به نام خدا

۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

جزوه درس احتمال ۱

راضیه خودسیانی

فهرست مطالب

فصل ۱

متغیر تصادفی و انواع آن

یک متغیر تصادفی، تابعی از فضای نمونه آزمایش تصادفی به مجموعه اعداد حقیقی است به طوری که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت داده می شود. برای نمایش یک متغیر تصادفی از حروف بزرگ لاتین مانند X، Y و Z استفاده می شود. داریم

$$X : S \longrightarrow S_X \subseteq \mathbb{R}$$

به طوری که،

- X: متغیر تصادفی
- S_X: زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است و نشانگر مجموعه مقادیری است که متغیر تصادفی X می گیرد و به آن تکیه گاه X می گویند.

در واقع یک متغیر تصادفی نمایش ریاضی فضای نمونه است و هر پیشامد از فضای نمونه را با یک عدد نمایش می دهد.

مثال ۱-۱. آزمایش تصادفی پرتاب سه سکه را درنظر بگیرید. با فرض اینکه T نشان دهنده ظاهر شدن خط و H نشان دهنده شیر باشد، اگر متغیر تصادفی X را تعداد شیرهای مشاهده شده تعریف کنیم، داریم

$$\begin{aligned} S &= \{\underbrace{TTT}, \ \underbrace{HTT, THT, TTH}, \ \underbrace{THH, HTH, HHT}, \ \underbrace{HHH}\} \\ S_X &= \{\ ۰, \qquad\qquad ۱, \qquad\qquad\qquad ۲, \qquad\qquad ۳\} \end{aligned}$$

مثال ۱-۲. سکه ای شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است. سکه را آنقدر پرتاب می کنیم تا برای اولین بار خط مشاهده شود. اگر X برابر با تعداد پرتاب های لازم تا مشاهده اولین خط باشد، احتمال اینکه حداقل ۴ پرتاب لازم باشد را بیابید. با توجه به تعریف متغیر تصادفی X داریم

$$\begin{aligned} S &= \{\underbrace{T}, \ \underbrace{HT}, \ \underbrace{HHT}, \ \underbrace{HHHT}, \ \ldots\} \\ S_X &= \{\ ۱, \quad ۲, \quad ۳, \quad ۴, \quad \ldots\} \end{aligned}$$

مشابه مثال ۱-۱، T نشان دهنده مشاهده خط در اولین پرتاب، HT نشان دهنده مشاهده خط در دومین پرتاب، HHT نشان دهنده مشاهده خط در سومین پرتاب و همین طور تا آخر است. طبق اطلاعات مساله داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(H) &= ۲\mathrm{P}(T) \\ \mathrm{P}(H) + \mathrm{P}(T) &= ۱ \end{aligned}$$

پس $\mathrm{P}(T) = \frac{۱}{۳}$، $\mathrm{P}(H) = \frac{۲}{۳}$ و

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = ۱) &= \mathrm{P}(\{T\}) = \frac{۱}{۳} \\ \mathrm{P}(X = ۲) &= \mathrm{P}(\{HT\}) = (\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳}) \\ \mathrm{P}(X = ۳) &= (\frac{۲}{۳})^{۲}(\frac{۱}{۳}) \\ \mathrm{P}(X = ۴) &= (\frac{۲}{۳})^{۳}(\frac{۱}{۳}) \\ &\vdots \\ \mathrm{P}(X = k) &= (\frac{۲}{۳})^{k-۱}(\frac{۱}{۳}) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathrm{P}(X \geq ۴) = ۱ - \mathrm{P}(X < ۴) = ۱ - \mathrm{P}(X \leq ۳) = ۱ - (\frac{۱}{۳} + (\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳}) + (\frac{۲}{۳})^۲(\frac{۱}{۳})) = \frac{۸}{۲۷}$$

or

$$\begin{aligned} &= \mathrm{P}(X = ۴) + \mathrm{P}(X = ۵) + \mathrm{P}(X = ۶) + \dots \\ &= (\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳}) + (\frac{۲}{۳})^۴(\frac{۱}{۳}) + (\frac{۲}{۳})^۵(\frac{۱}{۳}) + \dots \\ &= \sum_{i=۳}^{\infty}(\frac{۲}{۳})^i(\frac{۱}{۳}) \\ &= \frac{(\frac{۱}{۳})(\frac{۲}{۳})^۳}{۱ - \frac{۲}{۳}} = (\frac{۲}{۳})^۳ = \frac{۸}{۲۷} \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در یک آزمایش تصادفی می توان به تعداد نامتناهی متغیر تصادفی تعریف کرد (مثال زیر را ببیینید).

مثال ۱-۳. سه توپ را به تصادف و بدون جایگذاری از ظرفی که شامل ۲۰ توپ از شماره ۱ تا ۲۰ است انتخاب می کنیم. احتمال اینکه حداقل یکی از توپ های انتخاب شده عددی بزرگتر یا مساوی ۱۷ باشد را بدست آورید.

حل۱. اگر X را تعداد توپ های انتخاب شده که بزرگتر یا مساوی ۱۷ هستند تعریف کنیم، داریم $S_X = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ و می خواهیم $\mathrm{P}(X \geq ۱)$ را بدست آوریم.

$$\mathrm{P}(X \geq ۱) = ۱ - \mathrm{P}(X < ۱) = ۱ - \mathrm{P}(X = ۰) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۱۶}{۳}}{\binom{۲۰}{۳}} = ۱ - ۰/۴۹ = ۰/۵۱$$

حل۲. اگر Y را بزرگترین عدد انتخاب شده تعریف کنیم داریم $S_Y = \{۳, ۴, ۵, \dots, ۲۰\}$ و باید

$\mathrm{P}(Y \geq ۱۷)$ را محاسبه کنیم.

$$\mathrm{P}(Y \geq ۱۷) = \mathrm{P}(Y = ۱۷) + \mathrm{P}(Y = ۱۸) + \mathrm{P}(Y = ۱۹) + \mathrm{P}(Y = ۲۰)$$
$$= \frac{\binom{۱۶}{۲}}{\binom{۲۰}{۳}} + \frac{\binom{۱۷}{۲}}{\binom{۲۰}{۳}} + \frac{\binom{۱۸}{۲}}{\binom{۲۰}{۳}} + \frac{\binom{۱۹}{۲}}{\binom{۲۰}{۳}} = ۰/۵۱$$

۱.۱ انواع متغیر تصادفی

با توجه به تعریف متغیر تصادفی می دانیم: $X : S \longrightarrow S_X \subseteq \mathbb{R}$

- اگر S_X یک مجموعه شمارا باشد، X را یک متغیر تصادفی گسسته گویند. در واقع برای یک متغیر تصادفی گسسته، S_X به شکل یک مجموعه متناهی یا نامتناهی است.

$$S_X = \{x_۱, x_۲, x_۳, \ldots\}$$

- اگر S_X یک فاصله یا اجتماع چند فاصله عددی باشد، X را یک متغیر تصادفی پیوسته گویند. یعنی

$$S_X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

$\star$ **توجه داشته باشید که برای یک متغیر تصادفی پیوسته X احتمال در یک نقطه برابر با صفر است.** درواقع برای هر متغیر پیوسته X داریم

$$\mathrm{P}(X = x) = ۰ \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

۱.۱.۱ متغیر تصادفی گسسته

متغیر تصادفی X را گسسته گویند هرگاه S_X مجموعه ای شمارا باشد.

تعریف ۱-۴. تابع چگالی احتمال (تابع احتمال) متغیر تصادفی گسسته X میزان احتمال انباشته شده در هر نقطه را نشان می دهد که به صورت زیر تعریف می شود

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x)$$

و دارای خواص زیر است:

۰۱ برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f_X(x) \geq ۰$

۰۲ $\sum_{x\in\mathbb{R}} f_X(x) = ۱$.

مثال ۱-۵. دو تاس را باهم پرتاب می کنیم و متغیر تصادفی X را برابر با مجموع اعداد مشاهده شده روی دو تاس تعریف می کنیم. تابع چگالی X را بدست آورید.

برای متغیر تصادفی X داریم

$$S_X = \{۲, ۳, ۴, \dots, ۱۲\}$$

و همچنین

$$f_X(۲) = \mathrm{P}(X = ۲) = \mathrm{P}(\{۱, ۱\}) = \frac{۱}{۳۶}$$
$$f_X(۳) = \mathrm{P}(X = ۳) = \mathrm{P}(\{۱, ۲\}, \{۲, ۱\}) = \frac{۲}{۳۶}$$
$$f_X(۴) = \mathrm{P}(X = ۴) = \mathrm{P}(\{۱, ۳\}, \{۳, ۱\}, \{۲, ۲\}) = \frac{۳}{۳۶}$$
$$\vdots$$

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

مثال ۱-۶. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = k(\frac{۱}{۶})^x \qquad x = ۰, ۱, ۲, \dots$$

مقدار k را چنان تعیین کنید که $f_X(x)$ تابع چگالی متغیر تصادفی گسسته X باشد.

با توجه به خواص تابع چگالی احتمال، $k \geq ۰$ و

$$۱ = \sum_{x=۰}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=۰}^{\infty} k(\frac{۱}{۶})^x = k\sum_{x=۰}^{\infty}(\frac{۱}{۶})^x = k(\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۶}}) = k(\frac{۶}{۵}).$$

بنابراین $k = \frac{۵}{۶}$.

تمرین ۱-۷. اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد،

$$f_X(x) = \frac{k}{۲^x} \qquad x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

مقدار k را محاسبه کنید.

تمرین ۱-۸. فروشگاهی ۶ دستگاه تلویزیون دارد که ۲ دستگاه آن معیوب است. هتلی ۳ دستگاه آن را به طور تصادفی انتخاب و خریداری می نماید. اگر X تعداد تلویزیون های معیوب باشد که هتل خریداری کرده، تابع احتمال X را بدست آورید.

تمرین ۱-۹. آزمایش های مستقل پرتاب یک سکه با احتمال شیر آمدن p را آنقدر ادامه می دهیم تا یک شیر ظاهر شود یا جمعا n پرتاب انجام گیرد. اگر X تعداد دفعات پرتاب سکه باشد، تابع چگالی آن را بدست آورید.

تعریف ۱-۱۰. تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X **(خواه متغیر تصادفی X گسسته باشد یا پیوسته)** میزان احتمال توزیع شده تا نقطه x را نشان می دهد که به صورت زیر تعریف می شود

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

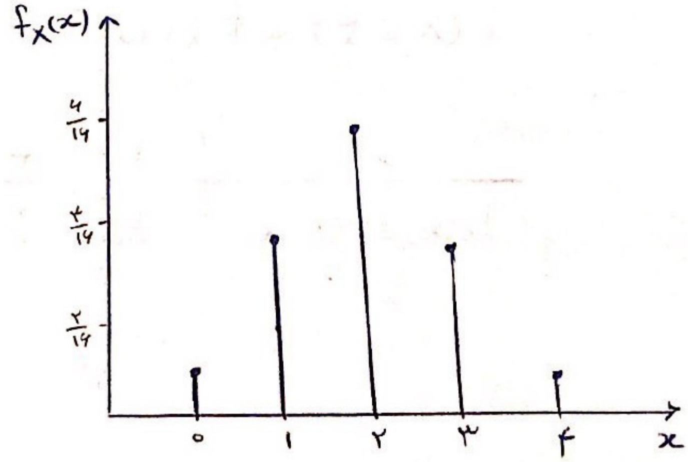
اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابع توزیع $F_X(x)$ به صورت زیر محاسبه می شود

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{t=-\infty}^{x} \mathrm{P}(X = t) = \sum_{t=-\infty}^{x} f_X(t)$$

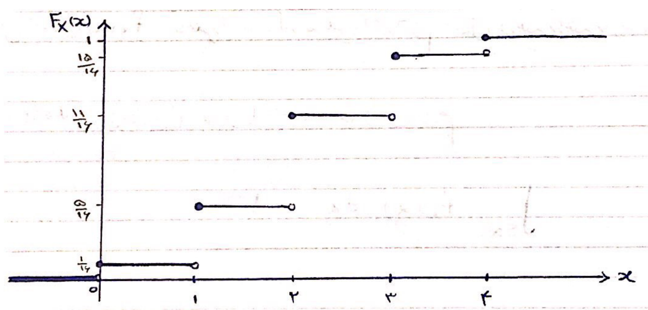
مثال ۱-۱۱. سکه ای را ۴ مرتبه پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشانگر تعداد شیرهای مشاهده شده باشد، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X را بیابید.

$$S_X = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$$

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \mathrm{P}(\{TTTT\}) = \frac{۱}{۱۶} & \text{if} \quad x = ۰ \\ \mathrm{P}(\{HTTT, THTT, TTHT, TTTH\}) = \frac{۴}{۱۶} & \text{if} \quad x = ۱ \\ \mathrm{P}(\{HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH\}) = \frac{۶}{۱۶} & \text{if} \quad x = ۲ \\ \mathrm{P}(\{HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}) = \frac{۴}{۱۶} & \text{if} \quad x = ۳ \\ \mathrm{P}(\{HHHH\}) = \frac{۱}{۱۶} & \text{if} \quad x = ۴ \end{cases}$$



شکل ۱-۱: نمودار تابع چگالی X در مثال ۱-۱۱



شکل ۱-۲: نمودار تابع توزیع X در مثال ۱-۱۱

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad x < ۰ \\ \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱}{۱۶} & \text{if} \quad ۰ \leq x < ۱ \\ \frac{۱}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} = \frac{۵}{۱۶} & \text{if} \quad ۱ \leq x < ۲ \\ \frac{۱}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۶}{۱۶} = \frac{۱۱}{۱۶} & \text{if} \quad ۲ \leq x < ۳ \\ \frac{۱}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۶}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶} & \text{if} \quad ۳ \leq x < ۴ \\ \frac{۱}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۶}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = ۱ & \text{if} \quad ۴ \leq x \end{cases}$$

نمودار توابع چگالی و توزیع به دست آمده به ترتیب در شکل ۱-۱ و ۱-۲ رسم شده است. همانطور که مشاهده می شود، نمودار تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته X به شکل پله ای است.

خواص تابع توزیع احتمال

۱. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \le F_X(x) \le 1$

۲. $F_X(x)$ یک تابع غیر نزولی است.

۳. $F_X(x)$ یک تابع از راست پیوسته است.

۴. $F_X(-\infty) = 0$ و $F_X(+\infty) = 1$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی گسسته X را می توان با استفاده از تابع توزیع به شکل زیر به دست آورد

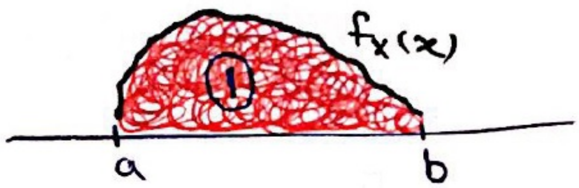
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \mathrm{P}(X = x) = \mathrm{P}(X \le x) - \mathrm{P}(X < x) \\ &= F_X(x) - F_X(x^-) \end{aligned}$$

که در آن $F_X(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته X در نقطه x است و احتمال تا نقطه x را نشان می دهد و $F_X(x^-)$ احتمال تا قبل از نقطه x است.

تمرین ۱–۱۲. در تمرین های ۱–۷ و ۱–۸ تابع توزیع متغیر تصادفی X را بدست آورید.

تمرین ۱–۱۳. بررسی کنید که آیا تابع زیر یک تابع توزیع برای متغیر تصادفی گسسته W است یا خیر؟ همچنین تابع چگالی متغیر تصادفی W و $\mathrm{P}(3 < W \le 5)$ را محاسبه کنید.

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad w < 3 \\ \frac{1}{3} & \text{if} \quad 3 \le w < 4 \\ \frac{1}{2} & \text{if} \quad 4 \le w < 5 \\ \frac{2}{3} & \text{if} \quad 5 \le w < 6 \\ 1 & \text{if} \quad 6 \le w \end{cases}$$



شکل ۱-۳: نمایش یک واحد جرم احتمال بر روی تکیه گاه X، $S_X = [a,b]$

۲.۱.۱ متغیر تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی X را پیوسته گویند هرگاه S_X یک فاصله یا اجتماع چند فاصله عددی باشد.

تعریف ۱-۱۴. فرض کنید یک واحد جرم احتمال بر روی تکیه گاه X، $S_X = [a,b]$ به صورت شکل ۲-۳ انباشته شده است. تابع چگالی احتمال $f_X(x)$، تابعی است که به یک واحد جرم احتمال در تکیه گاه برازش داده می شود و مساحت زیر تابع در فاصله $[a,b]$ برابر با ۱ است. بنابراین داریم

$$\int_{S_X} f_X(x)\mathrm{dx} = ۱$$

تابع چگالی $f_X(x)$ دارای خواص زیر است

۱. $f_X(x) \geq ۰ \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

۲. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = ۱$.

