Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 11

Lösung

1. (NA) Minifragen

(a) Nennen Sie eine nicht Riemann-integrierbare Funktion.
Lösung: Dirichletsche Sprungfunktion, siehe Beispiel 12.3.12.

(b) Ist jede stetige Funktion Riemann-integrierbar?
Lösung: Ja.

(c) Ist jede monoton wachsende Funktion Riemann-integrierbar?
Lösung: Ja.

(d) Ist jede Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar?
Lösung: Ja.

2. (A) Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \frac{1}{x^4-1}\, dx$ (1)

Lösung: Die zu integrierende Funktion ist echt gebrochen rational. Für $|x| \neq 1$ gilt

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Wir erhalten die PBZ

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (x^2-1)(Cx+D)}{x^4-1}.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}1 &= A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (x^2-1)(Cx+D) \\ &= (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = 0, D = -\frac{1}{2}$$

Somit erhalten wir

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln(|x-1|) - \frac{1}{4}\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\arctan(x).$$

b) $\int \frac{x^3+2x^2-1}{x(x-1)}\,dx$ (1)

Lösung: Um eine echt gebrochen rationale Funktion zu erhalten, führen wir Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{l} (x^3+2x^2-1) : (x^2-x) = (x^2-x)(x+3) + (3x-1) \\ \underline{-x^3+x^2} \\ \quad 3x^2 \\ \quad \underline{-3x^2+3x} \\ \qquad 3x-1 \end{array}$$

Wir erhalten die PBZ des Rests

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 3x-1 &= A(x-1) + Bx \\ &= (A+B)x - A \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = 1, B = 2 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\frac{x^3+2x^2-1}{x(x-1)} = x + 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}$$
$$\Rightarrow \int \frac{x^3+2x^2-1}{x(x-1)}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln(|x|) + 2\ln(|x-1|).$$

c) $\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$ (1)

Lösung: Wir führen eine Substitution mit $u = x^3+1$, sodass $du = 3x^2\,dx$.
$\Rightarrow \int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln(|u|) = \ln(|x^3+1|)$.

d) $\int \frac{\log(x)}{x\left(\log^2(x)+\log(x)-2\right)}\,dx$ (1,5)

Lösung: Wir führen eine Substitution mit $u = \log(x)$, sodass $du = \frac{1}{x}\,dx$.
$\Rightarrow \int \frac{\log(x)}{x\left(\log^2(x)+\log(x)-2\right)}\,dx = \int \frac{u}{(u^2+u-2)}\,du = \int \frac{u}{(u-1)(u+2)}\,du$. Die zu integrierende Funktion ist echt gebrochen rational. Wir erhalten die PBZ

$$\begin{aligned} \frac{u}{(u-1)(u+2)} &= \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+2} \\ &= \frac{A(u+2)+B(u-1)}{(u-1)(u+2)}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} u &= A(u+2) + B(u-1) \\ &= (A+B)u + (2A-B) \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} &\cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{u}{(u-1)(u+2)} &= \frac{1}{3(u-1)} + \frac{2}{3(u+2)} \\ \Rightarrow \int \frac{u}{(u-1)(u+2)}\,du & \\ &= \frac{1}{3}\log(|u-1|) + \frac{2}{3}\log(|u+2|) \\ &= \frac{1}{3}\log(|\log(x)-1|) + \frac{2}{3}\log(|\log(x)+2|). \end{aligned}$$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$ (1,5)

Lösung: Wir substituieren $u = \frac{x+2}{3}$, sodass $du = \frac{1}{3}\,dx$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{9-(x+2)^2}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{9(1-(\frac{x+2}{3})^2)}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{3\sqrt{1-(\frac{x+2}{3})^2}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= \arcsin(u) \\ &= \arcsin(\frac{x+2}{3}). \end{aligned}$$

3. (A) Höhere trigonometrische Integrale

Sei $f_n(x) := \sin^n(x)$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie eine rekursive Darstellung für

$$\int f_n(x)\,dx$$

der Form

$$\int f_n(x)\,dx = g_n(x) f_{n-1}(x) + \alpha_n \int f_{n-2}\,dx,$$

wobei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\alpha_n \in \mathbb{R}$. (6)

Lösung: Sei $f_n(x) = \sin^n(x)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int f_n(x)\,dx &= \int \sin^n(x)\,dx \\
&= \int \sin(x)\sin^{n-1}(x)\,dx \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \int \underbrace{\cos^2(x)}_{=1-\sin^2(x)}(n-1)\sin^{n-2}(x)\,dx \\
&= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\left(\int \sin^{n-2}(x)\,dx - \int \underbrace{\sin^n(x)}_{=f_n(x)}\,dx\right) \\
\Leftrightarrow n\int f_n(x)\,dx &= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,dx \\
\Leftrightarrow \int f_n(x)\,dx &= -\frac{\cos(x)}{n}\sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Mit $g_n(x) = -\frac{\cos(x)}{n}$ und $a_n = \frac{n-1}{n}$ erhalten wir die gesuchte rekursive Form.

