تمرینات مبانی ریاضی: سورها، سری اول

گزاره‌های زیر را برحسب نمادهای $\forall$ و $\exists$ و $p(x)$ (گزاره نما)بنویسید.
توجه داشته باشید ابتدا باید عالم سخن را مشخص نمایید و بعد خاصیت مورد نظر را به صورت «سور» بنویسید.

۱. هر عدد اول فقط و فقط یک مقسوم علیه بزرگتر از یک دارد.

حل: عالم سخن اعداد طبیعی

$$(\forall n)(n \text{ اول است} \iff (\exists! d)(d > 1 \wedge d \mid n)$$

یا می توان عالم سخن را فقط اعداد اول گرفت و نوشت

$$(\forall p)(\exists! d)(d > 1 \wedge d \mid p).$$

$\square$

۲. برخی ماتریس های 3×3 با درایه های در $\mathbb{R}$ وارون پذیر است.

حل: عالم سخن ماتریس های 3×3 با درایه های در $\mathbb{R}$

$$\mathscr{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(\exists M)(\exists M')(M \cdot M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$\square$

۳. برخی ماتریس های $n \times n$ با درایه های در $\mathbb{R}$ وارون پذیرند.

حل: صورت سوری این مسأله، شبیه مسأله ۲ نوشته می شود. $\square$

۴. هر عدد اول یا زوج است یا فرد.

حل: عالم سخن اعداد اول.

$$(\forall p)(p = 2 \vee p \equiv 1 \mod 2)$$

اگر عالم سخن را اعداد طبیعی بگیریم، روایت سوری عبارت فوق به صورت زیر است

$$p \text{ اول است} \iff p = 2 \vee (\exists k)(p = 2k + 1 \wedge \mathrm{Div}(p) = \{1, p\})$$

در این جا $\mathrm{Div}(p)$ مجموعه مقسوم علیه های p است. $\square$

۵. مجموع دو عدداول فرد بر ۲ بخش پذیر است.

حل: عالم سخن: مجموعه اعداد اول فرد

$$(\forall p)(\forall p')(2 \mid p + p')$$

اگر عالم سخن مجموعه اعداد طبیعی باشد آنگاه

$$(\forall p)(\forall p')(\exists k)(\exists k')[(p=۲k+۱\wedge \mathrm{Div}(p)=\{۱,p\})\wedge(p'=۲k'+۱\wedge \mathrm{Div}(p')=\{۱,p'\}]\Longrightarrow ۲\mid p+p')$$

$\square$

۶. مربع هر عدد صحیح باقیمانده تقسیم بر ۳ اش برابر ۰ یا ۱ است.

حل: عالم سخن: مجموعه اعداد صحیح

$$(\forall n)(n^۲\equiv ۰(\mod ۳)\vee n^۲\equiv ۱(\mod ۳))$$

$\square$

۷. در هندسه اقلیدسی، هر زاویه خارجی یک مثلث از زاویه داخلی غیر مجاور با آن بزرگتر است.

۸. در هندسه اقلیدسی،در هرمثلث متساوی الاضلاع، هر سه زاویه اش قابل انطباق اند.

۹. در هر مثلث ارتفاع ها هم رسند

۱۰. هر عدد اول به صورت $۴k+۱$ را می توان به صورت $x^۲+y^۲$ نوشت، که x,y اعدادی طبیعی اند.

حل: عالم سخن: مجموعه اعداد طبیعی

$$(\forall p)(\exists k)(\exists x)(\exists y)[(\mathrm{Div}(p)=\{۱,p\})\wedge(p=۴k+۱)\wedge(p=x^۲+y^۲)]$$

$\square$

۱۱. هیچ عدد اولی به صورت $۴k+۱$ را نمی توان به صورت $x^۲+y^۲$ نوشت که x,y اعدادی طبیعی اند.

حل: عالم سخن: مجموعه اعداد طبیعی

$$(\nexists p)(\exists k)(\exists x)(\exists y)[(\mathrm{Div}(p)=\{۱,p\})\wedge(p=۴k+۱)\wedge(p=x^۲+y^۲)]$$

$\square$

۱۲. هر عدد طبیعی را می توان به صورت یکتایی به شکل حاصل ضربی از اعداد اول نوشت.

$$(n)(\exists p_۱)(\cdots)(\exists p_m)(\exists \alpha_۱)(\cdots)(\exists \alpha_m)(n=p_۱^{\alpha_۱}\ldots p_m^{\alpha_m})$$

۱۳. به ازای هر $n\geq ۱$، عدد اولی چون p وجود دارد به طوری که $n\leq p\leq ۲n$.
توضیح: این گزاره همواره درست است و به اصل بِرتران (Bertrand's Postulate) معروف است.

$$(\forall n)(\exists p)[(n>۱)\wedge(\mathrm{Div}(p)=\{۱,p\})\wedge(n\leq p\leq ۲n)].$$

۱۴. اگر n شیٔ در r جعبه، که $r<n$، باشد، آنگاه دست کم یکی از جعبه‌ها حاوی بیش از یک شیٔ است.

