# رابطه و تابع

## ۱.۰ حاصلضرب دکارتی دومجموعه

فرض کنیم $A$ و $B$ دو مجموعه باشند. حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه، مجموعه جدیدی است که به کمک دو مجموعه $A$ و $B$ ساخته می شود و می تواند اشیا بیشتری را توصیف نماید. مثلاً اگر رابطه ای بین عناصر $A$ و $B$ وجود داشته باشد، می تواند این رابطه را به صورتی روشن نمایش دهد. یا می تواند نمودار این ارتباطات را نمایش داد و به صورت هندسی آنها را مشاهده نمود. حتی به کمک حاصل ضرب دکارتی می توان نقاط در صفحه، نقاط در فضای و یا نقاط در فضاهای با ابعاد بالاتر را به صورت روشنی نمایش داد. بع علاوه در حاصل ضرب دکارتی زیر مجموعه هایی ظاهر می شوند که در تک تک مجموعه هایی که ضرب دکارتی را تشکیل می دهند وجود ندارند. به عنوان مثال در $\mathbb{R}$ مجموعه نقاطی که از یک نقطه به یک فاصله اند تنها دوعضو دارند در صورتی که در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ این مجموعه همان دایره معمولی است یا در $\mathbb{R}^۲\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^۳$ یک کُره می شود.

### حاصلضرب دکارتی دومجموعه

برای هر دوشیء داده شده $a$ و $b$ می توانیم شیء جدید $(a,b)$ را به نام زوج مرتب $a$ و $b$ تشکیل دهیم. صفت «مرتب» در اینجا، تاکید برآن دارد که ترتیب نوشتن اشیاء $a$ و $b$ در داخل پرانتز مهم است. بنابراین،$(a,b)$ و $(b,a)$ دو جفت مرتب متمایز هستند. باید توجه داشت که جفت مرتب $(a,b)$ با مجموعه $\{a,b\}$ یکی نیست.

یک شیوه معرفی منطقی زوج مرتب $(a,b)$ معرفی آن به صورت $\{a,\{a,b\}\}$ است. از این تعریف به این

نتیجه می رسیم که

$$(a,b)=(c,d) \iff a=c \wedge b=d$$

دو زوج مرتب $(a,b)$ و $(c,d)$ را مساوی می گوییم اگر و تنها اگر $a=c$ و $b=d$.

در هندسه تحلیلی، صفحه دکارتی را می توان مجموعه تمام جفت های مرتب اعداد حقیقی در نظر گرفت. بیان صوری این مفهوم چنین است.

**تعریف ۱.** $A$ و $B$ را دو مجموعه می گیریم. مجموعه نمام زوج های مرتب $(x,y), x\in A, y\in B$ را حاصلضرب دکارتی $A$ و $B$ نامیده و با $A\times B$ نمایش می دهند. به زبان نمادی

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$$

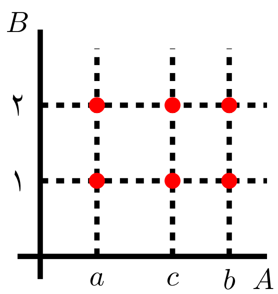
$a$ را مختص اول و $b$ را مختص دوم زوج مرتب $(a,b)$ می نامند.

**مثال ۲.** فرض کنیم $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{۱,۲\}$. حاصل ضرب دکارتی $A\times B$ و $B\times A$ عبارتند از

$$A\times B=\{(a,۱),(a,۲),(b,۱),(b,۲),(c,۱),(c,۲)\}$$

$$B\times A=\{(۱,a),(۲,a),(۱,b),(۲,b),(۱,c),(۲,c)\}$$

ملاحظه می شود که $A\times B\neq B\times A$. حاصل ضرب دکارتی را می توانیم مجموعه نقاط قرمز رنگ شکل زیر مجسم کنیم.




**مثال ۳.** $A$ یک مجموعه است. $A\times\varnothing$ ، $\varnothing\times A$ تهی هستند. زیرا بنابرتعریف، $A\times\varnothing$ مجموعه تمام زوجه های مرتب $(a,b)$ است که در آن $a\in A$ و $n$چندگونا $b\in$، و چون مجموعه $\varnothing$ هیچ عضوی ندارد، هیچ عنصری مانند $b$ در $\varnothing$ وجود ندارد. به این ترتیب $A\times\varnothing=\varnothing$. با استدلالی مشابه دیده می شود $\varnothing\times A=\varnothing$.

