رابطه و تابع

۱.۰ حاصلضرب دکارتی دومجموعه

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه، مجموعه جدیدی است که به کمک دو مجموعه A و B ساخته می شود و می تواند اشیا بیشتری را توصیف نماید. مثلاً اگر رابطه ای بین عناصر A و B وجود داشته باشد، می تواند این رابطه را به صورتی روشن نمایش دهد. یا می تواند نمودار این ارتباطات را نمایش داد و به صورت هندسی آنها را مشاهده نمود. حتی به کمک حاصل ضرب دکارتی می توان نقاط در صفحه، نقاط در فضای و یا نقاط در فضاهای با ابعاد بالاتر را به صورت روشنی نمایش داد. به علاوه در حاصل ضرب دکارتی زیر مجموعه هایی ظاهر می شوند که در تک تک مجموعه هایی که ضرب دکارتی را تشکیل می دهند وجود ندارند. به عنوان مثال در $\mathbb{R}$ مجموعه نقاطی که از یک نقطه به یک فاصله اند تنها دوعضو دارند در صورتی که در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ این مجموعه همان دایره معمولی است یا در $\mathbb{R}^۲\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^۳$ یک کُره می شود.

حاصلضرب دکارتی دومجموعه

برای هر دوشیء داده شده a و b می توانیم شیء جدید (a,b) را به نام زوج مرتب a و b تشکیل دهیم. صفت «مرتب» در اینجا، تاکید برآن دارد که ترتیب نوشتن اشیاء a و b در داخل پرانتز مهم است. بنابراین،(a,b) و (b,a) دو جفت مرتب متمایز هستند. باید توجه داشت که جفت مرتب (a,b) با مجموعه $\{a,b\}$ یکی نیست.

یک شیوه معرفی منطقی زوج مرتب (a,b) معرفی آن به صورت $\{a,\{a,b\}\}$ است. از این تعریف به این

نتیجه می رسیم که

$$(a,b) = (c,d) \iff a = c \quad \wedge \quad b = d$$

دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) را مساوی می گوییم اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$.

در هندسه تحلیلی، صفحه دکارتی را می توان مجموعه تمام جفت های مرتب اعداد حقیقی در نظر گرفت. بیان صُوری این مفهوم چنین است.

تعریف ۱. A و B را دو مجموعه می گیریم. مجموعه تمام زوج های مرتب $(x,y), x \in A, y \in B$ را حاصلضرب دکارتی A و B نامیده و با $A \times B$ نمایش می دهند. به زبان نمادی

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

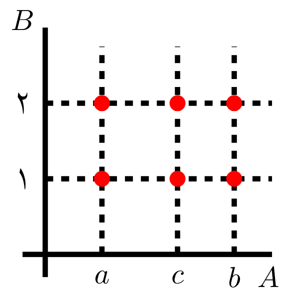
a را مختص اول و b را مختص دوم زوج مرتب (a,b) می نامند.

مثال ۲. فرض کنیم $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{۱,۲\}$. حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ و $B \times A$ عبارتند از

$$A \times B = \{(a,۱),(a,۲),(b,۱),(b,۲),(c,۱),(c,۲)\}$$

$$B \times A = \{(۱,a),(۲,a),(۱,b),(۲,b),(۱,c),(۲,c)\}$$

ملاحظه می شود که $A \times B \neq B \times A$. حاصل ضرب دکارتی را می توانیم مجموعه نقاط قرمز رنگ شکل زیر مجسم کنیم.



مثال ۳. A یک مجموعه است. $A \times \varnothing$ ، $\varnothing \times A$ تهی هستند. زیرا بنابرتعریف، $A \times \varnothing$ مجموعه تمام زوج های مرتب (a,b) است که در آن $a \in A$ و $b \in \varnothing$، و چون مجموعه $\varnothing$ هیچ عضوی ندارد، هیچ عنصری مانند b در $\varnothing$ وجود ندارد. به این ترتیب $A \times \varnothing = \varnothing$. با استدلالی مشابه دیده می شود $\varnothing \times B = \varnothing$.

قضیه ۴. A، B، و C را سه مجموعه می گیریم. آنگاه

(الف) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(ب) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

اثبات. الف)

$$
\begin{aligned}
& (a,x) \in A \times (B \cap C) \\
\text{تعریف (۱)} \iff\ & (a \in A) \wedge (x \in B \cap C) \\
\text{تعریف } \cap \iff\ & (a \in A) \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\
\text{خودتوانی، شرکت پذیری} \iff\ & (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C) \\
\text{جابه جایی، شرکت پذیری} \iff\ & [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \in C)] \\
\text{تعریف (۱)} \iff\ & [(a,x) \in A \times B] \wedge [(a,x) \in A \times C] \\
\text{تعریف } \cap \iff\ & (a,x) \in (A \times B) \cap (A \times C)]
\end{aligned}
$$

□

از این رو، بنابرتعریف تساوی دومجموعه، ثابت کردیم که

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

این تساوی به زبانی ساده چنین بیان می شود: حاصلضرب دکارتی نسبت به اشتراک پخشپذیر است.

قسمت (ب) را به روشی مشابه می توان به اثبات رساند.

قضیه ۵. اگر A، B و C سه مجموعه باشند، آنگاه

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

یعنی حاصل ضرب دکارتی نسبت به متممگیری پخشپذیر است.

اثبات.

$$
\begin{aligned}
& (a,x) \in A \times (B - C) \\
\text{(۱) تعریف} \iff & (a \in A) \wedge (x \in B - C) \\
\text{تعریف} \iff & (a \in A) \wedge [(x \in B) \wedge (x \notin C)] \\
\text{خودتوانی، شرکت پذیری} \iff & (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C) \\
\text{جابه جایی، شرکت پذیری} \iff & [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \notin C) \\
\text{(۱) تعریف} \iff & [(a,x) \in A \times B] \wedge [(a,x) \notin A \times C] \\
\text{تعریف} \iff & (a,x) \in A \times B - A \times C
\end{aligned}
$$

به این ترتیب ثابت کردیم که

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$\square$

تمرین های صفحه ۶۷، ۱، ۲، ۴، ۵، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ را حل کنید.

۲.۰ رابطه

به گزاره نماهای زیر توجه نمایید:

۱. در میان افراد یک جامعه « x» از طریق رابطه برادری با «y» ممکن است در رابطه قرار بگیرد. (رابطه خانوادگی)

۲. هر دانشجویی از طریق یک شماره دانشجویی به طور یکتایی مشخص می شود (رابطه بین دانشجویان و مجموعه اعداد طبیعی).

۳. هر ایرانی از طریق یک شماره ملی به طور یکتایی مشخص می شود (رابطه بین افراد با تابعیت ایران و اعداد ۱۰ رقمی طبیعی).

۴. هر فرد روی این زمین از طریق ملیت خود با دیگر افراد جامعه در ارتباط قرار می گیرد (رابطه فرد با ملیت).

۵. هر عضو مجموعه A مجذور یک عضو مجموعه $\mathbb{R}$ است.

۶. هر عضو مجموعه $\mathbb{Z}$، از طرق تقسیم بر ۷ با یکی از اعداد ۰ یا با ۱ یا با ۲ یا با ۳ یا با ۴ یا با ۵ یا با ۶ در ارتباط است.

۷. با دیدن این سلسله مثال ها، آیا شما هم می توانید مثال خودتان را ارائه نمایید؟

این مثال و مثال های بیشمار دیگر، نشان از «ارتباط داشتن» یک عضو از یک مجموعه با یک عضو از یک مجموعه دیگر است.

چون نمی توانیم لیست مثال های فوق را ادامه دهیم، سعی می کنیم به صورت کلی و دقیق آن را توصیف کنیم و بعد به کمک این توصیف رابطه های جدید را بشناسیم و خواص یک مجموعه را به کمک این رابطه، از یک مجموعه دیگر نتیجه بگیریم. یکی از پایه ای ترین مفاهیم در ریاضیات مفهوم «رابطه» است. به خصوص رابطه ای به نام «تابع» می تواند خواص بسیاری از یک مجموعه را به یک مجموعه دیگر سرایت دهد و خواص مجموعه جدید را به کمک مجموعه اولیه بررسی و آن خواص را شناخت. در این قسمت می خواهیم تعریفی دقیق از مفهوم رابطه ارائه دهیم.

فرض کنیم دو مجموعه A و B، که الزاماً متمایز نیستند، داده شده اند. جمله « یک عنصر a از A با یک رابطه R به یک عنصر b از مجموعه B نظیر شده است» گزاره ای است درباره زوج مرتب (a,b) در حاصل ضرب دکارتی $A \times B$. از این رو، تعریف ریاضی رابطه را می توان برحسب زوج های مرتب حاصل ضرب دکارتی مجموعه ها بیان کرد.

تعریف ۶. یک زیر مجموعه حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را یک رابطه R از A به B می نامیم. معمولاً به جای $(a,b) \in R$ می نویسند aRb. نماد aRb خوانده می شود « a با R به b مربوط است».

تمرین ۷. فرض کنید R یک رابطه در A باشد و $(a,b)\in R \iff aRb$. نقیض این رابطه را بنویسید.

مثال ۸. ۱. برای مثال ۱، اگر P جامعه انسانی باشد رابطه x برادر y است یک زیر مجموعه $P\times P$ است.

۲. اگر S مجموعه دانشجویان باشد، «رابطه x دارای شماره دانشجویی n است، یک زیر مجموعه $S\times\mathbb{N}$ است.

۳. اگر $A=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشد، آنگاه مانده تقسیم n یک زیر مجموعه از $\mathbb{Z}\times A$ به دست می دهد.

اغلب مجموعه های A و B یکی هستند، در اینصورت این دو مجموعه را X می نامیم و به جای این که بگوییم « R یک رابطه از X در X است» می گوییم « R یک رابطه در X است».

۱. فرض کنیم F خانواده فرهمند باشند. آنگاه a برادر b است یک رابطه در این خانواده است.

۲. فرض کنیم N مجموعه اهالی یک کشور خاص، مثلاً ایران باشند. آنگاه a و b ایرانی هستند، یک زوج مرتب $(a,b)\in N\times N$ تعریف می کند.

۳. فرض کنیم $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد. آنگاه n مکعب یک عضو a است یک رابطه در $\mathbb{N}$ است که زوج مرتب $(a,n=a^۳)$ را توصیف می کند.

توجه کنید که در اینجا نمی توان گفت (n,a) به رابطه بالا تعلق دارد زیرا ممکن است a توان سوم n نباشد.

به طور کلی اگر از این که زوج مرتب (a,b) به R تعلق دارند بتوان نتیجه بگیریم زوج مرتب (b,a) هم به R تعلق دارد، به R ویژگی خاصی می دهد. یعنی

تعریف ۹. فرض کنیم A و B دومجموعه، که الزاماً متمایز نیستند، باشند. اگر R رابطه ای از A به B باشد، آنگاه « وارون رابطه R، $R^{-۱}$ » رابطه ای است از B به A، به قسمی که $bR^{-۱}a$ اگر و تنها اگر aRb. یعنی

$$R^{-۱}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}.$$

مثال ۱۰. ۱. (الف) فرض کنیم $A=\{a,b\}$ و $B=\{x,y,z\}$ و $R\subseteq A\times B$ به صورت $R=\{(a,x),(b,y)\}$ داده شده است. آنگاه $R^{-۱}=\{(x,a),(y,b)\}$ است.

۲. (ب) فرض کنیم

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \ x \text{ مقسوم علیه } y \text{ است}\}$$

آنگاه

$$R^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \ y \text{ مضربی از } x \text{ است}\}$$

۳. (پ) فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد. فرض کنید رابطه R به صورت زیر باشد

$$R = \{(۵, ۱), (۵, ۲), (۵, ۳), (۵, ۴), (۵, ۵), (۴, ۱), (۴, ۲), (۴, ۳), (۴, ۴), (۳, ۱), (۳, ۲), (۳, ۳), (۲, ۱), (۲, ۲), (۱, ۱)\}$$

آنگاه

$$R^{-1} = \{(۱, ۵,), (۲, ۵), (۳, ۵), (۴, ۵), (۵, ۵), (۴, ۱), (۴, ۲), (۴, ۳), (۴, ۴), (۳, ۱), (۳, ۲), (۳, ۳), (۲, ۱), (۲, ۲), (۱, ۱)\}$$

به طور کلی

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x \geq y\}$$

آنگاه

$$R^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | y \leq x\}$$

فرض کنیم R یک رابطه از A به B باشد. **حوزه** R که با $\mathbf{Dom}(R)$ نشان داده می شود، مجموعه تمام عنصرهای $a \in A$ است به قسمی که aRb برای یک $b \in B$ و **نگاره** که به $\mathbf{Im}(R)$ نشان داده می شود، مجموعه تمام عنصرهای $b \in B$ است به قسمی که aRb برای یک $a \in A$. به زبان نمادی

$$\mathbf{Dom}(R) = \{a \in A | \ (a, b) \in R, b \in B \ \text{ برای یک}\}$$

و

$$\mathbf{Im}(R) = \{b \in B | \ (a, b) \in R, a \in A \ \text{ برای یک}\}$$

در مثال ۵ (الف)، $\mathbf{Dom}R = \{a, b\}$ و $\mathbf{Im}(R) = \{x, y\}$.

