Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille, Marc Schneble

Wintersemester 15/16
30.03.2016, 12 Uhr s.t.

2. Klausur zu Lineare Algebra für Informatiker und Ingenieure

Gesamtpunktzahl: 110 Punkte
Hinreichende Punktzahl für das Bestehen der Klausur: 50 Punkte

1. a) Definiere den Begriff Gruppe.

   b) Eine Kongruenzabbildung des $\mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Form $f(x) = Sx + v$, wobei $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine orthogonale Matrix ist und $v \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass die Menge aller Kongruenzabbildungen $\mathcal{S}$ eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung von Funktionen $\circ$ bildet.

   Hinweis: Es darf angenommen werden, dass die Menge aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen $O_n(\mathbb{R})$ mit der bekannten Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

   (3+10 Punkte)

2. Es seien $\pi \in S_5$ und $\tau \in S_5$ mit $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

   a) Definiere den Begriff Inversion.

   b) Betrachte die Permutation $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n$. Zeige, dass
   $$\operatorname{inv}(\rho) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

   c) Berechne π^n für $n \in \mathbb{N}$.

   d) Schreibe τ als Produkt von Transpositionen.

   e) Bestimme die Inversionen und das Vorzeichen von τ.

   (2+4+3+2+2 Punkte)

3. Es sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch $\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \\ 4x_1 - 4x_3 + 2x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$.

   Außerdem sei eine Basis von $\mathbb{R}^4$ gegeben durch
   $$\mathcal{B} = \{(1,1,1,1)^\top, (1,1,-1,1)^\top, (1,2,1,2)^\top, (-1,0,3,2)^\top\}.$$

   a) Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$.

   b) Ist φ surjektiv bzw. injektiv? Begründe.

   c) Bestimme alle Eigenwerte von φ sowie deren geometrische und algebraische Vielfachheiten.

   (3+3+5 Punkte)

4. Es sei die Matrix $A_t = \begin{pmatrix} 7t-2 & 2-4t & 3-9t \\ 6t-2 & 1-2t & 2-6t \\ 12t-4 & 3-6t & 5-14t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

   a) Bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, sodass A_t invertierbar ist.
   b) Bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, sodass $\operatorname{rg}(A_t) \leq 1$ ist.
   c) Bestimme ein $t \in \mathbb{R}$, sodass $v = (2,1,1)^\top \in \operatorname{Bild}(A_t)$ gilt.

(6+4+2 Punkte)

5. a) Definiere den Begriff Basis.
   b) Es sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis eines zweidimensionalen reellen Vektorraums V. Für welche Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ ist $\{w_1, w_2\}$ mit $w_1 = rv_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + sv_2$ wieder eine Basis von V?

(3+6 Punkte)

6. a) Es sei $p \in P_n$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich n mit reellen Koeffizienten und einer Nullstelle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann auch $\bar{z} = x - iy$ eine Nullstelle von p ist.
   b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Zeige, dass $\operatorname{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ und $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A bezeichnen.
   c) Es sei $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und A besitze die beiden Eigenwerte i und $1+i$. Außerdem sei $\operatorname{Spur}(A) = 0$. Berechne die Determinante von A.
   Hinweis: Beachte die Reihenfolge der Teilaufgaben a) bis c).
   d) Formuliere die Cramersche Regel.

(3+6+6+3 Punkte)

7. Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

   a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ ein Eigenwert von A und $c \neq 1$. Dann ist λ genau dann ein Eigenwert von $c \cdot A$, wenn $\lambda = 0$.
   b) Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ linear mit der Eigenschaft, dass $\varphi = \varphi \circ \varphi$. Dann ist $\operatorname{Kern}(\varphi) \cap \operatorname{Bild}(\varphi) = \{0\}$.
   c) Die Vereinigung von zwei Untervektorräumen ist wieder ein Untervektorraum.

(6+4+3 Punkte)

8. Es sei $f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 8x_1 - 8x_2 + 6$ ein quadratisches Polynom und $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0\}$ eine Quadrik.

   a) Untersuche, ob Q einen Mittelpunkt besitzt und bestimme diesen gegebenenfalls.
   b) Eliminiere, falls möglich, den konstanten Term von f.
   c) Bestimme eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A = SDS^{-1}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   d) Zeige, dass es sich bei Q um eine Ellipse handelt. Das heißt, bringe $f(x) = 0$ durch eine Hauptachsentransformation auf die Form $ax_1^2 + bx_2^2 - 1 = 0$.

(4+2+7+8 Punkte)

Viel Erfolg!