فصل ۱

متغیر تصادفی و انواع آن

یک متغیر تصادفی، تابعی از فضای نمونه آزمایش تصادفی به مجموعه اعداد حقیقی است به طوری که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت داده می شود. برای نمایش یک متغیر تصادفی از حروف بزرگ لاتین مانند X، Y و Z استفاده می شود. داریم

$$X : S \longrightarrow S_X \subseteq \mathcal{R}$$

به طوری که،

- X: متغیر تصادفی
- S_X: زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است و نشانگر مجموعه مقادیری است که متغیر تصادفی X می گیرد و به آن تکیه گاه X می گویند.

در واقع یک متغیر تصادفی نمایش ریاضی فضای نمونه است و هر پیشامد از فضای نمونه را با یک عدد نمایش می دهد. توجه داشته باشید که در یک آزمایش تصادفی می توان به تعداد نامتناهی متغیر تصادفی تعریف کرد.

مثال ۱-۱. آزمایش تصادفی پرتاب سه سکه را درنظر بگیرید. با فرض اینکه T نشان دهنده ظاهر شدن خط و H نشان دهنده شیر باشد، اگر متغیر تصادفی X را تعداد شیرهای مشاهده شده تعریف کنیم، داریم

$$\begin{aligned} S &= \{\underbrace{TTT}, \ \underbrace{HTT, THT, TTH}, \ \underbrace{THH, HTH, HHT}, \ \underbrace{HHH}\} \\ S_X &= \{\ ۰, \qquad\qquad ۱, \qquad\qquad\qquad ۲, \qquad\qquad ۳\} \end{aligned}$$

مثال ۱-۲. سکه ای شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است. سکه را آنقدر پرتاب می کنیم تا برای اولین بار خط مشاهده شود. اگر X برابر با تعداد پرتاب های لازم تا مشاهده اولین خط باشد، احتمال اینکه حداقل ۴ پرتاب لازم باشد را بیابید. با توجه به تعریف متغیر تصادفی X داریم

$$\begin{aligned} S &= \{\underbrace{T}, \ \underbrace{HT}, \ \underbrace{HHT}, \ \underbrace{HHHT}, \ \ldots\} \\ S_X &= \{\ ۱, \quad ۲, \quad ۳, \quad ۴, \quad \ldots\} \end{aligned}$$

مشابه مثال ۱-۱، T نشان دهنده مشاهده خط در اولین پرتاب، HT نشان دهنده مشاهده خط در دومین پرتاب، HHT نشان دهنده مشاهده خط در سومین پرتاب و همین طور تا آخر است. طبق اطلاعات مساله داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(H) &= ۲\mathrm{P}(T) \\ \mathrm{P}(H) + \mathrm{P}(T) &= ۱ \end{aligned}$$

پس $\mathrm{P}(T) = \frac{۱}{۳}$، $\mathrm{P}(H) = \frac{۲}{۳}$ و

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = ۱) &= \mathrm{P}(\{T\}) = \frac{۱}{۳} \\ \mathrm{P}(X = ۲) &= \mathrm{P}(\{HT\}) = (\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳}) \\ \mathrm{P}(X = ۳) &= (\frac{۲}{۳})^{۲}(\frac{۱}{۳}) \\ \mathrm{P}(X = ۴) &= (\frac{۲}{۳})^{۳}(\frac{۱}{۳}) \\ &\vdots \\ \mathrm{P}(X = k) &= (\frac{۲}{۳})^{k-۱}(\frac{۱}{۳}) \end{aligned}$$

