Universität Ulm

Abgabe: Freitag, den 26.06. um 12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

# Übungen Analysis 1: Blatt 9

**35.** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: (5)

(a) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergente, Folge mit $x_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $x \in \mathbb{N}$.

(b) Eine beschränkte Folge hat immer endlich viele Häufungspunkte.

(c) Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge, sodass für alle $p \in \mathbb{N}$ die Folge $(y_{n+p} - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann konvergiert die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Zahlenfolge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(d) Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{C}$, dann konvergiert auch $x_n$ gegen $a$.

(e) Divergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Folge.

**36.** Zeigen Sie die folgenden Charakterisierung der Konvergenz komplexer Zahlenfolgen: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann gegen $x \in \mathbb{C}$, wenn für alle Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, die gegen $x$ konvergiert. (2)

**37.** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. (3)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Zahlenfolge und $a \in \mathbb{C}$. Konvergieren die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ beide gegen $a$, so konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a$.

(b) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegative reelle beschränkte Zahlenfolgen, dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \geq \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right).$$

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Zahlenfolge, dann gilt

$$-\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$