با توجه به تعریف و ویژگی های یک متغیر تصادفی پیوسته مثل X، برای هر بازه دلخواه $[a_۱, a_۲]$ در مجموعه اعداد حقیقی داریم

$$\mathrm{P}(a_۱ < X < a_۲) = \int_{a_۱}^{a_۲} f_X(x)\mathrm{dx}.$$

توجه داشته باشید که چون برای هر عدد حقیقی x، $\mathrm{P}(X = x) = ۰$ پس

$$\mathrm{P}(a_۱ \leq X < a_۲) = \mathrm{P}(a_۱ < X \leq a_۲) = \mathrm{P}(a_۱ \leq X \leq a_۲) = \mathrm{P}(a_۱ < X < a_۲) = \int_{a_۱}^{a_۲} f_X(x)\mathrm{dx}.$$

براساس تعریف تابع توزیع در ۱-۱۰، اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع توزیع $F_X(x)$ به صورت زیر محاسبه می شود

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{dt} \qquad \forall x \in \mathcal{R}$$

اگر X **یک متغیر تصادفی پیوسته باشد،** می توان تابع چگالی آن را به روش زیر بدست آورد

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} F_X(x) = F'_X(x)$$

مثال ۱-۱۵. نقطه ای را به تصادف از فاصله اعداد حقیقی $[۰, ۲]$ انتخاب کرده و متغیر تصادفی X را برابر با نقطه انتخاب شده در فاصله $[۰, ۲]$ در نظر بگیرید. تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال را بدست آورده و سپس این دو تابع را رسم کنید.

حل.

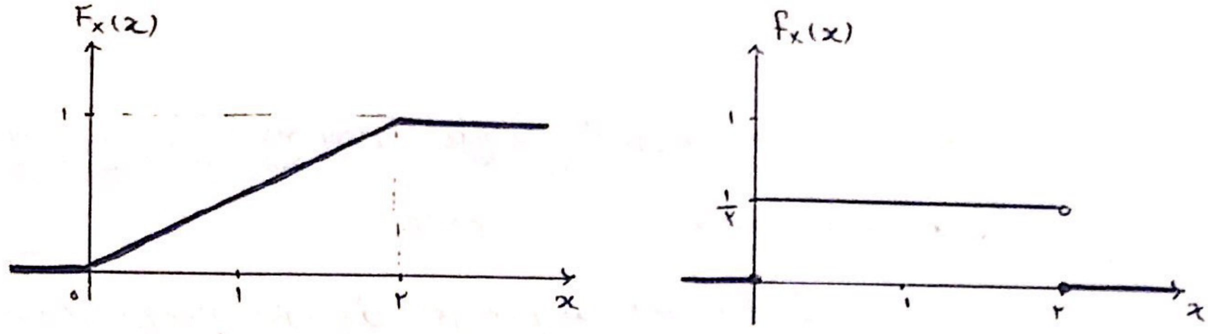
چون X یک متغیر تصادفی پیوسته است و $S_X = [۰, ۲]$، پس $\mathrm{P}(X \leq x)$ برابر با نسبت طول فاصله $[۰, x]$ بر طول فاصله $[۰, ۲]$ است و داریم

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad x < ۰ \\ \frac{x}{۲} & \text{if} \quad ۰ \leq x < ۲ \\ ۱ & \quad x \geq ۲ \end{cases}$$

همچنین

$$f_X(x) = \begin{cases} F'_X(x) = \frac{۱}{۲} & \text{if} \quad ۰ < x < ۲ \\ ۰ & \quad \text{o.w} \end{cases}$$

تابع چگالی و تابع توزیع بدست آمده در این مثال را می توانید در شکل زیر ببینید.



شکل **۱-۴:** نمودارهای مثال ۱-۱۵

⋆ تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته، یک نمودار پیوسته است.

مثال ۱-۱۶. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{۲}} & \text{if} \quad ۱ < x < ۱۰ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

i. مقدار c را تعیین کنید.

ii. تابع توزیع احتمال X را بدست آورید.

i. با توجه به خواص تابع چگالی احتمال باید $c \geq ۰$ و

$$۱ = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{۱} ۰\mathrm{dx} + \int_{۱}^{۱۰} \frac{c}{x^{۲}}\mathrm{dx} + \int_{۱۰}^{\infty} ۰\mathrm{dx} = c\int_{۱}^{۱۰} \frac{۱}{x^{۲}}\mathrm{dx} = \frac{-c}{x}\Big|_{۱}^{۱۰} = \frac{۹}{۱۰}c$$

پس $c = \frac{۱۰}{۹}$ مقداری قابل قبول است.

ii. چون $f_X(x)=\begin{cases}\frac{10}{9x^2} & \text{if} \quad 1<x<10\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$ پس داریم

$$\begin{aligned}F_X(x)&=\mathrm{P}(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{dt}\\ &=\begin{cases}0 & \text{if} \quad x<1\\ \int_{-\infty}^{1}0\mathrm{dt}+\int_{1}^{x}\frac{10}{9t^2}\mathrm{dt}=\frac{10}{9}-\frac{10}{9x} & \text{if} \quad 1\leq x<10\\ \int_{-\infty}^{1}0\mathrm{dt}+\int_{1}^{10}\frac{10}{9x^2}\mathrm{dt}+\int_{10}^{x}0\mathrm{dt}=1 & \text{if} \quad x\geq 10\end{cases}\end{aligned}$$

تمرین ۱-۱۷. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد.

$$f_X(x)=\begin{cases}c(1+x) & \text{if} \quad 2<x<5\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

i. مقدار c را بدست آورید.

ii. تابع توزیع متغیر تصادفی X را بدست آورید.

تمرین ۱-۱۸. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد،

$$f_X(x)=\begin{cases}x & \text{if} \quad 0<x<1\\ 2-x & \text{if} \quad 1\leq x<2\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

تابع توزیع X را بدست آورید و $\mathrm{P}(0/5<X<1/5)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱-۱۹. اگر X دارای تابع توزیع زیر باشد، تابع چگالی آن را بدست آورید و مقدار $\mathrm{P}(X>3)$ را محاسبه کنید.

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad x<0\\ 1-(1+x)e^{-x} & \text{if} \quad x\geq 0\end{cases}$$

۲.۱ توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی

در آزمایش های تصادفی گاه تابعی از متغیر تصادفی مورد بررسی اهمیت ویژه ای دارد و لازم است آن را مورد مطالعه قرار دهیم. برای مثال فرض کنید X میزان درآمد یک فرد در طول یکماه گذشته است و ما علاوه بر بررسی X نیاز داریم تفاوت درآمد افراد را با حقوق اعلام شده دولت مورد مطالعه قرار دهیم. در واقع اگر a حقوق اعلام شده دولت برای امسال بوده باشد $g(X)=X-a$ مورد توجه ما است. دقت کنید که هر تابع غیر ثابت از هر متغیر تصادفی، یک متغیر تصادفی است. تعریف می کنیم $Y=g(X)$ و بنابراین می توان تابع چگالی و تابع توزیع Y را بدست آورد. متغیر تصادفی $Y=g(X)$ براساس پیوسته یا گسسته بودن متغیر تصادفی X، می تواند گسسته یا پیوسته باشد.

در حالتی که X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابع توزیع $Y=g(X)$ به سادگی می تواند طبق قضیه زیر از تابع چگالی X بدست آید.

قضیه ۱-۲۰. فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه گاه S_X و تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. همچنین فرض کنید $Y=g(X)$ یک متغیر تصادفی باشد بطوری که g یک تابع حقیقی است. در این صورت Y یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه گاه $S_Y=g(S_X)$ و تابع چگالی زیر است،

$$f_Y(y)=\sum_{x\in g^{-1}(y)\cap S_X} f_X(x) \qquad y\in S_Y. \tag{۱-۱}$$

مثال ۱-۲۱. در مثال ۱-۵ تابع چگالی و تابع توزیع $[\frac{X}{۳}]+۱$ را بدست آورید.

حل: داریم $S_X=\{۲,۳,۴,\dots,۱۲\}$ و اگر تعریف کنیم $Y=g(X)=[\frac{X}{۳}]+۱$ آنگاه $S_Y=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$. طبق (۱-۱) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
f_Y(۱)&=f_X(۲)=\frac{۱}{۳۶}\\
f_Y(۲)&=f_X(۳)+f_X(۴)+f_X(۵)=\frac{۹}{۳۶}\\
f_Y(۳)&=f_X(۶)+f_X(۷)+f_X(۸)=\frac{۱۶}{۳۶}\\
f_Y(۴)&=f_X(۹)+f_X(۱۰)+f_X(۱۱)=\frac{۹}{۳۶}\\
f_Y(۵)&=f_X(۱۲)=\frac{۱}{۳۶}
\end{aligned}$$

y	۱	۲	۳	۴	۵
$f_Y(y) = \mathrm{P}(Y = y)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۹}{۳۶}$	$\frac{۱۶}{۳۶}$	$\frac{۹}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad y < ۱ \\ f_Y(۱) = \frac{۱}{۳۶} & \text{if} \quad ۱ \leq y < ۲ \\ f_Y(۱) + f_Y(۲) = \frac{۱۰}{۳۶} & \text{if} \quad ۲ \leq y < ۳ \\ f_Y(۱) + f_Y(۲) + f_Y(۳) = \frac{۲۶}{۳۶} & \text{if} \quad ۳ \leq y < ۴ \\ f_Y(۱) + f_Y(۲) + f_Y(۳) + f_Y(۴) = \frac{۳۵}{۳۶} & \text{if} \quad ۴ \leq y < ۵ \\ ۱ & \text{if} \quad ۵ \leq y \end{cases}$$

حال فرض کنید X و $Y=g(X)$ هر دو متغیرهای تصادفی پیوسته باشند. برای بدست آوردن تابع چگالی Y، ابتدا تابع توزیع آن را به طور مستقیم و برحسب تابع توزیع X بدست می آوریم و سپس با مشتق گیری از تابع توزیع بدست آمده، تابع چگالی Y را برحسب تابع چگالی X محاسبه می کنیم.

به عبارت دیگر داریم،

$$F_Y(y)=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(g(X)\le y)=\mathrm{P}(X\le g^{-1}(y))=F_X(g^{-1}(y))$$

و در نتیجه

$$f_Y(y)=\frac{\partial}{\partial y}F_X(g^{-1}(y)).$$

مثال ۱-۲۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع احتمال زیر باشد.

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad x<0\\ x & \text{if} \quad 0\le x<1\\ 1 & \text{if} \quad x\ge 1\end{cases}$$

تابع چگالی $Y=X^2$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(X^2\le y)=\mathrm{P}(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})\\ &=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})=\begin{cases}\sqrt{y}-0 & \text{if} \quad 0\le y<1\\ 1-0 & \text{if} \quad y\ge 1\end{cases}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad y<0\\ \sqrt{y} & \text{if} \quad 0\le y<1\\ 1 & \text{if} \quad y\ge 1\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad 0<y<1$$

مثال ۱-۲۳. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. تابع چگالی $g(X)=5X-4$ را بدست آورید.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{16}\sqrt{x} & \text{if} \quad 0<x<4\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

حل: واضح است که X یک متغیر تصادفی پیوسته بوده و بنابراین $Y = g(X)$ نیز یک متغیر تصادفی پیوسته است. داریم:

$$
\begin{aligned}
&F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(۵X - ۴ \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \frac{y+۴}{۵}) = F_X(\frac{y+۴}{۵}) \\
&\Longrightarrow f_Y(y) = F'_X(\frac{y+۴}{۵}) = \frac{۱}{۵} f_X(\frac{y+۴}{۵}) \\
&= \begin{cases} \frac{۳}{۸۰}\sqrt{\frac{y+۴}{۵}} & \text{if} \quad \left(۰ < \frac{y+۴}{۵} < ۴ \Longleftrightarrow -۴ < y < ۱۶\right) \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}
\end{aligned}
$$

تمرین ۱-۲۴. در مثال ۱-۱۸ تابع چگالی متغیرهای تصادفی $X^۳ - ۲$ و $| X + ۲ |$ را بدست آورید.

فصل ۲

امید ریاضی

در این فصل امیدریاضی یک متغیر تصادفی و توابعی از متغیرهای تصادفی را بررسی می‌کنیم. برای پی بردن به مفهوم امید ریاضی به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲-۱. فرض کنید جریمه توقف اتومبیل در محل پارک ممنوع، یک هزار تومان باشد و در یک شهر ۴۰ درصد افراد هیچگاه، ۳۰ درصد افراد یکبار، ۲۰ درصد افراد دوبار و ۱۰ درصد افراد سه بار در ماه به جهت پارک در محل پارک ممنوع جریمه شوند. به طور متوسط انتظار دارید که هر نفر در این شهر چه مبلغی را در ماه برای جریمه توقف اتومبیل در محل پارک ممنوع پرداخت نماید.

برای حل، فرض کنید ۵۰۰ نفر از افراد این شهر مورد مطالعه باشند. براساس درصدهای داده شده در صورت سوال انتظار داریم:

- ۲۰۰ نفر از ۵۰۰ نفر هیچ مبلغی جریمه نشوند: $۵۰۰ \times ۰/۴ = ۲۰۰$
- ۱۵۰ نفر از ۵۰۰ نفر یک هزار تومان جریمه شوند: $۵۰۰ \times ۰/۳ = ۱۵۰$
- ۱۰۰ نفر از ۵۰۰ نفردو هزار تومان جریمه شوند: $۵۰۰ \times ۰/۲ = ۱۰۰$
- ۵۰ نفر از ۵۰۰ نفر سه هزار تومان جریمه شوند: $۵۰۰ \times ۰/۱ = ۵۰$.

بنابراین انتظار داریم که ۵۰۰ نفر مبلغی برابر با رابطه زیر جریمه پرداخت کنند

$$(۵۰۰ \times ۰/۴ \times ۰) + (۵۰۰ \times ۰/۳ \times ۱) + (۵۰۰ \times ۰/۲ \times ۲) + (۵۰۰ \times ۰/۱ \times ۳) = ۵۰۰$$

بنابراین بطور متوسط انتظار داریم که هر نفر ($\frac{۵۰۰}{۵۰۰} = ۱$) یک هزار تومان در ماه جریمه پرداخت نمایند. به عبارت دیگر اگر در این مثال، متغیر تصادفی X را مبلغ جریمه شخص در یک ماه برحسب هزار تومان تعریف کنیم، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

x	۰	۱	۲	۳
$f_X(x)$	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱

امید ریاضی X ، یا **میانگین وزنی** X یا **مقدار مورد انتظار** X، در حقیقت میانگین وزنی مبلغ جریمه است و آن را با نمادهای $\mathrm{E}(X)$ یا μ یا μ_X نمایش می دهند و داریم

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{x=۰}^{۳} x f_X(x) = (۰ \times ۰/۴) + (۱ \times ۰/۳) + (۲ \times ۰/۲) + (۳ \times ۰/۱) = ۱$$

تعریف ۲-۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی X یا میانگین وزنی X یا مقدار مورد انتظار X به صورت زیر تعریف می شود:

- اگر X گسسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x} x f_X(x)$$

- اگر X پیوسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{dx}$$

در صورتی که $\mathrm{E}(X) = \pm\infty$ **، گوییم امید ریاضی** X **وجود ندارد.**

مثال ۲-۳. فرض کنید می خواهیم ۳ نفر را از بین ۵ مهندس و ۳ تکنسین انتخاب کنیم. امید ریاضی تعداد مهندسین انتخابی در بین این ۳ نفر را بدست آورید.

حل: اگر متغیر تصادفی X به صورت تعداد مهندسین انتخاب شده در بین ۳ نفر تعریف شود آن گاه $S_X = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ و تابع چگالی احتمال X به صورت زیر بدست می آید:

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = \frac{\binom{۵}{x}\binom{۳}{۳ - x}}{\binom{۸}{۳}} = \begin{cases} \frac{۱}{۵۶} & \text{if} \quad x = ۰ \\ \frac{۱۵}{۵۶} & \text{if} \quad x = ۱ \\ \frac{۳۰}{۵۶} & \text{if} \quad x = ۲ \\ \frac{۱۰}{۵۶} & \text{if} \quad x = ۳ \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mu = \mathrm{E}(X) &= \sum_{x=۰}^{۳} x f_X(x) \\ &= (۰ \times \frac{۱}{۵۶}) + (۱ \times \frac{۱۵}{۵۶}) + (۲ \times \frac{۳۰}{۵۶}) + (۳ \times \frac{۱۰}{۵۶}) \\ &= \frac{۱۰۵}{۵۶} = ۱/۹ \end{aligned}$$

یعنی اگر بخواهیم ۳ نفر را از این گروه انتخاب کنیم بطور متوسط انتظار داریم که تقریبا ۲ نفر از آن ها مهندس باشند.