4. (A) Zwischensummen

Es seien $a, b \in (0, +\infty)$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Zeigen Sie, dass durch $x_j = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{n}}$, $j = 0, \dots, n$, eine ausgezeichnete Partitionenfolge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a, b]$ gegeben ist. (2)

Lösung:

$$\begin{aligned}
|x_j - x_{j-1}| &= \left| a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{n}} - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{n}} \right| \\
&= \left| a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{n}} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) \right| \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{n}} (b^{\frac{1}{n}} a^{1-\frac{1}{n}} - a)
\end{aligned}$$

Da $\frac{b}{a} > 1$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
|\pi_n| &= |x_n - x_{n-1}| \\
&= \underbrace{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}}}_{\to \frac{b}{a}\,(n\to\infty)} (\underbrace{b^{\frac{1}{n}}}_{\to 1\,(n\to\infty)} \underbrace{a^{1-\frac{1}{n}}}_{\to a\,(n\to\infty)} - a) \to 0\,(n \to \infty)
\end{aligned}$$

b) Durch $\xi_j = x_j$ für $j = 1, \dots, n$ sind Zwischenstellen dieser Partition gegeben. Bestimmen Sie die zugehörige Riemannsche Zwischensumme. (2)

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sigma(\pi_n, f, \xi_j) &= \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot |x_j - x_{j-1}| = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot |x_j - x_{j-1}| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j - x_{j-1}|}{x_j} = \sum_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{x_{j-1}}{x_j}\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{n}}}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{n}}}\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left|1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right| = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \\
&= n\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right)
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie über die Zwischensumme aus b das Integral $\int_a^b \frac{1}{x} dx$. (2)

Lösung: Für $n \to \infty$ ist $\lim_{n\to\infty} \sigma(\pi_n, f, \xi_j) = \int_a^b f(x)\, dx$ nach Satz 12.3.13, da $[a, b]$ kompakt und f auf I Riemann-integrierbar ist. Also ist

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = -\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - 1\right) = -\log(\frac{a}{b}) = \log(b) - \log(a).$$

5. (A) Stetigkeit und Stammfunktionen

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f keine Stammfunktion besitzt. (3)

Lösung: Wir nehmen zunächst an, dass f eine Stammfunktion F besitzt. Dann ist F insbesondere auf $(0, \infty)$ eine Stammfunktion von f. Zum Beispiel ist $G(x) = x$ auch eine Stammfunktion von f auf $(0, \infty)$. Daher ist $F(x) = c_1 + x$ für ein $c_1 \in \mathbb{R}$ und für alle $x > 0$. Gleichermaßen sind F und $H(x) = 0$ Stammfunktionen von f auf $(-\infty, 0)$. Daher gibt es ein $c_2 \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = c_2\ \forall x < 0$. Also ist

$$F(x) = \begin{cases} c_2 & , x < 0 \\ c_1 + x & , x > 0 \end{cases}.$$

Da F differenzierbar ist, ist F stetig. Daraus folgt

$$c_2 = \lim_{x\to 0^-} F(x) = F(0) = \lim_{x\to 0^+} F(x) = c_1.$$

Somit gilt $c_1 = c_2$ und

$$F(x) = \begin{cases} c_1 & , x < 0 \\ c_1 + x & , x > 0 \end{cases}.$$

Jedoch ist F nicht in 0 differenzierbar, denn

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{c_1-c_1}{x}=0\\ \neq 1 = &\lim_{x\to 0^+}\frac{(c_1+x)-c_1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}.\end{aligned}$$

Somit kann F keine Stammfunktion von f sein. Widerspruch.

b) Geben Sie (mit Beweis) eine in mindestens einem Punkt unstetige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an, welche dennoch eine Stammfunktion $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ besitzt. (3)

Lösung: Die Aufgabenstellung ist äquivalent zu der Suche nach einer differenzierbaren Funktion $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die nicht stetig differenzierbar ist. Ein Beispiel dafür ist die Funktion

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x}) & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

mit der Ableitung

$$f(x):=F'(x)=\begin{cases}2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}) & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}.$$

Dann ist f nicht in 0 stetig, da z.B.

$$\begin{aligned}f(\frac{1}{n\pi})&=\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi)-\cos(n\pi)\\&=-\cos(n\pi)\\&=-(-1)^n.\end{aligned}$$

Aber F ist in 0 differenzierbar, denn

$$\frac{F(h)-F(0)}{h}=h\sin(\frac{1}{h})\to 0\,(h\to 0).$$

6. (T),(NA)

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$

b) $\int \frac{x^5+1}{x^4+x^2}\,dx$

c) $\int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}\,dx$

7. (T),(NA)

Berechnen Sie die Ober- und Untersumme von $f=\exp:[0,1]\to\mathbb{R}$ für die Zerlegung $Z_n=\{x_i|i=0,\ldots,n\}$ mit $x_i=\frac{i}{n}$ und $n\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}|x_i-x_{i-1}|=0$$

und bestimmen Sie mit diesen Ergebnissen den Wert des Integrals $\int_0^1 e^x dx$.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.