UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Freitag, den 19.06. um 12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Lösungsvorschlag Analysis 1: Blatt 8

31. (a) Es seien $a, b > 0$. Man zeige die Ungleichungen (1)

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Lösungsvorschlag: Für alle $a, b > 0$ gilt $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ und somit

$$\begin{aligned} 4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ \Leftrightarrow ab &\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

was die rechte Ungleichung zeigt. Um die linke Ungleichung zu zeigen, beachte

$$\begin{aligned} & \sqrt{ab} && \leq \frac{a+b}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2}{a+b} = \frac{2ab}{(a+b)ab} && \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2ab}{a+b} && \leq \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

(b) Für $0 < a_1 < b_1$ seien die Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \text{ und } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(i) Man zeige, dass die Folge der Intervalle $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ eine Intervallschachtelung bildet. (2)

Lösungsvorschlag: Anhand der Rekursionsvorschrift sehen wir direkt, dass alle Folgenglieder a_n und b_n positiv sind. Somit lässt sich Aufgabenteil (a) anwenden und wir sehen, dass

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zusammen mit der Voraussetzung $a_1 < b_1$ folgt, dass $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Wir zeigen nun mittels vollständiger Induktion, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist:
Mit den Rekursionsformeln ist für $n = 1$

$$2a_1 b_1 = a_2(a_1 + b_1) < a_2(b_1 + b_1) = 2a_2 b_1$$

und

$$b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} < \frac{b_1 + b_1}{2} = b_1$$

und somit $a_1 \leq a_2$ und $b_2 \leq b_1$. Wir nehmen nun an es gelten $a_n \leq a_{n+1}$ und $b_{n+1} \leq b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt für $n+1$ analog zum Fall $n = 1$, dass

$$2a_n b_n = a_{n+1}(a_n + b_n) \leq a_{n+1}(b_n + b_n) = 2a_{n+1} b_n$$

und

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n$$

und somit $a_n \leq a_{n+1}$ und $b_{n+1} \leq b_n$. Die Aussage folgt mit vollständiger Induktion. Für die Differenz der Folgenglieder gilt

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n}{2(a_n + b_n)} \\ &= \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

und wir sehen (zum Beispiel mit Induktion), dass

$$0 \leq b_n - a_n = |b_n - a_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1).$$

Es folgt, dass $b_n - a_n \to 0$. Nach Satz 30 ist die Folge der Intervalle $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ eine Intervallschachtelung.

(ii) Man bestimme die reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$, welche in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}$ liegt. (2)

Lösungsvorschlag: Aus Aufgabenteil (a) folgt sofort, dass

$$a_n \leq \sqrt{a_n b_n} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt. Wir wollen nun zeigen, dass $\sqrt{a_n b_n} = \sqrt{a_1 b_1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies zeigen wir mittels vollständiger Induktion:
Der Fall $n = 1$ ist klar, da $\sqrt{a_1 b_1} = \sqrt{a_1 b_1}$. Wir nehmen nun an, dass $\sqrt{a_n b_n} = \sqrt{a_1 b_1}$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt mit der Rekursionsformel, dass

$$\sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} = \sqrt{\frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2}} = \sqrt{a_n b_n} \overset{\text{IH}}{=} \sqrt{a_1 b_1}$$

und somit $\sqrt{a_n b_n} = \sqrt{a_1 b_1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $a_n \leq \sqrt{a_1 b_1} \leq b_n$. Mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ folgt aus dem Quetschlemma, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a_1 b_1} = \lim_{n\to\infty} b_n$. Die gesuchte Zahl $c \in \mathbb{R}$ ist nach dem Intervallschachtelungsprinzip gegeben durch $c = \sqrt{a_1 b_1}$.

32. Man verifiziere für alle $x, y > 0$ die Ungleichung (1)

$$\frac{\log x + \log y}{2} \leq \log\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Lösungsvorschlag: Mit der Monotonie der Exponentialfunktion folgt

$$\begin{aligned} &\frac{\log x + \log y}{2} \leq \log\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ &\exp\left(\frac{\log x + \log y}{2}\right) \leq \exp\left(\log\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{\exp(\log(xy))} \leq \frac{x+y}{2} \\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \end{aligned}$$

was nichts anderes als eine Ungleichung aus Aufgabe 31(a) ist (beachte, dass $x, y > 0$. Man nennt diese Ungleichung auch die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel.

33. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung (2)

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq n^n e^{-n+1} n$$

erfüllt ist.

Lösungsvorschlag: Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion:
IA: Für $n = 1$ ist $1^1 \cdot e^{-1+1} = 1 \leq 1! \leq 1^1 \cdot e^{-1+1} \cdot 1$.
IH: Es gelte

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq n^n e^{-n+1} n$$

für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$.
IS: $n \to n+1$: Wir multiplizieren obige Gleichung mit $n+1$ und erhalten

$$(n+1n^n e^{-n+1} \leq (n+1)! \leq (n+1)n^{n+1}e^{-n+1}.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$(n+1)^{n+1}\exp(-(n+1)+1)\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\exp(1)\right] \leq (n+1)!$$
$$(n+1)^{n+2}\exp(-(n+1)+1)\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}\exp(1)\right].$$

Mit

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(siehe Beispiele nach Satz 30) erhalten wir die Gültigkeit der Gleichung für $n+1$. Die Behauptung folgt nun mit dem Prinzip der vollständigen Induktion.

34. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass dann auch (2)

$$a_n = \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n$$

konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \exp(x)$.

Lösungsvorschlag: Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Zahlenfolge. Gilt $x=0$, so folgt mit Satz 28, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 = \exp(0)$. Es gelte also $x \neq 0$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{\frac{n+x_n}{n}}{\frac{n+x}{n}}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+x_n}{n+x}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+x_n+x-x_n}{n+x_n}\right)^{-n} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{x-x_n}{n+x_n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{x-x_n}{n(1+\frac{x_n}{n})}\right)^{-n} \\ &= \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n}, \quad \text{wobei } a_n = \frac{x-x_n}{1+\frac{x_n}{n}}.\end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, konvergiert der Nenner nach Satz 28 gegen 1 und somit folgt insgesamt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$