Sommersemester 2020

Institut für Stochastik

Dr. Larisa Yaroslavtseva
Freimut von Loeper

Angewandte Stochastik 1

Musterlösung zum Übungsblatt 5

Aufgabe (1)[1+2+3 Punkte]
Für $A \subset \mathbb{R}$ sei $1_A\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ die Indikatorfunktion von A, d.h.

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in A, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie, für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ergeben folgende Funktionen eine Dichte. Begründen Sie Ihre Antwort, falls keine solche $c \in \mathbb{R}$ existiert.

a) $p(x) = c \cdot \sin(x) \cdot 1_{[0,\frac{5}{2}\pi]}(x)$

b) $p(x) = c \cdot (2 + \cos(x)) \cdot 1_{[0,\pi]}(x)$

c) $p(x) = x \cdot e^{-cx} \cdot 1_{[0,\infty)}(x)$

Lösung:

a) Es gilt $\sin(x) > 0$ für $x \in (0,\pi) \cup (2\pi, 2.5\pi)$ und $\sin(x) < 0$ für $x \in (\pi, 2\pi)$. Folglich gibt es kein $c \in \mathbb{R}$, sodass $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und p eine Dichte ist.

b) Es gilt $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} p(x)\mathrm{d}x = c\int_0^\pi 2 + \cos(x)\mathrm{d}x = c(2x + \sin(x))\big|_0^\pi = 2\pi c.$$

Folglich ist p eine Dichte, genau dann wenn $c = \frac{1}{2\pi}$ gilt.

c) Es gilt $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} 1 = \int_{\mathbb{R}} p(x)\mathrm{d}x &= \int_0^\infty x \cdot e^{-cx}\mathrm{d}x = -\frac{x}{c} \cdot e^{-cx}\big|_0^\infty + \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-cx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-cx}\mathrm{d}x = -\frac{1}{c^2} \cdot e^{-cx}\big|_0^\infty = \frac{1}{c^2}. \end{aligned}$$

Folglich ist p eine Dichte, genau dann wenn $c = 1$ gilt.

Aufgabe (2)[2+2+2 Punkte]

Frau Müller bringt ihrem Sohn jeden Tag nach der Arbeit eine schokoladige Leckerei mit, die ein wechselndes Spielzeug als Beigabe im Inneren enthält. Da sich ihr Sohn am meisten freut, wenn es sich bei dieser Beigabe um ein Auto handelt, hat Frau Müller darauf geachtet, bei welchem Supermarkt die Wahrscheinlichkeit dafür am höchsten ist. Sie hat dabei folgende Vermutung bzgl. der Wahrscheinlichkeiten für ein Auto aufgestellt:

Supermarkt A	Supermarkt B	Supermarkt C	Supermarkt D
20 %	30 %	10 %	5 %

Da Frau Müller den Stadtverkehr liebt und gerne quer durch die Stadt fährt, kauft sie nicht immer in dem gleichen Supermarkt ein. Sie kauft mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten in den Supermärkten A-D ein:

Supermarkt A	Supermarkt B	Supermarkt C	Supermarkt D
25 %	35 %	30 %	10 %

Nehmen Sie an, dass die von Frau Müller geschätzten Zahlen stimmen.

(a) Formulieren Sie die im Text gegebenen Annahmen durch geeignete Ereignisse und zugehörige (bedingte) Wahrscheinlichkeiten.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Müllers Sohn ein Auto findet?

(c) Der Sohn hat heute ein Auto gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Frau Müller im Supermarkt C eingekauft?

Lösung:

(a) Ereignisse:
X=„Frau Müller kauft im Supermarkt X ein.“ für $X \in \{A, B, C, D\}$.
Auto=„Frau Müller Sohn findet ein Auto als das mitgebrachte Spielzeug. “
Es gilt:

$P(Auto\|A) = 0,2$	$P(Auto\|B) = 0,3$	$P(Auto\|C) = 0,1$	$P(Auto\|D) = 0,05$
$P(A) = 0,25$	$P(B) = 0,35$	$P(C) = 0,3$	$P(D) = 0,1.$

(b) Per Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\begin{aligned}P(\text{Auto}) =& P(\text{Auto}|A) \cdot P(A) + P(\text{Auto}|B) \cdot P(B) + P(\text{Auto}|C) \cdot P(C) \\ &+ P(\text{Auto}|D) \cdot P(D) \\ =& 0,25 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,35 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,05 \cdot 0,1 \\ =& 0,19.\end{aligned}$$