بنابراین

$$P(X \geq ۴) = ۱ - P(X < ۴) = ۱ - P(X \leq ۳) = ۱ - (\frac{۱}{۳} + (\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳}) + (\frac{۲}{۳})^{۲}(\frac{۱}{۳})) = \frac{۸}{۲۷}$$

or

$$\begin{aligned} &= P(X = ۴) + P(X = ۵) + P(X = ۶) + \dots \\ &= (\frac{۲}{۳})^{۳}(\frac{۱}{۳}) + (\frac{۲}{۳})^{۴}(\frac{۱}{۳}) + (\frac{۲}{۳})^{۵}(\frac{۱}{۳}) + \dots \\ &= \sum_{i=۳}^{\infty}(\frac{۲}{۳})^{i}(\frac{۱}{۳}) \\ &= \frac{(\frac{۱}{۳})(\frac{۲}{۳})^{۳}}{۱ - \frac{۲}{۳}} = (\frac{۲}{۳})^{۳} = \frac{۸}{۲۷} \end{aligned}$$

۱.۱ انواع متغیر تصادفی

با توجه به تعریف متغیر تصادفی می دانیم: $X : S \longrightarrow S_X \subseteq \mathcal{R}$

- اگر S_X یک مجموعه شمارا باشد، X را یک متغیر تصادفی گسسته گویند. در واقع برای یک متغیر تصادفی گسسته، S_X به شکل یک مجموعه متناهی یا نامتناهی است.

$$S_X = \{x_۱, x_۲, x_۳, \dots\}$$

- اگر S_X یک فاصله یا اجتماع چند فاصله عددی باشد، X را یک متغیر تصادفی پیوسته گویند. یعنی

$$S_X = [a, b] \subseteq \mathcal{R}$$

$\star$ توجه داشته باشید که برای یک متغیر تصادفی پیوسته X احتمال در یک نقطه برابر با صفر است. درواقع داریم

$$P(X = x) = ۰ \qquad x \in \mathcal{R}$$

۱.۱.۱ متغیر تصادفی گسسته

متغیر تصادفی X را گسسته گویند هرگاه S_X مجموعه ای شمارا باشد.

تعریف ۱-۳. تابع چگالی احتمال (تابع احتمال) متغیر تصادفی گسسته X میزان احتمال انباشته شده در هر نقطه را نشان می دهد که به صورت زیر تعریف می شود

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x)$$

و دارای خواص زیر است:

۱. برای هر $x \in \mathcal{R}$، $f_X(x) \geq ۰$

۲. $\sum_{x\in\mathcal{R}} f_X(x) = ۱$.

مثال ۱-۴. دو تاس را باهم پرتاب می کنیم و متغیر تصادفی X را برابر با مجموع اعداد مشاهده شده روی دو تاس تعریف می کنیم. تابع چگالی X را بدست آورید.

برای متغیر تصادفی X داریم

$$S_X = \{۲, ۳, ۴, \ldots, ۱۲\}$$

و همچنین

$$f_X(۲) = \mathrm{P}(X = ۲) = \mathrm{P}(\{۱, ۱\}) = \frac{۱}{۳۶}$$
$$f_X(۳) = \mathrm{P}(X = ۳) = \mathrm{P}(\{۱, ۲\}, \{۲, ۱\}) = \frac{۲}{۳۶}$$
$$f_X(۴) = \mathrm{P}(X = ۴) = \mathrm{P}(\{۱, ۳\}, \{۳, ۱\}, \{۲, ۲\}) = \frac{۳}{۳۶}$$
$$\vdots$$

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

مثال ۱-۵. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = k(\frac{۱}{۶})^x \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

مقدار k را چنان تعیین کنید که $f_X(x)$ تابع چگالی متغیر تصادفی گسسته X باشد.
با توجه به خواص تابع چگالی احتمال، $k \geq ۰$ و

$$۱ = \sum_{x=۰}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=۰}^{\infty} k(\frac{۱}{۶})^x = k\sum_{x=۰}^{\infty}(\frac{۱}{۶})^x = k(\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۶}}) = k(\frac{۶}{۵}).$$

بنابراین $k = \frac{۵}{۶}$.

تمرین ۱-۶. اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد،

$$f_X(x) = \frac{k}{۲^x} \qquad\qquad x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

مقدار k را محاسبه کنید.