مثال ۱۱.

تعریف ۱۲. فرض کنید R رابطه ای در مجموعه X است. می گوییم

(الف) R انعکاسی (بازتابی) است اگر و فقط اگر xRx به ازای هر $x \in X$.

(ب) رابطه R متقارن است اگر و فقط اگر xRy نتیجه شود yRx.

$$xRy \Longrightarrow yRx$$

(پ) R متعدی است اگر و فقط اگر $xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz$.

(ت) R یک رابطه **هم ارزی است** اگر و فقط اگر R هم **انعکاسی**، هم **متقارن** و هم **متعدی** باشد.

تمرین ۱۳. بنابرتعریف R یک رابطه هم ارزی است اگر و فقط اگر (R انعکاسی باشد $\wedge$ متقارن باشد $\wedge$ متعدی باشد

حال نقیض R یک رابطه هم ارزی است را بنویسید.

مثال ۱۴. ۱. رابطه تساوی $=$، در مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، یک رابطه هم ارزی است.

۲. فرض کنیم یک کیسه حاوی گوی های رنگارنگ است. آنگاه رابطه « گوی های a و b همرنگ اند » یک رابطه هم ارزی در مجموعه گوی ها است.

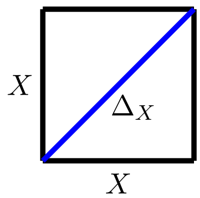
۳. فرض کنید C مجموعه تمام دانشجویان درس مبانی ریاضی باشد. آنگاه رابطه « دانشجوی a با دانشجوی b هم ارز است اگر و فقط اگر حرف اول نام فامیل a با حرف اول نام فامیل b یکی باشد.

رابطه های هم ارزی در ریاضیات نوین از اهمیت خاصی برخوردار اند. مثلاً گروه های خارج قسمتی در جبر، فضاهای خارج قسمتی در توپولوژی، و دستگاه اعداد هم نهشت در نظریه اعداد، همگی به نوعی از رابطه های هم ارزی مربوط هستند.

در یک مجموعه ناتهی X، همواره لااقل دو رابطه هم ارزی وجود دارد. یکی از این دو رابطه، « رابطه قطری Δ_X (یا رابطه همانی) است» که با

$$\Delta_X = \{(x,x) | x \in X\}$$

تعریف می شود و هر عنصر را به خودش نظیر می کند. اگر X را با یک پاره خط نمایش دهیم، آنگاه $X \times X$ یک مربع و Δ_X قطر «اصلی» این مربع است.



رابطه هم ارزی دیگر که همیشه روی مجموعه X وجود دارد، رابطه $R = X \times X$ است که در بین تمام رابطه های هم ارزی که در زیر مجموعه های $X \times X$ می توان تعریف کرد، Δ_X کوچکترین رابطه هم ارزی و $X \times X$ بزرگترین است.

مثال ۱۵. فرض کنید m عددی صحیح و مثبت، ثابت و دلخواه است. رابطه همنهشتی $\equiv$ به پیمانه m، (یا مدولو m [۱]) در مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، با « $x \equiv y(\mod m)$ اگر و تنها اگر $x - y = km$ به ازای یک $k \in \mathbb{Z}$ » تعریف می شود. رابطه هم نهشتی یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است.

اثبات. (الف) برای هر $x \in \mathbb{Z}$، چون $x - x = 0 \cdot m$، پس داریم $x \equiv x(\mod m)$. بنابراین رابطه هم نهشتی، یک رابطه انعکاسی است.

(ب) اگر $x \equiv y(\mod m)$، آنگاه برای یک $k \in \mathbb{Z}$، $x - y = km$. درنتیجه $y - x = (-k)m$ و در آن $-k \in \mathbb{Z}$. پس $y \equiv y(\mod m)$ و رابطه متقارن است.

(پ) اگر $x \equiv y(\mod m)$ و $y \equiv z(\mod m)$ آنگاه $x - y = k_1 m$ و $y - z = k_2 m$، به ازای یک $k_1 \in \mathbb{Z}$ و یک $k_2 \in \mathbb{Z}$. بنابراین

$$x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)m$$

و $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$، که نشان می دهد $x \equiv z(\mod m)$. پس رابطه متعدی است. بنابراین ما ثابت کردیم که رابطه هم نهشتی (به پیمانه m) یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است.

□

[۱] *modulo*

به عنوان یک حالت خاص این مثال، m را ۲ می‌گیریم. آنگاه $x \equiv y (\mod ۲)$ اگر و تنها اگر $x-y$ یک عدد صحیح زوج باشد. در نتیجه $x \equiv y (\mod ۲)$ اگر و تنها اگر x, y هردو زوج باشند یا هردو فرد باشند.

تمرین ۱۶. *(الف)* تمرین های صفحه ۷۱ کتاب و شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ، ۸ و ۹.

(ب) در مورد هریک از رابطه های زیر تعیین کنید کدامیک از خاصیت های انعکاسی، تقارن، تعدی و هم ارزی را دارند.

۱. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, xRy \iff x = y = ۰ \quad \vee$ **y و x هم علامت اند**

۲. M= مجموعه ماتریس های ۲ × ۲. در M رابطه زیر را تعریف می کنیم

$$A, B \in M, A\ R\ B \iff \det\ A = \det\ B$$

۳. برای نقاط صفحه $\mathbb{R}^۲$ رابطه زیر را درنظر بگیرید.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^۲ \quad \vee \quad \forall (x',y')\mathbb{R}^۲ (x,y)R(x',y') \iff \exists a \in \mathbb{R} - \{۰\} \quad (x,y) = a(x',y')$$

آیا R یک رابطه هم ارزی است؟

۴. فرض کنید T مجموعه مثلث های در صفحه $\mathbb{R}^۲$ باشند. رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$(\Delta\ ABC)\ R\ (\Delta\ A'B'C') \iff \textbf{متشابه اند} \quad \Delta\ ABC \quad \textbf{و} \quad \Delta\ A'B'C'$$

۵. برای هر عضو $\mathbb{R}$ فرض کنید $[x]$ مقدار صحیح x باشد.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} xRy \iff [x] = [y]$$

۳.۰ افراز و رابطه هم ارزی

به مثال های زیر توجه کنید:

۱. روی $\mathbb{N}$، در دستگاه عدد نویسی دهدهی، رابطه

$$\forall x, y, \in \mathbb{N}, \quad xRy \iff \textbf{دارای یک تعداد رقم هستند} \quad y, x$$

یک رابطه هم ارزی است. و می توایم تقسیم بندی زیر را در نظر بگیریم

$$\mathbb{N} = \textbf{اعداد یک رقمی} \cup \textbf{اعداد دو رقمی} \cup \textbf{اعداد سه رقمی} \cup \dots$$

۲. رابطه زیر روی مجموعه $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad xRy \iff ۲|x-y$$

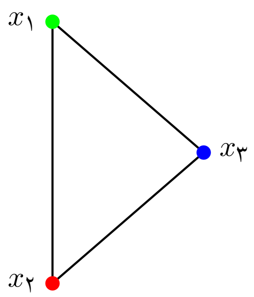
می دانیم این رابطه یک رابطه هم ارزی روی $\mathbb{Z}$ است. این رابطه سبب می شود تا اعضای $\mathbb{Z}$ را به صورت اجتماع دو مجموعه جدا از هم « اعداد زوج» و «اعداد فرد» بنویسیم.

$$E = \{۰, \pm ۲, \pm ۴, \pm ۶, \dots\}, \quad O = \{\pm ۱, \pm ۳, \pm ۵, \dots\}, \quad E \cap O = \varnothing, \quad E \cup O = \mathbb{Z}$$

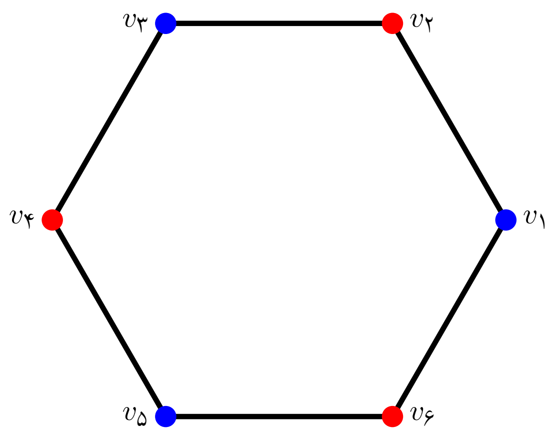
۳. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. فرض کنیم $V = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ مجموعه رئوس G باشد. می دانیم رابطه

$$v_j \sim v_i \iff \text{همرنگ اند} v_i \text{ و } v_j$$

یک رابطه هم ارزی است. این رابطه سبب می شود عناصری که هم ارز هستند در مجموعه های جدا ازهم قرار گیرند



$$P = \{\{x_{۱}\}, \{x_{۲}\}, \{x_{۳}\}\}$$



این رابطه هم ارزی راس هایی که هم رنگ هستند را در مجموعه های جدا از هم قرار می دهد.

$$P = \{\{v_{۱}, v_{۳}, v_{۵}\}, \{v_{۲}, v_{۴}, v_{۶}\}\}$$

۴. می دانیم روی مجموعه دانشجویان یک کلاس رابطه

$\forall x, y \in C, xRy \iff$ **حرف اول نام فامیل** x **با حرف اول نام فامیل** y **یکی است**

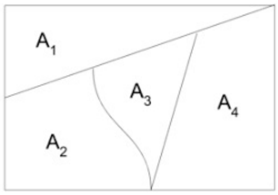
این رابطه سبب می شود دانشجویان یک کلاس را بتوان در مجموعه های زیر قرار داد

$C =$ {**کسانی که حرف اول نام فامیل شان آ است**} $\cup$ {**کسانی که حرف اول نام فامیلشان ب است**} $\cup \ldots$
$\cup$ {**کسانی که حرف اول نام فامیلشان ی است**}

تعریف ۱۷. X مجموعه ای غیر تهی است. منظور از یک افراز X مانند P، یک مجموعه از زیر مجموعه های ناتهی X است به قسمی که

(الف) اگر $A, B \in P$ و $A \neq B$ آنگاه $A \cap B = \varnothing$.

(ب) $\bigcup_{C \in P} C = X$.



به تعبیری نزدیک به آنچه می توان دید، افراز X یک «تقسیم X» به قطعه های مجزای ناتهی است.

مثال ۱۸. فرض کنیم m عددی صحیح، مثبت و ثابت است. به ازای هر عدد صحیح j، $\circ \leq j < m$، تعریف می کنیم $Z_j = \{x \in \mathbb{Z} | x - j = km, k \in \mathbb{Z},$ **برای یک**$\}$ آنگاه مجموعه

$$\{Z_\circ, Z_۱, Z_۲, \ldots, Z_{m-۱}\}$$

یک افراز $\mathbb{Z}$ است. در حالت خاص $m = ۲$، مجموعه های

$$Z_\circ = E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \ \text{زوج است}\}$$

و

$$Z_۱ = O = \{x \in \mathbb{Z} | x \ \text{فرد است}\}$$

بین افراز یک مجموعه ناتهی و یک رابطه هم ارزی روی آن مجموعه ارتباط بسیار نزدیکی وجود دارد. برای درک این ارتباط، به تعریف زیر احتیاج داریم.

تعریف ۱۹. R یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه ناتهی است. به ازای هر $x \in X$، مجموعه

$$[x] = \{y \in X | xRy\}$$

را رده هم ارزی مربوط به عنصر x تعریف می کنیم. مجموعه تمام این رده های هم ارزی در X را با X/R نمایش می دهیم، یعنی

$$X/R = \{[x] | x \in X\}$$

نماد X/R را « $X \text{modulo } R$ » یا فقط « $X \mod R$» می خوانیم.

