Prof. Dr. Jan Beyersmann
Matthias Weber

SS 2021
Übung: 11. Juni 2021, Abgabe: 10. Juni

Angewandte Stochastik 1 – Übungsblatt 4

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 11. Juni um 10:15 Uhr diskutiert. Bitte gebt eure Lösungen bis zum Donnerstag, 10. Juni um 12:00 Uhr über Moodle ab. Gebt eure Lösungen als exakt eine PDF-Datei ab, andere Dateiformate oder mehrere Dateien sind nicht erlaubt. Gebt die Lösungen nach Möglichkeit bitte in Gruppen von zwei oder drei Personen ab. Bitte beachtet auch die Hinweise zur Übung in Moodle.

Musterlösungen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Du kommst gleichverteilt zwischen 18:00 und 18:05 an einer Bushaltestelle an. Der Bus fährt laut Fahrplan um 18:02 und hat eine Verspätung von $V \sim Exp(1/3)$ Minuten, d.h., die Verspätung ist exponentialverteilt mit Parameter $1/3$. Weiterhin sei die Verspätung unabhängig von deiner Ankunftszeit. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass du den Bus erreichst.

Lösung:

Definiere deine Ankunftszeit relativ zu 18:02 Uhr als $A \sim U([-2,3])$. Dann erreichst du den Bus, falls $A < V$. Betrachte den Zufallsvektor $X = (A, V)$ mit Dichte

$$f_X(a,v) = \begin{cases} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}v} & \textit{falls } a \in [-2,3], v \geq 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} P(A < V) &= \int_0^\infty \int_{-2}^v f_X(a,v) da dv \\ &= \frac{1}{15} \int_0^\infty (\min(v,3) + 2) e^{-\frac{1}{3}v} dv \\ &= \frac{1}{15} \int_0^3 (v+2) e^{-\frac{1}{3}v} dv + \frac{1}{15} \int_3^\infty 5 e^{-\frac{1}{3}v} dv \\ &= \frac{1}{15} (-3v - 15) e^{-\frac{1}{3}v} \Big|_0^3 + \frac{1}{15} - 15 e^{-\frac{1}{3}v} \Big|_3^\infty \\ &= 0.4114 + 0.3679 = 0.7793 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2 + 2 = 4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{F}$. Zeige:

(a) Falls $P(A) \in \{0, 1\}$, so ist A unabhängig von jedem Ereignis $B \in \mathcal{F}$.

Lösung:

$$P(A) = 0 \implies P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$$
$$P(A) = 1 \implies P(A^c) = 0 \implies P(A \cap B) = P(B) - P(A^c \cap B) = P(B) - 0 = P(B) = P(A)P(B)$$

(b) A ist genau dann unabhängig zu $B \in \mathcal{F}$, wenn A und B^c unabhängig sind.

Lösung:

$$P(B \cap A) = P(A) - P(B^c \cap A) = P(A) - P(B^c)P(A) = P(A)(1 - P(B^c)) = P(A)P(B)$$

Aufgabe 3 (2 + 2 = 4 Punkte)

Seien $X_1, ..., X_n \sim U([0,1])$ unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$.

(a) Berechne die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Y = \min\{X_1, ..., X_n\}$.

Lösung:
Sei $x \in [0,1]$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(\min\{X_1, ..., X_n\} \leq x) &= 1 - P(\min\{X_1, ..., X_n\} > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x, \ldots, X_n > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x)^n = 1 - (1-x)^n \end{aligned}$$

(b) Berechne die Dichte von $Y = -\log(X_1)$.

Lösung:
Sei $x \in (0, \infty)$. Dann ist

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(-\log(X_1) \leq x) = P(X_1 \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x}$$

und

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = e^{-x}$$

Aufgabe 4 (2 + 2 = 4 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{falls } x \in (0,d] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimme c und d so, dass f und g tatsächlich Dichten sind.

Lösung:

$$\int_0^1 f(x)dx = c/3x^3\Big|_0^1 = c/3 \implies c = 3$$

und

$$\int_0^d g(x)dx = 2x^{1/2}\Big|_0^d = 2\sqrt{d} \implies d = \frac{1}{4}$$

da $d > 0$ gelten muss

(b) Bestimme für eine Zufallsvariable X mit Dichte f die Wahrscheinlichkeiten

$$P\left(X \leq \tfrac{1}{2}\right), \quad P\left(X = \tfrac{1}{2}\right), \quad P\left(X \in \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right]\right), \quad P\left(X \in \left(\tfrac{1}{3}, 2\right)\right).$$

Lösung:

Sei $x \in [0,1]$. Dann ist

$$F_X(x) = \int_0^x f(x)dx = x^3$$

und

$$\begin{aligned} P(X \leq 1/2) &= 1/8 \\ P(X = 1/2) &= 0 \\ P(1/3 \leq X \leq 2/3) &= 8/27 - 1/27 = 7/27 \\ P(1/3 \leq X \leq 2) &= P(1/3 \leq X \leq 1) = 1 - 1/27 = 26/27 \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (1+1+2 = 4 Punkte)

Sei F eine Verteilungsfunktion. Dann heißt die Funktion

$$F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\},\ y \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq y\}$$

Quantilfunktion von F.

