یاد آوری برخی مفاهیم از مبانی ریاضی

۱. اگر p و q گزاره باشند آنگاه هم ارزی‌های زیر در عمل بسیار به کار برده می‌شوند:

(الف)

$$p \longrightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$$

برای اثبات درستی q با استفاده از هم ارزی زیر، فرض می کنیم $\sim p$ برقرار باشد و بعد با استفاده از قاعده قیاس استثنایی

$$[(\sim p \longrightarrow q) \wedge \sim p] \Longrightarrow q$$

q را نتیجه می گیریم.

$$p \vee q \Longleftrightarrow \sim p \longrightarrow q$$

(ب) می دانیم یک گزاره یا راست است یا ناراست. گاه برای این که درستی q از درستی p نتیجه بگیریم، ساده‌تر است تا نشان دهیم اگر نقیض q نادرست باشد، نقیض q هم نادرست است. این همان قاعده عکس نقیض

$$p \longleftrightarrow q \Longleftrightarrow \sim q \longrightarrow \sim p$$

است.

۲. گاه برای این که درستی q را از درستی p نتیجه بگیریم، نشان می دهیم «درست بودن p» و «درست بودن $\sim q$» به تناقض می انجامد. یعنی از هم ارزی زیر استفاده می‌کنیم

$$(p \wedge \sim q \longrightarrow c) \Longleftrightarrow (p \longrightarrow q).$$

۳. یک گزاره نما، یک جمله خبری است هرگاه

(الف) شامل یک یا چند متغیر باشد و

(ب) گزاره نباشد و

(پ) وقتی به صورت گزاره در آید که به جای متغیرهای آن انتخاب‌هایی مجاز قرار گیرد

مانند: $p(x) = x + ۳$ یک عدد زوج است. به ازای برخی اعداد صحیح این عبارت تبدیل به گزاره‌ای درست می شود و به ازای برخی مقادیر x تبدیل به گزاره‌ای نادرست می شود.

یا عبارت $q(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۱ > ۰$، به ازای برخی سه تاییهای (x, y, z) مثبت است که تبدیل به یک گزاره راست می شود و به ازای برخی سه تایی‌های (x, y, z) صفر یا منفی می‌شود. که در این صورت گزاره‌ای ناراست است.

۴. اگر یک گزاره‌نما، به ازای تمام متغیرهای عالم سخن راست باشد، عبارت «برای تمامی متغیرهای درعالم سخن» را سور عمومی می نامند و آن را با $(\forall)$ نمایش می دهند. مانند در عالم سخن $\mathbb{R}^۳$، «برای تمامی $(x, y, z) \in \mathbb{R}^۳$، $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq ۰$» یا به طور دقیق‌تر

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq ۰)$$

یا

$$(\forall x)[r(x) \longrightarrow s(x)]$$

$$(\forall x)[r(x) \vee s(x)]$$

اگر گزاره نما به ازای برخی متغیرهای عالم سخن راست و به ازای برخی ناراست باشد، عبارت «حداقل یک x وجود دارد به طوری که» را سور وجودی می نامند و به $\exists x$ نمایش می دهند.

$$(\exists x)(\text{فرد است } x + ۳)$$

یا

$$(\exists x)(\exists y)(x^۲ + y^۲ = ۱)$$

۵. قاعده‌های نقیض سور عمومی و سور وجودی

$$\sim (\forall x)(p(x)) \Longleftrightarrow (\exists x)(\sim p(x))$$

$$\sim (\exists x)(p(x)) \Longleftrightarrow (\forall x)(\sim p(x)).$$

هنگامی که گزاره‌نما بیش از یک متغیر داشته باشد و ترکیبی از سورهای عمومی و وجودی در آن ظاهر شده باشد، برای نوشتن نقیض آن، کافی است سورها را مطابق قاعده بالا به شکل مناسب آن درآوریم و در انتها نقیض گزاره نما را قرار دهیم.