حل: عالم سخن: برایاین ککه بتوانیم مسأله را به صورت ریاضی درآوریم، اشیاء را با اعداد ۱ تا n برچسب گذاری می کنیم و با $T=\{1,2,\dots,n\}$ نشان می دهیم. جعبه ها را نیز با اعداد ۱ تا r برچسب گذاری می کنیم و با B_i نمایش می دهیم. این که کلیه اعداد ۱ تا n را در جعبه های B_1 تا B_r قرار می دهیم به این معناست که

$$\begin{aligned}
B_1 =&\{1,2,\dots,j_1\}\\
B_2 =&\{j_1+1,j_1+2,\dots,j_2\},\ j_2>j_1\\
\vdots =& \qquad \vdots\\
B_r =&\{j_{r-1}+1,j_{r-1}+2,\dots,j_r=n\},\quad n>j_{r-1}\\
\{1,2,\dots,n\} =&\{1,2,\dots,j_1\}\cup\{j_1+1,j_1+2,\dots,j_2\}\cup\dots\cup\{j_{r-1}+1,j_{r-1}+2,\dots,j_r=n\}\\
T =&B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_d
\end{aligned}$$

با توجه به نحوه نوشتن عناصر هر مجموعه B_s روشن است که تعداد عناصر مجموعه B_s برابر است با $j_s-j_{s-1}\geq 0$.

با این تغییر در علامت گزاری می توان اصل لانه کبوتری را به صورت زیر نوشت

$$(\forall n)(\forall r)(n>r)\Longrightarrow(\exists k)(1\leq k\leq r)\wedge(j_k-j_{k-1}\geq 1)$$

$\square$

توضیح: همان طور که می دانید این حکم به «اصل لانه کبوتری (Pigeon Hole) » موسوم است.

شکل دیگر این اصل به این صورت است که فرض کنیم n,m,d سه عدد صحیح مثبت باشند و اگر n شئی وجود داشته باشند که باید در m جعبه قرار گیرند و $md<n$ آنگاه حداقل یک جعبه وجود دارد به طوری که $d+1$ شئی در آن وجود دارد.

سور مربوط به این روایت از اصل لانه کبوتری را بنویسید.

ب) نقیض هر یک از گزاره های زیر را بنویسید.

۱. حد دنباله $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد $\mathbb{R}$ یکتاست.

حل: می دانیم

$$\text{همگراست}\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ \text{دنباله}\Longrightarrow(\exists!\ell)(\lim_{n\longrightarrow\infty}u_n=\ell)$$

این گزاره به صورت $p\Longrightarrow q$ یا به طور معادل $\sim p\vee q$ است. پس نقیض آن $\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge\sim q$ است. بنابراین

$$\begin{aligned}
&\text{همگراست}\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ \text{دنباله}\wedge\sim[(\exists!\ell)(\lim_{n\longrightarrow\infty}u_n=\ell)]\\
&\text{همگراست}\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ \text{دنباله}\wedge[(\nexists!\ell)(\lim_{n\longrightarrow\infty}u_n\neq\ell)]
\end{aligned}$$

$\square$

۲. دنباله $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد $\mathbb{R}$ همگراست.

حل: فرض کنیم $\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = \ell$.

$$\text{همگراست}\quad \{u_n\}_{n\in BN}\quad \text{دنباله} \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon)(\exists N)(\forall n)(n\geq N \Longrightarrow\mid u_n-\ell\mid<\varepsilon)$$

نقیض این هم ارزی به صورت زیر است

$$\text{نیست همگرا}\quad \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\quad \text{دنباله} \Longleftrightarrow (\exists\varepsilon)(\forall N)(\exists n)(n\geq N\wedge\mid u_n-\ell\mid\geq\varepsilon)$$

□

۳. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ یکنواست

توضیح: تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را افزایشی گوییم هرگاه برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ با $x\geq y$، $f(x)\geq f(y)$ و تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را کاهشی گوییم هر گاه برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ آنگاه $f(x)\leq f(y)$. تابع f را یکنوا گوییم هرگاه f یا افزایشی باشد یا کاهشی.

