Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, den 22.05. um 12 Uhr

Lösungsvorschlag Analysis 1: Blatt 4

13. Beweisen Sie die folgenden Aussagen: (2)

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.

Lösungsvorschlag: Es gilt für mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= \left|\frac{x+y+x-y}{2}\right| + \left|\frac{y+x+y-x}{2}\right| \\ &\leq \frac{|x+y|}{2} + \frac{|x-y|}{2} + \frac{|y+x|}{2} + \frac{|y-x|}{2} = |x+y| + |x-y| \end{aligned}$$

(b) Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\left|\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right| \geq 2.$$

Lösungsvorschlag: Es gilt

$$\begin{array}{rcl} 2 & \leq & \left|\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right| \\ \Leftrightarrow \quad 2|x| \cdot |y| & \leq & |x^2 + y^2| \leq |x|^2 + |y|^2 \\ \Leftrightarrow \quad 0 & \leq & |x|^2 - 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2. \end{array}$$

14. Schreiben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung von Intervallen. Beweisen Sie ihre Behauptungen. (2)

(i) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < x^2 + 2x \leq 4\}$

Lösungsvorschlag: Wir betrachten zunächst die erste Ungleichung. Es ist

$$1 < x^2 + 2x \Leftrightarrow 0 < x^2 + 2x - 1.$$

Die Nullstellen von $x^2 + 2x - 1$ sind gegeben durch $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Da $x^2 + 2x - 1$ eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt, ist die Ungleichung genau dann erfüllt, wenn gilt $x < -1 - \sqrt{2}$ oder $x > -1 + \sqrt{2}$.
Für die zweite Ungleichung gilt

$$x^2 + 2x \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 \leq 0.$$

Diesmal sind die Nullstellen gegeben durch $x = -1 \pm \sqrt{5}$. Somit ist die zweite Ungleichung genau dann erfüllt, falls $x \geq -1 - \sqrt{5}$ und $x \leq -1 + \sqrt{5}$. Insgesamt folgt, dass

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < x^2 + 2x \leq 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -1 - \sqrt{2} \vee x > -1 + \sqrt{2}\} \cap \{\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq -1 - \sqrt{5} \wedge x \leq -1 + \sqrt{5}\} \\ &= \big((-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)\big) \cap [-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}] \\ &= [-1 - \sqrt{5}, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{5}]. \end{aligned}$$

(ii) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, ||x+1| - 2| \leq x\}$.

Lösungsvorschlag: Zunächst stellen wir fest, dass $x \geq 0$ gelten muss, da auf der linken Seite der Ungleichung der Betrag einer Zahl steht. Somit ist $|x+1| = x+1$ und wir erhalten die Ungleichung $||x+1| - 2| = |x+1-2| = |x-1| \leq x$. Ist $x \geq 1$, so folgt

$$|x-1| = x - 1 \leq x \Leftrightarrow -1 \leq 0$$

und diese Ungleichung ist trivialerweise erfüllt.
Für $0 \leq x < 1$ gilt

$$|x-1| = -(x-1) = -x + 1 \leq x \Leftrightarrow 1 \leq 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x.$$

Insgesamt erhalten wir, dass

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, ||x+1|-2| \leq x\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [1, \infty) = \left[\frac{1}{2}, \infty\right).$$

15. Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen nach oben oder nach unten beschränkt sind. Geben Sie, sofern existent, Infimum, Minimum, Maximum und Supremum an. Beweisen Sei ferner alle Ihre Aussagen. (4)

(i) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0, x^2 \geq 2, x < 5\}$

Lösungsvorschlag: Es gilt

$$A = (-\infty, 0] \cap \left((-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)\right) \cap (-\infty, 5) = (-\infty, -\sqrt{2}].$$

Wir sehen sofort, dass $\max A = \sup A = -\sqrt{2}$ und dass $\min A$ und $\inf A$ nicht existieren (bzw. $\inf A = -\infty$).

(ii) $B = \{\frac{n-m}{n} \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$

Lösungsvorschlag: Wir zeigen, dass $\sup B = 1$ und dass $\max B$ nicht existiert. Dazu nehmen wir an, dass eine kleinere obere Schranke $S < 1$ existiert. Dann folgt

$$\frac{n-m}{n} \leq S \Leftrightarrow n - m \leq Sn \Leftrightarrow (1-S)n \leq m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Satz von Archimedes ist $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $N > \frac{1}{1-S}$. Für $n = N$ und $m = 1$ ist diese Ungleichung also nicht erfüllt. Somit kann S keine obere Schranke für B sein. Es folgt $\sup B = 1$ und da $m \geq 1$, gilt $\frac{n-m}{n} < \frac{n}{n} = 1$, d.h. $\max B$ existiert nicht.
Weiter ist B nach unten unbeschränkt. Um das zu sehen, setzen wir $n = 1$. Dann ist $\frac{n-m}{n} = 1 - m = -(m-1) \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Archimedes sind die natürlichen Zahlen nach oben unbeschränkt. Somit ist $-\mathbb{N}$ nach unten unbeschränkt und wir finden zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $\tilde{m} := m - 1 \in \mathbb{N}$ mit $x \geq -\tilde{m}$. Also existieren $\min B$ und $\inf B$ nicht (bzw. $\inf B = -\infty$).

