تمرینات مبانی ریاضی: سورها

مطالبی را که درباره گزاره نماها بیان کردیم، می توان در جدول زیر خلاصه کرد.

شماره	حکم	چه موقع راست است	چه موقع ناراست است
۱	$(\exists x)(p(x))$	برای حد اقل یک a در عالم سخن $p(a)$ راست است	برای هرa در عالم سخن راست نیست
۲	$(\forall x)(p(x))$	برای هر مقدار a در عالم سخن $p(a)$ راست است	حداقل یک a در عالم سخن وجود دارد که $p(a)$ راست نیست
۳	$(\exists x)(\sim p(x))$	برای حداقل یک انتخاب a از عالم سخن $p(a)$ ناراست است پس $\sim p(a)$ راست است	برای هر مقدار a از عالم سخن $p(a)$ راست است
۴	$(\forall x)(\sim p(x))$	برای هرمقدار a از عالم سخن، $p(a)$ ناراست است و نقیض آن $\sim p(a)$ راست است	حداقل یک مقدار a وجود دارد که به ازای آن $p(a)$ ناراست است و $\sim p(a)$ راست است.

نقیض سورها:

$$\begin{aligned}
&\sim (\forall x)(p(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\sim p(x));\\
&\sim (\exists x)(p(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\sim p(x));\\
&\sim (\forall x)(\sim p(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(p(x));\\
&\sim (\exists x)(\sim p(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(p(x)).
\end{aligned}$$

نقیض سورهای زیر را بنویسید:

۱) به ازای برخی اعضای $\mathbb{N}$ عدد $۲x - ۱$ فرد است.

۲) به ازای برخی اعضای $\mathbb{N}$، $n^۲ + n + ۴۱$ یک عدد اول است.

یک گزاره نما ممکن است بیش از یک سور داشته باشد. به عنوان مثال برای عالم سخن مانند $\mathbb{Z}$ می توان سورهای زیر را بیان کرد.

$$\begin{aligned}
&(\forall y)(\forall x)(x + y = y + x);\\
&(\exists e)(\forall x)(x + e = e + x = x);\\
&(\forall x)(\exists x')(x + x' = e);\\
&(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x + y) + z = x + (y + z)];\\
&(\forall x)(\forall y)(\forall z)(p(x, y, z)).
\end{aligned}$$

اگر عالم سخن برابر $\mathbb{N}$ باشد آیا بازهم این گزاره نماها، گزاره هایی درست هستند؟

۳) فرض کنید عالم سخن مجموعه اعداد صحیح باشد. آنگاه مجموعه نقاطی از عالم سخن را بیابید که گزاره نمای زیر را تبدیل به سور بکنند.

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad \text{به طوری که} \quad x + y = ۶.$$

مجموعه جواب ها گزاره نما را تبدیل به سور عمومی می کند یا سور وجودی؟

توجه: وقتی یک سور شامل سورهای وجودی و هم سورهای عمومی است، ترتیب نوشتن علامت سورها بسیار مهم است و باید در ترتیب نوشتن سورها دقت کرد.

مثال ۱.۰.۰. سور $(\forall x)(\exists y)(x+y=17)$ به این معناست که مقدار x دلخواه است و مقدار y وابسته به مقدار x درحالی که سور $(\forall y)(\exists x)(x+y=17)$ می‌گوید مقدار y دلخواه است و مقدار x پس از انتخاب مقدار y، می تواند از روی رابطه فوق تعیین شود.

برای پیدا کردن نقیض یک گزاره نما که شامل چندین متغیر است، همانند سورهایی که شامل فقط یک متغییرند می توان عمل کرد.

مثال ۲.۰.۰. می دانیم تابع $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ را درنقطه $x_\circ\in(a,b)$ دارای حد ℓ گویند هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ بتوان یافت به طوری که برای هر x با شرط $|x-x_\circ|<\delta$ نتیجه شود $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. به عبارت دیگر

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \text{ به طوری که } \forall x\in(x_\circ-\delta,x_\circ+\delta)\setminus\{x_o\}\Longrightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

به زبان نمادین تعریف فوق را می توان به صورت زیر نوشت

$$(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(0<|x-x_\circ|<\delta\Longrightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon),$$

حال نقیض گزاره فوق به معنای این است که تابع f در نقطه $x_\circ$ دارای حدی برابر ℓ نیست. ابتدا صورت هم ارز گزاره نمای فوق را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(0<|x-x_\circ|<\delta\Longrightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon),\\ \equiv\ &(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(\sim(0<|x-x_\circ|<\delta)\vee|f(x)-\ell|<\varepsilon).\end{aligned}$$

حال نقیض گزاره دوم عبارت است از

$$\begin{aligned}\sim&(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(\sim(0<|x-x_\circ|<\delta)\vee|f(x)-\ell|<\varepsilon),\\ \equiv\ &(\exists\varepsilon)(\forall\delta)(\exists x)(0<|x-x_\circ|<\delta\wedge|f(x)-\ell|\geq\varepsilon).\end{aligned}$$

تمرین ۱.۰.۰. فرض کنید $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع باشد که در $x_\circ\in(a,b)$ پیوسته است. اولاً همانند بالا، تعریف سوری پیوسته بودن تابع f در نقطه $x_\circ$ را بنویسید و سپس نقیض این سور را نیز بنویسید.