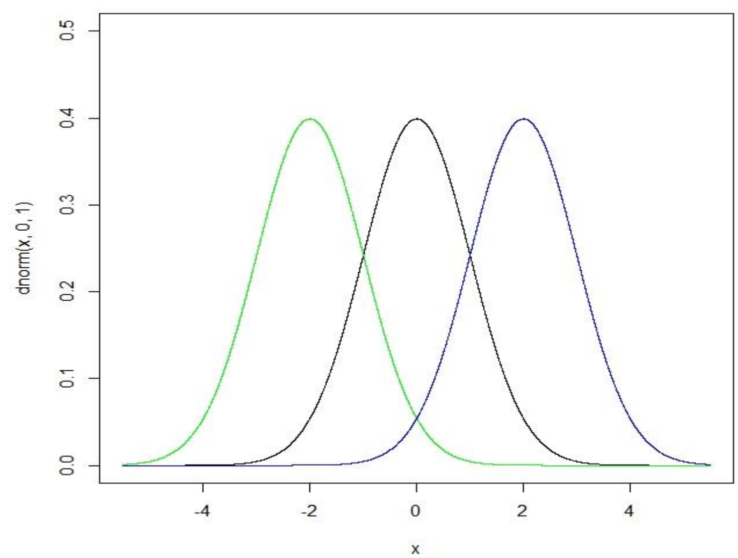
## متغیر تصادفی نرمال

یکی از پرکاربردترین توزیع‌ها در علم آمار توزیع نرمال می باشد. هر متغیر نرمال همانند $X$ بصورت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ نمایش داده می شود که دارای چگالی بفرم

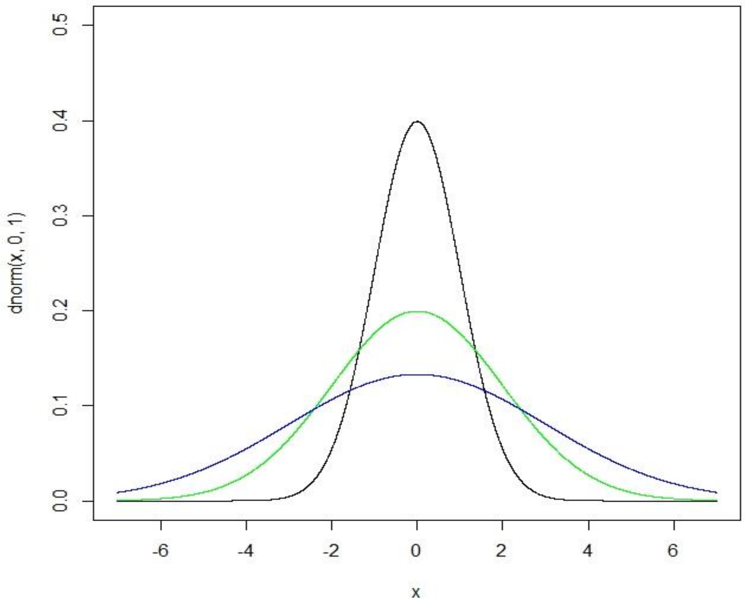
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}; \qquad x \in R.$$

می باشد.

## توزیع نرمال نسبت به میانگین متقارن می باشد.




**واریانس ثابت (برابر ۱) و میانگین متفاوت (به ترتیب ۲-، ۰ و ۲)**




**میانگین ثابت (مقدار صفر) و واریانس متفاوت (به ترتیب ۱، ۲ و ۳)**

**نکته**: هر تبدیل خطی از یک متغیر تصادفی نرمال، همانند $Y = aX + b$، دارای توزیع نرمال می باشد که در آن $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ زیرا

متغیر تصادفی

$= -5$ و $var(X) = 16$.

همچنین، توزیع متغیر $Y = -3X + 2$ برابر با $Y \sim N(17, 144)$.

**نتیجه**: از هر توزیع نرمال به هر توزیع نرمال دلخواه دیگر، با حداقل یک تبدیل خطی می توان رسید. به بیان دیگر بین هر دو متغیر نرمال حداقل دو ترکیب خطی وجود دارد.

**مثال**: بمنظور نمایش این ادعا فرض می کنیم $X \sim N(10, 64)$ و $Y \sim N(-4, 25)$ آنگاه خواهیم داشت. حال می خواهیم نشان دهیم یک تبدیل خطی بین این دو متغیر وجود دارد. یعنی مقادیر همانند $a$ و $b$ وجود دارند بطوریکه $Y = aX + b$. به بیان دیگر میخواهیم مقادیر $a$ و $b$ در رابطه فوق را برای این دو متغیر بدست آوریم.

