Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Determinanten

2x2-Matrizen

Die Determinaten von 2x2-Matrizen

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 10$$

3x3 Matrizen

Sarrus: für 3x3 Matrizen.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Beispiel:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$- 2 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 2$$

$$= 3$$

Entwicklungssatz von Laplace

Satz 9.1.12: Laplacescher[a] Entwicklungssatz

[a]Pierre-Simon Laplace, 1749 - 1827, frz. Mathematiker

(i) Entwicklung nach der i-ten Spalte:

$$\det(a_{ki}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{ki}.$$

(ii) Entwicklung nach der k-ten Zeile:

$$\det(a_{ki}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}.$$

Dabei folgt die zweite Formel durch Betrachtung von $(a_{ki})^{\mathsf{T}}$ und A_{ki} heißt der *Cofaktor* zu a_{ki} in der Matrix (a_{ki}).

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 4 \cdot 3) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + 0 = -11 + 14 = 3$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 4 \cdot 3) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + 0 = -11 + 14 = 3$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & .. \\ - & + & - & + & - & ... \\ + & - & + & - & + & ... \\ \vdots & & ... & ... & & \vdots \end{pmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (-(-3)) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot (-(-3)) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 2 - 3 \cdot 1) \\
&= -6 \cdot 3 \\
&= -18
\end{aligned}
$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 5 \cdot (2 \cdot 3 - 2 \cdot 4) \\
&= -10
\end{aligned}$$

Rechenregeln für Determinanten

Satz 9.1.4: Determinante der transponierten Matrix

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dann gilt $\det A = \det A^{\mathsf{T}}$.

Satz 9.1.5

Es sei $A = (a_{ik}) \in M(n \times n, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

(i) $\det A$ multipliziert sich mit λ, wenn man eine Zeile[a] mit λ multipliziert (siehe auch Aufgabe A.9.1).

(ii) $\det A$ bleibt unverändert, wenn man ein Vielfaches einer Zeile von A zu einer anderen addiert.

(iii) $\det I = 1$.

[a] die Aussagen gelten auch für Spalten, siehe 9.1.6.

Korollar 9.1.6

Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dann gilt

(i) $\det A$ ändert bei Zeilenvertauschungen das Vorzeichen.

(ii) $\det A = 0$, falls die Zeilenvektoren von A linear abhängig sind, insbesondere falls zwei gleiche Zeilen oder eine nur aus Nullen bestehende Zeile auftritt.

(iii) Die in den Sätzen 9.1.4, 9.1.5 und dem Korollar 9.1.6 genannten Eigenschaften bezüglich der Zeilen gelten auch für die Spalten.

(iv) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\det \lambda A = \lambda^n \det A$.

Invertierbarkeit

$$A \text{ ist invertierbar} \;\Leftrightarrow\; \det A \neq 0$$

Wie bestimmt man die Inverse einer Matrix?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[Z_2'=Z_2-2Z_1]{Z_3'=Z_3-Z_1}$$

Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[Z_2' = Z_2 - 2Z_1]{Z_3' = Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2'=Z_2-2Z_1]{Z_3'=Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \text{ tauschen } Z_3]{Z_1'=Z_1+\frac{2}{3}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[Z_2'=Z_2-2Z_1]{Z_3'=Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_2 \text{ tauschen } Z_3]{Z_1'=Z_1+\frac{2}{3}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_2'=-Z_2]{Z_3'=\frac{-1}{3}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[Z_2'=Z_2-2Z_1]{Z_3'=Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_2 \text{ tauschen } Z_3]{Z_1'=Z_1+\frac{2}{3}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_2'=-Z_2]{Z_3'=\frac{-1}{3}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[Z_3'=Z_3-Z_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

Kern und Bild

Kern und Bild

Definition 6.3.1: Bild und Kern

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann heißt der Unterraum

$$\operatorname{Bild} F := F(V) = \{ F(v) \mid v \in V \}$$

von W das *Bild* von F (vergleiche 1.1.8). Die Menge

$$\operatorname{Ker} F := \{ v \in V \mid F(v) = 0 \}$$

heißt der *Kern* von F.

Kern und Bild

Definition 6.3.1: Bild und Kern

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann heißt der Unterraum

$$\operatorname{Bild} F := F(V) = \{ F(v) \mid v \in V \}$$

von W das *Bild* von F (vergleiche 1.1.8). Die Menge

$$\operatorname{Ker} F := \{ v \in V \mid F(v) = 0 \}$$

heißt der *Kern* von F.