**قضیه ۴.** $A$، $B$، و $C$ را سه مجموعه می گیریم. آنگاه

الف) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

ب) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

اثبات. الف)

$$
\begin{aligned}
& (a,x) \in A \times (B \cap C) \\
\Longleftrightarrow\ & (a \in A) \wedge (x \in B \cap C) && \textbf{تعریف (۱)} \\
\Longleftrightarrow\ & (a \in A) \wedge (x \in B \wedge x \in C) && \textbf{تعریف } \cap \\
\Longleftrightarrow\ & (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C) && \textbf{خودتوانی، شرکت پذیری} \\
\Longleftrightarrow\ & [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \in C)] && \textbf{جابه جایی، شرکت پذیری} \\
\Longleftrightarrow\ & [(a,x) \in A \times B] \wedge [(a,x) \in A \times C] && \textbf{تعریف (۱)} \\
\Longleftrightarrow\ & (a,x) \in (A \times B) \cap (A \times C)] && \textbf{تعریف } \cap
\end{aligned}
$$

□

از این رو، بنابرتعریف تساوی دومجموعه، ثابت کردیم که

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

این تساوی به زبانی ساده چنین بیان می شود: حاصلضرب دکارتی نسبت به اشتراک پخشپذیر است.

قسمت (ب) را به روشی مشابه می توان به اثبات رساند.

**قضیه ۵.** اگر $A$، $B$ و $C$ سه مجموعه باشند، آنگاه

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

یعنی حاصل ضرب دکارتی نسبت به متممگیری پخشپذیر است.

اثبات.

$$(a, x) \in A \times (B - C)$$

$$\iff (a \in A) \wedge (x \in B - C)$$ **تعریف (۱)**

$$\iff (a \in A) \wedge [(x \in B) \wedge (x \notin C)]$$ **تعریف**

$$\iff (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)$$ **خودتوانی، شرکت پذیری**

$$\iff [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \notin C)$$ **جابه جایی، شرکت پذیری**

$$\iff [(a, x) \in A \times B] \wedge [(a, x) \notin A \times C]$$ **تعریف (۱)**

$$\iff (a, x) \in A \times B] - A \times C$$ **تعریف**

به این ترتیب ثابت کردیم که

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

□

تمرین های صفحه ۶۷، ۱، ۲، ۴، ۵، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ را حل کنید.

## ۲.۰ رابطه

به گزاره نماهای زیر توجه نمایید:

۱. در میان افراد یک جامعه « $x$» از طریق رابطه برادری با «$y$» ممکن است در رابطه قرار بگیرد. ( رابطه خانوادگی)

۲. هر دانشجویی از طریق یک شماره دانشجویی به طور یکتایی مشخص می شود ( رابطه بین دانشجویان و مجموعه اعداد طبیعی).

۳. هر ایرانی از طریق یک شماره ملی به طور یکتایی مشخص می شود ( رابطه بین افراد با تابعیت ایران و اعداد ۹ رقمی طبیعی).

۴. هر فرد روی این زمین از طریق ملیت خود با دیگر افراد جامعه در ارتباط قرار می گیرد ( رابطه فرد با ملیت).

۵. هر عضو مجموعه $A$ مجذور یک عضو مجموعه $\mathbb{R}$ است.

۶. هر عضو مجموعه $\mathbb{Z}$، از طرق تقسیم بر ۷ با یکی از اعداد ۰ یا با ۱ یا با ۲ یا با ۳ یا با ۴ یا با ۵ یا با ۶ در ارتباط است.

۷. با دیدن این سلسله مثال ها، آیا شما هم می توانید مثال خودتان را ارائه نمایید؟

این مثال و مثال های بیشمار دیگر، نشان از «ارتباط داشتن» یک عضو از یک مجموعه با یک عضو از یک مجموعه دیگر است.

چون نمی توانیم لیست مثال های فوق را ادامه دهیم، سعی می کنیم به صورت کلی و دقیق آن را توصیف کنیم و بعد به کمک این توصیف رابطه های جدید را بشناسیم و خواص یک مجموعه را به کمک این رابطه، از یک مجموعه دیگر نتیجه بگیریم. یکی از پایه ای ترین مفاهیم در ریاضیات مفهوم «رابطه» است. به خصوص رابطه ای به نام «تابع» می تواند خواص بسیاری از یک مجموعه را به یک مجموعه دیگر سرایت دهد و خواص مجموعه جدید را به کمک مجموعه اولیه بررسی و آن خواص را شناخت. در این قسمت می خواهیم تعریفی دقیق از مفهوم رابطه ارائه دهیم.

