Lösungsvorschlag Blatt 7

1) a) $f(x) = (3x+1)^4$ $\quad f'(x) = 4(3x+1)^3 \cdot 3 = 12(3x+1)^3$

$D = D' = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x \ln(x^2+1) - x$

$f'(x) = \ln(x^2+1) + x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x - 1 = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1} - 1$

$D = D' = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sin(x)^{\cos(x)} = e^{\cos(x) \ln(\sin(x))}$

$f'(x) = e^{\cos(x) \cdot \ln(\sin(x))} \cdot (\cos(x) \ln(\sin(x)))'$

$= \sin(x)^{\cos(x)} \left(-\sin(x) \ln(\sin(x)) + \cos(x) \frac{1}{\sin(x)} \cos(x)\right)$

$= \sin(x)^{\cos(x)} \left(-\sin x \ln(\sin(x)) + \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)}\right)$

$D = D' = \{x \in \mathbb{R} : 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}\}$

d) $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$

$f'(x) = e^{x \ln(x)} (x \ln x)' = x^x (\ln x + x \frac{1}{x}) = x^x (\ln x + 1)$

$D = D' = (0, \infty)$

e) $f(x) = x^2 \cdot e^{\sqrt{x}}$

$f'(x) = 2x e^{\sqrt{x}} + x^2 e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} (2x + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}})$

$D = D' = [0, \infty)$

f) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$ $\quad f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}+1) 2x - x^2 \frac{1}{2} (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} 2x}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2}$

$D = D' = \mathbb{R}$

g) $f(x) = \frac{3^x}{3^{x-1}} = 3$ $\quad \Rightarrow f'(x) = 0$ $\quad D = D' = \mathbb{R}$

2) $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ $\quad$ für $x \neq 0$ ist h stetig als Komp. stetiger und diff.barer Fkt.

Wegen $\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \underbrace{\sin(\tfrac{1}{x})}_{\text{beschränkt}} = 0 = h(0)$ ist h auch in 0 stetig

$h'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h(0+h) - h(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h \to 0} h \underbrace{\sin(\tfrac{1}{h})}_{\text{beschränkt}} = 0$

$\Rightarrow h$ ist stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}$

mit $h'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Wegen $h'\left(\frac{1}{\pi}\right) = 2\sin(\pi) - \cos(\pi) = 1$ und $h\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$ ist die Gleichung der Tangente in $\frac{1}{\pi}$ gegeben durch $J(x) = h'\left(\frac{1}{\pi}\right)\left(x - \frac{1}{\pi}\right) + h\left(\frac{1}{\pi}\right) = x - \frac{1}{\pi}$

Es gilt $\lim_{x\to 0} h'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \neq 0 = h'(0)$ ~~h' ist unstetig bei $x=0$~~

$\Rightarrow h'$ ~~st st~~ ist unstetig bei $x = 0$

3) $f(x) = \begin{cases} ax^3 + 3x & x \leq 2 \\ x^2 - bx & x > 2 \end{cases}$ für $x \neq 2$ ist f stetig und diff.bar als Polynom

Damit f in 0 diffbar ist, muss f dort stetig sein

$\Rightarrow f(2) = 8a + 6 \stackrel{!}{=} \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 - 2b$, also $8a + b = 6 - 2b$ (I)

Außerdem müssen links- und rechtsseitige Ableitung übereinstimmen,

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} 3ax^2 + 3 = 12a + 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x - b) = 4 - b \end{array}\right\} 12a + 3 = 4 - b \quad \text{II}$$

II $\Rightarrow b = 1 - 12a \stackrel{\text{in I}}{\Rightarrow} 16a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = -2$