Mathematik für Informatik II - Tutorium - Woche 8

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen und geben Sie jeweils ihren maximalen Definitionsbereich an.

1. $f_1(x) = (x^x)^x$
2. $f_2(x) = x^{(x^x)}$
3. $f_3(x) = x^{\frac{1}{x}}$
4. $f_4(x) = \ln \ln(1 + x)$
5. $f_5(x) = x^{\sin(x)}$
6. $f_6(x) = \sqrt[3]{x^{3/5} + \sin^3(1/x) - \tan^2(x)}$
7. $f_7(x) = \frac{\cos(x)}{2+\sin \log x}$

1. $f_1(x) = (x^x)^x$

Schreibe $(x^x)^x = x^{x^2} = e^{x^2 \ln x}$. Wir haben somit die äußere Funktion $g(x) = \exp(x)$ und die innere Funktion $f(x)h(x) = x^2 \ln x$. Die gesuchte Ableitung ergibt sich somit durch Anwendung der Ketten- und Produktregel. Wir bestimmen zunächst die einzelnen Ableitungen. Es gilt

$$g'(x) = (e^x)' = e^x, \quad f'(x) = (x^2)' = 2x, \quad h'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

und erhalten somit

$$f_1'(x) = (e^{x^2 \ln x})' = \underbrace{e^{x^2 \ln x} \cdot (x^2 \ln x)'}_{g'(f(x)) \cdot f'(x)} = e^{x^2 \ln x} \cdot \underbrace{(2x \ln x + x)}_{= f'(x)h(x) + h'(x)f(x)} = x e^{x^2 \ln x} \cdot (2 \ln x + 1)$$

Der maximale Definitionsbereich ist $(0, \infty)$, als maximaler Definitionsbereich des Logarithmus.

2. $f_2(x) = x^{(x^x)}$

Schreibe $x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x}$. Analog zu 1. wenden wir die Ketten- und Produktregel an. Es gilt

$$\begin{aligned}
f_2'(x) = (e^{x^x \ln x})' &= e^{x^x \ln x} \cdot (x^x \ln x)' \\
&= e^{x^x \ln x} \cdot (e^{x \ln x} \ln x)' \\
&= e^{x^x \ln x} \cdot (e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \cdot \ln x + e^{x \ln x} \cdot \tfrac{1}{x}) \\
&= e^{x^x \ln x} \cdot (e^{x \ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + x \cdot \tfrac{1}{x}) \cdot \ln x + e^{x \ln x} \cdot \tfrac{1}{x}) \\
&= e^{x^x \ln x} \cdot (e^{x \ln x} \cdot ((\ln x)^2 + \ln x + \tfrac{1}{x})) \\
&= x^{(x^x)} \cdot (x^x \cdot (\ln x)^2 + \ln x + x^{-1}) \\
&= x^{(x^x)} \cdot (x^x \cdot (\ln x)^2 + x^x \cdot \ln x + x^{x-1}) \\
&= x^{(x^x)+x-1} \cdot (x(\ln x)^2 + x \ln x + 1)
\end{aligned}$$

Der maximale Definitionsbereich ist identisch zu Teil 1.

Interlude

Wieso unterscheiden sich $(x^x)^x$ und $x^{(x^x)}$? Beachte zunächst: Die Potenzgesetze dürfen zunächst nicht angewendet werden, da weder der Exponent noch die Basis konstant sind. Um die Potenzgesetze anwenden zu können, müssen wir die Ausdrücke zunächst auf eine Form mit konstanter Basis bringen.
Für die erste Funktion gilt

$$(x^x)^x = (e^{\ln x^x})^x = e^{(\ln x^x)\cdot x} = e^{(x \ln x)\cdot x} = e^{x^2 \ln x} = e^{\ln x^{x^2}} = x^{x^2}$$

und für die zweite

$$x^{(x^x)} = e^{\ln x^{(x^x)}} = e^{x^x \ln x}.$$

Insbesondere ist

$$(x^x)^x = e^{x\cdot(x \ln x)} \neq e^{x^x \ln x} = x^{(x^x)}.$$

3. $f_3(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Schreibe $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$. Wir wenden erneut Ketten- und Produktregel an.

$$f_3'(x) = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot (-\tfrac{1}{x^2}\ln x + \tfrac{1}{x^2}) = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot x^{-2} \cdot (1 - \ln x) = x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1 - \ln x)$$

Der maximale Definitionsbereich ist ebenfalls $(0, \infty)$.

