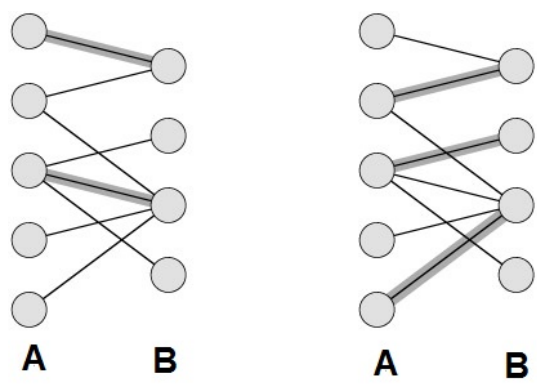
طراحی الگوریتم
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. پاییز ۱۴۰۳
کتاب مرجع: طراحی الگوریتم. جان کلاینبرگ و اوا تاردش

نتایج و کاربردهای جریان بیشینه

مسئله شار بیشینه و قضیه تساوی برش کمینه و شار بیشینه کاربردهای فراوانی در بهینه سازی ترکیبیاتی و تئوری گرافها دارد. در این قسمت به ذکر چند مورد می‌پردازیم.

۱ تطابق بیشینه در گرافهای دو بخشی

رئوس گراف دوبخشی G را میتوان به دو بخش A و B افراز کرد بطوریکه همه یالهای گراف یک سرشان در A و سر دیگر در B داشته باشند. فرض کنید گراف دوبخشی $G = (A \cup B, E)$ داده شده است. اینجا دو بخش A و B مشخص شده اند. میخواهیم، یک زیرمجموعه از یالها $M \subseteq E$ را انتخاب کنیم بطوریکه هیچ دو یالی در M راس مشترک نداشته باشند. به این زیر مجموعه از یالها یک تطابق matching گفته میشود.

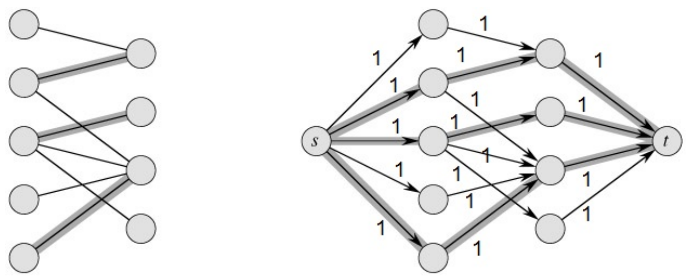


در شکل بالا سمت چپ یک گراف دوبخشی دیده می‌شود. یک تطابق، شامل دو یال را می‌بینید. در سمت راست برای همان گراف یک تطابق شامل سه یال نشان داده شده است.

در مسئله تطابق بیشینه، دنبال یک تطابق با بیشترین تعداد یال می‌گردیم. برای حل این مسئله در گرافهای دوبخشی می‌توانیم از مسئله جریان بیشینه استفاده کنیم. در واقع با داشتن گراف دوبخشی $G = (A \cup B, E)$ شبکه G' با رئوس مبدا s و t را می‌سازیم بطوریکه از حل مسئله جریان بیشینه در G' یک راه حل برای مسئله تطابق بیشینه برای گراف G بدست بیاید.

همانطور که در شکل بالا نشان داده شده است، ساخت شبکه G' کار آسانی است. اولا جهت همه یالها از A به سمت B خواهد بود. دو راس s و t اضافه شده اند. از راس مبدا s به همه رئوس A یک یال قرار می‌دهیم. همینطور از رئوس B به راس مقصد t یک یال قرار می‌دهیم. ظرفیت همه یالها 1 قرار می‌دهیم.