Bild: y ist im Bild von F, wenn es ein $v \in V$ gibt mit $y = F(v)$

Kern und Bild

Definition 6.3.1: Bild und Kern

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann heißt der Unterraum

$$\operatorname{Bild} F := F(V) = \{ F(v) \mid v \in V \}$$

von W das *Bild* von F (vergleiche 1.1.8). Die Menge

$$\operatorname{Ker} F := \{ v \in V \mid F(v) = 0 \}$$

heißt der *Kern* von F.

Bild: y ist im Bild von F, wenn es ein $v \in V$ gibt mit $y = F(v)$

Kern: x ist im Kern von F, wenn gilt $F(x) = 0$

Kern einer Matrix

Kern: x ist im Kern von A, wenn gilt $Ax = 0$

Kern einer Matrix

Kern: x ist im Kern von A, wenn gilt $Ax = 0$ Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker A$$

Kern einer Matrix

Kern: x ist im Kern von A, wenn gilt $Ax = 0$ Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker A$$

Kern einer Matrix

Beispiel 1: Sei $x \in \ker A$. Zeige $A(y + x) = Ay$.

Kern einer Matrix

Beispiel 1: Sei $x \in \ker A$. Zeige $A(y+x) = Ay$.

$$A(y+x) = Ay + \underbrace{Ax}_{=0} = Ay$$

Kern einer Matrix

Beispiel 1: Sei $x \in \ker A$. Zeige $A(y+x) = Ay$.

$$A(y+x) = Ay + \underbrace{Ax}_{=0} = Ay$$

Beispiel 2: Sei $x, y \in \ker A$. Zeige $z = x + y \in \ker A$:

Kern einer Matrix

Beispiel 1: Sei $x \in \ker A$. Zeige $A(y+x) = Ay$.

$$A(y+x) = Ay + \underbrace{Ax}_{=0} = Ay$$

Beispiel 2: Sei $x, y \in \ker A$. Zeige $z = x + y \in \ker A$:

Zu zeigen: $Az = 0$

$$Az = A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

Kern einer Matrix

Beispiel 3: Sei $x \in \ker A$ und y löst $Ay = b$. Zeige $z = x + y$ löst $Az = b$:

Kern einer Matrix

Beispiel 3: Sei $x \in \ker A$ und y löst $Ay = b$. Zeige $z = x + y$ löst $Az = b$:

Zu zeigen: $Az = b$

$$Az = A(x+y) = \underbrace{Ax}_{=0} + Ay = 0 + b = b$$

Beispiel 4: Sei $x \in \ker A$. Zeige $z = 2x \in \ker A$.

Kern einer Matrix

Beispiel 3: Sei $x \in \ker A$ und y löst $Ay = b$. Zeige $z = x + y$ löst $Az = b$:

Zu zeigen: $Az = b$

$$Az = A(x + y) = \underbrace{Ax}_{=0} + Ay = 0 + b = b$$

Beispiel 4: Sei $x \in \ker A$. Zeige $z = 2x \in \ker A$.

Zu zeigen: $Az = 0$

$$Az = A(2x) = 2Ax = 2 \cdot 0 = 0$$

Wie finde ich den Kern?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{löse } Ax = 0$$

Forme um in die Zeilenstufenform:

Wie finde ich den Kern?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{löse } Ax = 0$$

Forme um in die Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3'=Z_3-Z_2-Z_1]{Z_2'=Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wie finde ich den Kern?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{löse } Ax = 0$$

Forme um in die Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3'=Z_3-Z_2-Z_1]{Z_2'=Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(I)\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$(II)\ x_2 - 2x_3 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 2x_3$

$\Rightarrow x_1 + 2x_3 + 2x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -4x_3$

Wie finde ich den Kern?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{löse } Ax = 0$$

Forme um in die Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3'=Z_3-Z_2-Z_1]{Z_2'=Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(I)\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
$(II)\ x_2 - 2x_3 = 0$
$\Rightarrow x_2 = 2x_3$
$\Rightarrow x_1 + 2x_3 + 2x_3 = 0$
$\Rightarrow x_1 = -4x_3$

Wähle $x_3 = 1 \ \Rightarrow \ x_2 = 2,\ x_1 = -4$

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = c \cdot (1, 2, -4)^T\}$$