فرض کنیم دو مجموعه $A$ و $B$، که الزاماً متمایز نیستند، داده شده اند. جمله « یک عنصر $a$ از $A$ با یک رابطه $R$ به یک عنصر $b$ از مجموعه $B$ نظیر شده است» گزاره ای است درباره زوج مرتب $(a, b)$ در حاصل ضرب دکارتی $A \times B$. از این رو، تعریف ریاضی رابطه را می توان برحسب زوج های مرتب حاصل ضرب دکارتی مجموعه ها بیان کرد.

**تعریف ۶.** یک زیر مجموعه حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را یک رابطه $R$ از $A$ به $B$ می نامیم. معمولاً به جای $(a, b) \in R$ می نویسند $aRb$. نماد $aRb$ خوانده می شود « $a$ با $R$ به $b$ مربوط است».

**تمرین ۷.** فرض کنید $R$ یک رابطه در $A$ باشد و $aRb \iff (a,b) \in R$. نقیض این رابطه را بنویسید.

**مثال ۸.** ۱. برای مثال ۱، اگر $P$ جامعه انسانی باشد رابطه $x$ برادر $y$ است یک زیر مجموعه $P \times P$ است.

۲. اگر $S$ مجموعه دانشجویان باشد، «رابطه $x$ دارای شماره دانشجویی $n$ است، یک زیر مجموعه $S \times \mathbb{N}$ است.

۳. اگر $A = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشد، آنگاه مانده تقسیم $n$ یک زیر مجموعه از $\mathbb{Z} \times A$ به دست می دهد.

اغلب مجموعه های $A$ و $B$ یکی هستند، در اینصورت این دو مجموعه را $X$ می نامیم و به جای این که بگوییم « $R$ یک رابطه از $X$ در $X$ است» می گوییم « $R$ یک رابطه در $X$ است».

۱. فرض کنیم $F$ خانواده فرهمند باشند. آنگاه $a$ برادر $b$ است یک رابطه در این خانواده است.

۲. فرض کنیم $N$ مجموعه اهالی یک کشور خاص، مثلاً ایران باشند. آنگاه $a$ و $b$ ایرانی هستند، یک زوج مرتب $(a,b) \in N \times N$ تعریف می کند.

۳. فرض کنیم $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد. آنگاه $n$ مکعب یک عضو $a$ است یک رابطه در $\mathbb{N}$ است که زوج مرتب $(a, n = a^۳)$ را توصیف می کند.

توجه کنید که در اینجا نمی توان گفت $(n,a)$ به رابطه بالا تعلق دارد زیرا ممکن است $a$ توان سوم $n$ نباشد.

به طور کلی اگر از این که زوج مرتب $(a,b)$ به $R$ تعلق دارند بتوان نتیجه بگیریم زوج مرتب $(b,a)$ هم به $R$ تعلق دارد، به $R$ ویژگی خاصی می دهد. یعنی

**تعریف ۹.** فرض کنیم $A$ و $B$ دومجموعه، که الزاماً متمایز نیستند، باشند. اگر $R$ رابطه ای از $A$ به $B$ باشد، آنگاه « وارون رابطه $R$، $R^{-۱}$ » رابطه ای است از $B$ به $A$، به قسمی که $bR^{-۱}a$ اگر و تنها اگر $aRb$. یعنی

$$R^{-۱} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}.$$

**مثال ۱۰.** ۱. (الف) فرض کنیم $A = \{a,b\}$ و $B = \{x,y,z\}$ و $R \subseteq A \times B$ به صورت $R = \{(a,x),(b,y)\}$ داده شده است. آنگاه $R^{-۱} = \{(x,a),(y,b)\}$ است.

