Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 08

Lösung

1. (NA) Minifragen

(a) Gibt es eine differenzierbare Funktion, die nicht stetig ist?
Lösung: Nein, Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit.

(b) Folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit Lipschitz-Stetigkeit?
Lösung: Nein, betrachte: $f(x) = \sqrt{x}$ an den Stellen $x_0 = 0, x \leq \frac{1}{4L^2}$.

(c) Folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit Stetigkeit?
Lösung: Ja.

(d) Ist jede invertierbare Funktion differenzierbar?
Lösung: Nein.

2. (A) Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig auf I ist. (2)
Lösung:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon,$$

mit $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist. (4)

Lösung: Wir zeigen, dass f(x) Lipschitz-stetig ist.

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= |\sqrt{4+x_1^2} - \sqrt{4+x_2^2}| \\
&= |\frac{(\sqrt{4+x_1^2} - \sqrt{4+x_2^2})(\sqrt{4+x_1^2} + \sqrt{4+x_2^2})}{(\sqrt{4+x_1^2} + \sqrt{4+x_2^2})}| \\
&= |\frac{(4+x_1^2) - (4+x_2^2)}{\sqrt{4+x_1^2} + \sqrt{4+x_2^2}}| \\
&\leq |\frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}}| \\
&= |\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}| \\
&= 1|x_1 - x_2| = L|x_1 - x_2|
\end{aligned}$$

3. (A) Ableitungsregeln

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich an.

a) $f_1(x) = \log(\log(2x))$, (0.5)

Lösung:

$$f_1'(x) = \frac{1}{\log(2x)} \frac{2}{2x} = \frac{1}{x \log(2x)}$$

$D = (0.5, \infty)$

b) $f_2(x) = 2x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, (0.5)

Lösung:

$$f_2'(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2}) + 2x\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2}) = 2\sin^2(\frac{x}{2}) + x\sin(x)$$

$D = \mathbb{R}$

c) $f_3(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, (0.5)

Lösung:

$$f_3'(x) = (1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}})\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$D = (1, \infty)$

d) $f_4(x) = \frac{x^{\sqrt{x}}}{2^x}$, (0.5)

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\sqrt{x}} = (\frac{\log x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x})x^{\sqrt{x}} = (\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}})x^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2^x = \log 2 \cdot 2^x$$

$$f_4'(x) = \frac{\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}} 2^x - x^{\sqrt{x}} \log 2 \cdot 2^x}{2^{2x}} = \frac{x^{\sqrt{x}}}{2^x}((\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}) - \log 2)$$

$D = (0, \infty)$

e) $f_5(x) = x^5 5^x$, (0.5)
Lösung:
$$f_5'(x) = 5x^4 5^x + x^5 \log 5 \; 5^x = x^4 5^x (5 + x \log 5)$$
$D = \mathbb{R}$

f) $f_6(x) = \log\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)$, (0.5)
Lösung:
$$\begin{aligned} f_6(x) &= \frac{3}{4}\log x \\ f_6'(x)(x) &= \frac{3}{4x} \end{aligned}$$
$D = (0, \infty)$

g) $f_7(x) = (x\cos x)^x$, (1)
Lösung:
$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(x\cos x) = \frac{1}{x\cos x}(\cos x - x\sin x) = \frac{1}{x} - \tan x \\ &f_7'(x) = (\log(x\cos x) + x(\frac{1}{x} - \tan x))(x\cos x)^x \end{aligned}$$
$D = \{x \in \mathbb{R} \colon x\cos x > 0\}$

h) $f_8(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, (1)
Lösung:
$$\begin{aligned} f_8'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{2x}{1+x^2})^2}} \frac{2(1+x^2) - 2x2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2x^2 - 4x^2 + 2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{|1+x^2|}{|1-x^2|} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &\overset{x\in D}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$
$D = [-1, 1]$

i) $f_9(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin 2x}$. (1)
Lösung:
$$f_9'(x) = \left(2\cos(2x)\log(\frac{x^2+1}{x^2+3}) + \sin(2x)\frac{4x}{(x^2+3)(x^2+1)}\right)\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin(2x)}$$
$D = \mathbb{R}$

4. (A) Aussagen zur Differenzierbarkeit

Sei I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $x_0 \in I$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Gibt es Zahlen $K > 0$ und $\alpha > 1$ mit $|f(x)| \leq K\,|x|^\alpha$ für $x \in I$, so ist f in 0 differenzierbar. (2)

