

درس مبانی نظریه محاسبه

جلسه نهم

حل چند مسئله مربوط به فصل اول

مسئله: نشان دهید زبان زیر منظم نیست.

$$L = \{a^i b^j \mid i > j\}$$

اثبات با برهان خلف: فرض کنید L منظم باشد. پس شرایط لم تزریق در مورد L باید صادق باشد. حال فرض کنید عدد p در صورت لم را انتخاب کرده‌ایم. رشته زیر را در نظر بگیرید.

$$w = a^{p+1}b^p$$

یک تقسیم بندی از w به سه بخش x و y و z را در نظر بگیرید. مانند شکل زیر.

$$w = \underbrace{a \dots a}_{x} \underbrace{a \dots a}_{y} \underbrace{a b \dots b}_{z}$$

دقت کنید با تزریق y الگوی رشته بهم نمی خورد (تعداد a ها از b ها کماکان بیشتر خواهد بود).

نکته اینجاست که حالتی که y حذف می شود ایجاد تناقض می کند.

$$xy^iz \notin L, \quad i = 0$$

پس زبان L نمی تواند منظم باشد.

مسئله : نشان دهید زبان زیر منظم نیست.

$$L = \{w \in \{a\}^* \mid |w| \text{ یک عدد اول است}\}$$

اثبات با برهان خلف: فرض کنید L منظم باشد. پس شرایط لم تزریق در مورد L باید صادق باشد. حال فرض کنید عدد p در صورت لم را انتخاب کرده‌ایم. می‌توانیم فرض بگیریم که p یک عدد اول است (اگر نبود، کوچکترین عدد اول بزرگتر از p را انتخاب می‌کنیم). رشته زیر را در نظر بگیرید

$$w = a^p$$

یک تقسیم بندی دلخواه از w به سه قسمت x و y و z در نظر بگیرید. فرض کنید طول y برابر با q باشد.

$$w = \underbrace{a \dots a}_x \underbrace{\overbrace{a \dots a}^q}_y \underbrace{a \dots a}_z$$

در نتیجه همه اعداد زیر باید اول باشند.

$$p - q, p, p + q, p + 2q, p + 3q, \dots, p + iq, \dots$$

از این میان، بالاخص برای $i = p$ عدد $p + iq$ باید اول باشد. اما عدد $p + pq$ اول نیست. یک تناقض. پس زبان L نمی تواند منظم باشد.

تمرین : نشان دهید زبان زیر منظم نیست.

$$L = \{w \in \{a\}^* \mid \exists n \geq 0, |w| = n^2\}$$

حال زبانی را معرفی می کنیم که منظم نیست اما شرایط لم تزریق در مورد آن صادق است. همانطور که قبلا گفتیم عکس لم برقرار نیست (از لم تزریق برای اثبات منظم بودن زبانها استفاده نکنید!)

زبان زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, \text{ if } i = 1 \text{ then } j = k\}$$

دقت کنید زبان A را می توان بصورت اجتماع دو زبان نوشت

$$A = \underbrace{\{a^1 b^n c^n \mid n \geq 0\}}_B \cup \underbrace{\{(aa^+ + \epsilon)b^* c^*\}}_C$$

می‌توان نشان داد که زبان B منظم نیست (به همان طریق که نشان دادیم زبان $a^n b^n$ منظم نیست).

$$B = \{ab^n c^n \mid n \geq 0\}$$

روشن است که C منظم است چون با یک عبارت منظم بیان شده است.

$$C = (aa^+ + \epsilon)b^*c^*$$

می‌خواهیم نشان دهیم A منظم نیست.

$$A = B \cup C$$

بیاید اول لم تزریق را امتحان کنیم. عدد $p > 2$ را انتخاب می‌کنیم و رشته دلخواه w با طول حداقل p در زبان A را در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر،

$$w \in A, \quad |w| \geq p$$

رشته w می تواند به یکی از سه حالت زیر باشد.

$$w = b^*c^* \quad \blacktriangleleft$$

در این حالت y را کاراکتر اول رشته می گیریم. $x = \epsilon$. تزریق یا حذف y مشکلی ایجاد نمی کند. رشته حاصل کماکان در A باقی می ماند.

$$w = ab^n c^n \quad \blacktriangleleft$$

در این حالت هم y را کاراکتر اول رشته می گیریم. تزریق یا حذف y مشکلی ایجاد نمی کند. رشته حاصل کماکان در A باقی می ماند.

$$w = aa^+b^*c^* \quad \blacktriangleleft$$

چون فرض گرفتیم، $p \geq 3$ پس طول رشته w حداقل 3 است. در این حالت y را کاراکتر سوم رشته می گیریم. می بینید که تزریق یا حذف y خللی ایجاد نمی کند و رشته حاصل در زبان باقی می ماند.

پس لم تزریق نتوانست نامنظم بودن A را نشان دهد. اما این به معنای منظم بودن A نیست. در واقع در اینجا نیازی به لم تزریق نداریم.

چون $A = B \cup C$ پس داریم

$$B = A - C = A \cap \overline{C}$$

اگر A منظم باشد، چون \overline{C} منظم است، اشتراک A و \overline{C} هم منظم خواهد بود. اما از قبل می دانستیم که B منظم نیست پس فرض ما مبنی بر منظم بودن A نادرست بود. لذا A نامنظم است.



مسئله: آیا زبان زیر منظم است؟

$$A = \{a^n \Sigma^* a^n \mid n \geq 1, \Sigma = \{a, b\}\}$$

جواب: بله. زبان A معادل با عبارت منظم $a\Sigma^*a$ می باشد. چند نمونه رشته در زبان A :

$aaaaaaaa$, $aaaaabbbaaa$, $aaaaabbbbbaaaaa$

روشن است که

$$A \subseteq a\Sigma^*a$$

از طرف دیگر داریم

$$a\Sigma^*a = \{a^n \Sigma^* a^n \mid n = 1, \Sigma = \{a, b\}\} \subseteq A$$

مسئله: آیا زبان زیر منظم است؟

$$B = \{a^n b \Sigma^* a^n \mid n \geq 1, \Sigma = \{a, b\}\}$$

جواب: خیر. می‌توان از لم تزریق استفاده کرد. فرض کنید عدد p را در صورت لم تزریق انتخاب کرده‌ایم. رشته زیر را در نظر بگیرید.

$$w = a^p b a^p = \underbrace{a \dots a}_p b \underbrace{a \dots a}_p$$

طول w حداقل p است. یک تقسیم بندی بصورت $w = xyz$ در نظر بگیرید. چون در لم تزریق داریم

$$|xy| \leq p$$

پس زیررشته y را تنها می‌توانیم از قسمت a^p قبل از آمدن b انتخاب کنیم. اما تزریق y باعث می‌شود که رشته حاصل از زبان خارج شود.

درست یا نادرست؟

$$(A \cap B)^* = A^* \cap B^* \quad \blacktriangleleft$$

◀ اگر A^* منظم باشد آنگاه A منظم است.

◀ اگر A منظم باشد و B نامنظم باشد آنگاه AB منظم نیست.

◀ هر dfa برای زبان $A = \{a^k\}$ به حداقل $k + 1$ وضعیت نیاز دارد.