(iii) $C = \{\frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

Lösungsvorschlag: Für gerade n sind die Elemente von C von der Form $\frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$, für ungerade n sind sie von der Form $\frac{1}{n+1}$. In beiden Fällen sehen wir, dass die Ausdrücke monoton fallend sind. Wir erhalten das Maximum also durch Einsetzen von $n = 1$ oder $n = 2$. Es gilt $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Das Maximum und das Supremum sind also gegeben durch $\max C = \sup C = \frac{5}{6}$.
Wir behaupten, dass $\inf C = 0$ gilt. Da die Elemente aus C nicht negativ sind, ist 0 eine untere Schranke für C. Um zu sehen, dass es sich um die größte untere Schranke handelt, nehmen wir an es gäbe eine größere untere Schranke $s > 0$, s beliebig klein, und führen dies zum Widerspruch. Da $s \leq c$ für alle $c \in C$ gelten muss, reicht es sich auf gerade n zu beschränken. Es gilt

$$s \leq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n + 1 \leq \frac{1}{s} \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{s} - 1.$$

Nach dem Satz des Archimedes kann diese Aussage nicht für alle (geraden) natürlichen Zahlen gelten. Wir erhalten den Widerspruch und es gilt $\inf C = 0$. Da weiter $\frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sehen wir, dass $\min C$ nicht existiert.

(iv) $D = \{t + \frac{1}{t} \,|\, t \in (0, 4] \subset \mathbb{R}\}$.

Lösungsvorschlag: Nach Aufgabe 13(b) ist $t + \frac{1}{t} = \frac{t}{1} + \frac{1}{t} \geq 2$. Dieser Wert wird für $t = 1$ angenommen. Es ist also $\inf D = \min D = 2$. Weiter ist D nach oben unbeschränkt: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existiert ein $t \in (0, 4]$, sodass $t < x$. Es folgt mit Satz 4(ix), dass ein $t \in (0, 4]$ existiert mit $y := \frac{1}{x} < \frac{1}{t}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$. Die Menge $\frac{1}{t}$, $t \in (0, 4]$ und damit auch D sind also nach oben unbeschränkt, d.h. $\max D$ und $\sup D$ existieren nicht (bzw. $\sup D = \infty$).

16. Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung (2)

$$x \cdot [x] = 87,$$

wobei $[x]$ die Gaußklammer von x bezeichne. Geben Sie außerdem eine Zahl $c \in \mathbb{N}$ an, sodass $x \cdot [x] = c$ keine Lösung besitzt und beweisen Sie Ihre Behauptung.

Lösungsvorschlag: Wir nehmen zunächst an, dass $x > 0$. Dann muss $x \in (9, 10)$ gelten, da $9 \cdot [9] = 9 \cdot 9 = 81 < 87$ und $10 \cdot [10] = 10 \cdot 10 = 100 > 87$. Da also $x \in (9, 10)$, ist $[x] = 9$. Wie erhalten

$$x \cdot [x] = 87 \Leftrightarrow x \cdot 9 = 87 \Leftrightarrow x = \frac{87}{9}.$$

Somit ist eine positive Lösung durch $x = \frac{87}{9}$ gegeben. Wir zeigen nun, dass es keine negative Lösung geben kann. Mit obiger Argumentation erhalten wir zunächst, dass $x \in (-10, -9)$ gelten muss. Somit ist $[x] = -10$ und es folgt

$$x \cdot [x] = 87 \Leftrightarrow x \cdot (-10) = 87 \Leftrightarrow x = -\frac{87}{10} = -8,7.$$

Nach Annahme liegt x jedoch im Intervall $(-10, -9)$. Dies ist ein Widerspruch und somit existiert keine negative Lösung. Die Gleichung $x \cdot [x] = 87$ besitzt also nur eine Lösung.
Weiter existiert beispielsweise für $c = 6$ keine reelle Lösung: Ist x positiv, so muss $x \in (2, 3)$ gelten. Dann gilt $[x] = 2$ und $x \cdot [x] = 6 \Leftrightarrow x \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Aber $3 \cdot [3] = 3 \cdot 3 = 9$. Somit erhalten wir keine positive Lösung. Für negatives x gilt analog $x \cdot [x] = 6 \Leftrightarrow x \cdot (-3) = 6 \Leftrightarrow x = -2$, aber $-2 \cdot [-2] = 4 \neq 6$. Also existiert für $c = 6$ (oder allgemeiner für $c = n(n+1)$) keine reelle Lösung der Gleichung $x \cdot [x] = c$.