روش تکرار ساده (یا نقطهٔ ثابت)

در این روش معادلهٔ $f(x)=0$، به صورت: $x=g(x)$

نوشته می‌شود به‌طوری که α ریشهٔ هر دو معادله باشد. یعنی

$$f(\alpha)=0 \quad , \quad \alpha=g(\alpha)$$

(لازم به ذکر است که مجموعهٔ ریشه‌های دو معادله ممکن است یکسان نباشند ولی معادله تغییر یافته حتماً دارای ریشهٔ مورد نظر از $f(x)=0$ خواهد بود.)

سپس تقریبی از α مانند x_0، را اختیار و دنبالهٔ $\{x_n\}$ به طریق زیر ساخته می‌شود:

$$x_1=g(x_0)$$
$$x_2=g(x_1)$$
$$x_3=g(x_2)$$
$$\vdots$$

و به‌طور کلی $\quad (n=0\ ,\ 1, 2, \ldots) \qquad x_{n+1}=g(x_n),$

اکنون در مورد دنبالهٔ $\{x_n\}$ سؤالات زیر مطرح است:

الف) آیا دنبالهٔ $\{x_n\}$ همواره، یعنی به ازای هر انتخاب $g(x)$ و x_0، همگراست؟

ب) آیا همگرایی $\{x_n\}$ به انتخاب $g(x)$ بستگی دارد یا x_0 یا هر دو؟

ج) آیا قبل از محاسبهٔ جملات دنباله، می‌توان همگراییِ آن را پیش‌بینی کرد؟

در خصوص نحوه به دست آوردن تابع $g(x)$ به مثال زیر توجه کنید:

معادلهٔ $f(x)=x^2+x-1=0$ را می خواهیم به‌صورت $x=g(x)$ بنویسیم:

الف) اگر x^2-1 را به سمت راست ببریم خواهیم داشت:

$$x=1-x^2=g_1(x)$$

ب) اگر $x-1$ را به سمت راست ببریم داریم:

$$x^2=1-x \longrightarrow x=\pm\sqrt{1-x} \longrightarrow x=\sqrt{1-x}=g_2(x)$$

پ)

$$x(x+1)=1 \longrightarrow x=\frac{1}{x+1}=g_3(x)$$

ت) اگر به طرفین معادلهٔ اولیه ۲ + x اضافه کنیم خواهیم داشت:

$$x^{۲} + ۲x + ۱ = x + ۲ \longrightarrow (x+۱)^{۲} = x + ۲ \longrightarrow x + ۱ = \pm\sqrt{x+۲}$$

و در نتیجه:

$$x = \sqrt{x+۲} - ۱ = g_{۴}(x)$$

ث) معادلهٔ اولیه را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت (طرفین وسطین و ساده کنید):

$$x = \frac{x^{۲}+۱}{۲x+۱} = g_{۵}(x)$$

مشاهده می شود که نـوشتن $f(x) = ۰$ بـه صـورت $x = g(x)$ بـه روشهای مـختلف امکان‌پذیر است.

ساده ترین صورتهای ممکن عبارت‌اند از: $x = x + f(x)$, $x = x - f(x)$

اکنون برای پاسخگویی به سؤالات مطرح شده، جملات دنباله‌های حاصل از به‌کارگیریِ بعضی از $g(x)$ هایی که به‌دست آوردیم را حساب می‌کنیم:

(قبلاً متذکر می‌شویم که ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^{۲} + x - ۱ = ۰$ برابر است با: $\alpha = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲} = ۰/۶۱۸۰$)

فرض می‌کنیم $x_{۰} = ۰/۵$ و جدول ذیل را، باگرد کردن اعداد تا چهار رقم اعشار، تشکیل می‌دهیم:

