Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 01

Lösung

1. (NA) Minifragen

1. Für das Gauß-Verfahren haben wir Umformungsschritte (U1), (U2) und (U3) definiert:
   - Für (U1) haben wir $i \neq k$ gefordert. Führt die Linksmultiplikation von $U_{i,i}$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b zu keinem äquivalenten Gleichungssystem?
     Lösung: $U_{i,i}$ ist eine Einheitsmatrix. Somit führt die Linksmultiplikation von $U_{i,i}$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b zu einem äquivalenten Gleichungssystem.
   - Für (U2) haben wir $i \neq k$ gefordert. Führt die Linksmultiplikation von $V_{ii}(\lambda)$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b zu keinem äquivalenten Gleichungssystem?
     Lösung: Nach Lemma 7.2.2 ist $V_{i,i}(\lambda)$ eine Einhaitsmatrix bis auf den Eintrag $v_{i,i} = 1+\lambda$. Somit gilt, dass $V_{i,i}(\lambda) = W_i(\lambda+1)$. Die Linksmultiplikation von $V_{ii}(\lambda)$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b entspricht somit der Operation (U3) und führt daher für $\lambda \neq 0$ (siehe unten) zu einem äquivalenten Gleichungssystem.
   - Für (U3) haben wir $\lambda \neq 0$ gefordert. Führt die Linksmultiplikation von $W_i(0)$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b zu keinem äquivalenten Gleichungssystem?
     Lösung: Die Matrix $W_i(0)$ ist nicht invertierbar. Die Linksmultiplikation von $W_i(0)$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b führt daher zu keinem äquivalenten Gleichungssystem.

2. (A) Lösen linearer Gleichungssysteme

Wir betrachten die Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & +6x_2 & & +5x_4 & = & 5 \\ 4x_1 & +6x_2 & +\ x_3 & +6x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & & +6x_3 & -\ x_4 & = & -1 \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +5x_2 & +10x_3 & = & 12 \\ -x_1 & +\ x_2 & +2x_3 & = & 1 \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +\ x_3 & = & 10 \\ x_1 & -x_2 & +8x_3 & = & 15 \end{array}\right\} \tag{3}$$

(a) Geben Sie für die Systeme (1),(2) und (3) jeweils eine Matrix A und einen Vektor b an, sodass das Gleichungsystem dem Ausdruck $Ax = b$ entspricht. (1)

Lösung:

Für (1) haben wir $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Für (2) haben wir $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für (3) haben wir $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie jeweils $\operatorname{rg}(A)$ sowie die Lösungsmenge des Gleichungssystems. (5)

Lösung:

(1): $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3-Z_1]{Z_2-2Z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & -6 & -6 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[Z_3-Z_2]{\frac{1}{2}Z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2.5 & 2.5 \\ 0 & -6 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{5}Z_3]{-\frac{1}{6}Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{4}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right)$

$\xrightarrow[Z_2+\frac{1}{6}Z_3]{Z_1-3Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1-\frac{1}{2}Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right)$.

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$ und $\{x \colon Ax = b\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(2): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 10 & 12 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+Z_1]{Z_2-2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3-3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{Z_1-2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$ und $\{x \colon Ax = b\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(3): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 8 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3-Z_1]{Z_2-2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 10 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3-2Z_2]{Z_1+Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$.

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$ und $\{x \colon Ax = b\} = \emptyset$.

3. (A) Rang einer Matrix

Berechnen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$. (6)

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 - Z_1]{Z_3 - tZ_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 1-t^2 & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 + (t+1)Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & (t+2)(1-t) \end{pmatrix}.$$

- Fall $t = 1 \Rightarrow \mathrm{rg} A = 1$
- Fall $t = -2 \Rightarrow \mathrm{rg} A = 2$
- Fall $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\} \Rightarrow \mathrm{rg} A = 3$

4. (A) Invertieren von Matrizen

(a) Bestimmen Sie, falls möglich, jeweils die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2+2\iota & 4+\iota \\ 1+\iota & 2+\iota & 3+\iota \\ -1-4\iota & -2+2\iota & -\iota \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}),$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{F}_2).$$

(4)

Lösung:

$$\left(A \mid I_3 \right) \xrightarrow[Z_2 - Z_3]{Z_1 + 3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -4 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 - Z_2]{-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{4}Z_3]{-\frac{1}{4}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_1 + Z_3]{Z_1 + 2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\left(B \mid I_3 \right) \xrightarrow[Z_3 - (-1-4\iota)Z_1]{Z_2 - (1+\iota)Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2+2\iota & 4+\iota & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-3\iota & -4\iota & -1-\iota & 1 & 0 \\ 0 & -8+12\iota & 16\iota & 1+4\iota & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 + 4Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2+2\iota & 4+\iota & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-3\iota & -4\iota & -1-\iota & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A \text{ besitzt keine Inverse.}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} C & I_4 \end{array} \right) \xrightarrow[Z_3+Z_1,\, Z_4+Z_1]{Z_2+Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[Z_4+Z_2]{Z_1+Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_3+Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{Z_2+Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung, falls existent, der linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$F(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a + b - c \\ b + c + d \\ a + b + c + d \\ a - c + d \end{pmatrix}.$$

(2)

Lösung:

$$F(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Invertiere A:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-Z_2, Z_3-Z_1, Z_4-Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1+Z_3, Z_4+Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-Z_4, Z_3-2Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \leftrightarrow Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4/-3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2+Z_4, Z_3-2Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Somit ist F invertierbar mit

$$F^{-1}(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

5. (A) Elementarmatrizen

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie Matrizen $Z_1, \dots, Z_j$ der Form $U_{ik}, V_{ik}(\lambda), W_i(\lambda)$ wie in der Vorlesung an, sodass

$$Z_j \circ Z_{j-1} \circ \ldots \circ Z_1 \circ A = I,$$

wobei I die Einheitsmatrix in $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ bezeichnet.

Lösung:

$$W_3(-1)V_{13}(-1)V_{32}(-2)V_{31}(-1)V_{21}(-3)A = I$$

$$V_{21}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{31}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{32}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{13}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_3(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. (T),(NA) Lösen linearer Gleichungssysteme

Wir betrachten folgende Gleichungssysteme:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & -\ x_2 & +2x_3 & = & -2 \end{array} \right\} \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & -\ x_2 & -\ x_3 & +3x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +\ x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = & -3 \\ & x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 9 \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = & -2 \end{array} \right\} \tag{5}$$

In Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda x_1 & +4x_2 & +\lambda x_3 & = 1 \\ & -2x_2 & +4x_3 & = 3 \\ 2x1 & +\lambda x_2 & +6x_3 & = 4 \end{array} \right\} \tag{6}$$

(a) Bestimmen Sie für die Systeme (4), (5), (6) jeweils eine Matrix A und einen Vektor b, sodass das Gleichungssystem dem Ausdruck $Ax = b$ entspricht.

(b) Bestimmen Sie jeweils $\text{rg}A$ sowie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

7. (T),(NA) Rang und Invertierbarkeit von Matrizen

Zeigen Sie:

1. Es sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und weiter sei $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix, dann gilt $\text{rg}(A) = \text{rg}(AB)$.

2. Elementare Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht.
3. Eine quadratische Matrix $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang besitzt, d.h., wenn $\mathrm{rg}(B) = n$.
4. $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn B sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben lässt.
5. $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn $B^\top$ invertierbar ist.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müsen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Üungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere düfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.