

۱. در قطعه کد زیر، خطهای سوم و پنجم هر کدام چند بار اجرا می‌شوند؟

```
0. j = 1
1. for i in range(1,n):
2.     while (j < n) :
3.         j = j * 2
4.         for k in range(1,j):
5.             count = count + 1
```

۲. برای هر یک از دنباله‌های زیر تعداد مقایسه‌ای که الگوریتم مرتب سازی درجی، حبابی و ادغامی انجام می‌دهند را با استفاده از نماد $\Theta()$ بنویسید. دقت کنید هر دنباله جایگشتی از $1, 2, \dots, n$ است.

(آ) $2, 3, 4, \dots, n, 1$

(ب) $n, 1, 2, \dots, n-1$

(ج) $1, 2, 3, \dots, k, n, n-1, n-2, \dots, k+1$

(د) $k, k-1, \dots, 3, 2, 1, k+1, k+2, \dots, n-1, n$

۳. توابع زیر را بر اساس کران مجانبی $\Theta()$ مرتب کنید.

$$f_1(n) = n^{1.5} \quad f_2(n) = 2n + \log n + 3 \quad f_3(n) = n^{\log n}$$

$$f_4(n) = 2^n \quad f_5(n) = \log(n!) \quad f_6(n) = (\log n)!$$

۴. برای هر کدام از حالات زیر یک تابع f مثال بزنید.

(آ) $f(n+1) \in O(f(n))$

(ب) $f(n+1) \notin O(f(n))$

(ج) $f(n+1) \in O(f(n))$ ولی $f(2n) \notin O(f(n))$

(د) $f(2^n) \in O(f(n))$

۵. فرض کنید $f(n) \in O(g(n))$. مشخص کنید گزاره‌های زیر درست هستند یا نادرست. مثال نقض بیاورید یا اثبات کنید.

(آ) $\log f(n) \in O(\log g(n))$

(ب) $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$

(ج) $f^2(n) \in O(g^2(n))$

۶. الگوریتم اقلیدس برای پیدا کردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین دو عدد صحیح a و b را در نظر بگیرید. توصیف این الگوریتم بصورت بازگشتی بصورت زیر است.

```

procedure gcd(a,b)    # a >= b
x := a
y := b
r := x mod y
if (r == 0)
    return b
else
    x := y
    y := r
    return gcd(x,y)

```

فرض کنید $n = \max\{a, b\}$. نشان دهید اگر $T(n)$ زمان اجرای الگوریتم اقلیدس (در بدترین حالت) باشد آنگاه $T(n) \in \Theta(\log n)$ است.

راهنمایی: برای کران پایین $T(n)$ ، اعداد فیبوناچی را در نظر بگیرید.

۷. در الگوریتم مرتب سازی ادغامی نشان دهید اگر به جای تقسیم به دو قسمت تقریباً مساوی، لیست شامل n عدد را به دو قسمت با اندازه‌های $\lceil n/3 \rceil$ و $\lfloor 2n/3 \rfloor$ تقسیم کنیم زمان اجرای الگوریتم باز هم $\Theta(n \log n)$ خواهد بود.

۸. در الگوریتم SELECT که در کلاس ارائه شد نشان دهید اگر اندازه گروه‌ها ۷ باشد، زمان اجرای الگوریتم کماکان $\Theta(n)$ خواهد بود. اما اگر اندازه هر گروه ۳ باشد زمان اجرا از مرتبه $\Theta(n \log n)$ خواهد بود.

۹. فرض کنید دو X و Y دو لیست مرتب باشند که هر کدام شامل n عنصر هستند. چگونه می‌توان میانه اجتماع X و Y را در زمان $O(\log n)$ پیدا کرد؟