Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung

Reelle Partialbruchzerlegung 12.2.5

Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine echt gebrochene rationale Funktion und Q möge durch die reelle Produktdarstellung

$$Q(x) = (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{t_1} \cdots (x^2 + b_\ell x + c_\ell)^{t_\ell}$$

wie oben gegeben sein, dann besitzt R eine *Partialbruchdarstellung* der Form

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{A_i^{(j)}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{t_i} \frac{B_i^{(j)} x + C_i^{(j)}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_i^{(1)}}{x - x_i} + \cdots + \frac{A_i^{(p_i)}}{(x - x_i)^{p_i}} \right) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{B_i^{(1)} x + C_i}{x^2 + b_i x + c_i} + \cdots + \frac{B_i^{(t_i)} x + C_i^{(t_i)}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{t_i}} \right) \end{aligned}$$

mit $A_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ für $i = 1 \ldots, k$, $j = 1, \ldots, p_i$ und $B_i^{(j)}, C_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, \ell$, $j = 1, \ldots, t_i$.

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Partialbruchzerlegung

- $Q(x)$ in Produkt umschreiben
- Bestimmung von $k, p_1, .., p_k$, aus Linearfaktoren (NST) und $l, t_1, ..., t_l$ aus Polynomen 2. Grades
- Summanden bestimmen
- Auf einen Nenner bringen
- Nach Potenz von x ordnen
- Koeffizientenvergleich
- Gleichungssystem lösen
- Einsetzen der Koeffizienten

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{3}{((x-1)(x+3))^2} = \frac{3}{(x-1)^2(x+3)^2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{((x-1)(x+3))^2} &= \frac{3}{(x-1)^2(x+3)^2} \\ &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+3} + \frac{A_4}{(x+3)^2}\end{aligned}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{((x-1)(x+3))^2} &= \frac{3}{(x-1)^2(x+3)^2} \\ &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+3} + \frac{A_4}{(x+3)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{2x+1}{(x^2-4)^2} = \frac{2x+1}{((x-2)(x+2))^2}$$

Summanden bestimmen

$$\frac{4x^2+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+3)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{3}{((x-1)(x+3))^2} = \frac{3}{(x-1)^2(x+3)^2}$$

$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+3} + \frac{A_4}{(x+3)^2}$$

$$\frac{2x+1}{(x^2-4)^2} = \frac{2x+1}{((x-2)(x+2))^2}$$

$$= \frac{2x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2}$$

Summanden bestimmen (II)

Vorsicht:

$$\frac{2x+4}{x^2+3x+2} = \frac{2x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\frac{2x+4}{x^2+3x+3} = \frac{Bx+C}{x^2+3x+3}$$

Da x^2+3x+3 **keine Nullstellen** besitzt.

Summanden bestimmen (II)

Vorsicht:

$$\frac{2x+4}{x^2+3x+2} = \frac{2x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\frac{2x+4}{x^2+3x+3} = \frac{Bx+C}{x^2+3x+3}$$

Da x^2+3x+3 **keine Nullstellen** besitzt.

Wie überprüfe ich das am schnellsten?

Bei Polynomen zweiten Grades: Mitternachtformel besitzt keine Lösungen für

$$b^2 - 4ac < 0$$

da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Summanden bestimmen (III)

$$\frac{3x-1}{x^2-2x+2} = \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

Da gilt $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$

$$\frac{3x+1}{x^2-4x+5} = \frac{Bx+C}{x^2-4x+5}$$

da $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$

$$\frac{2x+4}{x^2+4x+3} = \frac{2x+4}{(x+3)(x+1)}$$

da $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1$$

Summanden bestimmen (iv)

Vorsicht wenn: Grad Zähler $\geq$ Grad Nenner

$$\frac{x^4 + 3x}{x^3 + 3x^2 - x - 3} : \qquad \text{Grad Zähler} = 4 \geq 3 = \text{Grad Nenner}$$

Polynomdivision:

$$(x^4 + 3x) : (x^3 + 3x^2 - x - 3) = x - 3 + \frac{10x^2 - 3x - 9}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

$x^2 + 3x^2 - x - 3$ hat die Nullstellen $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$. Also:

$$\frac{x^4 + 3x}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = x - 3 + \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) = 10x^2 - 3x - 9$$

Setze für x die Nullstellen des Nenners ein.

