مثال معادلهٔ $x+\cos x=۰$ فقط یک ریشه در $(-۱,۰)$ دارد. مقدار تقریبی ریشه را به روش دوبخشی حساب کنید.

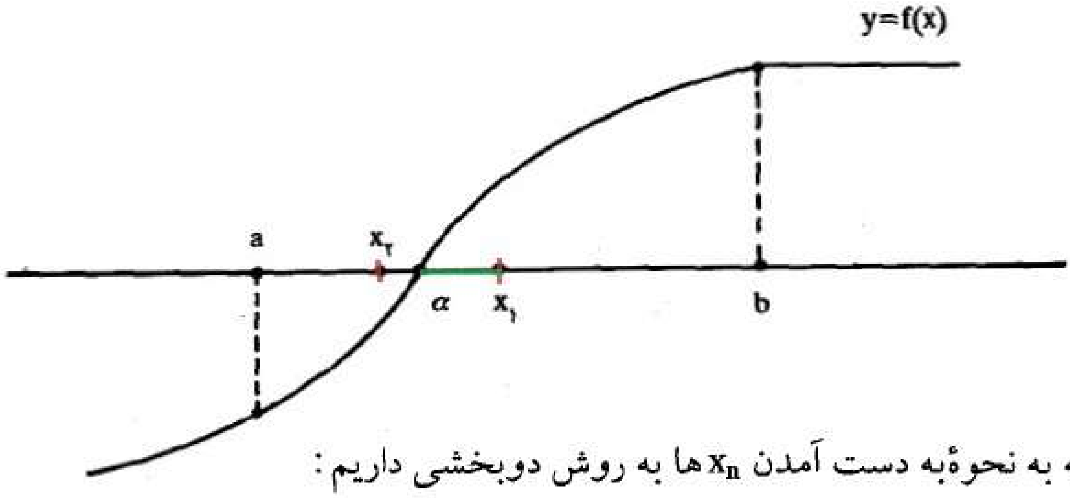
جدول زیر محاسبات مربوط را نشان می‌دهد.

$a=-۱$ ، $b=۰$ ، $f(a)=-۰/۴۶$ ، $f(b)=۱$

n	a	b	$x_n=\frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)\,f(x_n)$
۱	−۱	۰	−۰/۵	−
۲	−۱	−۰/۵	−۰/۷۵	+
۳	−۰/۷۵	−۰/۵	−۰/۶۲۵	−
۴	−۰/۷۵	−۰/۶۲۵	۰/۶۸۷۵	−
۵	−۰/۷۵	−۰/۶۸۷۵	−۰/۷۱۸۷۵	−
۶	−۰/۷۵	−۰/۷۱۸۷۵	−۰/۷۳۴۳۷۵	+
۷	−۰/۷۳۴۳۷۵	−۰/۷۱۸۷۵	−۰/۷۲۶۵۶۲۵	

توجه کنید که a و b در هر سطر با توجه به سطر قبل و علامت $f(a)\,f(x_n)$ تعیین می‌شود و همواره $a<b$.

همگرایی روش دوبخشی



با توجه به نحوهٔ دست آمدن x_n ها به روش دوبخشی داریم:

$$|x_۱-\alpha|<\frac{b-a}{۲}$$

همچنین با توجه به اینکه طول بازهٔ $[a,x_۱]$ برابر $\frac{b-a}{۲}$ است داریم:

$$|x_۲-\alpha|<\frac{\frac{b-a}{۲}}{۲}=\frac{b-a}{۲^۲}$$

بنابراین، پس از n تکرار، نتیجه می‌شود:

$$۰\leq|x_n-\alpha|<\frac{b-a}{۲^n}$$

چون: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n}=۰$ در نتیجه: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{۲^n}=۰$. پس، بنابر قضیهٔ فشار

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = ۰$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

بنابراین، روش دوبخشی همیشه همگراست. یعنی، دنبالهٔ $\{x_n\}$ که به این روش ساخته می‌شود حتماً به α همگراست.