حل: فرض کنیم $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی افزایشی باشد

$$(\forall x)(\forall y)(x\geq y\Longrightarrow f(x)\geq f(y))$$

که نقیض آن، با توجه به هم ارزی $p\longrightarrow q\equiv\sim p\vee q$ برای عبارت داخل پرانتز، به صورت زیر می شود.

$$(\exists x)(\exists y)(x\geq y\wedge f(x)<f(y))$$

برای تابع کاهشی نیز به ترتیبی مشابه عمل می شود.

فرض کنیم $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{B}$ تابعی کاهشی باشد

$$(\forall x)(\forall y)(x\leq y\Longrightarrow f(x)\leq f(y))$$

که نقیض آن، با توجه به هم ارزی $p\longrightarrow q\equiv\sim p\vee q$ برای عبارت داخل پرانتز، به صورت زیر می شود.

$$(\exists x)(\exists y)(x\leq y\wedge f(x)>f(y))$$

□

پ) سورهای زیر را به صورت نمادین بنویسید

۱. حاصل ضرب هر دو عدد متخلط یک عدد مختلط است.

حل: عالم سخن اعداد مختلط

$$(\forall z)(\forall z')(z\cdot z'\in\mathbb{C})$$

□

۲. حاصل جمع هر دو عدد مختلط یک عدد مختلط است.

حل: عالم سخن اعداد مختلط

$$(\forall z)(\forall z')(z+z'\in\mathbb{C})$$

□

۳. مجموع زوایای یک مثلث برابر ۱۸۰° است.

حل: عالم سخن مثلث های صفحه.

$$(\forall\triangle ABC)(\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C=۱۸۰^\circ)$$

□

۴. در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر مجموع دوزاویه غیر مجاور آن است.

حل: عالم سخن مثلث های صفحه. این قضیه برای هرزاویه خارجی مثلث برقرا است. برای پرهیز از تکرار موارد مشابه، فرض کنیم زاویه های مثلث ABC با x,y,z نمایش داده شوند. در این صورت

$$(\forall\triangle ABC)(\forall x)(۱۸۰^\circ-x>y\wedge ۱۸۰^\circ-x\circ>z)$$

□

۵. در هر مثلث متساوی الساقین، دوزاویه مجاور به دوساق برهم قابل انطباقند.

حل: عالم سخن: مثلث های صفحه. (توجه: نشان $\cong$ به معنای قابل انطباق است و معنای آن وسیع تر از تساوی است.)

$$(\forall\triangle ABC)((AB\cong AC\Longrightarrow\sphericalangle B\cong\sphericalangle C)$$

□

۶. در هر مثلث متساوی الاضلاع، هر سه ضلع بریکدیگر قابل انطباق اند.

حل: عالم سخن مثلث های متساوی الاضلاع واقع در صفحه

$$(\forall\triangle ABC)(AB\cong AC\cong BC)$$

□

۷. از یک نقطه خارج یک خط فقط و فقط یک خط به موازات آن خط می توان رسم کرد.

۸. از یک نقطه خارج یک خط فقط و فقط یک خط می توان برخط دیگر عمود رسم کرد.

۹. در مجموعه اعداد صحیح، برای هر عدد صحیح m و هر عدد غیر صفر n یک وفقط یک r و q وجود دارند به طوری که $m=nq+r$.

۱۰. هر عدد طبیعی بزرگتر از یک دارای لااقل یک مقسوم علیه اول است.

حل: عالم سخن: مجموعه اعداد طبیعی.

$$(\forall n)(\exists d)(n>۱\Longrightarrow \mathrm{Div}(d)=\{۱,d\}\wedge d\mid n)$$

□

۱۱. برای هر دو عدد طبیعی بزرگتر از یک مانند m,n، لااقل یک عدد طبیعی ، مانند d وجود دارد به طوری که هم m بر d بخش پذیر است و هم n بر d بخش پذیر است.

حل: عالم سخن: مجموعه اعداد طبیعی

$$(\forall m)(\forall n)(\exists d)(d \mid m \wedge d \mid n)$$

□

۱۲. برای هر دوعدد طبیعی m,n یک عدد طبیعی مانند ℓ وجود دارد به طوری که ℓ هم بر m بخش پذیر است و هم بر n.

