Mathematik für Informatik II - Tutorium - Woche 2

Aufgabe 6

Bilinearform
Skalarprodukt

Gegeben seien Abbildungen von der Form

$$B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto ?$$

Wir möchten diese darauf untersuchen, ob sie Bilinearformen und Skalarprodukte darstellen.

Bilinearform

Definition 8.1.4: Bilinearform

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, dann ist eine *Bilinearform* auf $V \times W$ eine Abbildung

$$B : V \times W \to \mathbb{K},\ (v, w) \mapsto B(v, w),$$

die für jedes feste $v \in V$ beziehungsweise jedes feste $w \in W$ eine Linearform auf W beziehungsweise V ist. Das heißt, für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und alle $w, w_1, w_2 \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(B1) $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$,

(B2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$,

(B3) $B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$,

(B4) $B(v, \lambda w) = \lambda B(v, w)$.

Bilinearform

Definition 8.1.4: Bilinearform

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, dann ist eine *Bilinearform* auf $V \times W$ eine Abbildung

$$B : V \times W \to \mathbb{K},\ (v, w) \mapsto B(v, w),$$

die für jedes feste $v \in V$ beziehungsweise jedes feste $w \in W$ eine Linearform auf W beziehungsweise V ist. Das heißt, für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und alle $w, w_1, w_2 \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(B1) $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w),$ $\quad F(x + y) = F(x) + F(y)$

(B2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w),$ $\quad F(\lambda x) = \lambda F(x)$

(B3) $B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2),$ $\quad F(x + y) = F(x) + F(y)$

(B4) $B(v, \lambda w) = \lambda B(v, w).$ $\quad F(\lambda x) = \lambda F(x)$

Es sei

$$B_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} j x_j y_j$$

gegeben.

Ist B_1 eine Bilinearform (linear in beiden Argumenten)?

Aufgabe 6

Bilinearform
Skalarprodukt

B_1 ✓ B_2 B_3

Es sei

$$B_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} j x_j y_j$$

gegeben.

Ist B_1 eine Bilinearform (linear in beiden Argumenten)?

Ja! Wir sehen z.B.

$$(x + z, \lambda y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} j(x_j + z_j)\lambda y_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} j x_j y_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} j z_j y_j.$$

(Beachte: Prinzipiell müssen (B1) - (B4) überprüft werden. Möchte man mit Symmetrie argumentieren, um die Betrachtung des zweiten Arguments auslassen zu können, muss dies entsprechend begründet werden!)

Es sei

$$B_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} j x_j y_j$$

gegeben.

Ist B_1 eine Skalarprodukt?

Skalarprodukt

Definition 8.1.11: Symmetrie, Definitheit, Skalarprodukt

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann heißt eine Bilinearform B auf $V \times V$

(i) *symmetrisch*,falls für alle $v, w \in V$ $B(v, w) = B(w, v)$ gilt.

(ii) *positiv definit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{0\}$ $(B(v, v) > 0)$.

(iii) *negativ definit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{0\}$ $(B(v, v) < 0)$.

(iv) *positiv* beziehungsweise *negativ semidefinit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{0\}$ $(B(v, v) \geq 0)$ beziehungsweise ≤ 0.

(v) *indefinit*, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und B weder positiv noch negativ semidefinit ist.

(vi) ein *Skalarprodukt*, falls B positiv definit und symmetrisch ist.

Skalarprodukt

Definition 8.1.11: Symmetrie, Definitheit, Skalarprodukt

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann heißt eine Bilinearform B auf $V \times V$

(i) *symmetrisch*,falls für alle $v, w \in V$ $B(v, w) = B(w, v)$ gilt.

(ii) *positiv definit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{0\}$ $(B(v, v) > 0)$.

(iii) *negativ definit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{0\}$ $(B(v, v) < 0)$.

(iv) *positiv* beziehungsweise *negativ semidefinit*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\forall v \in V \setminus \{0\}$ $(B(v, v) \geq 0)$ beziehungsweise ≤ 0.

(v) *indefinit*, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und B weder positiv noch negativ semidefinit ist.

(vi) ein *Skalarprodukt*, falls B positiv definit und symmetrisch ist.

Aufgabe 6

	B_1	B_2	B_3
Bilinearform	✓		
Skalarprodukt	✓		

Es sei

$$B_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} j x_j y_j$$

gegeben.

Ist B_1 eine Skalarprodukt?

Ja! B_1 ist sowohl positiv definit, da

$$(x, x) \mapsto \sum_{j=1}^{n} j x_j x_j = \sum_{j=1}^{n} j x_j^2 > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

wie auch offensichtlich symmetrisch.

Es sei

$$B_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y_j$$

gegeben.

Ist B_2 eine Bilinearform (in beiden Argumenten linear)?

Aufgabe 6

	B_1	B_2	B_3
Bilinearform	✓	✓	
Skalarprodukt	✓		

Es sei

$$B_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y_j$$

gegeben.

Ist B_2 eine Bilinearform (in beiden Argumenten linear)?

Ja! Die Argumentation verläuft identisch wie zuvor.

Aufgabe 6

	B_1	B_2	B_3
Bilinearform	✓	✓	
Skalarprodukt	✓		

Es sei

$$B_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y_j$$

gegeben.

Ist B_2 ein Skalarprodukt?

Aufgabe 6

	B_1	B_2	B_3
Bilinearform	✓	✓	
Skalarprodukt	✓	✗	

Es sei

$$B_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j y_j$$

gegeben.

Ist B_2 ein Skalarprodukt?

