Dr. J.-W. Liebezeit
M. Scheibchen

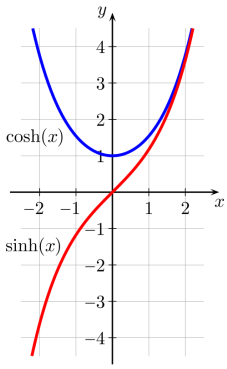
Blatt 09
27.06.2014

Übungen zu Analysis I für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe bis Freitag, 04.07.2014 um 08:20 Uhr, H3)

1. Die Funktionen *Kosinus Hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ und *Sinus Hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ und } \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$



Zeige für $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(b) $(\sinh x)' = \cosh x$ und $(\cosh x)' = \sinh x$

(c) Zeige, dass die Funktion sinh umkehrbar auf $\mathbb{R}$ ist.

(d) Bestimme die Ableitung der Umkehrfunktion von sinh. Dabei wird die Umkehrfunktion mit Arsinh (*Areasinushyperbolicus*) bezeichnet.

(e) Zeige die Gültigkeit der Identität $\operatorname{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(10 Punkte)

2. (a) Bestimme alle lokalen und globalen Extrema von $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{8}{3}x^3 + 3x^2 + 5$

   i. auf $\mathbb{R}$

   ii. auf $[-1, 4]$.

   (b) Bestimme alle lokalen und globalen Extrema von $g(x) = x \cdot e^{-2x}$ auf $[0, 2]$.

(7+4 Punkte)

3. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^m+1)}{\ln x^n} \qquad (m,n\in\mathbb{N})$

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\exp(\cos(x)) - \sin(x)}{\pi - 2x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x) - x}{x^3}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x+1)}\right)$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-x)}{1+\sin(x)}$

(12 Punkte)

4. (a) Berechne mit Hilfe des Satzes von Taylor $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf einen Fehler von 10^{-4} genau.

   (b) Bestimme für $x \geq -1$ das Taylor-Polynom dritter Ordnung von $f(x) = \sqrt{1+x}$ um $x_0 = 0$.

(5+3 Punkte)