Lösungsvorschlag Blatt 8

1) $V = \pi r^2 h$

Betrachte $f(r) = \pi r^2 h$, Elastizität $E(a) = a \frac{f'(a)}{f(a)} = a \frac{2\pi a h}{\pi a^2 h} = 2$

$\Rightarrow$ Fehler von x % bewirkt Fehler von ca. $2x$ %

Betrachte $f(h) = \pi r^2 h$, Elastizität $E(a) = a \frac{f'(a)}{f(a)} = a \frac{\pi r^2}{\pi r^2 a} = 1$

$\Rightarrow$ Fehler von y % bewirkt Fehler von ca. y %

2) a) Betrachte $g(x) = \sqrt{x}$. Nach MWS ex. $\xi \in (x, x+1)$:

$$g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1-x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \overset{!}{=} \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty$$

da $x \leq \xi \leq x+1$

b) Betrachte $h(x) = \ln(x)$. Nach MWS ex. $\xi \in (x, x+p)$:

$$h'(\xi) = \frac{h(x+p) - h(x)}{x+p-x} = \frac{\ln(x+p) - \ln(x)}{p} \overset{!}{=} \frac{1}{\xi} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty$$

da $x < \xi < x+p$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x+p) - \ln(x)}{p} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \ln(x+p) - \ln(x) = p \cdot 0 = 0$$

3) a) Für $a = b$ ist die Aussage klar $\quad$ (z.z.: $\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} \leq \frac{1}{3}(b-a)$ $\quad 1 \leq a \leq b$)

Die Funktion f mit $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ist stetig und diff.bar auf $[1, \infty)$ mit $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$. Sei $a < b$.

Nach MWS ex. $\xi \in (a,b) \subset [1, \infty)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}}{b-a} = f'(\xi) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}} \leq \frac{1}{3}, \quad \text{da } \xi^2 \geq 1$$

$\Rightarrow f(b) - f(a) \leq \frac{1}{3}(b-a)$ $\quad$ ($a<b \Rightarrow$ Gl. kann mit $b-a$ mult. werden)

b) $f(x) = 2x^7 + x^5 - \sin(x) + 2x$

f stetig und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \overset{ZWS}{\Rightarrow} \exists x^* \in (-\infty, \infty) : f(x^*) = 0$

$\Rightarrow$ Es ex. eine Nullstelle. Ist diese eindeutig? Dazu:

$f'(x) = 14x^6 + 5x^4 - \cos(x) + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend und damit injektiv $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

$\Rightarrow$ NS eindeutig

3c) $f, g: I \to \mathbb{R}$, $f(0) = g(0)$, $f'(x) \geq g'(x)$ z.z.: $f(x) \geq g(x)$

Betrachte $h(x) = f(x) - g(x)$

h ist stetig und diffbar als Summe stetiger und diff.-barer Funktionen $\Rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

$\Rightarrow h$ ist monoton wachsend $\Rightarrow h(x) \geq h(0) = f(0) - g(0) = 0 \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ $\square$

4) a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

f ist stetig (und diffbar), $[-3, 2]$ beschr. und kompakt $\xRightarrow{\text{Weierstraß}}$ Ex. Maximum und Minimum.

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \overset{!}{=} 0 \quad (\text{PQ}) \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$

$f(1) = -7 \qquad f(-2) = 20 \qquad f(-3) = 9 \qquad f(2) = 4$

$\Rightarrow$ Lokale Maximalstellen in -2 und 2, lok. Minimalstellen in 1 und -3

$f'(x) \geq 0$ für $x \in [-3, -2] \cup [1, 2] \Rightarrow f$ hier monoton wachsend

$f'(x) \leq 0$ für $x \in [-2, 1] \Rightarrow f$ hier monoton fallend.

b) $f(x) = e^{-x}(x^2 + x + 1)$

f ist stetig und diff.-bar, $[-0{,}5, 2]$ beschr. und kompakt $\xRightarrow{\text{Weierst.}}$ Ex. Max und Min.

$f'(x) = e^{-x}(-1)(x^2 + x + 1) + e^{-x}(2x + 1) = e^{-x}(-x^2 + x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

$f(0) = 1$, $f(1) = \frac{3}{e} \approx 1{,}1$, $f(-0{,}5) = \frac{7}{4}\sqrt{e} \approx 2{,}9$ $f(2) = \frac{7}{e^2} \approx 0{,}95$

$\Rightarrow$ lok. Maximalstellen in $-0{,}5$ und 1, lok. Minimalstellen in 0 und 2

$f'(x) \geq 0$ für $x \in [0, 1] \Rightarrow f$ hier monoton steigend

$f'(x) \leq 0$ für $x \in [-0{,}5, 0] \cup [1, 2] \Rightarrow f$ hier monoton fallend.

c) $a_1, \dots, a_n \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, für welches x wird $\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$ minimal

Sei $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$

$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} x - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) = 2\left(nx - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$

Wegen $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2 = nx^2 - 2x \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ ist f eine nach oben offene Parabel $\Rightarrow x = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$ ist Minimalstelle ✓

(Der Schnitt der a_k)