



UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Dienstag, den 21.07. um
12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10 Bonuspunkte

Übungen Analysis 1: Bonusblatt

51. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Man beweise oder widerlege folgende Aussagen: (2*)

(a) Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \quad (1)$$

(b) Existiert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$, so ist f in x_0 differenzierbar und es gilt Gleichung (1).

52. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. (2*)

(a) Gibt es Zahlen $K > 0$ und $\alpha > 1$ mit $|f(x)| \leq K|x|^\alpha$ für $x \in I$, so ist f in 0 differenzierbar.

(b) Gilt $f(0) = 0$ und gibt es $K > 0$ und $\alpha \in (0, 1)$ mit $|f(x)| \geq K|x|^\alpha$ für $x \in I$, so ist f in 0 nicht differenzierbar.

53. Es seien $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ zwei offene Intervalle. Betrachte das offene Rechteck $C \subset \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene, welches durch (1*)

$$C := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy \text{ mit } x \in I_1, y \in I_2\}$$

definiert ist. Es sei $z_0 \in C$. Eine Funktion $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ heißt im Punkt z_0 differenzierbar, falls

$$\exists c \in \mathbb{C} : c = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ in keinem Punkt differenzierbar ist.

54. Gegeben sei die Menge (2*)

$$M_1 := \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 22, \dots, 30, 32, 33, \dots\}$$

also die Menge aller natürlichen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung keine 1 auftaucht. Zeige, dass

$$\sum_{n \in M_1} \frac{1}{n} < \infty.$$

55. Zeige die Konvergenz und berechne den Wert von (3*)

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

d.h. den Grenzwert der rekursiv definierten Folge (a_n) mit $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}$.

Dieses Blatt ist ein Bonusblatt. Es können bis zu 10 Bonuspunkte erreicht werden. Die Abgabe des Blattes ist bereits am Dienstag. Die Lösung nur abgeben, falls noch Punkte für die Vorleistung benötigt werden.