$$\sim (\exists x)(\exists y)(x^۲ + y^۲ = ۱) \Longleftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x^۲ + y^۲ \neq ۱)$$

به عنوان مثالی دیگر، اگر بخواهیم نقیض گزاره زیر را بنویسیم

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon)(\exists \delta > \circ)(\forall x)[(\circ <| x - a |< \delta \longrightarrow (| f(x) - \ell |< \varepsilon)]$$

به صورت

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) \neq \ell \Longleftrightarrow (\exists \varepsilon)(\forall \delta > \circ)(\exists x)[(\circ <| x - a |< \delta) \wedge (| f(x) - \ell |\geq \varepsilon)].$$

در می‌آید.

۶. **رابطه:** فرض کنیم A, B دو مجموعه باشند. یک رابطه از A در B یک زیر مجموعه R از $A \times B$ است. اگر $(a, b) \in R$، می گوییم a در رابطه با b است و گاه آن‌را به صورت aRb نمایش می دهیم.

۷. **رابطه هم‌ارزی:** فرض کنیم R یک رابطه از A در A باشد. یعنی $R \subseteq A \times A$. رابطه R رای یک رابطه هم‌ارزی می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(الف) برای هر $a \in A$، داشته باشیم $(a, a) \in R$. (خاصیت انعکاسی)

(ب) اگر $(a, b) \in R$، آنگاه $(b, a) \in R$. (خاصیت تقارن)

(پ) اگر $(a, b) \in R$ و $(b, c) \in R$ آنگاه $(a, c) \in R$. (خاصبت تعدی)

یکی از کاربردهای مهم رابطه هم‌ارزی، این است که به جای این که اشیاء هم ارز را تک تک مطالعه کنیم، کافی است فقط یک از آنها را مطالعه کنیم زیرا بقیه نیز خاصیت مشابه شئی مورد نظر دارند.

۸. هرگاه R یک رابطه هم‌ارزی روی A باشد، آنگاه برای هر $a \in A$، مجموعه تمام عناصر هم‌ارز با a را

$$\{x \in A \mid (a, x) \in R\}$$

را رده هم‌ارزی a می نامیم و با $[a]$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱. فرض کنیم A مجموعه تمام کلمات فارسی باشد. آنگاه رابطه R زیر تعریف می‌شود

$aRb \Longleftrightarrow$ حرف اول a با حرف اول b یکی باشند

یک رابطه هم ارزی است و ۳۲ رده هم‌ارزی به دست می آید. رده هم‌ارزی کلماتی که با «آ» شروع می‌شود، رده هم‌ارزی کلماتی که با «ب» شروع می‌شود و همینطور تا رده هم‌ارزی کلماتی که با «ی» شروع می شود. به این ترتیب فرهنگ لغت فارسی با بیش از ۱۵۰۰۰ کلمه به ۳۲ رده تقلیل می‌یابد.

مثال ۲. فرض کنیم $A = \mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشند. رابطه R که به صورت زیر تعریف می شود

$aRb \Longleftrightarrow$ تعداد ارقام a با تعداد ارقام b برابر باشند

این رابطه، یک رابطه هم ارزی است و رده های هم ارزی عبارتند از «مجموعه اعداد یک رقمی»، «مجموعه اعداد دو رقمی»، «مجموعه اعداد سه رقمی» و ...

۹. **تابع:** هرگاه R یک رابطه از A در B باشد به طوری که برای هر $a \in A$ یک و فقط یک $b \in B$ وجود داشته باشد به طوری که $(a, b) \in R$، آنگاه این رابطه را یک تابع می‌نامیم. اغلب ساده تر است یک تابع را با $f : A \longrightarrow B$ نشان دهیم به طوری که $\forall a \in A$یک $b \in B$ی یکتا وجود داشته باشد $(a, b) \in R$. اغلب ساده تراست این زوج را به صورت $b = f(a)$ بنویسیم.