مثال ۲-۴. فرض کنید متغیر تصادفی X نشانگر طول عمر نوعی لاستیک بر حسب سال باشد که دارای تابع چگالی احتمال زیر است.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} e^{\frac{-x}{۲}} & \text{if} \quad x > ۰ \\ ۰ & \qquad \text{o.w} \end{cases}$$

متوسط طول عمر این لاستیک را بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} \mu_X = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{dx} &= \int_{۰}^{\infty} x \frac{۱}{۲} e^{\frac{-x}{۲}} \mathrm{dx} \\ &= -x e^{\frac{-x}{۲}} |_{۰}^{\infty} - \int_{۰}^{\infty} -e^{\frac{-x}{۲}} \mathrm{dx} \\ &= -۲ e^{\frac{-x}{۲}} |_{۰}^{\infty} = ۲ \end{aligned}$$

پس انتظار داریم که این نوع لاستیک بطور متوسط ۲ سال کار کند.

تمرین ۲-۵. ظرفی دارای ۳ گوی با شماره های و ۱و۲و۳ است. ابتدا یک گوی از ظرف خارج کرده و سپس یک سکه سالم به تعداد دفعات شماره گوی خارج شده پرتاب می شود.

i. امیدریاضی تعداد شیرهای مشاهده شده را بدست آورید.

ii. اگر بدانیم حداقل یک شیر مشاهده شده، احتمال اینکه حداکثر ۲ شیر مشاهده شود چقدر است؟

تمرین ۲-۶. تابع چگالی متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است.

$$f_X(x) = \begin{cases} k_1 x & \text{if } 0 < x < 1 \\ k_2(2 - x) & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

i. اگر $\mathrm{E}(X) = 1$، مقدار k_1 و k_2 را محاسبه کنید.

ii. اگر $X > 0/5$، احتمال آنکه X از $1/5$ کمتر باشد را بیابید.

تمرین ۲-۷. در مثال ها و تمرین های ۱-۱۶، ۱-۱۷، ۱-۱۸ و ۱-۱۹ مقدار امید ریاضی متغیرهای موجود را بدست آورید.

۱.۲ امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی

متغیر تصادفی X را درنظر بگیرید. با توجه به این نکته که تابعی از هر متغیر تصادفی، یک متغیر تصادفی است پس $Y = g(X)$ یک متغیر تصادفی خواهد بود. برای محاسبه امید ریاضی متغیر تصادفی $Y = g(X)$ می توان به دو روش زیر عمل کرد:

- **روش اول:** تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = g(X)$، یعنی $f_Y(y)$، را بدست آورده و بنابراین
  - اگر $Y = g(X)$ یک متغیر تصادفی گسسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(g(X)) = \mathrm{E}(Y) = \sum_y y f_Y(y)$$

  - اگر $Y = g(X)$ یک متغیر تصادفی پیوسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(g(X)) = \mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) \mathrm{dy}$$

- **روش دوم:** برای محاسبه امید ریاضی $Y = g(X)$، می توان از قضیه زیر استفاده کرد.

قضیه ۲-۸. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی تابع $g(X)$ به صورت زیر بدست می آید:

- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(g(X)) = \sum_x g(x)f_X(x)$$

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\mathrm{dx}$$

بدست آوردن امید ریاضی $Y = g(X)$، از دو روش مطرح شده منجر به یک جواب می گردد.

مثال ۲-۹. فرض کنید متغیر تصادفی X، دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. امید ریاضی $g(X) = (X - 1)^2$ را به دست آورید.

x	-1	0	1	2
$f_X(x)$	$0/1$	$0/1$	$0/5$	$0/3$

حل: واضح است که X یک متغیر تصادفی گسسته است. از روش دوم استفاده می کنیم و داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((X-1)^2) &= \sum_{x=-1}^{2}(x-1)^2 f_X(x)\\ &= (-1-1)^2(0/1) + (0-1)^2(0/1) + (1-1)^2(0/5) + (2-1)^2(0/3)\\ &= 0/8\end{aligned}$$

برای روش اول داریم، $Y = (X-1)^2$ و $S_Y = \{0, 1, 4\}$. بنابراین

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(Y=0) = \mathrm{P}(X=1) = 0/5\\ &\mathrm{P}(Y=1) = \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=2) = 0/1 + 0/3 = 0/4\\ &\mathrm{P}(Y=4) = \mathrm{P}(X=-1) = 0/1\\ &\Longrightarrow \mathrm{E}(Y) = 0 \times 0/5 + 1 \times 0/4 + 4 \times 0/1 = 0/8\end{aligned}$$

مثال ۲-۱۰. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. امید ریاضی $g(X) = ۵X - ۴$ را به دو روش بدست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۱۶}\sqrt{x} & \text{if} \quad ۰ < x < ۴ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

حل: واضح است که X یک متغیر تصادفی پیوسته بوده و بنابراین $Y = g(X)$ نیز یک متغیر تصادفی پیوسته است. از روش اول داریم:

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(۵X - ۴ \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \frac{y+۴}{۵}) = F_X(\frac{y+۴}{۵})$$
$$\Longrightarrow f_Y(y) = F'_X(\frac{y+۴}{۵}) = \frac{۱}{۵}f_X(\frac{y+۴}{۵}) = \frac{۳}{۸۰}\sqrt{\frac{y+۴}{۵}}$$
$$۰ < \frac{y+۴}{۵} < ۴ \Longrightarrow -۴ < y < ۱۶$$

or

$$۰ < x < ۴ \Longrightarrow -۴ < ۵x - ۴ < ۱۶ \Longrightarrow -۴ < y < ۱۶$$
$$\Longrightarrow \mathrm{E}(Y) = \int_{-۴}^{۱۶} \frac{۳}{۸۰} y \sqrt{\frac{y+۴}{۵}} \mathrm{dy} = (\frac{۱}{۱۰۰۰}(y+۴)(-۸+۳y)\sqrt{۵y+۲۰})|_{-۴}^{۱۶} = ۸$$

از روش دوم نیز داریم:

$$\mathrm{E}(۵X - ۴) = \int_{۰}^{۴} (۵x - ۴)\frac{۳}{۱۶}\sqrt{x}\mathrm{dx} = (\frac{۱}{۸}(-۴+۳x)x^{\frac{۳}{۲}})|_{۰}^{۴} = ۸$$

۲.۲ خواص امید ریاضی

۱. اگر c یک عدد ثابت باشد، آن گاه $\mathrm{E}(c) = c$.

اثبات. فرض کنید c مقدار یک متغیر تصادفی دلخواه باشد که آن را با X نشان می دهیم. داریم:

- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(c) = \sum_x c f_X(x) = c \sum_x f_X(x) = c \times ۱ = c$$

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c f_X(x)\mathrm{dx} = c\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = c \times ۱ = c$$

□

۲. اگر $g(X)$ و $h(X)$ توابعی از متغیر تصادفی X بوده و a و b دو مقدار ثابت باشند آن‌گاه

$$\mathrm{E}(ag(X)+bh(X)) = a\mathrm{E}(g(X)) + b\mathrm{E}(h(X))$$

اثبات. طبق تعریف امید ریاضی داریم:

- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(ag(X)+bh(X)) &= \sum_x (ag(x)+bh(x))f_X(x)\\ &= \sum_x ag(x)f_X(x) + \sum_x bh(x)f_X(x)\\ &= a\sum_x g(x)f_X(x) + b\sum_x h(x)f_X(x)\\ &= a\mathrm{E}(g(X)) + b\mathrm{E}(h(X))\end{aligned}$$

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(ag(X)+bh(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ag(x)+bh(x))f_X(x)\mathrm{dx}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ag(x)f_X(x)\mathrm{dx} + \int_{-\infty}^{\infty} bh(x)f_X(x)\mathrm{dx}\\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\mathrm{dx} + b\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f_X(x)\mathrm{dx}\\ &= a\mathrm{E}(g(X)) + b\mathrm{E}(h(X))\end{aligned}$$

□

۳. اگر X یک متغیر تصادفی و a و b اعداد ثابت باشند آن‌گاه $\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X)+b$.

اثبات. برای اثبات کافی است در خاصیت دوم، جایگذاری $g(X) = X$ و $h(X) = ۱$ را انجام دهیم. □

تمرین ۲-۱۲. در تمرین های ۱-۲۱، ۱-۲۲ و ۱-۲۴ مقدار امید ریاضی متغیرهای موجود را بدست آورید.

۳.۲ واریانس و خواص آن

همانطور که در ابتدای فصل نیز توضیح داده شد، اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و تابع توزیع $F_X(x)$ باشد، $\mathrm{E}(X)$ مقدار مورد انتظاری است که قبل از وقوع آزمایش تصادفی مورد توجه قرار می‌گیرد. اما نتایج یک آزمایش تصادفی می‌تواند متفاوت با مقدار مورد انتظار (امید ریاضی) $\mathrm{E}(X)$ باشد که این تفاوت را می‌توان به صورت $|X - \mathrm{E}(X)|$ نمایش داد که **انحراف از میانگین** نامیده می‌شود.

واضح است که $|X - \mathrm{E}(X)|$ یک متغیر تصادفی است و بنابراین علاقمندیم تا میزان انحراف از میانگین را به طور متوسط بدست آوریم، یعنی

متوسط میزان انحراف متغیر تصادفی X از مقدار مورد انتظار $\mathrm{E}(X)$: $\mathrm{E}(|X - \mathrm{E}(X)|)$

اما از آنجایی که کار کردن با قدر مطلق دشوار است، بجای تابع قدر مطلق از توان دوم استفاده می‌کنیم. یعنی

$$\mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))^۲$$

که آن را واریانس متغیر تصادفی X می‌نامند و به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\sigma^۲ = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))^۲ = \mathrm{E}(X - \mu_X)^۲ \qquad (۱-۲)$$

برای محاسبه واریانس متغیر تصادفی X، می‌توان رابطه (۲-۱) را به شکل زیر ساده کرد

$$\begin{aligned}
\sigma^۲ = \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X - \mu_X)^۲ \\
&= \mathrm{E}(X^۲ + \mu_X^۲ - ۲X\mu_X) \\
&= \mathrm{E}(X^۲) + \mathrm{E}(\mu_X^۲) - ۲\mathrm{E}(X\mu_X) \\
&= \mathrm{E}(X^۲) + \mu_X^۲ - ۲\mu_X \mathrm{E}(X) \\
&= \mathrm{E}(X^۲) + \mu_X^۲ - ۲\mu_X^۲ \\
&= \mathrm{E}(X^۲) - \mu_X^۲
\end{aligned}$$

بنابراین $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^۲) - \mu_X^۲ = \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}^۲(X)$.

مثال ۲-۱۳. واریانس متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر را پیدا کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} ۴xe^{-۲x} & \text{if} \quad x > ۰ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

حل:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_{0}^{\infty} x(4xe^{-2x})\mathrm{dx} = -(1+2x+2x^{2})e^{-2x}|_{0}^{\infty} = 1$$
$$\mathrm{E}(X^{2}) = \int_{0}^{\infty} x^{2}(4xe^{-2x})\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}(3+6x+6x^{2}+4x^{3})e^{-2x}|_{0}^{\infty} = \frac{3}{2}$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^{2}) - \mu^{2} = \frac{3}{2} - 1^{2} = \frac{1}{2}$$

تمرین ۲-۱۴. واریانس متغیرهای موجود در مثال ها و تمرین های ۱-۱۶، ۱-۱۷، ۱-۱۸، ۱-۲۱ و ۱-۲۲ را بدست آورید.

۱.۳.۲ خواص واریانس

فرض کنید a، b و c اعداد ثابت و X متغیر تصادفی باشد. در این صورت داریم:

۱. $\mathrm{Var}(c) = 0$.

اثبات. طبق خاصیت امید ریاضی داریم:

$$\mathrm{Var}(c) = \mathrm{E}(c - \mathrm{E}(c))^{2} = \mathrm{E}(c-c)^{2} = \mathrm{E}(0) = 0$$

□

۲. $\mathrm{Var}(aX+b) = a^{2}\mathrm{Var}(X)$.

اثبات. طبق خاصیت امید ریاضی بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(aX+b) &= \mathrm{E}\left((aX+b) - \mathrm{E}(aX+b)\right)^{2} \\
&= \mathrm{E}\left((aX+b) - (a\mathrm{E}(X)+b)\right)^{2} \\
&= \mathrm{E}\left(aX - a\mathrm{E}(X)\right)^{2} \\
&= \mathrm{E}\left(a^{2}(X-\mathrm{E}(X))^{2}\right) \\
&= a^{2}\mathrm{E}\left(X-\mathrm{E}(X)\right)^{2} \\
&= a^{2}\mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$

□

۲.۳.۲ نامساوی های احتمالاتی

برای محاسبه ی مقدار یک احتمال نیاز به تابع توزیع احتمال، تابع جرم احتمال و یا تابع چگالی است. در حالی که گاهی برای برخی متغیرهای تصادفی، قادر به تعیین هیچ یک از این توابع نیستیم اما می توان امید ریاضی و یا واریانس آن‌ها را حساب کرد. در چنین مواردی با اینکه نمی توانیم مقدار دقیق احتمال را محاسبه کنیم، می‌توان برای مقدار احتمال کران هایی به دست آورد.

نامساوی مارکوف. برای متغیرهای تصادفی نامنفی، بدون دانستن توزیع آن و فقط با استفاده از مقدار امیدریاضی، می توان کران بالایی برای مقادیر احتمال بدست آورد. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد. برای هر $a > 0$ داریم

$$\mathrm{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}.$$

اثبات. در حالت گسسته داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) = \sum_{x>0} x f_X(x) &\geq \sum_{x\geq a} x f_X(x)\\ &\geq \sum_{x\geq a} a f_X(x)\\ &= a\sum_{x\geq a} f_X(x)\\ &= a\mathrm{P}(X\geq a).\end{aligned}$$

در حالت پیوسته نیز اثبات بصورت مشابه خواهد بود. $\square$

نامساوی چبیشف. اگر X متغیر تصادفی با مقدار امیدریاضی متناهی μ و واریانس σ^2 باشد، آن گاه برای هر $k > 0$ داریم

$$\mathrm{P}(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

اثبات. با توجه به اینکه $(X-\mu)^2$ یک متغیر تصادفی منفی است و با فرض $a = k^2$ در نامساوی مارکوف داریم

$$\mathrm{P}((X-\mu)^2 \geq k^2) \leq \frac{\mathrm{E}(X-\mu)^2}{k^2}.$$

از طرفی می دانیم که $(X-\mu)^2 \geq k^2$ فقط در صورتی برقرار است که $|X-\mu| \geq k$. بنابراین داریم

$$\mathrm{P}(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\mathrm{E}(X-\mu)^2}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

$\square$

فصل ۳

برخی از توزیع های احتمال

در برخی از آزمایش های تصادفی، به دلیل وجود الگوی خاصی برای متغیرهای تصادفی، توزیع احتمال آن ها مشخص است. در این فصل برخی از این توزیع های احتمال خاص را معرفی کرده و برخی خواص آن ها را مطرح می کنیم.