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) = 10x^2 - 3x - 9$$

Setze für x die Nullstellen des Nenners ein. z.B. $x = -1$

$$A_1(-1-1)(-1-3) + A_2\underbrace{(-1+1)}_{=0}(-1-3) + A_3(-1-1)\underbrace{(-1+1)}_{=0} = 10 + 3 - 9$$

$$8A_1 = 4$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) = 10x^2 - 3x - 9$$

Setze für x die Nullstellen des Nenners ein. z.B. $x = -1$

$$A_1(-1-1)(-1-3) + A_2\underbrace{(-1+1)}_{=0}(-1-3) + A_3(-1-1)\underbrace{(-1+1)}_{=0} = 10 + 3 - 9$$

$$8A_1 = 4$$

$A_1 = \frac{1}{2}$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) = 10x^2 - 3x - 9$$

Setze für x die Nullstellen des Nenners ein. z.B. $x = 1$

$$A_1 \underbrace{(1-1)}_{=0}(1-3) + A_2(1+1)(1-3) + A_3 \underbrace{(1-1)}_{=0}(-1+1) = 10 - 3 - 9$$

$$-4A_2 = -2$$

$A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{10x^2 - 3x - 9}{\underbrace{x^3 + 3x^2 - x - 3}_{=(x+1)(x-1)(x-3)}} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Jeden Bruch erweitern zu $Q(x)$.

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-3)} + \frac{A_3(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) = 10x^2 - 3x - 9$$

Setze für x die Nullstellen des Nenners ein. z.B. $x = 1$

$$A_1(3-1)\underbrace{(3-3)}_{=0} + A_2(3+1)\underbrace{(3-3)}_{=0} + A_3(3-1)(3+1) = 90 - 9 - 9$$

$$8A_3 = 72$$

$A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $A_3 = 9$ $\quad\Rightarrow\quad$ $R(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{9}{x-3}$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$R(x) = \frac{A_1(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2x - A_2}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2x - A_2}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{x\overbrace{(A_1+A_2)}^{=5} + \overbrace{2A_1 - A_1}^{=1}}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2x - A_2}{(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{x\overbrace{(A_1+A_2)}^{=5} + \overbrace{2A_1 - A_1}^{=1}}{(x-1)(x+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= 5 & &\Rightarrow A_1 = 5 - A_2 \\
2A_1 - A_2 = 1 &= 2(5-A_2) - A_2 & &\Rightarrow 10 - 3A_2 = 1
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{5x+1}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad Q(x) = (x-1)\cdot(x+2) = (x-x_1)^1\cdot(x-x_2)^1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2x - A_2}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{x\overbrace{(A_1+A_2)}^{=5} + \overbrace{2A_1 - A_1}^{=1}}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$A_1 + A_2 = 5 \qquad \Rightarrow A_1 = 5 - A_2$$

$$2A_1 - A_2 = 1 = 2(5-A_2) - A_2 \;\Rightarrow\; 10 - 3A_2 = 1$$

$$\Rightarrow A_2 = 3 \;\Rightarrow A_1 = 5 - 3 = 2 \;\Rightarrow R(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$$

Beispiel

$$R(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{1x+4}{(x+2)^2} \;\Rightarrow Q(x) = (x-x_1)^2$$

$$\Rightarrow \; R(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

Beispiel

$$R(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{1x+4}{(x+2)^2} \;\Rightarrow Q(x) = (x-x_1)^2$$

$$\Rightarrow \; R(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

$$R(x) = \frac{A_1(x+2)}{(x+2)\cdot(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

Beispiel

$$R(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{1x+4}{(x+2)^2} \Rightarrow Q(x) = (x-x_1)^2$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x+2)\cdot(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A_1 x + 2A_1 + A_2}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Beispiel

$$R(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{1x+4}{(x+2)^2} \Rightarrow Q(x) = (x-x_1)^2$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x+2)\cdot(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x\overbrace{A_1}^{=1} + \overbrace{A_2 + 2A_1}^{=4}}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Beispiel

$$R(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{1x+4}{(x+2)^2} \Rightarrow Q(x) = (x - x_1)^2$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_1(x+2)}{(x+2)\cdot(x+2)} + \frac{A_2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A_1 x + 2A_1 + A_2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x\overbrace{A_1}^{=1} + \overbrace{A_2 + 2A_1}^{=4}}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$A_1 = 1 \;\; A_2 = 2 \;\Rightarrow\; R(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

Beispiel: Partialbruchzerlegung

Zerlegung von $\frac{4x^2+x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$:

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

Beispiel: Partialbruchzerlegung

Zerlegung von $\frac{4x^2+x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$:

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Bx+c)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