۲. (ب) فرض کنیم

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} | \textbf{را بخش می کند} y, x\}$$

آنگاه

$$R^{-۱} = \{(y,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} | \textbf{است} \; x \; \textbf{مضربی از} \; y\}$$

۳. (پ) فرض کنیم $R$ یک رابطه روی مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد. فرض کنید رابطه $R$ به صورت زیر باشد

$$R = \{(۵,۱), (۵,۲), (۵,۳), (۵,۴), (۵,۵), (۴,۱), (۴,۲), (۴,۳), (۴,۴), (۳,۱), (۳,۲), (۳,۳), (۲,۱), (۲,۲), (۱,۱)\}$$

آنگاه

$$R^{-۱} = \{(۱,۵,), (۲,۵), (۳,۵), (۴,۵), (۵,۵), (۴,۱), (۴,۲), (۴,۳), (۴,۴), (۳,۱), (۳,۲), (۳,۳), (۲,۱), (۲,۲), (۱,۱)\}$$

به طور کلی

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} | x \geq y\}$$

آنگاه

$$R^{-۱} = \{(y,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} | y \geq x\}$$

فرض کنیم $R$ یک رابطه از $A$ به $B$ باشد. **حوزه** $R$ که با $\mathbf{Dom}(R)$ نشان داده می شود، مجموعه تمام عنصرهای $a \in A$ است به قسمی که $aRb$ برای یک $b \in B$ و **نگاره** که به $\mathbf{Im}(R)$ نشان داده می شود، مجموعه تمام عنصرهای $b \in B$ است به قسمی که $aRb$ برای یک $a \in A$. به زبان نمادی

$$\mathbf{Dom}(R) = \{a \in A| \; (a,b) \in R, b \in B \; \textbf{برای یک}\}$$

و

$$\mathbf{Im}(R) = \{n \in B| \; (a,b) \in R, a \in A \; \textbf{برای یک}\}$$

در مثال ۵ (الف)، $\mathbf{Dom}R = \{a,b\}$ و $\mathbf{Im}(R) = \{x,y\}$.

**مثال ۱۱.**

**تعریف ۱۲.** فرض کنید $R$ رابطه ای در مجموعه $X$ است. می گوییم

(الف) $R$ انعکاسی ( بازتابی) است اگر و فقط اگر $xRx$ به ازای هر $x \in X$.

(ب) رابطه $R$ متقارن است اگر و فقط اگر $xRy$ نتیجه شود $yRx$.

$$xRy \Longrightarrow yRx$$

(پ) $R$ متعدی است اگر و فقط اگر $xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz$.

(ت) $R$ یک رابطه **هم ارزی است** اگر و فقط اگر $R$ هم **انعکاسی**، هم **متقارن** و هم **متعدی** باشد.

**تمرین ۱۳.** بنابرتعریف $R$ یک رابطه هم ارزی است اگر و فقط اگر ( $R$ انعکاسی باشد $\wedge$ متقارن باشد $\wedge$ متعدی باشد

حال نقیض $R$ یک رابطه هم ارزی است را بنویسید.

**مثال ۱۴.** ۱. رابطه تساوی $=$، در مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، یک رابطه هم ارزی است.

۲. فرض کنیم یک کیسه حاوی گوی های رنگارنگ است. آنگاه رابطه « گوی های $a$ و $b$ همرنگ اند » یک رابطه هم ارزی در مجموعه گوی ها است.

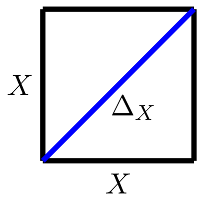
۳. فرض کنید $C$ مجموعه تمام دانشجویان درس مبانی ریاضی باشد. آنگاه رابطه « دانشجوی $a$ با دانشجوی $b$ هم ارز است اگر و فقط اگر حرف اول نام فامیل $a$ با حرف اول نام فامیل $b$ یکی باشد.

رابطه های هم ارزی در ریاضیات نوین از اهمیت خاصی برخوردار اند. مثلاً گروه های خارج قسمتی در جبر، فضاهای خارج قسمتی در توپولوژی، و دستگاه اعداد هم نهشت در نظریه اعداد، همگی به نوعی از رابطه های هم ارزی مربوط هستند.

در یک مجموعه ناتهی $X$، همواره لااقل دو رابطه هم ارزی وجود دارد. یکی از این دو رابطه، « رابطه قطری $\Delta_X$ ( یا رابطه همانی) است» که با

$$\Delta_X = \{(x,x) | x \in X\}$$

تعریف می شود و هر عنصر را به خودش نظیر می کند. اگر $X$ را با یک پاره خط نمایش دهیم، آنگاه $X \times X$ یک مربع و $\Delta_X$ قطر «اصلی» این مربع است.



رابطه هم ارزی دیگر که همیشه روی مجموعه $X$ وجود دارد، رابطه $R = X \times X$ است که در بین تمام رابطه های هم ارزی که در زیر مجموعه های $X \times X$ می توان تعریف کرد، $\Delta_X$ کوچکترین رابطه هم ارزی و $X \times X$ بزرگترین است.

