

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
دانشکده ریاضی

امتحان مبانی ماتریس ها و جبر خطی

تاریخ: ۱۴۰۰/۱۰/۲۲ ساعت: ۱۰:۰۰ - ۰۷:۳۰

(تعداد ۸ مساله و بارم هر مساله ۲/۵ نمره)

مساله ۱. اگر  $x, y$  و  $z$  همگی متمایز باشند، و داشته باشیم

$$\begin{vmatrix} x & x^3 & x^4 - 1 \\ y & y^3 & y^4 - 1 \\ z & z^3 & z^4 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

نشان دهید  $xyz(xy + yz + zx) = x + y + z$ .

مساله ۲. در مورد رتبه ماتریس زیر به ازای مقادیر مختلف  $a, b$  و  $c$ ، بحث کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{bmatrix}$$

مساله ۳. نشان دهید ماتریس های  $n \times n$  ی مانند  $A$  و  $B$  وجود ندارند به طوری که داشته باشیم:

$$AB - BA = I.$$

مساله ۴. فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس های  $2 \times 2$  ی مختلفی باشند، به طوری که

$$AB - BA = A.$$

نشان دهید  $A^2 = 0$ . (در اینجا  $0$  ماتریس صفر  $2 \times 2$  است).

مساله ۵. فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $2 \times 2$  باشد، به طوری که  $\text{tr}(A) = 3$  و  $\text{tr}(A^2) = 5$ . دترمینان  $A$  را بیابید.

مساله ۶. اگر

$$A = \begin{bmatrix} -25 & -36 \\ 18 & 26 \end{bmatrix},$$

آنگاه ماتریس نامنفرد  $H$  را پیدا کنید طوری که  $H^{-1}AH$  ماتریسی قطری باشد، و با استفاده از آن  $A^{12}$  را بیابید.

مساله ۷. فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس های  $n \times n$  ی با درایه های حقیقی باشند، و فرض کنید  $A + B$  ماتریسی وارون پذیر باشد. نشان دهید

$$A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A.$$

مساله ۸. فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس هایی  $2 \times 2$  باشند، به طوری که  $(AB)^2 = 0$  که  $0$  ماتریس صفر  $2 \times 2$  است. آیا  $(BA)^2$  نیز بایستی برابر ماتریس صفر  $0$  باشد. اگر جواب مثبت است، آن را اثبات کنید، و در غیر این صورت یک مثال نقض ارائه دهید.

توجه:

(۱) برگه های پاسخ نامه بایستی شامل نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی باشد.

(۲) فایل PDF پاسخنامه بایستی قبل از ساعت ۱۰:۰۵ به آدرس [moghadam@kntu.ac.ir](mailto:moghadam@kntu.ac.ir) ارسال شود. پاسخ هر هشت مساله بایستی فقط در یک فایل PDF قرار داشته باشند، و این فایل فقط یکبار به آدرس داده شده ایمیل شود.

(۳) کلیه پاسخنامه هایی که به هر دلیل بعد از ساعت ۱۰:۰۵ ایمیل شوند و یا بیش از یکبار ایمیل شوند، حذف خواهند شد و مسئولیت بر عهده دانشجو خواهد بود.