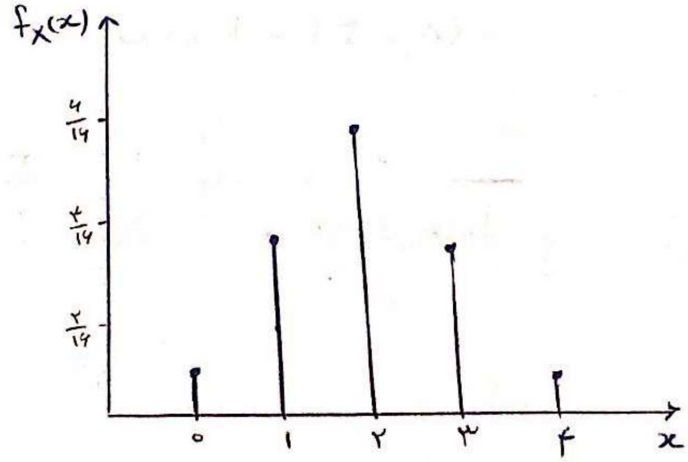
تمرین ۱-۷. فروشگاهی ۶ دستگاه تلویزیون دارد که ۲ دسستگاه ان معیوب ات. هتلی ۳ دستگاه آن را به طور تصادفی انتخاب و خریداری می نماید. اگر X تعداد تلویزیون های معیوب باشد که هتل خریداری کرده، تابع احتمال X را بدست آورید.

تعریف ۱-۸. تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X ***(خواه متغیر تصادفی X گسسته باشد یا پیوسته)*** میزان احتمال توزیع شده تا نقطه x را نشان می دهد که به صورت زیر تعریف می شود

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) \qquad x \in \mathcal{R}$$

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابع توزیع $F_X(x)$ به صورت زیر محاسبه می شود

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{t=-\infty}^{x} \mathrm{P}(X = t) = \sum_{t=-\infty}^{x} f_X(t)$$



شکل ۱-۱: نمودار تابع چگالی X در مثال ۱-۹

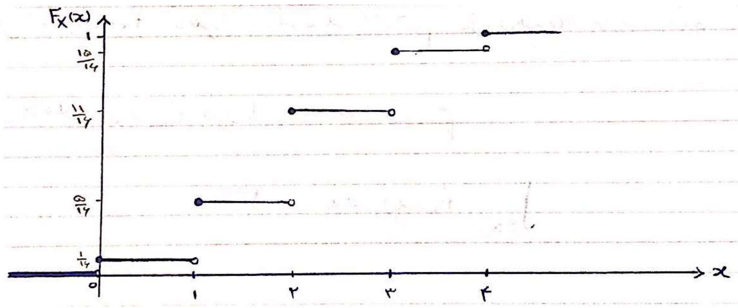
مثال ۱-۹. سکه ای را ۴ مرتبه پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشانگر تعداد شیرهای مشاهده شده باشد، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X را بیابید.

$$S_X = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$$

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \mathrm{P}(\{TTTT\}) = \frac{۱}{۱۶} & \text{if} \quad x = ۰ \\ \mathrm{P}(\{HTTT, THTT, TTHT, TTTH\}) = \frac{۴}{۱۶} & \text{if} \quad x = ۱ \\ \mathrm{P}(\{HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH\}) = \frac{۶}{۱۶} & \text{if} \quad x = ۲ \\ \mathrm{P}(\{HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}) = \frac{۴}{۱۶} & \text{if} \quad x = ۳ \\ \mathrm{P}(\{HHHH\}) = \frac{۱}{۱۶} & \text{if} \quad x = ۴ \end{cases}$$