۱۰. یکی از کاربردهای مهم مفهوم تابع این است که می‌توانیم به نوعی دو مجموعه را باهم مقایسه کنیم. به خصوص اگر خواص یک مجموعه مانند A معلوم باشد و یک تابع f از A در مجموعه B وجود داشته

باشد، بسته به خواص تابع، می توان خواص B را به کمک خواص f از مجموعه A نتیجه گرفت و آن را بهتر شناخت.

ما در این درس این شیوه را به طور مکرر به کار خواهیم گرفت.

۱۱. هرگاه $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد، این تابع مجموعه‌های زیر را تعریف می کند

(الف) سایه A تحت f که مجموعه

$$f(A) = \{b \in B \mid b = f(a) \quad \text{وجود داشته باشد به طوری که } a \in A \text{ یک}\}$$

(ب) «سایه وارون B تحت f» که عبارت است از

$$f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\}$$

(پ) هرگاه $b \in B$، آنگاه مجموعه عناصری که تحت f به b نگاشته می‌شوند را سایه وارون $\{b\}$ می نامیم و با $f^{-1}(b)$ نشان می‌دهیم.

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

ممکن است هیچ a ای وجود نداشته باشد که با f به b نگاشته شود. در این‌صورت $f^{-1}(b) = \varnothing$.

(ت)

۱۲. در مطالعه توابع، سه نوع تابع هستند که اهمیت زیادی دارند.

(تابع یک به یک) تابع $f : X \longrightarrow Y$ را **یک به یک**[1] یا **انژکتیو**[2] می گویند هر گاه $x_1, x_2 \in X$ و $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه $x_1 = x_2$. تابع انژکتیو را **انژکسیون**[3] نیز می نامند.

[1] One to one
[2] Injective
[3] Injection

مثال ۳. ۱-تابع همانی $id_X : X \longrightarrow X$ که به صورت $id_X(x) = x$ تعریف می شود یک تابع یک به یک است.

۲- تابع $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که با $f(n) = n + ۵$ تعریف می شود یک تابع یک به یک است.

۳- تابع $f : N \longrightarrow \mathbb{Z}$ که به صورت زیر تعریف می شود، یک تابع یک به یک است

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ -n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

یادآوری ۴. بنابرتعریف بالا، f یک به یک است اگر و فقط اگر

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Longrightarrow x_۱ = x_۲$$

پس بنابر هم ارزی $p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$، تعریف فوق را می توان به صورت زیر نوشت.

$$x_۱ \neq x_۲ \Longrightarrow f(x_۱) \neq f(x_۲)$$

(تابع پوشا) تابع $f : X \longrightarrow Y$ **سورژکتیو** [۱] یا **پوشا** هر گاه برای هر $y \in Y$، یک $x \in X$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(x) = y$. تابع سورژکتیو **سورژکسیون** هم نامیده می شود. به عبارت دیگر، $f : X \longrightarrow Y$ سورژکسیون است اگر وفقط اگر $f(X) = Y$.

یادآوری ۵. تابع $f : X \longrightarrow Y$ پوشاست اگر وفقط اگر $\forall y \in Y, \quad \exists x \in X, f(x) = y$. یعنی بتوان معادله $f(x) = y$ را برحسب y حل کرد.

مثال ۶. (آ) تابع همانی $id_X : X \longrightarrow X$ که با $id_X(x) = x$ تعریف می شود تابعی پوشا است.

(ب) تابع $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که با $f(n) = ۲n$ تعریف می شود یک تابع پوشا نیست زیرا هیچ عدد فردی مانند $۲k + ۱$ نمی تواند نگاره یک عنصر $\mathbb{N}$ تحت نگاشت فوق باشد. در واقع اگر چنین باشد، آنگاه $f(x) = ۲x = ۲k + ۱$. در نتیجه $x = \frac{۲k+۱}{۲} = k + \frac{۱}{۲}$ که می دانیم $k + \frac{۱}{۲} \notin \mathbb{N}$.
به عبارت دیگر معادله $f(x) = ۲x = b$، که b یک عدد فرد است، در $\mathbb{N}$ جوابی ندارد.

