Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Lösungsvorschlag Analysis 1: Blatt 10

38. Man berechne die Werte folgender Reihen: (2)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k(k+1)(k+2)}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln\left(k^{\ln(k+1)}\right)}$

Lösungsvorschlag:

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \frac{k+2-k}{k(k+2)} = \frac{2}{k(k+2)}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{k+2} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{k(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right).
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Summe

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2},$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$ eine Teleskopsumme ist.

(c) Es gilt mit den Logarithmengesetzen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln(k^{\ln(k+1)})} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(\frac{k+1}{k})}{\ln(k+1)\ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln(k+1)\ln k} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln 2},
\end{aligned}$$

wobei wieder die Eigenschaft von Teleskopsummen benutzt wurde und die Tatsache, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

39. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz: (4)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^6}{3^k}$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10k-2}{k^4+4}$

(f) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{5k+3}$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

(h) $\sum_{k=2}^{\infty} (\ln k)^{-\ln k}$

Lösungsvorschlag:

(a) $(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine alternierende Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Summe konvergent.

(b) Wir können die Summanden durch

$$\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2}} = \frac{1}{k+1}$$

nach unten abschätzen. Somit gilt für die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

und aus dem Minorantenkriterium folgt die Divergenz der Reihe.

(c) Wir benutzen das Quotientenkriterium, um die Konvergenz der Reihe festzustellen. Mit $a_k := \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{((k+1)!^2(2k)!}{(k!)^2(2(k+1))!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{k^2+2k+1}{4k^2+6k+2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1.$$

Mit dem Quotientenkriterium folgt nun die (absolute) Konvergenz der Reihe.

(d) Mit $a_k := \frac{k^6}{3^k}$ ist

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{k^6}{3^k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} < 1$$

und die (absolute) Konvergenz folgt mit dem Wurzelkriterium.

(e) Wir schätzen ab:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10k-2}{k^4+4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10k}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{k^3}.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ und damit auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{k^3}$ konvergiert, erhalten wir die (absolute) Konvergenz der Reihe mit dem Majorantenkriterium.

(f) Wir sehen durch

$$\left|(-1)^k \frac{k}{5k+3}\right| = \frac{k}{5k+3} \to \frac{1}{5} \quad \text{für } k \to \infty,$$

dass $\left((-1)^k \frac{k}{5k+3}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. Nach Satz 41 kann die Reihe nicht konvergent sein.

(g) Mit

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^{1/2}}.\end{aligned}$$

Die letzte Summe ist die divergente Dirichletreihe mit $\alpha = 1/2$. Somit divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ nach dem Minorantenkriterium.

(h) Da $\lim_{k\to\infty} \ln k = \infty$, existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $N_x \in \mathbb{N}$ mit $\ln k \geq x$ für $k \geq N_x$. Wir wählen x so groß, dass $\ln x \geq 2$. Dann gilt für $k \geq N_x$, dass

$$\ln((\ln k)^{\ln k}) = \ln(k)\underbrace{(\ln(\ln k))}_{\geq 2} \geq \ln(k) \cdot 2 = \ln(k^2).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \left|(\ln k)^{-\ln k}\right| &= \sum_{k=2}^{\infty} (\ln k)^{-\ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} \\
&= \underbrace{\sum_{k=2}^{N_x - 1} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}}_{=:c<\infty} + \sum_{k=N_x}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} \\
&= c + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\exp(\ln(k)(\ln k)^{\ln(k)})} \\
&\leq c + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\exp(\ln(k^2))} = c + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Wir haben die Reihe also durch eine konvergente Dirichletreihe ($\alpha = 2$) abgeschätzt. Mit dem Majorantenkriterium erhalten wir nun die (absolute) Konvergenz von $\sum_{k=2}^{\infty} (\ln k)^{-\ln k}$.

40. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass (1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 2}{2} z^k = \frac{1}{(1-z)^3}.$$

Lösungsvorschlag: Zunächst bemerken wir, dass wir den Term $\frac{1}{1-z}$ durch die geometrische Reihe (es gilt $|z| < 1$)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

darstellen können. Diese Reihe ist absolut konvergent. Der Satz von Mertens (Satz 50) und die nachfolgende Bemerkung (i) garantieren und, dass das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst existiert und absolut konvergiert. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} z^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{k} z^\nu z^{k-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k.
\end{aligned}$$

Da auch diese Reihe absolut konvergiert, können wir das Cauchyprodukt mit $\frac{1}{1-z}$ bilden und erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{1-z} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{k} (\nu+1) z^\nu z^{k-\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{k} (\nu+1) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{\nu=0}^{k} \nu + \sum_{\nu=0}^{k} 1 \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\frac{k^2+k}{2} + \frac{2k+2}{2} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 2}{2} z^k
\end{aligned}$$

41. (3)

(a) Man zeige, dass für reelle Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $A_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$.

Lösungsvorschlag: Wir setzen $A_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$. Dann gilt $A_0 = 0$ und wir können die Folgenglieder a_k schreiben als $a_k = A_k - A_{k-1}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \overset{A_0=0}{=} \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}.\end{aligned}$$

(b) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ absolut konvergent, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Lösungsvorschlag: Da die Teleskopsumme

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

konvergiert, besitzt (b_k) einen Grenzwert. Nach Voraussetzung existiert $A_\infty := \lim_{n\to\infty} A_n$. Damit existiert auch das Produkt $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$. Weiter ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 22 beschränkt. Mit Aufgabenteil (c) folgt die (absolute) Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$. Mit den beiden Summanden konvergiert auch deren Summe, die nach Aufgabenteil (a) gegeben ist durch

$$A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

(c) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so braucht $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ nicht zu konvergieren. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jedoch absolut konvergent, so folgt auch die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Lösungsvorschlag: Wähle $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$ und $b_k = (-1)^k$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist die divergente harmonische Reihe.
Nun sei die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Da (b_k) beschränkt ist, existiert ein $K > 0$ mit $|b_k| \le K$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 38) ist $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N \in \mathbb{R}$, sodass für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $n > N$

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| \le \varepsilon/K$$

gilt. Für das Produkt der Folgenglieder ist somit

$$|a_n b_n| + |a_{n+1} b_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p} b_{n+p}| \le K(|a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}|) \le K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Die Folge $(|a_k b_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ ist also auch eine Cauchy-Folge. Nach dem Cauchy-Kriterium ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ absolut konvergent.