Klausur Mathematik für Informatik 2

5.10.2023

1. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(a) Was ist ein Skalarprodukt auf V (erläutern Sie die Eigenschaften explizit)? (6)

(b) Es sei nun $V = \mathbb{C}^n$ mit der kanonischen Basis und $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Ist durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{y_j} = x^\top A \overline{y}$ immer ein Skalarprodukt auf V gegeben (Begründung)? (2)

(c) Es seien V und A wie in Teilaufgabe (b). Welche Eigenschaften von A sind notwendig bzw. hinreichend (Beweis/Herleitung), damit durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{y_j} = x^\top A \overline{y}$ ein Skalarprodukt auf V gegeben ist? (9)

(d) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{C}^n$ zusammen mit $d : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $d(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ ein metrischer Raum ist. (4)

(e) Wird die Metrik aus Teilaufgabe (d) durch eine Norm induziert? Wenn ja, geben Sie die Norm an. (2)

2. (a) Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Angenommen, das charakteristische Polynom von A hat die Form

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 + 12\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda.$$

(1) Geben Sie n an. (1)

(2) Ist A invertierbar (mit Begründung)? (2)

(b) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar? Bestimmen Sie ggf. A^{-1}. (7)

(c) Es sei $R(x) = \dfrac{x^8 - 8x^6 + 15x^4 + 7x^2 - 15}{(x^2-4)^2(x+1)(x^2+1)}$.

Geben Sie $\displaystyle\int R(x)\,dx$ an, wobei die Koeffizienten einer dafür eventuell benötigten Partialbruchzerlegung nicht bestimmt werden müssen. (11)

Hinweise:

- Gilt etwa $R(x) = P(x) + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$ mit einem Polynom P und Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$, dann ist die (explizite) Bestimmung von $\displaystyle\int P(x)\,dx + A\int \frac{dx}{x+1} + B\int \frac{dx}{(x+1)^2}$ gefordert.
- $(x^2-4)^2(x+1)(x^2+1) = x^7 + x^6 - 7x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 16x + 16.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4c - b^2}} \arctan \frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}}$ für $4c - b^2 > 0$.

3. (a) Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

(1) Wie hängen das charakteristische Polynom von A und die Eigenwerte von A zusammen? (1)

(2) Was ist ein Eigenvektor von A? (2)

(3) Warum existiert zu jedem Eigenwert von A mindestens ein Eigenvektor? (3)

(b) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Was ist eine Orthonormalbasis auf V? (2)

4. (a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = 1 - \sqrt{\lfloor x \rfloor} + (x^2 + x)\left|x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right|$$

auf dem Intervall $[0, 2]$ den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt. (5)

Erinnerung: $\lfloor x \rfloor = \max\{\, z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x \,\}$ (Abrunden).

(b) Wann heißt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend? (1)

(c) Geben Sie eine streng monoton wachsende Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) < \frac{1}{2}$, $f(1) > \frac{1}{2}$ an, die den Wert $\frac{1}{2}$ nicht annimmt (mit Nachweis). (2)

(d) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + c, & x < 1, \\ x^2 - 2x + 2, & x \geq 1. \end{cases}$

Lassen sich $a, b, c \in \mathbb{R}$ so wählen, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist? Bestimmen Sie ggf. die Menge aller Tripel (a, b, c) für die f stetig differenzierbar ist. (8)

(e) Welche (algebraische) Strukur hat die Lösungsmenge aus Teilaufgabe (d)? (1)

Hinweis: Schreiben Sie „$\varnothing$", falls Sie in (d) das als Lösung hatten.

5. (a) Es seien $[a, b] = I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Wann heißt f auf I Riemann-integrierbar? (2)

(b) Bei welchen Integralen spricht man von Konvergenz (des Integrals) und was bedeutet das? (3)

Hinweis: Den zweiten Teil können Sie an einem abstrakten oder konkreten Beispiel erläutern. Sie müssen nicht alle möglichen Fälle angeben.

(c) Zeigen Sie, dass gilt (9)

$$\int \frac{2\sin^2(x)}{\cos^3(x)} dx = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} - \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Erinnerung: Additionstheoreme:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$ und $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.

Viel Erfolg!