۱.۳ توزیع احتمال گسسته

۱.۱.۳ توزیع برنولی

آزمایش تصادفی: آزمایشی را در نظر بگیرید که نتایج آن شامل تنها دو حالت شکست و موفقیت باشد. در واقع فضای نمونه در این آزمایش، دو عضوی است مثل آزمایش پرتاب یک سکه. در چنین آزمایشی، متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

- وقتی موفقیت حاصل شود: $X = ۱$.
- وقتی شکست حاصل شود: $X = ۰$

در چنین آزمایشی، p بعنوان احتمال پیروزی و یا موفقیت تعریف شده و q احتمال شکست در نظر گرفته می شود. بنابراین

$$p = \mathrm{P}(X = ۱)$$
$$q = \mathrm{P}(X = ۰) = ۱ - \mathrm{P}(X = ۱) = ۱ - p$$

در آزمایش تعریف شده، X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است و آن را با نماد $X \sim Be(p)$ نشان می دهیم. تابع چگالی احتمال توزیع برنولی به صورت زیر است

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = p^x(۱ - p)^{۱-x}, \qquad x = ۰, ۱$$

در یادگیری ماشین، بسیاری از مدل‌ها بر اساس مفروضات توزیع کار می‌کنند و توزیع برنولی (و سایر توزیع‌های احتمال گسسته) عمدتاً در مدل‌سازی مسائل طبقه‌بندی باینری و چند کلاسه استفاده می‌شوند. برخی از نمونه‌های مدل‌های طبقه‌بندی باینری عبارتند از فیلترهای هرزنامه که تشخیص می‌دهند ایمیل باید به‌عنوان «هرزنامه» یا «غیرهرزنامه» طبقه‌بندی شود، مدل‌هایی که می‌توانند پیش‌بینی کنند که آیا مشتری اقدام خاصی انجام خواهد داد یا نه، یا طبقه‌بندی یک محصول به عنوان مثال، یک کتاب یا یک فیلم نمونه ای از مدل طبقه بندی چند طبقه می تواند مدلی باشد که مشخص می کند کدام دسته از محصولات بیشتر مربوط به یک مشتری خاص است.

قضیه ۳-۱. اگر $X \sim Be(p)$، آن گاه $\mathrm{E}(X) = p$ و $\mathrm{Var}(X) = pq$.

اثبات. طبق تعریف امید ریاضی و واریانس یک متغیر تصادفی گسسته، و با استفاده از شکل تابع چگالی احتمال توزیع برنولی داریم

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=۰}^{۱} x\mathrm{P}(X = x) = ۰ \times q + ۱ \times p = p$$
$$\mathrm{E}(X^۲) = \sum_{x=۰}^{۱} x^۲\mathrm{P}(X = x) = ۰^۲ \times q + ۱^۲ \times p = p$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}^۲(X) = p - p^۲ = p(۱ - p) = pq$$

□

مثال ۳-۲. آزمایش پرتاب یک تاس را در نظر بگیرید که هدف از پرتاب آن مشاهده عدد ۶ باشد. در این صورت داریم:
اگر عدد ۶ مشاهده شود آن گاه $X = 1$؛
اگر عدد ۶ مشاهده نشود آن گاه $X = 0$.

$$p = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{6}, \qquad q = \mathrm{P}(X = 0) = \frac{5}{6}.$$

بنابراین $X \sim Be(\frac{1}{6})$ و در نتیجه

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = (\frac{1}{6})^x(\frac{5}{6})^{1-x}, \qquad x = 0, 1.$$

۲.۱.۳ توزیع دوجمله ای

آزمایش تصادفی: فرض کنید که یک آزمایش برنولی با احتمال p را n بار به طور مستقل تکرار کنیم.
متغیر تصادفی X: تعداد موفقیت های بدست آمده در n آزمایش انجام شده.
با فرض اینکه در فضای نمونه S، ۰ نشان دهنده شکست و ۱ نشان دهنده موفقیت باشد، داریم:

$$
\begin{array}{ccc}
 & X & \\
S & \longrightarrow & S_X \\
\underbrace{00\ldots0}_{n} & \longrightarrow & 0 \\
\left\{\begin{array}{c}
1\underbrace{0\ldots0}_{n-1} \\
01\underbrace{00\ldots0}_{n-2} \\
\vdots \\
\underbrace{00\ldots0}_{n-2}10 \\
\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1
\end{array}\right\} & \longrightarrow & 1 \\
\left\{\begin{array}{c}
11\underbrace{0\ldots0}_{n-2} \\
101\underbrace{00\ldots0}_{n-3} \\
\vdots \\
\underbrace{00\ldots0}_{n-3}101 \\
\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11
\end{array}\right\} & \longrightarrow & 2 \\
\vdots & & \\
\underbrace{11\ldots1}_{n} & \longrightarrow & n
\end{array}
$$

در واقع داریم:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ S & \longrightarrow & S_X \\ \left(\begin{array}{c} \underbrace{00\ldots0}_{n} \\ \left\{\begin{array}{c} 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1} \\ 01\underbrace{00\ldots0}_{n-2} \\ \vdots \\ \underbrace{00\ldots0}_{n-2}10 \\ \underbrace{00\ldots0}_{n-1}1 \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{c} 11\underbrace{0\ldots0}_{n-2} \\ 101\underbrace{00\ldots0}_{n-3} \\ \vdots \\ \underbrace{00\ldots0}_{n-3}101 \\ \underbrace{00\ldots0}_{n-2}11 \end{array}\right\} \\ \\ \vdots \\ \underbrace{11\ldots1}_{n} \end{array}\right) & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \end{array}$$

با توجه به اینکه در اینجا n تکرار آزمایش برنولی به صورت مستقل انجام می شود و در هر آزمایش انجام شده، تعداد حالاتی که می توان x موفقیت را در n آزمایش مشاهده کرد برابر با $\binom{n}{x}$ است، تابع چگالی احتمال X به صورت زیر بدست می آید

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n \tag{۱-۳}$$

در این صورت X یک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای (n,p) است که آن را به صورت $X \sim Bin(n,p)$ نمایش می دهیم.

مثال ۳-۳. سکه ای را که احتمال مشاهده شیر در آن دو برابر خط است، ۴ بار پرتاب می کنیم. اگر X تعداد شیرهای مشاهده شده در ۴ مرتبه پرتاب سکه باشد، احتمال $X=۳$ را بدست آورید.

حل: طبق اطلاعات مساله داریم

$$\mathrm{P}(H) = ۲\mathrm{P}(T)$$
$$\mathrm{P}(H) + \mathrm{P}(T) = ۱$$

پس $\mathrm{P}(T) = \frac{۱}{۳}$، $\mathrm{P}(H) = \frac{۲}{۳}$. همچنین با توجه به تعریف متغیر تصادفی X، $X \sim Bin(۴, \frac{۲}{۳})$. بنابراین

$$\mathrm{P}(X=x) = \binom{۴}{x} (\frac{۲}{۳})^x (\frac{۱}{۳})^{۴-x}, \qquad x = ۰, ۱, \ldots, ۴$$
$$\Longrightarrow \mathrm{P}(X=۳) = \binom{۴}{۳} (\frac{۲}{۳})^۳ (\frac{۱}{۳}) = ۴ \times (\frac{۲}{۳})^۳ \times (\frac{۱}{۳}) = \frac{۳۲}{۸۱}$$

قضیه ۳-۴. اگر $X \sim Bin(n,p)$ آن گاه $\mathrm{E}(X) = np$ و $\mathrm{Var}(X) = npq$.

اثبات. **روش اول:**

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{x=۰}^{n} x \binom{n}{x} p^x (۱-p)^{n-x} = \sum_{x=۱}^{n} x \binom{n}{x} p^x (۱-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=۱}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (۱-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{x=۱}^{n} \frac{(n-۱)!}{(x-۱)!(n-x)!} p^{x-۱} (۱-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{t=۰}^{n-۱} \frac{(n-۱)!}{t!(n-۱-t)!} p^t (۱-p)^{n-۱-t} \\
&= np \sum_{t=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{t} p^t (۱-p)^{n-۱-t} = np
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x(1-p)^{n-x} \\
&= np\sum_{x=1}^{n} x \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1}(1-p)^{n-x} \\
&= np\sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \frac{(n-1)!}{t!(n-1-t)!} p^{t}(1-p)^{n-1-t} \\
&= np\sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \binom{n-1}{t} p^{t}(1-p)^{n-1-t} \\
&= np\mathrm{E}(T+1) = np((n-1)p+1) \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = np((n-1)p+1) - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1-p)
\end{aligned}
$$

روش دوم: با توجه به اینکه متغیر تصادفی دوجمله ای X، تعداد موفقیت ها در n تکرار از یک آزمایش برنولی با پارامتر p است، داریم:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \tag{۳-۲}$$

به طوری که X_i ها متغیر تصادفی مستقل از توزیع برنولی با پارامتر p هستند. بنابراین با استفاده از خواص امید ریاضی و واریانس بدست می آوریم:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq
\end{aligned}
$$

$\square$

تمرین ۳-۵. میانگین و واریانس یک توزیع دوجمله ای به ترتیب ۳ و ۲ است. احتمال اینکه X بزرگتر یا مساوی ۲ باشد را بدست آورید.

مثال ۳-۶. یک تاس را ۵ بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه ۳ بار عدد ۴ مشاهده شود را بدست آورده و همچنین محاسبه کنید که با چه احتمالی حداکثر ۲ بار عدد ۴ مشاهده می شود.

حل: فرض کنید مشاهده عدد ۴ را موفقیت و مشاهده عددی غیر از ۴ را شکست در نظر بگیریم. در این صورت، X را تعداد موفقیت در ۵ بار پرتاب تاس تعریف می کنیم و داریم: $X \sim Bin(5, p)$ به طوری که احتمال مشاهده عدد ۴ در هر پرتاب تاس: p

$$p = \frac{1}{6}$$

بنابراین

$$\mathrm{P}(X = x) = \binom{5}{x} (\frac{1}{6})^x (\frac{5}{6})^{5-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, 5$$

$$\Longrightarrow \mathrm{P}(X = 3) = \binom{5}{3} (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^2 = \frac{5!}{3!2!} \times (\frac{1}{6})^3 \times (\frac{5}{6})^2 = \frac{125}{648}$$

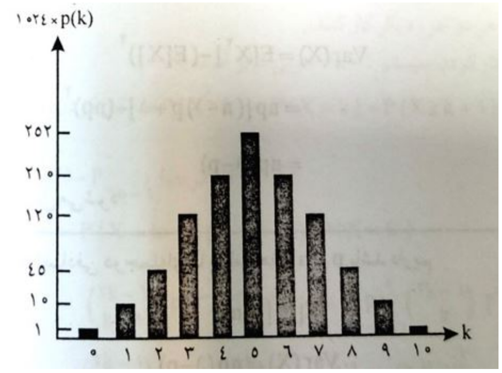
$$\Longrightarrow \mathrm{P}(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \mathrm{P}(X = x) = \binom{5}{0} (\frac{5}{6})^5 + \binom{5}{1} (\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^4 + \binom{5}{2} (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^3 = 0/9645$$

تمرین ۳-۷. یک سکه نااریب را پنج بار مستقلا پرتاب می کنیم. احتمال اینکه دو شیر و سه خط مشاهده شود را بیابید.

تمرین ۳-۸. بسکتبالیستی ۶۰درصد از توپ هایش گل می شود. اگر در یک بازی او ۵ پرتاب مستقل انجام دهد، احتمال اینکه حداقل دو تا از این پرتاب ها گل شود را بدست آورید. همچنین محاسبه کنید که بطور متوسط انتظار دارید این بازیکن چند گل در این بازی بزند.

تمرین ۳-۹. یک آزمون ریاضی، متشکل از ۱۵ تست چهار گزینه ای است که در هر تست تنها یک گزینه صحیح است. شخصی بدون آمادگی لازم در این امتحان شرکت می کند و تست ها را شانسی پاسخ می دهد. احتمال اینکه دست کم ۵ تست را درست پاسخ دهد چقدر است؟

تمرین ۳-۱۰. در یک چهارراه، چراغ سبز ۱۵ ثانیه، چراغ زرد ۵ ثانیه و چراغ قرمز ۳۰ ثانیه دوام دارد. راننده ای ده بار در روز بین ساعت ۸ تا ۹ از این چهارراه می گذرد. احتمال اینکه دقیقا سه بار در روز به چراغ قرمز برخورد کند را محاسبه کنید.



شکل ۳-۱: نمودار تابع چگالی احتمال $Bin(۱۰, ۰/۵)$

حال می خواهیم در مورد فرم تابع چگالی احتمال توزیع دوجمله ای بحث کوتاهی داشته باشیم. طبق **(۳-۱)** اگر $X \sim Bin(n,p)$ آن گاه برای مقدار دلخواه k، $۰ < k \leq n$ داریم

$$\frac{f_X(k)}{f_X(k-۱)} = \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(۱-p)^{n-k}}{\begin{pmatrix} n \\ k-۱ \end{pmatrix} p^{k-۱}(۱-p)^{n-k+۱}}$$
$$= \frac{(n-k+۱)p}{k(۱-p)}$$
$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} f_X(k) \geq f_X(k-۱) \iff k \leq (n+۱)p \\ f_X(k) \leq f_X(k-۱) \iff k \geq (n+۱)p \end{cases}.$$

پس می توان نتیجه گرفت که اگر $X \sim Bin(n,p)$، وقتی k از ۰ تا n افزایش می یابد، $f_X(k)$ ابتدا صعودی یکنوا و سپس نزولی یکنوا است و بیشترین مقدار خود را زمانی انتخاب می کند که $k = \lfloor (n+۱)p \rfloor$ (یعنی k بزرگترین مقدار صحیح کوچکتر یا مساوی $(n+۱)p$ باشد).

در شکل ۲.۱.۳ فرم تابع چگالی احتمال متغیری از توزیع $Bin(۱۰, ۰/۵)$ نمایش داده شده است.

۳.۱.۳ توزیع پواسون

آزمایش تصادفی: فرض کنید که وقوع رخدادی را در یک بازه زمانی (یا مکانی) مشخص بررسی می کنیم.
متغیر تصادفی X: تعداد رخدادها در یک بازه زمانی یا مکانی مشخص.

درواقع توزیع پواسون یکی دیگر از توزیع های گسسته است که احتمال رخداد یک اتفاق به تعداد مشخص را در بازه زمانی یا مکانی ثابت شرح می دهد. برای مثال:

- تعداد اشتباهات تایپی در یک صفحه از یک کتاب.
- تعداد افراد از یک جامعه که بیش از ۱۰۰ سال عمر می کنند.
- تعداد تلفن هایی که در یک روز به یک مرکز مشاوره می شود.
- تعداد کالاهای معیوب که در محموله از تولیدات یک کارخانه وجود دارد.
- تعداد مراجعین به یک کلینیک پزشکی در یک ماه مشخص.

دقت کنید که تعداد رخدادها می تواند مقادیر $\circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots$ را داشته باشد. با این تفاسیر، اگر متغیر تصادفی X به صورت تعداد رخداد رویدادی در بازه زمانی یا مکانی مشخص تعریف شده باشد، داریم $S_X = \{\circ, \text{۱}, \ldots\}$.
متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ، $\lambda > \circ$ ، است هرگاه

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \qquad x = \circ, \text{۱}, \ldots. \tag{۳-۳}$$

متغیر تصادفی X که دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد را به صورت $X \sim P(\lambda)$ نمایش می دهیم.

مثال ۳-۱۱. فرض کنید تعداد اشکالات تایپی در یک صفحه از یک کتاب، دارای توزیع پواسون با پارامتر ۰٫۵ باشد. احتمال اینکه حداقل یک اشتباه تایپی در این صفحه باشد را محاسبه کنید.
حل: X: تعداد اشکالات تایپی در یک صفحه

$$X \sim P(\circ/\text{۵}) \implies \mathrm{P}(X \geq \text{۱}) = \text{۱} - \mathrm{P}(X \leq \circ) = \text{۱} - \frac{e^{-\circ/\text{۵}}(\circ/\text{۵})^{\circ}}{\circ!} = \circ/\text{۳۹۳}$$

تمرین ۳-۱۲. اگر هر دو دقیقه یک نفر وارد کتابخانه ای شود، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه

الف. حداقل یک نفر بین ساعت ۱۲ تا ۱۲:۰۵ وارد کتابخانه شود.

ب. یک تا چهار نفر بین ساعت ۱۲ تا ۱۲:۰۵ وارد کتابخانه شوند.

قضیه ۳-۱۳. اگر $X \sim P(\lambda)$ آن گاه $\mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

اثبات.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda\sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda\sum_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!} = \lambda$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!} = \lambda\mathrm{E}(T+1) = \lambda(\lambda+1) \\
&\implies \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

□

برابر بودن امیدریاضی و واریانس در توزیع پواسون یکی از مهم ترین ویژگی های این توزیع بوده که آن را از دیگر توزیع ها متمایز می نماید.

مثال ۳-۱۴. یک ماشین نویس بطور متوسط ۲ اشتباه در هر صفحه تایپ می کند. احتمال اینکه او در صفحه بعدی حداقل چهار اشتباه داشته باشد را محاسبه کنید. همچنین محاسبه کنید که با چه احتمالی در ۴ صفحه بعد اشتباهی وجود نخواهد داشت.

