Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille, Marc Schneble

Sommersemester 16
08.10.2016, 10 Uhr s.t.

2. Klausur zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

Gesamtpunktzahl: 110 Punkte
Hinreichende Punktzahl zum Bestehen der Klausur: 45 Punkte

1. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte.

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}$,

   b) $\lim\limits_{x\to 0} (\log(x)\log(1-x))$.

   (4+9 Punkte)

2. Zeige mit Hilfe der Definition der Folgenkonvergenz, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

   $$a_n = \frac{2n^2 - 3}{-3n^2 + 2n - 1}, n \in \mathbb{N}$$

   konvergiert.

   (9 Punkte)

3. Untersuche die nachstehenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2$,

   b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} + \sqrt{k^2 + k} - k\right)^k$.

   (5+9 Punkte)

4. Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$, sodass

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a - \frac{2}{3}}, & \text{für } x > 1 \\ bx^3 + 1, & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$$

   stetig in $x_0 = 1$ ist und $f(-1) = -1$ gilt.

   (7 Punkte)

5. Bestimme mit Hilfe der Definition der Differenzierbarkeit die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{-2}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (5 Punkte)

6. Zeige, dass
$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$
für alle $x \in (-1, 1)$.

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass der Konvergenzradius der Reihe $R = 1$ ist.

(7 Punkte)

7. Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

   a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die n–te Ableitung von f gegeben ist durch
   $$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{4(x-n)}{(x+1)^{n+2}}.$$

   b) Stelle eine zu f gehörige Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf.

   c) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe aus Teilaufgabe b) absolut konvergiert.

(10+4+8 Punkte)

8. a) Formuliere den ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

   b) Zeige die Ungleichung
   $$\log(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \quad \forall x > 0.$$
   Hinweis: Betrachte dazu die Hilfsfunktion $f(t) := \log(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$. Es darf außerdem ohne Beweis verwendet werden, dass $(1+t)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{t}{2}$ für $t \geq 0$.

(5+10 Punkte)

9. Bestimme folgende bestimmte und unbestimmte Integrale.

   a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) e^x \,\mathrm{d}x$,

   b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 + 2x + 5}$.

   Hinweis: Die Funktion $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ besitzt keine reellen Nullstellen.

(8+10 Punkte)

Viel Erfolg!