



Angewandte Stochastik – Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 14. Juli 2023 um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen vor Beginn der Übung über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als *exakt zwei Dateien* ab: Eine PDF-Datei für die theoretischen Aufgaben und eine R- oder R-Markdown-Datei (Dateiendung *.R* bzw. *.RMD*) für die Programmieraufgaben. Andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Bearbeitet das Übungsblatt in *Gruppen von 3-4 Personen* und gebt bitte euren jeweiligen Studiengang an. Nur eine Person aus der Gruppe soll das Übungsblatt abgeben. Beachtet außerdem die Hinweise zu den Übungen in Moodle.

Aufgabe 1 (4 + 4 + 4 = 12 Punkte)

Es sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega)$. Sei weiterhin $Y = g(X)$. Bestimme in den folgenden Fällen $\mathbb{E}[Y^r]$, $r \in \mathbb{N}$, und $\text{Var}(Y)$:

- (a) $X(\Omega) = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \dots, 4\pi\} = \{k\pi/2 \mid k = 0, \dots, 8\}$ und X ist gleichverteilt¹, $g(x) = \sin(x)$.
- (b) $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $p \in (0, 1)$, $g(x) = 2^x$.
- (c) $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$ und $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $g(x) = e^{2x}$. (Hinweis: Verwende die Reihendarstellung der e -Funktion.)

Aufgabe 2 (2 + 1 = 3 Punkte)

Es sei X eine beliebige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ² und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Teilmenge von \mathbb{R} . Die Zufallsvariable Y sei definiert durch $Y = 1_A(X)$. Zeige:

- (a) $\mathbb{E}[Y^r] = P(X \in A)$, $r \in \mathbb{N}$
- (b) $\text{Var}(Y) = P(X \in A) - P(X \in A)^2$

¹d.h. X nimmt alle Werte in $X(\Omega)$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit an

²Grundsätzlich ist es irrelevant, welchen Wahrscheinlichkeitsraum man wählt. Zur Anschauung kannst du einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum verwenden.

Aufgabe 3 (3 + 2 + 3 + 3 = 11 Punkte)

Es sei eine Zufallsstichprobe von iid $\text{Exp}(\lambda)$ verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gegeben, wobei $\lambda > 0$ unbekannt sei.

- (a) Zeige: $\min_{i=1, \dots, n} X_i \sim \text{Exp}(n\lambda)$.
- (b) Zeige, dass $n \cdot \min_{i=1, \dots, n} X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für $1/\lambda$ ist.
- (c) Berechne die mittlere quadratische Abweichung des Schätzers aus b) für $1/\lambda$.
- (d) Zeige, dass der Schätzer aus b) weder stark noch schwach konsistent für $1/\lambda$ ist.

Aufgabe 4 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

Es Seien X und Y Zufallsvariablen mit $0 < \mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$.

- (a) Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ wird $\mathbb{E}[(X - aY)^2]$ minimal?
- (b) Zeige, dass die Zufallsvariablen $X - Y$ und $X + Y$ genau dann unkorreliert sind, wenn $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$.
- (c) Gib ein Beispiel für X und Y so, dass $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$, aber $X - Y$ und $X + Y$ nicht stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 5 (2 + 2 = 4 Punkte)

Es sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $Y = X^2$.

- (a) Bestimme die Kovarianz von X und Y
- (b) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 6 (je 1 Punkt = 6 Bonuspunkte)

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichtefunktion $f(x, y)$. Die Dichte der Randverteilungen seien $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. Gib an, welche Aussagen korrekt sind:

Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es können minimal 0 Punkte erreicht werden.

- (a) X und Y sind abhängige Zufallsvariablen, da sie eine gemeinsame Dichtefunktion besitzen.
- (b) Sind X und Y unkorreliert, so gilt $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.
- (c) Falls $(X, Y) \sim N(\mu, K)$ und $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, so gilt X und Y unkorreliert.

- (d) Falls $(X, Y) \sim N(\mu, K)$ und die Nichtdiagonalelemente von K gleich Null sind, so ist der Korrelationskoeffizient von X und Y gleich Null.
- (e) Falls $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, so ist der Korrelationskoeffizient von X und Y negativ.
- (f) Für stochastisch abhängige Zufallsvariablen X und Y sind die standardisierten Zufallsvariablen stochastisch unabhängig.