Universität Ulm

Abgabe: Freitag, den 12.06. um 12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Lösungsvorschlag Analysis 1: Blatt 7

-

27. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen. Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen: (2)

(a) Gilt $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$, dann gilt auch $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ für $n \to \infty$.

Lösungsvorschlag: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta = \varepsilon^2$. Da $a_n \to a$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \delta$ für $n \geq N$. Falls $\sqrt{a_n} + \sqrt{a} \geq \varepsilon$, so erhalten wir

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| \leq \frac{|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}|}{\varepsilon} \leq \frac{\delta}{\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Gilt $\sqrt{a_n} + \sqrt{a} \leq \varepsilon$, so folgt

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq |\sqrt{a_n}| + |\sqrt{a}| = \sqrt{a_n} + \sqrt{a} \leq \varepsilon.$$

Somit konvergiert $\sqrt{a_n}$ gegen $\sqrt{a}$ und die Aussage ist wahr.

(b) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann folgt $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{a, b\}$ für $n \to \infty$.

Lösungsvorschlag: Wir schreiben

$$\max\{a_n, b_n\} = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2}$$

und erhalten mit den Grenzwertregeln aus Satz 24, dass dieser Ausdruck gegen

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \max\{a, b\}$$

konvergiert. Die Aussage ist also wahr.

(c) Gilt $a_n \to a$ für $n \to \infty$ und ist $(b_n)_{n\to\mathbb{N}}$ beschränkt, dann konvergiert $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösungsvorschlag: Betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 1$ und $b_n := (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (a_n) konvergent, (b_n) beschränkt, aber $a_n b_n = (-1)^n$ konvergiert nicht. Somit ist die Aussage falsch.

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, die gegen z konvergiert.

Lösungsvorschlag: Die Aussage ist wahr. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ existeren zu $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ zwei Folgen $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ und $(y_n) \subset \mathbb{Q}$ mit

$$|\operatorname{Re} z - x_n| < \frac{1}{2n} \text{ und } |\operatorname{Im} z - y_n| < \frac{1}{2n}.$$

Wir definieren $q_n := x_n + iy_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ und erhalten

$$|z - q_n| = |\operatorname{Re} z - x_n + i(\operatorname{Im} z - y_n)| \leq |\operatorname{Re} z - x_n| + |\operatorname{Im} z - y_n| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Da $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit ist auch

$$|z - q_n| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und die Folge konvergiert gegen z.

28. Es sei $q > 0$. Definiere $x_0 = q$ und (2)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{q}{x_n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.
Hinweis: Zeige zunächst, dass $x_{n+1}^2 - q \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und betrachte anschließend $x_{n+1} - x_n$.

Lösungsvorschlag: Wir zeigen zunächst, dass $x_{n+1}^2 - q \geq 0$. Mithilfe der Rekursionsformel gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - q &= \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{q}{x_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4}x_n^2 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}\frac{q^2}{x_n^2} - a \\ &= \frac{1}{4}x_n^2 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}\frac{q^2}{x_n^2} = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{q}{x_n}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}.$$

Wir betrachten nun die Differenz $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n \quad = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{q}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(-x_n + \frac{q}{x_n}\right) \leq 0,$$

da $x_n^2 - q \geq 0$. Die Folge ist somit monoton fallend für $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge auch nach unten durch 0 beschränkt ist, existiert der Grenzwert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nach dem Monotonieprinzip (Satz 29). Für diesen gilt:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{q}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{q}{x}\right).$$

Aus der Gleichung folgt $x^2 = q$, also mit der Nichtnegativität der Folgenglieder $x = \sqrt{q}$.

29. Man untersuche folgende Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ auf Konvergenz. Dabei sind alle Aussagen zu beweisen. (4)

(a) $x_n := \dfrac{3n^2 - 2n^3 + 4}{4n + n^3 - 8}$

(b) $x_n := \left(\dfrac{n^4 + n^2 + 2}{n^4 + n}\right)^n$

(c) $x_n := n^{30}\left(\dfrac{2-2i}{3}\right)^n$

(d) $x_n := \dfrac{2^n + (-2)^n}{5 \cdot 2^n}$

(e) $x_n := \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$

(f) $x_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

(g) $x_n := \left(\dfrac{3n+1}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}\right)$

(h) $x_n := \dfrac{1}{n+2}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\right) - \dfrac{n}{2}$

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt mit den Grenzwertregeln

$$x_n = \frac{3n^2 - 2n^3 + 4}{4n + n^3 - 8} = \frac{n^3\left(\frac{3}{n} - 2 + \frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{4}{n^2} + 1 - \frac{8}{n^3}\right)} = \frac{\frac{3}{n} - 2 + \frac{4}{n^3}}{\frac{4}{n^2} + 1 - \frac{8}{n^3}} \to \frac{-2}{1} = -2.$$

(b) Wir sehen, dass $x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt

$$x_n = \left(\frac{n^4 + n^2 + 2}{n^4 + n}\right)^n \leq \left(\frac{n^4 + 2n^2}{n^4}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$$

mit $a_n := \frac{2}{n}$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge ist, folgt mit Satz 28, dass

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \to 1.$$

Mit dem Quetschlemma (Satz 27) folgt nun $x_n \to 1$.

(c) Es gilt

$$\left|\frac{2-2i}{3}\right| = \frac{\sqrt{8}}{3} < 1$$

und mit Satz 25 folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(d) Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für gerade und ungerade n separat. Es ist

$$x_n = \frac{2^n + (-2)^n}{5\cdot 2^n} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{2}{5}, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Somit ist (x_n) nicht konvergent.

(e) Es ist mit der dritten binomischen Formel

$$|x_n| = |\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| = \left|\frac{-1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$$

und wir sehen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit $x_n \to 0$.

(f) Da $\frac{1}{3} \neq 1$, können wir die Formel für die endliche geometrische Summe (Satz 16) anwenden und erhalten zusammen mit den Grenzwertregeln und Satz 23

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{(\frac{1}{3})^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{\frac{2}{3}} \to \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

(g) Mit den Grenzwertregeln ist

$$x_n = \frac{3n+1}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1+\frac{1}{n}}{1} \to \frac{3}{1} - \frac{1}{1} = 2.$$

(h) Da $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, lässt sich x_n vereinfachen zu

$$x_n = \frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n}{2} = \frac{n(n+1) - n(n+2)}{2(n+2)} = \frac{-n}{2n+4} = \frac{-1}{2+\frac{4}{n}}.$$

Mit den Grenzwertregeln erhalten wir nun, dass $x_n \to -\frac{1}{2}$.

30. Man finde für jedes angegebene Szenario reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den vorgegeben Eigenschaften: (2)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt mit

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 1$
- $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.

Lösungsvorschlag:

- $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n \Rightarrow a_n b_n = \frac{1}{n} \to 0$
- $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n \Rightarrow a_n b_n = 1 \to 1$
- $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2 \Rightarrow a_n b_n = n \to \infty$

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind unbeschränkt mit

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 1$
- $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.

Lösungsvorschlag:

- $a_n = b_n = n \Rightarrow a_n - b_n = 0 \to 0$
- $a_n = n+1$, $b_n = n \Rightarrow a_n - b_n = 1 \to 1$
- $a_n = 2n$, $b_n = n \Rightarrow a_n - b_n = n \to \infty$