Universität Ulm

Abgabe: Freitag, den 15.05. um 12 Uhr

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2020
Punktzahl: 10

Lösungsvorschlag Analysis 1: Blatt 3

9. Es sei K ein Körper und $a, b, c, d \in K$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen. Geben Sie in jedem Schritt die verwendeten Körperaxiome aus der Vorlesung an. (3)

(a) Ist $a \neq 0$, so besitzt die Gleichung $a \cdot x = b$ genau die Lösung $x = b \cdot a^{-1}$ (vgl. Satz 2(ii)).

Lösungsvorschlag: Wir gehen analog zum Beweis von Satz 2(i) vor:
Existenz: Definiere $x := b \cdot a^{-1}$. Dann ist $x \in K$ und

$$a \cdot x \overset{\text{Def}}{=} a \cdot (b \cdot a^{-1}) \overset{(\text{M4})}{=} a \cdot (a^{-1} \cdot b) \overset{(\text{M1})}{=} (a \cdot a^{-1}) \cdot b \overset{(\text{M3})}{=} 1 \cdot b \overset{(\text{M4})}{=} b \cdot 1 \overset{(\text{M2})}{=} b.$$

Eindeutigkeit: Es sei $a \cdot x = b$. Dann folgt

$$\begin{aligned} a \cdot x = b \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b &\overset{(\text{M1})}{\Rightarrow} (a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot b \overset{(\text{M4})}{\Rightarrow} (a \cdot a^{-1}) \cdot x = b \cdot a^{-1} \\ &\overset{(\text{M3})}{\Rightarrow} 1 \cdot x = b \cdot a^{-1} \overset{(\text{M4})}{\Rightarrow} x \cdot 1 = b \cdot a^{-1} \overset{(\text{M2})}{\Rightarrow} x = b \cdot a^{-1}. \end{aligned}$$

(b) $(-1) \cdot a = -a$ und $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$ (vgl. Satz 3(iii)).

Lösungsvorschlag: Es seien $a, b \in K$. Wegen (A3) ist $0 = b + (-b)$. Mit

$$a \cdot 0 \overset{(\text{A2})}{=} a \cdot (0 + 0) \overset{(\text{D})}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$$

folgt $a \cdot 0 = 0$ und damit

$$0 = a \cdot 0 \overset{(\text{A3})}{=} a \cdot (b + (-b)) \overset{(\text{D})}{=} a \cdot b + a \cdot (-b) \Rightarrow -(a \cdot b) = -(a \cdot b) + a \cdot b + a \cdot (-b) \overset{(\text{A3})}{=} a \cdot (-b).$$

Mit einer analogen Rechnung folgt auch $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$.
Die Gleichung $(-1) \cdot a = -a$ ist ein Spezialfall des eben Gezeigten. Denn mit $b = 1$ gilt

$$(-1) \cdot a = (-b) \cdot a \overset{(\text{M4})}{=} a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -(a \cdot 1) \overset{(\text{M2})}{=} -a.$$

(c) Ist $b \cdot c \cdot d \neq 0$, dann gilt (vgl. Satz 3(v))

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Lösungsvorschlag: Es gilt mit Satz 3(i)

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &\overset{(\text{Def})}{=} \frac{a \cdot b^{-1}}{c \cdot d^{-1}} \overset{(\text{Def})}{=} (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})^{-1} \overset{3(\text{i})}{=} (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot d) \\ &\overset{(\text{M1})}{=} a \cdot (b^{-1} \cdot c^{-1}) \cdot d \overset{3(\text{i})}{=} a \cdot (b \cdot c)^{-1} \cdot d \overset{(\text{M4})}{=} a \cdot d \cdot (b \cdot c)^{-1} \overset{(\text{Def})}{=} \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \overset{(\text{Def})}{=} \frac{ad}{bc}. \end{aligned}$$

10. Es sei K ein angeordneter Körper und $a, b, c, d \in K$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen: (2)

(a) Aus $x > y > 0$ folgt $xy^{-1} > 1$.

