تمرینات مبانی ریاضی: سورها

مطالبی را که درباره گزاره نماها بیان کردیم، می توان در جدول زیر خلاصه کرد.

شماره	حکم	چه موقع راست است	چه موقع ناراست است
۱	$(\exists x)(p(x))$	برای حد اقل یک a در عالم سخن $p(a)$ راست است	برای هرa در عالم سخن راست نیست
۲	$(\forall x)(p(x))$	برای هر مقدار a در عالم سخن $p(a)$ راست است	حداقل یک a در عالم سخن وجود دارد که $p(a)$ راست نیست
۳	$(\exists x)(\sim p(x))$	برای حداقل یک انتخاب a از عالم سخن $p(a)$ ناراست است پس $\sim p(a)$ راست است	برای هر مقدار a از عالم سخن $p(a)$ راست است
۴	$(\forall x)(\sim p(x))$	برای هرمقدار a از عالم سخن، $p(a)$ ناراست است و نقیض آن $\sim p(a)$ راست است	حداقل یک مقدار a وجود دارد که به ازای آن $p(a)$ ناراست است و $\sim p(a)$ راست است.

نقیض سورها:

$$\sim (\forall x)(p(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\sim p(x));$$
$$\sim (\exists x)(p(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\sim p(x));$$
$$\sim (\forall x)(\sim p(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(p(x));$$
$$\sim (\exists x)(\sim p(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(p(x)).$$

نقیض سورهای زیر را بنویسید:
۱) به ازای برخی اعضای $\mathbb{N}$ عدد $۲x - ۱$ فرد است.
۲) به ازای برخی اعضای $\mathbb{N}$، $n^۲ + n + ۴۱$ یک عدد اول است.
یک گزاره نما ممکن است بیش از یک سور داشته باشد. به عنوان مثال برای عالم سخن مانند $\mathbb{Z}$ می توان سورهای زیر را بیان کرد.

$$(\forall y)(\forall x)(x + y = y + x);$$
$$(\exists e)(\forall x)(x + e = e + x = x);$$
$$(\forall x)(\exists x')(x + x' = e);$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x + y) + z = x + (y + z)];$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(p(x, y, z)).$$

اگر عالم سخن برابر $\mathbb{N}$ باشد آیا بازهم این گزاره نماها، گزاره هایی درست هستند؟

۳) فرض کنید عالم سخن مجموعه اعداد صحیح باشد. آنگاه مجموعه نقاطی از عالم سخن را بیابید که گزاره نمای زیر را تبدیل به سور بکنند.

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad \text{به طوری که} \quad x + y = ۶.$$

مجموعه جواب ها گزاره نما را تبدیل به سور عمومی می کند یا سور وجودی؟
توجه: وقتی یک سور شامل سورهای وجودی و هم سورهای عمومی است، ترتیب نوشتن علامت سورها بسیار مهم است و باید در ترتیب نوشتن سورها دقت کرد.

مثال ۱.۰.۰. سور $(\forall x)(\exists y)(x+y=17)$ به این معناست که مقدار x دلخواه است و مقدار y وابسته به مقدار x درحالی که سور $(\forall y)(\exists x)(x+y=17)$ می‌گوید مقدار y دلخواه است و مقدار x پس از انتخاب مقدار y، می تواند از روی رابطه فوق تعیین شود.

برای پیدا کردن نقیض یک گزاره نما که شامل چندین متغیر است، همانند سورهایی که شامل فقط یک متغییرند می توان عمل کرد.

مثال ۲.۰.۰. می دانیم تابع $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ را درنقطه $x_0\in(a,b)$ دارای حد ℓ گویند هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ بتوان یافت به طوری که برای هر x با شرط $\delta >|\ x-x_0\ |$ نتیجه شود $\varepsilon>|\ f(x)-\ell\ |$. به عبارت دیگر

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ \text{به طوری که}\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_o\}\Longrightarrow|\ f(x)-\ell\ |<\varepsilon.$$

به زبان نمادین تعریف فوق را می توان به صورت زیر نوشت

$$(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(0<|\ x-x_0\ |<\delta\Longrightarrow|\ f(x)-\ell\ |<\varepsilon),$$

حال نقیض گزاره فوق به معنای این است که تابع f در نقطه x_0 دارای حدی برابر ℓ نیست. ابتدا صورت هم ارز گزاره نمای فوق را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(0<|\ x-x_0\ |<\delta\Longrightarrow|\ f(x)-\ell\ |<\varepsilon),\\ \equiv\ &(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(\sim(0<|\ x-x_0\ |<\delta)\vee|\ f(x)-\ell\ |<\varepsilon).\end{aligned}$$

حال نقیض گزاره دوم عبارت است از

$$\begin{aligned}\sim\ &(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(\sim(0<|\ x-x_0\ |<\delta)\vee|\ f(x)-\ell\ |<\varepsilon),\\ \equiv\ &(\exists\varepsilon)(\forall\delta)(\exists x)(0<|\ x-x_0\ |<\delta\wedge|\ f(x)-\ell\ |\geq\varepsilon).\end{aligned}$$

تمرین ۱.۰.۰. فرض کنید $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع باشد که در $x_0\in(a,b)$ پیوسته است. اولاً همانند بالا، تعریف سوری پیوسته بودن تابع f در نقطه x_0 را بنویسید و سپس نقیض این سور را نیز بنویسید.

