ulm university universität uulm

2. Klausur Lineare Algebra I

18.10.2013

1. Sei $E = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \right\}$. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von E. [3]

2. (a) Sei $F : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.
   (i) Geben Sie die Definition von Injektivität und Surjektivität an. [2]
   (ii) Geben Sie ein Kriterium an, mit dem man anhand des Kerns von F erkennen kann, ob F injektiv ist. [1]
   (iii) Geben Sie ein Kriterium an, mit dem man anhand des Bildes von F erkennen kann, ob F surjektiv ist. [1]

   (b) Sei $V = M_{2,2}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \mid m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22} \in \mathbb{R} \right\}$ und sei $F : M_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \longmapsto m_{11} + m_{22}$.
   (i) Zeigen Sie, dass F eine lineare Abbildung ist. [4]
   (ii) Geben Sie an, ob F injektiv ist und ob F surjektiv ist. [2]

3. Gegeben sei die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Schreiben Sie σ in Zykelschreibweise. [1]
   (b) Schreiben Sie σ als Produkt von Transpositionen. [2]
   (c) Bestimmen Sie die Inversionen von σ. [3]
   (d) Bestimmen Sie $\operatorname{inv} \sigma$ und $\operatorname{sgn} \sigma$. [2]

Bitte wenden!

ulm university universität
uulm

4. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\7\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig? [5]

5. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und sei $\varphi : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^2 = 0$. Zeigen Sie:

   (a) $\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi$. [5]

   (b) $\dim \operatorname{Im}\varphi \leq \frac{1}{2}\dim V$. [3]

6. Sei $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 3 & -1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A ohne Teilaufgabe b) zu benutzen. [3]

   (b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind und geben sie die zugehörigen Eigenwerte an. [4]

   (c) Sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \longmapsto Ax$. Finden Sie einen Vektor v, sodass $\mathbb{B} = \left\{ v, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und die Darstellungsmatix $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(F)$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie auch die Darstellungsmatix $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(F)$ und die Transformationsmatix $M_{\mathbb{E}}^{\mathbb{B}}(\mathrm{id})$. [8]

Viel Erfolg!