ulm university universität uulm

Sommersemester 2020

Institut für Stochastik

Dr. Larisa Yaroslavtseva
Freimut von Loeper

Angewandte Stochastik 1

Musterlösung zum Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (2+3+2+2=9 Punkte)
Ein Glücksrad mit drei gleichgroßen Feldern (nummeriert mit 1, 2 und 3) wird dreimal hintereinander gedreht. Es sei X die Zufallsvariable, welche die Multiplikation der drei Feldnummern beschreibt.

(a) Modellieren Sie das Zufallsexperiment durch Angabe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, Σ, P) und definieren Sie X.

(b) Berechnen Sie $P(\{X = x\})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass X diskret ist und bestimmen Sie den Träger D_X von X.

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\{X \le 10\}) \quad \text{und} \quad P(\{X \text{ ist eine gerade Zahl}\}).$$

Lösung:

a) Wir verwenden für die Modellierung den Laplace-W-Raum mit $\Omega = \{1,2,3\}^3$ und definieren die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$X(\omega) = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3$$

für $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(\{X = 1\}) &= P(\{(1,1,1)\}) = \frac{1}{27},\\
P(\{X = 2\}) &= P(\{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9},\\
P(\{X = 3\}) &= P(\{(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3)\}) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9},\\
P(\{X = 4\}) &= P(\{(2,2,1),(1,2,2),(2,1,2)\}) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9},\\
P(\{X = 6\}) &= P(\{(2,3,1),(2,1,3),(1,2,3),(3,2,1),(3,1,2),(1,3,2)\}) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9},\\
P(\{X = 8\}) &= P(\{(2,2,2)\}) = \frac{1}{27},\\
P(\{X = 9\}) &= P(\{(3,3,1),(1,3,3),(3,1,3)\}) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9},\\
P(\{X = 12\}) &= P(\{(3,2,2),(2,3,2),(2,2,3)\}) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9},
\end{aligned}$$

$$P(\{X = 18\}) = P(\{(3,3,2),(3,2,3),(2,3,3)\}) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$
$$P(\{X = 27\}) = P(\{(3,3,3)\}) = \frac{1}{27}.$$

Sonst gilt $P(\{X = x\}) = 0$.

c) Wir setzen $D = \{1,2,3,4,6,8,9,12,18,27\}$. Dann ist D endlich und es gilt $P(\{X \in D\}) = 1$ gemäß b). Ferner folgt aus b) dass $D_X = D$ und X diskret ist.

d) Aus b) folgt

$$P(\{X \leq 10\}) = P(\{X \in \{1,2,3,4,6,8,9\}\}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{20}{27}.$$

und

$$P(\{X \text{ ist gerade}\}) = P(\{X \in \{2,4,6,8,12,18\}\}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{19}{27}.$$

Aufgabe 2 (2+3+1=6 Punkte)

Sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $X \sim U(\{-1, 0, 1, 2\})$. Ferner sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit

$$Y(\omega) = X^2(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

(a) Zeigen Sie, dass Y diskret ist und bestimmen Sie den Träger D_Y von Y.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_Y von Y.

(c) Skizzieren Sie F_Y.

Lösung:

a) Es gilt $Y(\omega) \in \{0, 1, 4\}$ für alle $\omega \in \Omega$. Also gilt $P(\{Y \in \{0, 1, 4\}\}) = 1$ und somit ist Y diskret. Dann folgt aus $P(\{X = x\}) = \frac{1}{4}$ für alle $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$

$$P(\{Y = 0\}) = P(\{X^2 = 0\}) = P(\{X = 0\}) = \frac{1}{4},$$
$$P(\{Y = 1\}) = P(\{X^2 = 1\}) = P(\{X = -1\}) + P(\{X = 1\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

und

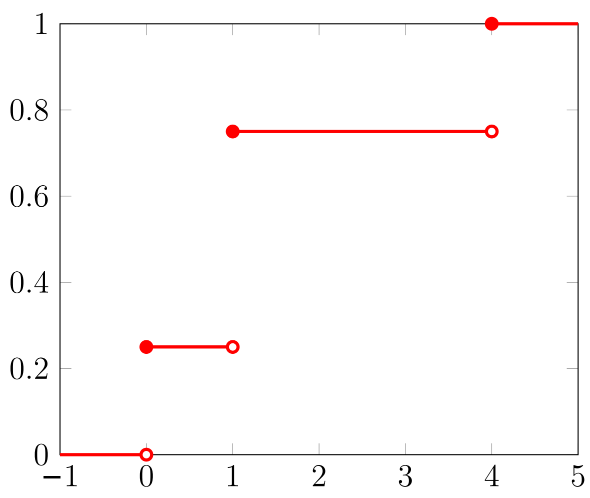
$$P(\{Y = 4\}) = P(\{X^2 = 4\}) = P(\{X = 2\}) + P(\{X = -2\}) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}.$$

