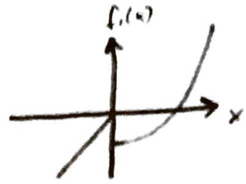
Analysis I für IGI
Blatt 6
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) Wo stetig?



$$\boxed{f_1(x) = \begin{cases} x, & x<0 \\ x^2-1, & x\geq 0 \end{cases}}$$

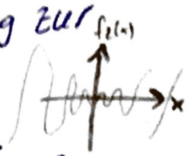
Für $x\neq 0$ ist f_1 stetig als Polynom. Wegen $\lim\limits_{x\to 0^-} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 \neq -1 = f_1(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x)$

ist f_1 in $x=0$ nicht stetig.

$\Rightarrow f_1$ stetig $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\boxed{f_2(x) = \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}}$$

Für $x\neq 0$ ist f_2 stetig als Komposition / Produkt stetiger Funktion. Wir zeigen: $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0 = f_2(0)$, analog zur Vorlesung.

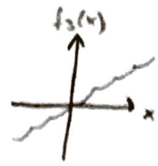


Sei $\varepsilon>0 \Rightarrow |f_2(x)-0| = |x\cdot\cos(\frac{1}{x})| = |x|\cdot|\cos(\frac{1}{x})| \leq |x| < \varepsilon$ falls $|x|<\delta := \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0 = f_2(0) \Rightarrow f_2$ stetig auf $\mathbb{R}$

$$\boxed{f_3(x) = \lfloor x\rfloor + (x-\lfloor x\rfloor)^2}$$

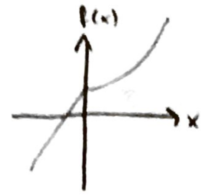
Sei $z\in\mathbb{Z}$ und $x\in(z,z+1)$. Dann ist $\lfloor x\rfloor = z$ und $f_3(x) = z+(x-z)^2$, was als Polynom stetig ist.



Da z beliebig $\Rightarrow f_3$ stetig auf $\bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}}(z,z+1) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Zeigen noch, dass f_3 in jedem $z\in\mathbb{Z}$ stetig ist. Dazu:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to z^+} f_3(x) &= \lim_{x\to z+} \left(z+(x-z)^2\right) = z \\ \lim_{x\to z^-} f_3(x) &= \lim_{x\to z^-} \left(z-1+(x-(z-1))^2\right) = z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{auch stetig } \forall x\in\mathbb{Z} \Rightarrow \text{stetig } \forall x\in\mathbb{R}$$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} ax+b, & x\leq 0 \\ e^{bx}, & x>0 \end{cases}$



f ist $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig als Polynom / Exponentialfunktion. Damit f in 0 stetig ist, muss $f(0) = b = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{bx} = 1$ gelten $\Rightarrow$ $\underline{b=1}$

Damit $f(-7) = -13$ gilt, muss $a\cdot(-7)+b = -13 \overset{b=1}{\Leftrightarrow} a\cdot(-7) = -14 \Leftrightarrow \underline{a=2}$

Also: $a=2, b=1$ leisten das Gewünschte.

c) $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Z: $\nexists \lim_{x \to 0} \chi(x)$. Die Folge $x_n := \frac{1}{n}$ ist $\in \mathbb{Q}$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \chi(x_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$

Die Folge $y_n := \frac{\sqrt{2}}{n}$ ist $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \chi(y_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$

$\Rightarrow$ GW $\lim_{x \to 0} \chi(x)$ existiert nicht.

Aufgabe 2

$f_1(x) = \frac{x+2}{x-1}$; $f_2(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$; $f_3(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{x-1}$; $f_4(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3}$

Bemerke: $(x^2+x-2) = (x+2)(x-1)$

$\lim_{x \to 1^+} f_1(x) = \infty$, $\lim_{x \to 1^-} f_1(x) = -\infty$ (Pol mit VZ-Wechsel)

$\lim_{x \to 1^+} f_2(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = 3$, $\lim_{x \to 1^-} f_2(x) = 3 \Rightarrow \tilde{f}_2(x) = \begin{cases} f_2(x), & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ stetig

$\lim_{x \to 1^+} f_3(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x-1)(x+2)}{(x-1)} = 0$, $\lim_{x \to 1^-} f_3(x) = 0 \Rightarrow \tilde{f}_3(x) = \begin{cases} f_3(x), & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ stetig

