



Hinweise zur Abgabe

Abgabetermin: 28.06.21, 14:00 Uhr

Abgabeformat: Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!

Sonstiges: Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f in allen angegebenen $x \in \mathbb{R}$, falls (10)

i) $f(x) = x^3(x^2 + 1)^2, x \in \mathbb{R}$ iv) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
ii) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}, x > 0$ v) $f(x) = x^{\cos(x)}, x > 0$
iii) $f(x) = \sinh(x)$ und $f(x) = \cosh(x), x \in \mathbb{R}$ (siehe Blatt 06) vi) $f(x) = \ln(1 + \cos^2(3e^x + 4x^3)), x \in \mathbb{R}$

2. Sei $a < b$, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $M \geq 0$.

- i) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (8)

- a) $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in (a, b)$
b) $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ für alle $x, y \in (a, b)$ (man sagt, f ist *Lipschitz-stetig* $\hat{=}$ Hölderstetig der Ordnung $\alpha = 1$ (Blatt 08))

- ii) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (2)

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

3. i) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle der Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. (4)

- ii) Begründen Sie, welche der beiden Zahlen 2020^{2021} und 2021^{2020} größer ist. (3)

- iii) Zeigen Sie auch, dass es genau ein Paar natürlicher Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n < m$ und $n^m = m^n$. (3)

4. i) Zeigen Sie, dass $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ bijektiv sind. (6)

- ii) Die jeweiligen Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*Area-sinus hyperbolicus*) und $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ (*Areakosinus hyperbolicus*). Begründen Sie, dass arsinh auf \mathbb{R} und arcosh auf $(1, \infty)$ differenzierbar sind und bestimmen Sie deren Ableitung. (4)