Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
SoSe 2021

108 Punkte

1. Klausur: Analysis 1 für Informatik

1. Überprüfen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die folgenden Beispiele auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

i) $a_n = \sqrt[n]{3n^2+n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (5)

ii) $a_n = \dfrac{n^2+e^n-1}{2n^2-5n+100}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (5)

2. i) Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b \le \infty$, differenzierbar und weiter sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Sei außerdem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. (4)
Angenommen $\lim_{x\to a^+} f(x) = g(x) = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Limes auf der rechten Seite existiert.

ii) Überprüfen Sie die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $y_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)-1}{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (7)

3. i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{(2k-1)!}$ (4)

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ (5)

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \frac{n}{2}\right)$ (4)

ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Folge. Angenommen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, für alle $n \in \mathbb{N}$, ist eine Cauchy-Folge. Begründen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. (2)

4. Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x^2+1} - e^{-x}$ durch:

i) Zeigen Sie, dass f auf genau solchen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, auf welchen (5)

$$|x+1| < x^2+1$$

für alle $x \in I$ gilt und streng monoton fällt auf denjenigen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$, auf welchen

$$|x+1| > x^2+1$$

für alle $x \in I$ gilt.

ii) Bestimmen Sie mit i) nun explizit die Monotonieintervalle von f. (5)

iii) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremstellen (lok. Maxima/Minima) und das Verhalten für $(x \to \infty)$ und $(x \to -\infty)$ von f. (8)

5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot \sin(\pi x)$. Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $P(1) = f(1), P'(1) = f'(1)$ und $P''(1) = f''(1)$. (7)

6. i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Zeigen Sie, dass die Funktion f ihr Minimum annimmt, d.h. es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (7)

ii) Bleibt die Aussage aus Teil i) im Allgemeinen wahr, wenn auf die Voraussetzung, dass f stetig ist, verzichtet wird? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

7. i) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{t+1}{t^3-1}\,dt$. (8)

ii) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil i) die Lösung des Anfangswertproblem (5)

$$y' = \frac{3x^2}{x^3-1}y + x + 1, y(2) = 1$$

für $x \geq 2$.

8. Betrachten Sie die Potenzreihe

$$Q(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2}(x-1)^k.$$

i) Zeigen Sie, dass $R = 1$ der Konvergenzradius von Q ist und bestimmen Sie das größtmögliche Intervall, in welchem $Q(x)$ konvergiert. (7)

ii) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ (5)

$$Q(x) \leq 10(x-1).$$

9. i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Definieren Sie Häufungswerte und Limes superior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder geben Sie eine äquivalente Charakterisierung dieser Begriffe an. (2)

ii) Begründen Sie, warum jede beschränkte Folge einen Häufungswert besitzt. (2)

iii) Bestimmen Sie alle Häufungswerte, Limes inferior und Limes superior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche nun gegeben ist durch (8)

$$a_n = \arctan\left(\cos(\pi n)\frac{n!}{n+1}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Viel Erfolg!