Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 03

Abgabedatum: 07.05.24, 14 Uhr

1. (A) Bilinearformen und Skalarprodukte

Prüfen Sie jeweils für B_1, B_2 und B_3, ob die entsprechende Abbildung eine Bilinearform oder sogar ein Skalarprodukt ist.

a) $B_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n j x_j y_j$ (2)

b) $B_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n (-1)^j x_j y_j$ (2)

c) $B_3\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n x_j y_j^2$ (2)

2. (A) Matrixnormen

Seien $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und seien $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $||\cdot||' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jeweils Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Wir definieren die induzierte **Matrixnorm** auf $M(m \times n, \mathbb{R})$ durch

$$||A|| := \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||'}{||x||}.$$

a) Wir wählen für $||\cdot||$ und für $||\cdot||'$ jeweils die ∞-Norm $||x||_\infty := \max_j |x_j|$.

i) Zeigen Sie (1)

$$||Ax||' \leq \max_j \left(\sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right) \cdot ||x||$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) Zeigen Sie (1)

$$||A|| = \max_j \left(\sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right).$$

Hinweis: Setzen Sie einen geeigneten Vektor für x ein, um in (a) Gleichhei zu erhalten.

b) Nun wählen wir für $||\cdot||$ und für $||\cdot||'$ jeweils die 1-Norm $||x||_1 := \sum_j |x_j|$.

i) Zeigen Sie (1)

$$||Ax||' \leq \max_k \left(\sum_{j=1}^m |a_{jk}| \right) \cdot ||x||$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) Zeigen Sie (1)

$$||A|| = \max_k \left(\sum_{j=1}^m |a_{jk}| \right).$$

c) Schließlich wählen wir für $||\cdot||$ und für $||\cdot||'$ jeweils die Euklidische bzw. 2-Norm $||x||_2 := \sqrt{\sum_j |x_j|^2}$.

i) Zeigen Sie (1)

$$||Ax||' \leq ||A||_F \cdot ||x||$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $||\cdot||_F$ die **Frobenius-Norm**

$$||A||_F := \sqrt{\sum_j \sum_k |a_{jk}|^2}$$

bezeichnet. *Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.*

ii) Zeigen Sie, dass $||\cdot||_F$ **nicht** die von $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ induzierte Matrixnorm ist, indem Sie den Fall $m = n, A = E_n$ betrachten. (1)

3. (A) Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen über ihren jeweiligen Körpern:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R}) \text{ mit } \vartheta, \varphi, r \in \mathbb{R},$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M(4\times 4, \mathbb{R})$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{F}_2)$$

(2)

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.