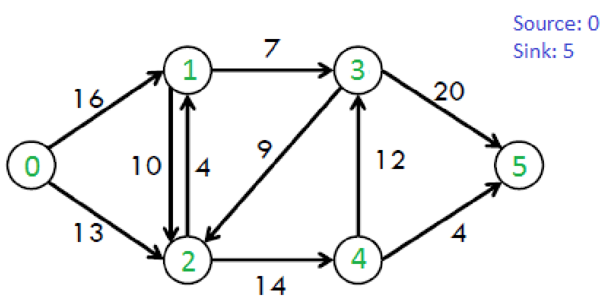
حل تکلیف سری چهارم

طراحی الگوریتم
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. پاییز ۱۴۰۳

۱. الگوریتم فورد - فولکرسون را برای گراف زیر اجرا کنید. موقع انتخاب مسیر افزایشی، هر دو استراتژی انتخاب مسیر با بیشترین گلوگاه، و انتخاب مسیر با کمترین تعداد یال را امتحان کنید. کدام استراتژی در این مثال سریعتر به شار بیشینه می‌رسد. در موقعیتهای برابر، به مسیری اولویت بدهید که شماره راس بعدی کمتر است.



استراتژی انتخاب مسیر با بیشترین گلوگاه بعد از ۳ افزایش به جواب می‌رسد. استراتژی انتخاب مسیر با بیشترین گلوگاه بعد از ۴ افزایش به جواب می‌رسد. در هر دو حالت برش $(\{0,1,2\},\{3,4,5\})$ اشباع می‌شود.

۲. فرض کنید (S,T) و (S',T') دو برش کمینه $s-t$ در شبکه G باشند. نشان دهید که $(S\cap S',T\cup T')$ و $(S\cup S',T\cap T')$ هم دو برش کمینه $s-t$ در شبکه G هستند.

حالت $(S\cap S',T\cup T')$ را بررسی می‌کنیم. برای حالت دیگر مشابه این می‌توان استدلال آورد. از قضیه شار بیشینه - برش کمینه استفاده می‌کنیم. شار بیشینه f را در نظر بگیرید. می‌دانیم که

$$\sum_{e \text{ leaves } S} f(e) - \sum_{e \text{ enters } S} f(e) = val(f)$$

چون (S,T) یک برش کمینه است و طبق تعریف $cap(S,T)=\sum_{e \text{ leaves } S} cap(e)$ داریم

$$cap(S,T) = \sum_{e \text{ leaves } S} f(e) = val(f)$$

در نتیجه همه یالهای خروجی از S اشباع شده‌اند و همه یالهای ورودی شار صفر دارند.

$$\sum_{e \text{ enters } S} f(e) = 0$$

این مسئله برای برش (S',T') هم برقرار است. پس در برش $(S\cap S',T\cup T')$ یالهای ورودی به $S\cap S'$ شار صفر دارند و یالهای خروجی از آن اشباع شده‌اند. پس $(S\cap S',T\cup T')$ یک برش کمینه است که s را از t جدا می‌کند.

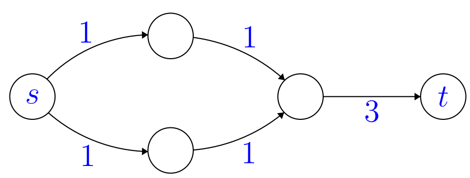
۳. گزاره های زیر را تایید می‌کنید یا رد می‌کنید؟

- اگر در شبکه‌ای همه ظرفیتها عدد زوج باشند، آنگاه یک شار بیشینه f وجود دارد $f(e)$ برای هر یال e زوج است.

  درست. ظرفیتها را تقسیم بر ۲ کنید. فرض کنید f' شار بیشینه پس از تقسیم کردن ظرفیت باشد. حال قرار دهید $f(e) = 2f'(e)$ و ظرفیت ها را به حالت قبل برگردانید. شار همه یالها عددی زوج است. علاوه بر این f شار بیشینه است.

