کلید سوالات آزمون پایانترم

درس ساختمان داده ها و الگوریتمها - دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. زمستان ۱۴۰۲	زمان امتحان: ۱۰۰ دقیقه

۱. **درهمسازی** (۲۰ نمره)

(آ) می‌خواهیم دنباله مقادیر زیر را در یک آرایه با طول 7 با تابع درهمسازی $h(x) = x \mod 7$ درج کنیم. برای هر دو روش آدرس دهی باز خطی (linear) و مربعی (quadratic) محتوای آرایه حاصل به چه صورت خواهد بود؟ (ترتیب درج از چپ به راست)

$$6, 13, 14, 21, 28$$

linear

0	1	2	3	4	5	6
13	14	21	28			6

quadratic

0	1	2	3	4	5	6
13	14	28		21		6

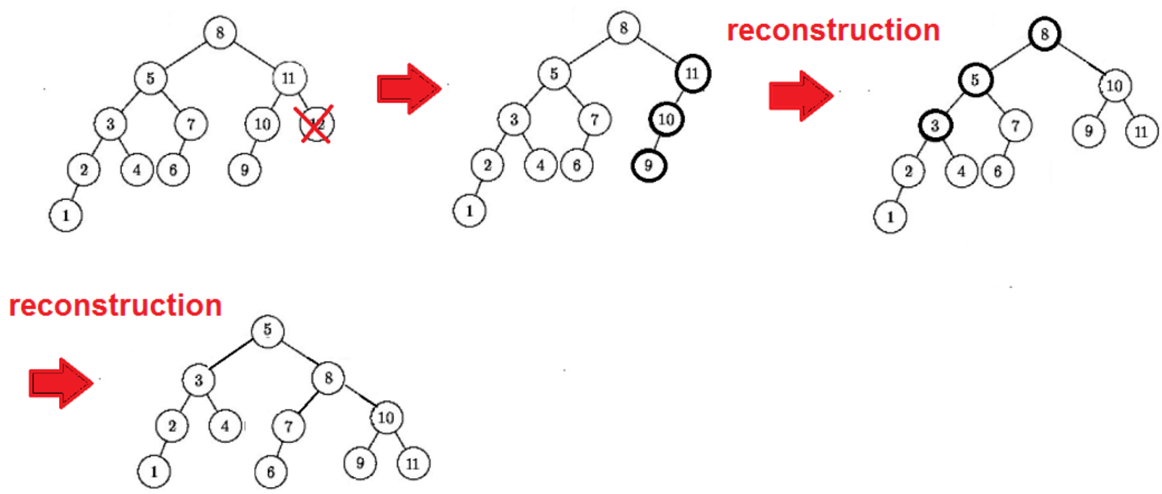
(ب) اگر زمان درج برابر با تعداد خانه‌هایی باشد که برای خالی بودن چک می‌شود، مجموع زمان درج را برای هر دو روش بدست آورید.

linear: 12 **quadratic: 12**

۲. **درخت AVL** (۴۰ نمره)

(آ) در درخت زیر حذف کدام کلیدها باعث می‌شود که برای متوازن کردن درخت به دو بازسازی سه‌گانه نیاز داشته باشیم؟ برای این کلیدها درخت را بعد از متوازن شدن رسم کنید.

12, 11



(ب) فرض کنید تغییری در ساختار داده AVL بدهیم. موقع عمل حذف، عنصر را واقعا حذف نکنیم. فقط علامت بزنیم که حذف شده. روشن است با این استراتژی اگر تعداد عناصر علامت خورده زیاد شود کارایی ساختار داده پایین می‌آید. برای رفع مشکل، هر وقت تعداد عناصر علامت زده بیشتر از نصف تعداد کل عناصر شد، درخت را پاکسازی کنیم و یک درخت جدید که فقط شامل عناصر زنده است، بسازیم. توجه کنید، موقع عمل جستجو از روی عناصر علامت خورده رد می‌شویم. موقع درج، اگر عنصر قبلا موجود باشد، در همان جای قبلی درج می‌شود.
با این فرض، زمان بدترین حالت برای درج، جستجو، حذف و عنصر بعدی (successor) با این استراتژی چقدر است؟

insertion: O(log n)

search: O(log n)

delete: O(n)

successor: O(n) assuming we use the same procedure

(ج) با استفاده از یک تحلیل سرشکنی، یک زمان سرشکنی برای اعمال درج، حذف و جستجو بدست آورید.

potential function: O(# marked elemenets)

amortized (insertion) = log n + $\Delta\Phi$ = log n

amortized(search) = log n + $\Delta\Phi$ = log n

amortized (deletion) = log n + $\underbrace{O(n)}_{\text{reconstruction time}}$ + $\Delta\Phi$ = log n + O(n) - O(n) = log n

۳. **هرم دو جمله‌ای** (۲۰ نمره)
دنباله مقادیر

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

را در صف اولویت خالی $P1$ به ترتیب درج می‌کنیم. به همین ترتیب دنباله مقادیر

$$8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$$

را در صف اولویت خالی $P2$ به ترتیب درج می‌کنیم. سپس دو عمل $P3 = Meld(P1, P2)$ و $Extract-Min(P3)$ را فراخوانی می‌کنیم. برای هر دو استراتژی ادغام حریصانه و ادغام با تاخیر، تعداد دفعاتی که دو درخت دوجمله‌ای طی اجرای این اعمال (از اولین درج تا حذف عنصر کمینه) ادغام می‌شوند چقدر است؟

Greedy strategy: 13

Lazy strategy: 10

۴. درخت اسپلی (۳۰ نمره)

(آ) فرض کنید T یک درخت جستجوی دودویی دلخواه باشد که عناصر آن اعداد 1 تا n هستند. اگر به ترتیب اعداد 1 تا n را اسپلی کنیم، شکل درخت در نهایت به چه صورت خواهد بود؟ اگر شکل خاصی پیدا نمی‌کند، بنویسید —بستگی دارد— در هر صورت، برای جواب خود استدلال کافی بیاورید.

final shape

proof by induction

(ب) در کلاس اثبات کردیم که زمان n اسپلی کردن متوالی برای یک درخت با n راس حداکثر $O(n\log n)$ است. نشان دهید زمان n اسپلی کردن متوالی می‌تواند $\Omega(n\log n)$ باشد.

since every binary with n nodes has depth at least log n, if every time we splay the deepest node, we get at least O(nlog n) time for n consecutive splaying.

۵. (۲۰ نمره) اعداد صحیح 1 تا n را در ساختار داده های زیر درج می‌کنیم. ساختار داده‌ها در ابتدا خالی هستند.

deletion time		insertion time
$O(n^2)$	• BST درخت جستجوی دودویی	$O(n^2)$
O(nlog n)	• AVL Tree درخت AVL	O(nlog n)
O(nlog n)	• (Max) Binary Heap هرم باینری	O(nlog n)
O(nlog n)	• Lazy (Max) Binomial Heap هرم دو جمله‌ای ادغام با تاخیر	O(n)
O(nlog n)	• Greedy (Max) Binomial Heap هرم دو جمله‌ای ادغام حریصانه	O(n)

(آ) زمان درج را برای هر ساختار داده بنویسید. نیازی به استدلال نیست.

(ب) اگر اعداد درج شده را به ترتیب برعکس، یعنی اول n، سپس $n-1$، بعد $n-2$، تا 1 را حذف کنیم. حدس شما برای زمان حذف این اعداد برای هر ساختار داده چیست؟ نیازی به استدلال نیست. موقع حذف فرض کنید اشاره‌گر به عنصری که قرار است حذف شود موجود نیست.