تمرینات مبانی ریاضی: سورها، سری اول

گزاره‌های زیر را برحسب نمادهای $\forall$ و $\exists$ و $p(x)$ (گزاره نما)بنویسید.

۱. هر عدد اول فقط و فقط یک مقسوم علیه بزرگتر از یک دارد.

۲. برخی ماتریس های 3×3 با درایه های در $\mathbb{R}$ وارون پذیر است.

۳. برخی ماتریس های $n\times n$ با درایه های در $\mathbb{R}$ وارون پذیرند.

۴. هر عدد اول یا زوج است یا فرد.

۵. مجموع دو عدداول فرد بر ۲ بخش پذیر است.

۶. مربع هر عدد صحیح باقیمانده تقسیم بر ۳ اش برابر ۰ یا ۱ است.

۷. در هندسه اقلیدسی، هر زاویه خارجی یک مثلث از زاویه داخلی غیر مجاور با آن بزرگتر است.

۸. در هندسه اقلیدسی،در هرمثلث متساوی الاضلاع، هر سه زاویه اش قابل انطباق اند.

۹. در هر مثلث ارتفاع ها هم رسند

۱۰. هر عدد اول به صورت $۴k + ۱$ را می توان به صورت $x^۲ + y^۲$ نوشت، که x, y اعدادی طبیعی اند.

۱۱. هیچ عدد اولی به صورت $۴k + ۱$ را نمی توان به صورت $x^۲ + y^۲$ نوشت که x, y اعدادی طبیعی اند.

۱۲. هر عدد طبیعی را می توان به صورت یکتایی به شکل حاصل ضربی از اعداد اول نوشت.

$$(n)(\exists p_۱)(\cdots)(\exists p_m)(\exists \alpha_۱)(\cdots)(\exists \alpha_m)(n = p_۱^{\alpha_۱} \dots p_m^{\alpha_m})$$

۱۳. به ازای هر $n \geq ۱$، عدد اولی چون p وجود دارد به طوری که $n \leq p \leq ۲n$.
توضیح: این گزاره همواره درست است و به اصل برتران (Bertrand's Postulate) معروف است.

$$(\forall n)(\exists p)[(n > ۱) \wedge (n \leq p \leq ۲n)].$$

۱۴. اگر n شئ در r جعبه، که $r < n$، باشد، آنگاه دست کم یکی از جعبه‌ها حاوی بیش از یک شئ است.
توضیح: همان طور که می دانید این حکم به اصل لانه کبوتری (Pigeon Hole) موسوم است.

ب) نقیض هر یک ازگزاره های زیر را بنویسید.

۱. حد دنباله $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد $\mathbb{R}$ یکتاست.

۲. دنباله $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد $\mathbb{R}$ همگراست.

۳. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یکنواست
توضیح: تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را یکنوا گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ با $x \geq y$، $f(x) \geq f(y)$ و تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را کاهشی گوییم هر گاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ آنگاه $f(x) \leq f(y)$. تابع f را یکنوا گوییم هرگاه f یا افزایشی باشد یا کاهشی.

پ) سورهای زیر را به صورت نمادین بنویسید

۱. حاصل ضرب هر دو عدد متخلط یک عدد مختلط است.

۲. حاصل جمع هر دو عدد مختلط یک عدد مختلط است.

۳. مجموع زوایای یک مثلث برابر ۱۸۰° است.

۴. در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر مجموع دوزاویه غیر مجاور آن است.

۵. در هر مثلث متساوی الساقین، دوزاویه مجاور به دوساق بر هم قابل انطباقند.

۶. در هر مثلث متساوی الاضلاع، هر سه ضلع بر یکدیگر قابل انطباق اند.

۷. از یک نقطه خارج یک خط فقط و فقط یک خط به موازات آن خط می توان رسم کرد.

۸. از یک نقطه خارج یک خط فقط و فقط یک خط می توان بر خط دیگر عمود رسم کرد.

۹. در مجموعه اعداد صحیح، برای هر عدد صحیح m و هر عدد غیر صفر n یک وفقط یک r و q وجود دارند به طوری که $m = nq + r$.

۱۰. هر عدد طبیعی بزرگتر از یک دارای لااقل یک مقسوم علیه اول است.

۱۱. برای هر دو عدد طبیعی بزرگتر از یک مانند m, n، لااقل یک عدد طبیعی بزرگتر از یک، مانند d وجود دارد به طوری که هم m بر d بخش پذیر است و هم n بر d بخش پذیر است.