4. $f_4(x) = \ln\ln(1+x)$

Wir wenden die Kettenregel zweifach an. Es gilt

$$f_4'(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{\ln(1+x) + x\ln(1+x)}.$$

Der maximale Definitionsbereich ist $(-1, \infty)$, was man aus dem Produkt ablesen kann.

5. $f_5(x) = x^{\sin x}$

Schreibe $x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}$. Wir wenden die Ketten- und Produktregel an. Es gilt

$f_5'(x) = (e^{\sin x \ln x})' = e^{\sin x \ln x} \cdot (sinx \ln x)' = e^{\sin x \ln x} \cdot (\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}) = x^{\sin x} \cdot (\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$.

Der maximale Definitionsbereich ist $(0, \infty)$.

6. $f_6(x) = \sqrt[3]{x^{3/5} + \sin^3(1/x) - \tan^2 x}$

Wir wenden die Kettenregel an und nützen die Linearität der Ableitung aus. Es gilt

$$
\begin{aligned}
f_6'(x) &= \left(\left(x^{3/5} + \sin^3(1/x) - \tan^2 x\right)^{\frac{1}{3}}\right)' \\
&= \frac{1}{3}\left(x^{3/5} + \sin^3(1/x) - \tan^2(x)\right)^{-\frac{2}{3}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{3}{5}x^{-2/5} + 3\sin^2(1/x) \cdot \cos(1/x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right)
\end{aligned}
$$

Der maximale Definitionsbereich ist $(0, \infty) \setminus \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\}$

7. $f_7(x) = \frac{\cos x}{2+\sin\log x}$

Wir wenden die Quotienten-, Ketten- und Produktregel an. Es gilt

$$f_7'(x) = \frac{-\sin x \cdot (2+\sin\log x) - \cos x \cdot \dfrac{\cos\log x}{x}}{(2+\sin\log x)^2}$$

Der maximale Definitionsbereich ist $(0,\infty)$.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass für $x, y \in (-\infty, 0)$ und $(a, b) \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ folgende Ungleichungen gelten.

1. $|\cos e^x - \cos e^y| \leq |x - y|$
2. $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$

1. $|\cos e^x - \cos e^y| \leq |x - y|$

Wir definieren $f(t) = \cos e^t$ auf dem Intervall $[x, y]$. Da f als Komposition differenzierbar (und somit stetiger) Funktionen auf dem Intervall (x, y) differenzierbar ist, folgt mit dem 1. Mitelwertsatz, dass ein $\xi \in (x, y)$ existiert mit

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \implies |f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)||x - y|.$$

Es gilt, dass $f'(t) = e^t(-\sin e^t)$ für alle $t < 0$. Da für $t < 0$ gilt, dass $e^t < 1$ und $|-\sin e^t| \in [0, 1]$, folgt

$$|\cos e^x - \cos e^y| \leq |e^\xi||-\sin e^\xi||x - y| \leq 1 \cdot 1 \cdot |x - y| = |x - y|$$

2. $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$

Wir definieren $f(x) = \arctan x$. Es gilt $f'(x) = (1+x^2)^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und stetig und somit auf jedem Teilintervall. Nach dem 1. Mittelwertsatz folgt, dass ein $\xi \in (a, b)$ existiert mit

$$\frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

Da $0 < a < \xi < b$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

für alle $\xi \in (a, b)$. Damit folgt die Behauptung, nämlich

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$