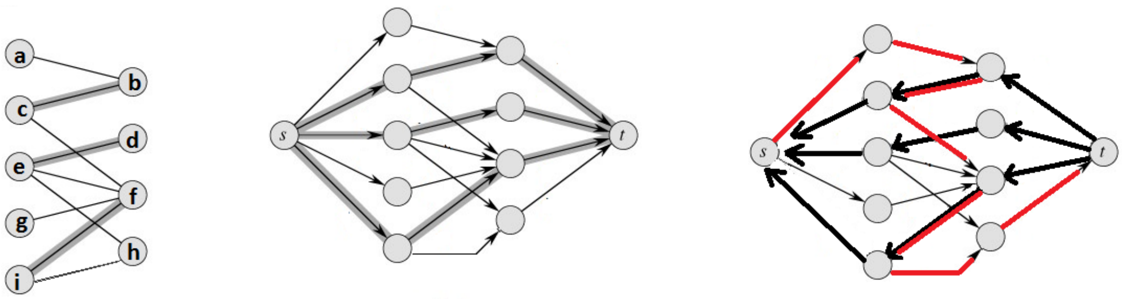
از آنجا که ظرفیتها عدد صحیح هستند، پیرو مشاهداتی که در مورد الگوریتم فورد فولکورسون داشتیم یک جریان بیشینه نیز برای شبکه G' وجود دارد که مقادیرش اعداد صحیح است. نتیجه اینکه جریان روی هر یال عدد صفر یا 1 خواهد بود. یالهای بین A و B با جریان 1 همان یالهای تطابق بیشینه هستند.



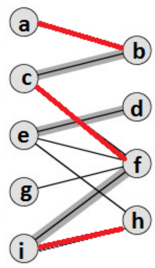
G G'

۱.۱ تطابق بیشینه در گرافهای غیر دوبخشی

حل مسئله تطابق بیشینه در گرافهای غیر دوبخشی به سادگی حالت دوبخشی نیست اما در هر صورت مسئله شار بیشینه یک ایده کلی بدست می‌دهد که می‌تواند راهگشا باشد. به شبکه G' که در قسمت قبلی ساختیم توجه کنید. الگوریتم فورد فولکرسون موقع حل مسئله شار بیشینه در G' هر بار یک واحد به مقدار شار بیشینه می‌افزاید. نتیجه اینکه هر بار که یک مسیر افزایشی پیدا می‌شود، اندازه تطابق به اندازه یک واحد افزایش می‌یابد. به شکل زیر توجه کنید. به گراف مثال قبلی یک یال اضافه کرده‌ایم تا الگوریتم فورد فولکورسون یک مرحله دیگر ادامه پیدا کند. به گراف باقیمانده معادل جریان قبلی توجه کنید.



A B G' گراف باقیمانده



A B

مشاهده می‌شود که مسیر افزایشی در گراف باقیمانده (که با رنگ قرمز مشخص شده) متناظر با یک مسیر در گراف دوبخشی است (پایین شکل). مسیری که از راس a شروع شده و در راس h خاتمه می‌یابد. این مسیر

با یالی که در تطابق (کنونی) نیست شروع می‌شود و باز هم به یالی ختم می‌شود که در تطابق نیست. علاوه بر این یالهای مسیر بصورت یک در میان در تطابق هستند. به این مسیر تناوبی [۱] گفته می‌شود. مشاهده می‌کنید که اگر در این مسیر یالهای عضو تطابق (یالهای خاکستری) را حذف و یالهای بیرون تطابق (یالهای قرمز) را داخل تطابق وارد کنیم، یک تطابق معتبر با یک یال بیشتر بدست می‌آید. این دقیقا همان کاری است که الگوریتم فورد فولکرسون بصورت تلویحی انجام می‌دهد. در واقع مثل این است که الگوریتم فورد فولکرسون هر بار یک مسیر تناوبی را پیدا می‌کند و بدین ترتیب یک واحد به مقدار شار (و در نتیجه به اندازه تطابق بین A و B) می‌افزاید.

از بحثهای بالا نتیجه می‌شود، اگر در گراف دوبخشی از یک تطابق دلخواه شروع کنیم و هر بار یک مسیر تناوبی را برای آن پیدا کنیم می‌توانیم اندازه تطابق را بیشتر و بیشتر کنیم. همچنین اگر موقعیتی پیش آمد که نتوانیم یک مسیر تناوبی پیدا کنیم، آنگاه نتیجه می‌گیریم که تطابق کنونی یک تطابق بیشینه است. این از بحثهایی که در مورد الگوریتم فورد فولکرسون کردیم نتیجه می‌شود. موقعیت مانند حالتی است که مسیر افزایشی در گراف باقیمانده بین s و t پیدا نمی‌شود.