$Y\sim N(10a+b,a^2 64)=N(-4,25)$ و بنابراین $a^2 64=25$ یعنی $a=\pm\frac{5}{8}$

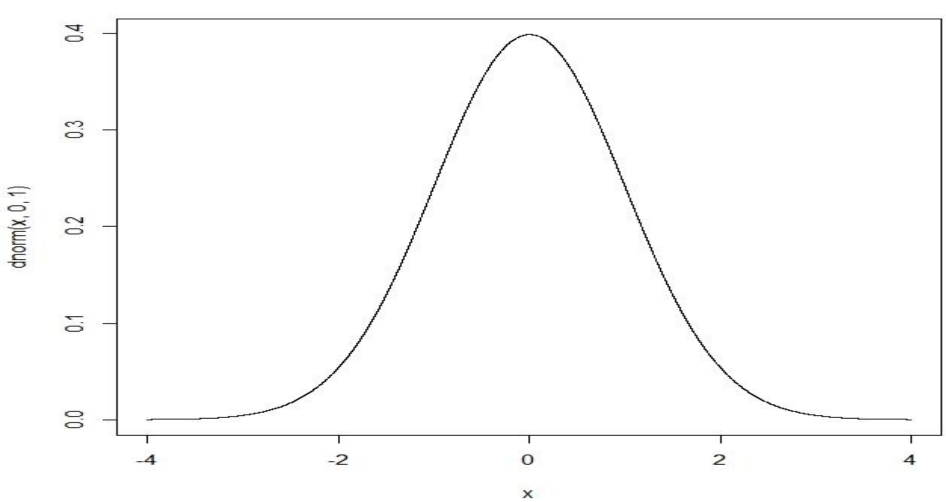
- ❖ برای $a=\frac{5}{8}$ خواهیم داشت $10\frac{5}{8}+b=-4$ در نتیجه $b=-4-\frac{50}{8}$
- ❖ برای $a=-\frac{5}{8}$ خواهیم داشت $-\frac{50}{8}+b=-4$ در نتیجه $b=-4+\frac{50}{8}$

این بدان معنا است که بین دو متغیر تصادفی نرمال $X$ و $Y$ دو رابطه خطی بفرم‌های $Y=\frac{5}{8}X-\frac{82}{8}$ و $Y=-\frac{5}{8}X-\frac{18}{8}$.

**<u>این بدان معنا است که بین دو متغیر تصادفی دلخواه نرمال $X$ و $Y$ همیشه دو رابطه خطی وجود دارد (یکی با شیب مثبت و دیگری با شیب منفی).</u>**

هرگاه در توزیع نرمال میانگین صفر و واریانس برابر ۱ باشد، آن توزیع نرمال را <u>نرمال استاندارد</u> گویند و آنرا بصورت $Z\sim N(0,1)$ نمایش می دهند.

**مثال**: هرگاه داشته باشیم $X\sim N(\mu,\sigma^2)$، آنگاه $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ و همچنین $X=\sigma Z+\mu$.




توزیع نرمال استاندارد

**نکته:** توزیع نرمال نسبت به میانگین خود متقارن می باشد. بنابراین نکته، اگر $Z\sim N(0,1)$، آنگاه برای هر عدد مثبت همانند $z$ داریم

$$P(Z \geq 0) = P(Z \leq 0) = 0.5,$$

$$P(Z < -z) = P(Z > z),$$

$$P(|Z| < z) = P(-z < Z < z) = 2P(0 < Z < z).$$

طرز صحیح استفاده از جدول توزیع نرمال

$$P(Z \leq -1.63) = 0.0516.$$

$$P(Z < 2) = 1 - P(Z > 2) = 1 - P(Z < -2) = 1 - 0.0228 = 0.9772.$$

$$P(-1.85 \leq Z < -0.57) = P(Z < -0.57) - P(Z < -1.85)$$
$$= 0.2843 - 0.0322 = 0.2521.$$

$$P(Z > -2.08) = 1 - P(Z \leq -2.08) = 1 - 0.0188 = 0.9812.$$

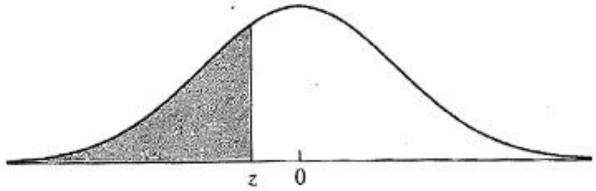
$$P(Z > 1.64) = P(Z < -1.64) = 0.0505.$$

$$P(|Z| > 0.87) = P(Z > 0.87) + P(Z < -0.87) = 2P(Z < -0.87)$$
$$= 2 \times 0.1922.$$

$$P(-2.14 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -2.14)$$
$$= 0.9332 - 0.0162 = 0.9170.$$

$$P(Z < 1.5) = 1 - P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < -1.5) = 1 - 0.0668$$
$$= 0.9332.$$