۱۲. برای هر دوعدد طبیعی m, n یک عدد طبیعی مانند ℓ وجود دارد به طوری که ℓ هم بر m بخش پذیر است و هم بر n.

۱۳. هرگاه برای هردوعدد گویا مانند r, s داشته باشیم $rs = ۰$ آنگاه لااقل یکی از دو عامل r یا s برابر صفرند.

۱۴. هر تابع پیوسته $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه از دامنه اش دارای حد است.

۱۵. هر تابع مشتق پذیر $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه (a, b) پیوسته است.

۱۶. مجموع هر دوتابع پیوسته از (a, b) در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۷. حاصل ضرب هر دوتابع پیوسته از (a, b) در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۸. در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر برابر نصف وتر است.

۱۹. در هرمثلث، هر سه ارتفاع آن همرس اند.

۲۰. در هر مثلث میانه های آن همرسند.

۲۱. در هر مثلث، عمود منصف های هر سه ضلع مثلث همرس اند.

۲۲. از هر دونقطه متمایز یک صفحه، یک و فقط یک خط می گذرد.

۲۳. روی هر پاره خط یک و فقط یک نقطه وجود دارد که از دوسر آن به یک فاصله است.

۲۴. برای هر عدد حقیقی مثبت a یک عدد حقیقی مانند x وجود دارد به طوری که $x^۲ = a$.

۲۵. برای هر عدد مثبت a و هر عدد طبیعی n یک عدد حقیقی مانند x وجود دارد به طوری که $x^n = a$.

۲۶. مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی محاطی برابر ۲π است.

۲۷. مجموع زوایای داخلی هر پنج ضلعی محاطی برابر ۳π است.

۲۸. مجموع زوایای داخلی هر شش ضلعی محاطی برابر ۴π است.

۲۹. مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محاطی برابر $(n - ۲)\pi$ است.

۳۰. هر چهار ضلعی یک لوزی است.

۳۱. هر مثلث دارای یک دایره محیطی است.

۳۲. هرگاه عدد طبیعی a عدد طبیعی b را عاد کند و عدد طبیعی b عدد طبیعی c را عاد کند آنگاه a عدد c را عاد خواهد کرد.

۳۳. هرگاه برای هر دوعدد حقیقی a,b، $a^۲+b^۲=۰$ آنگاه $a=b=۰$.

۳۴. هرگاه $a^۲+b^۲>۰$ آنگاه لااقل یکی از اعداد a یا b مخالف صفراند.

۳۵. برای هردوعدد صحیح a,b با شرط $a\geq b$ و هر عدد طبیعی c، $ac\geq bc$.

۳۶. **(خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی)** برای هر عدد حقیقی مثبت x یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $nx>۱$.

تمرینات مبانی ریاضی: نقیض سورها، سری دوم

فرض کنید عالم سخن برابر $\mathbb{R}$ باشد. گزاره نما های زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
p(x)&: x\geq ۰\\
q(x)&: x^۲\geq ۰\\
r(x)&: x^۲-۳x-۴=۰\\
s(x)&: x^۲-۳\geq ۰
\end{aligned}$$

با ارزیابی هر یک از گزاره نماهای زیر، آنها را به صورت سور وجودی یا سور عمومی بنویسید.

۱. سور مرکب $p(x)\wedge q(x)$.
مثلاً اگر $x=-۳$ آنگاه گزاره $p(-۳)=-۳\geq ۰$ ناراست است. به‌علاوه گزاره $q(-۳)=(-۳)^۲=۹$ راست است. بنابراین
گزاره $p(-۳)\wedge q(-۳)$ ناراست است.
به عنوان مثالی دیگر اگر $x=۲$ آنگاه $p(۲): ۲\geq ۰$ راست است . گزاره $p(۲)=۲^۲\geq ۰$ نیز راست است. پس گزاره مرکب $p(۲)\wedge q(۲)$ یک گزاره راست است.
پس می توان نوشت

$$(\exists x)(p(x)\wedge q(x)).$$

۲. گزاره نمای $p(x)\vee q(x)$.

۳. گزاره نمای $p(x)\longrightarrow q(x)$.

۴. گزاره نمای $\sim p(x)\longrightarrow q(x)$.

۵. گزاره نمای $p(x)\longrightarrow r(x)$.

۶. گزاره نمای $r(x)\longrightarrow r(x)$.

۷. گزاره نمای $p(x)\wedge q(x)\longrightarrow r(x)$.

۸. گزاره نمای $p(x)\wedge q(x)\longrightarrow p(x)\vee q(x)$.

۹. گزاره نمای $p(x)\wedge q(x)\longrightarrow s(x)$.

۱۰. گزاره نمای

$$(p(x)\longrightarrow q(x))\wedge(r(x)\longrightarrow s(x))\longrightarrow(p(x)\wedge r(x)\longrightarrow q(x)\wedge s(x).$$