یک پرسش اینجا مطرح می‌شود. آیا مطلبی که در بالا گفتیم در مورد گرافهای غیر دوبخشی هم صادق است. یعنی اگر در گراف $G=(V,E)$ تطابق $M \subseteq E$ را داشته باشیم که هیچ مسیر تناوبی برای آن موجود نباشد آیا می‌توان ادعا کرد که M یک تطابق بیشینه است؟ خوشبختانه بله [۲]. در واقع قضیه زیر را داریم که به اسم ریاضیدانی به نام کلاد بِرگ [۳] معروف شده است. از این قضیه یک روش کلی برای پیدا کردن تطابق بیشینه برای گرافها حاصل می‌شود. مانند حالت دوبخشی، با یک تطابق بیشینه شروع کن و سعی کن با پیدا کردن مسیرهای تناوبی اندازه تطابق را بیشتر کنی. جایی که نتوانیم یک مسیر تناوبی پیدا کنیم، آنجا تطابق ما بهینه است. این اساس الگوریتم جک ادموند [۴] برای مسئله تطابق بیشینه است.

قضیه ۱.۱. *اگر $G=(V,E)$ یک گراف و $M \subseteq E$ یک تطابق در G باشد، آنگاه M یک تطابق بیشینه است اگر و فقط اگر هیچ مسیر تناوبی نسبت به M وجود نداشته باشد.*

اثبات: کافی است اثبات کنیم M یک تطابق بیشینه نیست اگر و فقط اگر یک مسیر تناوبی نسبت به آن وجود داشته باشد. یک طرف گزاره بدیهی است. اگر مسیر تناوبی P نسبت به M موجود باشد، آنگاه قطعا M یک تطابق بیشینه نخواهد بود چون با بحثهایی که در بالا انجام دادیم، می‌توانیم با حذف $P \cap M$ از تطابق و اضافه کردن یالهای $P \setminus M$ به آن اندازه تطابق را یک واحد افزایش دهیم.

حال بگذارید جهت دیگر گزاره را اثبات کنیم. فرض کنید M یک تطابق بیشینه نباشد. ادعا می‌کنیم حتما یک مسیر تناوبی نسبت به M وجود دارد. فرض کنید M^* یک تطابق بیشینه باشد. گرافی که متناظر با مجموعه یالهای $Z = M \Delta M^* = (M \cup M^*) \setminus (M \cap M^*)$ است را در نظر بگیرید. چند مشاهده در مورد Z انجام می‌دهیم:

- ماکزیمم درجه در Z از ۲ بیشتر نیست. نتیجه اینکه Z مجموعه ای از مسیرها و دورهای مجزا است.

---

[۱] alternating path

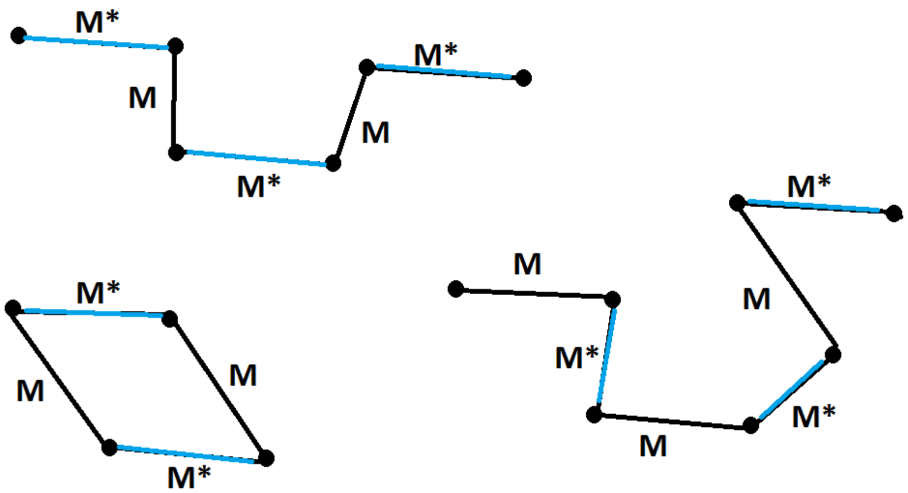
[۲] واقعا نمی‌دانم چرا باید از درست بودن یک گزاره ریاضی ابراز خوشحالی کرد. شاید دلیلش این است که مسئله پیچیدگیهای غیر منتظره ندارد که ما را سرگردان خود کند.