قضیه ۲۰. R یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه ناتهی X است. آنگاه

(الف) هر $[x]$ یک زیر مجموعه ناتهی X است.

(ب) $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ اگر و فقط اگر xRy.

(پ) xRy اگر و فقط اگر $[x] = [y]$.

اثبات. (الف) چون برای هر $x \in X$، R انعکاسی است، داریم xRx. بنابرتعریف ۱۹، $x \in [x]$ و بنابراین $[x]$، یک زیر مجموعه ناتهی X است.

(ب) چون R یک رابطه هم ارزی و $X \neq \varnothing$، داریم

$$\begin{aligned}
[x] \cap [y] &\iff (\exists x)(z \in [x] \wedge z \in [y]) \\
\text{تعریف ۱۹} &\iff (zRx) \wedge (zRy) \\
R \text{ متقارن است} &\iff (xRz) \wedge (zRy) \\
R \text{ متعدی است} &\iff xRz
\end{aligned}$$

(پ) : به راحتی از (الف) و (ب) نتیجه می شود که $xRy \Longrightarrow [y] = [x]$. حال باید نشان دهیم $xRy \Longleftarrow [y] = [x]$. فرض کنیم xRy. آنگاه

$$\begin{aligned}
&z \in [x] \Longrightarrow zRx && \text{تعریف ۱۹} \\
&(zRx) \wedge (xRy) \Longrightarrow zRy && R \text{ متعدی است} \\
&\Longrightarrow z \in [y] && \text{تعریف ۱۹}
\end{aligned}$$

چون z اختیاری است، نتیجه می شود که $[y] \subseteq [x]$. استدلالی مشابه نتیجه می دهد که $[x] \subseteq [y]$ بنابراین $[x] = [y]$.

$\square$

قضیه ۲۱. اگر R یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه ناتهی X باشد، آنگاه X/R یک افراز X است.

اثبات. بنابر قضیه ۲۰ (الف) و تعریف ۱۹، $X/R = \{[x] | x \in X\}$. خانواده ای از زیر مجموعه های ناتهی X است. اکنون نشان می دهیم که

$$[x] \neq [y] \Longrightarrow ([x]) \cap ([y]) = \varnothing$$

برای این منظور عکس نقیض آن، $([x] \cap [y] \neq \varnothing \Longrightarrow ([x] = [y]))$ را ثابت می کنیم. اما این رابطه یک نتیجه مستقیم قضیه ۲۰ (ب) و (پ) است. بالاخره، باید نشان دهیم که $\bigcup_{x \in X}[x] = X$. این نیز بدیهی است. زیرا هر $x \in X$، به $[x]$ متعلق است و به این ترتیب اثبات قضیه کامل می گردد. $\square$

هم اکنون در قضیه ۲۱ دیدیم که یک رابطه هم ازی روی مجموعه ناتهی X، یک افراز X ایجاد می کند. حال نشان می دهیم که عکس قضیه ۲۱ نیز درست است. یعنی هر افراز X یک رابطه هم ارزی روی X ایجاد می کند.

تعریف ۲۲. P یک افراز مجموعه ناتهی X است. یک رابطه X/P روی X با $x(X/P)y$ اگر و تنها اگر یک مجموعه $A \in P$ وجود داشته باشد به قسمی که $x, y \in A$، تعریف می کنیم.

یادآوری ۲۳. به تعاریف (۱۹) و (۲۲) به دقت توجه نمایید و آنها را با هم مقایسه کنید تا اختلاف ظریف بین نماد های مشابه $[x]$، X/R و $/P$ را دریابید.

قضیه ۲۴. P اگر P یک افراز مجموعه ناتهی X باشد، آنگاه رابطه X/P یک رابطه هم ارزی روی X است، و رده های هم ارزی که از رابطه هم ارزی X/P به وجود می آیند دقیقاً مجموعه های افراز P هستند. به زبان نمادی $X/(X/P) = P$.

اثبات. چون هر عنصر X مانند x متعلق به یکی از مجموعه های $A \in P$ است، $x(X/P)x$، پس X/P انعکاسی است. تقارن X/P یک نتیجه بدیهی تعریف (۲۲) است. برای این که نشان دهیم رابطه X/P متعدی است، فرض کنیم x، y و z سه عنصر X هستند که در شرط های زیر صدق می کنند

$$x(X/P)y, \qquad y(X/P)z$$

آنگاه بنابرتعریف (۲۲)، A و B در P وجود دارند به قسمی که $x,y \in A$ و $z,y \in B$. درنتیجه $y \in A \cap B$.
از تعریف افراز نتیجه می شود $A = B$. از این رو، $x,z \in A$ و بنابراین $x(X/P)z$. پس X/P یک رابطه هم ارزی روی X است.

برای اثبات بقیه قضیه، گیریم x یک عنصر اختیاری X باشد. یک و فقط یک مجموعه A در P وجود دارد به قسمی که $x \in A$. زیرا $X = \bigcup_{A \in P} A$. در نتیجه بنابرتعریف (۱۹)، داریم

$$x/(X/P) = A$$

ثابت شد که هر رده هم ارزی مدولو X/P یک مجموعه از خانواده P است.

برعکس، فرض کنیم A یکی از مجموعه های افراز P باشد. چون $A \neq \varnothing$ یک عنصر x در X وجود داردکه متعلق به A است. پس با استدلال قبلی، $x/(X/P) = A$. به این ترتیب ثابت شد که $X/(X/P) = P$ و برهان قضیه کامل است.

هر رابطه هم ارزی R روی مجموعه ناتهی X یک افراز X/R (قضیه (۲۱)) به وجود می آورد. با این افراز رابطه هم ارزی $X/(X/R)$ مشخص می شود (قضیه (۲۴)). مهم این است بدانیم که $X/(X/R) = R$. با این رابطه و رابطه $X/(X/P) = P$ ارتباط نزدیک بین رابطه های هم ارزی و افرازها روشن می شود.

قضیه (۲۴) را با یک مثال خاص توضیح می دهیم.

فرض کنیم $\mathbb{Z}_0$ و $\mathbb{Z}_1$ به ترتیب مجموعه اعداد صحیح زوج و اعداد صحیح فرد باشند. آنگاه $P = \{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1\}$ یک افراز مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است. بنابرتعریف رابطه $\mathbb{Z}/P$، داریم $a(\mathbb{Z}/P)b$ اگر و تنها اگر یا $a,b \in \mathbb{Z}_0$ یا $a,b \in \mathbb{Z}_1$. یعنی $a(\mathbb{Z}/P)b$ اگر و تنها اگر a,b هر دو زوج باشند یا هردو فرد باشند. به سادگی دیده می شودکه این رابطه یک رابطه هم ارزی است.

درواقع، $a(\mathbb{Z}/P)b$ اگر و فقط اگر $a \equiv b (\mod 2)$.

بدین جهت، رابطه $\mathbb{Z}/P$ در واقع همان رابطه همنهشتی $\equiv (\mod 2)$ است.

به عکس، اگر مجموعه $\mathbb{Z}$ و رابطه هم ارزی R داده شده باشند، به قسمی که xRy اگر و تنها اگر $x \equiv y($

$\pmod{2}$، آنگاه

$$a/P=[a]=\{x\in\mathbb{Z}|x\equiv a(\mod 2)\}=\begin{cases}\mathbb{Z}_0 & \text{اگر } a \text{ زوج باشد}\\ \mathbb{Z}_1 & \text{اگر } a \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

بنابراین $\mathbb{Z}/R=\{\mathbb{Z}_0,\mathbb{Z}_1\}$ که آشکارا یک افراز $\mathbb{Z}$ است. □

تمرین ۲۵. از تمرین های صفحه ۷۶ تمرین های زیر را حل نمایید:

۱، ۲، ۳، ۷، ۸ و ۹.

همچنین تمرین ۱۱ صفحه ۷۷.

۴.۰ تابع

تابع و مثال هایی از تابع

نوع خاصی از رابطه است که به تابع موسوم است. تاکنون با مثال های زیادی از تابع آشنا شده ایم.

در واقع، یک تابع از A به B یک رابطه ای است که به هر عضو A، یک و فقط یک عضو B را نظیر می کند.

به عنوان مثال:

مثال ۲۶. *a)* به یاد بیاورید برای محاسبه جدول ارزش عبارت های منطقی به یک دنباله از ارزش های گزاره های مولفه های یک گزاره مرکب، ، ارزش گزاره را تعیین می کردیم. در واقع در این موارد هم یک رابطه بین ارزش های مولفه های یک گزاره مرکب و مجموعه $\{T,F\}$ برقرار می کردیم. به عنوان مثال

.۱

$$\begin{aligned}\{T,F\} &\longrightarrow \{T,F\}\\ q &\mapsto \sim q\end{aligned}$$

در اینجا دامنه و برد تابع به صورت زیر است

$$\text{دامنه‌تابع} = \{T, F\}$$

$$\text{بردتابع} = \{T, F\}$$

$$\text{نگاره‌تابع} = \{T, F\}$$

.۲

$$\begin{aligned} \{T, F\} \times \{T, F\} &\longrightarrow \{T, F\} \\ (p, q) &\longrightarrow p \vee q \end{aligned}$$

$$\text{دامنه‌تابع} = \{T, F\} \times \{T, F\}$$

$$\text{بردتابع} = \{T, F\}$$

$$\text{نگاره‌تابع} = \{T, F\}$$

.۳

$$\begin{aligned} \{T, F\} \times \{T, F\} &\longrightarrow \{T, F\} \\ (p, q) &\mapsto p \wedge q \end{aligned}$$

$$\text{دامنه‌تابع} = \{T, F\} \times \{T, F\}$$

$$\text{بردتابع} = \{T, F\}$$

$$\text{نگاره‌تابع} = \{T, F\}$$

.۴

$$\begin{aligned} \{T, F\} \times \{T, F\} \times \{T, F\} &\longrightarrow \{T, F\} \\ (p, q, r) &\mapsto p \wedge (q \vee r) \end{aligned}$$

$$\text{دامنه‌تابع} = \{T,F\} \times \{T,F\} \times \{T,F\}$$
$$\text{بردتابع} = \{T,F\}$$
$$\text{نگاره‌تابع} = \{T,F\}$$

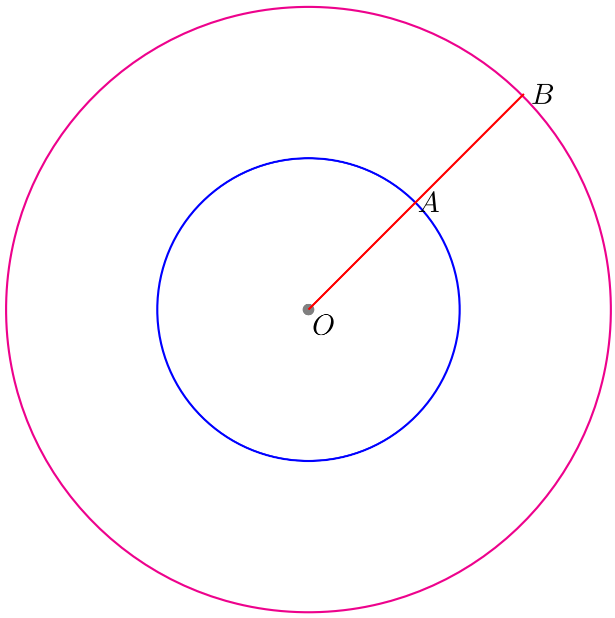
.۵

$$\begin{array}{rcl} \{T,F\} \times \{T,F\} & \longrightarrow & \{T,F\} \\ (p,q) & \mapsto & p \longrightarrow q \end{array}$$

$$\text{دامنه‌تابع} = \{T,F\} \times \{T,F\}$$
$$\text{بردتابع} = \{T,F\}$$
$$\text{نگاره‌تابع} = \{T,F\}$$

مثال ۲۷. $b)$ به عنوان مثالی دیگر در این تصاویر، سعی می شود از طریق شعاع یک دایره و محل برخورد امتداد یافته این شعاع با دایره دیگر، یک مفهوم مهم را به صورت تصویری آموزش دهیم. آیا شما می توانید بگویید این مفهوم چیست؟

با انتخاب نقطه A روی دایره آبی رنگ و با امتداد دادن شعاع OA، دایره بنفش رنگ را در یک و فقط یک نقطه B قطع می کند.