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad x < ۰ \\ \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱}{۱۶} & \text{if} \quad ۰ \leq x < ۱ \\ \frac{۱}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} = \frac{۵}{۱۶} & \text{if} \quad ۱ \leq x < ۲ \\ \frac{۱}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۶}{۱۶} = \frac{۱۱}{۱۶} & \text{if} \quad ۲ \leq x < ۳ \\ \frac{۱}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۶}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶} & \text{if} \quad ۳ \leq x < ۴ \\ \frac{۱}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۶}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = ۱ & \text{if} \quad ۴ \leq x \end{cases}$$

نمودار توابع چگالی و توزیع به دست آمده به ترتیب در شکل ۱-۱ و ۱-۲ رسم شده است. همان طور که مشاهده می شود، نمودار تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته X به شکل پله ای است.



شکل ۱-۲: نمودار تابع توزیع X در مثال ۱-۹

خواص تابع توزیع احتمال

۱. $\forall x \in \mathcal{R} \qquad ۰ \leq F_X(x) \leq ۱$

۲. $F_X(x)$ یک تابع غیر نزولی است.

۳. $F_X(x)$ یک تابع از راست پیوسته است.

۴. $F_X(-\infty) = ۰$ و $F_X(+\infty) = ۱$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی گسسته X را می توان با استفاده از تابع توزیع به شکل زیر به دست آورد

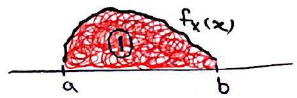
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \mathrm{P}(X = x) = \mathrm{P}(X \leq x) - \mathrm{P}(X < x) \\ &= F_X(x) - F_X(x^-) \end{aligned}$$

که در آن $F_X(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته X در نقطه x است و احتمال تا نقطه x را نشان می دهد و $F_X(x^-)$ احتمال تا قبل از نقطه x است.

تمرین ۱-۱۰. در تمرین های ۱-۶ و ۱-۷ تابع توزیع متغیر تصادفی X را بدست آورید.

تمرین ۱-۱۱. بررسی کنید که آیا تابع زیر یک تابع توزیع برای متغیر تصادفی گسسته W است یا خیر؟ همچنین تابع چگالی متغیر تصادفی W و $\mathrm{P}(۳ < W \leq ۵)$ را محاسبه کنید.

$$F_W(w) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad w < ۳ \\ \frac{۱}{۳} & \text{if} \quad ۳ \leq w < ۴ \\ \frac{۱}{۲} & \text{if} \quad ۴ \leq w < ۵ \\ \frac{۲}{۳} & \text{if} \quad ۵ \leq w < ۶ \\ ۱ & \text{if} \quad ۶ \leq w \end{cases}$$



شکل ۱-۳: نمایش یک واحد جرم احتمال بر روی تکیه گاه X، $S_X=[a,b]$

۲.۱.۱ متغیر تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی X را پیوسته گویند هرگاه S_X یک فاصله یا اجتماع چند فاصله عددی باشد.

تعریف ۱-۱۲. فرض کنید یک واحد جرم احتمال بر روی تکیه گاه X، $S_X=[a,b]$ به صورت شکل ۲-۳ انباشته شده است. تابع چگالی احتمال $f_X(x)$، تابعی است که به یک واحد جرم احتمال در تکیه گاه برازش داده می شود و مساحت زیر تابع در فاصله $[a,b]$ برابر با ۱ است. بنابراین داریم

$$\int_{S_X} f_X(x)\mathrm{dx} = ۱$$

تابع چگالی $f_X(x)$ دارای خواص زیر است

۱. $f_X(x) \geq ۰ \qquad \forall x \in \mathcal{R}$

۲. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = ۱$.

