Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
SoSe 2021

96 Punkte

2. Klausur: Analysis 1 für Informatik

1. Überprüfen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die folgenden Beispiele auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

i) $a_n = \sqrt{n^4+5} - n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (4)

ii) $a_n = \left(\dfrac{n^3+5n-1}{2n^4-n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (5)

2. i) Zeigen Sie für alle $a, b \geq 0$ die Ungleichung (4)

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

ii) Sei nun $x > 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine rekursiv definierte Folge mit

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{x}{x_n}\right), n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe von i), dass $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\sqrt{x}$ nach unten beschränkt ist. (3)

b) Zeigen Sie, dass $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. (4)

c) Begründen Sie schließlich, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. (6)

3. i) Definieren Sie den Konvergenzradius einer Potenzreihe (2)

$$Q(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

wobei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

ii) Angenommen $x_0 = -1$. Geben Sie für die folgenden Fälle des Konvergenzradius R die größtmögliche Menge an, auf welcher $Q(x)$ garantiert konvergiert. Nennen Sie auch explizit alle Stellen, in denen im Allgemeinen keine Aussage möglich ist. (4)

a) $R = 0$ b) $R = 2$ c) $R = \infty$

iii) Bestimmen Sie nun die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen. (4 + 4)

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k^2}(x-1)^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{(k-1)!}x^k$

4. i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit (7)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

ii) Bleibt die Aussage aus Teil i) im Allgemeinen wahr, wenn auf die Voraussetzung, dass f stetig ist, verzichtet wird? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

5. i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch (9)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\ln(x^2) & : x \neq 0 \\ -1 & : x = 0 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie alle Stellen, in welchen f stetig ist. Geben Sie auch für jede Unstetigkeitsstelle an, ob es sich um eine *Sprungstelle*, *hebbare Unstetigkeit*, *Polstelle* oder *Unstetigkeit zweiter Art* handelt.

ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x = 0$ stetig. Angenommen $\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = \pi$. Bestimmen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n^2}\right)$. (2)

6. Sei $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ für alle $x > -1$.

i) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom $T^{(2)}f(0,x)$ von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (7)

ii) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Bestimmen Sie ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (0,\delta)$ die Ungleichung (5)

$$|f(x) - T^{(2)}f(0,x)| < \varepsilon$$

gilt.
Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die dritte Ableitung von f gegeben ist durch $f^{(3)}(x) = \frac{3x+18}{8(x+1)^{\frac{7}{2}}}$ für alle $x > -1$.

7. Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 e^{\frac{x}{2}}$ durch (Nullstellen, Monotonieintervalle, Extremstellen (lok. Max./Min.), Verhalten für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$). (10)

8. Berechnen Sie die folgenden Integrale. (4 + 9)

i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2x\sin(x^2)}{\exp(\cos(x^2))}\,dx$ ii) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$

Hinweis: $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$