Lösungsvorschlag: Mit Satz 4(ix) gilt: $y > 0 \Rightarrow y^{-1} > 0$. Nach Voraussetzung ist $x > y > 0$, also $x - y > 0$. Mithilfe der Monotonie bezüglich der Multiplikation erhalten wir somit

$$\begin{aligned} 0 < (x - y) \cdot y^{-1} &\overset{(\text{M4})}{=} y^{-1} \cdot (x - y) \overset{(\text{D})}{=} y^{-1} \cdot x + y^{-1} \cdot (-y) \overset{\text{Satz 3(iii)}}{=} y^{-1} \cdot x - (y^{-1} \cdot y) \\ &\overset{(\text{M4})}{=} x \cdot y^{-1} - (y \cdot y^{-1}) \overset{(\text{M3})}{=} x \cdot y^{-1} - 1, \end{aligned}$$

also $x \cdot y^{-1} > 1$.

(b) Ist $a < c < b$, so gibt es eine eindeutige Zahl $\lambda \in (0,1)$ mit $c = \lambda a + (1-\lambda)b$.

Lösungsvorschlag: Existenz: Definiere $\lambda := \frac{c-b}{a-b}$. Da nach Voraussetzung $a < c$, folgt mit Satz 4(iv), dass auch $a - b < c - b$ und Satz 4(v) impliziert (beachte, dass $(a-b)^{-1} < 0$) $\frac{c-b}{a-b} < 1$. Mit $c - b < 0$ und $(a-b)^{-1} < 0$ ist wegen Satz 4(v) $\frac{c-b}{a-b} > 0$ und somit $\lambda \in (0,1)$. Wir zeigen nun, dass λ die Gleichung $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ erfüllt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lambda a + (1-\lambda)b &\overset{\text{(Def)}}{=} \frac{c-b}{a-b} \cdot a + (1 - \frac{c-b}{a-b})b \\
&\overset{\text{(M3)}}{=} (c-b)(a-b)^{-1}a + ((a-b)(a-b)^{-1} - (c-b)(a-b)^{-1})b \\
&\overset{\text{(D)}}{=} (c-b)(a-b)^{-1}a + ((a-b) - (c-b))(a-b)^{-1})b \\
&\overset{\text{3(i)}}{=} (c-b)(a-b)^{-1}a + ((a-c)(a-b)^{-1})b \overset{\text{(M1)}}{=} (c-b)(a-b)^{-1}a + (a-c)(a-b)^{-1}b \\
&\overset{\text{(M4)}}{=} (c-b)a(a-b)^{-1} + (a-c)b(a-b)^{-1} \overset{\text{(D)}}{=} ((c-b)a + (a-c)b)(a-b)^{-1} \\
&\overset{\text{(D)}}{=} (ca - ba + ab - cb)(a-b)^{-1} \overset{\text{(M4)}}{=} (ca - ba + ba - cb)(a-b)^{-1} \\
&\overset{\text{(A3)}}{=} (ca + 0 - cb)(a-b)^{-1} \overset{\text{(M2)}}{=} (ca - cb)(a-b)^{-1} \\
&\overset{\text{(D)}}{=} (c(a-b))(a-b)^{-1} \overset{\text{(M1)}}{=} c((a-b)(a-b)^{-1}) \\
&\overset{\text{(M3)}}{=} c \cdot 1 \overset{\text{(M2)}}{=} c.
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit:

$$\begin{aligned}
c = \lambda a + (1-\lambda)b &\overset{\text{(D)}}{\Rightarrow} c = \lambda a + 1 \cdot b - \lambda \cdot b \overset{\text{(A4)}}{\Rightarrow} c = \lambda a - \lambda \cdot b + 1 \cdot b \\
&\overset{\text{(D)}}{\Rightarrow} c = \lambda(a-b) + 1 \cdot b \overset{\text{(M4)}}{\Rightarrow} c = \lambda(a-b) + b \cdot 1 \\
&\overset{\text{(M2)}}{\Rightarrow} c = \lambda(a-b) + b \Rightarrow c + (-b) = \lambda(a-b) + b + (-b) \\
&\overset{\text{(A3)}}{\Rightarrow} c - b = \lambda(a-b) + 0 \overset{\text{(A2)}}{\Rightarrow} c - b = \lambda(a-b) \\
&\Rightarrow (c-b)(a-b)^{-1} = \lambda(a-b)(a-b)^{-1} \overset{\text{(M3)}}{\Rightarrow} (c-b)(a-b)^{-1} = \lambda \cdot 1 \\
&\overset{\text{(M2)}}{\Rightarrow} (c-b)(a-b)^{-1} = \lambda \overset{\text{(Def)}}{\Rightarrow} \lambda = \frac{c-b}{a-b}.
\end{aligned}$$