حل: تعریف می کنیم، X: تعداد اشتباهات در یک صفحه و داریم $\lambda = 2$. پس

$$\begin{aligned}
X \sim P(2) \implies \mathrm{P}(X \geq 4) &= 1 - \mathrm{P}(X \leq 3) = 1 - F_X(3) \\
&= 1 - \sum_{x=0}^{3}\frac{e^{-2}2^x}{x!} = 1 - 0/8571 = 0/1429.
\end{aligned}$$

برای قسمت دوم تعریف می کنیم، Y: تعداد اشتباهات در چهار صفحه و طبق تعریف $Y \sim P(\lambda^*)$ و داریم

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{\lambda^*}{4} \implies \lambda^* = 8 \qquad \implies \mathrm{P}(Y \geq 0) = e^{-8} = 0/0003$$

نکته قابل توجه در توزیع پواسون این است که این توزیع تقریب مناسبی برای توزیع دوجمله ای با پارامترهای (n,p) وقتی n بزرگ و p کوچک باشد به طوری که np مقدار معقولی باشد، است.

برای درک بهتر، فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد به طوری که $X \sim Bin(n,p)$. در این صورت با فرض $\lambda = np$ داریم

$$\begin{aligned} f_X(x) = \mathrm{P}(X=x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(۱-p)^{n-x} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!}(\frac{\lambda}{n})^x(۱-\frac{\lambda}{n})^{n-x} \\ &= \frac{n(n-۱)\dots(n-x+۱)}{n^x} \times \frac{\lambda^x}{x!} \times \frac{(۱-\frac{\lambda}{n})^n}{(۱-\frac{\lambda}{n})^x} \end{aligned} \tag{۳-۴}$$

می دانیم که برای n بزرگ وقتی λ مقداری معقول باشد، روابط زیر برقرار است

$$\begin{aligned} &(۱-\frac{\lambda}{n})^n \cong e^{-\lambda} \\ &\frac{n(n-۱)\dots(n-x+۱)}{n^x} \cong ۱ \\ &(۱-\frac{\lambda}{n})^x \cong ۱ \end{aligned}$$

در نتیجه (۳-۴) به صورت زیر قابل بازنویسی است

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

که همان تابع چگالی توزیع پواسون می باشد.

مثال ۳-۱۵. فرض کنید احتمال اینکه یک قطعه تولید شده توسط یک دستگاه مشخص، معیوب باشد برابر با ۰٫۱ باشد. احتمال اینکه در یک نمونه ۱۰ تایی حداکثر یک قطعه معیوب وجود داشته باشد چقدر است؟

حل: X: تعداد قطعات معیوب در نمونه ۱۰ تایی

$$X \sim Bin(۱۰, ۰٫۱) \implies \mathrm{P}(X \leq ۱) = \begin{pmatrix} ۱۰ \\ ۰ \end{pmatrix} ۰٫۹^{۱۰} + \begin{pmatrix} ۱۰ \\ ۱ \end{pmatrix} (۰٫۱)(۰٫۹^{۹}) = ۰٫۷۳۶۱$$

در حالی که اگر از تقریب پواسون استفاده کنیم داریم

$$X \sim P(۱) \implies \mathrm{P}(X \leq ۱) = \frac{e^{-۱}(۱)^{۰}}{۰!} + \frac{e^{-۱}(۱)^{۱}}{۱!} = ۰٫۷۳۵۸$$

نکته حایز اهمیت دیگر در مورد توزیع پواسون این است که، حتی اگر آزمایشی داشته باشیم که در آن یک آزمایش برنولی با وابستگی ضعیفی n بار تکرار شود و n بزرگ باشد باز هم توزیع پواسون تقریب خوبی برای تعداد موفقیت ها خواهد بود.

۴.۱.۳ توزیع هندسی

آزمایش تصادفی: فرض کنید که یک آزمایش برنولی با احتمال p را به طور مستقل آنقدر تکرار کنیم تا برای اولین بار به موفقیت برسیم.
متغیر تصادفی X: تعداد تکرار لازم تا رسیدن به موفقیت.
با فرض اینکه در فضای نمونه S، ۰ نشان دهنده شکست و ۱ نشان دهنده موفقیت باشد، داریم:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ S & \longrightarrow & S_X \\ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰۱ \\ ۰۰۱ \\ ۰۰۰۱ \\ \vdots \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

متغیر تصادفی X تعریف شده، دارای توزیع هندسی با پارامتر p است و می نویسیم $X \sim G(p)$. برای این متغیر تصادفی تابع چگالی به صورت زیر است

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = pq^{x-۱} = p(۱ - p)^{x-۱} \qquad x = ۱, ۲, \ldots .$$

مثال ۳-۱۶. فرض کنید احتمال قبولی یک نفر در امتحان رانندگی ۰/۷ باشد. مطلوب است

الف. احتمال اینکه این فرد در مرتبه سوم در آزمون رانندگی قبول شود را بیابید.

ب. احتمال اینکه این فرد حداکثر در سومین بار قبول شود را محاسبه کنید.

حل: اگر قبولی در آزمون رانندگی را موفقیت تعریف کنیم و X تعداد دفعات شرکت در آزمون تا قبولی باشد داریم $X \sim G(۰/۷)$. بنابراین برای قسمت الف بدست می آوریم

$$\mathrm{P}(X = ۳) = f_X(۳) = (۰/۷)(۰/۳)^۲ = ۰/۰۶۳.$$

و در قسمت ب داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \leq ۳) &= ۱ - \mathrm{P}(X > ۳) = ۱ - \sum_{x=۴}^{\infty}(۰/۷)(۰/۳)^{x-۱} = ۱ - ۰/۷\frac{(۰/۳)^۳}{۱-۰/۳} \\ &= ۱ - (۰/۳)^۳ = ۰/۹۸۳\end{aligned}$$

مثال ۳–۱۷. ظرفی شامل N توپ سفید و M توپ سیاه است. توپ ها را یک به یک و به تصادف از ظرف انتخاب می کنیم، تا بلاخره یک توپ سیاه مشاهده شود. اگر فرض کنیم هر توپ انتخاب شده را قبل از انتخاب توپ بعدی به ظرف برمی گردانیم، مطلوب است احتمال اینکه

الف. n انتخاب لازم باشد.

ب. حداقل k انتخاب لازم باشد.

حل: اگر انتخاب توپ سیاه را موفقیت تعریف کنیم و X تعداد انتخاب ها تا انتخاب اولین توپ سیاه باشد داریم $X \sim G(p)$ به طوری که

$$p = \frac{M}{M+N}.$$

بنابراین برای قسمت الف بدست می آوریم

$$\mathrm{P}(X = n) = (\frac{M}{M+N})(\frac{N}{M+N})^{n-۱}.$$

و در قسمت ب داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \geq k) &= \sum_{x=k}^{\infty}(\frac{M}{M+N})(\frac{N}{M+N})^{x-۱} \\ &= (\frac{M}{M+N})\frac{(\frac{N}{M+N})^{k-۱}}{۱-\frac{N}{M+N}} \\ &= (\frac{M}{M+N})\frac{(\frac{N}{M+N})^{k-۱}}{\frac{M}{M+N}} = (\frac{N}{M+N})^{k-۱}.\end{aligned}$$

قضیه ۳-۱۸. اگر $X \sim G(p)$ آن گاه $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$ و $\mathrm{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$.

اثبات.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq}}q^x = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq}}\sum_{x=1}^{\infty} q^x = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq}}\frac{q}{1-q} \\
&= p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \\
\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2pq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} x^2q^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq}}xq^x = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq}}\sum_{x=1}^{\infty} xq^x = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq}}\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p}{p}xq^x \\
&= p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq}}(\frac{q}{p}\sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1}) = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq}}(\frac{q}{p}\mathrm{E}(X)) = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq}}(\frac{q}{(1-q)^2}) = p\frac{(1-q)^2+2q(1-q)}{(1-q)^4} \\
&= p\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2} \\
&\Longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}
\end{aligned}$$

□

مثال ۳-۱۹. معلم فراموشکاری به خاطر نمی آورد که کدام یک از ۱۲ کلیدی که در دست دارد مربوط به کار اوست. اگر کلیدها را به تصادف و با جایگذاری امتحان کند مطلوب است

الف. احتمال اینکه دفتر کارش بعد از تنها سه امتحان باز شود را بیابید.

ب. بطور متوسط باید چند کلید را برای باز شدن دفتر کارش امتحان کند؟

حل: اگر انتخاب کلید درست را موفقیت تعریف کنیم و X تعداد انتخاب ها تا انتخاب کلید درست باشد داریم $X \sim G(p)$ به طوری که

$$p = \frac{1}{12}.$$

بنابراین برای قسمت الف بدست می آوریم

$$\mathrm{P}(X = 3) = (\frac{1}{12})(\frac{11}{12})^2 = 0/07.$$

و در قسمت ب داریم $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p} = 12$ و این بدین معناست که بطور متوسط ۱۲ کلید امتحان می شود.

۵.۱.۳ توزیع فوق هندسی

آزمایش تصادفی: فرض کنید که از بین N عضو که m تای آن ها دارای ویژگی خاصی هستند یک نمونه n تایی می گیریم.
متغیر تصادفی X: تعداد عضوهای انتخاب شده که دارای ویژگی خاص هستند.
در این صورت، X می تواند یکی از مقادیر $۰, ۱, ۲, \ldots, n$ را داشته باشد و داریم

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots, n. \qquad (۳\text{-}۵)$$

متغیر تصادفی با تابع چگالی فوق متغیری از توزیع فوق هندسی نامیده می شود که آن را به صورت $X \sim HG(N, m, n)$ نمایش می دهیم.

دقت کنید که اگر $X \sim HG(N, m, n)$، X **نمی تواند کمتر از** $n - (N - m)$ **یا بیشتر از** $\min\{n, m\}$ **باشد. البته مقدار تابع چگالی توزیع فوق هندسی نشان داده شده در (۳-۵) برای مقادیر** $x < n - (N - m)$ **و** $x > \min\{n, m\}$ **صفر است.**

مثال ۳-۲۰. در انتخاب ۵ قطعه از بین ۴۰ قطعه که ۳ تای آن ها خراب هستند، احتمال این را پیدا کنید که حداکثر یک قطعه انتخاب شده خراب باشد.
حل: اگر X تعداد قطعات خراب انتخاب شده در بین ۵ قطعه باشد، آن گاه $X \sim HG(۴۰, ۳, ۵)$ و بنابراین

$$\mathrm{P}(X \leq ۱) = \sum_{x=۰}^{۱} \frac{\binom{۳}{x}\binom{۳۷}{۵-x}}{\binom{۴۰}{۵}} = \frac{\binom{۳}{۰}\binom{۳۷}{۵}}{\binom{۴۰}{۵}} + \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳۷}{۴}}{\binom{۴۰}{۵}} = ۰/۹۶۳۵.$$

قضیه ۳-۲۱. اگر $X \sim HG(N,m,n)$ آن گاه $\mathrm{E}(X) = \frac{nm}{N}$ و $\mathrm{Var}(X) = \frac{nm}{N}(1-\frac{m}{N})(\frac{N-n}{N-1})$.

اثبات.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=1}^{n} x \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x \frac{\frac{m!}{x!(m-x)!} \times \frac{(N-m)!}{(n-x)!(N-m-n+x)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{\frac{m!}{(x-1)!(m-x)!} \times \frac{(N-m)!}{(n-x)!(N-m-n+x)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{\frac{m(m-1)!}{(x-1)!(m-x)!} \times \frac{(N-m)!}{(n-x)!(N-m-n+x)!}}{\frac{N(N-1)!}{n(n-1)!(N-n)!}} \\
&= \frac{nm}{N} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\frac{(m-1)!}{t!(m-1-t)!} \times \frac{(N-m)!}{(n-t-1)!(N-m-n+t+1)!}}{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}} \\
&= \frac{nm}{N} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\binom{m-1}{t}\binom{N-m}{n-1-t}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nm}{N}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^۲) &= \sum_{x=۰}^{n} x^۲ \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=۱}^{n} x^۲ \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{x=۱}^{n} x \frac{\frac{m!}{(x-۱)!(m-x)!} \times \frac{(N-m)!}{(n-x)!(N-m-n+x)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \\
&= \sum_{x=۱}^{n} x \frac{\frac{m(m-۱)!}{(x-۱)!(m-x)!} \times \frac{(N-m)!}{(n-x)!(N-m-n+x)!}}{\frac{N(N-۱)!}{n(n-۱)!(N-n)!}} \\
&= \frac{nm}{N} \sum_{t=۰}^{n-۱} (t+۱) \frac{\frac{(m-۱)!}{t!(m-۱-t)!} \times \frac{(N-m)!}{(n-t-۱)!(N-m-n+t+۱)!}}{\frac{(N-۱)!}{(n-۱)!(N-n)!}} \\
&= \frac{nm}{N} \sum_{t=۰}^{n-۱} (t+۱) \frac{\binom{m-۱}{t}\binom{N-m}{n-۱-t}}{\binom{N-۱}{n-۱}} \\
&= \frac{nm}{N}\mathrm{E}(T+۱) = \frac{nm}{N}(\frac{(n-۱)(m-۱)}{N-۱}+۱) \\
\Longrightarrow \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}^۲(X) = \frac{nm}{N}(\frac{(n-۱)(m-۱)}{N-۱}+۱) - (\frac{nm}{N})^۲ \\
&= \frac{nm}{N}(\frac{(n-۱)(m-۱)}{N-۱} + ۱ - \frac{nm}{N}) \\
&= \frac{nm}{N}(\frac{N-n}{N-۱})\left(\frac{(n-۱)(m-۱)}{N-n} + \frac{N-۱}{N-n} - \frac{nm}{N}\frac{N-۱}{N-n}\right) \\
&= \frac{nm}{N}(\frac{N-n}{N-۱})(\frac{N-m}{N}) \\
&= \frac{nm}{N}(\frac{N-n}{N-۱})(۱-\frac{m}{N})
\end{aligned}
$$

$\square$

تمرین ۳-۲۲. یک مهندس کنترل کیفیت از هر ۲۴ باطری ماشین که آماده بارگیری است، ۳ باطری را بررسی می کند. اگر در بین ۲۴ باطری، ۶ باطری دارای نقص جزئی باشند، احتمال اینکه در نمونه ای که بازرسی می شود،

الف. هیچ کدام از باطری ها نقص جزئی نداشته باشند را بیابید.

ب. فقط یکی از باطری ها دارای نقص جزئی باشد را بیابید.

ج. حداقل ۲ باطری دارای نقص باشد را محاسبه کنید.

توجه داشته باشید که هرگاه m و N در مقایسه با n بزرگ باشد، تابع احتمال X با تابع احتمال متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای n و $p = \frac{m}{N}$ تقریب زده می شود. برای اثبات، در صورتی که $p = \frac{m}{N}$ و m و N در مقایسه با n و xبزرگ باشند داریم

$$
\begin{aligned}
X \sim HG(N,m,n) \implies f_X(x) = \mathrm{P}(X=x) &= \frac{\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-m \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \\
&= \frac{m!}{x!(m-x)!} \times \frac{(N-m)!}{(N-m-n+x)!(n-x)!} \times \frac{(N-n)!n!}{N!} \\
&= \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \times \frac{m}{N} \times \frac{m-1}{N-1} \times \ldots \times \frac{m-x+1}{N-x+1} \\
&\quad \times \frac{N-m}{N-x} \times \frac{N-m-1}{N-x-1} \times \ldots \times \frac{N-m-(n-x-1)}{N-x-(n-x-1)} \\
&\cong \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

تمرین ۳-۲۳. کارخانه ای کالای تولید شده را در جعبه های ۲۵ تایی به بازار عرضه می کند. نحوه کار به این صورت است که قبل از عرضه به بازار از جعبه آماده شده یک نمونه ۳ تایی انتخاب می شود و در صورتی که هیچ کالای معیوبی دیده نشود، جعبه به بازار عرضه شده و اگر کالای معیوبی در این نمونه ۳ تایی باشد، جعبه به کارخانه بازگردانده می شود. احتمال اینکه جعبه ای که دارای ۴ کالای معیوب است به بازار عرضه شود چقدر است؟

۶.۱.۳ توزیع یکنواخت گسسته

در حالتی که متغیر تصادفی گسسته X همه مقادیر در تکیه گاه خود را با احتمالات یکسان اختیار کند، ساده ترین توزیع احتمال گسسته را تحت عنوان توزیع یکنواخت گسسته خواهیم داشت. درواقع، متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته با پارامتر k است و می نویسیم $X \sim DU(k)$، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = \frac{1}{k} \qquad x = x_1, x_2, \ldots, x_k.$$

به سادگی می توان نشان داد که اگر $X \sim DU(k)$ آن گاه

$$\begin{aligned}\mu = \mathrm{E}(X) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \\ \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i-\mu)^2}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2 \\ &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \mu^2\end{aligned}$$

مثال ۳-۲۴. یک صفحه هدف زنی دایره ای شکل به ۱۵ قطعه مساوی تقسیم شده و با شماره های ۱ تا ۱۵ متمایز گردیده است. اگر X برابر با عددی باشد که تیر در قطعه مربوط به آن اصابت کرده، امید ریاضی و واریانس X را محاسبه کنید. همچنین احتمال اینکه تیر در قطعه ای با حداقل شماره ۱۰ برخورد کند را بدست آورید.

