Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 07

Abgabedatum: 06.06.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

(a) Ist die Verkettung von stetigen Funktionen stetig?

(b) Ist die kleinste obere Schranke eines kompakten Intervalls immer in diesem enthalten?

(c) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gilt dann $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$?

(d) Sei I ein Intervall und sei f eine auf I definierte Funktion. Existiert dann ein $x_+ \in I$ mit $f(x_+) > f(x)\ \forall x \in I$?

(e) Das ε-δ-Kriterium aus Def. 10.2.1 für Stetigkeit besagt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Welche der folgenden Aussagen sind bzw. sind nicht äquivalent zum ε-δ-Kriterium?

- $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
- $\neg \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon)$.

2. (A) Stetigkeit

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 5\,|x^2 - 2| + 3$ in $x_0 = 1$ stetig ist, (2)

ii) $f_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist. (2)

(b) In Beispiel 10.2.6 (iv) steht, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [0,1]$ mit $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ bei $x = 0$ eine sogenannte Unstetigkeit zweiter Art besäße.

i) Geben Sie zunächst Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in}$ an, so dass $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = 0$ und $\lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{x_k} \neq \lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{y_k}$. (1)

ii) Verwenden Sie die beiden Folgen aus (i) dazu, die genannte Unstetigkeit zweiter Art bei $x = 0$ zu beweisen. (1)

3. (A) Stetigkeit

a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a+2}, & x \leq 1, \\ x^2 + b, & x > 1 \end{cases}$$

in $x = 1$ stetig ist und $f(-1) = 1$ gilt. (2)

b) Zeigen Sie mithilfe der Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$$

im Punkt $x_0 = 1$ stetig ist. (3)

c) Zeigen Sie: Ist $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $x \mapsto x \cdot g(x)$ in $x_0 = 0$ stetig. (1)

4. (A) Stetigkeit

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_4(x + 16) + x4^x - 6$, mindestens eine Nullstelle besitzt. (2)

b) Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in welchen Punkten bzw. Bereichen diese stetig sind. Klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen gemäß Beispiel 10.2.6.

i) $f(x) = \exp(24[x])$, wobei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z}|\ k \leq x\}$ (2)

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-6x^2}{x^2-9} : x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\} \\ 4 : x = 3 \\ 3 : x = -3 \end{cases}$ (2)

5. (A) Grenzwertsätze für Funktionsgrenzwerte

Es seien $f, g \colon I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \lim_{x \to x_0} g(x) = b$. Beweisen Sie die folgenden nach Lemma 10.1.8 geltenden Aussagen jeweils mithilfe von Satz 10.1.6 und den Grenzwertsätzen 3.1.17 für Folgen.

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \left(\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha a \right)$. (1.5)

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$. (1.5)

(c) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$. (1.5)

(d) Wenn $b \neq 0$, dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$. (1.5)

6. (T),(NA)

Zeigen Sie, dass jedes Polynom ungeraden Grades mindestens eine (reelle) Nullstelle besitzt und schließen Sie daraus, dass jedes $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ mindestens einen reellen Eigenwert besitzt.

7. (T), (NA) Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in welchen Punkten bzw. Bereichen diese stetig sind. Klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen gemäß Beispiel 10.2.6.

a) $f(x) = |\sin(x^3)|$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x| \cos(\frac{1}{x^2})}{1+x^4} : x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\} \\ 1 : x = 0 \end{cases}$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.