Analysis I für IGI
Blatt 12
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) Stammfkt. bestimmen

(i) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = -x^{-1} = \frac{-1}{x}$

(ii) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}}dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}$

(iii) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx = \int \sqrt{x}\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + 2 \cdot \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$

(iv) $\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^{3x}}dx \overset{P.I.}{=} \frac{1}{3}x\,e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{1}{3}x\,e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$

(v) $\int \underset{u'}{x^{\frac{1}{3}}}\,\underset{v}{\ln(x)}dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\ln(x) - \int \frac{3}{4}x^{4/3} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\ln|x| - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{4/3}$

(vi) $\int \ln(x)dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\ln(x)}dx \overset{P.I.}{=} x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln|x| - x$

(vii) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2 \cdot \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(\sqrt{x})dx = -2 \cdot \cos(\sqrt{x})$

(viii) $\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}dx \overset{\int \frac{f'}{f} = \log f}{=} \ln(|\ln(x)|)$

(ix) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^3\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (x^3+1)^{3/2}$

(x) $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int (x-1)^{-2}dx = -(x-1)^{-1} = \frac{-1}{x-1}$

(xi) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$

Berechne PZB von $\frac{1}{x^2-4}$: $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x+2}$

Mit Zuhaltemethode: $c_1 = \frac{1}{\cancel{(x-2)}(x+2)}\Big|_{x=2} = \frac{1}{4}$; $c_2 = \frac{1}{(x-2)\cancel{(x+2)}}\Big|_{x=-2} = -\frac{1}{4}$

Also ist $\frac{1}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}$ und damit folgt

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{4} \cdot \ln|x-2| - \frac{1}{4} \cdot \ln|x+2|$$

(xii) $$\int \frac{-x^2+x+4}{(1-x)^2(3x+1)}\,dx$$

Berechne PZB. Da $-x^2+x+4$ zwei reelle Nst. hat, folgt

$$\frac{-x^2+x+4}{(1-x)^2(3x+1)} = \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{(1-x)^2} + \frac{c_3}{3x+1}$$

Mit Zuhaltemethode folgt $c_2 = \frac{-x^2+x+4}{(3x+1)\cancel{(1-x)^2}}\Big|_{x=1} = 1$; $c_3 = \frac{-x^2+x+4}{\cancel{(3x+1)}(1-x)^2}\Big|_{x=-\frac{1}{3}} = 2$

Also:

$$\frac{-x^2+x+4}{(1-x)^2(3x+1)} = \frac{c_1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{3x+1}$$

Setze beliebigen Wert für x ein, um eine Gleichung für c_1 zu bekommen. zB $x=0$:

$$\frac{4}{1\cdot 1} = c_1 + 1 + 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{c_1 = 1}}$$

Also ist

$$\int \frac{-x^2+x+4}{(1-x)^2(3x+1)}\,dx = 1\cdot\int\frac{1}{1-x}dx + 1\cdot\int\frac{1}{(1-x)^2}dx + 2\int\frac{1}{3x+1}\,dx = \ln|1-x| + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{3}\ln|3x+1|$$

b) F diff'bar mit

$$F'(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)\cdot 2 - \frac{1}{6}\cdot 3\cdot\sin^2(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2$$

$$= \cos(2x)\cdot\underbrace{\left(1-\sin^2(2x)\right)}_{\cos^2(2x)} = \cos^3(2x)$$

Aufgabe 2

a) $g: [c,d] \to \mathbb{R}$ stet., $f: [a,b] \to [c,d]$ stet. diff'bar.

z.z. $\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = \int_a^b g(f(t))\,f'(t)\,dt$

Beweis: Da g stetig gibt es eine Stammfkt. $G(x) = \int g(x)dx$ mit $G'(x) = g(x)$ $\forall x \in [c,d]$

Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = G(f(b)) - G(f(a)) = (G \circ f)(b) - (G \circ f)(a)$$

Da $(G \circ f)$ stet. diff'bar folgt mit Kettenregel

$$(G \circ f)'(t) = (G(f(t)))' = G'(f(t)) \cdot f'(t)$$

und mit dem Hauptsatz

$$G(f(b)) - G(f(a)) = \int_a^b G'(f(t))f'(t)\,dt$$

$\not{o}$

b) $$\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x\,\ln(x)\,\ln(\ln(x))}\,dx \overset{a)}{=} \int_2^3 \frac{1}{e^t \cdot t\,\ln(t)} \cdot e^t\,dt = \int_2^3 \frac{1}{t\,\ln(t)}\,dt$$

$$= \int_2^3 \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\,dt = \left[\ln(\ln(t))\right]_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))$$

Aufgabe 3

a) Da $f(x) \geq g(x)$ in dem Intervall $[s_1, s_2]$, wobei s_1 und s_2 die beiden Schnittstellen bezeichnen, ist

$$A = \int_{s_1}^{s_2} f(x) - g(x)\, dx$$

Berechne Schnittpunkte:

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

da $\tan(\cdot)$ π-periodisch ist $s_1 = \pi/4$ und $s_2 = \frac{5\pi}{4}$

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} f(x) - g(x)\,dx = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(x) - \cos(x))\,dx = \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

b) (i) $$\int_{-1}^{1} x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \Big[e^{x^2}\Big]_{-1}^{1} = \underline{\underline{0}}$$

(ii) $$\int_{-2}^{0} \frac{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}{x - 1}\, dx$$

Zählergrad > Nennergrad
$\Rightarrow$ Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x-1) = 2x^2 - 5x + 2 \\
\underline{-(2x^3 - 2x^2)} \\
\quad -5x^2 + 7x \\
\quad \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
\qquad 2x - 2 \\
\qquad \underline{-(2x-2)} \\
\qquad \quad /
\end{array}$$

$\Rightarrow$ kein Rest $\Rightarrow$ keine PZB nötig :)

$$\Rightarrow \int_{-2}^{0} \frac{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}{x - 1}\, dx = \int_{-2}^{0} 2x^2 - 5x + 2\, dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{0}$$

$$= 0 - (-58/3) = \underline{\underline{58/3}}$$

(iii) $$\int_{0}^{1} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

Man rechnet nach: $\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
Also steht da $\int_0^1 f(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot [f^2(x)]_0^1$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right)^2\right]_0^1$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})}}$$