حل: عالم سخن: مجموعه اعداد طبیعی.

$$(\forall m)(\forall n)(\exists \ell)(m \mid \ell \wedge n \mid \ell)$$

□

۱۳. هرگاه برای هردوعدد گویا مانند r,s داشته باشیم $rs = ۰$ آنگاه لااقل یکی از دو عامل r یا s برابر صفرند.

حل: عالم سخن مجموعه اعداد گویا

$$(\forall p)(\forall q)(pq \Longrightarrow p = ۰ \vee q = ۰)$$

□

۱۴. هر تابع پیوسته $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه از دامنه اش دارای حد است.

۱۵. هر تابع مشتق پذیر $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه (a,b) پیوسته است.

حل: عالم سخن: مجموعه توابع مشتق پذیر از مجموعه (a,b) در $\mathbb{R}$.

$$(\forall f)(\forall x)(\forall c)(c \in (a,b) \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow c} f(x) = \ell)$$

□

۱۶. مجموع هر دوتابع پیوسته از (a,b) در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۷. حاصل ضرب هر دوتابع پیوسته از (a,b) در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۸. در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بروتر برابر نصف وتر است.

۱۹. در هرمثلث، هر سه ارتفاع آن همرس اند.

۲۰. در هر مثلث میانه های آن همرسند.

حل: عالم سخن:مجموعه مثلث های واقع در صفحه.

$$(\forall \triangle ABC)(\exists AM)(\exists BN)(\exists CS)(\exists P)([MB \cong MC] \wedge [NA \cong NC] \wedge [SA \cong SB] \Longrightarrow P \in AM \cap BN \cap CS)$$

□

۲۱. در هر مثلث، عمود منصف های هر سه ضلع مثلث همرس اند.

۲۲. از هر دونقطه متمایز یک صفحه، یک و فقط یک خط می گذرد.

۲۳. روی هر پاره خط یک و فقط یک نقطه وجود دارد که از دوسر آن به یک فاصله است.

۲۴. برای هر عدد حقیقی مثبت a یک عدد حقیقی مانند x وجود دارد به طوری که $x^{۲} = a$.

۲۵. برای هر عدد مثبت a و هر عدد طبیعی n یک عدد حقیقی مانند x وجود دارد به طوری که $x^n = a$.
حل: عالم سخن: مجموعه اعداد حقیقی

$$(\forall a)(\forall n)(\exists x)(n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x^n = a)$$

□

۲۶. مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی محاطی برابر ۲π است.

۲۷. مجموع زوایای داخلی هر پنج ضلعی محاطی برابر ۳π است.

۲۸. مجموع زوایای داخلی هر شش ضلعی محاطی برابر ۴π است.

۲۹. مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محاطی برابر $(n-۲)\pi$ است.

۳۰. هر چهار ضلعی یک لوزی است.
حل: عالم سخن: چهار ضلعی های واقع در صفحه. (روشن است که همه چهار ضلعی ها لوزی نیستند بلکه برخی از آنها لوزی هستند. بنابراین این سور درست نیست. نوشتن آن فقط برای دقت در به کار گرفتن عالم سخن و استفاده از سور مناسب بوده است).

$$(\forall\ \square ABCD)(\measuredangle A \cong \measuredangle B \cong \measuredangle C \cong \measuredangle D)$$

□

۳۱. هر مثلث دارای یک دایره محیطی است.

۳۲. هرگاه عدد طبیعی a عدد طبیعی b را عاد کند و عدد طبیعی b عدد طبیعی c را عاد کند آنگاه a عدد c را عاد خواهد کرد.

۳۳. هرگاه برای هر دوعدد حقیقی a, b، $a^{۲} + b^{۲} = ۰$ آنگاه $a = b = ۰$.

۳۴. هرگاه $a^{۲} + b^{۲} > ۰$ آنگاه لااقل یکی از اعداد a یا b مخالف صفراند.

۳۵. برای هردوعدد صحیح a, b با شرط $a \geq b$ و هر عدد طبیعی c، $ac \geq bc$.
حل: عالم سخن: مجموعه اعداد صحیح

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)(c \in \mathbb{N} \Longrightarrow ac \geq bc)$$

□

۳۶. **(خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی)** برای هر عدد حقیقی مثبت x یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $nx > ۱$.

حل: عالم سخن: مجموعه اعداد حقیقی مثبت

$$(\forall x)(\exists n)(n \in \mathbb{N} \wedge nx > ۱)$$

□