Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 02

Abgabedatum: 02.05.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

1. Wenn der Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ als Linearkombination aus den Spaltenvektoren von $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ dargestellt werden kann, ist dann $Ax = b$ für $x \in \mathbb{R}^n$ lösbar?
2. Sei $x, y \in \mathbb{R}^n,\ n > 1$, gilt dann $(\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0)$?
3. Sei $v \in \mathbb{R}^2$ und sei $w \in \mathbb{R}^2$ ein zu v orthogonaler Vektor mit $||w|| = 1$. Ist w eindeutig?
4. Kann aus $x, y \in \mathbb{R}^2$ (linear unabhängig) immer mehr als eine Orthonormalbasis mithilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens berechnet werden?

2. (A) Lösbarkeit und Lösungen

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & +\ x_3 & -2x_4 & = \ \ 3 \\ 2x_1 & +4x_2 & +\ x_3 & +\ x_4 & = 10 \\ 3x_1 & +6x_2 & +\ x_3 & +2x_4 & = 15 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -\ x_4 & = -3 \end{array}\right\}$$

1. Bestimmen Sie mit Satz 7.4.2 und Satz 7.4.4, ob das System lösbar bzw. universell lösbar ist. Ist das System eindeutig lösbar? (2)
2. Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraumes $\mathcal{L}_0$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems. (2)
3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems. (2)

3. (A) Darstellungen von Bilinearformen

1. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^\top A y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

eine Bilinearform ist. (2)

2. Es sei umgekehrt $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $e_1, \ldots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $s(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s(e_i, e_j) x_i y_j$. (2)

3. Schließen Sie daraus nun die Existenz einer Matrix $M \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $s(x, y) = x^\top M y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. (2)

4. (A) Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren

Zeigen Sie die Behauptungen zum Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Für linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ liefert das in Beispiel 8.2.9 (i) dargestellte Verfahren Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ mit

1. $||w_i|| = 1$, $i = 1, \ldots, m$, bzgl. der induzierten Norm $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, (1)
2. $\langle w_i, w_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ (3)

Wenden Sie das Verfahren an, um die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

zu orthonormieren . (2)

5. (A) Spur einer Matrix

Die Summe $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ der Diagonalelemente der Matrix $(a_{ij}) = A$ heißt die Spur von (a_{ij}), in Zeichen $\mathrm{Spur} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Spur eine Linearform auf $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist. (3)

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle A, B\rangle :\, = \mathrm{Spur}(A^\top B)$$

ein Skalarprodukt auf $M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert ist. (3)

6. (T),(NA) Bilinearformen und Skalarprodukte Gegeben seien die Abbildungen

$$\begin{aligned} B_1 &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto \sum_{j=1}^n j x_j y_j, \\ B_2 &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto \sum_{j=1}^n (-1)^j x_j y_j, \\ B_3 &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto \sum_{j=1}^n x_j y_j^2. \end{aligned}$$

Prüfen Sie jeweils, ob B_1, B_2, B_3 eine Bilinearform oder sogar ein Skalarprodukt ist.

7. (T), (NA) Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \left(x - F(x) \in (\mathrm{Bild}(F))^\perp\right) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n \left(\langle x, F(y)\rangle = \langle F(x), y\rangle\right).$$

Gilt das auch, wenn man $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$ ersetzt?

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Üungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.