Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille
Marc Schneble

Sommersemester 16
Blatt 5 (40 Punkte)
17.05.2016

Übungen zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe: Dienstag, 17.05.2016, bis 14:15 Uhr, H22)

1. a) Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ (iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}$ (vii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+i)^k}{k!}$ (v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ (viii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2 3^k}{(2k)!}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+2}$ (vi) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k}$

b) Bestimme den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

Hinweis: Versuche, den Ausdruck $\frac{1}{4k^2-1}$ in der Form

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}, A, B \in \mathbb{R}$$

darzustellen. (je 2 + 4 Punkte)

2. a) Zeige, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Zeige, dass

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

(3+7 Punkte)

3. *Definition:* Wir definieren den Sinus und Kosinus wie folgt:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es darf angenommen werden, dass beide Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

(10 Punkte)

Bonus 3) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$\mu(k) = \begin{cases} \alpha, & k \text{ gerade,} \\ \beta, & k \text{ ungerade.} \end{cases}.$$

Untersuche folgende Reihe auf absolute und bedingte Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\mu(k)}}.$$