x_n	$g_{۱}(x) = ۱ - x^{۲}$	$g_{۲}(x) = \sqrt{۱-x}$	$g_{۳}(x) = \frac{۱}{۱+x}$	$g_{۵}(x) = \frac{x^{۲}+۱}{۲x+۱}$
$x_{۰}$	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
$x_{۱}$	۰/۷۵	۰/۷۰۷۱	۰/۶۶۶۷	۰/۶۲۵
$x_{۲}$	۰/۴۳۷۵	۰/۵۴۱۲	۰/۶	۰/۶۱۸۱
$x_{۳}$	۰/۸۰۸۶	۰/۶۷۷۴	۰/۶۲۵	۰/۶۱۸۰
$x_{۴}$	۰/۳۴۶۲	۰/۵۶۸۰	۰/۶۱۵۴	
$x_{۵}$	۰/۸۸۰۲	۰/۶۵۷۳	۰/۶۱۹۰	
$x_{۶}$	۰/۲۲۵۲	۰/۵۸۵۴	۰/۶۱۷۶	
$x_{۷}$	۰/۹۴۹۲	۰/۶۴۳۹	۰/۶۱۸۲	
$x_{۸}$	۰/۰۹۹۰	۰/۵۹۶۸	۰/۶۱۸۰	
⋮		⋮		
$x_{۳۴}$		۰/۶۱۸۰		

توضیحات مربوط به جدول

الف) وقتی $x = 1 - x^2 = g_1(x)$ جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ از رابطهٔ زیر حساب می‌شوند

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2$$

مشاهده می‌شود که x_0 هر عددی در $[0,1]$ اختیار شود دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا نیست.

از این‌رو، همگرایی $\{x_n\}$ کاملاً به $g(x)$ بستگی دارد.

ب) برای $x = \sqrt{1 - x} = g_2(x)$ مشاهده می‌شود که همگرایی بسیار کند است. پس از ۳۴ تکرار به تقریب ۰/۶۱۸۰ رسیده‌ایم.

برای همین $g_2(x)$ اگر $x_0 = 0$ یا $x_0 = 1$ دنباله‌های زیر حاصل می‌شوند که هر دو واگرا هستند.

$x_0 = 0$	$x_0 = 1$
$x_1 = 1$	$x_1 = 0$
$x_2 = 0$	$x_2 = 1$
$x_3 = 1$	$x_3 = 0$
$\vdots$	$\vdots$

یعنی، با تغییر مقدار اولیه x_0 دنبالهٔ $\{x_n\}$ ممکن است واگرا شود. بنابراین،

همگرایی $\{x_n\}$ به انتخاب x_0 نیز بستگی دارد.

پ) برای $x = \dfrac{1}{x+1} = g_3(x)$ مشاهده می‌شود که پس از ۸ تکرار به تقریبی با چهار رقم اعشار درست می‌رسیم. در نتیجه، سرعت همگرایی به انتخاب $g(x)$ بستگی دارد.

ستون آخر جدول نشان می‌دهد که $g_5(x)$ بهترین انتخاب است، پس از سه تکرار به جواب ۰/۶۱۸۰ رسیده‌ایم.

اکنون به تعیین خصوصیات یک $g(x)$ مناسب و همچنین محدودهٔ x_0 می‌پردازیم.

قضیه

اگر g تابعی بر $[a,b]$ بتوی $[a,b]$ باشد و در این بازه $|g'(x)| \leq L < 1$

آنگاه معادلهٔ $x = g(x)$ تنها یک ریشه دارد، که متعلق به $[a,b]$ است.

برهان: فرض می‌کنیم $h(x) = g(x) - x$

کافی است ثابت کنیم معادلهٔ $h(x) = 0$ فقط یک ریشه دارد.

ابتدا ثابت می‌کنیم این معادله ریشه دارد. چون تابع g در [a,b] مشتق دارد پس پیوسته است.

بنابراین، تابع h پیوسته است .

ضمناً داریم : $h(a) = g(a) - a$

چون تابع g از [a,b] بتوی [a,b] است: $g(a) \in [a,b]$

که از آن نتیجه می‌شود $a \le g(a)$، در نتیجه $g(a) - a \ge 0$. پس، $h(a) \ge 0$

به طریقی مشابه نتیجه می‌شود که: $h(b) \le 0$

اگر $h(a) = 0$ یا $h(b) = 0$، به ترتیب ، a یا b ریشهٔ $h(x) = 0$ است.

در غیر این صورت: $h(a) \neq 0 \quad , \quad h(b) \neq 0$

پس، $h(a)\, h(b) < 0$

اما بنابر قضیه زیر، عددی چون c هست که $a < c < b$ و $h(c) = 0$.

