

آزمونک اول درس مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها (۱۰ آذر ۱۴۰۳؛ زمان ۹۰ دقیقه)

۱. فرض کنید A یک مجموعه ناتهی و $A \sim N_k$ و $A \sim N_m$ ($X \sim Y$ به معنای X با Y هم توان است). نشان دهید $m = k$.

۲. فرض کنید \mathbb{Q} ، مجموعه اعداد گویا باشد. نشان دهید $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ یک مجموعه شمارا است.

۳. فرض کنید A یک مجموعه ناشماراست و B یک ابرمجموعه آن است. نشان دهید B نیز ناشماراست. آیا عکس این حکم نیز درست است؟ پاسخ خود را به صورت مستدل ارائه دهید.

۴. فرض کنید A یک زیر مجموعه سره و ناتهی مجموعه X باشد ($A \subset X, A \neq X$).

(الف) نشان دهید اگر هر زیر مجموعه سره A متناهی باشد، آنگاه A نیز متناهی است.

(ب) اگر $x \in X - A$ و $\text{card}(A \cup \{x\}) = \text{card} A$ ، نشان دهید A نامتناهی است.

۵. فرض کنید A یک مجموعه نامتناهی باشد. اولاً نشان دهید $\text{card } \mathbb{N} \leq \text{card } A$.

ثانیاً مثالی از یک مجموعه A بزنید به طوری که $\text{card } \mathbb{N} < \text{card } A$.

۶. قسمت های سوال زیر از هم مستقل اند. هر قسمت را که توانستید پاسخ دهید.

(الف) نشان دهید هر عدد طبیعی را می توان به صورت $2^m(2n-1)$ نوشت که در آن $m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ و $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. (مثلاً $8 = 2^3 \times 1$ و $9 = 2^0 \times (2 \times 5 - 1)$).

(ب) با استفاده از قسمت الف) نشان دهید تابع $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ که به صورت $f(m, n) = 2^m(2n-1)$ تعریف می شود یک تابع پوشاست. همچنین نشان دهید این تابع یک به یک است!

(پ) نتیجه بگیرید $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ با \mathbb{N} هم توان است.

(ت) آیا می توان نتیجه گرفت $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ با \mathbb{N} هم توان است؟

(ث) آیا می توان نتیجه گرفت برای هر عدد طبیعی k ، $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{k \text{ بار}}$ با \mathbb{N} هم توان است؟ پاسخ خود را به صورت مستدل ارائه دهید.

سوال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	
نمره	۲	۳	۴	۳	۳	۵			مجموعاً ۲۰

توزیع نمرات :

موفق و پیروز باشید