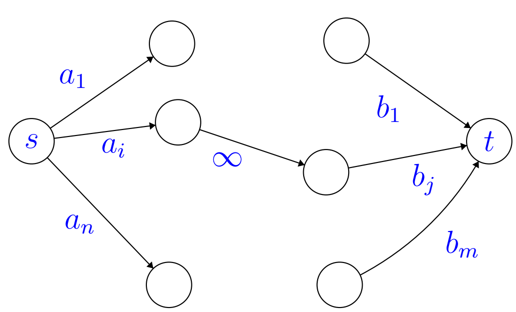
- اگر در شبکه‌ای همه ظرفیتها عدد فرد باشند، آنگاه یک شار بیشینه f وجود دارد $f(e)$ برای هر یال e فرد است.

  نادرست. مثال نقض



۴. ماتریس A یک ماتریس با ابعاد $n \times m$ است و همه درایه‌هایش حقیقی و مثبت هستند. با فرض اینکه مجموعه سطرهای A اعداد صحیح $a_1, \cdots, a_n$ و مجموع ستونهای A اعداد صحیح $b_1, \cdots, b_m$ هستند نشان دهید ماتریس B با ابعاد $n \times m$ وجود دارد که همه درایه‌هایش اعداد صحیح و مثبت هستند و از لحاظ مجموع سطرها و ستونها با A یکسان است.

یک شبکه شار بصورت زیر ایجاد می‌کنیم. به تعداد n راس در طرف چپ (برای هر سطر) و به تعداد m راس در طرف راست (برای هر ستون) قرار می‌دهیم. رئوس s و t را اضافه می‌کنیم. برای هر i از راس s به راس سطر i ام یک یال با ظرفیت a_i قرار می‌دهیم. برای هر j از راس ستون j به راس t یک یال با ظرفیت b_j قرار می‌دهیم. رئوس سمت چپ را بطور کامل به رئوس سمت راس وصل می‌کنیم با ظرفیت بینهایت (یک عدد صحیح به اندازه کافی بزرگ). چون اندازه برش کمینه در این شبکه $\sum_i a_i$ است، پس بنا به قضیه تساوی شار بیشینه و برش کمینه، شار بیشینه در این شبکه مقدارش $\sum_i a_i$ است. چون ظرفیتها عدد صحیح است، پس شار روی یالهای میانی عدد صحیح است. شار روی یالهای میانی همان اعداد ماتریس مورد نظرمان هستند.



۵. نیروهای اشغالگر یک شبکه ارتباطی برای انتقال تسلیحات از نقطه s به نقطه t ایجاد کرده‌اند. راه ارتباطی مستقیم از نقطه u به v ظرفیتی مشخصی برای انتقال تسلیحات دارد که با عدد صحیح مثبت $c(u,v)$ تخمین زده شده است. نیروهای مقاومت می‌خواهند شبکه ارتباطی نیروهای اشغالگر را قطع کنند. آنها راهی ندارند جز اینکه با

مواد منفجره یک راه ارتباطی را مسدود کنند. اگر فقط یکبار امکان استفاده از مواد منفجره باشد، مسئله این است که کدام راه ارتباطی را مسدود کنند که ظرفیت انتقال تسلیحات توسط اشغالگران حداقل شود. شما به عنوان یک طراح الگوریتم، به نیروهای مقاومت کمک کنید که جواب مسئله در کمترین زمان پیدا شود. اگر فرض کنیم شبکه شامل n نقطه و m راه ارتباطی است، پیچیدگی زمان الگوریتم شما چقدر است؟ اگر امکان مسدود کردن k راه را داشته باشیم، آیا می‌توانیم جواب مسئله را زمان چندجمله‌ای پیدا کنیم؟

ایده اول: فرض کنید $G = (V, E)$ شبکه ارتباطی مورد بحث باشد. یال دلخواه $e \in E$ را حذف می‌کنیم و سپس شار بیشینه را در شبکه حاصل بدست می‌آوریم. این کار را برای همه یالها تکرار می‌کنیم. بهترین نتیجه را گزارش می‌کنیم. اگر $T(n, m)$ پیچیدگی زمانی الگوریتم شار بیشینه باشد، پیچیدگی زمانی این الگوریتم $mT(n, m)$ است.