11. Es sei K ein angeordneter Körper und $A, B \subset K$ seien nichtleer. Für eine beliebige nichtleere Teilmenge $A \subset K$ definieren wir $-A = \{-a : a \in A\}$. Zeigen Sie folgenden Aussagen: (3)

(a) Falls $\max A$ existiert, so existiert auch $\min -A$ und es gilt $\min -A = -\max A$.

Lösungsvorschlag: Es sei $M := \max A$. Dann gilt $M \in A$ und $M \geq a$ für alle $a \in A$. Nach Definition von $-A$ ist $-M \in -A$ und mit Satz 4(v) erhalten wir, dass $-M \leq -a$ für alle $a \in A$. Also existiert $\min -A$ und es gilt $\min -A = -\max A$.

(b) Ist $A \subset B$ und existieren $\min A$ und $\min B$, so ist $\min A \geq \min B$.

Lösungsvorschlag: Es gilt $m_A := \min A \leq a$ für alle $a \in A$ und $m_B := \min B \leq b$ für alle $b \in B$. Da $A \subset B$, gilt $a \in A \Rightarrow a \in B$. Somit folgt $m_B \leq a$ für alle $a \in A$. Wegen $m_A \in A$ folgt insbesondere $m_B \leq m_A$.

(c) Existieren $\max A$ und $\max B$, so existiert auch $\max A \cup B$ und es gilt $\max A \cup B = \max\{\max A, \max B\}$.

Lösungsvorschlag: Zunächst nehmen wir an, dass $M := \max A \cup B$ existiere. Dann gilt $M \in A \cup B$ und $M \geq x$ für alle $x \in A \cup B$. Insbesondere folgt dann sowohl $M \geq a$ für alle $a \in A$ als auch $M \geq b$ für alle $b \in B$. Wegen $\max A \in A$ und $\max B \in B$ ist dann auch $M \geq \max\{\max A, \max B\}$.
Es ist $\max A \geq a$ für alle $a \in A$ und $\max B \geq b$ für alle $b \in B$. Gilt nun $\max A \geq \max B$, so folgt insbesondere, dass $\max A \geq b$ für alle $b \in B$, also auch $\max A \geq x$ für alle $x \in A \cup B$. Somit muss in dem Fall $\max A \geq M$ gelten. Ist nun $\max B > \max A$, so folgt mit einer analogen Argumentation, dass $\max B \geq M$. Wir erhalten also $\max\{\max A, \max B\} \geq M$.
Insgesamt haben wir gezeigt, dass $\max A \cup B \geq \max\{\max A, \max B\} \geq \max A \cup B$. Daher folgt $\max A \cup B = \max\{\max A, \max B\}$. Die Existenz von $\max A \cup B$ ergibt sich nun aus der Existenz von $\max A$, $\max B$ und des Maximums der beiden Zahlen.

12. Es sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge einer nichtleeren Menge X. Sind $A, B \in \mathcal{P}(X)$, so definieren wir die symmetrische Differenz $\triangle : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ durch $\triangle(A, B) := A\triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ zusammen mit $\triangle$ eine abelsche Gruppe bildet (also prüfe die Axiome der Addition (A1)-(A4)). Was ist das Nullelement dieser Gruppe? Wie lautet die Inverse zu $A \in \mathcal{P}(X)$? (2)

Lösungsvorschlag: Die Kommutativität folgt aus der Kommutativität der Mengenoperationen $\cup$ und $\cap$. Für die Assoziativität seien drei Mengen $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ gegeben. Dann folgt mit dieser sehr langen Rechnung (Sorry! Wer eine Abkürzung weiß, bitte melden.)

