Lösungsvorschlag Blatt 11

1a) $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\}$, $f(x) = e^x$

Es gilt $I_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ und da e^x str. mon. wachsend ist

$m_k = \min\limits_{x \in I_k} f(x) = e^{\frac{k-1}{n}}$ $\quad M_k = \max\limits_{x \in I_k} f(x) = e^{\frac{k}{n}}$. Außerdem hat jedes I_k Länge $\frac{1}{n}$

$$O(Z_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot M_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{\frac{1}{n}})^k - 1\right) = \frac{1}{n} \frac{1-e^{\frac{n+1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{n}$$

$$U(Z_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{k-1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{1}{n}})^k = \frac{1}{n} \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

b) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-e^{\frac{1}{n}}) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} -e^{\frac{1}{x}} = -e^0 = -1$

Aufgrund der Stetigkeit von e^x gilt damit:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{\frac{n+1}{n}}}{n(1-e^{\frac{1}{n}})} - \frac{1}{n} = \frac{1-e}{-1} - 0 = e-1$$

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e}{n(1-e^{\frac{1}{n}})} = e-1$$

c) Vermutlich gilt $\int_0^1 e^x \, dx = e-1$

Tatsächlich, denn da e^x stetig ist gilt nach dem HS: $\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e-1$

2) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

- für $x \in [0,1)$ ist $\lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow F(x) = 0$
- für $x \in [1,2)$ ist $\lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x \underbrace{f(t)}_{1}\,dt = 0 + x - 1$
- für $x \in [2,3)$ ist $\lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow F(x) = \underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{0} + \underbrace{\int_1^2 f(t)\,dt}_{1} + \int_2^x \underbrace{f(t)}_{2}\,dt = 0 + 1 + 2(x-2) = 2x-3$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x-1, & x \in [1,2) \\ 2x-3 & x \in [2,3) \end{cases}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = F(1)$ und $\lim\limits_{x\to 2^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = F(2)$ ist F in 1 und 2 stetig. Für $x \in [0,3) \setminus \{1,2\}$ ist F stetig als Polynom

$\Rightarrow F$ ist auf ganz $[0,3)$ stetig. Für $x \in [0,3) \setminus \{1,2\}$ ist F diffbar als Polynom. Wegen $\lim\limits_{x\to 1^-} F'(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 1^+} F'(x) = 1$ ist F in 1 nicht diffbar, wegen $\lim\limits_{x\to 2^-} F'(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to 2^+} F'(x) = 2$ ist F in 2 nicht diffbar $\Rightarrow F$ ist nur auf $[0,3) \setminus \{1,2\}$ diffbar.

3) $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. z.z.: $\exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

Da I kompakt und f stetig nimmt f nach Weierstraß auf I Min und Max an:

$\exists x^+ \in I: f(x^+) = M = \max_{t \in I} f(t)$, $\exists x^- \in I: f(x^-) = m = \min_{x \in I} f(x)$

Jetzt gilt: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a) \Rightarrow M \geq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b m\,dx = m(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

Nach dem ZWS (da f stetig) nimmt f jeden Wert zwischen m und M an

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ □

Alternativ: Nach dem HS der D/I-Rechnung ist $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, wobei F Stammfkt von f ist. Da F stetig und diff'bar:

$\exists \xi \in [a,b]: \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi) = f(\xi)$ □

4) Die Integranden sind auf den geg. Intervallen alle stetig, also können wir den 2. HS verwenden.

a) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1+1 = 0$

b) $\int_{-2}^{1} x^2 - 2x + 1\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x]_{-2}^{1} = \frac{1}{3} - (-\frac{26}{3}) = 9$

c) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^3 e^{2x}\,dx = [\frac{1}{2}e^{2x}]_0^3 = \frac{1}{2}e^6 - \frac{1}{2}$

e) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^e = 1$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx = [\frac{1}{2}\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}\sin(0) = \frac{1}{2}$