**مثال ۱۵.** فرض کنید $m$ عددی صحیح و مثبت، ثابت و دلخواه است. رابطه همنهشتی $\equiv$ به پیمانه $m$، ( یا مدولو $m$ [1]) در مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، با « $x \equiv y (\mod m)$ اگر و تنها اگر $x - y = km$ به ازای یک $k \in \mathbb{Z}$ » تعریف می شود. رابطه هم نهشتی یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است.

اثبات. (الف) برای هر $x \in \mathbb{Z}$، چون $x - x = 0 \cdot m$، پس داریم $x \equiv x (\mod m)$. بنابراین رابطه هم نهشتی، یک رابطه انعکاسی است.

(ب) اگر $x \equiv y (\mod m)$، آنگاه برای یک $k \in \mathbb{Z}$، $x - y = km$. درنتیجه $y - x = (-k)m$ و در آن $-k \in \mathbb{Z}$. پس $y \equiv y (\mod m)$ و رابطه متقارن است.

(پ) اگر $x \equiv y (\mod m)$ و $y \equiv z (\mod m)$ آنگاه $x - y = k_1 m$ و $y - z = k_2 m$، به ازای یک $k_1 \in \mathbb{Z}$ و یک $k_2 \in \mathbb{Z}$. بنابراین

$$x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)m$$

و $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$، که نشان می دهد $x \equiv z (\mod m)$. پس رابطه متعدی است. بنابراین ما ثابت کردیم که رابطه هم نهشتی ( به پیمانه $m$) یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است.

$\square$

[1] *modulo*

به عنوان یک حالت خاص این مثال، $m$ را ۲ می‌گیریم. آنگاه $x \equiv y(\mod ۲)$ اگر و تنها اگر $x-y$ یک عدد صحیح زوج باشد. در نتیجه $x \equiv y(\mod ۲)$ اگر و تنها اگر $x,y$ هردو زوج باشند یا هردو فرد باشند.

**تمرین ۱۶.** *(الف)* تمرین های صفحه ۷۱ کتاب و شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ، ۸ و ۹.

*(ب)* در مورد هریک از رابطه های زیر تعیین کنید کدامیک از خاصیت های انعکاسی، تقارن، تعدی و هم ارزی را دارند.

۱. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, xRy \iff x = y = ۰ \quad \vee$ **$y$ و $x$ هم علامت اند**

۲. $M$= مجموعه ماتریس های $۲ \times ۲$. در $M$ رابطه زیر را تعریف می کنیم

$$A, B \in M, A\ R\ B \iff \det\ A = \det\ B$$

۳. برای نقاط صفحه $\mathbb{R}^۲$ رابطه زیر را درنظر بگیرید.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^۲ \quad \vee \quad \forall (x',y')\mathbb{R}^۲ (x,y)R(x',y') \iff \exists a \in \mathbb{R} - \{۰\} \quad (x,y) = a(x',y')$$

آیا $R$ یک رابطه هم ارزی است؟

۴. فرض کنید $T$ مجموعه مثلث های در صفحه $\mathbb{R}^۲$ باشند. رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$(\Delta\ ABC)\ R\ (\Delta\ A'B'C') \iff \textbf{متشابه اند} \quad \Delta\ ABC \quad \textbf{و} \quad \Delta\ A'B'C'$$

۵. برای هر عضو $\mathbb{R}$ فرض کنید $[x]$ مقدار صحیح $x$ باشد.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} xRy \iff [x] = [y]$$

## ۳.۰ افراز و رابطه هم ارزی

به مثال های زیر توجه کنید:

۱. روی $\mathbb{N}$، در دستگاه عدد نویسی دهدهی، رابطه

$$\forall x, y, \in \mathbb{N}, \quad xRy \iff y, x \ \text{دارای یک تعداد رقم هستند}$$

یک رابطه هم ارزی است. و می توایم تقسیم بندی زیر را در نظر بگیریم

$$\mathbb{N} = \text{اعداد یک رقمی} \cup \text{اعداد دو رقمی} \cup \text{اعداد سه رقمی} \cup \dots$$

۲. رابطه زیر روی مجموعه $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad xRy \iff ۲|x - y$$

