Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 10

Lösung

1. (NA) Minifragen

(a) Gilt die Umkehrung des Satzes von Rolle (11.2.5)? In anderen Worten, seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a,b) differenzierbar. Weiter existiere ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Gilt dann $f(a) = f(b)$?
Lösung: Nein, $[a,b] = [-1,2]$, $f(x) = x^2$.

(b) Gilt die Umkehrung des 1. Mittelwertsatzes (11.2.8)? In anderen Worten, seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die gilt

$$\exists \xi \in (a,b) \left(f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

Ist f dann stetig und auf (a,b) differenzierbar?
Lösung: Nein.

(c) Hilft der Satz von L'Hospital nur in den Fällen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ weiter?
Lösung: Auch im Falle von $0 \cdot \infty$ können wir ihn anwenden.

(d) Für welche Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ gilt, dass das entsprechende Lagrangesche Restglied $R_n(x_0, x)$ gleich 0 ist?
Lösung: Für Polynome mit Grad echt kleiner als n.

(e) Welche Bedingung muss eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ erfüllen, sodass die Taylorreihe $Tf(x_0, x)$ von f mit Entwicklungspunkt x_0 existiert?
Lösung: Sie muss genügend oft differenzierbar sein.

2. (A) Taylorpolynome

a) Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(\cos(x))$. Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom $T^{(2)}f(0,x)$ von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (3)
Lösung: Bestimme zuerst die entsprechenden Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$
$$f''(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$$

Berechne nun das Polynom:

$$T^{(2)}f(0,x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} = 0 + 0 + \frac{-x^2}{2} = \frac{-x^2}{2}$$

b) Zeigen Sie, dass für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ die Abschätzung

$$\left|f(x) - T^{(2)}f(0,x)\right| \leq \frac{2}{3}x^3$$

gilt. (3)

Lösung: Wir schätzen dazu das Restglied ab. Für dieses benötigen wir die 3. Ableitung:

$$f'''(x) = \frac{-2\sin x}{\cos^3 x}$$

Der Betrag dieser ist auf $[0, \frac{\pi}{4}]$ streng monoton wachsend, daher gilt:

$$\left|f(x) - T^{(2)}f(0,x)\right| \leq \left|\frac{1}{6}\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^3\frac{\pi}{4}}\right| x^3 = \left|\frac{1}{6}\frac{2\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}^3}}\right| x^3 = \frac{2}{3}x^3$$

3. (A) Kurvendiskussionen

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x)e^{2x}$ durch (Nullstellen, Monotonieintervalle, Extremstellen (lok. Max./Min), Verhalten für $x \to \pm\infty$.) (6)

Lösung: Da $e^{2x} > 0$ gilt, müssen nur Nullstellen von $(1-x)$ betrachtet werden. Daher ergibt sich die einzige NST bei $x = 1$.
Die Funktion ist als Komposition von unendlich oft differenzierbaren Funktionen unendlich oft differenzierbar mit:

$$f'(x) = -e^{2x} + (1-x)2e^{2x} = (1-2x)e^{2x}$$

Diese Ableitung hat mit demselben Argument nur eine NST ($x = 0.5$). Da die Ableitung auf $(0.5, \infty)$ negativ ist, erhalten wir streng fallende Monotonie. Umgekehrt erhalten wir auf $(-\infty, 0.5)$ streng wachsende Monotonie. Aus dieser Monotonie folgt direkt, dass f bei $x = 0.5$ ein lokales Maximum besitzt. Für das Verhalten an den Intervallgrenzen betrachten wir:

$$f(x) = -(x-1)e^{2x} \overset{x\geq 2}{\leq} -e^{2x} \overset{x\to\infty}{\to} -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-2e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty} 0.5e^{2x} = 0$$

4. (A) Partielle Ableitungen

Berechnen Sie jeweils alle ersten partiellen Ableitungen von

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3^3 + x_1x_2^3x_3^2$, (1)

Lösung:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} = 3x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^1x_2x_3^3 + 1x_2^3x_3^2$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} = x_1^3 2x_2^1x_3 + x_1^2 1x_3^3 + x_1 3x_2^2x_3^2$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} = x_1^3x_2^2 1 + x_1^2x_2 3x_3^2 + x_1x_2^3 2x_3^1$$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cos x_2),$ (1)

