Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 01

Abgabedatum: 25.04.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

1. Für das Gauß-Verfahren haben wir Umformungsschritte (U1), (U2) und (U3) definiert:
   - Für (U1) haben wir $i \neq k$ gefordert. Führt die Linksmultiplikation von $U_{i,i}$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b zu keinem äquivalenten Gleichungssystem?
   - Für (U2) haben wir $i \neq k$ gefordert. Führt die Linksmultiplikation von $V_{ii}(\lambda)$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b zu keinem äquivalenten Gleichungssystem?
   - Für (U3) haben wir $\lambda \neq 0$ gefordert. Führt die Linksmultiplikation von $W_i(0)$ mit der Koeffizientenmatrix A und dem Lösungsvektor b zu keinem äquivalenten Gleichungssystem?

2. (A) Lösen linearer Gleichungssysteme

Wir betrachten die Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & +6x_2 & & +5x_4 & = 5 \\ 4x_1 & +6x_2 & +x_3 & +6x_4 & = 6 \\ 2x_1 & & +6x_3 & -x_4 & = -1 \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = 5 \\ 2x_1 & +5x_2 & +10x_3 & = 12 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 10 \\ x_1 & -x_2 & +8x_3 & = 15 \end{array}\right\} \tag{3}$$

(a) Geben Sie für die Systeme (1),(2) und (3) jeweils eine Matrix A und einen Vektor b an, sodass das Gleichungsystem dem Ausdruck $Ax = b$ entspricht. (1)

(b) Bestimmen Sie jeweils $\mathrm{rg}(A)$ sowie die Lösungsmenge des Gleichungssystems. (5)

3. (A) Rang einer Matrix

Berechnen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$. (6)

4. (A) Invertieren von Matrizen

(a) Bestimmen Sie, falls möglich, jeweils die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2+2\iota & 4+\iota \\ 1+\iota & 2+\iota & 3+\iota \\ -1-4\iota & -2+2\iota & -\iota \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}),$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{F}_2).$$

(4)

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung, falls existent, der linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$F(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a+b-c \\ b+c+d \\ a+b+c+d \\ a-c+d \end{pmatrix}.$$

(2)

5. (A) Elementarmatrizen

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie Matrizen $Z_1, \dots, Z_j$ der Form $U_{ik}, V_{ik}(\lambda), W_i(\lambda)$ wie in der Vorlesung an, sodass

$$Z_j \circ Z_{j-1} \circ \dots \circ Z_1 \circ A = I,$$

wobei I die Einheitsmatrix in $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ bezeichnet. (6)

6. (T),(NA) Lösen linearer Gleichungssysteme

Wir betrachten folgende Gleichungssysteme:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & -\ x_2 & +2x_3 & = & -2 \end{array} \right\} \qquad (4)$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & - \ x_2 & - \ x_3 & +3x_4 & = & 4 \\ -x_1 & + \ x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = & -3 \\ & x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 9 \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = & -2 \end{array}\right\} \tag{5}$$

In Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \lambda x_1 & +4x_2 & +\lambda x_3 & = 1 \\ & -2x_2 & +4x_3 & = 3 \\ 2x1 & +\lambda x_2 & +6x_3 & = 4 \end{array}\right\} \tag{6}$$

(a) Bestimmen Sie für die Systeme (4), (5), (6) jeweils eine Matrix A und einen Vektor b, sodass das Gleichungssystem dem Ausdruck $Ax = b$ entspricht.

(b) Bestimmen Sie jeweils rg$A$ sowie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

7. (T),(NA) Rang und Invertierbarkeit von Matrizen

Zeigen Sie:

1. Es sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und weiter sei $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix, dann gilt $\text{rg}(A) = \text{rg}(AB)$.
2. Elementare Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht.
3. Eine quadratische Matrix $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang besitzt, d.h., wenn $\text{rg}(B) = n$.
4. $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn B sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben lässt.
5. $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn $B^\top$ invertierbar ist.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müsen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Üungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere düfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.