Lösungsvorschlag Blatt 10

1) a) z.z.: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Wegen $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}\right) = 1$

b) z.z.: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Da e^x und $\ln(x)$ stetig, reicht es, $x = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$ zu zeigen:

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

Wegen ~~Hinweis~~ Hinweis dürfen wir l'Hospital verwenden: Sei $y \in \mathbb{R}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)}{\frac{1}{y}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{-\frac{1}{y^2}} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{y}} = x$ $\square$

2)

a)(i) f ist unendlich oft stetig differenzierbar $\Rightarrow$ können Taylor anwenden

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ für ein $\xi \in (x,a)$ bzw (a,x)

Wir entwickeln um $a=0$ und betrachten den Fehler:

$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$

, da wir bei $x = \frac{1}{10}$ auswerten und $|f^{(n+1)}(\xi)| = |\sin(\xi)|$ oder $\cos(\xi)$ (beides ≤ 1)

$\Rightarrow R_n(x) \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-4}$, erfüllt für $n \geq 3$ (Wähle $n=3$)

$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{10}\right) \approx \sum\limits_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sin(0)\cdot 1 + \cos(0)\cdot\frac{1}{10} - \sin(0)\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2} - \cos(0)\cdot\frac{1}{1000}\cdot\frac{1}{6}$

$= \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = 0{,}0998333\ldots$ (zum Vergleich: $\sin\left(\frac{1}{10}\right) \overset{TR}{=} 0.0998334\ldots$)

(ii) f als unendliche Reihe?

Analog zu a) erhält man $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und damit

$\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Wir bestimmen $f^{(k)}(0)$ allgemein: $\left.\begin{cases} f^{0}(0) = \sin(0) = 0 \\ f'(0) = \cos(0) = 1 \\ f''(0) = -\sin(0) = 0 \\ f'''(0) = -\cos(0) = -1 \\ f^{(iv)}(0) = \sin(0) = 0 \end{cases}\right\} f^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\ell} & \text{falls } k = 2\ell+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow \sin(x) = \sum\limits^{\infty} (-1)^{\ell} x^{2\ell}$ …

2) b) (i) ~~f(t) =~~ $f: (-1,\infty) \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = \sqrt{1+x}$

f ist auf $(-1,\infty)$ unendlich oft diff-bar mit

$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(0) = \frac{3}{8}$

$f^{(iv)}(x) = -\frac{15}{16}(x+1)^{-\frac{7}{2}}$

$\Rightarrow P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$

(ii) $|R_3(x)| = \left| -\frac{15}{16} \frac{(\xi+1)^{-\frac{7}{2}}}{4!} x^4 \right|$ mit ξ zwischen 0 und x

Wegen $|x| < \frac{1}{5}$ ist $|x^4| < \frac{1}{625}$ und wegen $|\xi| \leq \frac{1}{5}$ ist $(\xi+1)^{-\frac{7}{2}} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{7}{2}}$

$\Rightarrow R_3(x) \leq \frac{15}{16 \cdot 4!} \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{7}{2}} \cdot \frac{1}{625} = 1{,}36 \cdot 10^{-4} < \frac{1}{4} \cdot 10^{-3}$

3) z: $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$ mit $b_k = \sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} c_l a^{l-k}$

f als Polynom ∞ oft diffbar und $f^{(n+1)} \equiv 0$

$\Rightarrow$ Taylor $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

$f'(a) = \sum_{l=0}^{n} l c_l a^{l-1}$, $f''(a) = \sum_{l=1}^{n} l(l-1) c_l a^{l-2} = \sum_{l=2}^{n} l(l-1) c_l a^{l-2}$

$\Rightarrow f^{(k)}(a) = \sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} c_l a^{l-k} = \sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} k! \, c_l a^{l-k} = k! \sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} c_l a^{l-k}$, $k \leq n$

Einsetzen: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k! \sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} c_l a^{l-k}}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left[\sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} c_l a^{l-k}\right]}_{b_k} (x$