حل:

$$X \sim DU(15) \implies f_X(x) = \frac{1}{15} \quad x = 1, 2, \ldots, 15.$$

$$\implies \begin{cases} \mathrm{E}(X) = \frac{1}{15}\sum_{x=1}^{15} x = \frac{1}{15} \times \frac{15\times 16}{2} = 8 \\ \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{15}\sum_{x=1}^{15}(x-8)^2 = \frac{56}{3} \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{15} \frac{1}{15} = \frac{6}{15}$$

۲.۳ توزیع احتمال پیوسته

۱.۲.۳ توزیع یکنواخت

متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت بر روی بازه (α,β) است و آن را به صورت $X \sim U(\alpha,\beta)$ نشان می دهیم هرگاه تابع چگالی آن به شکل زیر باشد

$$f_X(x) = \frac{۱}{\beta-\alpha} \qquad x \in (\alpha,\beta).$$

دقت کنید که براساس تابع چگالی فوق برای هر بازه (a,b) به طوری که $(a,b) \subseteq (\alpha,\beta)$، داریم

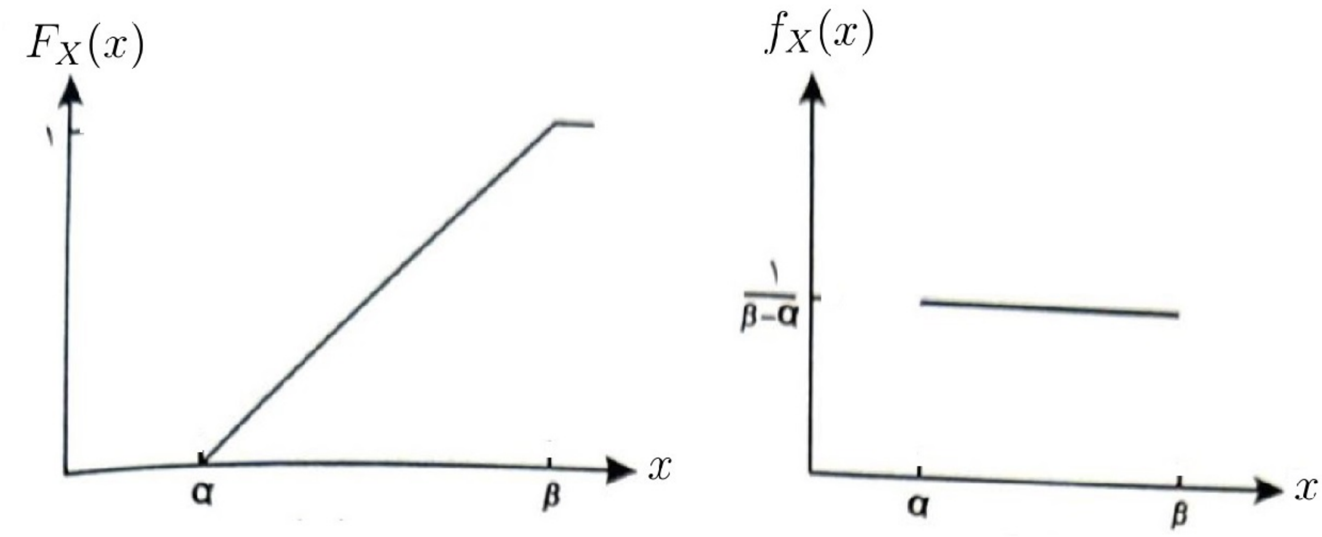
$$\mathrm{P}(a < X < b) = \int_a^b \frac{۱}{\beta-\alpha}\mathrm{dx} = \frac{b-a}{\beta-\alpha}. \tag{۳-۶}$$

درواقع، متغیر تصادفی یکنواخت X شانس یکسانی برای قرارگرفتن در هر زیربازه با طول یکسان از S_X دارد.

اگر $X \sim U(\alpha,\beta)$، آن گاه

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathrm{P}(X \le x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{dt} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} ۰\mathrm{dt} = ۰ & \text{if} \quad x < \alpha \\ \int_{\alpha}^{x} \frac{۱}{\beta-\alpha}\mathrm{dt} = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{if} \quad \alpha \le x < \beta \\ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{۱}{\beta-\alpha}\mathrm{dt} = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} = ۱ & \text{if} \quad \beta \le x \end{cases} \end{aligned}$$

فرم تابع چگالی و تابع توزیع X به طوری که $X \sim U(\alpha,\beta)$ در شکل ۱.۲.۳ نشان داده شده است.



شکل ۳-۲: نمودار تابع چگالی و تابع توزیع $X \sim U(\alpha,\beta)$.

مثال ۳-۲۵. فرض کنید B عددی تصادفی در بازه $(-۳, ۳)$ باشد. احتمال اینکه معادله درجه دوم $x^۲ + Bx + ۱$ حداقل دارای یک ریشه حقیقی باشد را بیابید.

حل: با توجه به تعریف، $B \sim U(-۳, ۳)$ و

$$f_B(b) = \frac{۱}{۶} \qquad \text{if } -۳ < b < ۳.$$

اگر $\Delta = B^۲ - ۴ \geq ۰$ آن گاه معادله ذکر شده دارای حداقل یک ریشه حقیقی است. بنابراین داریم

$$\mathrm{P}(B^۲ - ۴ \geq ۰) = \mathrm{P}(|B| \geq ۲) = ۱ - \mathrm{P}(-۲ < B < ۲) = ۱ - \int_{-۲}^{۲} \frac{۱}{۶}\mathrm{db} = ۱ - \frac{۴}{۶} = \frac{۱}{۳}.$$

مثال ۳-۲۶. اتوبوس های مسافربری از ساعت ۷ صبح با فواصل ۱۵ دقیقه ای به ایستگاه مشخصی می رسند. اگر زمان رسیدن یک مسافر به ایستگاه مورد نظر یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین ۷ تا ۷:۳۰ باشد، مطلوب است محاسبه

الف. احتمال اینکه مسافر کمتر از ۵ دقیقه منتظر اتوبوس باشد.

ب. احتمال اینکه مسافر بیش از ۱۰ دقیقه منتظر اتوبوس بماند.

حل: تعریف می کنیم X: تعداد دقایق گذشته از ساعت ۷ که مسافر به ایستگاه می رسد. داریم $X \sim U(۰, ۳۰)$ و

$$f_X(x) = \frac{۱}{۳۰} \qquad \text{if } ۰ < x < ۳۰.$$

دقت کنید که برای قسمت الف با توجه به اطلاعات مساله، اگر فرد بین ۷:۱۰ و ۷:۱۵ یا بین ۷:۲۵ و ۷:۳۰ به ایستگاه برسد کمتر از ۵ دقیقه منتظر اتوبوس می ماند و برای قسمت ب، اگر فرد بین ۷ و ۷:۰۵ یا ۷:۱۵ و ۷:۲۰ به ایستگاه برسد بیش از ۱۰ دقیقه منتظر خواهد ماند. بنابراین از (۳-۶) برای قسمت الف و ب، به ترتیب داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(۱۰ < X < ۱۵) + \mathrm{P}(۲۵ < X < ۳۰) &= \frac{۱۵ - ۱۰}{۳۰} + \frac{۳۰ - ۲۵}{۳۰} = \frac{۱}{۳} \\
\mathrm{P}(۰ < X < ۵) + \mathrm{P}(۱۵ < X < ۲۰) &= \frac{۵ - ۰}{۳۰} + \frac{۲۰ - ۱۵}{۳۰} = \frac{۱}{۳}.
\end{aligned}$$

قضیه ۳-۲۷. اگر $X \sim U(\alpha, \beta)$ آن گاه $\mathrm{E}(X) = \frac{\beta + \alpha}{۲}$ و $\mathrm{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^۲}{۱۲}$.

اثبات.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_\alpha^\beta \frac{x}{\beta - \alpha}\mathrm{dx} = \frac{x^۲}{۲(\beta - \alpha)}\Big|_\alpha^\beta = \frac{\beta^۲ - \alpha^۲}{۲(\beta - \alpha)} = \frac{\beta + \alpha}{۲} \\
\mathrm{E}(X^۲) &= \int_\alpha^\beta \frac{x^۲}{\beta - \alpha}\mathrm{dx} = \frac{x^۳}{۳(\beta - \alpha)}\Big|_\alpha^\beta = \frac{\beta^۳ - \alpha^۳}{۳(\beta - \alpha)} = \frac{\beta^۲ + \alpha^۲ + \alpha\beta}{۳} \\
\Longrightarrow \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}^۲(X) \\
&= \frac{\beta^۲ + \alpha^۲ + \alpha\beta}{۳} - \frac{(\beta + \alpha)^۲}{۴} \\
&= \frac{۴\beta^۲ + ۴\alpha^۲ + ۴\alpha\beta - ۳\beta^۲ - ۳\alpha^۲ - ۶\alpha\beta}{۱۲} \\
&= \frac{\beta^۲ + \alpha^۲ - ۲\alpha\beta}{۱۲} = \frac{(\beta - \alpha)^۲}{۱۲}.
\end{aligned}$$

□

قضیه ۳-۲۸. اگر $X \sim U(\alpha, \beta)$ آن گاه برای $Y = \dfrac{X-\alpha}{\beta-\alpha}$ داریم $Y \sim U(0, 1)$.

اثبات.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(\frac{X-\alpha}{\beta-\alpha} \leq y) \\ &= \mathrm{P}(X \leq y(\beta-\alpha)+\alpha) = F_X(y(\beta-\alpha)+\alpha) \\ \Longrightarrow f_Y(y) &= F_Y'(y) = (\beta-\alpha) f_X(y(\beta-\alpha)+\alpha) \\ &= \begin{cases} \dfrac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} = 1 & \text{if} \quad \alpha < y(\beta-\alpha)+\alpha < \beta \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \\ \Longrightarrow \ f_Y(y) &= 1 \quad \text{if} \quad 0 < y < 1 \quad \Longrightarrow \ Y \sim U(0, 1) \end{aligned}$$

□

۲.۲.۳ توزیع نمایی

یکی از مهم ترین توزیع های پیوسته، توزیع نمایی است که معمولا به عنوان توزیع مدت زمانی که یک اتفاق خاص رخ می دهد مطرح می شود و کاربرد زیادی در آمار دارد. برای مثال، مدت زمان لازم (از همین الان) تا وقوع یک زلزله، یا تا شروع یک جنگ تازه، یا تا زمان دریافت تلفنی که شماره را اشتباه گرفته است همه متغیرهای تصادفی هستند که در عمل دارای توزیع نمایی می باشند. متغیر تصادفی X با تابع چگالی

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x} \qquad \text{if } x > 0$$

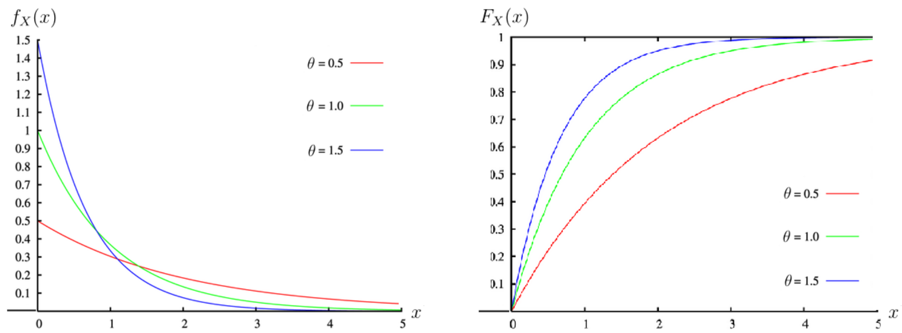
دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است که آن را به صورت $X \sim E(\theta)$ نمایش می دهیم. برای این متغیر تصادفی داریم

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{dt} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{dt} = 0 & \text{if} \quad x < 0 \\ \int_0^x \theta e^{-\theta t}\mathrm{dt} = -e^{-\theta t}|_0^x = 1 - e^{-\theta x} & \text{if} \quad 0 \leq x \end{cases}.$$

دقت کنید که در محاسبات بالا $F_X(\infty) = \int_0^\infty \theta e^{-\theta t}\mathrm{dt} = 1$. درواقع، تابع توزیع یک متغیر تصادفی نمایی به صورت زیر است

$$F_X(x) = 1 - e^{-\theta x} \qquad \text{if } 0 \leq x. \tag{۳-۷}$$

در شکل ۲.۲.۳ تابع چگالی و تابع توزیع نمایی با پارامترهای ۱، ۱/۵ و ۰/۵ نشان داده شده است.



شکل ۳-۳: نمودار تابع چگالی و تابع توزیع یک متغیر تصادفی نمایی با پارامترهای متفاوت

مثال ۳-۲۹. فرض کنید مدت زمان یک مکالمه تلفنی بر حسب دقیقه یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $۰/۱$ باشد. اگر شخصی درست قبل از شما به باجه تلفن برسد، مطلوب است محاسبه

الف. احتمال اینکه شما بیش از ۱۰ دقیقه منتظر بمانید.

ب. احتمال اینکه بین ۱۰ تا ۲۰ دقیقه منتظر بمانید.

حل: تعریف می کنیم X: طول مکالمه فردی که در باجه است. در این صورت $X \sim E(۰/۱)$ و از (۳-۷) بدست می آوریم

$$\mathrm{P}(X > ۱۰) = ۱ - \mathrm{P}(X \leq ۱۰) = ۱ - F_X(۱۰) = ۱ - ۱ + e^{-۱} = ۰/۳۶۸$$
$$\mathrm{P}(۱۰ < X < ۲۰) = F_X(۲۰) - F_X(۱۰) = ۱ - e^{-۲} - ۱ + e^{-۱} = ۰/۲۳۳$$

قضیه ۳-۳۰. اگر $X \sim E(\theta)$ آن گاه $\mathrm{E}(X) = \frac{۱}{\theta}$ و $\mathrm{Var}(X) = \frac{۱}{\theta^۲}$.

اثبات.

$$\mathrm{E}(X) = \int_۰^\infty x\theta e^{-x\theta}\mathrm{dx} = -xe^{-x\theta}|_۰^\infty + \int_۰^\infty e^{-x\theta}\mathrm{dx} = \frac{۱}{\theta}e^{-x\theta}|_۰^\infty = \frac{۱}{\theta}$$
$$\mathrm{E}(X^۲) = \int_۰^\infty x^۲\theta e^{-x\theta} = -۲xe^{-x\theta}|_۰^\infty + ۲\int_۰^\infty xe^{-x\theta}\mathrm{dx}$$
$$= \frac{۲}{\theta}\int_۰^\infty x\theta e^{-x\theta}\mathrm{dx} = \frac{۲}{\theta}\mathrm{E}(X) = \frac{۲}{\theta^۲}$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}^۲(X) = \frac{۲}{\theta^۲} - \frac{۱}{\theta^۲} = \frac{۱}{\theta^۲}$$

□

یکی از مهم ترین ویژگی های توزیع نمایی، بی حافظه بودن آن است. به عبارت دیگر، برای توزیع نمایی با پارامتر θ داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X > s+t \mid X > t) &= \frac{\mathrm{P}(X > s+t\ ,\ X > t)}{\mathrm{P}(X > t)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X > s+t)}{\mathrm{P}(X > t)} \\
&= \frac{1 - F_X(s+t)}{1 - F_X(t)} \\
&= \frac{e^{-\theta(s+t)}}{e^{-\theta t}} = e^{-\theta s} = \mathrm{P}(X > s).
\end{aligned}$$

اگر X طول عمر یک دستگاه باشد، بی حافظه بودن آن به این معنا است که احتمال اینکه دستگاه حداقل $s+t$ ساعت کار کند در حالی که t ساعت کار کرده باشد برابر است با احتمال اولیه آن که دستگاه حداقل s ساعت دیگر کار کند. همچنین می توان این طور تفسیر کرد که:
اگر دستگاه در لحظه t سالم باشد، توزیع طول عمر باقیمانده دستگاه معادل با توزیع طول عمر اولیه آن است.

