# Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

# Satz von Taylor

**Satz von Taylor 11.3.5**

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei $f$ auf $(a, b)$ $n$-mal differenzierbar und $(n-1)$-mal stetig differenzierbar in $I$. Dann gilt die *Taylorsche Formel*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n = T^{(n-1)} f(x_0, x) + R_n(x_0, x)$$

für alle $x \in I$ mit einem $\xi = x_0 + t(x - x_0)$ für ein $t \in (0, 1)$ und

$$R_n(x_0, x) := \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

**Abbildung 1.1:** Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

$$f(x) = T^{n-1} f(x_0, x) + R_n(x_0, x) \quad \Rightarrow \quad f(x) - T^{n-1} f(x_0, x) = R_n(x_0, x)$$

# Beispiel: Satz von Taylor

Bestimme den Wert für $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf eine Genauigkeit von $10^{-6}$.

# Beispiel: Satz von Taylor

Bestimme den Wert für $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf eine Genauigkeit von $10^{-6}$.

Wähle $f(x) = \cos(x),\ x_0 = 0,\ x = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

$$T^{n-1}f(x_0, x) = \cos(0) - \sin(0)x - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 - ....$$

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\left(10^{-1}\right)^n$$

für ein $\xi \in (0, \frac{1}{10})$.

# Beispiel: Satz von Taylor

Bestimme den Wert für $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf eine Genauigkeit von $10^{-6}$.

Wähle $f(x) = \cos(x),\ x_0 = 0,\ x = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

$$T^{n-1}f(x_0, x) = \cos(0) - \sin(0)x - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 - ....$$

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\left(10^{-1}\right)^n$$

für ein $\xi \in (0, \frac{1}{10})$. Bestimme $n$: Wenn $n = 5$ gilt:

$$R_n(0, 10^{-1}) = \frac{\sin(\xi)}{5!}10^{-5} \leq \frac{1}{120}10^{-5} < 10^{-6}$$

# Beispiel: Satz von Taylor

Bestimme den Wert für $\cos\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf eine Genauigkeit von $10^{-6}$.

Wähle $f(x) = \cos(x),\ x_0 = 0,\ x = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

$$T^{n-1}f(x_0, x) = \cos(0) - \sin(0)x - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 - ....$$

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\left(10^{-1}\right)^n$$

für ein $\xi \in (0, \frac{1}{10})$. Bestimme $n$: Wenn $n = 5$ gilt:

$$R_n(0, 10^{-1}) = \frac{\sin(\xi)}{5!}10^{-5} \leq \frac{1}{120}10^{-5} < 10^{-6}$$

$$f(x) \approx 1 - 0 \cdot 10^{-1} - \frac{1}{2}10^{-2} + \frac{0}{6}10^{-3} + \frac{1}{24}10^{-4} = 1 - \frac{1}{200} + \frac{1}{240000}$$

# Aufgabe: Satz von Taylor

Sei $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ für alle $x > -1$.
Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Bestimme ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (0, \delta)$ gilt:

$$|f(x) - T^{(2)} f(0, x)| < \epsilon$$

Hinweis: $f^{(3)}(x) = \frac{3x+18}{8(x+1)^{\frac{7}{2}}}$

# Aufgabe: Satz von Taylor

Sei $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ für alle $x > -1$.
Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Bestimme ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (0, \delta)$ gilt:

$$|f(x) - T^{(2)}f(0,x)| < \epsilon$$

Hinweis: $f^{(3)}(x) = \frac{3x+18}{8(x+1)^{\frac{7}{2}}}$

$$|f(x) - T^{(2)}f(0,x)| = |R_3(0,x)| = \left|\frac{3\xi + 18}{48(\xi+1)^{\frac{7}{2}}}x^3\right| \overset{\xi<\delta}{<} \left|\frac{3\delta + 18}{48}\delta^3\right|$$

Da $\xi \in (0, x)$ und $x \in (0, \delta)$ gilt $\xi < x < \delta$

# Aufgabe: Satz von Taylor

Sei $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ für alle $x > -1$.
Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Bestimme ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (0, \delta)$ gilt:

$$|f(x) - T^{(2)} f(0, x)| < \epsilon$$

Hinweis: $f^{(3)}(x) = \frac{3x+18}{8(x+1)^{\frac{7}{2}}}$

$$|f(x) - T^{(2)} f(0, x)| = |R_3(0, x)| = \left| \frac{3\xi + 18}{48(\xi + 1)^{\frac{7}{2}}} x^3 \right| \overset{\xi<\delta}{<} \left| \frac{3\delta + 18}{48} \delta^3 \right|$$

Da $\xi \in (0, x)$ und $x \in (0, \delta)$ gilt $\xi < x < \delta$
Sei $\delta \leq 2$, also $3\delta + 18 \leq 24$

$$|R_3(0, x)| < \frac{24}{48} \delta^3 = \frac{1}{2} \delta^3 < \epsilon$$

Wähle $\delta = \min\left(2,\ (2\epsilon)^{\frac{1}{3}}\right)$