$$
\begin{aligned}
(A\triangle B)\triangle C &\overset{\text{Def}}{=} ((A\triangle B) \cup C) \setminus ((A\triangle B) \cap C) \overset{\text{Def}}{=} \big((A\triangle B) \cup C\big) \cap \big((A\triangle B) \cap C\big)^c \\
&\overset{\text{Def}}{=} \Big(((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) \cup C\Big) \cap \Big(((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) \cap C\Big)^c \\
\text{((D) + dM)} &= \Big(((A \cup B) \cup C) \cap \big((A \cap B)^c \cup C\big)\Big) \cap \Big(\big((A \cup B) \cap (A \cap B)^c\big)^c \cup C^c\Big) \\
\text{((A)+dM+dM)} &= \big((A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C)\big) \cap \big((A \cup B)^c \cup (A \cap B) \cup C^c\big) \\
\text{(dM)} &= \big((A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C)\big) \cap \big((A^c \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup C^c\big) \\
\text{(D)} &= \big((A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C)\big) \cap \Big(\big(\underbrace{(A^c \cup A)}_{=X} \cap (A^c \cup B) \cap (B^c \cup A) \cap \underbrace{(B^c \cup B)}_{=X}\big) \cup C^c\Big) \\
\text{(D)} &= \big((A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C)\big) \cap \big((A^c \cup B \cup C^c) \cap (B^c \cup A \cup C^c)\big) \\
\text{(A)} &= (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C) \cap (A^c \cup B \cup C^c) \cap (A \cup B^c \cup C^c) \\
\text{(K)} &= (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B^c \cup C^c) \cap (A^c \cup B^c \cup C) \cap (A^c \cup B \cup C^c) \\
\text{(D)} &= \Big(A \cup \big((B \cup C) \cap (B^c \cup C^c)\big)\Big) \cap \Big(A^c \cup \big((B^c \cup C) \cap (B \cup C^c)\big)\Big) \\
\text{(dM+dM)} &= \Big(A \cup \big((B \cup C) \cap (B \cap C)^c\big)\Big) \cap \Big(A \cap \big((B^c \cup C) \cap (B \cup C^c)\big)^c\Big)^c \\
\text{(Def + (D))} &= \big(A \cup (B\triangle C)\big) \cap \Big(A \cap \big(\underbrace{(B^c \cap B)}_{=\emptyset} \cup (B^c \cap C^c) \cup (C \cap B) \cup \underbrace{(C \cap C^c)}_{=\emptyset}\big)^c\Big)^c \\
\text{(dM + (K))} &= \big(A \cup (B\triangle C)\big) \cap \Big(A \cap \big((B \cup C)^c \cup (B \cap C)\big)^c\Big)^c \\
\text{(dM)} &= \big(A \cup (B\triangle C)\big) \cap \Big(A \cap \big((B \cup C) \cap (B \cap C)^c\big)^c\Big) \\
\text{(Def)} &= \big(A \cup (B\triangle C)\big) \cap \big(A \cap (B\triangle C)\big)^c \\
\text{(Def)} &= A\triangle(B\triangle C).
\end{aligned}
$$

Hierbei steht (K) für das Kommutativgesetz, (D) für die Distributivgesetze, (A) für das Assoziativgesetz, dM für die de Morganschen Gesetze und Def für Definition. Somit ist $\triangle$ assoziativ.
Für das Nullelement N der Gruppe muss gelten: $A\triangle N = A$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$. Gute Kandidaten für solche Elemente sind $\emptyset$ und X. Wir probieren aus:

$$A\triangle\emptyset = (A \cup \emptyset) \cap (A \cap \emptyset)^c = A \cap \emptyset^c = A \cap X = A.$$

Also ist das Nullelement gegeben durch die leere Menge $\emptyset$.
Zuletzt muss für die Inverse A^{-1} von A gelten, dass $A\triangle A^{-1} = \emptyset$. Als mögliche inverse Elemente kommen A oder A^c in Frage. Wir probieren wieder aus:

$$A\triangle A = (A \cup A) \cap (A \cap A)^c = A \cap A^c = \emptyset.$$

Es gilt somit $A^{-1} = A$, d.h. $A \in \mathcal{P}(X)$ ist zu sich selbst invers. Somit sind die Axiome (A1)-(A4) erfüllt und durch $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ ist eine abelsche Gruppe definiert.