[۳] Claude Berge

[۴] Jack Edmond

- دور با طول فرد در Z وجود ندارد (چرا؟)
- بنا به پیشفرضی مسئله، داریم $|M^*| < |M|$.

از مشاهدات بالا نتیجه می‌شود، مسیری در Z وجود دارد که در آن تعداد یالهای M^*ش بیشتر از تعداد یالهای M آن است. این مسیر در واقع یک مسیر تناوبی برای M است و لذا ادعای را ما را ثابت می‌کند. □

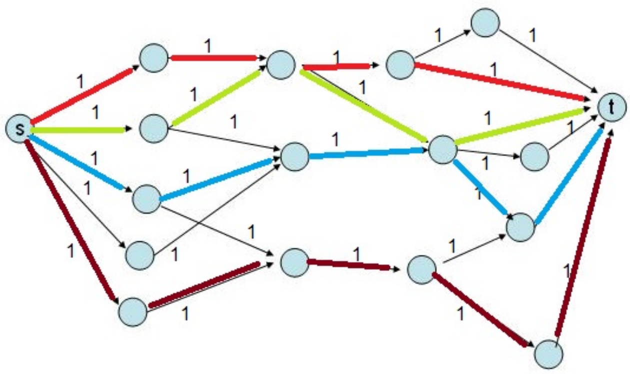


۲ مسیرهای یالی مجزا بین s و t

گراف جهت دار $G = (V, E)$ داده شده است. دو راس s و t در G مشخص شده است.
دنبال مجموعه ای از مسیرهای ساده $P_1, \ldots, P_t$ از s به t میگردیم بطوریکه هیچ دو P_i و P_j یال مشترکی نداشته باشند. در واقع به دنبال بیشترین تعداد مسیر ساده از s به t میگردیم که اشتراک یالی نداشته باشند.

قبل از اینکه این مسئله را تبدیل به یک مسئله جریان بیشینه کنیم، یک مشاهده ساده انجام میدهیم. اگر s یال ورودی داشته باشد میتوانیم آن را حذف کنیم. همینطور اگر t یال خروجی داشته باشد میتوانیم آن را حذف کنیم. این یالها نمیتوانند سهمی در مسیر s به t داشته باشند. لذا حذف کردن آنها مشکلی ایجاد نمی‌کند.

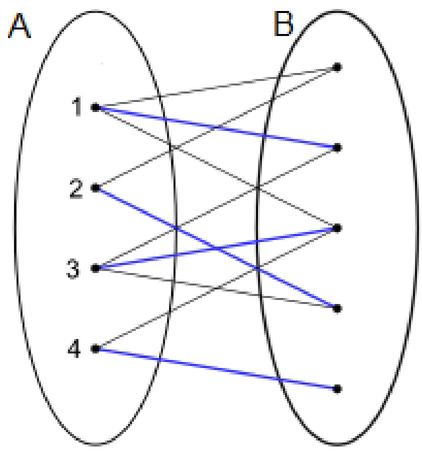
حال با این تغییر کوچک، آماده هستیم که مسئله را تبدیل به یک مسئله جریان بیشینه کنیم. این کار مشابه مسئله تطابق بیشینه در گراف دوبخشی سرراست و آسان است. کافی است که به همه یالها ظرفیت 1 بدهیم.
همانند مشاهداتی که برای مسئله تطابق بیشینه داشتیم، چون ظرفیتها عدد صحیح هستند، در واقع همه عدد 1 هستند، جریان بیشینه از s به t بصورت مجموعه ای از مسیرهای مجزا (بدون یال مشترک) از s به t در خواهد آمد.



در گراف بالا چهار مسیر مجزا از s به t بدست آمده است. به عبارت دیگر، از s به t میتوان به اندازه 4 واحد جریان فرستاد. هر واحد از جریان از طریق یکی از مسیرها به انتقال پیدا می‌کند.

