

تکلیف سری سوم

مبانی نظریه محاسبه
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. بهار ۱۴۰۳

۱. با توجه به گرامر داده شده به سوالات زیر پاسخ دهید؟

$$G = \begin{cases} S \rightarrow AB \mid BA \\ A \rightarrow aAb \mid \epsilon \\ B \rightarrow bBa \mid \epsilon \end{cases}$$

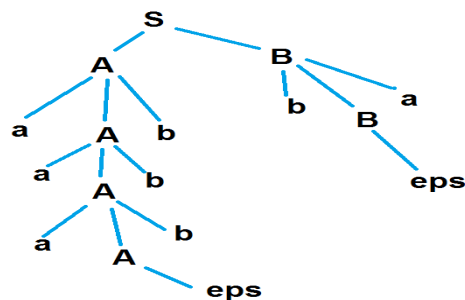
(آ) سه رشته متفاوت ذکر کنید با گرامر G تولید شوند.

$$ab \quad ba \quad \in$$

(ب) یک اشتقاق چپ برای رشته ~~aaabbbba~~ پیدا کنید.

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAbB \Rightarrow aaAbbB \Rightarrow aaaAbbbB \Rightarrow aaabbbbB \Rightarrow aaabbbbBa \Rightarrow aaabbbbba$$

(ج) یک درخت تجزیه برای اشتقاقی که بدست آوردید رسم کنید.



(د) آیا گرامر G مبهم است؟ چرا؟

بله. چون رشته ϵ را می‌توان با دو اشتقاق چپ متفاوت تولید کرد.

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow B \Rightarrow \epsilon, \quad S \Rightarrow BA \Rightarrow A \Rightarrow \epsilon$$

(۵) گرامر G چه زبانی را تولید می کند؟

$$\{a^n b^n b^m a^m \mid n \geq 0, m \geq 0\} \cup \{b^m a^m a^n b^n \mid m \geq 0, n \geq 0\}$$

(و) گرامر G را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

اول قانون $\epsilon \rightarrow A$ را حذف می کنیم. بدست می آید:

$$G_1 = \begin{cases} S \rightarrow AB \mid BA \mid B \mid A \\ A \rightarrow aAb \mid ab \\ B \rightarrow bBa \mid \epsilon \end{cases}$$

سپس قانون $B \rightarrow \epsilon$ را حذف می‌کنیم. بدست می‌آید:

$$G_2 = \begin{cases} S \rightarrow AB \mid BA \mid B \mid A \mid \epsilon \\ A \rightarrow aAb \mid ab \\ B \rightarrow bBa \mid ba \end{cases}$$

سپس قانون $S \rightarrow A$ را حذف می‌کنیم. بدست می‌آید:

$$G_3 = \begin{cases} S \rightarrow AB \mid BA \mid B \mid aAb \mid ab \mid \epsilon \\ A \rightarrow aAb \mid ab \\ B \rightarrow bBa \mid ba \end{cases}$$

سپس قانون $S \rightarrow B$ را حذف می‌کنیم. بدست می‌آید:

$$G_3 = \begin{cases} S \rightarrow AB \mid BA \mid bBa \mid ba \mid aAb \mid ab \mid \epsilon \\ A \rightarrow aAb \mid ab \\ B \rightarrow bBa \mid ba \end{cases}$$

دو قانون کمکی $K \rightarrow b$ و $T \rightarrow a$ را اضافه می‌کنیم. بدست می‌آید:

$$G_3 = \begin{cases} S \rightarrow AB \mid BA \mid KBT \mid KT \mid TAK \mid TK \mid \epsilon \\ A \rightarrow TAK \mid TK \\ B \rightarrow KBT \mid KT \\ T \rightarrow a \\ K \rightarrow b \end{cases}$$

در نهایت قوانین کمکی $E \rightarrow KB$ و $Z \rightarrow TA$ را اضافه می‌کنیم. بدست می‌آید:

$$G_3 = \begin{cases} S \rightarrow AB \mid BA \mid ET \mid KT \mid ZK \mid TK \mid \epsilon \\ A \rightarrow ZK \mid TK \\ B \rightarrow ET \mid KT \\ T \rightarrow a \\ K \rightarrow b \\ E \rightarrow KB \\ Z \rightarrow TA \end{cases}$$

۲. یک گرامر مستقل از متن برای زبان L ارائه کنید. L مجموعه همه رشته هایی است که تعداد a شان دو برابر تعداد b هاست. ثابت کنید گرامر شما زبان L را تولید میکند.

$$G = \{ S \rightarrow aaSb \mid aSbSa \mid bSaa \mid SS \mid \epsilon \}$$

اثبات با استقرا، مشابه آنچه که برای زبانهای دیگر در کلاس انجام دادیم.

۳. برای هر کدام از زبانهای زیر یک گرامر مستقل از متن ارائه کنید.