---
[۱] Surjective / Onto

(ج) تابع علامت $\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\longrightarrow\{-1,0,1\}$ یک تابع پوشاست. زیرا هر عضو $\{-1,0,1\}$ نگاره یک عدد منفی یا صفر یا مثبت است.

(د) تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ که با $f(x)=x^2$ تعریف می شود یک تابع پوشا نیست زیرا برای هر عدد منفی b از $\mathbb{R}$، هیچ عضو x در $\mathbb{R}$ نمی توان پیدا کرد به طوری که $f(x)=x^2=b<0$. در واقع ریشه دوم یک عدد منفی $x=\sqrt{b}$ در $\mathbb{R}$ تعریف نشده است.

به عبارت دیگر معادله $f(x)=x^2=b$ جواب ندارد زیرا b منفی است.

(ه) تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow[-1,1]$ که با $f(x)=\sin x$ تعریف می شود یک تابع پوشاست ولی اگر به جای $[-1,1]$ مجموعه ی Y که $Y\supsetneq[-1,1]$ است را قرار دهیم، آنگاه f پوشا نیست.

(تابع دوسویی)

تعریف ۷. تابع $f:X\longrightarrow Y$ را **دوسویی** [1] می نامیم هرگاه هم یک به یک باشد و هم پوشا. به تابع دوسویی «تناظر یک به یک» هم می گویند.

مثال ۸. (آ) تابع $f(x)=x^3$ که از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ تعریف می شود تابعی دوسویی است.

(ب) تابع $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ که با $f(x)=\ln x$ تعریف می شود تابعی دوسویی است.

(ج) تابع $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ که با $f(n)=2n$ تابعی دوسویی نیست زیرا پوشا نیست.

(د) تابع $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}$ که به صورت زیر تعریف می شود

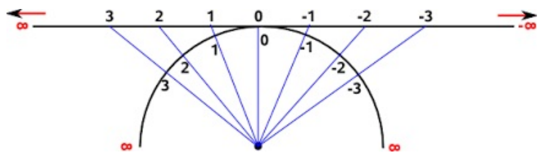
$$f(x)=\begin{cases}-k & x=2k \quad \text{اگر}\\ \left[\frac{2k-1}{2}\right] & x=2k-1 \quad \text{اگر}\end{cases}$$

تابعی یک به یک و پوشاست.

(ه) می توان نشان داد یک تناظر یک به یک بین نقاط یک نیم دایره و خط $\mathbb{R}$ وجود دارد. فعلاً به صورت تصویری این تناظر را می توانید مجسم کنید. امتداد هر شعاع مرسوم از هر نقطه محیط نیم دایره خط $\mathbb{R}$ را در یک و فقط یک نقطه قطع می کند. برعکس نیم خط واصل بین

[1] *Bijection*

هر نقطه از $\mathbb{R}$ و مرکز نیم دایره قطع می کند. به این ترتیب نقاط $\mathbb{R}$ با نقاط نیم دایره درتناظر یک به یک قرار می گیرند.



شکل ۱: تناظر یک به یک بین نقاط نیم دایره و خط $\mathbb{R}$

۱۳. **ترکیب دوتابع:** دو تابع $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ مفروض اند. ترکیب این دو تابع، تابع $g \circ f : X \longrightarrow Z$ است که در آن به ازای هر x در X، $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

به هنگام ترکیب توابع، ترتیب نوشتن توابع در ترکیب را با توجه به مجموعه برد و دامنه توابع می نویسیم.

۱۴. در این درس، قضیه زیر مورد استفاده فراوانی دارد.

قضیه ۹. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ دو تابع باشند.

(الف) اگر f و g هردو یک به یک باشند، آنگاه $g \circ f$ نیز یک به یک است.

(ب) اگر f و g هر دو پوشا باشند، آنگاه $g \circ f$ نیز یک به یک خواهد بود.

(پ) اگر f و g هر دو وارون پذیر باشند آنگاه $g \circ f$ نیز وارون پذیر خواهد بود.