با توجه به تعریف و ویژگی های یک متغیر تصادفی پیوسته مثل X، برای هر بازه دلخواه $[a_۱, a_۲]$ در مجموعه اعداد حقیقی داریم

$$\mathrm{P}(a_۱ < X < a_۲) = \int_{a_۱}^{a_۲} f_X(x)\mathrm{dx}.$$

توجه داشته باشید که چون برای هر عدد حقیقی $x \in \mathcal{R}$، $\mathrm{P}(X=x)=۰$ داریم

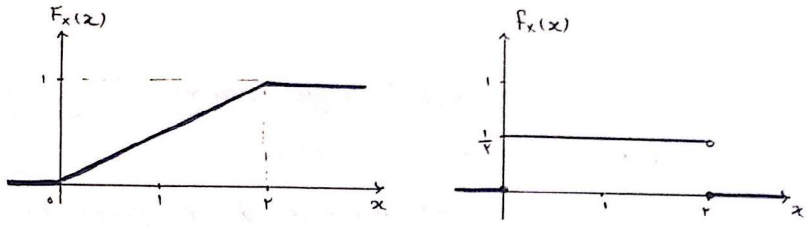
$$\mathrm{P}(a_۱ \leq X < a_۲) = \mathrm{P}(a_۱ < X \leq a_۲) = \mathrm{P}(a_۱ \leq X \leq a_۲) = \mathrm{P}(a_۱ < X < a_۲) = \int_{a_۱}^{a_۲} f_X(x)\mathrm{dx}.$$

براساس تعریف تابع توزیع در ۱-۸، اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع توزیع $F_X(x)$ به صورت زیر محاسبه می شود

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{dt} \qquad \forall x \in \mathcal{R}$$

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، می توان تابع چگالی آن را به روش زیر بدست آورد

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} F_X(x) = F'_X(x)$$



شکل ۱-۴: نمودارهای مثال ۱-۱۳

مثال ۱-۱۳. نقطه ای را به تصادف از فاصله اعداد حقیقی $[۰, ۲]$ انتخاب کرده و متغیر تصادفی X را برابر با نقطه انتخاب شده در فاصله $[۰, ۲]$ در نظر بگیرید. تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال را بدست آورده و سپس این دو تابع را رسم کنید.

چون X یک متغیر تصادفی پیوسته است و $S_X = [۰, ۲]$، پس $\mathrm{P}(X \leq x)$ برابر با نسبت طول فاصله $[۰, x]$ بر طول فاصله $[۰, ۲]$ است و داریم

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad x < ۰ \\ \frac{x}{۲} & \text{if} \quad ۰ \leq x < ۲ \\ ۱ & \quad x \geq ۲ \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} F'_X(x) = \frac{۱}{۲} & \text{if} \quad ۰ < x < ۲ \\ ۰ & \quad \text{o.w} \end{cases}$$

$\star$ **تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته، یک نمودار پیوسته است.**

مثال ۱-۱۴. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{c}{x^{۲}} & \text{if} \quad ۱<x<۱۰\\ ۰ & \text{o.w}\end{cases}$$

i. مقدار c را تعیین کنید.

ii. تابع توزیع احتمال را بدست آورید.

i. با توجه به خواص تابع چگالی احتمال باید $c\geq ۰$،

$$۱=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)\mathrm{dx}=\int_{-\infty}^{۱}۰\mathrm{dx}+\int_{۱}^{۱۰}\frac{c}{x^{۲}}\mathrm{dx}+\int_{۱۰}^{\infty}۰\mathrm{dx}=c\int_{۱}^{۱۰}\frac{۱}{x^{۲}}\mathrm{dx}=\frac{-c}{x}|_{۱}^{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}c$$

پس $c=\frac{۱۰}{۹}$.

