Dr. Jan-Willem Liebezeit
Raphael Wagner
SoSe 2021

20 Punkte

Übungen zu: Analysis 1 für Informatik Blatt 07

Hinweise zur Abgabe

Abgabetermin: 14.06.21, 14:00 Uhr
Abgabeformat: Im PDF-Format via Moodle. Einzelabgaben (nicht in Gruppen). Verspätete Abgaben sind ausdrücklich nicht möglich!
Sonstiges: Bitte geben Sie eine Erst- und Zweitpräferenz von jeweils einer Aufgabe zur Korrektur an.

Aufgaben

1. i) Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ-δ-Kriteriums (Definition 3.2.3), dass für jedes $x_0 \in [0, 5]$, der Grenzwert (6)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2}{1 + \sqrt{x}}$$

existiert.

ii) Zeigen Sie unter Verwendung des ϵ-δ-Kriteriums (Definition 3.2.3), dass für die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit (4)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

der Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht existiert.

2. Berechnen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte: ($[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$) (10)

i) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+5x-14}{x-2}$

ii) $\lim_{x \to 0^+} \frac{[x]}{x}$

iii) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \right)$

iv) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x^2+24x}$

v) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x^2}$

vi) $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

3. Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie

i) $\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = \infty$ (2)

ii) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ (4)

iii) $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$ (4)

4. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch (10)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in (0,\infty) \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & : x \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in (0,\infty)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Hinweis: Die Darstellung einer rationalen Zahl $x = \frac{p}{q} \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q}$ durch teilerfremde $p, q \in \mathbb{N}$ ist eindeutig.