Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Lineare Gleichungssysteme

Homogene und inhomogene Gleichungen

Definition 7.4.1: Bezeichnungen in Gleichungssystemen

Ein lineares Gleichungssystem, in dem alle Koeffizienten b_i der rechten Seite gleich 0 sind heißt *homogen*. Ist wenigstens ein $b_i \neq 0$, so heißt das Gleichungssystem *inhomogen*. Es sei (I) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{I}$$

Ferner sei (H) das zu (I) gehörige homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{H}$$

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Bei Matrix: m Anzahl an Zeilen, n Anzahl an Spalten

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.2: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Definition 6.3.4: Rang und Defekt

Die Dimensionen von $\operatorname{Bild} F$ und $\operatorname{Ker} F$ erhalten besondere Namen:

(i) $\operatorname{rg} F := \dim \operatorname{Bild} F$, der *Rang* von F und

(ii) $\operatorname{def} F := \dim \operatorname{Ker} F$, der *Defekt* von F.

Abbildung 1.3: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Lösbarkeit

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.4: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 3$$

$\Rightarrow$ Gleichung $Ax = b$ ist **lösbar**

Lösbarkeit (II)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.5: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 3$$

$\Rightarrow$ Gleichung $Ax = b$ ist **nicht lösbar**

Lösbarkeit (III)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.6: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 2$$

$\Rightarrow$ Gleichung $Ax = b$ ist **lösbar**

Lösbarkeit (IV)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.7: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit (IV)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.7: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

Lösbarkeit (IV)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.7: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Lösbarkeit (IV)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.7: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 2$$

Lösbarkeit (IV)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.7: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 2$$

$\Rightarrow$ Gleichung $Ax = b$ ist **lösbar**

Lösbarkeit (V)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.8: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit (V)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.8: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

Lösbarkeit (V)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.8: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Lösbarkeit (V)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.8: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 3$$

Lösbarkeit (V)

Satz 7.4.2: Lösbarkeit und Darstellung der Lösungen

(i) *Rangkriterium:* Die Gleichung (I) ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b).$$

Abbildung 1.8: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \operatorname{rg}(A, b) = 3$$

$\Rightarrow$ Gleichung $Ax = b$ ist **nicht lösbar**

Universelle Lösbarkeit (I)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.9: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$(A, b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad (A, b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Universelle Lösbarkeit (II)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.10: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 4 & b_3 \end{array}\right)$$

Universelle Lösbarkeit (III)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.11: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Mehr Zeilen als Spalten ist nie universell lösbar.

$$(A, b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad (A, b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Links $x = (1, 1, 2)^T$. $rg\ A \leq n \neq m$

Eindeutige Lösung (inhomogen)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.12: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_A = (1,1,1)^T \qquad x_{B1} = (1,1,1)^T$$

$$x_{B2} = (0,0,2)^T$$

Eindeutige Lösbarkeit (II)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.13: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$(A, b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2 + Z_4}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rg}(A) = 3 = n$. **Eindeutig lösbar** mit $x = (1, 1, 2)^T$

Eindeutige Lösbarkeit (II)

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.14: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$(A, b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3' = Z_3 - 2Z_2 + Z_4}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rg}(A) = 3 = n$. **Nicht lösbar**, da $\operatorname{rg}(A, b) \neq \operatorname{rg}(A)$

Nulllösung der Homogenen Gleichung

Satz 7.4.4: Universelle und eindeutige Lösbarkeit

(i) Das inhomogene Gleichungssystem (I) ist genau dann *universell lösbar*, das heißt es ist für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(ii) Das homogene Gleichungssystem (H) besitzt genau dann nur die Nulllösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ ist. Genau in diesem Fall besitzt das inhomogene Gleichungssystem (I) höchstens eine Lösung, weshalb man etwas ungenau sagt, dass in diesem Fall (I) *eindeutig lösbar* ist.

Abbildung 1.15: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_A = (0, 0, 0)^T \qquad x_B = c \cdot (1, 1, -1)^T$$