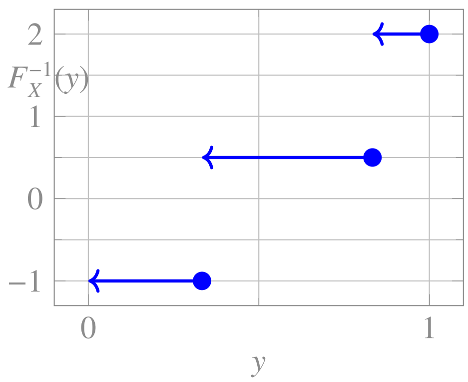
(a) Berechne und skizziere die Quantilfunktion der Zufallsvariable X mit $P(X = -1) = \frac{1}{3}$, $P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ und $P(X = 2) = \frac{1}{6}$ (vgl. Blatt 3, Aufgabe 2).

Lösung:
Wir haben von Blatt 3:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1/3, & -1 \leq x < 1/2 \\ 5/6, & 1/2 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

also

$$F_X^{-1}(y) = \begin{cases} -\infty, & y = 0 \\ -1, & 0 < y \leq 1/3 \\ 1/2, & 1/3 < y \leq 5/6 \\ 2, & 5/6 < y \leq 1 \end{cases}$$



(b) Zeige: Eine Quantilfunktion ist monoton wachsend.

Lösung:
Sei $1 \geq a > b \geq 0$. *Dann ist*

$$F^{-1}(a) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq a\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq b\} = F^{-1}(b)$$

weil

$$F(x) \geq a \implies F(x) \geq b$$

und das Infimum auf der rechten Seite also mindestens über die Werte gebildet wird, über die das Infimum auf der linken Seite gebildet wird.

(c) Zeige:

$$F(x) \geq y \iff x \geq F^{-1}(y)$$

Lösung:

$$F(x) \geq y \implies F^{-1}(y) = \inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq y\} \leq x$$

und

$$F^{-1}(y) \leq x \implies \inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq y\} \leq x$$

Falls das Infimum ein echtes Minimum ist, impliziert das

$$\exists z \leq x : F(z) \geq y \implies F(x) \geq y$$

da F monoton wachsend ist (also $F(x) \geq F(z)$ für $z \leq x$).

Aus der rechtsseitigen Stetigkeit von F folgt, dass es nur dann kein echtes Minimum ist, wenn $F^{-1}(y) = -\infty$ oder $F^{-1}(y) = \infty$. Ersteres ist genau dann der Fall, wenn $y = 0$. Dann folgt trivial $F(x) \geq y$. Aus letzterem folgt $x = \infty$ und entsprechend $F(X) = 1 \geq y$.

Multiple Choice Aufgaben

Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben sind die richtigen Aussagen anzugeben. Dabei kann genau eine Aussage zutreffen, mehrere Aussagen können zutreffen oder aber keine der Aussagen trifft zu. Die Aufgabe ist richtig gelöst, wenn alle zutreffenden Aussagen angegeben wurden, jedoch keine nicht zutreffende Aussage angegeben wurde.

Für die Bewertung des Übungsblatts gibt jede richtige Antwort 1 Punkt, jede falsche Antwort gibt 1 Punkt Abzug. Je Aufgabe können minimal 0 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 6 (5 Bonuspunkte)

Betrachte für zwei Parameter $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} x^2\right).$$

Sei außerdem $0 < a < b$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

Lösung:
Das ist eine Normalverteilung mit Mittelwert 0 *und Varianz* σ^2.

(a) $P(-b \leq X \leq -a) = P(a \leq X \leq b)$ **Lsg:** wahr

(b) $P(-b \leq X \leq -a) = P(-a \leq X \leq b)$ **Lsg:** falsch

(c) $P(a < X < b) = P(-a \leq X \leq b)$ **Lsg:** falsch

(d) $P(a \leq X < -b) = P(-a \leq X \leq b)$ **Lsg:** falsch

(e) $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$ **Lsg:** wahr