(آ)

$$C = \{ w \in \{0,1\}^* \mid n_1(w) \geq 3 \}$$

$$\begin{cases} S \rightarrow A1A1A1A \\ A \rightarrow 0A \mid 1A \mid \epsilon \end{cases}$$

(ب) رشته هایی از الفبای $\Sigma = \{a, b\}$ که ab ندارند

$$\begin{cases} S \rightarrow bS \mid T \\ T \rightarrow aT \mid \epsilon \end{cases}$$

(ج) رشته هایی از الفبای $\{a, b\}$ که در آنها تعداد a دو برابر تعداد b است.

$$G = \{ S \rightarrow aaSb \mid aSbSa \mid bSaa \mid SS \mid \epsilon \}$$

(د) متمم زبان $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$\overline{L} = \overline{L_1} \cup L_2 \cup L_3$$

$$L_1 = a^* b^*, \quad L_2 = \{a^n b^m \mid n > m\}, \quad L_3 = \{a^n b^m \mid n < m\}$$

گرامر زیر زبان $\overline{L_1}$ را تولید می کند.

$$G_1 = \begin{cases} S_1 \rightarrow T_1 b a T_1 \\ T_1 \rightarrow a T_1 \mid b T_1 \mid \epsilon \end{cases}$$

گرامر زیر زبان L_2 را تولید می کند.

$$G_2 = \{ S_2 \rightarrow aS_2b \mid aS_2 \mid a$$

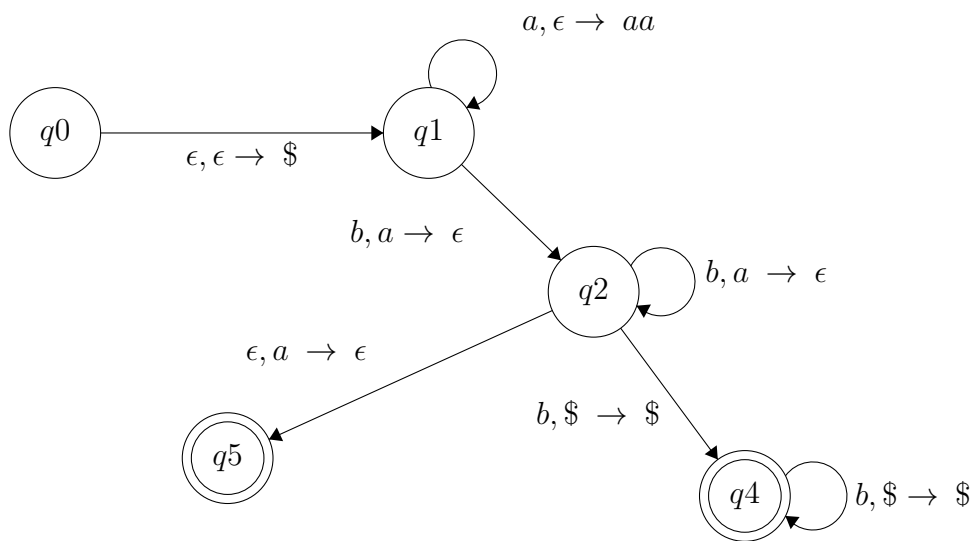
گرامر زیر زبان L_3 را تولید می کند.

$$G_3 = \{ S_3 \rightarrow aS_3b \mid S_3b \mid b$$

گرامر زیر زبان L را تولید می کند.

$$G = \begin{cases} S \rightarrow S_1 \mid S_2 \mid S_3 \\ S_1 \rightarrow T_1baT_1 \\ T_1 \rightarrow aT_1 \mid bT_1 \mid \epsilon \\ S_2 \rightarrow aS_2b \mid aS_2 \mid a \\ S_3 \rightarrow aS_3b \mid S_3b \mid b \end{cases}$$

۴. یک ماشین پشته ای (pda) برای زبان $E = \{a^ib^j \mid 2i \neq j\}$ طراحی کنید.



۵. لم تزریق را برای زبانهای مستقل از متن بیان کنید. با استفاده از این لم نشان دهید زیر مستقل از متن نیست.

$$L = \{a^k b^{2k} c^{3k} \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$$

لم: اگر A یک زبان مستقل از متن باشد عدد p وجود دارد بطوریکه هر رشته s در زبان A که طولش حداقل p باشد را می توان بصورت $s = uvxyz$ نوشت درحالیکه شرایط سه گانه زیر برقرار است.

$$\forall i \geq 0, \quad wv^i xy^i z \in A \quad (\bar{I})$$

$$|vy| > 0 \quad (\text{ب})$$

$$|vxy| \leq p \quad (\text{ج})$$

فرض کنید L مستقل از متن باشد. پس بنا به لم تزریق عدد p وجود دارد و شرایط لم تزریق در مورد آن برقرار است. رشته $w = a^p b^{2p} c^{3p}$ را در نظر بگیرید. با توجه به شرط ج در صورت لم، قسمت vxy نمی‌تواند طولش از p بیشتر باشد. اگر قسمت نمی‌تواند شامل هر سه حرف a و b و c باشد. تزریق آن باعث می‌شود رشته حاصل از زبان خارج شود. که یک تناقض است. پس L مستقل از متن نیست.

۶. آیا زبان زیر مستقل از متن است؟ چرا؟

$$\{w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = (n_b(w))^2\}$$

خیر. از لم تزریق برای اثبات استفاده می‌کنیم. رشته $w = a^{p^2} b^p$ تناقض مورد نظر را ایجاد می‌کند.