Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, den 30.04.
um 23:59 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 1

1. Verifiziere folgende Identitäten mittels vollständiger Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$. (1)

(b) $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ für $x \neq 1$. (1)

(c) $\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ für alle $n \geq 2$. (1)

2. Man beweise die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \geq 4$ gilt $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$. (1)

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - 6n^2 + 14n$ durch 3 teilbar. (1)

(c) Für die Zahlenfolge $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$ gilt (1)

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis zu (c): Erste und zweite binomische Formel.

3. Es seien A und B Teilmengen einer Menge X. Man bestimme die folgenden Mengen:

(a) $(A^c \cup B) \cap (A \cap B^c)$ (0,5)

(b) $(A^c \cup B) \cup (A \cap B^c)$ (0,5)

(c) $(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B)$ (0,5)

(d) $(A^c \cup B^c) \cap (A \cap B)$ (0,5)

4. Es seien U und V zwei Mengen und es seien $X, A \subset U$ und $Y, B \subset V$. Man zeige folgenden Aussagen:

(a) $(X \times Y) \cap (A \times B) = (X \cap A) \times (Y \cap B)$ (1)

(b) $(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ (1)