ulm university universität uulm

Prüfungsklausur Lineare Algebra I – Aufgaben

1. (a) Man zeige: Eine Teilmenge U eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$ ist genau dann ein Unterraum von V, wenn für beliebige $u, v \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt [10]

$$\lambda u + \mu v \in U.$$

   (b) Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, sei $\mathrm{Aut}(V)$ die Menge der Isomorphismen $f : V \to V$ und $\circ$ bezeichne die Hintereinanderausführung von Abbildungen. Zeigen Sie: $(\mathrm{Aut}(V), \circ)$ ist eine Gruppe. [7]

2. Untersuchen Sie mit Hilfe der Rangkriterien, für welche $c \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem lösbar, universell lösbar bzw. eindeutig lösbar ist: [8]

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 \qquad + x_3 &= 5 \\ 6x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 \qquad + 10x_3 &= c. \end{aligned}$$

3. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad &= b_1 \\ 2x_1 \qquad - x_3 &= b_2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= b_3 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 &= b_4. \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_0(A^\top)$ des transponierten homogenen Systems. [5]

   (b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $\mathcal{L}_0(A^\top)$. [2]

   (c) Bestimmen Sie den Unterraum $\mathcal{B}$ aller $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$, für die das obige Gleichungssystem lösbar ist. Geben Sie eine Basis von $\mathcal{B}$ an. [10]

4. Sei $\pi \in S_4$ eine Permutation mit

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie π^n für $n \in \mathbb{N}$ sowie π^{-1}. [5]

   (b) Sei $\tau \in S_6$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie τ in Zyklenschreibweise. [2]

   (c) Schreiben Sie τ als Produkt von Transpositionen. [2]

   (d) Bestimmen Sie alle Inversionen von τ sowie $\mathrm{inv}(\tau)$ und $\mathrm{sgn}(\tau)$. [6]

5. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel. [10]

$$\begin{aligned} (2+i)x_1 + \qquad\qquad ix_2 &= 3 \\ (-1+2i)x_1 + (-1+i)x_2 &= 2+3i. \end{aligned}$$

6. Zeigen Sie, dass es für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$ eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so dass λ ein Eigenwert von A mit der Vielfachheit m ist und der von den zu λ gehörenden Eigenvektoren aufgespannte Eigenraum die Dimension 1 hat. [11]

7. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung für die gilt: Sind v, w Eigenvektoren von F, so ist $v + w$ entweder auch ein Eigenvektor von F oder Null. Zeigen Sie: Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $F = \lambda\,\mathrm{id}$. [19]