$\lim_{x \to 1^+} f_4(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3} = \infty = \lim_{x \to 1^-} f_4(x)$ (Pol ohne VZ Wechsel)

Aufgabe 3

a) $f:[a,b]\to[a,b]$ stetig. z.z.: $\exists x^*: f(x^*)=x^*$

Ist $f(a)=a$ oder $f(b)=b \Rightarrow$ fertig. Sei also $f(a)>a$ und $f(b)<b$. Betrachte $g:[a,b]\to\mathbb{R}$

wobei $g(x)=f(x)-x \Rightarrow g(a)=f(a)-a>0$ und $g(b)=f(b)-b<0$

Da g stetig $\overset{ZWS}{\Rightarrow} \exists x^*\in[a,b]: g(x^*)=0 \Leftrightarrow f(x^*)-x^*=0 \Leftrightarrow f(x^*)=x^*$ $\boxtimes$

b) $\tan(x)=1-\sin(x) \Leftrightarrow \underbrace{\tan(x)-1+\sin(x)}_{f(x)}=0$

(i) $f(x)$ ist stetig auf $[0,\frac{\pi}{4}]$ und $f(0)=-1<0$ und $f(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$

$\overset{ZWS}{\Rightarrow} \exists x^*\in[0,\frac{\pi}{4}]$ mit $f(x^*)=0$. Dieses löst dann die Gleichung.

(ii) Start: $a_0=0,\ b_0=\pi/4$

Iteration 1: $\frac{a+b}{2}=\pi/8$ und $f(\pi/8)\approx-0.2<0$

$\Rightarrow a_1=\pi/8,\ b_1=\pi/4$

Iteration 2: $\frac{a_1+b_1}{2}=3/16\,\pi$ und $f(3/16\,\pi)\approx 0.22>0$

$\Rightarrow a_2=\pi/8,\ b_2=3/16\,\pi$

Iteration 3: $\frac{a_2+b_2}{2}=5/32\,\pi$ und $f(5/32\,\pi)\approx 5.9\cdot10^{-3}>0$

$\Rightarrow a_3=\pi/8,\ b_3=5/32\,\pi$

$\Rightarrow$ Lösung liegt im Intervall $[\pi/8, 5/32\,\pi]$

(iii) Länge des Intervalls nach n Iterationen: $(\frac{1}{2})^n\cdot\frac{\pi}{4}$

löse $(\frac{1}{2})^n\,\pi/4\le\frac{1}{1000} \Leftrightarrow n\ge\frac{\ln(\frac{4}{1000\pi})}{\ln(\frac{1}{2})}\approx 9.6$

$\Rightarrow n=10$ Iterationen.

Aufgabe 4

a) z.z. $\max(A)$ eindeutig, falls existent.

Beweis Sei A s.d. $\max(A)$ existiert und sei $a_1 := \max(A)$; $a_2 := \max(A)$, $a_1 \neq a_2$

Insbesondere sind $a_1, a_2 \in A$

$\overset{a_1 = \max(A)}{\Rightarrow} a_2 \leq a_1$ und $\overset{a_2 = \max(A)}{\Rightarrow} a_1 \leq a_2 \overset{\text{Trichot.}}{\Rightarrow} a_1 = a_2$ ↯

b) min, max, inf, sup.

(i) $A = (0,1) \to \inf(A) = 0$, $\sup(A) = 1$, $\nexists \min(A)$, $\nexists \max(A)$

(ii) $A = \{\frac{1}{x} \mid x \in [0.5, 1]\} \to \inf(A) = \min(A) = \frac{1}{1} = 1$; $\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{0.5} = 2$

(iii) $A = \{\frac{1}{n+m} + \frac{1}{n} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \to \inf(A) = 0$, $\nexists \min(A)$; $\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1} = 1.5$

Aufgabe 5

a) f stetig, Intervall nicht beschränkt

$f: (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (weder Min, noch Max)

oder $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (Min, aber kein Max)

b) f stetig, Intervall nicht abgeschlossen

$f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (weder Min noch Max)

c) f unstetig, Intervall beschränkt und abgeschlossen

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ (Min, aber kein Max)

(es funktionieren natürlich auch andere Beispiele)