ulm university universität uulm

Prüfungsklausur Lineare Algebra I – Aufgaben

1. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit $F(x, y) = (2x - y, x + y, y - 2x)^\top$ bezüglich der kanonischen Basen.

   (a) Bestimmen Sie die Matrix von F bezüglich der kanonischen Basen. [4]

   (b) Bestimmen Sie Basen des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bezüglich denen die Matrix von F Normalform hat. [8]

   (c) Untersuchen Sie, ob F ein Isomorphismus ist. Falls nicht, bestimmen Sie einen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$, so dass $F : \mathbb{R}^2 \to U$ ein Isomorphismus wird oder zeigen Sie, dass es einen solchen Unterraum nicht gibt. [8]

2. Untersuchen Sie mit Hilfe der Rangkriterien, für welche $c \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem lösbar, universell bzw. eindeutig lösbar ist. [8]

$$\begin{aligned}
4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2 \\
8x_1 + 10x_2 + x_3 \phantom{{}+3x_4} &= 6 \\
4x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 3x_4 &= c
\end{aligned}$$

3. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= b_1 \\
-x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 - x_4 &= b_2 \\
-x_2 - x_3 - 2x_4 &= b_3.
\end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_0(A^\top)$ des transponierten homogenen Systems. [9]

   (b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $\mathcal{L}_0(A^\top)$. [2]

   (c) Bestimmen Sie den Unterraum $\mathcal{B}$ aller $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, für die das obige Gleichungssystem lösbar ist. Geben Sie eine Basis von $\mathcal{B}$ an. [7]

4. Seien $\pi, \sigma \in S_6$ Permutationen mit

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie das Produkt $\pi \circ \sigma$ sowie π^{-1}. [4]

   (b) Schreiben Sie π und σ in Zyklenschreibweise. [3]

   (c) Schreiben Sie π und σ als Produkt von Transpositionen. [4]

   (d) Bestimmen Sie alle Inversionen von π sowie $\operatorname{inv}(\pi)$ und $\operatorname{sgn}(\pi)$. [6]

5. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel. [8]

$$\begin{aligned} (1+i)x_1 + (\ \ 2-4i)x_2 &= \ \ i \\ (1+i)x_1 + (-4+2i)x_2 &= -i. \end{aligned}$$

6. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie [14]

$$(\operatorname{Ker} A)^\perp = \operatorname{Im} A.$$

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\operatorname{Im} A \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp$ und beweisen Sie dann die umgekehrte Inklusion mit Hilfe eines Dimensionsargumentes.

7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Können Sie nur unter Zuhilfenahme der Eigenwerte Aussagen über die Diagonalisierbarkeit von A machen? Wenn ja, welche? [8]

   (b) Geben Sie eine invertierbare Matrizen B an, so dass $B^{-1}AB$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie auch die resultierende Diagonalmatrix an. [14]