Universität Ulm

Abgabe: Nicht abzugeben

Dr. Gerhard Baur
Lars von der Heide
Sommersemester 2022
Punktzahl: 0

Übungen Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure: Zusatzblatt

1. Zeige durch vollständige Induktion, dass für beliebige $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq a_i \leq 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt, dass
$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

2. Zeige, dass für alle $n \geq 2$
$$\sqrt[n]{1 + 2n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$
gilt.
Tipp: Kann man direkt ohne Induktion zeigen. Betrachte die rechte Seite potenziert (also $(\dots)^n$) und wende den binomischen Lehrsatz an.

3. (a) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Betragsungleichung $|x| \leq |x + 1|$ erfüllen.
   (b) Gib, falls existent, Maximum, Supremum, Minimum, Infimum der Menge $A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$ an.

4. Löse folgende Ausdrücke nach x.
   (a) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$
   (b) $\log_3 x + \log_3(x - 6) = 3$
   (c) $\ln(3x + 2) = 5$
   (d) $\ln(\sqrt{x}) - 2\ln(x) + 1 = 0$
   (e) $3^x \cdot 5^{-2x} = 7^{x+1}$
   (f) $e^x \cdot e^{3x} = 2$

5. Bestimme, falls existent, den Grenzwert folgender Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (hier braucht man nicht mit der Definition von Folgenkonvergenz arbeiten). Gib für nicht konvergente Folgen die Menge der Häufungswerte an.
   (a) $a_n := \frac{n^2+2n+1}{cn^3-n^2+n-1}$, $c \in \mathbb{R}$.
   (b) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$
   (c) $a_n := \frac{2}{\sqrt[n]{3n^2}}$
   (d) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}$
   (e) $a_n := \frac{n}{n-1} - \frac{2n}{n+1}$
   (f) $a_n := \frac{1}{((-1)^{n+1}-2)^n}$

6. Betrachte die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$ und Startwert $a_0 = 0$.
   (a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $0 \leq a_n \leq 1$ und $a_n \leq a_{n+1}$.
   (b) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.
   (c) Bestimme den Grenzwert aus (b).

7. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n := \frac{-42 - 2n^2}{n^2 + 42n}$$
Bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>und</u> zeige die Konvergenz mithilfe der Definition der Folgenkonvergenz.

8. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

(b) $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{\ln(\ln(x))}$

9. (a) Differenziere folgende Ausdrücke nach x. Die Ableitung braucht nicht vereinfacht werden. Man benenne jeweils zusätzlich die verwendete(n) Ableitungsregel(n).

    i. $\frac{x^2+2x}{x}$
    ii. $\ln(3x)$
    iii. $(\sin(x)+x^3+2)^3$
    iv. $e^{2x+1}\sin(x^2)$
    v. $x^{\sqrt[3]{x}}$
    vi. $\ln(\ln(\ln(x)))$

   (b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist der letzte Ausdruck (vi.) definiert?

10. (a) Bestimme mithilfe der Definition der Ableitung die Ableitung der Funktion $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ an einer Stelle $a>0$.

    (b) Bestimme mithilfe der Definition der Ableitung die Ableitung der Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sqrt{x}$ an einer Stelle $a>0$.
    Ist die Funktion f auch an der Stelle $a=0$ differenzierbar? Zeige oder widerlege die Behauptung.

11. Bestimme Konstanten $b,c\in\mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c, & \text{falls } x\le 0\\ e^x, & \text{falls } x>0\end{cases}$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion ist.

12. (a) Zeige, dass

$$\cos(x+x')=\cos(x)\cos(x')-\sin(x)\sin(x')$$

für alle $x,x'\in\mathbb{R}$ gilt. Benutze dazu die Funktion

$$g(x)=\cos(x)\cos(a-x)-\sin(x)\sin(a-x)$$

    (b) Zeige mithilfe des Additionstheorems aus (a), dass $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ gilt. Zeige außerdem, dass $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.

13. Es sei $I\subset\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass eine Konstante C existiert, sodass die Funktion $\tilde{f}:I\to\mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x)=f(x)+C$ positiv auf I ist.

14. Gegeben sei die Funktion $g(x)=x\ln x-x$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{e},e\right]$.

    (a) Begründe, zunächst ohne Rechnung, wieso die Funktion g auf $\left[\frac{1}{e},e\right]$ ein (globales) Maximum und (globales) Minimum annimmt.
    (b) Bestimme dieses (glob.) Maximum und (glob.) Minimum.
    (c) Besitzt g auch auf dem Intervall $\left(\frac{1}{e},e\right)$ ein (glob.) Maximum und (glob.) Minimum?

15. Zeige, dass die Gleichung $e^x=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$ *genau eine* Lösung zwischen 0 und 1 hat. Die Lösung braucht nicht berechnet werden.

16. Zeige, dass für alle $x\ge 0$ gilt, dass $\ln(1+x)\ge x-\frac{1}{2}x^2$.

17. Betrachte die Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\ln(1+x)$

    (a) Zeige, dass das dritte Taylorpolynom $P_3(x)$ von f mit Entwicklungspunkt $a=0$ gegeben ist durch

$$P_3(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

    (b) Zeige für $|x|\le\frac{1}{2}$ die Restgliedabschätzung $|R_3(x)|=|f(x)-P_3(x)|\le\frac{1}{4}$.

18. (a) Bestimme folgende unbestimmten Integrale:

i. $\int xe^{-x}\ dx$

ii. $\int 2^{x-1}\ dx$

iii. $\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)}\ dx$

iv. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\ dx$

(b) * Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so dass $\int_1^a \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\ dx = 2\sqrt{7}$ gilt.

(c) Berechne $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\ dx$.

19. Zeige oder widerlege:

(a) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so ist auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(b) Das Produkt zweier divergenter Folgen ist divergent.

(c) Ist $a_n = o(c_n)$ und $b_n = o(c_n)$, so ist auch $a_n \cdot b_n = o(c_n)$.

(d) Es seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ beide positiv und es gelte $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und g sei beschränkt, es existiere also eine Zahl $c > 0$ mit $g(x) < c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(e) Es sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Dann hat f im Intervall I eine Nullstelle.

(f) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die Inverse f^{-1} streng monoton wachsend.

(g) * Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dann existiert (also konvergiert) das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\ dx$.