Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Blatt 4

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^7+4n^2-1}{e^{0.1n}} = 0$ (exp wächst schneller)

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^3}{2n^4+\pi n-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-3n^2+3n-1}{2n^4+\pi n-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{2+\frac{\pi}{n^3}-\frac{2}{n^4}} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{2}}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{-\frac{1}{3}-1} = \dfrac{-1}{-4/3} = 3/4$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \cdot \frac{1}{n}}{(\sqrt{n^2+n}+n)\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \dfrac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n}{e^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{e} = \dfrac{1}{e}$

g) Bemerke, dass $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+1-1}{k+1} = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)} = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$

Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^k} \overset{\text{Bern}}{\geq} \lim\limits_{n\to\infty} 1+n^{k-1} = \infty$, für $k>1$. Für $k=1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

i) Wir benutzen das Einschlusskriterium

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = n \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}}$$

$\leq n \cdot \dfrac{1}{n^2+1}$ ("n mal größter Wert")

$\geq n \cdot \dfrac{1}{n^2+n}$ ("n mal kleinster Wert")

Also $\underbrace{\dfrac{n^2}{n^2+n}}_{\to 1} \leq a_n \leq \underbrace{\dfrac{n^2}{n^2+1}}_{\to 1}$, weswegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Aufgabe 2 (a, weiter unten)

b) $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$, $a_0 = 0$

Zeigen $0 \le a_n \le 2$ (*)

Induktion nach n

I.A. $n=1$: $0 \le a_1 = \sqrt{2} \le 2$ ✓

I.S. Gelte (*) für ein $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \overset{\text{I.V.}}{\le} \sqrt{2+2} = 2$

und $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \ge \sqrt{2} \ge 0$ ☒

Zeigen $a_n \ge a_{n-1} \; \forall n \in \mathbb{N}$ (**)

Induktion nach n

I.A. $n=1$ $a_1 = \sqrt{2} \ge 0 = a_0$ ✓

I.S. Gelte (**) für ein $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \ge \sqrt{2+a_{n-1}} = a_n$ ☒

Wegen (*) und (**) ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt, damit also konvergent.

Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$

Wegen $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ folgt $a = \sqrt{2+a} \Leftrightarrow a^2 = 2+a \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$\Rightarrow a_1 = 2$, $a_2 = -1$. $a_2 = -1$ scheidet wegen $-1 \notin [0,2]$ aus

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2$

a) $a_1 = \sqrt{2+a_0} = \sqrt{2}$

$a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$a_3 = \sqrt{2+a_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Aufgabe 3

Je nach Abschätzung sind hier natürlich auch andere N denkbar.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2+4/n} = \frac{1}{2}$

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\left|a_n - \tfrac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2n+4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-\frac{1}{2}(2n+4)}{2n+4}\right| = \left|\frac{-2}{2n+4}\right| = \frac{2}{2n+4} \leq \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

falls $n > N := \frac{1}{\varepsilon}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$

Sei $\varepsilon > 0$

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2}{n^2+2n+1} - 1\right| = \left|\frac{n^2-(n^2+2n+1)}{n^2+2n+1}\right| = \left|\frac{-2n-1}{n^2+2n+1}\right|$$

$$= \frac{2n+1}{n^2+2n+1} \leq \frac{2n+n}{n^2+2n+1} \leq \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n} < \varepsilon$$

falls $n > N := \frac{3}{\varepsilon}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2-8n}{3n^3-2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}-\frac{8}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}$

Sei $\varepsilon > 0$

$$\left|a_n - \tfrac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n^3+3n^2-8n}{3n^3-2n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n^3+3n^2-8n-\frac{2}{3}(3n^3-2n)}{3n^3-2n}\right|$$

$$= \left|\frac{3n^2-\frac{20}{3}n}{3n^3-2n}\right| \underset{(*)}{\overset{\text{falls } n>2}{=}} \frac{3n^2-\frac{20}{3}n}{3n^3-2n} \leq \frac{3n^2}{3n^3-2n^3} = \frac{3}{n} < \varepsilon$$

falls $n > \frac{3}{\varepsilon}$.

Damit die Umformung in (*) gilt, muss zusätzlich $n > 2$ sein.

$\Rightarrow N = \max\{2, \frac{3}{\varepsilon}\}$ Dann gilt sicher $|a_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon \;\; \forall n > N$

Aufgabe 4

a) GW eindeutig?

Ja. <u>Beweis</u> Angenommen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$ mit $a \neq a'$.

Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein N sodass $|a_n - a| < \varepsilon/2$ und $|a_n - a'| < \varepsilon/2 \ \forall n > N$

Nun ist $|a-a'| = |(a-a_n) + (a_n - a')| \leq |a-a_n| + |a_n - a'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Also ist $|a-a'| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ und damit folgt $a = a'$

(Zusatz (nicht gefragt) Denn wäre $a \neq a'$, etwa $a - a' > 0$, so könnte man $\varepsilon = \frac{a-a'}{2}$ wählen und hätte den Widerspruch $a - a' < \frac{a-a'}{2}$ ↯) $\boxtimes$

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = c \overset{?}{\Rightarrow} (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergent

Nein <u>Gegenbeispiel</u> $a_n = n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $b_n = -n$ für $n \in \mathbb{N}$ Dann ist weder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, aber $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$ (anderes Beispiel: Alle!)

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen. $A_n := \frac{a_n + b_n}{2}$, $G_n := \sqrt{a_n b_n}$

Alternativ: Da (An) eine Nullfolge ist, müssen auch (an) und (bn) Nullfolgen sein. Details siehe Studierendenforum, mein Beitrag vom 20.5.

(i) $A_n \to 0 \overset{?}{\Rightarrow} B_n \to 0$?

Ja. <u>Beweis</u> Sei $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ Sicher ist $G_n = \sqrt{a_n b_n} \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ Nun ist aber $G_n \leq A_n$, denn für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} \iff a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2 \geq 4 a_n b_n \iff (a_n - b_n)^2 \geq 0 \checkmark$$

Also haben wir $0 \leq G_n \leq A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ und da (A_n) Nullfolge ist, folgt mit dem Einschließungskriterium, dass $\lim_{n\to\infty} G_n = 0$ $\boxtimes$

(ii) $G_n \to 0 \overset{?}{\Rightarrow} A_n \to 0$

Nein <u>Gegenbeispiel</u>: Sei $a_n := \frac{1}{n}$, $b_n := 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ Womit (G_n) eine Nullfolge ist, aber

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, also ist (A_n) keine Nullfolge.

Lösung Blatt 4, Aufgabe 5

Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (nicht notwendigerweise konvergente) Folge mit $0 \leq a_n \leq q-1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten nun die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k q^{-k}$$

Zeige, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, dass also für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, sodass $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und für alle $p \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag:
Wir folgen dem Hinweis. Laut Vorlesung ist eine Folge konvergent, genau dann, wenn sie das Cauchy-Kriterium erfüllt, also

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \ \forall n > N \text{ und } \forall p \in \mathbb{N}$$

Man bemerke die Position des Quantors $\forall p \in \mathbb{N}$: Da er nach $\exists N$ steht, darf N nicht von p abhängen. Wir gehen analog zu Aufgabe 3 vor. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|s_{n+p} - s_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n+p} a_k q^{-k} - \sum_{k=0}^{n} a_k q^{-k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k q^{-k}\right| \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k q^{-k} \quad \text{(da alle } a_k \geq 0\text{)} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} (q-1) q^{-k} \quad \text{(da alle } a_k \leq q-1\text{)} \\
&= (q-1) \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{q}\right)^k = (q-1) \sum_{k=0}^{n+p-(n+1)} \left(\frac{1}{q}\right)^{k+(n+1)} \quad \text{(Indexshift)} \\
&= (q-1) \left(\frac{1}{q}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{q}\right)^k \\
&= (q-1) \left(\frac{1}{q}\right)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^p - 1}{\frac{1}{q} - 1} \quad \text{(wg. geometrischer Summenformel)} \\
&= (q-1) \left(\frac{1}{q}\right)^{n+1} \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^p}{\frac{q-1}{q}} \quad \text{(Bruch im Zähler und Nenner mit } -1 \text{ multipliziert)} \\
&= \left(\frac{1}{q}\right)^n \underbrace{\left(1 - \underbrace{\left(\frac{1}{q}\right)^p}_{\in(0,1)}\right)}_{\in(0,1)} \quad \text{(gekürzt)} \\
&\leq \left(\frac{1}{q}\right)^n < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{q}\right)} =: N
\end{aligned}$$

Bemerkung:
Diese Aufgabe zeigt, dass das Cauchy Kriterium durchaus nützlich sein kann: Egal, welches $q > 1$ und egal, welche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $0 \leq a_n \leq q-1$ man hat: Man weiß, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k q^{-k}$ konvergiert. Analog wie in A3) hätte man hier nicht vorgehen können, da der Grenzwert sicher von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ abhängt.