



UNIVERSITÄT ULM
Abgabe: Bis Dienstag, 21.06.2022,
14:00 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Lars von der Heide
Sommersemester 2022
Punktzahl: 20

Übungen Analysis 1 für Informatiker und Ingenieure: Blatt 9

Aufgabe 1:

(4×1+2+2)

Die hyperbolischen Funktionen sind erklärt über

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{hyperbolischer Sinus}) \text{ bzw.}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{hyperbolischer Kosinus})$$

- a) Zeige: $(\sinh x)' = \cosh x$ und $(\cosh x)' = \sinh x$.
- b) Zeige: $\cosh^2 x - \sinh^2 x \equiv 1$
- c) In welchen Intervallen sind die beiden Funktionen monoton? Was ist ihr Wertebereich?
- d) Zeige: $\cosh x : [0, \infty) \rightarrow W$ (W der entsprechende Wertebereich) ist bijektiv.
Die Umkehrfunktion heißt Areacosinushyperbolicus ($\text{Arcosh}(x)$)
- e) Zeige: $\text{Arcosh } x$ ist stetig auf W und differenzierbar im Inneren von W mit

$$\left(\text{Arcosh } x \right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

- f) Zeige: In W gilt die Identität

$$\text{Arcosh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Aufgabe 2:

(3)

Zeige mithilfe von Differentialrechnung, dass

$$e^x \geq 1 + x \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3:

(6)

Bestimme folgende Grenzwerte mithilfe von de l'Hospital:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} x^2$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(\arctan(x) - \frac{\pi}{2})}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^m + 1)}{\ln(x^n)}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 4:

Wir betrachten den Querschnitt einer Regenrinne wie in der Abbildung, wobei $l > 0$ gegeben ist. Ziel ist nun, die Regenrinne so zu konstruieren, dass sie möglichst viel Wasser aufnehmen kann. Dazu möchte man gerne den Winkel α so bestimmen, dass die eingezeichnete Fläche maximal wird (denn dann wird auch das Volumen maximal). Bestimme nun also eine Funktion, die abhängig von α den Flächeninhalt angibt und maximiere diese! Gib anschließend den optimalen Winkel α in Grad an.

