Universität Ulm

Abgabe: Freitag, den 29.05. um 12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 5

17. Zeige:

(a) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ gilt (1)

$$\frac{n^k}{k!}\left(1 - \frac{k(k-1)}{n}\right) \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ gilt (1)

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{|z|^k}{(k-2)!}.$$

18. Man beweise die Parallelogrammidentität in $\mathbb{C}$: (1)

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

19. Man berechne $\overline{z}$, $|z|$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Re}(\frac{1}{z})$ und $\operatorname{Im}(\frac{1}{z})$ für $z = \frac{12+5i}{2+3i}$. (1)

20. Zeichnen Sie die folgenden Mengen: (2)

(i) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, -2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3,\ -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\}$

(ii) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z - 1 + i| < 2\}$

(iii) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| = |z+1|\}$

(iv) $M_4 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+1| \leq |z-i| \leq |z-1|\}$.

Geben Sie ferne bei den Mengen M_3, M_4 eine äquivalente Beschreibung der Menge mittels Bedingungen an den Imaginär- und Realteil einer komplexen Zahl an.

21. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z = 0 \text{ und } \operatorname{Re} z \leq 0\}$ die komplexe Zahl (2)

$$w = \sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||}$$

eine Quadratwurzel der Zahl z ist. Das heißt es gilt $w^2 = z$. Geben sie außerdem alle komplexen Quadratwurzeln der Zahl $z_0 = -6 + 8i \in \mathbb{C}$ in der Form $x = \operatorname{Re}(x) + i\operatorname{Im}(x)$ an und beweisen Sie ihre Behauptung.

22. (a) Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie die folgenden Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (1)

$$z^{n+1} - w^{n+1} = (z-w) \cdot \sum_{k=0}^{n} z^{n-k}w^k.$$

(b) Es seien $a_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Finden Sie eine Formel (ohne Summenzeichen) für den Ausdruck (1)

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - 2a_{k-1} + a_{k-2}).$$