UNIVERSITÄT ULM

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2019

Übungen Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker: Blatt 6

25. Die folgenden Beweise sollen mit der ε-δ-Definition der Stetigkeit geführt werden.

(a) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Zeige die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(c) Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5|x^2 - 2| + 3$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

(d) Zeige die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

(e) Beweise die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{5 + x^2}$.

(f) Zeige, dass die Funktion

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

(g) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass jede Funktion $f_k : [0,1] \to [0,1]$, $f_k(x) = x^k$ linksseitig stetig in 1 ist. Was gilt für $f_\infty := \lim\limits_{k\to\infty} x^k$?

26. Zeige, dass jede monoton wachsende Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ einen Fixpunkt hat.

27. (a) Betrachte die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeige, dass f in keinem Punkt stetig ist.

(b) Bestimme alle Punkte, in denen

$$f : [0,1] \to [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig ist.

28. Zeige, dass $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ nicht existiert.

29. Sind f, g stetige Funktionen auf einem Interall $I \subset \mathbb{R}$, so sind auch die Funktionen $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f^+ := \max\{f, 0\}$ und $f^- := \max\{-f, 0\}$ stetig.

30. Ist g auf $[0,1]$ definiert und beschränkt, so ist $x \mapsto xg(x)$ in 0 stetig.