(c) Per Satz von Bayes ergibt sich

$$P(C|\text{Auto}) = \frac{P(\text{Auto}|C) \cdot P(C)}{P(\text{Auto})} = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,19} = \frac{3}{19} \approx 0,16.$$

Aufgabe (3)[4+2 Punkte]

Wir werfen einen fairen Würfel zweimal. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

$$A_1 = \text{„Gerade Augenzahl beim ersten Wurf“},$$
$$A_2 = \text{„Ungerade Augenzahl beim zweiten Wurf“},$$
$$A_3 = \text{„Gleiche Augenzahlen bei beiden Würfen“}.$$

a) Sind A_1, A_2, A_3 paarweise unabhängig?

b) Sind A_1, A_2, A_3 unabhängig?

Lösung:

a) Wir modellieren dieses Zufallsexperiment durch ein Laplace-W-Raum mit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$. Dann gilt:
$A_1 = \{2, 4, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$
$A_2 = \{1, \dots, 6\} \times \{1, 3, 5\}$
$A_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.
Es folgt: $A_1 \cap A_3 = \{(2,2), (4,4), (6,6)\}$
$A_1 \cap A_2 = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}$
$A_2 \cap A_3 = \{(1,1), (3,3), (5,5)\}$.
Demnach gilt für die Wahrscheinlichkeiten:
$P(A_1) = \frac{3 \cdot 6}{36} = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{3 \cdot 6}{36} = \frac{1}{2}, P(A_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
Somit folgt: $P(A_1) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = P(A_1 \cap A_3)$
$P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_2)$
$P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = P(A_2 \cap A_3)$.
Folglich sind die Ereignisse A_1, A_2, A_3 paarweise unabhängig.

b) Es gilt: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. Somit folgt:
$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24} \neq 0 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Folglich sind die Ereignisse nicht unabhängig.

Aufgabe (4)[2+2+2+3 Punkte]
Es sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \Sigma$ Ereignisse.

a) A, B und C seien unabhängig. Zeigen Sie, dass auch $A \cup B$ und C unabhängig sind.

b) A und B seien unabhängig. Zeigen Sie, dass A und B^c unabhängig sind. Sind auch A^c und B unabhängig?

c) A und B seien unabhängig. Zeigen Sie, dass auch A^c und B^c unabhängig sind.

d) Es seien A und B unabhängig. Zusätzlich seien B und C unabhängig. Sind A und C unabhängig?

Lösung:

a) Es gilt:
$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) = P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = P(C) \cdot (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)) = P(C) \cdot (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = P(C) \cdot P(A \cup B)$.
Also sind auch $A \cup B$ und C unabhängige Ereignisse.

b) Es gilt:
$P(A) = P(A \cap (B \cup B^c)) = P((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$.
Daraus folgt mit der Unabhängigkeit der Ereignisse A und B:
$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$. Also sind auch A und B^c unabhängige Ereignisse. Da die Unabhängigkeit ein Eigenschaft ist, die nicht von der Reihenfolge der Ereignisse abhängt, kann man A und B vertauschen und erhält aus der obigen Gleichung, dass B und A^c bzw. A^c und B unabhängig sind.

c) Es folgt aus b), dass A und B^c unabhängig sind. Somit sind auch A^c und B^c nach b) unabhängig.

d) Nein, Gegenbeispiel: Wir werfen einen fairen Würfel zweimal.
A = „Es wird eine 1 beim ersten Wurf geworfen“
B = „Es wird eine 1 beim zweiten Wurf geworfen“
C = „Es wird eine 4 beim ersten Wurf geworfen“.
Wir modellieren dieses Zufallsexperiment durch den Laplace-W-Raum mit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$. Es gilt $A = \{1\} \times \{1, \dots, 6\}, B = \{1, \dots, 6\} \times \{1\}$ und $C = \{4\} \times \{1, \dots, 6\}$. Daraus folgt $A \cap B = \{(1,1)\}, B \cap C = \{(4,1)\}$ und $A \cap C = \emptyset$ und somit:
$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$
$P(B \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(B) \cdot P(C)$
$P(A \cap C) = 0 \neq \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(C)$.
In diesem Beispiel sind sowohl A und B als auch B und C unabhängige Ereignisse. Allerdings sind A und C nicht unabhängig.