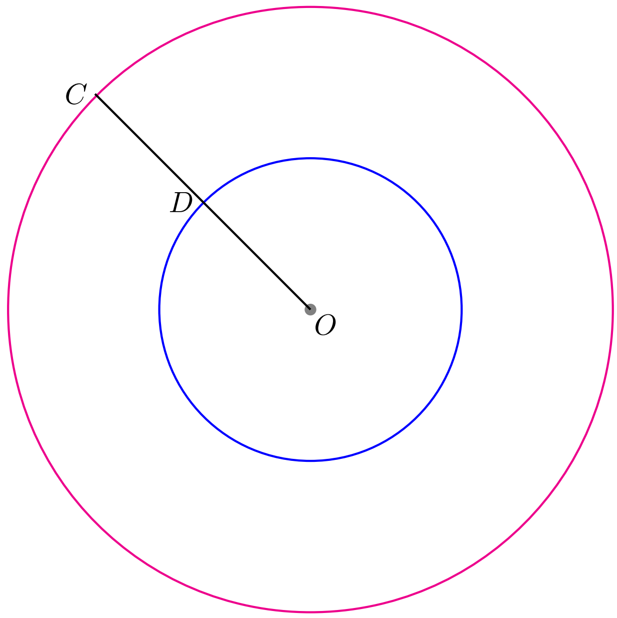
دایره آبی = دامنه‌تابع

دایره بنفش = بردتابع

دایره بنفش = نگاره‌تابع

سوال ۲۸. با تغییر A روی دایره آبی رنگ، آیا نقطه متناظر به A، یعنی نقطه B از تمامی نقاط دایره بنفش می گذرد؟

برعکس، با انتخاب نقطه C روی دایره بنفش رنگ شعاع CA، دایره آبی رنگ را در یک و فقط یک نقطه D قطع می کند.



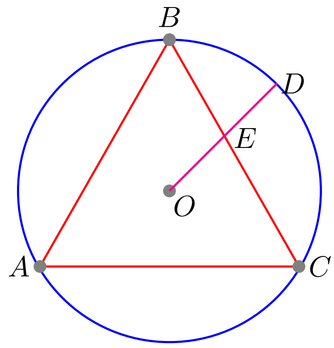
دایره بنفش = دامنه‌تابع

دایره آبی = بردتابع

دایره آبی = نگاره‌تابع

سوال ۲۹. با تغییر C روی دایره بنفش رنگ، آیا نقطه متناظر به C یعنی نقطه D از تمامی نقاط دایره آبی می گذرد؟

مثال ۳۰. سوالی مشابه سوال های قبل. آیا یک رابطه از نقاط روی اضلاع مثلث در نقاط روی محیط دایره وجود دارد؟



نیم خط OE، دایره آبی را در نقطه D قطع می کند و می توان گفت رابطه $E \longleftrightarrow D$.

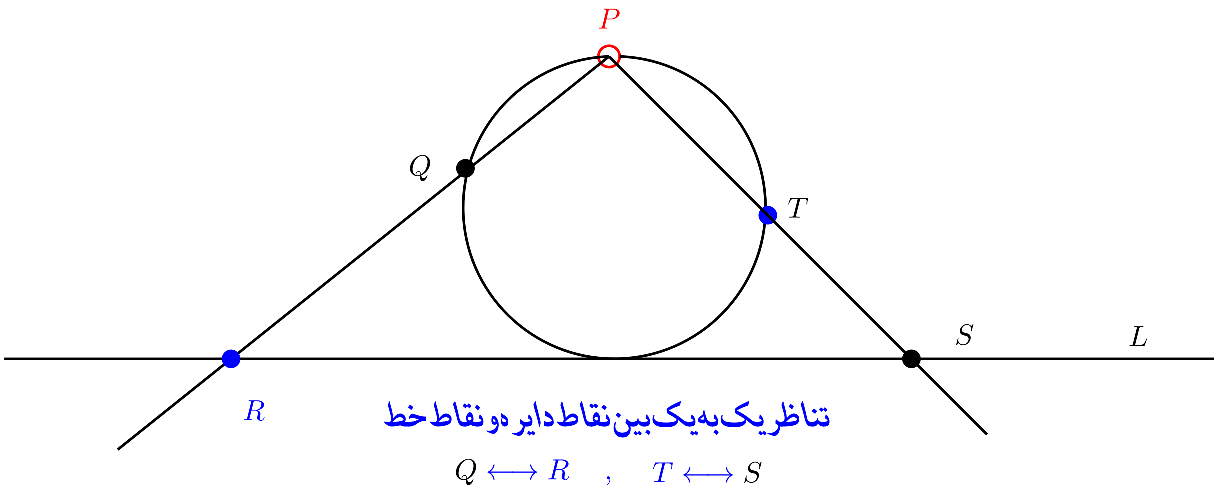
با پویش E روی مثلث آیا نقطه مرتبط با آن، یعنی D تمام دایره را می پیماید؟

مثلث = دامنه‌تابع

دایره آبی = بردتابع

دایره آبی = نگاره‌تابع

مثال ۳۱. در مثال زیر ملاحظه می شود یک تابع از دایره که یک نقطه آن حذف شده و خط $\mathbb{R}$ وجود دارد.



$$S^1 - \{P\} = \text{دامنه‌تابع}$$

$$\mathbb{R} = \text{بردتابع}$$

$$\mathbb{R} = \text{نگاره‌تابع}$$

مثال ۳۲. سوالی که پیش می آید این است که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، مجموعه توانی آن $P(A)$ چند عضو دارد؟

در پایین یک رابطه بین مجموعه زیر مجموعه های A و مجموعه دنباله های صفر و یک برقرار می کنیم به طوری که این رابطه به هر زیر مجموعه A یک و فقط یک دنباله n تایی از صفر و یک ها نظیر می کند و به هر دنباله به طول n از صفر و یک ها یک و فقط یک زیر مجموعه از A نظیر می کند و به این ترتیب تعداد عناصر $P(A)$ پیدا می کنیم.

به عبارت دیگر از طریق یک رابطه بین محموعه $\{d_۱d_۲\ldots d_n \mid d_i = ۰$ یا $۱\}$ و $P(A)$ تعداد عناصر $P(A)$ را می شماریم.

قضیه ۳۳. اگر A از n عنصر نشکیل شده باشد، آنگاه مجموعه توانی $P(A)$ دقیقاً از ۲^n عنصر تشکیل شده است.

اثبات. به استقرا درستی حکم بالا را نشان می دهیم.

بدیهی است که اگر $A = \phi$ آنگاه تعداد عناصر برابر $۱ = ۲^۰$ است.

پس فرض می کنیم A تهی نباشد. اعضای آن را می توانیم به صورت $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ بنویسیم. یک عنصر A مانند a_k را درنظر می گیریم. هر زیر مجموعه A یا این را دارد یا به آن تعلق ندارد. بنابراین، مساله یافتن تعداد زیر مجموعه های A برمی گردد به این که n مربع خالی که از ۱ تا n شماره گذاری شده داریم. بسته به اینکه آیا عضو a_k در زیر مجموعه B هست یانه؟ در مربع k ام عدد ۱ را قرار می دهیم هرگاه $a_k \in B$ و صفر قرار می دهیم هرگاه $a_k \notin B$. به عبارت دیگر

$$\text{مقدار خانه } k \text{ ام} = \begin{cases} ۱ & a_k \in B \text{ اگر} \\ ۰ & a_k \notin B \text{ اگر} \end{cases}$$

۱	۲	۳	۴	۵	۶		$n-۱$	$n-۴$	$n-۳$	$n-۲$	$n-۱$	n
۰ یا ۱	۰ یا ۱	۰ یا ۱	۰ یا ۱	۰ یا ۱	۰ یا ۱	$\cdots$	۰ یا ۱	۰ یا ۱	۰ یا ۱	۰ یا ۱	۰ یا ۱	۰ یا ۱

توزیع عناصر B در جدول بالا

به این ترتیب چون تعداد دنباله های اعدادی متشکل از صفر و یک ها برابر ۲^n است، پس تعداد زیر مجموعه های A حداقل برابر ۲^n است. از طرف دیگر هر دنباله از صفر و یک ها به طول n، یک و فقط یک زیر مجموعه از A را تعیین می کند بنابراین تعداد این چنین دنباله هایی ، که برابر ۲^n است،حداقل برابر تعداد زیر مجموعه های A است. به این ترتیب $P(A)$ دارای ۲^n عضو است. $\square$

در این جا یک رابطه یک به یک بین مجموعه زیر مجموعه های A، یعنی $P(A)$ و مجموعه دنباله های به طور n از صفر و یک ها توانستیم تعداد عناصر محموعه $P(A)$ را محاسبه نماییم.

$$\begin{aligned} \text{دامنه‌تابع} &= P(A) \\ \text{بردتابع} &= \{d_۱ d_۲ \ldots d_n \mid d_i = ۰ \text{ یا } ۱, i = ۱, \ldots n\} \\ \text{نگاره‌تابع} &= \{d_۱ d_۲ \ldots d_n \mid d_i = ۰ \text{ یا } ۱, i = ۱, \ldots n\} \end{aligned}$$

مثال ۳۴. از مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ در $\mathbb{N}$ می توان تابع زیر را تعریف کرد

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto ۲^m ۳^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{دامنه‌تابع} &= \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \text{بردتابع} &= \mathbb{N} \\ \text{نگاره‌تابع} &= \{۲^m ۳^n \mid m, n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

مثال ۳۵.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ m &\mapsto \begin{cases} ۲m & m > ۰ \\ ۰ & m = ۰ \\ ۲ \mid m \mid -۱ & m < ۰ \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{دامنه‌تابع} = \mathbb{Z}$$
$$\text{بردتابع} = \mathbb{N}$$
$$\text{نگاره‌تابع} = \mathbb{N}$$

مثال ۳۶.

$$\begin{array}{ccc} (-۱,۱) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan\frac{\pi x}{۲} \end{array}$$

$$\text{دامنه‌تابع} = (-۱,۱)$$
$$\text{بردتابع} = \mathbb{R}$$
$$\text{نگاره‌تابع} = \mathbb{R}$$

۱.۴.۰ تعریف تابع براساس نظریه مجموعه ها

مفهوم تابع یکی از اساسی ترین مفاهیم هر شاخه ریاضی است. زیرا به کمک آن می توان خواص یک مجموعه را از وری مجموعه دیگر به دست آورد. در واقع تابع **یک قاعده** تناظر است که به هر عنصر x از یک مجموعه (که حوزه تابع نامیده می شود) یک و فقط یک عنصر y از یک مجموعه دیگری (که برد تابع نامیده می شود) نظیر می کند. این تعریف روشن نیست. زیرا منظور از یک «قاعده» دقیقاً معلوم نیست. برای اجتناب از هرگونه ابهامی، با استفاده از زبان مجموعه ها تعریفی دقیق تر برای تابع ارائه می گردد.

تعریف ۳۷. X و Y را دومجموعه می گیریم. یک تابع از X به Y یک سه گانه (f,X,Y) است که در « f رابطه ای از X به Y است که در شرط های زیر صدق می کند:

(الف) $Dom(f) = X$.

(ب) اگر $(x,y) \in f$ و $(x,z) \in f$ آنگاه $y = z$.

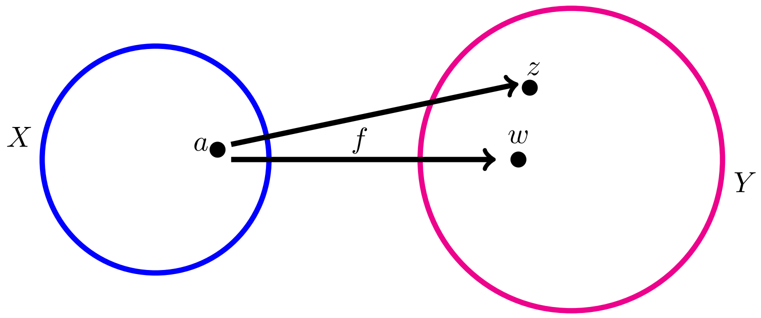
مثال ۳۸. فرض کنیم $X = \{a,b,c\}$ و $Y = \{z,w\}$.

۱. در این صورت، بنابرتعریف، رابطه $R=\{(a,w,),(b,w),(c,z)\}$ یک تابع از X در Y است.

۲. رابطه $R_1=\{(a,w),(a,z),(b,z),(c,w)\}$ یک تابع از X در Y نیست زیرا $(a,w),(a,z)$ هر دو در R_1 قرار می گیرند و شرط (ب) تعریف نقض می شود.

