Mathematik für Informatiker

Kevin Kraft

17. Juli 2024

Universität Ulm

Differentialgleichungen

DGLs

- Lineare DGL
- Bernoullische DGL
- DGL mit getrennten Variablen

Satz 13.2.1: Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\xi \in I$ kein Randpunkt von I. Es seien weiter $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\eta \in \mathbb{R}$. Für

$$y_0 : I \to \mathbb{R},\ y_0(x) := \exp\left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right),$$

$$y : I \to \mathbb{R},\ y(x) := \left(\eta + \int_\xi^x \frac{g(t)}{y_0(t)}dt\right) \cdot y_0(x)$$

gilt dann

(i) y_0 löst das Anfangswertproblem $y' = f(x)y$, $y(\xi) = 1$ und

(ii) y löst das Anfangswertproblem $y' = f(x)y + g(x)$, $y(\xi) = \eta$.

Abbildung 1.1: Liebezeit, Skript: Mathematik für Informatiker, 2023

Lineare DGL

Lineare DGL können auf die Form gebracht werden:

$$y' = f(x)y + g(x)$$

Für eine homogene lineare DGL gilt $g(x) = 0$. Gilt zusätzlich ein Anfangsbedigung, sieht das Anfangswertproblem so aus:

$$y' = f(x)y \qquad y(\xi) = 1$$

Dann löst y_0 das AWP:

$$y_0(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\ dt\right)$$

AWP mit homogener DGL

$$y' = f(x)y \quad y(\xi) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y_0(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\ dt\right)$$

Wieso muss $y(\xi) = 1$ gelten?
Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$

$$y_0(x) = \exp\left(F(x) - F(\xi)\right) \quad \Rightarrow \quad y_0(\xi) = \exp(F(\xi) - F(\xi)) = e^0 = 1$$

AWP mit homogener DGL

$$y' = f(x)y \quad y(\xi) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y_0(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\ dt\right)$$

Wieso muss $y(\xi) = 1$ gelten?
Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$

$$y_0(x) = \exp\left(F(x) - F(\xi)\right) \ \Rightarrow \ y_0(\xi) = \exp(F(\xi) - F(\xi)) = e^0 = 1$$

Was wäre für das AWP mit $y(\xi) = c$ für $c \in \mathbb{R}$?

AWP mit homogener DGL

$$y' = f(x)y \quad y(\xi) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y_0(x) = \exp\left(\int_\xi^x f(t)\ dt\right)$$

Wieso muss $y(\xi) = 1$ gelten?
Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$

$$y_0(x) = \exp\left(F(x) - F(\xi)\right) \quad \Rightarrow \quad y_0(\xi) = \exp(F(\xi) - F(\xi)) = e^0 = 1$$

Was wäre für das AWP mit $y(\xi) = c$ für $c \in \mathbb{R}$?

$$y_0(x) = c \exp\left(\int_\xi^x f(t) dt\right)$$

ist auch Lösung der homogenen DGL und $y_0(\xi) = c$

Beispiel homogene DGL

$$(1+x^2)y' = 2xy \qquad y(0) = 3$$

Bringe auf die richtige Form:

$$y' = \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{=f(x)} y \qquad y(0) = 3$$

Verwende die Lösungsformel mit $\xi = 0, c = 3$

$$y_0(x) = 3\exp\left(\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt\right) = 3\exp\left(\int_1^{1+x^2} \frac{1}{u}du\right) = 3\exp\left(\ln|1+x^2|\right)$$

Substitution: $u = 1+t^2,\ u' = 2t$

$$y_0(x) = 3(1+x^2)$$

Inhomogene Lineare DGL, AWP

AWP der Form:

$$y' = f(x)y + g(x) \qquad y(\xi) = \eta$$

Löse dafür zunächst die homogene DGL und bestimme y_0.