ii. چون $f_X(x)=\begin{cases}\frac{۱۰}{۹x^{۲}} & \text{if} \quad ۱<x<۱۰\\ ۰ & \text{o.w}\end{cases}$ پس داریم

$$\begin{aligned}F_X(x)&=\mathrm{P}(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)\mathrm{dt}\\ &=\begin{cases}۰ & \text{if} \quad x<۱\\ \int_{-\infty}^{۱}f_X(t)\mathrm{dt}+\int_{۱}^{x}f_X(t)\mathrm{dt}=\int_{۱}^{x}\frac{۱۰}{۹t^{۲}}\mathrm{dt}=\frac{۱۰}{۹}-\frac{۱۰}{۹x} & \text{if} \quad ۱\leq x<۱۰\\ \int_{-\infty}^{۱}f_X(t)\mathrm{dt}+\int_{۱}^{۱۰}f_X(t)\mathrm{dt}+\int_{۱۰}^{x}f_X(t)\mathrm{dt}=۱ & \text{if} \quad x\geq ۱۰\end{cases}\end{aligned}$$

تمرین ۱-۱۵. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد.

$$f_X(x)=\begin{cases}c(۱+x) & \text{if} \quad ۲<x<۵\\ ۰ & \text{o.w}\end{cases}$$

i. مقدار c را بدست آورید.

ii. تابع توزیع متغیر تصادفی X را بدست آورید.

تمرین ۱-۱۶. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد، تابع توزیع X را بدست آورید و $\mathrm{P}(۰/۵<X<۱/۵)$ را محاسبه کنید.

$$f_X(x)=\begin{cases}x & \text{if} \quad ۰<x<۱\\ ۲-x & \text{if} \quad ۱\leq x<۲\\ ۰ & \text{o.w}\end{cases}$$

تمرین ۱-۱۷. اگر X دارای تابع توزیع زیر باشد، تابع چگالی آن را بدست آورید و مقدار $\mathrm{P}(X > ۳)$ را محاسبه کنید.

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad x < ۰ \\ ۱ - (۱ + x)e^{-x} & \text{if} \quad x \geq ۰ \end{cases}$$

۲.۱ توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی

در آزمایش های تصادفی گاه تابعی از متغیر تصادفی مورد بررسی اهمیت ویژه ای دارد و لازم است آن را مورد مالعه قرار دهیم. برای مثال فرض کنید X میزان درآمد یک فرد در طول یکماه گذشته است و ما علاوه بر بررسی X نیاز داریم تفاوت درآمد افراد را با حقوق اعلام شده دولت مورد مطالعه قرار دهیم. در واقع اگر a حقوق اعلام شده دولت برای امسال بوده باشد $g(X) = X - a$ مورد توجه ما است. دقت کنید که هر تابع غیر ثابتی از هر متغیر تصادفی، یک متغیر تصادفی است. تعریف می کنیم $Y = g(X)$ و بنابراین می توان تابع چگالی و تابع توزیع Y را بدست آورد. متغیر تصادفی $Y = g(X)$ براساس پیوسته یا گسسته بودن متغیر تصادفی X، می تواند گسسته یا پیوسته باشد.

در حالتی که X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابع توزیع $Y = g(X)$ به سادگی می تواند طبق قضیه زیر از تابع چگالی X بدست آید.

قضیه ۱-۱۸. فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه گاه S_X و تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. همچنین فرض کنید $Y = g(X)$ یک متغیر تصادفی باشد بطوری که g یک تابع حقیقی است. در این صورت Y یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه گاه $S_Y = g(S_X)$ و تابع چگالی زیر است،

$$f_Y(y) = \sum_{x \in g^{-۱}(y) \cap S_X} f_X(x) \qquad y \in S_Y. \tag{۱-۱}$$

مثال ۱−۱۹. در مثال ۱−۴ تابع چگالی و تابع توزیع $[\frac{X}{۳}]+۱$ را بدست آورید.

