ulm university universität uulm

2. Klausur Analysis 1 für Ing & Inf

27.09.2019

Es gibt insgesamt 86 Punkte. Hinreichend zum Bestehen sind 39 Punkte.

1. (a) Definieren Sie den Begriff Supremum. [1 P]

   (b) Bestimmen Sie Infimum, Supremum und, sofern existent Minimum und Maximum der Menge [8 P]

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{(-1)^n + 1}{2n} + \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Leiten Sie aus der Potenzrechenregel $q^x \cdot q^y = q^{x+y}$ und den Eigenschaften der Umkehrfunktion für $x, y > 0$ die Rechenregel $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ her. [4 P]
   Hinweis: Setzen Sie etwa $x = e^u$.

3. (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}(x-4)^{4k+2}$ [5 P]

   (b) und geben Sie das daraus folgende offene Konvergenzintervall der Reihe an. [1 P]

4. Wir betrachten die hyperbolischen Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

   (a) Zeigen Sie $\forall x, y \in \mathbb{R} : \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$. [3 P]

   (b) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$ gilt. [4 P]
   Neben Aufgabe 4a dürfen Sie dafür auch die folgende Aussage verwenden:

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

5. (a) Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ gilt [8 P]

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

   (b) Leiten Sie $\arctan' x = \dfrac{1}{1 + x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ her. [5 P]
   Hinweis: Sie müssen für diese und die folgenden Teilaufgaben nicht Aufgabe 5a gelöst haben.

   (c) Zeigen Sie, dass arctan streng monoton wachsend ist. [1 P]

   (d) Zeigen Sie mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ [4 P]

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|.$$

Bitte wenden!

6. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: [15 P]

$$y' = \frac{y^2 - 6y + 5}{\sqrt{1-x^2}}, \; y(0) = 2.$$

Hinweis: Schränken Sie ggf. die möglichen Werte von y ein, um die resultierende Gleichung nach der Integration nach y auflösen zu können.

7. Zeigen Sie, dass für $a \neq 0$ und $x \neq |a|$ [8 P]

$$\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a+x}{a-x} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a}$$

gilt.

8. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert. [7 P]

9. Im Folgenden sind jeweils vier Aussagen zu einer Grundvoraussetzung angegeben. Kreuzen Sie auf der Rückseite des Klausurdeckblattes bei jeder Aussage an, ob sie im Allgemeinen wahr oder falsch ist. [12 P]
Pro richtigem Kreuz gibt es 1 Punkt, pro falschem -1 Punkt. Minimal sind 0 Punkte pro Teilaufgabe möglich.

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
   i. f' ist stetig.
   ii. f ist beschränkt.
   iii. Wenn f monoton ist, wird jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ angenommen.
   iv. Es gibt ein Teilintervall von $[a, b]$ auf dem f streng monoton ist.

(b) Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere Menge.
   i. M besitzt ein Supremum und es gilt $\sup M \in \mathbb{R}$.
   ii. Sind $a, b \in M$, dann ist auch der Mittelpunkt $\frac{a+b}{2} \in M$.
   iii. Eine auf M stetige Funktion nimmt ihr Minimum in M an.
   iv. Es gibt eine Folge in M, die gegen $\sup M$ (ggf. uneigentlich) konvergiert.

(c) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.
   i. Wenn $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so gibt es eine Menge A mit $a_k \in A$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k\to\infty a_k} = \sup A$.
   ii. Es gibt eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k + b_k) = \pi$.
   iii. Es gibt eine monotone und konvergente Teilfolge $(a_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit
   $$\lim_{\ell\to\infty} a_{k_\ell} = \limsup_{k\to\infty} a_k.$$
   iv. Gilt $0 \leq a_k - a_i \leq \frac{1}{k}$ für jedes $i \geq k$ und alle $k \in \mathbb{N}$, dann ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge.

Viel Erfolg!