Beispiel: Partialbruchzerlegung

Zerlegung von $\frac{4x^2+x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$:

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Bx+c)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

$$= \frac{x^3(A_1+B) + x^2(A_1+A_2-2B+C) + x(A_2+B-2C) - 2A_1 + 2A_2 + C}{Q(x)}$$

Partialbruchzerlegung

Zerlegung von $\frac{0x^3+4x^2+1x+0}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$:

$$\Rightarrow R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$R(x) = \frac{A_1(x-1)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Bx+c)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

$$= \frac{x^3 \overbrace{(A_1+B)}^{=0} + x^2 \overbrace{(A_1+A_2-2B+C)}^{=4} + x \overbrace{(A_2+B-2C)}^{=1} \overbrace{-2A_1+2A_2+C}^{=0}}{Q(x)}$$

Partialbruchzerlegung

Gleichungssystem lösen:

$$
\begin{aligned}
A_1 + B &= 0 & &\Rightarrow A_1 = -B \\
-2A_1 + 2A_2 + C &= 0 \Rightarrow 2B + 2A_2 + C = 0 & &\Rightarrow C = -2B - 2A_2 \\
A_1 + A_2 - 2B + C &= 4 \Rightarrow -B + A_2 - 2B - 2B - 2A_2 = 4 & &\Rightarrow A_2 = -5B - 4 \\
A_2 + B - 2C &= 1 \Rightarrow -25B - 24 = 1 & &\Rightarrow B = -1
\end{aligned}
$$

Partialbruchzerlegung

Gleichungssystem lösen:

$$
\begin{aligned}
A_1 + B &= 0 & &\Rightarrow A_1 = -B \\
-2A_1 + 2A_2 + C &= 0 \Rightarrow 2B + 2A_2 + C = 0 & &\Rightarrow C = -2B - 2A_2 \\
A_1 + A_2 - 2B + C &= 4 \Rightarrow -B + A_2 - 2B - 2B - 2A_2 = 4 & &\Rightarrow A_2 = -5B - 4 \\
A_2 + B - 2C &= 1 \Rightarrow -25B - 24 = 1 & &\Rightarrow B = -1
\end{aligned}
$$

$$A_1 = 1,\ A_2 = 1,\ B = -1,\ C = 0$$

Partialbruchzerlegung

Gleichungssystem lösen:

$$
\begin{aligned}
A_1 + B &= 0 & &\Rightarrow A_1 = -B \\
-2A_1 + 2A_2 + C &= 0 \Rightarrow 2B + 2A_2 + C = 0 & &\Rightarrow C = -2B - 2A_2 \\
A_1 + A_2 - 2B + C &= 4 \Rightarrow -B + A_2 - 2B - 2B - 2A_2 = 4 & &\Rightarrow A_2 = -5B - 4 \\
A_2 + B - 2C &= 1 \Rightarrow -25B - 24 = 1 & &\Rightarrow B = -1
\end{aligned}
$$

$$A_1 = 1,\ A_2 = 1,\ B = -1,\ C = 0$$

Also gilt:

$$R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-x}{x^2+2x+2}$$

Aufgabe: Beispiel

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x + 3}{x^3 + 4x^2 + 9x + 10} \qquad \text{Hinweis: Q(-2)} = 0$$

Aufgabe: Beispiel

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x + 3}{x^3 + 4x^2 + 9x + 10}$$ Hinweis: Q(-2) = 0

$$(x^3 + 4x^2 + 9x + 10) : (x + 2) = x^2 + 2x + 5$$

Aufgabe: Beispiel

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x+3}{x^3+4x^2+9x+10} \qquad \text{Hinweis: Q(-2) = 0}$$

$$(x^3+4x^2+9x+10) : (x+2) = x^2+2x+5$$

$$R(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

Aufgabe: Beispiel

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x+3}{x^3+4x^2+9x+10} \qquad \text{Hinweis: Q(-2) = 0}$$

$$(x^3+4x^2+9x+10) : (x+2) = x^2+2x+5$$

$$R(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

$$R(x) = \frac{A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$

$$= \frac{x^2(\overbrace{A+B}^{=0}) + x(\overbrace{2A+2B+C}^{=4}) + \overbrace{5A+2C}^{=3}}{Q(x)} \left(= \frac{0x^2+4x+3}{Q(x)} \right)$$

$$A=-1,\ B=1,\ C=4 \quad \Rightarrow \quad R(x) = \frac{-1}{x+2} + \frac{x+4}{x^2+2x+5}$$