تکلیف سری دوم

درس نظریه محاسبه
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. بهار ۱۴۰۲

۱. گراف غیرجهت دار $G = (V, E)$ داده شده است. به هر راس گراف یک وزن مثبت نسبت داده شده است.

$$w : V \to \mathbb{R}^+$$

می‌خواهیم یک مجموعه مستقل با بیشترین وزن در گراف G پیدا کنیم. برای این منظور یک الگوریتم حریصانه را به کار می‌بندیم. الگوریتم هر بار یک راس با بیشترین وزن را برمی‌دارد و آن را به مجموعه مستقل اضافه می‌کند. سپس راس مورد نظر و رئوس مجاور آن را حذف می‌کند و این کار را ادامه می‌دهد تا اینکه راسی باقی نماند.

- فرض کنید S مجموعه مستقلی باشد که الگوریتم حریصانه پیدا می‌کند و T یک مجموعه مستقل دلخواه در G باشد. نشان دهید برای هر $v \in T$ دو حالت وجود دارد. یا داریم $v \in S$ یا یک راس $u \in S$ وجود دارد بطوریکه u مجاور v است و $w(v) \leq w(u)$.
- فرض کنید Δ بیشترین درجه در G باشد. نشان دهید ضریب تقریب الگوریتم حریصانه $\frac{1}{\Delta}$ است.

۲. نشان دهید اگر $NP = P$ آنگاه مسئله MAX-SAT را می‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد.

۳. در مسئله Dominating Set گراف ساده $G = (V, E)$ و عدد صحیح k داده شده است. می‌خواهیم بدانیم آیا زیرمجموعه‌ای از رئوس $S \subseteq V$ با اندازه حداکثر k وجود دارد که هر راس $u \in V$ یا درون S باشد یا همسایه‌ای داخل S داشته باشد. نشان دهید که Dominating Set یک مسئله NP-Complete است.

۴. یک الگوریتم با زمان $O(2^k \text{poly}(n))$ برای مسئله Dominating Set پیشنهاد دهید.

۵. یک الگوریتم با زمان چند جمله‌ای با ضریب تقریب حداقل $\frac{1}{2}$ برای مسئله $MAX - SAT$ پیشنهاد دهید. استدلال کنید که چرا ضریب تقریب الگوریتم شما حداقل $\frac{1}{2}$ است.

۶. مثالی از مسئله Metric TSP بزنید که الگوریتم با ضریب تقریب 2 که در کلاس ارائه شد، یک جواب غیر بهینه برای این مثال پیدا کند. آیا می‌توانید مثالی بزنید که هزینه جواب بهینه تقریبا $\frac{1}{2}$ هزینه جواب الگوریتم باشد؟

۷. در مسئله Maximum Matching گراف ساده $G = (V, E)$ داده شده است. هدف پیدا کردن بیشترین تعداد یال در G است که اشتراک راسی با هم نداشته باشند. یک الگوریتم حریصانه برای مسئله Maximum Matching می‌تواند بدین صورت باشد. الگوریتم هر بار یک یال دلخواه $e \in E$ از گراف را انتخاب می‌کند و سپس یالهای مجاور e را از گراف حذف می‌کند. این کار دوباره با گراف باقیمانده تکرار می‌شود تا اینکه یالی در گراف باقی نماند. نشان دهید تعداد یالهای انتخاب شده توسط الگوریتم حریصانه حداقل $\frac{1}{2}$ برابر جواب بهینه است.

۸. نشان دهید اگر در مسئله 3-SAT این محدودیت را اعمال کنیم که هر متغیر حداکثر 4 بار در فرمول ظاهر شود، مسئله NP-Complete باقی خواهد ماند. اما اگر هر متغیر حداکثر 2 بار ظاهر شود مسئله جزو کلاس P خواهد بود.