Dr. Jan-Willem Liebezeit
Artur Bille
Marc Schneble

Sommersemester 16
Blatt 6 (40 Punkte)
24.05.2016

Übungen zu Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker

(Abgabe: Dienstag, 24.05.2016, bis 14:15 Uhr, H22)

1. a) Es seien die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}$ gegeben. Berechne die Summanden c_k des Cauchyproduktes dieser beiden Reihen und bestimme dessen Wert.

   b) Zeige, dass für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt:

   $$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) q^k = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

   c) Es seien $a_0 := 0$ und $a_k := (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ für $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert und das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst divergiert.

   (3+3+3 Punkte)

2. Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^k}$$

   konvergiert. (4 Punkte)

3. Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

   a) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} k^{-k} x^k$

   b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^{3k}$

   c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} x^{2k}$

   d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$

   e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

   f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)^{k^2} x^k$

   (je 2,5 Punkte)

4. Beweise die 4 Aussagen von Lemma 2.7.16. (2 +2+2+2 Punkte)

5. Zeige, dass $\cos\varphi = \mathrm{Re}(e^{i\varphi})$ und $\sin\varphi = \mathrm{Im}(e^{i\varphi})$ (4 Punkte)