قضیه

اگر f تابعی بر [a,b] و در هر نقطهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد، آنگاه η ی از (a,b) هست که

$$f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - a)$$

اکنون ثابت می‌کنیم که معادلهٔ $x = g(x)$ بیش از یک ریشه ندارد.

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم $\alpha \neq \beta$ متعلق به [a,b] باشند و $\alpha = g(\alpha)$, $\beta = g(\beta)$

در نتیجه،

$$\alpha - \beta = g(\alpha) - g(\beta) = g'(\eta)(\alpha - \beta) \ , (\text{بین } \alpha \text{ و } \beta \ \eta)$$

چون $\eta \in [a,b]$ داریم $|g'(\eta)| \le L < 1$ ، در نتیجه

$$|\alpha - \beta| \le L\,|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$$

یعنی $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$ که غیرممکن است. با این تناقض فرض خلف باطل است و معادلهٔ $x = g(x)$ فقط یک ریشه دارد.

قضیه

با شرایط قضیهٔ قبل، به ازای هر x_0 از [a,b] دنبالهٔ $\{x_n\}$ با ضابطه: $x_{n+1} = g(x_n)$

به تنها جواب معادلهٔ $x = g(x)$ همگراست.

برهان

چون g تابعی بر $[a,b]$ بتوی $[a,b]$ است و $x_0 \in [a,b]$ همواره $x_n \in [a,b]$. ضمناً، بنابر قضیهٔ قبل، $\alpha \in [a,b]$. (α را ریشهٔ $x=g(x)$ فرض کرده‌ایم). از این‌رو،

$$x_{i+1} - \alpha = g(x_i) - g(\alpha) = g'(\eta_i)(x_i - \alpha) \quad , \quad (\eta_i \text{ بین } \alpha \text{ و } x_i)$$

در نتیجه:

$$|x_{i+1} - \alpha| = |g'(\eta_i)|\,|x_i - \alpha|$$

چون، $\eta_i \in [a,b]$ داریم $|g'(\eta_i)| \leq L$. پس، $|x_{i+1} - \alpha| \leq L\,|x_i - \alpha|$

نامساوی فوق را به ازای $i = 0, 1, \ldots, n-1$ می‌نویسیم:

$$\begin{array}{ll}
i = 0: & |x_1 - \alpha| \leq L|x_0 - \alpha| \\
i = 1: & |x_2 - \alpha| \leq L|x_1 - \alpha| \\
i = 2: & |x_3 - \alpha| \leq L|x_2 - \alpha| \\
\vdots & \vdots \\
i = n-2: & |x_{n-1} - \alpha| \leq L\,|x_{n-2} - \alpha| \\
i = n-1: & |x_n - \alpha| \leq L\,|x_{n-1} - \alpha|
\end{array}$$

از ضرب عضو به عضو نامساویهای بالا، و حذف جملات متساوی از طرفین، نتیجه می‌گیریم:

$$|x_n - \alpha| \leq L^n\,|x_0 - \alpha|$$

چون $0 \leq L < 1$، $\lim_{n\to\infty} L^n = 0$

و چون همواره $0 \leq |x_n - \alpha|$، در نتیجه، $\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$

ضمناً، سرعت همگرایی $\{x_n\}$ به α متناسب با سرعت همگرایی $\{L^n\}$ به صفر است.
هرچه L به صفر نزدیکتر باشد سرعت همگرایی تندتر و هرچه L به یک نزدیکتر باشد سرعت همگرایی کندتر خواهد بود. پس L نقش تعیین کننده دارد.

در عمل برای تشخیص مناسب بودن تابع g، ابتدا $g'(x)$ را به دست می‌آوریم و سعی می‌کنیم یک همسایگی از α پیدا کنیم که در آن شرط $|g'(x)| \leq L < 1$

برقرار باشد (توجه کنید که α معلوم نیست، ولی همیشه می‌توان یک همسایگی از α یافت).

البته ممکن است نتوان چنین همسایگی پیدا کرد که در این صورت نمی‌توان نتیجه گرفت که دنبالهٔ $\{x_n\}$ واگراست، زیرا شرط فوق یک شرط کافی است؛ توصیه می‌شود که از $g(x)$ استفاده نشود.

ضمناً شرط اینکه g تابعی بر [a,b] بتوی [a,b] باشد نیز باید تحقیق شود.