ایده نه چندان بهتر: شار بیشینه f را برای $G = (V, E)$ بدست می‌آوریم. فرض کنید G_f گراف باقیمانده متناظر با شار f باشد. یال $e = (u, v)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $c(e)$ ظرفیت e باشد. ظرفیت یال e را یک واحد کاهش می‌دهیم. اگر $f(e) < c(e)$ کاهش ظرفیت یال هیچ تاثیری در مقدار شار بیشینه ندارد. اما اگر $f(e) = c(e)$ کاهش ظرفیت e شار f را نامعتبر می‌کند. برای بدست آوردن یک شار معتبر، یک مسیر از v به t پیدا می‌کنیم که شار غیر صفر دارد (الگوریتم BFS یا DFS). همچنین یک مسیر از s به u پیدا می‌کنیم که شار غیر صفر دارد (الگوریتم BFS یا DFS). جریان را روی یال e و مسیرهای بدست آمده یک واحد کاهش می‌دهیم. فرض کنید f' شار حاصل باشد. این یک شار معتبر است و داریم $val(f') = val(f) - 1$. حال سعی می‌کنیم f' را یک واحد افزایش دهیم. اگر توانستیم، شاری که بدست می‌آوریم (بعد از کاهش ظرفیت یال e) ماکزیمم است. در غیر اینصورت f' خودش ماکزیمم است. همه این کارها در زمان $O(m + n)$ قابل انجام است. پس بعد از کاهش ظرفیت یال به اندازه 1 واحد می‌توانیم، شار بیشینه را در زمان $O(m+n)$ بدست آوریم. نتیجه اینکه در زمان $O(c(e)(m + n))$ می‌توانیم شار بیشینه را بعد از حذف e بدست آوریم. این کار را برای همه یالها انجام می‌دهیم. لذا پیچیدگی زمانی ایده دوم در مجموع $T(n + m) + (m + n) \sum_e c(e)$ است که بستگی به ظرفیت یالها ممکن است بهتر از ایده اول یا بدتر از آن باشد.

مسئله در حالت حذف k یال سخت می‌شود. اثبات شده است که این مسئله NP-Complete است. لذا با فرض $P \neq NP$ الگوریتم چندجمله‌ای برای این مسئله وجود ندارد.

۶. $G = (A \cup B, E)$ یک گراف دوبخشی است که در آن $|N(S)| \geq |S| - d$ برای هر $S \subseteq A$ برقرار است. نشان دهید که گراف G یک تطابق با اندازه حداقل $|A| - d$ یال دارد.

به رئوس سمت B، به تعداد d راس جدید اضافه می‌کنیم و هر راس $a \in A$ را به همه رئوس جدید وصل می‌کنیم. گراف دوبخشی حاصل G' شرایط قضیه هال را دارد. یعنی برای هر $S \subseteq A$ داریم $|N(S)| \geq |S|$. پس یک تطابق با اندازه $|A|$ در گراف G' وجود دارد. یالهای این تطابق که به رئوس جدید وصل شده اند را حذف کنید. حداکثر d یال را حذف کرده‌ایم. این یعنی اینکه گراف G یک تطابق با اندازه حداقل $|A| - d$ دارد.

۷. یک کمپ تابستانی برنامه‌ای شامل n ورزش و سرگرمی ارائه می‌کند. این کمپ می‌خواهد مربیانی را برای این برنامه استخدام کند. تعداد m متقاضی برای این منظور ثبت نام کرده‌اند. هر متقاضی فرمی پر کرده است که در آن ورزشهای تخصصی خود را تیک زده است. کمپ می‌خواهد حداقل تعداد مربی را استخدام کند بطوریکه برای

هر ورزش حداقل یک مربی داشته باشد. نشان دهید این پرسش که آیا k مربی در میان متقاضیان وجود دارد که همه ورزشها را پوشش دهند NP-Complete است.

اگر اسم مسئله را Summer-Camp بگذاریم نشان می‌دهیم

$$\text{Cover Vertex} \leq_p \text{Summer-Camp}$$

گراف غیر جهت دار $G = (V, E)$ داده شده است. نشان می‌دهیم با استفاده از الگوریتمی برای Summer-Camp می‌توانیم مسئله Vertex-Cover را حل کنیم. رئوس گراف G متناظر با متقاضیان استخدام است و هر یال گراف متناظر با یک ورزش است. این حالتی است که هر ورزش را فقط دو متقاضی بلد است. روشن است یک مجموعه پوششی Vertex Cover در G متناظر با مجموعه‌ای از متقاضیان $S \subseteq V$ است که همه ورزشها E را پوشش می‌دهند. همچنین روشن است که $\text{Summer-Camp} \in NP$. پس مسئله Summer-Camp یک مسئله NP-Complete است.

