Universität Ulm

Dr. Jan-Willem Liebezeit
Marcus Müller
Sommersemester 2019

Übungen Analysis 1 für Ingenieure und Informatiker: Blatt 11

52. Man bestimme folgende Stammfunktionen:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x(\log^2 x+\log x-2)}\,\mathrm{d}x.$

53. Berechne die Ober- und Untersumme der Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto e^x$ für die Zerlegung $\pi_n := \left\{[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}] : 1\le i\le n\right\}$ mit $n\in\mathbb{N}$ und bestimme dann mit diesem Ergebnis den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$.

54. Es seien $0<a<b<\infty$ und $\mu\in\mathbb{R}$. Berechne das Integral $\displaystyle\int_a^b x^\mu\,\mathrm{d}x$ durch Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mittels geometrischer Progression in n Teile und anschließendem Grenzwertübergang. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass x^μ über $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist.

55. Zeige, dass

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1} := \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}.$$

Hinweis: Setze

$$A_n := \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N},$$

berechne A_0 und A_1 und leite anschließend mithilfe von Aufgabe 51 von Blatt 10 eine Rekursionsformel für $A_n, n\ge 2$ her. Berechne damit die Werte A_{2n+1} und A_{2n} für $n\ge 1$. Betrachte dann den Quotienten A_{2n+1}/A_{2n} und gehe anschließend zum Grenzwert für $n\to\infty$ über. Der Grenzwert lässt sich mithilfe des Sandwich-Lemmas abschätzen.

56. Berechne den Wert folgender Integrale

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/2}} \cos(2\log x)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\log^5(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^4+4}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x.$

Hinweise: c) $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$ und Substitution $u=\cos(x)$, e) Zeige, dass das Integral punktsymmetrischer Funktionen über einen zum Ursprung symmetrischen Bereich verschwindet, f) (Ergebnis: π) Substitution $y=\sqrt{2}x$. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $(y-1)(y^8-16) = (y^2-2)(y^2-2y+2)(y^5+y^4+2y^3-4)$. Finde dann $A,B,C,D\in\mathbb{R}$ mit

$$\frac{y-1}{(y^2-2)(y^2-2y+2)} = \frac{Ay+B}{y^2-2}+\frac{Cy+D}{y^2-2y+2}.$$