۳ قضیه ازدواج هال

به مسئله تطابق بیشینه در گرافهای دوبخشی برمیگردیم. فرض کنید گراف دوبخشی $G = (A \cup B, E)$ داده شده است. پرسش ما باز هم در مورد تطابق در این گراف است. ممکن است کسی سوال کند، آیا تطابقی در گراف دوبخشی G وجود دارد که همه رئوس سمت A را پوشش دهد؟ به عبارت دیگر، تطابقی وجود دارد که در آن هر راس A با یکی از رئوس B یک زوج را تشکیل دهند. من اینجا مخصوصا از کلمه زوج استفاده کردم چون گاها برای معرفی این مسئله را از عبارت مسئله ازدواج استفاده میشود. یک بیان دیگر این مسئله میتواند بدین بصورت باشد. تعدادی شخص (مجموعه A) میخواهند برای خودشان همسر انتخاب کنند. هر شخص در مجموعه A برای خودش افرادی را در مجموعه B مشخص کرده و مایل است که با یکی از آنها ازدواج کند. آیا میتوانیم برای هر شخص در مجموعه A همسری پیدا کنیم، بطوریکه هر کس با یکی از افراد مورد علاقه اش ازدواج کند؟

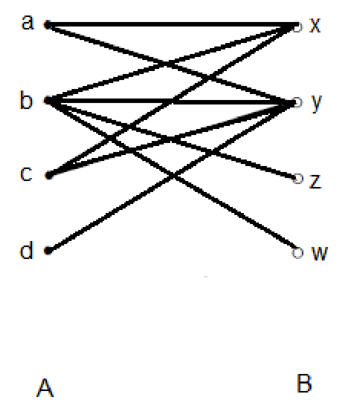


یک بیان دیگر از همین مسئله با استفاده از نظریه مجموعه هاست. یک مجموعه متناهی X داریم. برای سادگی فرض کنید $X = \{1, 2, \dots, m\}$. علاوه بر این یک سری مجموعه $S_1, \dots, S_n$ داریم بطوریکه هر

$S_i \subseteq X$. پرسشی که مطرح است این است که آیا میتوان از هر مجموعه S_i یک عضو را انتخاب کرد بطوریکه در مجموع هیچ عضوی از X دو بار یا بیشتر انتخاب نشده باشد؟

اینها همه بیانهای مختلف از یک مسئله واحد هستند.

خوب اجازه بدهید از همان بیان گراف دوبخشی و تطابق استفاده کنیم. یک شرط لازم برای اینکه تطابقی وجود داشته باشد که همه رئوس A را پوشش دهد (یک تطابق که به اندازه $|A|$) این است که هر زیرمجموعه S از A که شما در نظر بگیرید تعداد همسایه های S در طرف B باید حداقل به اندازه $|S|$ باشد. فرض کنید $N(S)$ مجموعه همسایه های رئوس S باشد. به عبارت دیگر باید داشته باشیم $|N(S)| \geq |S|$.



شکل بالا نمونه ای را نشان میدهد که تطابقی به اندازه $|A| = 4$ وجود ندارد. چون مجموعه $S = \{a, c, d\}$ همسایه هایش $\{x, y\}$ هستند. لذا اینجا $N(\{a, c, d\}) = 2 < 3$.

شرطی که از آن صحبت کردیم، باید برای هر زیرمجموعه S از برقرار باشد. به عبارت دیگر، باید داشته باشیم

$$\forall S \subseteq A, \quad |N(S)| \geq |S|$$

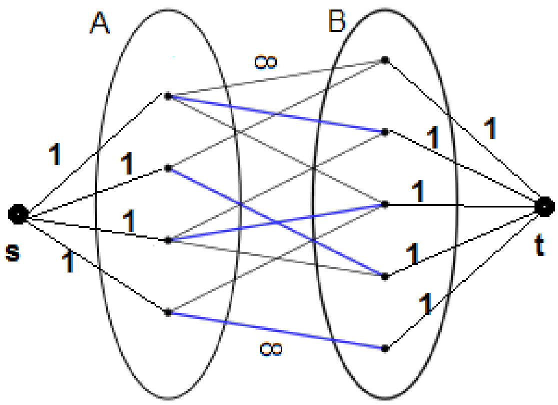
طبیعتا این شرط برای وجود تطابقی که همه A را پوشش دهد لازم است. اما آیا کافی نیز هست؟ جواب این سوال مثبت است. قضیه هال که توسط ریاضیدانی به نام فیلیپ هال (و البته خیلی افراد دیگر) اثبات شده است همین را می‌گوید.

