Dr. Jan-Willem Liebezeit
Lukas Fuchs
Niklas Eiermann
SoSe 2024

12 Übungspunkte

Übungen zu: Mathematik für Informatik II Blatt 05

Lösung

1. (NA) Minifragen

Zeigen oder widerlegen sie:

1. Wenn eine Matrix nur positive Einträge hat, sind alle ihre Eigenwerte positiv.

   Lösung: Falsch, z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, dass $\det(A - \lambda I_2) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$. Somit besitzt A mit -1 einen negativen Eigenwert.

2. Falls A und $-A$ dieselben Eigenwerte besitzen, dann ist A nicht invertierbar.

   Lösung: Falsch, betrachten Sie beispielsweise $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A^{-1} = A$ als Gegenbeispiel.

3. Bei einer Dreiecksmatrix stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen.

   Lösung: Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{K})$ eine obere Dreiecksmatrix.

   Dann gilt $\det(A - \lambda I_n) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda)$ nach Skript. Somit stehen alle Eigenwerte von A auf ihrer Diagonalen. Für eine untere Dreiecksmatrix kann dies analog gezeigt werden.

2. (A) Diagonalisieren von Matrizen

Es sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie Basen der Eigenräume von A. (2)

Lösung:

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3)\\
&= ((-6)\cdot 2\cdot 3) + (5-\lambda)(4-\lambda)(-4-\lambda) + ((-1)\cdot(-6)\cdot(-6))\\
&\qquad - ((-1)\cdot(-6)\cdot(-4-\lambda)) - (3\cdot(4-\lambda)\cdot(-6)) - ((-6)\cdot 2\cdot(5-\lambda))\\
&= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4\\
&= -(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4)\\
&= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2\\
&\overset{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ EWe von A sind gegeben durch $\lambda_1 = 1$ mit alg. Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 2$ mit alg. Vielfachheit 2.

$N_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -5\end{pmatrix} \underset{4Z_3-3Z_1}{\overset{4Z_2+Z_1}{=}} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6\\ 0 & 6 & 2\\ 0 & -6 & -2\end{pmatrix}$

$\underset{\frac{1}{6}Z_2}{\overset{Z_3+Z_2}{=}} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \overset{\frac{1}{4}Z_1+\frac{3}{2}Z_2}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1\\ -\frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix} \rangle.$

$N_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(A-\lambda_2 I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -6 & -6\end{pmatrix} \underset{Z_3-Z_1}{\overset{3Z_2+Z_1}{=}} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\overset{\frac{1}{3}Z_1}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \rangle$. Somit sind die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte λ_1, λ_2 jeweils gleich ihrer algebraischen Vielfachheit.

2. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. (1)

   Lösung: Wir wählen $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ -\frac{1}{3} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\left(S \mid I_3 \right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \underset{Z_3-Z_1}{\overset{3Z_2+Z_1}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\\
&\underset{\frac{1}{5}Z_2}{\overset{5Z_3+2Z_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & -1 & -3 & 6 & 5\end{array}\right) \underset{-Z_3}{\overset{Z_2+\frac{2}{5}Z_3}{=}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -5\end{array}\right)\\
&\overset{Z_1-2Z_2-2Z_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 6 & 6\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -5\end{array}\right) \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -5\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

   Dann erhalten wir $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} := D.$

3. Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$. (1)

Lösung:

$$\begin{aligned} A^n &= (SDS^{-1})^n \\ &= \underbrace{SDS^{-1} \cdot \ldots \cdot SDS^{-1}}_{n\text{-mal}} \\ &= SD^nS^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - 3 & -6 \cdot 2^n + 6 & -6 \cdot 2^n + 6 \\ -2^n + 1 & 3 \cdot 2^n - 2 & 2 \cdot 2^n - 2 \\ 3 \cdot 2^n - 3 & -6 \cdot 2^n + 6 & -5 \cdot 2^n + 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Führen Sie die obigen Schritte 1 und 2 auch für die Matrix B statt A durch, falls möglich:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)

Lösung: $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$ EWe von B sind gegeben durch $\lambda_1 = 2$ mit alg. Vielfachheit 3.

$N_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(B - \lambda_1 I_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Somit besitzt der Eigenwert λ_1 eine geometrische Vielfachheit von 1, d.h. die geometrische Vielfachheit ist in diesem Fall kleiner als die algebraische Vielfachheit. Daher ist B nicht diagonalisierbar.

3. (A) Die Fibonacci-Folge

Wir betrachten die Fibonacci-Folge mit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n \geq 2$.

1. Bestimmen Sie eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$. (2)

   Lösung: Wähle $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$.

2. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A. (2)

   Lösung: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \Rightarrow A$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Für die folgenden Rechnungen sind folgende Identitäten hilfreich:

   i) $\lambda_1 \lambda_2 = -1$

   ii) $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

   Da $P_A(\lambda)$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt, ist A diagonalisierbar.

   $$\begin{aligned} N_{\lambda_1} &= \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_2) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \overset{Z_1 \leftrightarrow Z_2}{=} \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{Z_2 + \lambda_1 Z_1}{=} \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

$$N_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1-\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \overset{Z_1 \leftrightarrow Z_2}{=} \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{Z_2+\lambda_2 Z_1}{=} \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

3. Bestimmen Sie A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. (1)

   Lösung: Wir invertieren $S = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und erhalten $S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ -1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$.
   Sei nun entsprechend $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\begin{aligned} A^n &= (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ -1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Folgern Sie aus dem letzten Schritt, dass das n-te Glied der Fibonacci-Folge die Darstellung

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

   besitzt. (1)

   Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} & A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow\ & x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n). \end{aligned}$$

4. (A) Eigenschaften von Eigenwerten

Zeigen Sie

(a) Ist $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ symmetrisch, so sind alle Eigenwerte von A reell . (1)

   Lösung: Seien $a, b, d \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ symmetrisch. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 \\ &= (\lambda - \frac{a+d}{2})^2 - (\frac{a+d}{2})^2 + ad - b^2 \\ &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \lambda - \frac{a+d}{2} = \sqrt{(\frac{a+d}{2})^2 - ad + b^2} \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{a+d}{2} + \sqrt{(\frac{a+d}{2})^2 - ad + b^2} \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{a+d}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 - 4ad + 4b^2} \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{a+d}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2 + 4b^2} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

(b) Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann ist $-\lambda$ ein Eigenwert von $-A$. (1)
Lösung: $-Av = -(Av) = -(\lambda v) = -\lambda v$

(c) $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann nicht invertierbar, wenn 0 ein Eigenwert von A ist . (1)
Lösung:

A nicht invertierbar $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow 0 = \det(A - 0I_n) = P_A(0) \Leftrightarrow 0$ EW von A

(d) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ invertierbar und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, dann ist $\lambda \neq 0$ und $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1} . (1)
Lösung: A invertierbar $\overset{c)}{\Rightarrow}$ 0 kein EW von $A \Rightarrow \lambda \neq 0$ und es exisitert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$, für das $Ax = \lambda x$ gilt.

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x = \lambda A^{-1}x \\
&\Leftrightarrow \lambda^{-1}x = A^{-1}x \\
&\Rightarrow \lambda^{-1} \text{ EW von } A^{-1}.
\end{aligned}
$$

(e) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, dann ist für $m \in \mathbb{N}$ auch λ^m ein Eigenwert von A^m . (1)
Lösung: Es existiert ein $x \neq 0$, für das gilt, dass

$$
\begin{aligned}
&Ax = \lambda x \\
\Rightarrow\ &A^m x = A^{m-1}\lambda x = \lambda A^{m-1}x = \lambda A^{m-2}\lambda x = \lambda^2 A^{m-2}x = \ldots = \lambda^m x.
\end{aligned}
$$

(f) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, dann haben A und $A^\top$ das gleiche charakteristische Polynom und die gleichen Eigenwerte . (1)
Lösung:

$$
\begin{aligned}
P_{A^\top}(\lambda) &= \det(A^\top - \lambda I_n) \\
&= \det(A^\top - (\lambda I_n)^\top) \\
&= \det((A - \lambda I_n)^\top) \\
&= \det(A - \lambda I_n) \\
&= P_A(\lambda)
\end{aligned}
$$

5. (A) Diagonalisierbarkeit von Matrizen

a) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt nilpotent, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, für dass $A^m = 0$ gilt. Zeigen Sie:

i) Falls $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ nilpotent ist, dann hat A nur den Eigenwert 0. (2)

Lösung: λ EW von $A \overset{4.(e)}{\Rightarrow} \lambda^m$ EW von $A^m = 0 \Rightarrow \lambda^m = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

ii) Falls $0 \neq A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ nilpotent ist, ist A nicht diagonalisierbar. (1)

Lösung: Nach i) gilt $P_A(\lambda) = \lambda^n$. A ist also genau dann diagonalisierbar, wenn die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 0 gleich n ist. Aber dann muss $\{x\colon Ax = 0\} = \mathbb{R}^n$ sein, was nur für $A = 0$ gelten kann. Widerspruch.

b) Zeigen Sie: Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, so sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal (bzgl. des Standardskalarprodukts). (3)

Lösung: Seien λ, μ versch. EWe von A mit EVen X, y, sodass $Ax = \lambda x$ und $Ay = \mu y$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\lambda\langle x, y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle = (Ax)^\top y = x^\top A^\top y \overset{A \text{ symm.}}{=} x^\top Ay \\ &= \langle x, Ay\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle \\ \Leftrightarrow &\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x, y \text{ sind orthogonal zueinander.}\end{aligned}$$

6. (T),(NA) Es sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie Basen der Eigenräume von A.
2. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
3. Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

Führen Sie die obigen Schritte auch für die folgende Matrix durch, falls möglich:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. (T), (NA)

(a) Es sei $G = (g_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix, deren Spaltensummen alle 1 sind, d.h.

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \left(\sum_{i=1}^{n} g_{ij} = 1\right).$$

Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert von G ist.

(b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen über orthogonale Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

(a) $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot\rangle$ das kanonische Skalarprodukt bezeichnet.

(b) $\det A \in \{1, -1\}$.

(c) Zeigen Sie, dass die orthogonalen Matrizen A mit $\det A = 1$ eine Untergruppe von $O(n)$ bilden. Diese wird mit $SO(n)$ bezeichnet.

Erläuterungen zur Bearbeitung und Abgabe:

(NA) Die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht aufschreiben und abgeben.

(A) Die Lösung dieser Aufgabe schreiben Sie bitte auf und geben Sie ab.

(T) Die Aufgabe dient der Vorbereitung auf das Tutorium. Sie sollten sie mindestens in groben Zügen verstanden und durchdacht haben.

- Die Abgabe der Lösungen erfolgt **einzeln** auf Moodle als einzelne PDF Datei.
- Wir korrigieren auf jedem Übungsblatt nur jeweils zwei Aufgaben. Eine Aufgabe wird von uns festgelegt, die andere dürfen Sie sich aussuchen. Schreiben Sie dazu bitte auf jede Abgabe eine Erst- und Zweitpräferenz von Aufgaben, die wir korrigieren sollen.