Dann löst $y(x)$ das AWP.

$$y(x) = \left(\eta + \int_{\xi}^{x} \frac{g(t)}{y_0(t)} dt\right) \cdot y_0(x)$$

Beispiel inhomogene DGL, AWP

$$y' = \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{=f(x)} y + \underbrace{4x}_{g(x)} \qquad y(0) = 2$$

Löse das homogene DGL mit $\xi = 0$, **ohne** c$=$ 2:

$$y_0(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt\right) = (1+x^2)$$

Beispiel inhomogene DGL, AWP

$$y' = \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{=f(x)} y + \underbrace{4x}_{g(x)} \qquad y(0) = 2$$

Löse das homogene DGL mit $\xi = 0$, **ohne** c$=$ 2:

$$y_0(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt\right) = (1+x^2)$$

Anschließend löse das inhomogene mit $\eta = 2$

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(2 + \int_0^x \frac{4t}{1+t^2} dt\right)(1+x^2) \\ &= \left(2 + 2\int_1^{1+x^2} \frac{1}{u} du\right)(1+x^2) \\ &= \left(2 + 2\ln|1+x^2|\right)(1+x^2) \end{aligned}$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$(1+x)y' = y - 1 + x^2 \qquad y(0) = 3 \qquad \text{für } x \in (0, \infty)$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$(1+x)y' = y - 1 + x^2 \qquad y(0) = 3 \qquad \text{für } x \in (0, \infty)$$

Forme um:

$$y' = \frac{1}{1+x}y - \underbrace{\frac{1-x^2}{1+x}}_{=1-x}$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$(1+x)y' = y - 1 + x^2 \qquad y(0) = 3 \qquad \text{für } x \in (0,\infty)$$

Forme um:

$$y' = \frac{1}{1+x}y - \underbrace{\frac{1-x^2}{1+x}}_{=1-x}$$

Löse zunächst die homogene DGL

$$y_0(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{1}{1+t}dt\right) = \exp(\ln|(1+x)|) = |1+x|$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$(1+x)y' = y - 1 + x^2 \qquad y(0) = 3 \qquad \text{für } x \in (0, \infty)$$

Forme um:

$$y' = \frac{1}{1+x}y - \underbrace{\frac{1-x^2}{1+x}}_{=1-x}$$

Löse zunächst die homogene DGL

$$y_0(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{1}{1+t}dt\right) = \exp(\ln|(1+x)|) = |1+x|$$

Löse nun das AWP mit $\eta = 3$

$$y(x) = \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t}dt\right)(1+x)$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$y(x) = \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t} dt\right)(1+x)$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t} dt\right)(1+x) \\ &= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t-2}{1+t} dt\right)(1+x) \end{aligned}$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t} dt\right)(1+x) \\ &= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\ &= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t}{1+t} + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \end{aligned}$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t}{1+t} + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x 1 \; dt + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t}{1+t} + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x 1 \; dt + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \Big[t\Big]_0^x + \Big[-2\ln(1+t)\Big]_0^x\right)(1+x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe: inhomogene DGL

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(3 + \int_0^x \frac{t-1}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x \frac{1+t}{1+t} + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \int_0^x 1 \; dt + \int_0^x \frac{-2}{1+t} dt\right)(1+x) \\
&= \left(3 + \Big[t\Big]_0^x + \Big[-2\ln(1+t)\Big]_0^x\right)(1+x) \\
y(x) &= \Big(3 + x - 2\ln(1+x)\Big)(1+x)
\end{aligned}
$$

Bernoullische DGL

Form:

$$y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha} \qquad y(\xi) = \eta$$

Trick: Substituiere mit $z = y^{1-\alpha}$.

$$z' = \left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$$

Bernoullische DGL

Form:

$$y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha} \qquad y(\xi) = \eta$$

Trick: Substituiere mit $z = y^{1-\alpha}$.

$$z' = \left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$$

Teile die DGL durch y^{α} und multipliziere mit $(1-\alpha)$.

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}} &= (1-\alpha)\Big(f(x)y^{1-\alpha} + g(x)\Big) \\ z' &= (1-\alpha)f(x)\, z + (1-\alpha)g(x)\end{aligned}$$

Form:

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \qquad y(\xi) = \eta$$

Trick: Substituiere mit $z = y^{1-\alpha}$.

$$z' = \left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$$

Teile die DGL durch y^α und multipliziere mit $(1-\alpha)$.

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha} &= (1-\alpha)\Big(f(x)y^{1-\alpha} + g(x)\Big)\\ z' &= (1-\alpha)f(x)\; z + (1-\alpha)g(x)\\ z' &= \tilde{f}(x)z + \tilde{g}(x)\end{aligned}$$

Bernoullische DGL

Form:

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \qquad y(\xi) = \eta$$

Trick: Substituiere mit $z = y^{1-\alpha}$.

$$z' = \left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$$

Teile die DGL durch y^α und multipliziere mit $(1-\alpha)$.

