

Übungen zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe: Dienstag, 07.06.2016, bis 14:15 Uhr, H22)

1. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = 1 + x^2$. Finde für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ein $\delta := \delta(\epsilon, x_0) > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

(5 Punkte)

2. Bestimme, für welche $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-5} - \sqrt{ax+b}$$

in \mathbb{R} existiert.

(4 Punkte)

3. Untersuche, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 + 3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2}$

(2+3+3+5+1+2 Punkte)

4. Es seien $\alpha, \beta > 0$. Zeige, dass

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = \infty$,

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$,

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0$.

(3+3+3 Punkte)

5. Es sei $x \in (0, 1)$. Wir definieren $f(x)$ durch die Gleichung

$$\sin x = \frac{x(60 - 7x^2) + x^7 f(x)}{60 + 3x^2}.$$

Berechne den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(6 Punkte)