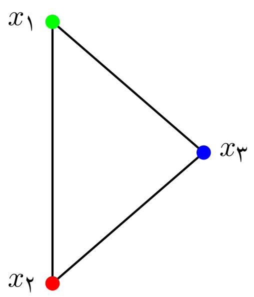
می دانیم این رابطه یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است. این رابطه سبب می شود تا اعضای $\mathbb{Z}$ را به صورت اجتماع دو مجموعه جدا از هم « اعداد زوج» و «اعداد فرد» بنویسیم.

$$E = \{۰, \pm ۲, \pm ۴, \pm ۶, \dots\}, \quad O = \{\pm ۱, \pm ۳, \pm ۵, \dots\}, \quad E \cap O = \varnothing, \quad E \cup O = \mathbb{Z}$$

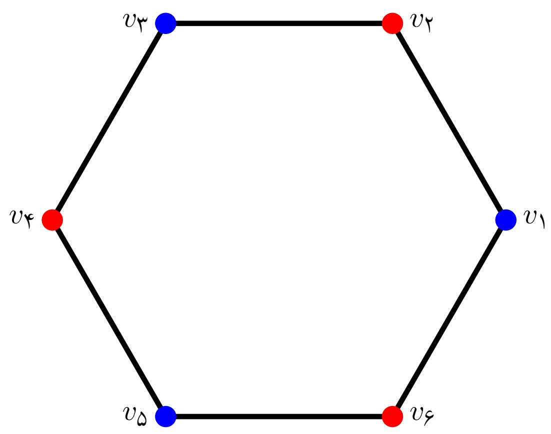
۳. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. فرض کنیم $V = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ مجموعه رئوس $G$ باشد. می دانیم رابطه

$$v_j \sim v_i \iff v_j \ \text{و} \ v_i \ \text{همرنگ اند}$$

یک رابطه هم ارزی است. این رابطه سبب می شود عناصری که هم ارز هستند در مجموعه های جدا ازهم قرار گیرند



$$P=\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\}\}$$




این رابطه هم ارزی راس هایی که هم رنگ هستند را در مجموعه های جدا از هم قرار می دهد.

$$P=\{\{v_1,v_3,v_5\},\{v_2,v_4,v_6\}\}$$

۴. می دانیم روی مجموعه دانشجویان یک کلاس رابطه

$\forall x,y\in C, xRy \iff$ **حرف اول نام فامیل** $x$ **با حرف اول نام فامیل** $y$ **یکی است**

این رابطه سبب می شود دانشجویان یک کلاس را بتوان در مجموعه های زیر قرار داد

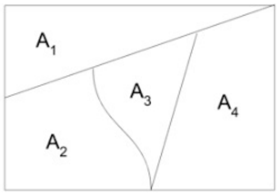
$C=$ {**کسانی که حرف اول نام فامیل شان آ است**} $\cup$ {**کسانی که حرف اول نام فامیلشان ب است**} $\cup \ldots$

$\cup$ {**کسانی که حرف اول نام فامیلشان ی است**}

**تعریف ۱۷.** $X$ مجموعه ای غیر تهی است. منظور از یک افراز $X$ مانند $P$، یک مجموعه از زیر مجموعه های ناتهی $X$ است به قسمی که

(الف) اگر $A,B\in P$ و $A\neq B$ آنگاه $A\cap B=\varnothing$.

(ب) $\bigcup_{C\in P} C = X$.




به تعبیری نزدیک به آنچه می توان دید، افراز $X$ یک «تقسیم $X$» به قطعه های مجزای ناتهی است.

**مثال ۱۸.** فرض کنیم $m$ عددی صحیح، مثبت و ثابت است. به ازای هر عدد صحیح $j$، $0 \leq j < m$، تعریف می کنیم $Z_j = \{x \in \mathbb{Z} | x - j = km, k \in \mathbb{Z}, \text{برای یک}\}$ آنگاه مجموعه

$$\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_{m-1}\}$$

یک افراز $\mathbb{Z}$ است. در حالت خاص $m = 2$، مجموعه های

$$Z_0 = E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \quad \text{زوج است}\}$$

و

$$Z_1 = O = \{x \in \mathbb{Z} | x \quad \text{فرد است}\}$$

بین افراز یک مجموعه ناتهی و یک رابطه هم ارزی روی آن مجموعه ارتباط بسیار نزدیکی وجود دارد. برای درک این ارتباط، به تعریف زیر احتیاج داریم.