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha} &= (1-\alpha)\Big(f(x)y^{1-\alpha} + g(x)\Big)\\ z' &= (1-\alpha)f(x)\, z + (1-\alpha)g(x)\\ z' &= \tilde{f}(x)z + \tilde{g}(x)\end{aligned}$$

Lineare inhomogene DGL: Löse für z und Substituiere zurück: $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \qquad y(1) = 4$$

Wir identifizieren: $\alpha = \frac{1}{2},\ f(x) = 0,\ g(x) = 1.$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \qquad y(1) = 4$$

Wir identifizieren: $\alpha = \frac{1}{2},\ f(x) = 0,\ g(x) = 1.$

Teile die DGL durch $y^{\frac{1}{2}} = y^{1-\alpha}$ und Multipliziere mit $\frac{1}{2} = 1 - \alpha$.
Substituiere $z = y^{1-\alpha} = y^{\frac{1}{2}}$

$$z' = \frac{1}{2} = \tilde{g}(x)$$

Also $z' = \frac{1}{2}$.

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \qquad y(1) = 4$$

Wir identifizieren: $\alpha = \frac{1}{2},\ f(x) = 0,\ g(x) = 1.$

Teile die DGL durch $y^{\frac{1}{2}} = y^{1-\alpha}$ und Multipliziere mit $\frac{1}{2} = 1 - \alpha$.
Substituiere $z = y^{1-\alpha} = y^{\frac{1}{2}}$

$$z' = \frac{1}{2} = \tilde{g}(x)$$

Also $z' = \frac{1}{2}$. Die homogene Lösung ist trivial.
$z_0(x) = \exp\left(\int_1^x 0 dt\right) = e^0 = 1$
Also bestimme die inhomogene Lösung

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \qquad y(1) = 4$$

Wir identifizieren: $\alpha = \frac{1}{2},\ f(x) = 0,\ g(x) = 1.$

Teile die DGL durch $y^{\frac{1}{2}} = y^{1-\alpha}$ und Multipliziere mit $\frac{1}{2} = 1 - \alpha$.
Substituiere $z = y^{1-\alpha} = y^{\frac{1}{2}}$

$$z' = \frac{1}{2} = \tilde{g}(x)$$

Also $z' = \frac{1}{2}$. Die homogene Lösung ist trivial.
$z_0(x) = \exp\left(\int_1^x 0 dt\right) = e^0 = 1$
Also bestimme die inhomogene Lösung mit $\xi = 1,\ \eta = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

$$z(x) = \left(2 + \int_0^x \frac{1}{2} dt\right) \cdot 1 = \left(2 + \frac{x-1}{2}\right) = \frac{x+3}{2}$$

$$y(x) = z^2 = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2$$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

$$z_0(x) = \exp\left(\int_0^x -3t^4 dt\right) = \exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)$$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

$$z_0(x) = \exp\left(\int_0^x -3t^4 dt\right) = \exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)$$

$$z(x) = \left(1 + \int_0^x -3t^4 e^{\frac{3}{5}t^5} dt\right) e^{-\frac{3}{5}x^5}$$

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

$$z_0(x) = \exp\left(\int_0^x -3t^4 dt\right) = \exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)$$

$$z(x) = \left(1 + \int_0^x -3t^4 e^{\frac{3}{5}t^5} dt\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} = \left(1 + \int_0^{\frac{3}{5}x^5} -e^u du\right) e^{-\frac{3}{5}x^5}$$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

$$z_0(x) = \exp\left(\int_0^x -3t^4 dt\right) = \exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)$$

$$z(x) = \left(1 + \int_0^x -3t^4 e^{\frac{3}{5}t^5} dt\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} = \left(1 + \int_0^{\frac{3}{5}x^5} -e^u du\right) e^{-\frac{3}{5}x^5}$$
$$= \left(1 - e^{\frac{3}{5}x^5} + 1\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} = 2e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1$$