Lösung:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \cos x_2 \cos(x_1 \cos x_2)$$
$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \cos(x_1 \cos x_2)(-1)x_1 \sin x_2$$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2^2 x_1 + 3x_1^2 x_3^3 \\ x_3 x_1^2 + 2x_2 x_1 \end{pmatrix},$ (2)

Lösung:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} x_2^2 1 + 6x_1^1 x_3^3 \\ x_3 2x_1^1 + 2x_2 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^2 + 6x_1 x_3^3 \\ 2x_3 x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 2x_2^1 x_1 + 0 \\ 0 + 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_3} = \begin{pmatrix} 0 + 3x_1^2 3x_3^2 \\ 1x_1^2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_1^2 x_3^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^4}, & (x_1, x_2)^\top \neq (0,0)^\top, \\ 0, & (x_1, x_2)^\top = (0,0)^\top. \end{cases}$ (2)

Lösung: Wir berechnen zuerst die partielle Ableitung für $X \neq (0,0)^\top$:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{x_2^3(x_1^2 + x_2^4) - 2x_1 x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^4)^2} = \frac{x_2^7 - x_1^2 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^4)^2}$$
$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{3x_1 x_2^2(x_1^2 + x_2^4) - 4x_2^3 x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^4)^2} = \frac{3x_1^3 x_2^2 - x_1 x_2^6}{(x_1^2 + x_2^4)^2}$$

Die partielle Ableitung in $(0,0)^\top$ mittels der Definition ist gegeben durch:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h^5} = 0$$

Beachten Sie bei d), dass die partielle Ableitung in $(0,0)^\top$ mit Hilfe der Definition bestimmt werden muss – warum ist das so?

5. (A) Stammfunktionen

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k \, dx,\ x \in (-1,1)$ (1,5)

Lösung:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

b) $\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln^2(x)}}\,dx$ (1,5)

Lösung: Wir führen zwei Substitutionen durch: $t = \ln x$ und $s = 1 + t^2$.

$$\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln^2(x)}}\,dx = \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int \frac{t}{2t\sqrt{s}}\,ds = \sqrt{s} = \sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+\ln^2 x}$$

c) $\int \sin(2x)\cos(4x)\,dx$ (1,5)

Lösung: Wir verwenden partielle Integration, um die Aufgabe zu lösen. Sei dazu im ersten partiellen Integrationsschritt: $f(x) = \sin(2x),\ g'(x) = \cos(4x)$ und im zweiten: $f(x) = \cos(2x),\ g'(x) = \sin(4x)$:

$$\begin{aligned}
\int \sin(2x)\cos(4x)\,dx &= \sin(2x)\frac{1}{4}\sin(4x) - \int 2\cos(2x)\frac{1}{4}\sin(4x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\sin(2x)\sin(4x) - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\sin(4x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\sin(2x)\sin(4x) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos(2x)\cos(4x) - \int 2\sin(2x)\frac{1}{4}\cos(4x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\sin(2x)\sin(4x) + \frac{1}{8}\cos(2x)\cos(4x) + \frac{1}{4}\int \sin(2x)\cos(4x)\,dx
\end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir:

$$\int \sin(2x)\cos(4x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(2x)\sin(4x) + \frac{1}{6}\cos(2x)\cos(4x)$$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (1,5)

Lösung: Wir substituieren wie im Hinweis vorgeschlagen.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(u)}}\cosh u\,du = \int \frac{\cosh u}{\cosh u}\,du = u = \sinh^{-1} x$$

Beachte, dass für die Substitution Bijektivität nötig ist.

Hinweis zu Teil d): Führen Sie die Substitution $x = \sinh(u)$ durch.

6. (T),(NA)

a) Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Taylor $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ bis auf einen Fehler von 10^{-4} genau.

b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von

   a) $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2)^\top \neq (0,0)^\top, \\ 0, & (x_1,x_2)^\top = (0,0)^\top. \end{cases}$

c) Sei $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)e^x$. Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f und überprüfen Sie, ob es sich dort um lokale Maxima oder Minima handelt.

7. (T),(NA)

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \ln^2(x)\,dx$

b) $\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$

c) $\int \arctan(3x)\,dx$

d) $\int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.