**تعریف ۱۹.** $R$ یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه ناتهی است. به ازای هر $x \in X$، مجموعه

$$[x] = \{y \in X | xRy\}$$

را رده هم ارزی مربوط به عنصر $x$ تعریف می کنیم. مجموعه تمام این رده های هم ارزی در $X$ را با $X/R$ نمایش می دهیم، یعنی

$$X/R = \{[x] | x \in X\}$$

نماد $X/R$ را « $X\text{modulo } R$ » یا فقط « $X \mod R$» می خوانیم.

**قضیه ۲۰.** $R$ یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه ناتهی $X$ است. آنگاه

(الف) هر $[x]$ یک زیر مجموعه ناتهی $X$ است.

(ب) $[x]\cap[y]\neq\varnothing$ اگر و فقط اگر $xRy$.

(پ) $xRy$ اگر و فقط اگر $[x]=[y]$.

اثبات. (الف) چون برای هر $x\in X$، $R$ انعکاسی است، داریم $xRx$. بنابرتعریف ۱۹، $x\in[x]$ و بنابراین $[x]$، یک زیر مجموعه ناتهی $X$ است.

(ب) چون $R$ یک رابطه هم ارزی و $X\neq\varnothing$، داریم

$$\begin{aligned}
[x]\cap[y] &\iff (\exists x)(z\in[x]\wedge z\in[y])\\
\text{تعریف ۱۹} &\iff (zRx)\wedge(zRy)\\
R \text{ متقارن است} &\iff (xRz)\wedge(zRy)\\
R \text{ متعدی است} &\iff xRz
\end{aligned}$$

(پ) : به راحتی از (الف) و (ب) نتیجه می شود که $xRy \Longrightarrow [y]=[x]$. حال باید نشان دهیم $xRy \Longleftarrow [y]=[x]$. فرض کنیم $xRy$. آنگاه

$$\begin{aligned}
&z\in[x]\Longrightarrow zRx && \text{تعریف ۱۹}\\
&(zRx)\wedge(xRy)\Longrightarrow zRy && R \text{ متعدی است}\\
&\Longrightarrow z\in[y] && \text{تعریف ۱۹}
\end{aligned}$$

چون $z$ اختیاری است، نتیجه می شود که $[x]\subseteq[y]$. استدلالی مشابه نتیجه می دهد که $[y]\subseteq[x]$ بنابراین $[x]=[y]$.

$\square$

**قضیه ۲۱.** اگر $R$ یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه ناتهی $X$ باشد، آنگاه $X/R$ یک افراز $X$ است.

اثبات. بنابر قضیه ۲۰ (الف) و تعریف ۱۹، $X/R = \{[x] | x \in X\}$. خانواده ای از زیر مجموعه های ناتهی $X$ است. اکنون نشان می دهیم که

$$[x] \neq [y] \Longrightarrow ([x]) \cap ([y]) = \varnothing$$

برای این منظور عکس نقیض آن، $([x] \cap [y] \neq \varnothing \Longrightarrow ([x] = [y])$ را ثابت می کنیم. اما این رابطه یک نتیجه مستقیم قضیه ۲۰ (ب) و (پ) است. بالاخره، باید نشان دهیم که $\bigcup_{x \in X}[x] = X$. این نیز بدیهی است. زیرا هر $x \in X$، به $[x]$ متعلق است و به این ترتیب اثبات قضیه کامل می گردد. $\square$

هم اکنون در قضیه ۲۱ دیدیم که یک رابطه هم ازی روی مجموعه ناتهی $X$، یک افراز $X$ ایجاد می کند. حال نشان می دهیم که عکس قضیه ۲۱ نیز درست است. یعنی هر افراز $X$ یک رابطه هم ارزی روی $X$ ایجاد می کند.

**تعریف ۲۲.** $P$ یک افراز مجموعه ناتهی $X$ است. یک رابطه $X/P$ روی $X$ با $x(X/P)y$ اگر و تنها اگر یک مجموعه $A \in P$ وجود داشته باشد به قسمی که $x, y \in A$، تعریف می کنیم.

**یادآوری ۲۳.** به تعاریف (۱۹) و (۲۲) به دقت توجه نمایید و آنها را با هم مقایسه کنید تا اختلاف ظریف بین نماد های مشابه $[x]$، $X/R$ و $/P$ را دریابید.

**قضیه ۲۴.** $P$ اگر $P$ یک افراز مجموعه ناتهی $X$ باشد، آنگاه رابطه $X/P$ یک رابطه هم ارزی روی $X$ است، و رده های هم ارزی که از رابطه هم ارزی $X/P$ به وجود می آیند دقیقاً مجموعه های افراز $P$ هستند. به زبان نمادی $X/(X/P) = P$.

