ulm university universität uulm

Sommersemester 2020

Institut für Stochastik

Dr. Larisa Yaroslavtseva
Freimut von Loeper

Angewandte Stochastik 1

Musterlösung zum Übungsblatt 4

Aufgabe (1)[1+1+1+2 Punkte]
Es gelte $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(A) = \sum_{i\in A} p_i$ für $A \in \Sigma$. Weiterhin sei

a) $p_i = i \cdot c$,

b) $p_i = 3 \cdot c^i$,

c) $p_i = \frac{c}{i}$,

d) $p_i = \frac{c}{i(i+1)}$

für $i \in \Omega$. Bestimmen Sie jeweils alle $c > 0$, sodass (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Lösung: Wir suchen $c > 0$ so, dass die Eigenschaften in Def. 2.1.9. erfüllt sind.

a) $P(\Omega) = c\sum_{i\in\mathbb{N}} i = \infty$ für alle $c > 0$. Folglich ist (i) in Def. 2.1.9. nicht erfüllt und (Ω, Σ, P) ist kein Wahrscheinlichkeitsraum für alle $c > 0$.

b) Es gilt gemäß (i) in Def. 2.1.9.

$$1 = P(\Omega) = 3\sum_{i\in\mathbb{N}} c^i = 3\left(\frac{1}{1-c} - 1\right) = 3\left(\frac{c}{1-c}\right) \Rightarrow 3c = 1 - c \Rightarrow c = 0.25.$$

Weiterhin ist $0 \le P(A) = \sum_{i\in A} p_i \le 1$ für alle $A \in \Sigma$ und die σ-Additivität ist erfüllt. Folglich ist (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum genau dann wenn $c = 0.25$ gilt.

c) $P(\Omega) = c\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i} = \infty$ für alle $c > 0$, da $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i}$ die harmonische Reihe ist. Folglich ist (i) in Def. 2.1.9. nicht erfüllt und (Ω, Σ, P) kein Wahrscheinlichkeitsraum ist für alle $c > 0$.

d) Es gilt gemäß (i) in Def. 2.1.9.

$$1 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{c}{i(i+1)} = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = c\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = c.$$

Weiterhin ist $0 \le P(A) = \sum_{i\in A} p_i \le 1$ für alle $A \in \Sigma$ und die σ-Additivität ist erfüllt. Folglich ist (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum genau dann wenn $c = 1$ gilt.

Aufgabe (2)[2+2 Punkte]
Sei (Ω, Σ, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{i\}) = \frac{c}{i^2}$ für $i \in \Omega$ und ein $c > 0$.

a) Bestimmen Sie c.

b) Bestimmen Sie $P(A)$ und $P(B)$ für $A = \mathbb{N}$ und $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$ mit dem c aus a).

Hinweis: Verwenden Sie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Lösung:

a) Es gilt gemäß (i) in Def. 2.1.9.

$$1 = \sum_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c}{i^2} = 2 \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{c}{i^2} = \frac{c\pi^2}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{\pi^2}.$$

Weiterhin ist $0 \le P(A) = \sum_{i \in A} p_i \le 1$ für alle $A \in \Sigma$ und die σ-Additivität ist erfüllt. Folglich ist (Ω, Σ, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum genau dann wenn $c = \frac{3}{\pi^2}$ gilt.

b) Es folgt mit $c = \frac{3}{\pi^2}$ aus (a)

$$P(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{c}{i^2} = c \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i^2} = c \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2}$$

und

$$P(B) = \sum_{i \in 2\mathbb{N}} \frac{c}{i^2} = c \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2i)^2} = \frac{c}{4} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i^2} = \frac{c\pi^2}{24} = \frac{1}{8}.$$

Aufgabe (3)[2+2+2 Punkte]

Auf einem Jahrmarkt dreht Hans ein faires Glücksrad mit 20 gleichgroßen Feldern. 17 Felder sind Nieten, zwei Felder sind Trostpreise, und ein Feld ist der Hauptpreis. Bei jedem Versuch darf Hans das Glücksrad 3 mal drehen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Hans

a) nach spätetens 4 Versuchen einen Preis bekommt.

b) den ersten Trostpreis zum Ende eines Versuches bekommt.

c) den ersten Hauptpreis zu Beginn eines Versuches bekommt.

Lösung:

a) 4 Versuche bedeutet $n = 12$ Drehungen des Glücksrades mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 3/20$ ein Trostpreis oder den Hauptpreis zu bekommen. Mit der Binomialverteilung folgt für das Ereignis A="Mindestens ein Preis"

$$P(A) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{12} = 1 - 0.85^{12} \approx 1 - 0.14 \approx 0.86.$$

b) Wir verwenden die geometrische Verteilung. Die Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Trostpreis ist $p = 2/20$. Für das Ereignis A ="Den ersten Trostpreis bekommt Hans zum Ende eines Versuches" gilt

$$P(A) = \sum_{i \in 3\mathbb{N}} (1-p)^{i-1} p = \sum_{i \in \mathbb{N}} (1-p)^{3i-1} p = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{9}{10}\right)^{3i-3} \cdot \frac{1}{10}$$
$$= \frac{81}{1000} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\left(\frac{9}{10}\right)^3\right)^{i-1} = \frac{81}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{729}{1000}} = \frac{81}{271} \approx 0.30.$$

c) Wir verwenden die geometrische Verteilung. Die Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Hauptpreis ist $p = 1/20$. Für das Ereignis A ="Den ersten Hauptpreis bekommt Hans zum Beginn eines Versuches" gilt

$$P(A) = \sum_{i \in 3\mathbb{N}} (1-p)^{i-3} p = \sum_{i \in \mathbb{N}} (1-p)^{3i-3} p = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\left(\frac{19}{20}\right)^3\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{20}$$
$$= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{1 - \frac{6859}{8000}} = \frac{400}{1141} \approx 0.35.$$

Aufgabe (4)[2+2 Punkte]

Ein Verlag geht davon aus, dass beim Drucken eines typischen Buches aus seinem Sortiment die Wahrscheinlichkeit für einen Druckfehler bei einer Seite 1.25% beträgt.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Buch mit 200 Seiten höchstens drei Druckfehler gemacht werden?

b) Berechnen Sie die obige Wahrscheinlichkeit approximativ mithilfe der Poisson-Approximation.

Lösung:

a) Wir verwenden die Binomialverteilung mit den Parametern $n = 200$ und $p = 0.0125$. Für das Ereignis A ="höchstens drei Druckfehler" gilt

$$P(A) = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{3} \binom{200}{k} \cdot 0.0125^k \cdot 0.9875^{200-k} \approx 0.7582.$$

b) Es gilt $\lambda = n \cdot p = 200 \cdot 0.0125 = 2.5$. Für das Ereignis A ="höchstens drei Druckfehler" folgt aus der Poisson-Approximation

$$P(A) \approx \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-2.5} \cdot \left(1 + 2.5 + \frac{2.5^2}{2} + \frac{2.5^3}{6}\right) \approx 0.7575.$$