 Punkte)

5. Bestimme mit Hilfe der Definition der Differenzierbarkeit die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{-2}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   (5 Punkte)

6. Zeige, dass

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

für alle $x \in (-1, 1)$. *Hinweis:* Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass der Konvergenzradius der Reihe $R = 1$ ist.

(7 Punkte)

7. Es sei $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$.

   a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ die n-te Ableitung von f gegeben ist durch

   $$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{4(x-n)}{(x+1)^{n+2}}.$$

   b) Stelle eine zu f gehörige Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf.

   c) Bestimme <u>a</u>lle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe aus Teilaufgabe b) absolut konvergiert.

(10+4+8 Punkte)

8. a) Formuliere den ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

   b) Zeige die Ungleichung

   $$\ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \forall x > 0.$$

   Hinweis: Betrachte dazu die Hilfsfunktion $f(t) := \ln(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$. Es darf außerdem ohne Beweis verwendet werden, dass $(1+t)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{t}{2}$ für $t \geq 0$.

(5+10 Punkte)

9. Bestimme folgende bestimmte und unbestimmte Integrale.

   a) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sinh(x) e^x \,\mathrm{d}x$$

   b) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 + 2x + 5}.$$

   Hinweis: Die Funktion $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ besitzt keine reellen Nullstellen.

(8+10 Punkte)

Viel Erfolg!

1. Klausur

09.08.2017

Dr. Gerhard Baur
Erik Hintz

Gesamtpunktzahl: 100 Punkte.

*Diese Klausur ist **beidseitig** bedruckt.*

1. Zeige durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass [12]

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

2. Bestimme die Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung [10]

$$2^{2x} \cdot 5^{-x+1} = 7^x$$

3. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit [3+9=12]

$$a_n := \frac{4n^2+9}{2n^2+2n+3}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimme $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mithilfe der Grenzwertsätze.

(b) Zeige den Grenzwert aus (a) mithilfe der Definition, finde also für alle $\varepsilon > 0$ ein N, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

4. Zeige oder widerlege: [4×3=12]

(a) Die Summe divergenter Folgen ist divergent.

(b) Es sei $b > 1$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b^{-k}$.

(c) Ist eine Funktion f in a stetig, so ist f in a auch differenzierbar.

(d) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(a) = 0$. Dann hat f an der Stelle a ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

5. (a) Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar. [2×5=10]
Zeige mit der Definition der Ableitung, dass dann auch $f + g$ in a differenzierbar ist mit $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(b) Für eine differenzierbare, positive Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ betrachten wir die logarithmische Ableitung, also die Funktion

$$L(f) : I \to \mathbb{R} \text{ mit } L(f) := \frac{f'}{f}$$

Zeige, dass für zwei differenzierbare, positive Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$L(f \cdot g) = L(f) + L(g)$$

gilt.

6. Bestimme, falls existent, den Grenzwert [10]

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin(x)}$$

7. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x + e^{-x}$ [3+7+4=14]

   (a) Begründe ohne Rechnung, warum die Funktion f im Intervall $I = [-1, 1]$ ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt.

   (b) Bestimme das globale Maximum und das globale Minimum aus (a) (also auf dem Intervall $I = [-1, 1]$).

   (c) Zeige, dass das Taylorpolynom dritten Grades mit Entwicklungspunkt $a = 0$ gegeben ist durch

$$P_3(x) = 2 + x^2$$

8. (a) Bestimme folgende unbestimmten Integrale: [4+4+7+5=20]

   i. $\int 3x^2 \ln(x)\, dx$

   ii. $\int \frac{2xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

   iii. $\int \frac{2x+1}{x^2-9}\, dx$

   (b) Berechne

$$\int_0^1 \sqrt[4]{x}\, dx$$

Viel Erfolg!

1. Klausur Analysis 1 für Ing & Inf

31.07.2019

Es gibt insgesamt 75 Punkte. Hinreichend zum Bestehen sind 34 Punkte.

1. (a) Definieren Sie den Begriff Häufungswert einer Folge. [1 P]
   (b) Geben Sie eine Folge mit den Häufungswerten 0, -2, 3 und π an. [4 P]

2. Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 + \frac{(-\sqrt{2})^k}{5^2}}{5^k}$. [5 P]

3. (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}(x-4)^{3k+2}$ [5 P]
   (b) und geben Sie das daraus folgende offene Konvergenzintervall der Reihe an. [1 P]

4. Wir betrachten die hyperbolischen Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   (a) Zeigen Sie $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. [2 P]
   (b) Zeigen Sie, dass sinh bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion Arsinh. [9 P]
   Hinweis: Formen Sie die Gleichung $y = \sinh x$ zu einer in e^x quadratischen Gleichung um und stellen Sie x dann als Funktion von y dar.
   (c) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion Arsinh. [3 P]
   Hinweis: Sie müssen dafür nicht Aufgabe 4b gelöst haben.

5. Zeigen Sie mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes für alle $x > y > 0$ die Ungleichung [6 P]
$$\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}.$$

6. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: [13 P]
$$y' = \frac{y^2 - 3y + 2}{\sqrt{1-x^2}}, \; y(0) = \frac{3}{2}.$$
   Hinweis: Schränken Sie ggf. die möglichen Werte von y ein, um die resultierende Gleichung nach der Integration nach y auflösen zu können.

7. Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}$ und $a^3 > x^3$ gilt [6 P]
$$\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{a^3-x^3}.$$

Bitte wenden!

8. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^{\alpha}}$ für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert.

[8 P]

9. Im Folgenden sind jeweils vier Aussagen zu einer Grundvoraussetzung angegeben. Kreuzen Sie auf der Rückseite des Klausurdeckblattes bei jeder Aussage an, ob sie im Allgemeinen wahr oder falsch ist. [12 P]
Pro richtigem Kreuz gibt es 1 Punkt, pro falschem -1 Punkt. Minimal sind 0 Punkte pro Teilaufgabe möglich.

   (a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

      i. Wenn f stetig ist, dann ist f differenzierbar.
      ii. Wenn f stetig ist, dann ist f beschränkt.
      iii. Wenn f monoton ist, wird jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ angenommen.
      iv. Wenn f streng monoton ist, ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$.

   (b) Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar.

      i. Zu jedem $x_0 \in (a, b)$ existiert eine Umgebung $U_R(x_0)$, so dass f in dieser Umgebung mit der Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0 übereinstimmt.
      ii. f ist unendlich oft stetig differenzierbar.
      iii. f kann kein Polynom sein.
      iv. f ist periodisch oder nicht beschränkt.

   (c) Es sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$.

      i. Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \to x_0$ für $k \to \infty$, so gilt $x_0 \in M$.
      ii. Es gibt eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\limsup\limits_{k\to\infty} x_k \to \sup M$ und $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k = \inf M$.
      iii. Existiert $\max M$, so auch $\min(-M) = \min\{\, -x \mid x \in M \,\}$.
      iv. Wenn $x_1, x_2 \in M \cap \mathbb{Q}$ und $x_1 < x_2$ gilt, so existiert ein $\xi \in M$ mit $x_1 < \xi < x_2$ und $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Viel Erfolg!