نامساوی $۰ \le | x_n - \alpha | < \frac{b-a}{۲^n}$ یک کران بالا برای خطای x_n به‌دست می‌دهد، توجه کنید که این کران بالا، یعنی $\frac{b-a}{۲^n}$، قبل از محاسبهٔ x_n قابل محاسبه است. بنابراین، $\frac{b-a}{۲^n}$ را یک کران خطای پیشین برای x_n می‌نامند. از این نامساوی سرعت همگرایی $\{x_n\}$ به α را نیز می‌توان پیش‌بینی کرد، این سرعت متناسب با سرعت همگرایی دنبالهٔ $\{\frac{۱}{۲^n}\}$ به صفر است. با توجه به اینکه $۲^{۱۰} \simeq ۱۰۰۰$ داریم:

$$\frac{۱}{۲^{۱۰}} \simeq ۰/۰۰۱ = ۱۰^{-۳}$$

بنابراین، بعد از هر ۱۰ تکرار سه رقم به ارقام درست جواب اضافه می‌شود، و این نشان می‌دهد که روش دوبخشی کند است.

مثال

تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x)= x^۲ - ۲$، یعنی $\alpha=\sqrt{۲}$، را به روش دوبخشی چنان حساب کنید که داشته باشیم:

$$|x_n - \alpha| < ۱۰^{-۲}$$

با توجه به این‌که ریشهٔ معادله در $(۱, ۲)$ است داریم $b-a= ۱$ و $| x_n - \alpha | < \frac{b-a}{۲^n} = \frac{۱}{۲^n}$

پس، کافی است n را چنان پیدا کنیم که

$$\frac{۱}{۲^n} \le ۱۰^{-۲}$$

اولین n که در نامساوی بالا صدق می‌کند ۷ است. پس، باید تا $x_۷$ حساب کنیم.

$$a= ۱ \ ، \quad b= ۲ \qquad f(a)= -۱ \ ، \quad f(b)= ۲$$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	۱	۲	۱/۵	-
۲	۱	۱/۵	۱/۲۵	+
۳	۱/۲۵	۱/۵	۱/۳۷۵	+
۴	۱/۳۷۵	۱/۵	۱/۴۳۷۵	-
۵	۱/۳۷۵	۱/۴۳۷۵	۱/۴۰۶۲۵	+
۶	۱/۴۰۶۲۵	۱/۴۳۷۵	۱/۴۲۱۸۷۵	-
۷	۱/۴۰۶۲۵	۱/۴۲۱۸۷۵	۱/۴۱۴۰۶۲۵	

معیارهای توقف

برای توقف محاسبهٔ x_n ها، نه فقط در روش دوبخشی بلکه در سایر روش های تکراری که بعداً معرفی خواهند شد، معیارهایی وجود دارد که در این قسمت بررسی می‌کنیم.

الف) اگر ε عدد مفروض و کوچکی باشد، x_n ها را تا جایی حساب می‌کنیم که $|f(x_n)| < \varepsilon$. یعنی، به محض اینکه $|f(x_n)| < \varepsilon$ عملیات را متوقف می‌کنیم. دلیل این است که $f(\alpha) = ۰$ حال اگر $|f(x_n)|$ خیلی کوچک باشد می‌توان نتیجه گرفت که x_n خیلی به α نزدیک است.

ب) اگر $|x_n - x_{n-۱}| < \varepsilon$ عملیات را متوقف و x_n را به عنوان تقریبی از α می‌پذیریم.
به عبارت دیگر، وقتی اختلاف دو تقریب متوالی بسیار کوچک باشد ادامهٔ روش معقول به نظر نمی‌آید.

ج) گاهی خواسته می‌شود که عملیات را وقتی متوقف کنیم که خطای مطلق x_n از ε کوچکتر باشد یعنی، وقتی که $|x_n - \alpha| < \varepsilon$.

چون مقدار α معلوم نیست از نامساوی کران بالای خطا استفاده می‌کنیم و قرار می‌دهیم :

$$\frac{b-a}{۲^n} \le \varepsilon$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$۲^n \ge \frac{b-a}{\varepsilon}$$

سپس n را کوچکترین عدد طبیعی اختیار می‌کنیم که در نامساوی زیر صدق کند :

$$n \geq \log_۲ \frac{b-a}{\varepsilon}$$

در این صورت، اگر x_n راحساب کنیم خطای مطلق آن از ε کوچکتر خواهد بود.

د) گاهی خواسته می‌شود که پس از m تکرار (m معلوم است)، عملیات متوقف و x_m به عنوان تقریبی از α پذیرفته شود.

الگوریتم روش دوبخشی

فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته و $f(a_0)f(b_0) \leq 0.$

For $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$m = \frac{a_n + b_n}{2}$$

If $\ f(a_n)f(m) < 0,\ $ then set $\ a_{n+1} = a_n,\ \ b_{n+1} = m$

Otherwise set $\ a_{n+1} = m,\ \ b_{n+1} = b_n$

Then $\ f(x) = 0$ has a real root in the interval $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.