Universität Ulm

Abgabe: 10:50 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 20

Zwischenklausur Analysis 1:

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + |x - 1|$.

(a) Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist. (2)

(b) Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist. (2)

(c) Schränken Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktion f so ein, dass Sie bijektiv auf ihr Bild abbildet. Beweisen Sie Ihre Aussage. (4)

2. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: (4)

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$$

3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt keine injektive Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. (2)

(b) Es seien I, J zwei reelle Intervalle. Wir definieren $I \cdot J := \{a \cdot b \,|\, a \in I \wedge b \in J\}$. Dann gilt $\sup I \cdot \sup J = \sup(I \cdot J)$. (2)

(c) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gibt es irrationale Zahlen $\xi, \eta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|z - (\xi + i\eta)| < \varepsilon$. (2)

(d) Für $a, b \in \mathbb{C}$ sei die Relation $\sim$ definiert durch (2)

$$a \sim b :\Leftrightarrow |a - b| \leq 1.$$

Dann ist durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$ definiert.