Folglich ist $D_Y = \{0, 1, 4\}$ der Träger von Y.

b) Aus Teilaufgabe a) erhalten wir

$$F_Y(y) = P(\{Y \le y\}) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{4}, & y \in [0, 1) \\ \frac{3}{4}, & y \in [1, 4) \\ 1, & y \ge 4. \end{cases}$$

c) Skizze von F_Y für x-Werte zwischen -1 und 5:



Aufgabe 3 (4+4=8 Punkte)
Betrachten Sie Zufallsvariablen X und Y mit $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ und $Y \sim G(p)$ mit $p \in (0,1)$. Beweisen Sie:

(a) $P(\{X > x + h\} | \{X > h\}) = P(\{X > x\})$ für alle $x, h \geq 0$.

(b) $P(\{Y > k + n\} | \{Y > n\}) = P(\{Y > k\})$ für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Diese Eigenschaft der Exponentialverteilung und der geometrischen Verteilung nennt man Gedächtnislosigkeit.

Lösung:

a) Mit $P(\{X > x\}) = 1 - P(\{X \leq x\}) = 1 - F_X(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$ folgt

$$\begin{aligned} P(\{X > x + h\} | \{X > h\}) &= \frac{P(\{X > x + h\} \cap \{X > h\})}{P(\{X > h\})} = \frac{P(\{X > x + h\})}{P(\{X > h\})} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+h)}}{e^{-\lambda h}} = e^{-\lambda x} = P(\{X > x\}). \end{aligned}$$

b) Mit $P(\{Y > j\} = \sum_{i=j}^{\infty} p(1-p)^i$ folgt

$$\begin{aligned} P(\{Y > k + n\} | \{Y > n\}) &= \frac{P(\{Y > k + n\} \cap \{Y > n\})}{P(\{Y > n\})} = \frac{P(\{Y > k + n\})}{P(\{Y > n\})} \\ &= \frac{\sum_{i=k+n}^{\infty} p(1-p)^i}{\sum_{i=n}^{\infty} p(1-p)^i} = \frac{(1-p)^n \sum_{i=k}^{\infty} p(1-p)^i}{p(1-p)^n \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i} \\ &= \frac{\sum_{i=k}^{\infty} p(1-p)^i}{p \frac{1}{1-(1-p)}} = \sum_{i=k}^{\infty} p(1-p)^i = P(\{Y > k\}). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)
Die gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

$Y\backslash X$	-3	2	6
0	$0,07$	$0,2$	$0,11$
2	$0,1$	$0,05$	$0,1$
5	$0,03$	$0,04$	$0,3$

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(\{X+Y=2\})$, $P(\{X=2\}|\{Y=5\})$ und $P(\{X \le Y\})$.

Lösung:

a) Durch Addieren der Wahrscheinlichkeiten in den Zeilen und Spalten erhalten wir

$Y\backslash X$	-3	2	6	$P_Y(\{y\})$
0	$0,07$	$0,2$	$0,11$	$0,38$
2	$0,1$	$0,05$	$0,1$	$0,25$
5	$0,03$	$0,04$	$0,3$	$0,37$
$P_X(\{x\})$	$0,2$	$0,29$	$0,51$	

b) Mit der Tabelle und Teilaufgabe a) folgt

$$\begin{aligned}
P(\{X+Y=2\}) =& P(\{Y=0, X=2\}) + P(\{Y=5, X=-3\}) = 0,2 + 0,03 = 0,23 \\
P(\{X=2\}|\{Y=5\}) =& \frac{P(\{X=2, Y=5\})}{P(\{Y=5\})} = \frac{0,04}{0,37} \approx 0,11 \\
P(\{X \le Y\}) =& P(\{X=-3, Y=0\}) + P(\{X=-3, Y=2\}) \\
&+ P(\{X=-3, Y=5\}) + P(\{X=2, Y=2\}) \\
&+ P(\{X=2, Y=5\}) = 0,07 + 0,1 + 0,03 + 0,05 + 0,04 = 0,29.
\end{aligned}$$