Beispiel: Bernoullische DGL

$$y' = x^4 y + x^4 y^4 \qquad y(0) = 1$$

Wir identifizieren $\alpha = 4,\ f(x) = x^4,\ g(x) = x^4,\ \xi = 0.\ \ 1 - \alpha = -3$ also $z = \frac{1}{y^3}$:

$$z' = -3x^4 y^{-4} y - 3x^4 = -3x^4\ z - 3x^4$$

$$z_0(x) = \exp\left(\int_0^x -3t^4 dt\right) = \exp\left(-\frac{3}{5}x^5\right)$$

$$z(x) = \left(1 + \int_0^x -3t^4 e^{\frac{3}{5}t^5} dt\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} = \left(1 + \int_0^{\frac{3}{5}x^5} -e^u du\right) e^{-\frac{3}{5}x^5}$$

$$= \left(1 - e^{\frac{3}{5}x^5} + 1\right) e^{-\frac{3}{5}x^5} = 2e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1$$

$$y(x) = z^{-\frac{1}{3}} = \left(2e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Form:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad y(\xi) = \eta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Trick: Substitutionsregel:

Satz 12.1.10: Substitutionsregel

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle, $f : I \to J$ differenzierbar und $g : J \to \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion im Intervall J, dann besitzt die Funktion $g \circ f \cdot f' : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion und für $t \in I$ gilt die *Substitutionsregel*

$$\int g(x)\,dx\bigg|_{x=f(t)} = \int g(f(t))f'(t)\,dt.$$

$u = y(t),\ u' = y'(t)$:

$$\int_\xi^x \frac{y'(t)}{g(y(t))}dt = \int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(u)}du \qquad \Rightarrow \qquad \int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(u)}du = \int_\xi^x f(t)dt$$

Beispiel: Getrennte Variablen

$$y' = x(1+y) \qquad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1+y} = x$$

Beispiel: Getrennte Variablen

$$y' = x(1+y) \qquad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1+y} = x$$

Wir identifizieren: $g(y) = 1 + y,\ f(x) = x,\ \xi = 0.$

$$\int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{\xi}^{x} f(t) dt$$

Einsetzen:

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{1+u} du = \Big[\ln|1+u|\Big]_0^{y(x)} = \ln(1+y(x))$$

$$\int_0^x t\ dt = \frac{1}{2}x^2$$

Beispiel: Getrennte Variablen

$$y' = x(1+y) \qquad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1+y} = x$$

Wir identifizieren: $g(y) = 1 + y,\ f(x) = x,\ \xi = 0.$

$$\int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{\xi}^{x} f(t) dt$$

Einsetzen:

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{1+u} du = \Big[\ln|1+u|\Big]_0^{y(x)} = \ln(1+y(x))$$

$$\int_0^x t\ dt = \frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(1+y(x)) = \frac{1}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{2}x^2} = 1 + y(x)$$

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$$

Aufgabe: Getrennte Variablen

$$y' = e^{y} \ \sin(x)$$

Aufgabe: Getrennte Variablen

$$y' = e^y \ \sin(x)$$

Wir identifizieren $g(y) = e^y, \ f(x) = \sin(x)$. Kein AWP, also unbestimmte $\xi, \ \eta$.

$$\int_{\eta}^{y(x)} \frac{1}{-e^u} du = \left[e^{-u}\right]_{\eta}^{y(x)} = -e^{y(x)} + e^{-\eta}$$

$$\int_{\xi}^{x} \sin(t) dt = -\cos(x) + \cos(\xi)$$

Aufgabe: Getrennte Variablen

$$y' = e^y \; \sin(x)$$

Wir identifizieren $g(y) = e^y, \; f(x) = \sin(x)$. Kein AWP, also unbestimmte $\xi, \; \eta$.

$$\int_\eta^{y(x)} \frac{1}{-e^u} du = \left[e^{-u}\right]_\eta^{y(x)} = -e^{y(x)} + e^{-\eta}$$

$$\int_\xi^x \sin(t) dt = -\cos(x) + \cos(\xi)$$

$$-e^{y(x)} + e^{-\eta} = -\cos(x) + \cos(\xi) \;\Leftrightarrow\; e^{y(x)} = \cos(x) \underbrace{-\cos(\xi) - e^{\eta}}_{=c \in \mathbb{R}}$$

$$y(x) = \ln(\cos(x) + c)$$