universität
uulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit Raphael Wagner SoSe 2021
20 Punkte

Übungen zu: Analysis 1 für Informatik Blatt 02

Hinweise zur Abgabe

Abgabetermin: 10.05.21, 14:00 Uhr
Abgabeformat: Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!
Sonstiges: Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an.

Aufgaben

1. i) Zeigen Sie die Formeln (4)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

unter Verwendung von bekannten Sätzen/Formeln aus der Vorlesung (ohne vollständige Induktion).

ii) Sei nun A eine beliebige Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Begründen Sie kurz (kombinatorisch), dass für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ es $\binom{n}{k}$ verschiedene Teilmengen von A mit k Elementen gibt. (2)

iii) Folgern Sie schließlich, dass es insgesamt 2^n verschiedene Teilmengen von A gibt. (4)

2. Nachdem ein fleißiger Programmierer seine Tickets für den Tag abgearbeitet hat, wird er von seinem Chef beauftragt, die Bugs in seinem Code zu fixen. In jedem Durchgang geht er alle seine Bugs durch und behebt diese. Leider führen seine Änderungen stets dazu, dass ein Zehntel der Anzahl der nach dem letzten Durchgang vorhanden Bugs an neuen Bugs hinzukommen.
Sei nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, sodass c_n die Anzahl an Bugs nach n Durchgängen beschreibt. Mit $B \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Anzahl an ursprünglichen vorhanden Bugs.

i) Beschreiben Sie $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als rekursive Folge. Wie nennen wir eine solche Folge? (4)

ii) Geben Sie eine Mindestanzahl an Durchgängen an, sodass höchstens noch ein Hundertstel der ursprünglichen Anzahl von Bugs B im Code sind. (4)

iii) Wie würden Sie die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definieren, wenn zusätzlich in jedem Durchgang 10 neue Bugs von anderen Entwicklern dazukämen. (2)

3. Wir betrachten die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (10)

$$a_n = \frac{2^n}{n}, b_n = \frac{n!}{n^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nicht aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nach oben beschränkt ist.

4. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit (10)

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert. Lösen Sie die Aufgabe mit der Definition, d.h. bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gilt.