اثبات. چون هر عنصر $X$ مانند $x$ متعلق به یکی از مجموعه های $A \in P$ است، $x(X/P)x$، پس $X/P$ انعکاسی است. تقارن $X/P$ یک نتیجه بدیهی تعریف (۲۲) است. برای این که نشان دهیم رابطه $X/P$ متعدی است، فرض کنیم $x$، $y$ و $z$ سه عنصر $X$ هستند که در شرط های زیر صدق می کنند

$$x(X/P)y, \qquad y(X/P)z$$

آنگاه بنابرتعریف (۲۲)، $A$ و $B$ در $P$ وجود دارند به قسمی که $x,y \in A$ و $z,y \in B$ . درنتیجه $y \in A \cap B$. از تعریف افراز نتیجه می شود $A = B$. از این رو، $x,z \in A$ و بنابراین $x(X/P)z$. پس $X/P$ یک رابطه هم ارزی روی $X$ است.

برای اثبات بقیه قضیه، گیریم $x$ یک عنصر اختیاری $X$ باشد. یک و فقط یک مجموعه $A$ در $P$ وجود دارد به قسمی که $x \in A$. زیرا $X = \bigcup_{A \in P} A$. در نتیجه بنابرتعریف (۱۹)، داریم

$$x/(X/P) = A$$

ثابت شد که هر رده هم ارزی مدولو $X/P$ یک مجموعه از خانواده $P$ است.

برعکس، فرض کنیم $A$ یکی از مجموعه های افراز $P$ باشد. چون $A \neq \varnothing$ یک عنصر $x$ در $X$ وجود داردکه متعلق به $A$ است. پس با استدلال قبلی، $x/(X/P) = A$. به این ترتیب ثابت شد که $X/(X/P) = P$ و برهان قضیه کامل است.

هر رابطه هم ارزی $R$ روی مجموعه ناتهی $X$ یک افراز $X/R$ ( قضیه (۲۱)) به وجود می آورد. با این افراز رابطه هم ارزی $X/(X/R)$ مشخص می شود (قضیه (۲۴) ). مهم این است بدانیم که $X/(X/R) = R$. با این رابطه و رابطه $X/(X/P) = P$ ارتباط نزدیک بین رابطه های هم ارزی و افرازها روشن می شود.

قضیه (۲۴) را با یک مثال خاص توضیح می دهیم.

فرض کنیم $\mathbb{Z}_۰$ و $\mathbb{Z}_۱$ به ترتیب مجموعه اعداد صحیح زوج و اعداد صحیح فرد باشند. آنگاه $P = \{\mathbb{Z}_۰, \mathbb{Z}_۱\}$ یک افراز مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است. بنابرتعریف رابطه $\mathbb{Z}/P$، داریم $a(\mathbb{Z}/P)b$ اگر و تنها اگر یا $a,b \in \mathbb{Z}_۰$ یا $a,b \in \mathbb{Z}_۱$. یعنی $a(\mathbb{Z}/P)b$ اگر و تنها اگر $a,b$ هر دو زوج باشند یا هردو فرد باشند. به سادگی دیده می شودکه این رابطه یک رابطه هم ارزی است.

درواقع، $a(\mathbb{Z}/P)b$ اگر و فقط اگر $a \equiv b(\mod ۲)$.

بدین جهت، رابطه $\mathbb{Z}/P$ در واقع همان رابطه همنهشتی $\equiv (\mod ۲)$ است.

به عکس، اگر مجموعه $\mathbb{Z}$ و رابطه هم ارزی $R$ داده شده باشند، به قسمی که $xRy$ اگر و تنها اگر $x \equiv y($

(mod ۲)، آنگاه

$$a/P = [a] = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a( \mod ۲)\} = \begin{cases} \mathbb{Z}_۰ & \text{اگر } a \text{ زوج باشد} \\ \mathbb{Z}_۱ & \text{اگر } a \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

بنابراین $\mathbb{Z}/R = \{\mathbb{Z}_۰, \mathbb{Z}_۱\}$ که آشکارا یک افراز $\mathbb{Z}$ است. □

**تمرین ۲۵.** از تمرین های صفحه ۷۶ تمرین های زیر را حل نمایید:

۱، ۲، ۳، ۷، ۸ و ۹.

همچنین تمرین ۱۱ صفحه ۷۷.