می توان نشان داد که توزیع نمایی تنها توزیع در بین توزیع های پیوسته است که دارای ویژگی بی حافظگی است.

تمرین ۳-۳۱. اداره پستی را درنظر بگیرید که دارای دو کارمند است. فرض کنید وقتی فرد A وارد اداره می شود، می بیند که فرد B توسط یک کارمند و فرد C توسط کارمند دیگری خدمت داده می شود. همچنین فرض کنید به فرد A گفته شده است که خدمت رسانی به او به محض ترک محل توسط یکی از افراد B و C شروع می شود. اگر زمانی که یک کارمند صرف مشتری می کند دارای توزیع نمایی با پارامتر θ باشد، احتمال اینکه از سه مشتری مذکور، فرد A آخرین نفری باشد که اداره را ترک می کند، چقدر است؟

تمرین ۳-۳۲. فرض کنید یک خودرو می تواند قبل از فرسوده شدن باطری مسافتی را طی کند که دارای توزیع نمایی با متوسط ۱۰۰۰۰ مایل است. اگر شخصی علاقمند به یک سفر ۵۰۰۰ مایلی باشد، با چه احتمالی مسافرت خود را قبل از تعویض باطری به اتمام می رساند؟ اگر توزیع نمایی نباشد چطور؟

۳.۲.۳ توزیع گاما

فرض کنید $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع نمایی با پارامتر θ باشند. در این صورت $X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$ دارای توزیع گاما با پارامترهای r و θ است که آن را به صورت $X \sim Gamma(r, \theta)$ نشان می دهیم.
تابع چگالی متغیر تصادفی X بطوری که $X \sim Gamma(r, \theta)$، به صورت زیر است

$$f_X(x) = \frac{\theta^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\theta x} \qquad \text{if } x > 0.$$

قضیه ۳-۳۳. اگر $X \sim Gamma(r, \theta)$ آن گاه $\mathrm{E}(X) = \frac{r}{\theta}$ و $\mathrm{Var}(X) = \frac{r}{\theta^2}$.

اثبات. طبق تعریف متغیر تصادفی گاما داریم $X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$ به طوری که برای $i = 1, 2, \ldots, r$، $Y_i \sim E(\theta)$ و Y_i ها مستقل هستند. از قضیه ۳-۳۰ می دانیم $\mathrm{E}(Y_i) = \frac{1}{\theta}$ و $\mathrm{Var}(Y_i) = \frac{1}{\theta^2}$. بنابراین

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\theta} = \frac{r}{\theta}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Var}(Y_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\theta^2} = \frac{r}{\theta^2}.$$

□

۴.۲.۳ توزیع نرمال

مهم ترین توزیع پیوسته در آمار و احتمال، توزیع نرمال است به طوری که عملاً بسیاری از پدیده های طبیعی، حداقل به طور تقریبی از توزیع نرمال تبعیت می کنند. متغیر قد افراد و خطای اندازه گیری از جمله این پدیده ها هستند.

نمودار تابع چگالی یک متغیر تصادفی نرمال X، زنگوله ای شکل است. در شکل ۴-۱ مثالی از این نمودارها را مشاهده می کنید.

نمودار تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی نرمال X، حول امید ریاضی آن، $\mu = \mu_X$ است و پراکندگی آن حول μ توسط واریانس X، σ^2، مشخص می شود. در واقع، تابع چگالی نرمال به دو متغیر μ و σ^2 وابسته است و از رابطه زیر بدست می آید

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad \mu \in \mathcal{R}, \quad \sigma > 0$$

متغیر تصادفی X با تابع چگالی بالا، دارای توزیع نرمال با پارامترهای (μ, σ^2) است که آن را به صورت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ نمایش می دهند.

خواص منحنی نرمال

۱. منحنی نرمال دارای تنها یک نقطه ماکزیمم در $x = \mu$ است.

اثبات.

$$f'_X(x) = \frac{\mathrm{d}f_X(x)}{\mathrm{dx}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}(\frac{-1}{\sigma^2})(x-\mu)e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} = 0$$
$$\Longrightarrow x = \mu$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 f_X(x)}{\mathrm{dx}^2}|_{x=\mu} = \frac{-1}{\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2}} < 0$$
$$\Longrightarrow x_{\max} = \mu$$

□

۲. منحنی نرمال دارای دو نقطه عطف در نقاط $x = \mu \pm \sigma$ است.

اثبات.

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_X(x)}{\mathrm{dx}^2} = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}(\frac{-1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}(x-\mu)^2)e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{-1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}(x-\mu)^2 = 0$$
$$\Longrightarrow x = \mu \pm \sigma$$

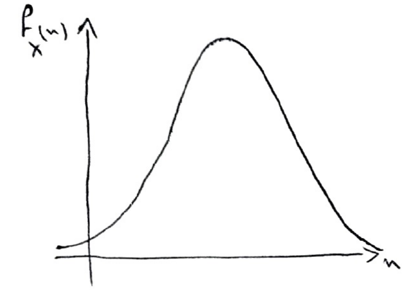
□

۳. منحنی نسبت به خط $x = \mu$ متقارن است.

اثبات. با جایگذاری در رابطه $f_X(x)$ مربوط به توزیع نرمال، به دست می آوریم $f_X(\mu+a) = f_X(\mu-a)$ و بنابراین منحنی نرمال نسبت به خط $x = \mu$ متقارن است. □

۴. $\lim_{x\to\pm\infty} f_X(x) = 0$.

۵. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = 1$.



شکل ۳-۴: نمودار تابع چگالی احتمال نرمال

طبق تعریف تابع توزیع، برای متغیر تصادفی $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$ داریم

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{\frac{-۱}{۲\sigma^۲}(t-\mu)^۲} \mathrm{dt}$$

همچنین برای $[a, b] \subseteq \mathcal{R}$ داریم

$$\mathrm{P}(a < X < b) = \int_{a}^{b} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{\frac{-۱}{۲\sigma^۲}(x-\mu)^۲} \mathrm{dx}$$

محاسبه انتگرال های پیچیده موجود در روابط $F_X(x)$ و $\mathrm{P}(a < X < b)$ بالا، با فرض $\mu = ۰$ و $\sigma^۲ = ۱$، ساده و با روش های عددی امکان پذیر خواهد شد.

تعریف ۳-۳۴. توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = ۰$ و $\sigma^۲ = ۱$، توزیع نرمال استاندارد نامیده می شود و آن را به صورت $Z \sim N(۰, ۱)$ نمایش می دهند. تابع چگالی نرمال استاندارد با $\varphi(z)$ نشان داده می شود و به صورت زیر است

$$\varphi(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{\frac{-z^۲}{۲}}, \qquad -\infty < z < \infty$$

تابع توزیع نرمال استاندارد هم با نماد $\Phi(z)$ نمایش داده می شود و از رابطه زیر بدست می آید

$$\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t) \mathrm{dt}$$

با استفاده از روش های عددی، مقادیر $\Phi(z)$ به ازای $-۳/۵ \leq z \leq ۳/۵$، محاسبه شده و در جداول پیوست ارائه شده است.

برای توزیع نرمال استاندارد داریم،

$$\mathrm{P}(a < Z < b) = \mathrm{P}(Z < b) - \mathrm{P}(Z < a) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

قضیه ۳-۳۵. اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، آن گاه $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

اثبات. متغیر تصادفی $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ را تعریف می کنیم. طبق تعریف تابع توزیع داریم

$$F_Z(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z) = \mathrm{P}(X \leq \sigma z + \mu) = F_X(\sigma z + \mu)$$
$$\Longrightarrow f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} F_Z(z) = \sigma f_X(\sigma z + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} = \varphi(z)$$
$$-\infty < x < \infty \Longrightarrow -\infty < \frac{x-\mu}{\sigma} < \infty \Longrightarrow -\infty < z < \infty$$

بنابراین $Z \sim N(0, 1)$. □

براساس قضیه ۳-۳۵، اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، آن گاه برای محاسبه $F_X(x)$ داریم:

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = \mathrm{P}(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

و بنابراین می توان پاسخ را با استفاده از جدول پیوست بدست آورد. به طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(a < X < b) &= \mathrm{P}(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}) \\
&= \mathrm{P}(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}) \\
&= \mathrm{P}(Z < \frac{b-\mu}{\sigma}) - \mathrm{P}(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}) \\
&= \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})
\end{aligned}$$

مثال ۳-۳۶. فرض کنید $X \sim N(10, 16)$. مقدار $\mathrm{P}(8 < X < 15)$ را بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(8 < X < 15) &= \mathrm{P}(\frac{8-10}{4} < Z < \frac{15-10}{4}) \\
&= \Phi(1/25) - \Phi(-0/5) \\
&= 0/8944 - 0/3085 = 0/5859
\end{aligned}$$

تمرین ۳-۳۷. میزان حجم ترافیک موجود در یک فرودگاه (شامل هواپیماهای نشسته یا پرواز کرده) در طی ساعت پیک دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۰۰ و انحراف معیار ۶۰ هواپیما است. اگر ظرفیت موجود باند فرودگاه (برای نشستن و بلند شدن) ۳۵۰ هواپیما در ساعت باشد، احتمال اینکه این ظرفیت موجود نتواند جوابگوی تعداد هواپیماها باشد چقدر است؟

تمرین ۳-۳۸. یک کارخانه تولید سیمان، سیمان هایی تولید می کند که مقدار ترکیب سیلسیم اکسید در این سیمان ها دارای توزیع نرمال با میانگین ۸ و انحراف معیار ۰/۵ گرم است.

الف. چند درصد از سیمان ها دارای مقدار سیلسیم اکسید بین ۷/۵ تا ۹ گرم است؟

ب. ۹۷/۵ درصد از سیمان های تولید شده در این کارخانه مقدار سیلسیمشان از چه مقداری کمتر است؟

تمرین ۳-۳۹. فرض کنید سطح بتن روی یک پل از توزیع نرمال با میانگین ۵۰ و انحراف معیار ۳ متر مربع پیروی می کند. احتمال اینکه سطح بتن بیشتر از ۵۵ متر مربع باشد چقدر است؟

تمرین ۳-۴۰. فرض کنید ارتفاع ساختمان های یک شهر از توزیع نرمال با میانگین ۲۵۰ متر و انحراف معیار ۳۰ متر پیروی می کند. اگر بخواهیم ۷۴/۵ درصد از ساختمان ها ارتفاع کمتر از ۲۸۰ متر داشته باشند، چه حداقل ارتفاعی را در نظر بگیریم؟

یکی از مهم ترین ویژگی توزیع نرمال که البته از جمله مزیت این توزیع نیز به شمار می آید این است که توزیع های شناخته شده و خوش رفتاری برای توابعی از متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال وجود دارد که در ادامه به معرفی برخی از آن ها می پردازیم.

اولین و ساده ترین تابع از متغیرهای تصادفی نرمال، توابع خطی هستند. هر تابع خطی از متغیر های تصادفی نرمال نیز نرمال است. برای مثال فرض کنید $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$، $i = 1, 2, \cdots, n$، متغیرهای تصادفی مستقل باشند. در این صورت $\overline{X}$ نیز دارای توزیع نرمال با پارامترهای زیر است

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \mathrm{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

و می نویسیم $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

تمرین ۳-۴۱. بارهای مرده و زنده وارد بر پی ساختمان به صورت متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع نرمال به ترتیب به صورت $N(100, 100)$ و $N(40, 1500)$ هستند. چه باری را برای مجموع این بارها مجاز می دانید که احتمال تجاوز از آن ۰/۰۵ باشد؟

۵.۲.۳ توزیع کای-دو

اگر $Z \sim N(0, 1)$ آن گاه Z^2 یک متغیر تصادفی از توزیع کای-دو با یک درجه آزادی است که آن را با نماد $Z^2 \sim \chi^2(1)$ نشان می دهیم. همچنین اگر $Z_i \sim N(0, 1)$، $i = 1, 2, \cdots, n$، متغیرهای تصادفی مستقل باشند آن گاه $\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$.

توزیع کای-دو با n درجه آزادی معادل با توزیع گاما با پارامترهای $r = \frac{n}{2}$ و $\lambda = \frac{1}{2}$ بوده و بنابراین تابع چگالی متغیر تصادفی $Y \sim \chi^2(n)$ به صورت زیر است

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2} \qquad y > 0.$$

که یک فرم چوله به راست دارد و داریم $\mathrm{E}(Y) = n$ و $\mathrm{Var}(Y) = 2n$. با وجود پیچیده بودن فرم تابع چگالی و در نتیجه تابع توزیع این متغیرتصادفی، مقادیر تابع توزیع کای-دو با درجات آزادی مختلف در نقاط متفاوت با استفاده از جداول پیوست کتب آماری قابل دسترسی هستند.

به عنوان یک مثال پرکاربرد از متغیرهای تصادفی کای-دو، فرض کنید $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$، $i = 1, 2, \cdots, n$، متغیرهای تصادفی مستقل باشند. در این صورت تابع

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

یک متغیرتصادفی است که دارای توزیع کای-دو با $n - 1$ درجه آزادی است.

۶.۲.۳ توزیع تی استیودنت

اگر $Z \sim N(0, 1)$ و $Y \sim \chi^2(n)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آن گاه

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

دارای توزیعی تحت عنوان تی با n درجه آزادی است که آن را به صورت $t(n)$ نشان می دهیم و داریم $T \sim t(n)$. فرم تابع چگالی یک کتغیر تصادفی تی با n درجه آزادی به صورت زیر بوده

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

و نمودار این تابع مشابه چگالی نرمال به شکل یک زنگوله متقارن است که البته در میزان ضخامت دم ها با شکل چگالی نرمال تفاوت دارد. مقدار تابع توزیع تی با درجات آزادی مختلف و در نقاط متفاوت در جداول پیوست کتب آماری موجود و در دسترس است.

با توجه به دو مورد بالایی، چون $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ و $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ مستقل از هم هستند داریم

$$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{(n-1)\sigma^2}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S_{n-1}/n} \sim t(n-1)$$

بطوری که $S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

توجه داشته باشید که اگر n به سمت بینهایت میل کند، می توان نشان داد توزیع تی با n درجه آزادی به نرمال استاندارد میل می کند. درواقع برای $n \geq 30$ توزیع T تقریبا نرمال استاندارد است و از این رو در جداول توزیع تی، مقادیر درجات آزادی بزرگتر از ۳۰ با ∞ نشان داده شده و مقادیر آن با مقادیر جدول توزیع نرمال استاندارد یکی است.

۷.۲.۳ توزیع اف

فرض کنید $U \sim \chi^2(n)$ و $W \sim \chi^2(m)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند. در این صورت $F = \frac{U/n}{W/m}$ دارای توزیعی تحت عنوان اف با n و m درجه آزادی است که آن را به صورت $F(n,m)$ نمایش می دهیم و تابع چگالی آن به صورت زیر بدست می آید

$$f_F(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{mx}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}} \qquad x > 0.$$

مقدار تابع توزیع متغیرتصادفی F در بعضی نقاط با درجات آزادی مختلف در جداول پیوست کتب آماری موجود و قابل استفاده است.

۳.۳ قضیه حد مرکزی

قضیه حد مرکزی قضیه معروفی است که در مسائل آمار و احتمال کاربرد زیادی دارد چرا که در آزمایش های آماری عملا یا توزیع متغیرها نامعلوم است و یا استفاده از آن پیچیدگی های زیادی دارد.

قضیه ۳-۴۲. (قضیه حدمرکزی) اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ و واریانس متناهی σ^2 باشند آن گاه وقتی n به سمت بی نهایت میل کند، توزیع متغیر تصادفی Y_n تعریف شده به صورت

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

به توزیع نرمال استاندارد میل می کند. به عبارت دیگر داریم

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{dx} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \Phi(y).$$

براساس قضیه حد مرکزی، اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ و واریانس متناهی σ^2 باشند آن گاه $\sum_{i=1}^{n} X_i$ وقتی n به اندازه کافی بزرگ باشد، دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین $n\mu$ و واریانس $n\sigma^2$ است.

برای مثال، فرض کنید $X \sim Be(p)$. طبق ویژگی توزیع برنولی داریم:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = p\ , \qquad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = pq$$

حال اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از این جامعه بوده و n نیز به اندازه کافی بزرگ باشد آن گاه طبق قضیه حد مرکزی، $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ دارای توزیع تقریبی نرمال است و داریم:

$$\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = np = n\mu$$

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = npq = n\sigma^2$$

$$\Longrightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(np, npq) \quad \Longrightarrow \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0, 1)$$

مثال ۳-۴۳. وزن یگ گلوله فلزی دارای میانگین ۴/۰۷ انس و انحراف معیار ۰/۶ انس است. این گلوله ها در جعبه های ۸۱ تایی به فروش می رسند. احتمال اینکه یک جعبه به تصادف انتخاب شده، وزنی بین ۳۲۸ و ۳۳۵ انس داشته باشد را بیابید.