۸. در مسئله Almost-SAT می‌خواهیم بدانیم آیا یک مقداردهی به متغیرهای یک فرمول منطقی به فرم CNF با m جمله وجود دارد که دقیقا $m - 1$ عبارت را ارضا کند. نشان دهید مسئله Almost-SAT یک مسئله NP-Complete است.

روشن است که $\text{Almost-SAT} \in NP$. نشان می‌دهیم

$$\text{SAT} \leq_p \text{Almost-SAT}$$

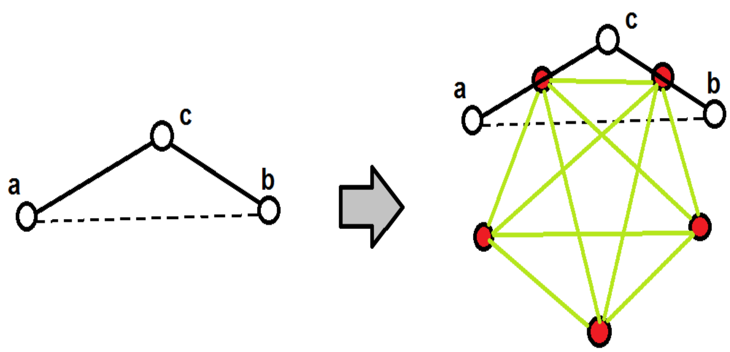
ورودی مسئله SAT را در نظر بگیرید. با فرض اینکه x یک متغیر جدید است به فرمول ϕ دو عبارت (x) و $(\overline{x})$ را اضافه می‌کنیم. اسم فرمول حاصل را ϕ' میگذاریم. فرمول ϕ' به تعداد $m' = m + 2$ عبارت دارد. روشن است که در ϕ' فقط یکی از این عبارات اضافه شده ارضاشدنی است. پس ϕ ارضاشدنی است اگر و فقط اگر برای ϕ' یک مقداردهی وجود داشته باشد که به تعداد $m' - 1$ عبارت را ارضا کند.

۹. گراف غیر جهتدار $G = (V, E)$ داده شده است. یک مجموعه مستقل قوی strongly independent set در G زیرمجموعه‌ای مانند S از رئوس گراف است بطوریکه هیچ دو عضو S مسیری بطول 2 و یا کمتر از آن بینشان نباشد. مسئله Strongly Independent Set می‌پرسد آیا یک مجموعه مستقل قوی در گراف G با حداقل k راس وجود دارد یا نه. نشان دهید این مسئله NP-Complete است.

روشن است که $\text{Strongly Independent Set} \in NP$. نشان می‌دهیم

$$\text{Independent Set} \leq_p \text{Strongly Independent Set}$$

ورودی مسئله Independent Set را در نظر بگیرید. گراف غیر جهتدار G و عدد k. از روی گراف $G = (V, E)$ گراف G' را می‌سازیم بطوریکه گراف G یک مجموعه مستقل با اندازه حداقل k دارد اگر و فقط اگر G' یک مجموعه مستقل قوی با اندازه k داشته باشد. روی هر یال G یک راس اضافه می‌کنیم. مانند شکل، راس قرمز به یک یال اضافه شده و آن را به دو بخش تقسیم کرده است. حال همه رئوس قرمز را دو به دو به هم وصل می‌کنیم.



حاصل را گراف G' می‌نامیم.

یک مجموعه مستقل I در گراف G را در نظر بگیرید. هر دو راس $x \in I$ و $y \in I$ در گراف G' حضور دارند. فاصله x و y حداقل 3 است. پس I یک مجموعه مستقل قوی در G' است. حال یک مجموعه مستقل قوی S در G' را در نظر بگیرید. دو حالت وجود دارد. S شامل یک راس قرمز است. در این حالت باید داشته باشیم $|S| = 1$ چون هیچ راس دیگری نمی‌تواند در S باشد. حالت دیگر این است که S شامل هیچ راس قرمزی نیست و $S \subseteq V$. در این حالت S یک مجموعه مستقل در G نیز می‌باشد چون هر دو راس در S در گراف G' فاصله حداقل 3 دارند و پس نمی‌تواند در گراف G همسایه باشند.