**TABLE A.2** Cumulative normal distribution ($z$ table)




| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −3.6 | .0002 | .0002 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 |
| −3.5 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 |
| −3.4 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0002 |
| −3.3 | .0005 | .0005 | .0005 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0003 |
| −3.2 | .0007 | .0007 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0005 | .0005 | .0005 |
| −3.1 | .0010 | .0009 | .0009 | .0009 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0007 | .0007 |
| −3.0 | .0013 | .0013 | .0013 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 |
| −2.9 | .0019 | .0018 | .0018 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| −2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| −2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| −2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| −2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | .0049 | .0048 |
| −2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| −2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| −2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| −2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| −2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| −1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| −1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0301 | .0294 |
| −1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| −1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| −1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |
| −1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| −1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| −1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| −1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| −1.0 | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| −0.9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| −0.8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| −0.7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2296 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| −0.6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| −0.5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| −0.4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| −0.3 | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| −0.2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| −0.1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| −0.0 | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |

**مثال:** فرض کنید فشار خون یک شخص سالم دارای توزیعی بفرم $X \sim N(11.5, 2)$، احتمال آنرا بیابید که یک شخص سالم، علائمی همانند یک شخص با فشار خون بالا نشان دهد (یعنی فشار خون شخص در حین اندازه‌گیری بیشتر از ۱۳,۵ شود).

$$P(X > 13.5) = P\left(\frac{X - 11.5}{\sqrt{2}} > \frac{13.5 - 11.5}{\sqrt{2}}\right) = P(Z > 1.41)$$
$$= P(Z < -1.41) = 0.0793.$$

این بدان معنا است که یک شخص سالم در هر ۱۰۰۰۰ مرتبه اندازه‌گیری فشار خونش، می تواند بطور متوسط در ۷۹۳ مرتبه مقادیر فشار خون بالای ۱۳,۵ مشاهده نماید.

**ب)** در چند درصد مواقع فشار خون شخص سالم، بین ۱۱ تا ۱۲ می باشد.

$$P(11 < X < 12) = P\left(\frac{11 - 11.5}{\sqrt{2}} < \frac{X - 11.5}{\sqrt{2}} < \frac{12 - 11.5}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= P(-0.36 < Z < 0.36) = P(Z < 0.36) - P(Z < -0.36)$$
$$= 1 - P(Z > 0.36) - P(Z < -0.36)$$
$$= 1 - 2P(Z < -0.36) = 1 - 2 * 0.3594 = 1 - 0.7188$$
$$= 0.2812.$$

بنابراین توزیع فشار خون شخص سالم، نتیجه می گیریم در ۲۸درصد مواقع فشار خون شخص بین ۱۱ تا ۱۲ قابل مشاهده است.

**ج)** احتمال اینکه فشار خون شخص بین ۱۲ تا ۱۳,۵ بدست آید را محاسبه نمایید.

**نکته:** هر تبدیل خطی بین متغیرهای تصادفی نرمال مستقل، دارای توزیع نرمال می باشد. به بیان دیگر

Let $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \dots, X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ are independent, then for each real number $a_1, \dots, a_n$, we have $\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$.

زیرا

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i.$$

$$var\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n var(a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 var(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2.$$

**نتیجه**: هرگاه متغیرهای تصادفی فوق، از یک جامعه باشند (یعنی $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$) آمده باشند، آنگاه خواهیم داشت $\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N\left(\mu \sum_{i=1}^n a_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$.

**نتیجه مهم**: در یک نمونه تصادفی (از یک جامعه و مستقلا انتخاب شده باشند) از جامعه نرمال، میانگین آنها نیز دارای توزیع نرمال می باشد. به بیان دیگر

$$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ Then } \bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

زیرا

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1, \qquad \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

**نکته:** اگر ۱۵ نمونه از مشاهدات توزیع نرمال با میانگین (بعنوان مثال) ۴ با واریانس ۹ انتخاب نماییم، آنگاه میانگین این ۱۵ مشاهده دارای توزیع نرمال با میانگین ۴ و واریانس $\frac{9}{15} = 0.6$ خواهد بود. این بدان معنا است که میانگین مشاهدات نسبت به میانگین واقعی جامعه پراکندگی کمتری دارد، به بیان دیگر میانگین نمونه مقداری به مراتب نزدیکتر به میانگین واقعی جامعه را بخود خواهد گرفت.

همچنین می توان گفت اگر تعداد نمونه زیاد شود، میانگین نمونه به مقدار واقعی میانگین جامعه میل می نماید.