Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 04

Abgabedatum: 16.05.24, 12 Uhr

1. (NA) Minifragen

1. Für welche $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt die Dreiecksungleichung (N3) in Bemerkung 8.2.4 mit “$<$” anstatt “$\leq$”?

2. Zeigen oder widerlegen Sie für eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $n \in \mathbb{N}$:
   - Wenn A eine Nullzeile hat, ist $\det A$ immer gleich 0.
   - Wenn A eine Nullspalte hat, ist $\det A$ immer gleich 0.
3. Zeigen oder widerlegen Sie: $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

2. (A) Berechne mit möglichst wenig Aufwand die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

(2)

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

(1)

3. (A)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

Wir definieren $d_n := \det(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $d_0 := 1$.

i) Zeigen Sie die Rekursionsgleichung $d_{n+1} = 2d_n - d_{n-1}$ (2)

ii) Folgern Sie per Induktion $d_n = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)

iii) Zeigen Sie außerdem $\det(B_n) = (-1)^{n+1} n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)

4. (A)

(a) Es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie (z.B. durch vollständige Induktion), dass

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

gilt. (2)

(b) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix, deren Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden. Zeigen Sie: $\det A \in \{-1, 1\}$. (1)

(c) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit $A = -A^\top$ und n ungerade. Zeigen Sie: $\det A = 0$. (1)

(d) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ invertierbar. Zeigen Sie: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. (1)

(e) Seien $A, S \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und S invertierbar. Zeigen Sie: $B := S^{-1}AS$ und A haben die gleiche Determinante. (1)

5. (A) Das charakteristische Polynom

Seien

$$A_1, A_2 \in M(3 \times 3, \mathbb{R}),\ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -6 & -5 & 8 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie jeweils das sogenannte charakteristische Polynom

$$P_A(x) = \det(A - x \cdot I_3)$$

mit $x \in \mathbb{R}$ für $A \in \{A_1, A_2\}$ auf . (2)

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von $P_{A_1}(x)$ und $P_{A_2}(x)$. (2)

(c) Sei nun X_A jeweils die Menge der bestimmten Nullstellen von $P_A(x)$ in Aufgabenteil b) für $A \in \{A_1, A_2\}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $(A - xI)v = 0$ für jeweils alle Nullstellen $x \in X_A$ für beide $A \in \{A_1, A_2\}$. (2)

6. (T),(NA) Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 9 & 14 & -8 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.