۳. رابطه $R_2=\{(a,w)\}$ یک تابع از X به Y نیست زیرا $Dom(R_2)=\{a\}\subsetneq\{a,b,c\}$

۴. رابطه $R_2=\{(a,w),(a,z)\}$ یک تابع از X به Y نیست زیرا عنصر a به دو عنصر متمایز z و w نظیر شده است.

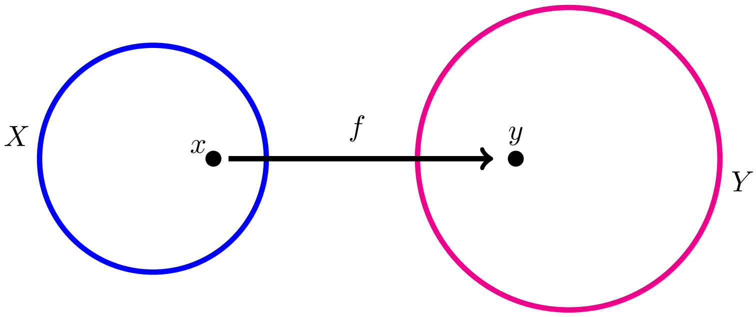


فرض کنیم (f,X,Y) تابعی از X به Y باشد. چون تابع مفهوم بسیار پر استفاده است، از این به بعد، به جای سه گانه (f,X,Y) از نماد $f:X\longrightarrow Y$ استفاده می کنیم و به جای $(x,y)\in f$ از نماد $y=f(x)$ استفاده می کنیم.

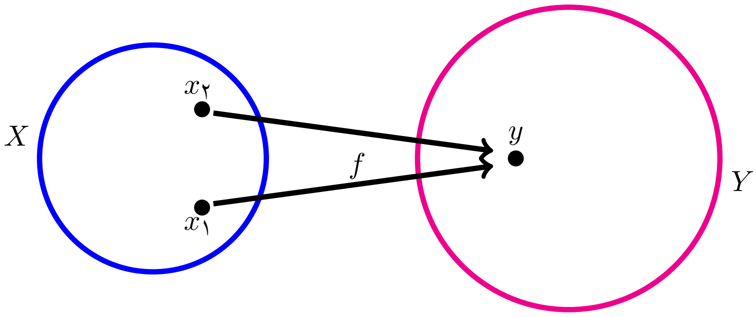
دلیل اینکه از «$y=f(x)$» به جای $(x,y)\in f$ استفاده می کنیم این است:

برای هر عنصر $x\in X$، **یک و فقط یک** $y\in Y$ **وجود دارد به طوری که** $(x,y)\in f$. برای این که ببینید این ادعا درست است، فرض کنید $x\in X$، آنگاه بنابر شرط (الف)، تعریف (۳۷)، یک عنصر $y\in Y$ وجود دارد به طوری که $(x,y)\in f$: اگر یک عنصر دیگر $z\in Y$ با شرط $(x,z)\in f$ وجود داشته باشد، آنگاه بنابرشرط (ب) $y=z$. به این ترتیب می بینید y که با $x\in X$ مشخص می شود، یکتاست.

تابع $f:X\longrightarrow Y$ مفروض است. اگر $y=f(x)$، گوییم y **نگاره** x تحت f است و x یک **پیش نگاره** y تحت f است. در شکل های زیر این مطلب مجسم شده است.



شکل ۱ y **نگاره** x **است**



شکل ۲ x_1, x_2 **پیشنگاره** y **هستند**

در این جا، مجموعه Y را در $f : X \longrightarrow Y$، برد تابع می گوییم.

باید توجه داشت که برد تابع ممکن است نگاره تابع نباشد. به عنوان مثال تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ که با $f(x) = \sin(x)$ تعریف می شود دارای بردی برابر $\mathbb{R}$ است درحالی که نگاره f برابر $[-1, 1]$ است.

یا به عنوان مثالی دیگر فرض کنید y_0 یک عنصر تثبیت شده Y باشدو تابع $f : X \longrightarrow Y$ که با $f(x) = y_0$ تعریف می شود داردی بردی برابر Y است اما نگاره آن برابر $\{y_0\}$ است.

توضیح: ۳۹. توجه داشته باشید در برخی کتاب ها، لغت «برد» [1] را به معنای «نگاره» [2] به کار می برند، اما در این درس، بنا بر یک دلیل تکنیکی، بین «نگاره» و « برد» تابع تمایز قایل می شویم. اما می توان گفت که در حالت کلی، نگاره زیر مجموعه برد تابع است.

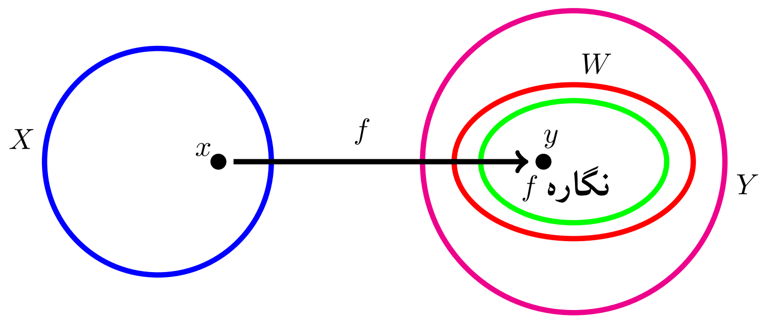
همچنین در برخی کتاب ها از اصطلاح «هم دامنه» [3] به جای «برد» استفاده می کنند. معمولاً افرادی که این

[1] *Range*
[2] *Image*
[3] *Codomain*

واژه را به کار می برند، دانش تخصصی شان «نظریه رسته ها» [۱] می باشد، که چون در این مرحله این نظریه و درس هایی که مربوط به این نظریه مطرح نمی شوند، لذا نیازی به استفاده از این اصطلاح نیست و بهتر است همان اصطلاح رایج در اکثر بخش های ریاضی یا علوم کامپیوتر، یعنی «برد» استفاده شود.

مثال ۴۰. تابع قسمت صحیح، یعنی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، که به صورت $f(x) = [x]$ (مقدار صحیح x) تعریف می شود، به ازای تمام $x \in \mathbb{R}$ تعریف می شود. در این جا برد تابع مجموعه $\mathbb{R}$ است در صورتی که نگاره تابع $\mathbb{Z}$ است.

می توان برد یک تابع را بدون تغییر دادن تابع، عوض کرد. به عنوان مثال تابع مقدار صحیح که یک تابع از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{Z}$ است را می توان همان تابع مقدار صحیح منتهی به جای $\mathbb{Z}$ می توان $\mathbb{Q}$، یعنی اعداد گویا را به جای $\mathbb{Z}$ قرار داد. زیرا در تعریف (۳۷) صدق می کند.



شکل ۳ y **نگاره** x **است**

قضیه ۴۱. تابع $f : X \longrightarrow Y$ و W یک مجموعه شامل نگاره f مفروض اند. آنگاه $f : X \longrightarrow W$ نیز یک تابع است.

[۱] *Category Theory*

اثبات. نخست نشان می دهیم که f یک رابطه از X به W است:

$(x,y) \in f \Longrightarrow x \in X \wedge y \in (Im\ f)$	**تعریف** Im
$\Longrightarrow x \in X \wedge y \in W$	$Im(f) \subseteq W$
$\Longrightarrow (x,y) \in X \times W$	**تعریف ضرب دکارتی**

به این ترتیب ثابت شد که $f \subseteq X \times W$؛ به عبارت دیگر، f یک رابطه از X به W است. حال چون $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع است، و $Dom(f) = X$، و شرط (ب) تعریف (۳۷) نیز برقرار است، بنابراین $f : X \longrightarrow W$ یک تابع است.

$\square$

تعریف زیر یکی از تعاریف مهم می باشد که همیشه برای اثبات تساوی دو تابع می توان از آن استفاده کرد.

قضیه ۴۲. توابع $f : X \longrightarrow Y$ و $g : X \longrightarrow Y$ مفروض اند. آنگاه $f = g$ اگر و تنها اگر $f(x) = g(x)$ به ازای هر $x \in X$.

اثبات. (۱) فرض کنیم که $f = g$ و x یک عنصر دلخواه X باشد. آنگاه

$y = f(x) \iff (x,y) \in f$	**نماد**
$\iff (x,y) \in g$	$f = g$
$\iff g(x) = y$	**نماد**

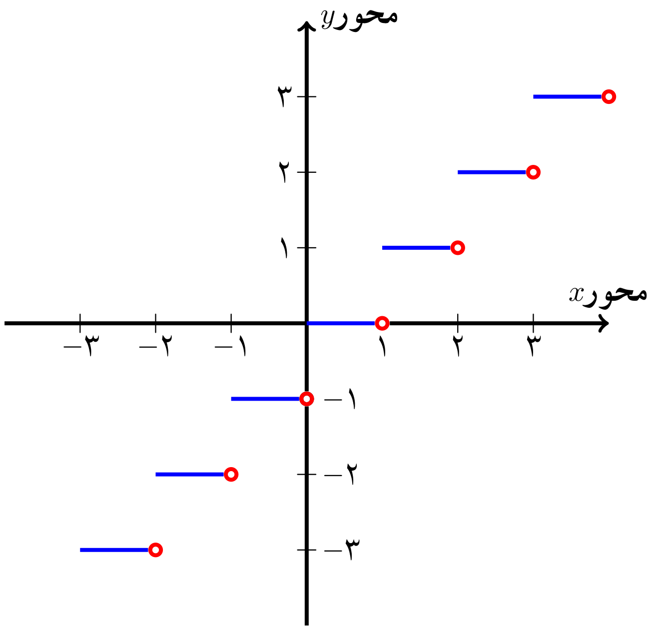
بنابراین $f(x) = g(x)$.

(۲) فرض کنیم که $f(x) = g(x)$ برای هر $x \in X$. آنگاه

$(x,y) \in f \iff y = f(x)$	**نماد**
$\iff y = g(x)$	$f(x) = g(x)$
$\iff (x,y) \in g$	**نماد**

بنابراین $f = g$. □

اگر حوزه و برد یک تابع زیر مجموعه هایی از مجموعه اعداد حقیقی باشند، آنگاه می توان نمودار تابع را در یک صفحه دکارتی رسم کرد.



نمودار تابع جزء صحیح $[x]$

یکی از توابعی که کاربردهای زیادی در ریاضیات دارد تابع مشخصه [1] یک زیر مجموعه A از مجموعه X نام دارد. درواقع اگر بخواهیم عضو بودن در مجموعه A را به صورت تابعی بیان کنیم از این تابع استفاده می کنیم.

مثال ۴۳. فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی X است. آنگاه رابطه

$$\{(x,y) \in X \times \{۰,۱\} | y = ۱, \quad x \in A \ \textbf{اگر}, \quad y = ۰, \quad x \notin A \ \textbf{اگر}\}$$

تابعی از X به $\{۰,۱\}$ است.

این تابع را تابع مشخصه A می نامند و با χ_A نمایش می دهند.

حرف یونانی χ را «**خی**» بخوانید.

[1] Characteristic function

به عبارت دیگر

$$\chi_A : X \longrightarrow \{۰, ۱\}$$

به صورت زیر تعریف می شود.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \ \textbf{اگر} \\ ۰ & x \in X - A \ \textbf{اگر} \end{cases}$$

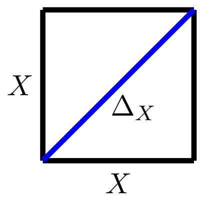
اگر چه یک تابع به صورت (f, X, Y) و یا $f : X \longrightarrow Y$ نوشته می شود، اما اغلب وقتی از متن، به طور ضمنی حوزه و برد تابع مشخص می شوند، نوشتن آنها ضرورت ندارد.

به این جهت وقتی حوزه و برد تابع معلوم هستند، تابع را با f نمایش خواهیم داد، بدون این که حوزه و برد f را ذکر کنیم.

مثال ۴۴. مجموعه X مفروض است. رابطه قطری Δ_X روی X که در صفحه های قبل تعریف شده است، یک تابع از X به X است. وقتی می خواهیم تاکید کنیم که رابطه Δ_X یک تابع ااست، نماد $I_X : X \longrightarrow X$) یا id_X، دوحرف اول ***identity function*** را به کار می بریم.

با این نماد، برای هر $x \in X$، $id_X(x) = I(x) = ۱_X(x) = x$.

تابع I_X را تابع همانی روی X می نامند.



یک تابع دیگر که به طور فراوان به کار می رود، تابع ثابت است.

مثال ۴۵. فرض کنید X و Y دو مجموعه ناتهی و b یک عنصر ثابت Y است. با رابطه

$$C_b = \{(x, b) | x \in X\}$$

تابع $C_b : X \longrightarrow Y$ تعریف می شود.