Lösung: Die Aussage ist wahr. Da $|f(x)| \leq K|x|^\alpha,\ \forall x \in I$ gilt, folgern wir mit $x = 0$, dass $f(0) = 0$ gilt. Damit folgt, dass wir statt $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ lediglich $\frac{f(x)}{x}$ betrachten müssen. Wir schätzen den Betrag dieses Quotienten nach oben und unten nach 0 ab, woraus die Aussage folgt:

$$0 \leq |\frac{f(x)}{x}| \leq K|x|^{\alpha-1} \overset{x\to 0}{\to} 0$$

b) Gilt $f(0) = 0$ und gibt es $K > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ mit $|f(x)| \geq K\,|x|^\alpha$ für $x \in I$, so ist f in 0 nicht differenzierbar. (2)

Lösung: Die Aussage ist wahr.

$$|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| = |\frac{f(x)}{x}| \geq K|x|^{\alpha-1} \overset{x\to 0}{\to} \infty$$

Damit existiert die Ableitung in der 0 nicht.

c) Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

(2)

Lösung: Wir addieren eine geschickt gewählte 0 und erhalten direkt das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0-h)}{2h} \\
&= \frac{1}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} f'(x_0) \\
&= f'(x_0)
\end{aligned}$$

Bemerke, dass wir in der zweiten Zeile die Voraussetzung benutzen, dass $f'(x_0)$ existiert.

5. (A) Monotonieverhalten

a) Bestimmen Sie, auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}$ die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. (2)

Lösung: Die Funktion ist auf dem kompletten Definitionsbereich differenzierbar. Wir betrachten daher das Vorzeichen der Ableitung von $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Die Ableitung ist im Intervall $(0,e)$ größer als 0 und im Intervall (e,∞) kleiner als 0. Daher ist f auf $(0,e]$ streng monoton steigend und auf $[e,\infty)$ streng monoton fallend.

b) Begründen Sie, welche der beiden Zahlen 2024^{2025} und 2025^{2024} größer ist. (1)

Lösung: Da $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist, gilt:

$$\begin{aligned}
&2024^{2025} > 2025^{2024} \\
\Leftrightarrow\ &\ln 2024^{2025} > \ln 2025^{2024} \\
\Leftrightarrow\ &2025 \ln 2024 > 2024 \ln 2025 \\
\Leftrightarrow\ &f(2024) > f(2025)
\end{aligned}$$

Dies ist wahr, da f auf $[e,\infty)$ streng monoton fallend ist.

c) Zeigen Sie, dass es genau ein paar natürlicher Zahlen n, m gibt mit $n < m$ und $n^m = m^n$. (3)

Lösung: Aus Teil a) folgt, dass n und m $(n < m)$ nicht beide aus $(0, e]$ oder $[e, \infty)$ stammen können, da sonst aus der Monotonie von f folgen würde, dass $f(n) \neq f(m) \Leftrightarrow n^m \neq m^n$. Da $n < m$ gilt, muss also $n \in \{1, 2\}$ gelten. Für $n = 1$ erhalten wir einen Widerspruch: $n = n^1 = 1^n = 1$. Für $n = 2$ erhalten wir die Gleichung $n^2 = 2^n$ mit der eindeutigen Lösung $m = 4$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass ln *auf seinem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend ist.*

6. (T),(NA)

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen und geben Sie jeweils ihren maximalen Definitionsbereich an.

1. $f_1(x) = (x^x)^x$
2. $f_2(x) = x^{(x^x)}$
3. $f_3(x) = x^{\frac{1}{x}}$
4. $f_4(x) = \ln\ln(1 + x)$
5. $f_5(x) = x^{\sin(x)}$
6. $f_6(x) = \sqrt[3]{x^{3/5} + \sin^3(1/x) - \tan^2(x)}$
7. $f_7(x) = \frac{\cos(x)}{2+\sin\log x}$

7. (T),(NA)

Zeigen Sie, dass für $x, y \in (-\infty, 0)$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ folgende Ungleichungen gelten.

1. $|\cos e^x - \cos e^y| \leq |x - y|$.
2. $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

Hinweis: Verwenden Sie den 1. Mittelwertsatz.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:

`https://moodle.uni-ulm.de/course/view.php?id=48088`