قضیه هال: در گراف دوبخشی $G = (A \cup B, E)$ اگر برای هر زیرمجموعه $S \subseteq A$ داشته باشیم $|N(S)| \geq |S|$ آنگاه یک تطابق به اندازه $|A|$ در گراف G وجود دارد.

اثبات: برای اثبات، گراف دوبخشی G را مانند موارد قبل تبدیل به یک شبکه جریان $s - t$ میکنیم و نشان میدهیم اگر شرایط قضیه هال برقرار باشد، آنگاه یک جریان بیشینه با اندازه $|A|$ از s به t وجود دارد که معادل با وجود یک تطابق با $|A|$ یال است. تنها یک تفاوت در تبدیل ما اینجا وجود دارد. ظرفیت یالهایی که A را به B وصل می‌کند به جای 1 بینهایت ∞ قرار میدهیم. این تغییر هیچ تاثیری در افزایش یا کاهش جریان از s به t ندارد ولی همانطور که خواهیم دید خیلی به ساده شدن اثبات کمک می‌کند.

شکل زیر یک نمونه از این تبدیل را نشان می دهد. دقت کنید که ظرفیت همه یالهای بین A و B حالا بینهایت است.

چند مشاهده که در اثبات به ما کمک می‌کند.



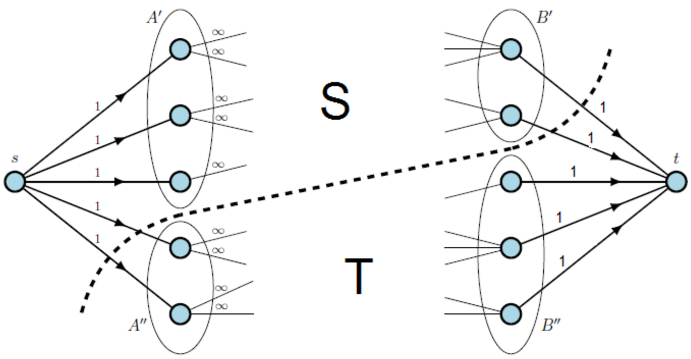
- فرض کنید که f_{max} جریان بیشینه از s به t باشد. کافی است نشان دهیم اگر شرط قضیه هال برقرار باشد، داریم
$$v(f_{max}) = |A|$$
این معادل این است که بگوییم تطابقی به اندازه $|A|$ در گراف وجود دارد.

- واضح است که $v(f_{max}) \leq |A|$ چون مقدار جریان از s به t نمی تواند از مجموع ظرفیت یالهای خروجی از s بیشتر باشد.

- بنا به یک قضیه اساسی، ظرفیت برش کمینه $s-t$ برابر با مقدار جریان بیشینه از s به t است. فرض کنید (S, T) برش کمینه در گراف ما باشد و $c(S, T)$ ظرفیت این برش باشد. داریم
$$c(S, T) = v(f_{max}) \leq |A|$$

- بنا به مشاهده قبلی، ظرفیت برش کمینه عددی متناهی است. در نتیجه برش کمینه (S, T) هیچ یالی بین A و B که ظرفیت بینهایت دارند را قطع نمی‌کند.

- فرض کنید $S = \{s\} \cup A' \cup B'$ و $T = \{t\} \cup A'' \cup B''$. دقت کنید اینجا $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ و به همین ترتیب $A'' \subseteq A, B'' \subseteq B$. وضعیت در شکل زیر نشان داده شده است.



چون برش (S,T) هیچ یالی بین A و B را قطع نمیکند، ظرفیت برش برابر است با

$$c(S,T) = |A''| + |B'|$$

از طرف دیگر داریم

$$N(A') \subseteq B'$$

پس

$$c(S,T) = |A''| + |B'| \geq |A''| + |N(A')|$$

چون شرط قضیه هال برقرار است باید داشته باشیم $|N(A')| \geq |A'|$. لذا

$$c(S,T) = |A''| + |B'| \geq |A''| + |N(A')| \geq |A''| + |A'| = |A|$$

پس ظرفیت برش کمینه از $|A|$ کمتر نیست. چون $v(f_{max}) = c(S,T)$ لذا $v(f_{max}) \geq |A|$ و این یعنی $v(f_{max}) = |A|$ چون قبلا مشاهده کردیم که $v(f_{max}) \leq |A|$.