چون نگاره تابع C_b مجموعه تک عضوی $\{b\}$ است، آن را تابع ثابت می نامند و با $C_b(x) = b$، که برای هر $x \in X$، مشخص می شود.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، اغلب به توابعی برمی خوریم که با دو قاعده تناظر (با بیش از دو قاعده) تعریف شده اند. مثلاً تابع h که به صورت زیر تعریف شده است

$$h(x) = \begin{cases} ۱ - ۲x & x \leq ۰ \text{ اگر} \\ x^{۲} + ۱ & x \geq ۰ \text{ اگر} \end{cases}$$

با دو قاعده تعریف شده است. این تابع ممکن است به صورت اجتماع دو تابع زیر درنظر گرفته شود.

(۱) $f : (-\infty, ۰] \longrightarrow \mathbb{R}$، که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = ۱ - ۲x, \quad \forall x \in (-\infty, ۰]$$

(۲) $g : [۰, +\infty)$ که به صورت زیر تعریف شده است.

$$g(x) = x^{۲} + ۱ \quad \forall x \in [۰, +\infty)$$

باید توجه داشته باشید که در این جا $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \{۰\}$، و $f(۰) = g(۰)$. مثال اخیر برای هر دو تابعی که در شرایط بالا صدق کند، معتبر است. این را می توان در قالب قضیه زیر بیان کرد.

قضیه ۴۶. دو تابع $f : A \longrightarrow C$ و $g : B \longrightarrow D$ به قسمی که $f(x) = g(x), \quad \forall x \in A \cap B$ مفروض اند. آنگاه h، اجتماع f, g:

$$h = f \cup g : A \cup B \longrightarrow C \cup D$$

که در آن

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \text{ اگر} \\ g(x) & x \in B \text{ اگر} \end{cases}$$

یک تابع است.

اثبات. چون f و g رابطه هستند، $f \subseteq A \times C$ و $g \subseteq B \times D$ و داریم

$$\begin{aligned} h = f \cup g &\subseteq (A \times C) \cup (B \times C) \\ &\subseteq (A \cup B) \times (C \cup D) \end{aligned}$$

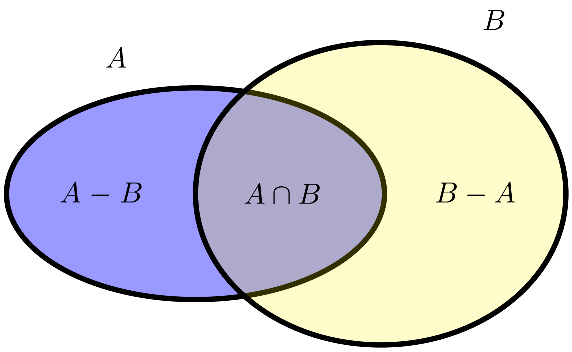
زیرا هر دو مجموعه $A \times C$ و $B \times D$، زیر مجموعه های $(A \cup B) \times (C \cup D)$ هستند. بنابراین، h یک رابطه از $A \cup B$ به $C \cup D$ است.

روشن است که

$$\mathrm{Dom}(h) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = A \cup B.$$

این نشان می دهد که رابطه h در تعریف (۳۷) (الف) صدق می کند.

(۱) $x \in A - B$ و (۲) $x \in B - A$ و (۳) $x \in A \cap B$.



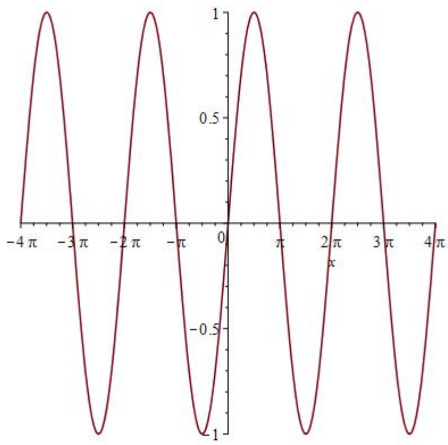
از این که $f : A \longrightarrow C$ و $g : B \longrightarrow D$ در تعریف (۳۷) (ب) صدق می کنند و $f(x) = g(x),\ \forall x \in A \cap B$ نتیجه می شود که $h(x)$ در هر سه حالت تعریف شد یکتاست. بنابراین رابطه h در تعریف (۳۷) (ب) هم صدق می کند. از این رو $h : A \cup B \longrightarrow C \cup D$ واقعاً یک تابع است. □

تمرین های صفحه ۸۳، شماره های ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۴ را حل نمایید.

۵.۰ نگاره و نگاره وارون یک مجموعه

وقتی یک معادله را حل می کنیم گاه می توان به کمک آن معادله یک تابع تعریف کرد و مجموعه جوابهای معادله را با پیش نگاره این تابع در یک نقطه خاص یا روی یک مجموعه یکی گرفت. به عنوان مثال، مجموعه جواب معادله $\sin x = ۰$ را می توان به عنوان پیش نگاره مجموعه $\{۰\}$ تحت تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ که با $f(x) = \sin x$ تعریف می شود، در نظر گرفت.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x), f^{-۱}(۰) = \{x \in \mathbb{R} | \sin x = ۰\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$



شکل ۱: نمودار تابع سینوس

طبیعی است که اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و x, y به ترتیب عنصرهایی از Xو Y باشند به قسمی که $y = f(X)$، آنگاه y نگاره x است، و x یک پیش نگاره y است. این مفهوم طبعاً از عنصرها به زیر مجموعه ها، به صورت زیر تعمیم می یابد. در این بخش می خواهیم ضمن تعریف نگاره یک مجموعه تحت یک تابع و تعریف پیش نگاره یک مجموعه تحت یک تابع، نگاره اجتماع یک خانواده از زیر مجموعه ها را برحسب اجتماع نگاره ها بنویسیم. همچنین پیش نگاره یک خانواده تحت یک تا بع را به صورت اجتماع پیش نگاره ها بنویسیم.

تعریف ۴۷. گیریم $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع، و A ، B به ترتیب زیر مجموعه هایی از X و Y باشند.

(الف) نگاره A تحت f، که با $f(A)$ نشان داده می شود، مجموعه تمام نگاره های $f(x)$ است به قسمی که $x \in A$.

(ب) نگاره وارون B تحت f، که با $f^{-1}(B)$ نشان داده می شود، مجموعه تمام پیش نگاره های y های متعلق به B است.

با استفاده از نماد مجموعه ساز، $f(A)$ و $f^{-1}(B)$ با عبارتهای زیر بیان می شود:

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in A | f(x) \in B\}$$

مفاهیم نگاره یک مجموعه $A \subseteq X$ تحت یک تابع f و پیش نگاره یک مجموعه $B \subseteq Y$ تحت f یکی از ابزارهای اساسی در مطالعه یک تابع است. در واقع این دو مفهوم باعث محدودتر کردن دامنه عمل یک تابع و در نتیجه شناخت بهتر آن تابع می شود.

برای تشریح بیشتر این مفهوم به مثال های زیر توجه نمایید.

مثال ۴۸. ۱. فرض کنیم A و B دو مجموعه ناتهی و $b \in B$ یک عضو ثابت B باشد. آنگاه تابع $C_b : A \longrightarrow B$ به طوری که $C_b(a) = b, \quad \forall a \in A$، آنگاه

$$C_b(A) = \{b\}$$

$$C_b^{-1}(b) = \{a \in A | C_b(a) = b\}$$

$$C_b^{-1}(c) = \varnothing, \quad \forall c \in B - \{b\}$$

۲. تابع علامت یا $Sign$ یا sgn از $\mathbb{R}$ به $\{-1, 0, 1\}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \quad \textbf{اگر} \\ 0 & x = 0 \quad \textbf{اگر} \\ 1 & x > 0 \quad \textbf{اگر} \end{cases}$$

روشن است که

$$A = (0, +\infty), \quad \Longrightarrow \mathrm{sgn}(A) = \{1\}$$

$$A_1 = \{0\}, \quad \Longrightarrow \mathrm{sgn}(A_1) = \{0\}$$

$$A_2 = (-\infty, 0), \quad \Longrightarrow \mathrm{sgn}(A_2) = \{-1\}.$$

$$A_3 = [0, +\infty), \quad \Longrightarrow \mathrm{sgn}(A_3) = \{0, 1\},$$

$$A_4 = \{-1\} \cup [0, +\infty), \quad \Longrightarrow \mathrm{sgn}(A_4) = \{-1, 0, 1\}$$

$$A_5 = [-1, 1], \quad \Longrightarrow \mathrm{sgn}(A_5) = \{-1, 0, 1\}.$$

$$\mathrm{sgn}^{-1}(\{1\}) = (0, +\infty)$$

$$\mathrm{sgn}^{-1}(\{1, 0\}) = [0, +\infty)$$

$$\mathrm{sgn}^{-1}(\{1, 0, 1\}) = \mathbb{R}.$$

لازم به توضیح است که در این جا $\mathrm{Dom(Sgn)} = \mathbb{R}$ است. ولی اگر Dom را به زیر مجموعه هایی از $\mathbb{R}$ محدود کنیم باز هم همین تابع را خواهیم داشت. مثلاً $\mathrm{sgn} : \mathbb{Z} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ به صورت

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \text{ اگر} \\ 0 & x = 0 \text{ اگر} \\ 1 & x > 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف می شود. و

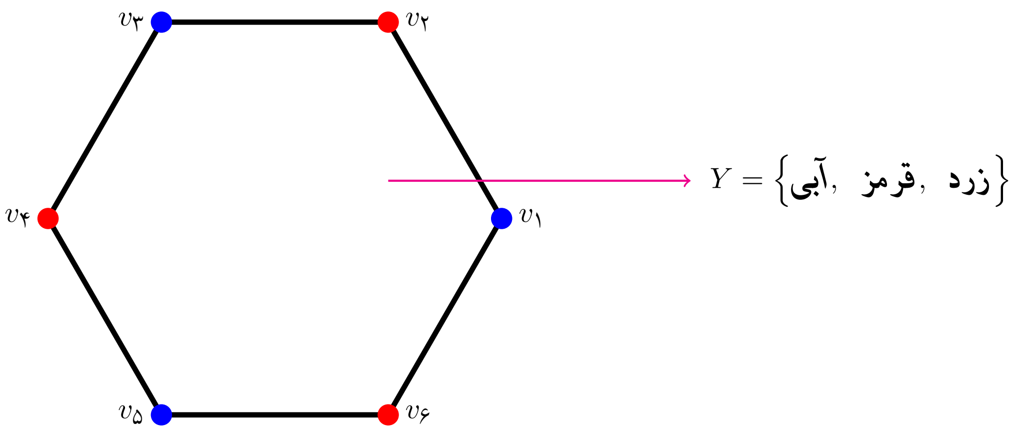
$$\mathrm{sgn}(\{2, 4, 6, 8\}) = \mathrm{sgn}(\{1, 2, 3, \dots\}) = \{1\}\mathrm{sgn}^{-1}(\{1\}) \qquad = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathrm{sgn}^{-1}(\{1, 0\}) = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathrm{sgn}^{-1}(\{1, 0, 1\}) = \mathbb{Z}.$$

۳. حال دوباره از تابع آشنای زیر برای تشریح نگاره و پیش نگاره یک تابع استفاده می کنیم.

$$f : V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \longrightarrow \Big\{\text{آبی}, \ \text{قرمز}, \ \text{زرد}\Big\}$$



$$f(V) = \{f(x) | x \in V\} = \{\text{آبی}, \text{قرمز}\}$$

$$f^{-1}(\{\text{زرد}\}) = \{x \in V | f(x) = \text{زرد}\} = \varnothing$$

$$f^{-1}(\{\text{قرمز}\}) = \{x \in V | f(x) = \text{قرمز}\} = \{v_2, v_4, v_6\}$$

$$f^{-1}(\{\text{آبی}\}) = \{x \in V | f(x) = \text{آبی}\} = \{v_1, v_3, v_5\}$$

$$f^{-1}(\{\text{قرمز}, \text{زرد}\}) = \{x \in V | f(x) = \text{قرمز} \vee f(x) = \text{زرد}\} = \{v_2, v_4, v_6\}$$

$$f^{-1}(\{\text{آبی}, \text{زرد}\}) = \{x \in V | f(x) = \text{آبی} \vee f(x) = \text{زرد}\} = \{v_1, v_3, v_5\}$$

توجه کنید که در دوسطر آخر چون هیچ راسی رنگ زرد ندارد پس $\{x | f(x) = \text{زرد}\} = \varnothing$.