مثالهای زیر نحوهٔ تشخیص مناسب بودن g و تعیین L را روشن می‌کنند و نشان می‌دهند که چگونه می‌توان قبل از محاسبهٔ جملات $\{x_n\}$ سرعت همگرایی آن را پیش بینی کرد.

مثال

برای تعیین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2 + x - 1 = 0$ که در بازهٔ $I = [0/5 , 1]$ قراردارد، به روش تکرار ساده، $g(x)$ های زیر را انتخاب می‌کنیم.

مناسب بودن یا نبودن هریک و بازه‌ای که x_0 می‌تواند از آن انتخاب شود را تعیین کنید.

الف) $g_1(x) = 1 - x^2$

واضح است که: $g'_1(x) = -2x$ و اگر $x \in I$ آن‌گاه: $|g'_1(x)| = 2x \geq 1$

بنابراین، بهتر است از $g_1(x)$ استفاده نکنیم، در واقع x_0 هر عضو I باشد $\{x_n\}$ واگراست.

ب) $g_2(x) = \sqrt{1-x}$

چون $g'_2(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ داریم: $|g'_2(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

و اگر x نزدیک ۱ باشد، مخرج کسر کوچک و لذا کسر بزرگ خواهد شد. پس $|g'_2(x)|$ می‌تواند بسیار بزرگ شود. ولی بر اساس جدول عملکرد توابع تکرار می دانیم که $g_2(x)$ مناسب است. پس باید همسایگی α کمی تنگ‌تر اختیار شود. به تحقیق معلوم می‌شود

$$\alpha \in [0/51 , 0/7]$$

$$|g'_2(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1-0/7}} \simeq 0/91 < 1$$

بنابراین $L = 0/91$، پس $g_2(x)$ مناسب است. اما، چون L نزدیک عدد یک است همگرایی کندتر است. در واقع هرچه L به عدد یک نزدیک تر باشد همگرایی کندتر و هرچه به صفرنزدیک تر باشد، همگرایی سریع تر است.

ج) $g_3(x) = \frac{1}{x+1}$

در این حالت، $g'_3(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ و اگر $x \in [0/51 , 0/7]$

$$|g'_3(x)| = \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{(0/5+1)^2} = \frac{1}{2/25} < 1$$

مشاهده می‌شود که نه فقط $g_3(x)$ مناسب است بلکه L هم، یعنی $\frac{1}{2/25} = 0/43$ به صفر نزدیکتر است تا به یک، در نتیجه انتظار می‌رود که همگرایی $\{x_n\}$ نسبتاً تند باشد.

مثال

برای تعیین تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $۳xe^x - ۱ = 0$، با استفاده از روش تکرار ساده داریم:

معادله را به شکل $x = \frac{e^{-x}}{۳}$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم $g(x) = \frac{e^{-x}}{۳}$.

به سادگی معلوم است که ریشهٔ معادلهٔ در $(۰, ۱)$ قرار دارد و g تابعی بر $(۰, ۱)$ بتوی $(۰, ۱)$ است.

در ضمن

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{۳}$$

و اگر $x \in (۰, ۱)$ داریم:

$$|g'(x)| = \frac{e^{-x}}{۳} < \frac{e^{۰}}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

در اینجا $L = \frac{۱}{۳}$ که کوچکتر از یک است و $g(x)$ مناسب است. در نتیجه، دنبالهٔ $\{x_n\}$ به ازای هر $x_۰$ از $(۰, ۱)$ همگراست.

با استفاده از $x_۰ = ۰/۵$ و رابطهٔ $x_{n+۱} = \frac{e^{-x_n}}{۳}$ جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به قرار زیر هستند:

$$x_۱ = ۰/۲۰۲۲$$
$$x_۲ = ۰/۲۷۲۳$$
$$x_۳ = ۰/۲۵۳۹$$
$$x_۴ = ۰/۲۵۸۶$$
$$x_۵ = ۰/۲۵۷۴$$
$$x_۶ = ۰/۲۵۷۷$$
$$x_۷ = ۰/۲۵۷۶$$
$$x_۸ = ۰/۲۵۷۶$$

لذا، جواب تا چهار رقم اعشار درست ۰/۲۵۷۶ است.