Nein! B_2 ist nicht positiv definit. So gilt z.B. für den ersten Einheitsvektor $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top\right)$

$$(e_1, e_1) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (-1)^j e_{1_j}^2 = -1 < 0$$

Aufgabe 6

	B_1	B_2	B_3
Bilinearform	✓	✓	
Skalarprodukt	✓	✗	

Es sei

$$B_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j y_j^2$$

gegeben.

Ist B_3 eine Bilinearform (linear in beiden Argumenten)?

Aufgabe 6

	B_1	B_2	B_3
Bilinearform	✓	✓	✗
Skalarprodukt	✓	✗	✗

Es sei

$$B_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j y_j^2$$

gegeben.

Ist B_3 eine Bilinearform (linear in beiden Argumenten)?

Nein! B_3 ist nicht linear in seinem zweiten Argument. So gilt z.B.

$$(x, \lambda y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j (\lambda y_j)^2 = \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} x_j y_j^2 \neq \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j y_j^2.$$

Insbesondere ist B_3 somit auch kein Skalarprodukt.

Aufgabe 7

Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \left(x - F(x) \in (\mathrm{Bild}(F))^{\perp} \right) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n (\langle x, F(y) \rangle = \langle F(x), y \rangle).$$

Gilt das auch, wenn man $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$ ersetzt?

Orthogonalität

Definition 8.1.7: Orthogonalität

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $B : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform, dann heißen $v \in V$ und $w \in W$ *orthogonal* bezüglich der Bilinearform B, falls $B(v, w) = 0$ gilt. Für $M \subseteq V$ ist

$$M^{\perp} := \{w \in W \,|\, \forall v \in M(B(v, w) = 0)\}$$

ein Unterraum von W. Er heißt der zu M *orthogonale Unterraum* bezüglich B. Analog erklärt man für $N \subseteq W$ den zu N orthogonalen Unterraum $N^{\perp} \subseteq V$ bezüglich B.

Orthogonalität

Definition 8.1.7: Orthogonalität

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $B : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform, dann heißen $v \in V$ und $w \in W$ *orthogonal* bezüglich der Bilinearform B, falls $B(v, w) = 0$ gilt. Für $M \subseteq V$ ist

$$M^{\perp} := \{w \in W \,|\, \forall v \in M(B(v, w) = 0)\}$$

ein Unterraum von W. Er heißt der zu M *orthogonale Unterraum* bezüglich B. Analog erklärt man für $N \subseteq W$ den zu N orthogonalen Unterraum $N^{\perp} \subseteq V$ bezüglich B.

Aufgabe 7 $\forall x \in \mathbb{R}^n \left(x - F(x) \in (\mathrm{Bild}(F))^{\perp}\right) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n(\langle x, F(y)\rangle = \langle F(x), y\rangle)$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle x, F(y)\rangle = \langle F(x), y\rangle \quad &\iff \quad \langle x, F(y)\rangle - \langle F(x), y\rangle = 0 \\
&\iff \quad \langle x, F(y)\rangle \underbrace{-\langle F(x), F(y)\rangle + \langle F(x), F(y)\rangle}_{\text{nahrhafte Null}} - \langle F(x), y\rangle = 0 \\
&\iff \quad \langle x - F(x), F(y)\rangle - \langle F(x), y - F(y)\rangle = 0
\end{aligned}$$

Nach Annahme gilt nun $x - F(x) \in (\mathrm{Bild}(F))^{\perp}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, womit insbesondere $\langle x - F(x), F(y)\rangle = \langle F(y), x - F(x)\rangle = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wir schließen die Behauptung. □

Aufgabe 7 $\forall x \in \mathbb{R}^n \left(x - F(x) \in (\mathrm{Bild}(F))^\perp\right) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n(\langle x, F(y)\rangle = \langle F(x), y\rangle)$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle x, F(y)\rangle = \langle F(x), y\rangle \quad &\iff \quad \langle x, F(y)\rangle - \langle F(x), y\rangle = 0 \\
&\iff \quad \langle x, F(y)\rangle \underbrace{-\langle F(x), F(y)\rangle + \langle F(x), F(y)\rangle}_{\text{nahrhafte Null}} - \langle F(x), y\rangle = 0 \\
&\iff \quad \langle x - F(x), F(y)\rangle - \langle F(x), y - F(y)\rangle = 0
\end{aligned}$$

Nach Annahme gilt nun $x - F(x) \in (\mathrm{Bild}(F))^\perp$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, womit insbesondere $\langle x - F(x), F(y)\rangle = \langle F(y), x - F(x)\rangle = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wir schließen die Behauptung. $\square$

Gilt $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesch. Dies beeinflusst jedoch nicht unseren Beweis, die Beh. gilt auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$! (Beachte: $\langle F(x), y - F(y)\rangle = \overline{\langle y - F(y), F(x)\rangle} = 0$, da $\bar{0} = 0$)

Highlights

Definition 8.1.1: Linearform

Eine *Linearform* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{K}$. Die Menge aller Linearformen auf V bilden einen Vektorraum $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$, welcher der zu V *duale Vektorraum* heißt.

Elemente des dualen Vektorraums sind Pfeile!

Highlights

Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ nenne wir *hermitesch*, wenn $A^\top = \overline{A}$ gilt. Welche Besonderheit gilt in diesem Fall für die Diagonaleinträge a_{ii}?

Highlights

Definition 8.2.1: Kanonische Norm und Abstand im $\mathbb{R}^n$

Es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, dann definieren wir die *Norm* (Länge, Betrag, Euklidische Norm) von x als

$$\|x\| := \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Der *Abstand* von zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist dann nach dem Satz des Pythagoras

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$