قضیه ۴۹. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع است. آنگاه

(الف) $f(\varnothing) = \varnothing$.

(ب) $\forall x \in X, \quad f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

(پ) اگر $A \subseteq B \subseteq X$، آنگاه $f(A) \subset f(B)$.

(ت) اگر $C \subseteq D \subseteq Y$، آنگاه $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

اثبات. چون قضیه (۴۹) از تعریف (۴۷) نتیجه می شود، اثبات آن به آسانی انجام می گیرد و به عنوان تمرین واگذار می گردد. □

قضیه ۵۰. تابع $f: X \longrightarrow Y$ و $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده از زیر مجموعه های X مفروض اند. آنگاه

(الف) $f(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

(ب) $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

اثبات. (الف) تعریف (۴۷) و تعریف اجتماع خانواده را به طور مکرر به کار می بریم، نتیجه میشود

$$y \in f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \iff y = f(x) \quad \text{با ازای یک } x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$$

$$\iff y = f(x) \quad \text{به ازای یک } \gamma \in \Gamma\text{، } x \in A_\gamma$$

$$\iff y \in f(A_\gamma) \quad \text{به ازای یک } \gamma \in \Gamma$$

$$\iff y \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

بنابراین $f(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

(ب) چون بنابر قضیه (۴۹) (ج)، برای هر $\gamma \in \Gamma$ داریم $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subseteq A_\gamma$، پس برای هر $\gamma \in \Gamma$، $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) =\subseteq f(A_\gamma)$. از تعریف اشتراک خانواده مجموعه ها نتیجه می شود که

$$f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

□

توجه کنید در بند (ب) قضیه (۵۰) نمی توان به جای نماد شمول $\subseteq$، نماد تساوی گذاشت به علاه قسمت اول قضیه بیان می کند که می توانیم نگاره اجتماع عناصر یک خانواده را به صورتی ساده تر، به کمک اجتماع نگاره های تک تک اعضای خانواده محاسبه نماییم.

مثال ۵۱. رابطه *(ب)* می تواند اکید باشد. فرض کنید $A = [۰,۱] \cup [۲,۳] \subset \mathbb{R}$ و تابع ثابت C_b از A در $\mathbb{R}$ که $b \in \mathbb{R}$، را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$C_b(x) = b, \quad \forall x \in A$$

$$C_b([۰,۱]) = \{b\},$$

$$C_b([۲,۳]) = \{b\}$$

در حالی که $[۰,۱] \cap [۲,۳] = \varnothing$.

بنابراین $C_b([۰,۱]) = \{b\}$، $C_b([۲,۳]) = \{b\}$ و درنتیجه $C_b([۰۱,]) \cap C_b([۲,۳]) = \{b\}$

در حالیکه $C_b([۰,۱] \cap [۲,۳]) = C_b(\varnothing) = \varnothing$.

قضیه ۵۲. تابع $f : X \longrightarrow Y$ و $\{B_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده ای از زیر مجموعه های Y مفروض اند. آنگاه

(الف) $f^{-۱}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-۱}(B_\gamma)$

(ب) $f^{-۱}(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-۱}(B_\gamma)$

اثبات. (الف) تعریف (۴۹) و تعریف اجتماع خانواده مجموعه ها را به کار می بریم.

$$\begin{aligned} x \in f^{-۱}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) &\iff f(x) \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma \\ &\iff f(x) \in B_\gamma && \text{به ازای یک } \gamma \\ &\iff x \in f^{-۱}(B_\gamma) && \text{بنابر تعریف پیش نگاره} \\ &\iff x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-۱}(B_\gamma) && \text{بنابرتعریف اجتماع.} \end{aligned}$$

بنابراین ثابت شد که $f^{-۱}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-۱}(B_\gamma)$.

با گذاشتن $\bigcap$ به جای $\bigcup$ و عبارت « به ازای هر» به جای «به ازای یک یا چند» در برهاین قسمت (الف)، یک برهان برای قسمت (ب) به دست می آید. □

قضیه ۵۳. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و B و C زیرمجموعه هایی از Y هستند. آنگاه

$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

اثبات. به هم ارزی های زیر توجه می کنیم

$x \in f^{-1}(B - C) \iff f(x) \in B - C$	**تعریف (۴۹)**
$\iff f(x) \in B \wedge f(x) \notin C$	**تعریف تفاضل دو مجموعه**
$\iff x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C)$	**تعریف (۴۷)**
$\iff x \in [f^{-1}(B) - f^{-1}(C)]$	**تعریف تفاضل دو مجموعه**

این ترتیب ثابت می شود که

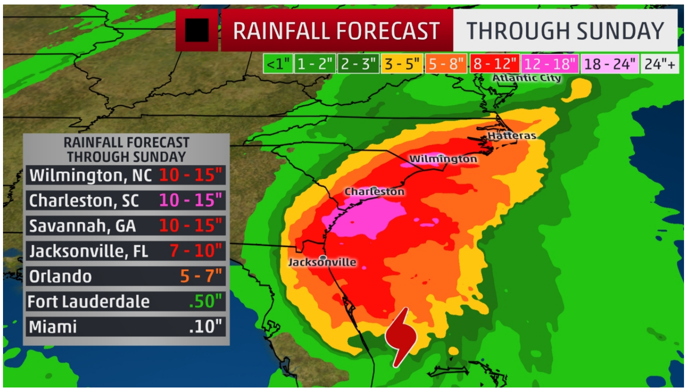
$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

□

تمرین ۵۴. تمرین های شماره ۴، ۵، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ صفحه های ۸۷ و ۸۸.

مجموعه وارون یک مجموعه تحت یک تابع کار بردهای زیادی می تواند داشته باشد. از جمله در هوا شناسی برای تعیین مناطق پرخطر برای طوفان یا بارندگی

شکل ۲: تصویر توده ابری متاثر از طوفان



شکل ۳: میزان بارش باران در نقاط مختلف ساحلی که توسط توده ابر پوشانده شده با تعیین نگاره های تابع

تابع یک به یک، پوششی، و دوسویی

بنابرتعریف تابع، روشن است که اگر $x_1 = x_2$ آنگاه $f(x_1) = f(x_2)$ است. اما عکس این تساوی ممکن است برقرار نباشد. یعنی از $f(x_1) = f(x_2)$ نمی توان نتیجه گرفت $x_1 = x_2$. اما برای برخی توابع این کار امکان پذیر است.

در مطالعه توابع، سه نوع تابع هستند که اهمیت زیادی دارند.

تعریف ۵۵. تابع $f: X \longrightarrow Y$ را **یک به یک**[1] یا **انژکتیو**[2] می گویند هر گاه $x_۱, x_۲ \in X$ و $f(x_۱) = f(x_۲)$ آنگاه $x_۱ = x_۲$. تابع انژکتیو را **انژکسیون**[3] نیز می نامند.

یادآوری ۵۶. بنابرتعریف بالا، f یک به یک است اگر و فقط اگر

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Longrightarrow x_۱ = x_۲$$

پس بنابر هم ارزی $p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$، تعریف فوق را می توان به صورت زیر نوشت.

$$x_۱ \neq x_۲ \Longrightarrow f(x_۱) \neq f(x_۲)$$

تمرین ۵۷. نقیض گزاره« $f: X \longrightarrow Y$ یک به یک است اگر وفقط اگر $f(x_۱) = f(x_۲) \Longrightarrow x_۱ = x_۲$ » را بنویسید.

مثال ۵۸. ۱. تابع همانی $id_X : X \longrightarrow X$ که به صورت $id_X(x) = x$ تعریف می شود یک تابع یک به یک است.

۲. فرض کنیم X, Y دو مجموعه ناتهی باشند. برای $b \in Y$، تابع ثابت $C_b : X \longrightarrow Y$، که به صورت $C_b(x) = b$ تعریف می شود، آشکار را درتعریف تابع یک به یک صدق نمی کند.

۳. تابع $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که به صورت $f(n) = ۲n + ۱$ تعریف می شود، یک تابع یک به یک است. همچنین تابع $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که به صورت $f(n) = ۲n$ تعریف می شود نیز یک تابع یک به یک است.

۴. عدد ۵ را درنظر بگیرید. می دانیم تقسیم هر عدد صحیح بر ۵ دارای باقی مانده ای یکتاست. یعنی $n = ۵q + r$ که $۰ \leq r < ۵$. تابع $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ که به هر $n \in \mathbb{Z}$، ماتده تقسیم بر ۵، یعنی r را نظیر می کند یک تابع یک به یک نیست. زیر مثلاً مانده تقسیم ۱۷ بر ۵ که ۲ است با مانده تقسیم ۳۲ بر ۵ که همان ۲ برابر است درحالی که $۳۲ \neq ۱۷$.

[1] *One to one*

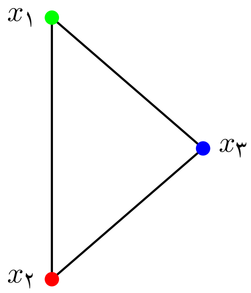
[2] *Injective*

[3] *Injection*

به طور کلی هر گاه m یک عدد صحیح غیر صفر باشد، تابعی که مانده تقسیم n بر m را به دست می دهد یک تابع یک به یک نیست. مثلا مانده تقسیم n بر m با مانده تقسیم $n+m$ بر m برابر است ولی $n \neq n+m$.

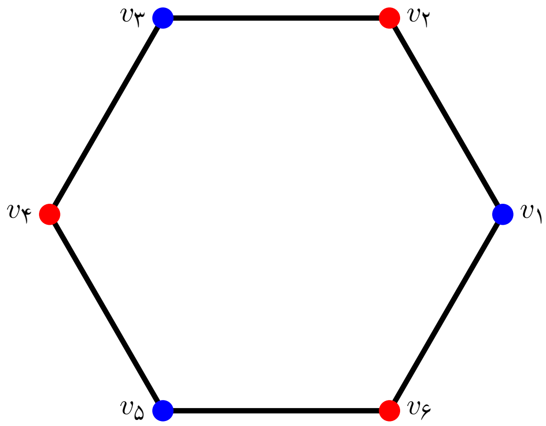
مثال ۵۹. تابع رنگ آمیزی گرافها را در نظر می گیریم

فرض کنید G گراف زیر باشد. آنگاه تابع $f : V = \{v_۱, v_۲, v_۳\} \longrightarrow \{$**قرمز**, **آبی** , **سبز**$\}$ تابعی یک به یک است



اما تابعی که راس های گراف زیر را رنگ می کند یک تابع یک به یک نیست. زیرا برخی راس ها بیش از یک بار توسط رنگ های آبی یا قرمز رنگ می شوند.

$V = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵, v_۶\} \longrightarrow \{$**قرمز**, **آبی**$\}$



تعریف ۶۰. تابع $f : X \longrightarrow Y$ **سورژکتیو** [۱] یا **پوشا** هر گاه برای هر $y \in Y$، یک $x \in X$ وجود داشته

[۱] *Surjective / Onto*

باشد به قسمی که $f(x)=y$. تابع سورژکتیو **سورژکسیون** هم نامیده می شود. به عبارت دیگر، $f:X\longrightarrow Y$ سورژکسیون است اگر وفقط اگر $f(X)=Y$.

یادآوری ۶۱. تابع $f:X\longrightarrow Y$ پوشاست اگر وفقط اگر $\forall y\in Y,\ \ \exists x\in X, f(x)=y$. یعنی بتوان معادله $f(x)=y$ را برحسب y حل کرد.

مثال ۶۲. ۱. تابع همانی $id_X:X\longrightarrow X$ که با $id_X(x)=x$ تعریف می شود تابعی پوشا است.

۲. تابع $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ که با $f(n=2n$ تعریف می شود یک تابع پوشا نیست زیرا هیچ عدد فردی مانند $2k+1$ نمی تواند نگاره یک عنصر $\mathbb{N}$ تحت نگاشت فوق باشد. در واقع اگر چنین باشد، آنگاه $f(x)=2x=2k+1$. در نتیجه $x=\frac{2k+1}{2}=k+\frac{1}{2}$ که می دانیم $k+\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$.

به عبارت دیگر معادله $f(x)=2x=b$، که b یک عدد فرد است، در $\mathbb{N}$ جوابی ندارد.

۳. تابع علامت $\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\longrightarrow\{-1,0,1\}$ یک تابع پوشاست. زیرا هر عضو $\{-1,0,1\}$ نگاره یک عدد منفی یا صفر یا مثبت است.