حل: داریم $S_X=\{۲,۳,۴,\dots,۱۲\}$ و اگر تعریف کنیم $Y=g(X)=[X]+۱$ آنگاه $S_Y=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$. طبق (۱−۱) بدست می آوریم:

$$f_Y(۱)=f_X(۲)=\frac{۱}{۳۶}$$
$$f_Y(۲)=f_X(۳)+f_X(۴)+f_X(۵)=\frac{۹}{۳۶}$$
$$f_Y(۳)=f_X(۶)+f_X(۷)+f_X(۸)=\frac{۱۶}{۳۶}$$
$$f_Y(۴)=f_X(۹)+f_X(۱۰)+f_X(۱۱)=\frac{۹}{۳۶}$$
$$f_Y(۵)=f_X(۱۲)=\frac{۱}{۳۶}$$

y	۱	۲	۳	۴	۵
$f_Y(y)=\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۹}{۳۶}$	$\frac{۱۶}{۳۶}$	$\frac{۹}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

$$F_Y(y)=\mathrm{P}(Y\le y)=\begin{cases} ۰ & \text{if} \quad y<۱ \\ f_Y(۱)=\frac{۱}{۳۶} & \text{if} \quad ۱\le y<۲ \\ f_Y(۱)+f_Y(۲)=\frac{۱۰}{۳۶} & \text{if} \quad ۲\le y<۳ \\ f_Y(۱)+f_Y(۲)+f_Y(۳)=\frac{۲۶}{۳۶} & \text{if} \quad ۳\le y<۴ \\ f_Y(۱)+f_Y(۲)+f_Y(۳)+f_Y(۴)=\frac{۳۵}{۳۶} & \text{if} \quad ۴\le y<۵ \\ ۱ & \text{if} \quad ۵\le y \end{cases}$$

مثال ۱−۲۰. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع احتمال زیر باشد.

$$F_X(x)=\begin{cases} ۰ & \text{if} \quad x<۰ \\ x & \text{if} \quad ۰\le x<۱ \\ ۱ & \text{if} \quad x\ge ۱ \end{cases}$$

تابع چگالی $Y=X^۲$ را بدست آورید.

$$F_Y(y)=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(X^۲\le y)=\mathrm{P}(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$$
$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})=\begin{cases} \sqrt{y}-۰ & \text{if} \quad ۰\le y<۱ \\ ۱-۰ & \text{if} \quad y\ge ۱ \end{cases}$$

در نتیجه

$$F_Y(y) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad y < ۰ \\ \sqrt{y} & \text{if} \quad ۰ \leq y < ۱ \\ ۱ & \text{if} \quad y \geq ۱ \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{۱}{۲\sqrt{y}}, \qquad ۰ < y < ۱$$

حال فرض کنید X و $Y = g(X)$ هر دو متغیرهای تصادفی پیوسته باشند. برای بدست آوردن تابع چگالی Y، ابتدا تابع توزیع آن را به طور مستقیم و برحسب تابع توزیع X بدست می آوریم و سپس با مشتق گیری از تابع توزیع بدست آمده، تابع چگالی Y را برحسب تابع چگالی X محاسبه می کنیم.
به عبارت دیگر داریم،

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(g(X) \leq y) = \mathrm{P}(X \leq g^{-۱}(y)) = F_X(g^{-۱}(y))$$

و در نتیجه

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_X(g^{-۱}(y)).$$

مثال ۱-۲۱. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. تابع چگالی $g(X) = ۵X - ۴$ را بدست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۱۶}\sqrt{x} & \text{if} \quad ۰ < x < ۴ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

حل: واضح است که X یک متغیر تصادفی پیوسته بوده و بنابراین $Y = g(X)$ نیز یک متغیر تصادفی پیوسته است. داریم:

$$\begin{aligned} & F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(۵X - ۴ \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \frac{y+۴}{۵}) = F_X(\frac{y+۴}{۵}) \\ \Longrightarrow & f_Y(y) = F'_X(\frac{y+۴}{۵}) = \frac{۱}{۵} f_X(\frac{y+۴}{۵}) \\ & = \begin{cases} \frac{۳}{۸۰}\sqrt{\frac{y+۴}{۵}} & \text{if} \quad \left(۰ < \frac{y+۴}{۵} < ۴ \Longleftrightarrow -۴ < y < ۱۶\right) \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases} \end{aligned}$$