۴. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ که با $f(x)=x^2$ تعریف می شود یک تابع پوشا نیست زیرا برای هر عدد منفی b از $\mathbb{R}$، هیچ عضو x در $\mathbb{R}$ نمی توان پیدا کرد به طوری که $f(x)=x^2=b<0$. در واقع ریشه دوم یک عدد منفی $x=\sqrt{b}$ در $\mathbb{R}$ تعریف نشده است.

به عبارت دیگر معادله $f(x)=x^2=b$ جواب ندارد زیر b منفی است.

۵. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow[-1,1]$ که با $f(x)=\sin x$ تعریف می شود یک تابع پوشاست ولی اگر به جای $[-1,1]$ مجموعه یY که $Y\supsetneq[-1,1]$ است را قرار دهیم، آنگاه f پوشا نیست.

تمرین ۶۳. نقیض گزاره « $f:X\longrightarrow Y$ پوشاست اگر و فقط اگر $(\forall y\in Y)(\ \exists x\in X)(f(x)=y)$ را بنویسید.

تابعی که هم یک به یک باشد و هم پوشا برای مقایسه مجموعه های مختلف به کار می رود . به یک معنا «یکی» بودن را می رساند.

تعریف ۶۴. تابع $f: X \longrightarrow Y$ را **دوسویی** [۱] می نامیم هرگاه هم یک به یک باشد و هم پوشا.
به تابع دوسویی «تناظر یک به یک» هم می گویند.

مثال ۶۵. ۱. تابع $f(x) = x^۳$ که از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ تعریف می شود تابعی دوسویی است.

۲. تابع $f: (۰, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ که با $f(x) = \ln x$ تعریف می شود تابعی دوسویی است.

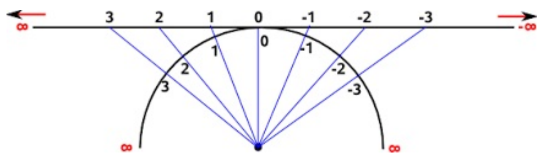
۳. تابع $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که با $f(n) = ۲n$ تابعی دوسویی نیست زیرا پوشا نیست.

۴. تابع $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ که به صورت زیر تعریف می شود

$$f(x) = \begin{cases} -k & x = ۲k \quad \text{اگر} \\ \left[\frac{۲k-۱}{۲}\right] & x = ۲k - ۱ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

تابعی یک به یک و پوشاست.

۵. می توان نشان داد یک تناظر یک به یک بین نقاط یک نیم دایره و خط $\mathbb{R}$ وجود دارد. فعلاً به صورت تصویری این تناظر را می توانید مجسم کنید. امتداد هر شعاع مرسوم از هر نقطه محیط نیم دایره خط $\mathbb{R}$ را در یک و فقط یک نقطه قطع می کند. برعکس نیم خط واصل بین هر نقطه از $\mathbb{R}$ و مرکز نیم دایره قطع می کند. به این ترتیب نقاط $\mathbb{R}$ با نقاط نیم دایره درتناظر یک به یک قرار می گیرند.



شکل ۴: تناظر یک به یک بین نقاط نیم دایره و خط $\mathbb{R}$

[۱] *Bijection*

در جلسه پیش ملاحظه کردیم که اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد و $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده از زیر مجموعه های X باشد، آنگاه لزوماً تساوی زیر برقرار نیست

$$f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

و بلکه ممکن رابطه شمول اکید برقرا باشد.

$$f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \subsetneq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

اما اگر تابع f یک به یک باشد با یقین می توان گفت که تساوی برقرار است.

قضیه ۶۶. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک است و $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده ای از زیر مجموعه های X هستند. آنگاه

$$f : \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

اثبات. بنابرتعریف نگاره یک تابع و همچنین تعریف اشتراک خانواده مجموعه ها می توان نوشت:

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma) &\iff y \in f(A_\gamma) \ \ \forall\gamma\in\Gamma \\ &\iff (\exists x_\gamma \in A_\gamma . y = f(x_\gamma) \ \textbf{به قسمی که} \ ) \ \ \forall\gamma\in\Gamma \end{aligned}$$

چون $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک است، همه این x_γ ها یکی هستند؛ این عنصر را با $x_\circ$ نشان می دهیم. پس داریم

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma) &\iff \exists x_\circ \in A_\gamma \qquad \forall\gamma\in\Gamma, y = f(x_\circ) \textbf{به قسمی که} \\ &\iff \exists x_\circ \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \qquad y = f(x_\circ) \textbf{به قسمی که} \\ &\iff y \in f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \end{aligned}$$

بنابراین $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

یاداوری می شود که اگر R یک رابطه از X به Y باشد، آنگاه رابطه وارون آن

$$R^{-1} = \{(y,x)|(x,y) \in R\}$$

□

یک رابطه از Y به X است. چون تابع $f : X \longrightarrow Y$ (نوع به خصوصی از) یک رابطه از X به Y است، f^{-1}، حداقل یک رابطه از Y به X است. طبیعی است سوال شود که چه وقت f^{-1} یک تابع است. جواب این سوال در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۶۷. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ دوسویی است، آنگاه $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ دوسویی است.

اثبات. نخست نشان می دهیم که رابطه f^{-1} از Y به X یک تابع است.

چون $f : X \longrightarrow Y$ پوشاست، پس $f(X) = Y$. بنابراین

$$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) = Y$$

درنتیجه شرط (الف) تعربف تابع برقرار است. برای این که نشان دهیم که f^{-1} در شرط (ب) تعریف یک تابع نیز صدق می کند، فرض کنیم که $(y,x_1) \in f^{-1}$ و $(y,x_2) \in f^{-1}$. آنگاه داریم $(x_1,y) \in f$ و $(x_2,y) \in f$. در نتیجه $f(x_1) = f(x_2)$. اما تابع $f : X \longrightarrow Y$ تابعی یک به یک است. پس از تساوی اخیر نتیجه می شود $x_1 = x_2$. بنابراین ثابت کرده ایم که $f^{-1} Y \longrightarrow X$ یک تابع است.

برای این که نشان دهیم $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ یک به یک است، فرض کنیم $y_1, y_2 \in Y$ و $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$. پس داریم $f(x) = y_1$ و $f(x) = y_2$ و از این رو $y_1 = y_2$. این ثابت می کند که f^{-1} تابعی یک به یک است.

بالاخره باید نشان دهیم که $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ تابعی پوشا است.

اما می دانیم $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f) = X$، که نشان می دهد f^{-1} پوشا است. با این ترتیب اثبات کامل می شود. □

اگر $f : X \longrightarrow Y$ دوسویی باشد، تابع $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ را **تابع وارون** می گویند.

بنابر (۶۷) اگر $f: X \longrightarrow Y$ دوسویی باشد (تناظر یک به یک)، می توانیم بگوییم f یک تناظر یک به یک بین مجموعه های X و Y است.

تمرین ۶۸. تمرین های صفحه ۹۱، شماره ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۱۰ را حل کنید. حل تمرین ۹ به عنوان مثال در درس نامه آمده است.

مساله ۱۰ باید برای شما خیلی آشنا باشد. می توانید آن را به یاد آورید؟

۶.۰ ترکیب توابع

ترکیب دوتابع، یک روش ساختن یک تابع جدید از دو تابع مفروض، که دارای شرایط خاصی هستند می باشند. یک کاربرد ترکیب توابع، نه تنها ساختن یک تابع جدید است، بلکه گاه از روی ترکیب توابع با یک دیگر می توان رابطه هایی ساده تر بین مجموعه ها به دست آورد. مثلا در ریاضی عمومی، به کمک ترکیب توابع می توان پیوستگی یک تابع را به صورتی ساده تر بررسی کرد. به عنوان مثال اگر بخواهیم پیوستگی تابع $h(x) = \sin x^۲$ را بررسی نماییم می توانیم آن را ترکیب دوتابع پیوسته $f(x) = x^۲$ و $g(x) = \sin x$ در نظر بگیریم. یا این که ضرب دو ماتریس ۲ × ۲ را ترکیب دو تابع درنظر بگیریم و خواص آنها را مورد مطالعه قرار دهیم.

برعکس، ممکن است یک تابع را به صورت ترکیب دو تابع ساده تر نوشت و خواص این تابع را از روی خواص تابع های سازنده تابع مرکب نتیجه گرفت. به عنوان مثال فرض کنید بخواهیم پیوستگی تابع $f(x) = \sin(x^۲ + e^x)$ را بررسی کنیم. از ظاهر این تابع برمی آید که این تابع، از ترکیب دو تابع $g(x) = x^۲ + e^x$ و $h(x) = \sin x$ که هردویشان پیوسته اند ساخته شده است. یعنی $f(x) = h \circ g(x)$ و چون هم h و هم g تابع هایی پیوسته ان، نتیجه می شود f نیز پیوسته است.

ایده اصلی ترکیب دوتابع، در صورتی که امکان پذیر باشد، این است که مقدار یک تابع، به عنوان ورودی یک تابع دیگر درنظر گرفته می شود.

مشابه قسمت های قبلی، که برای هر مفهوم جدید، آن را برمبنای اصول نظریه مجموعه ها معرفی می کردیم، در این جا نیز ترکیب دو تابع را با استفاده از تعریف مجموعه ای تابع ارانه می کنیم.

تعریف ۶۹. دو تابع $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ مفروض اند. ترکیب این دو تابع، تابع $g \circ f : X \longrightarrow Z$ است که در آن به ازای هر x در X، $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. به صورت دیگر،

$$g \circ f = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x,y) \in f \wedge (y,z) \in g\}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

مثال ۷۰. ۱. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ با $f(x) = [x]$ و $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ با $g(y) = e^y$ تعریف شده اند آنگاه $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g([x]) = e^{[x]}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

۲. فرض کنیم تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = \sin x$ و $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $g(x) = x^۲ + ۱$ تعریف شده است. آنگاه

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^۲ + ۱$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^۲ + ۱) = \sin(x^۲ + ۱).$$

همان طور که ملاحظه می شود $(\sin x)^۲ + ۱ \neq \sin(x^۲ + ۱)$. پس بنابر تعریف تساوی دو تابع، در حالت کلی $f \circ g \neq g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

اگرچه ترکیب دوتابع خاصیت جابه جایی ندارد، اما ترکیب دوتابع دارای خاصیت شرکت پذیری است.

قضیه ۷۱. ترکیب توابع شرکت پذیر است. یعنی اگر $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ و $h : Z \longrightarrow W$ آنگاه

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

اثبات. نخست توجه داریم که $(h \circ g) \circ f$ و $h \circ (g \circ f)$ هردو توابعی از X به W هستند. پس بنابر قضیه ۷ بخش ۴، کافی است نشان دهیم برای هر x در X، $[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$.

اما از تعریف (۶۹) نتیجه می شود که برای هر x در X

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

و

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

از این دو رابطه دیده می شود که $[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$، برای هر $x \in X$. پس بنابر تعریف تساوی دوتابع

$$[h \circ (g \circ f)] = [(h \circ g) \circ f]$$

به این ترتیب اثبات کامل می شود. □

قضیه ۷۲. تابع $f : X \longrightarrow Y$ مفروض است. آنگاه

(الف) اگر تابع $g : Y \longrightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که $g \circ f = Id_X$ (که در آن $Id_X : X \longrightarrow X$ تابع همانی است (یعنی تابعی که هر $x \in X$ را به x نظیر می کند)، آنگاه $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک است.

(ب) اگر تابع $h : Y \longrightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که $f \circ h = Id_Y$، آنگاه $f : X \longrightarrow Y$ پوششی است.

اثبات. (الف) فرض کنید یک تابع $g : Y \longrightarrow X$ وجود دارد به طوری که $g \circ f = Id_X$. آنگاه برای برای هر $x_۱$ و $x_۲$ در X به طوری که $f(x_۱) = f(x_۲)$، داریم

$$x_۱ = (g \circ f)(x_۱) = g(f(x_۱)) = g(f(x_۲)) = (g \circ f)(x_۲) = x_۲$$

این نشان می دهد که $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک است.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & Y \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd}
$$

(ب) فرض کنید یک تابع $h : Y \longrightarrow X$ وجود دارد به طوری که $f \circ h = Id_Y$. آنگاه برای هر $y \in Y$؛ یک عنصر

$$x = h(y) \in X$$

وجود دارد به قسمی که

$$f(x) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = Id_Y(y) = y$$

پس بنابرتعریف تابع پوششی، f پوشاست.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "h \circ f"] & Y \arrow[r, "h"] & X
\end{tikzcd}
$$

□