حل: اگر X وزن یک گلوله تعریف شود، آن گاه $\mu_X = ۴/۰۷$ و $\sigma_X = ۰/۶$. با توجه به اینکه هر جعبه شامل ۸۱ گلوله است، وزن هر جعبه به صورت $S_n = \sum_{i=۱}^{۸۱} X_i$ است و باید احتمال زیر را محاسبه کنیم

$$\mathrm{P}(۳۲۸ < S_n < ۳۳۵) =?$$

داریم:

$$\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}(\sum_{i=۱}^{۸۱} X_i) = \sum_{i=۱}^{۸۱} \mathrm{E}(X_i) = ۸۱ \times ۴/۰۷ = ۳۲۹/۶۷$$
$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(\sum_{i=۱}^{۸۱} X_i) = \sum_{i=۱}^{۸۱} \mathrm{Var}(X_i) = ۸۱ \times (۰/۶)^۲ = ۲۹/۱۶$$

با توجه به اینکه در اینجا $n = ۸۱$ به اندازه کافی بزرگ است، طبق قضیه حد مرکزی به طور تقریبی داریم $S_n \sim N(۳۲۹/۶۷, ۲۹/۱۶)$ (و در نتیجه $Z = \frac{S_n - ۳۲۹/۶۷}{۵/۴}$ دارای توزیع تقریبی نرمال استاندارد است). داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(۳۲۸ < S_n < ۳۳۵) &= \mathrm{P}(\frac{۳۲۸ - ۳۲۹/۶۷}{۵/۴} < Z < \frac{۳۳۵ - ۳۲۹/۶۷}{۵/۴}) \\
&= \mathrm{P}(-۰/۳ < Z < ۰/۹۹) \\
&= \Phi(۰/۹۹) - \Phi(-۰/۳) \\
&= ۰/۸۳۸۹ - ۰/۳۸۲۱ = ۰/۴۵۶۸
\end{aligned}$$

تمرین ۳-۴۴. وزن هر یک از شانه های تخم مرغ تولید شده در یک کارخانه دارای میانگین ۱/۹ و انحراف معیار ۱ کیلوگرم است. احتمال این که ۲۵ شانه تخم مرغ تولید شده در این کارخانه وزنی بیش از ۴۷ کیلوگرم داشته را بدست آورید.

تمرین ۳-۴۵. مهره های تشکیل دهنده یک دستبند دارای میانگین ۶ گرم و واریانس ۰/۱ هستند. اگر هر دستبند از ۳۵ مهره تشکیل شده باشد، احتمال تقریبی این که دستبندی که ما از این نوع خریداری کرده ایم، وزنی بین ۲۰۶ و ۲۱۱ داشته باشد را محاسبه کنید.

مثال ۳-۴۶. فرض کنید $X \sim Bin(۱۰۰, ۰/۵)$. مقدار $\mathrm{P}(X > ۳۵)$ را محاسبه کنید.

حل: با توجه به تابع چگالی احتمال برای توزیع دو جمله ای داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X > ۳۵) &= ۱ - \mathrm{P}(X \leq ۳۵)\\ &= ۱ - \sum_{x=۰}^{۳۵} \binom{۱۰۰}{x} (۰/۵)^x (۰/۵)^{۱۰۰-x}\end{aligned}$$

محاسبه احتمال در مثال بالا، شامل محاسبات بسیار زیادی است اما با استفاده از قضیه حد مرکزی و تقریب نرمال محاسبات ساده خواهند شد.

نتیجه ۳-۴۷. اگر $X \sim Bin(n, p)$ آن گاه وقتی n به اندازه کافی بزرگ باشد، متغیر تصادفی $\frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ دارای توزیع تقریبی نرمال استاندارد است.

معمولاً وقتی $n > ۳۰$ و یا مقدار p به $۰/۵$ نزدیک باشد، تقریب توزیع دوجمله ای به وسیله نرمال مناسب است.

مثال ۳-۴۸. در مثال ۳-۴۶ چون $n = ۱۰۰$ به اندازه کافی بزرگ است، با استفاده از نتیجه ۳-۴۷ و تقریب نرمال داریم:

$$\begin{aligned}Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} = \frac{X - ۵۰}{\sqrt{۲۵}} &= \frac{X - ۵۰}{۵} \sim N(۰, ۱)\\ \Longrightarrow \mathrm{P}(X > ۳۵) = \mathrm{P}(X > ۳۴/۵) &= ۱ - \mathrm{P}(X \leq ۳۴/۵)\\ &= ۱ - \mathrm{P}(Z \leq \frac{۳۴/۵ - ۵۰}{۵})\\ &= ۱ - \mathrm{P}(Z \leq -۳/۱)\\ &= ۱ - \Phi(-۳/۱)\\ &= ۱ - ۰/۰۰۱ = ۰/۹۹۹\end{aligned}$$

تمرین ۳-۴۹. یک سد طوری طراحی شده است که احتمال سرریز شدن آن در یک سال ۳۳درصد می باشد. احتمال اینکه طی ۴۵ سال آینده حداقل ۲ سرریز برای این سد رخ دهد را بطور دقیق (براساس توزیع دقیق متغیر تصادفی تعریف شده) و بطور تقریبی (با استفاده از توزیع تقریبی متغیر) محاسبه کنید.

تمرین ۳-۵۰. یک نمونه ۱۰۰ نفره از جامعه ای که ۵۰ درصد آن ها ثروتمند محسوب می شوند، گرفته شده است. احتمال تقریبی این که حداکثر ۶۰ نفر از این نمونه جزء قشر ثروتمند باشند را بدست آورید.

فصل ۴

متغیرهای تصادفی توام دوتایی

گاهی علاقمند به بررسی دو پیشامد به طور همزمان در یک آزمایش تصادفی هستیم. به عبارت دیگر اگر دو پیشامد را بر روی یک آزمایش تصادفی تعریف کنیم، می توان آن ها را به صورت تکی یا توام مورد بررسی قرار داد.

- متغیر تصادفی X : پیشامد A
- متغیر تصادفی Y : پیشامد B
- متغیر تصادفی (X,Y) : پیشامد $A\cap B$

در واقع پیشامدهای A و B را با تعریف متغیرهای تصادفی X و Y بررسی می کنیم. برای بررسی پیشامد $A\cap B$ (وقوع همزمان دو پیشامد A و B) باید متغیرهای تصادفی X و Y به طور توام مورد بررسی قرار گیرد و این امر سبب تعریف متغیرهای تصادفی توام (X,Y) می گردد:

$$(X,Y) : S \longrightarrow S_{X,Y} \subseteq \mathcal{R}^{۲}$$

اگر S_X و S_Y مجموعه های شمارا باشند، (X,Y) را یک متغیر تصادفی توام گسسته گویند.
اگر S_X و S_Y هرکدام یک فاصله یا اجتماع چند فاصله عددی باشند، (X,Y) را یک متغیر تصادفی توام پیوسته گویند.

مثال ۴-۱. فرض کنید سکه ای را ۳ مرتبه پرتاب کنیم و قرار دهیم

- X : تعداد شیرهای مشاهده شده در ۳ پرتاب $S_X = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$
- Y : تعداد شیرهای مشاهده شده در پرتاب سوم $S_Y = \{۰, ۱\}$

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال متغیرهای تصادفی X و Y، اطلاعاتی درباره این دو متغیر و پیشامدهای نظیر آن ها را به ما می دهد. اما واضح است که وقوع هر یک از این پیشامدها در دیگری تاثیر می گذارد و بنابراین نیاز به دانستن اطلاعاتی در مورد وقوع همزمان این دو پیشامد داریم. در این جا فضای نمونه متغیر تصادفی توام (X, Y) به صورت زیر است

$$S_{X,Y} = \{(۰,۰), (۰,۱), (۱,۰), (۱,۱), (۲,۰), (۲,۱), (۳,۰), (۳,۱)\}.$$

متغیرهای تصادفی توام گسسته

متغیرهای تصادفی توام (X, Y) را گسسته گویند هرگاه S_X و S_Y مجموعه های شمارا باشند.

$$(X, Y) : S \longrightarrow S_{X,Y} \subseteq \mathcal{R}^۲ \qquad (۱-۴)$$

شایان ذکر است که در این حالت $S_{X,Y}$، مجموعه ای از نقاط در فضای $\mathcal{R}^۲$ است و هر نقطه با دو مختصات X و Y نمایش داده می شود. به عبارت دیگر داریم

$$S_{X,Y} = \{(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), (x_۳, y_۳), \ldots\}$$

تعریف ۴-۲. تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی گسسته (X, Y)، میزان احتمال انباشته در هر نقطه (x, y) را نشان می دهد و به صورت زیر تعریف می گردد

$$f_{X,Y}(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$$

که دارای خواص زیر است:

۱. برای هر $x, y \in \mathcal{R}$، $f_{X,Y}(x, y) \geq ۰$

۲. $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x, y) = ۱$.

مثال ۴-۳. از داخل جعبه ای که شامل ۳ توپ آبی، ۲ توپ قرمز و ۴ توپ سبز است، دو توپ را انتخاب می کنیم. متغیر تصادفی X را تعداد توپ های آبی مشاهده شده و متغیر تصادفی Y را تعداد توپ های قرمز مشاهده شده تعریف می کنیم.

i. تابع چگالی احتمال توام (X,Y) را بدست آورید.

ii. مقدار $\mathrm{P}(X+Y\leq 1)$ را محاسبه کنید.

i. متغیرهای تصادفی توام گسسته: (X,Y).
داریم: $S_X=\{0,1,2\}$، $S_Y=\{0,1,2\}$.

$$f_{X,Y}(0,0)=\mathrm{P}(X=0,Y=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{6}{36}$$

$$f_{X,Y}(0,1)=\mathrm{P}(X=0,Y=1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}=\frac{8}{36}$$

و به همین ترتیب ادامه می دهیم. با محاسبه احتمالات در تمام نقاط داریم،

y \ x	0	1	2
0	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

تابع چگالی احتمال توام (X,Y) را می توان در این مثال به صورت زیر نیز نوشت

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathrm{P}(X=x, Y=y) = \frac{\binom{۳}{x}\binom{۲}{y}\binom{۴}{۲-x-y}}{\binom{۹}{۲}} \qquad x, y = ۰, ۱, ۲ \text{ and } x+y \leq ۲.$$

.ii

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X+Y \leq ۱) &= \mathrm{P}(X=۰, Y=۰) + \mathrm{P}(X=۰, Y=۱) + \mathrm{P}(X=۱, Y=۰) \\
&= f_{X,Y}(۰,۰) + f_{X,Y}(۰,۱) + f_{X,Y}(۱,۰) \\
&= \frac{۶}{۳۶} + \frac{۸}{۳۶} + \frac{۱۲}{۳۶} = \frac{۲۶}{۳۶}
\end{aligned}$$

تمرین ۴-۴. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توام تعریف شده در جدول زیر باشد.

y \ x	۱	۳	۹
۲	c	$\frac{c}{۳}$	$\frac{۱}{۱۲}$
۴	$۲c$	$۲c$	۰
۶	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۲۴}$	$\frac{۲c}{۳}$

.i مقدار c را بیابید.

.ii مقدار $\mathrm{P}(X < ۴, ۳ < Y \leq ۶)$ را محاسبه کنید.

۱.۴ متغیرهای تصادفی توام پیوسته

متغیرهای تصادفی توام (X,Y) را پیوسته گویند هرگاه S_X و S_Y یک فاصله یا مجموعه ای از چند فاصله عددی باشند.

$$(X,Y) : S \longrightarrow S_{X,Y} \subseteq \mathcal{R}^{۲}$$

تعریف ۴-۵. تابع $f_{X,Y}(x,y)$ را یک تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y گویند هرگاه

۱. برای هر $x,y \in \mathcal{R}$، $f_{X,Y}(x,y) \geq ۰$

۲. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{dx\ dy} = ۱$.

مثال ۴-۶. تابع چگالی توام متغیرهای تصادفی (X,Y) را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx(۱ + ۲y) & \text{if} \quad ۰ < x < ۳\ ,\ ۰ < y < ۱ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

i. مقدار c را تعیین کنید.

ii. مقدار $\mathrm{P}(۱ < X < ۲, ۰ < Y < ۰/۵)$ را محاسبه کنید.

i. با توجه به خواص تابع چگالی احتمال توام باید $c \geq ۰$ و همچنین

$$\begin{aligned} ۱ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dx\ dy} \\ &= \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۳} cx(۱ + ۲y)\mathrm{dx\ dy} \\ &= c\int_{۰}^{۱} (۱ + ۲y)\left((\frac{x^{۲}}{۲})|_{۰}^{۳} \right) \mathrm{dy} \\ &= c(\frac{۹}{۲})\int_{۰}^{۱} (۱ + ۲y)\,\mathrm{dy} \\ &= c(\frac{۹}{۲})(y + y^{۲})|_{۰}^{۱} \\ &= ۹c \end{aligned}$$

بنابراین $c = \frac{۱}{۹}$.

.ii

$$\begin{aligned}
P(1 < X < 2, 0 < Y < 0.5) &= \int_0^{0.5} \int_1^2 f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \\
&= \int_0^{0.5} \int_1^2 \frac{x}{9}(1+2y)\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{9}\int_0^{0.5} (1+2y)\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right)\mathrm{dy} \\
&= (\frac{1}{9})(\frac{3}{2})\int_0^{0.5}(1+2y)\mathrm{dy} \\
&= (\frac{1}{9})(\frac{3}{2})(y+y^2)|_0^{0.5} \\
&= (\frac{1}{9})(\frac{3}{2})(\frac{3}{4}) = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

۲.۴ توزیع احتمالات حاشیه ای (کناری)

با داشتن تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی X و Y می توان تابع چگالی احتمال X و تابع چگالی Y را محاسبه کرد که به آن ها توابع چگالی احتمال حاشیه ای (یا کناری) گویند.

اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابع چگالی احتمال حاشیه ای X و تابع چگالی احتمال حاشیه ای Y به صورت زیر بدست می آیند:

$$f_X(x) = P(X=x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y) = \sum_y P(X=x, Y=y)$$
$$f_Y(y) = P(Y=y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y) = \sum_x P(X=x, Y=y)$$

و اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، تابع چگالی احتمال حاشیه ای X و تابع چگالی احتمال حاشیه ای Y به صورت زیر بدست می آیند:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dy}$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dx}$$

مثال ۴-۷. در مثال ۴-۳، تابع احتمال (تابع چگالی احتمال) حاشیه ای X و تابع احتمال (تابع چگالی احتمال) Y را به دست آورید.

متغیرهای تصادفی توام گسسته: (X, Y).

داریم: $S_X = \{0, 1, 2\}$، $S_Y = \{0, 1, 2\}$.

$y \backslash x$	۰	۱	۲
۰	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$
۱	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	۰
۲	$\frac{1}{36}$	۰	۰

$$\begin{aligned} f_X(0) &= \sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(0, y) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(0,2) \\ &= \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(1) &= \sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(1, y) = f_{X,Y}(1,0) + f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(1,2) \\ &= \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 = \frac{18}{36}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(2) &= \sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(2, y) = f_{X,Y}(2,0) + f_{X,Y}(2,1) + f_{X,Y}(2,2) \\ &= \frac{3}{36} + 0 + 0 = \frac{3}{36}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(0) &= \sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x, 0) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(1,0) + f_{X,Y}(2,0) \\ &= \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{3}{36} = \frac{21}{36}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(1) &= \sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x, 1) = f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(2,1) \\ &= 0 + \frac{6}{36} + \frac{8}{36} = \frac{14}{36}, \end{aligned}$$

$$f_Y(۲) = \sum_{x=۰}^{۲} f_{X,Y}(x,۰) = f_{X,Y}(۰,۲) + f_{X,Y}(۱,۲) + f_{X,Y}(۲,۲)$$
$$= ۰ + ۰ + \frac{۱}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶}.$$

بنابراین

y \ x	۰	۱	۲	$f_Y(y)$
۰	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۱۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲۱}{۳۶}$
۱	$\frac{۸}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	۰	$\frac{۱۴}{۳۶}$
۲	$\frac{۱}{۳۶}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳۶}$
$f_X(x)$	$\frac{۱۵}{۳۶}$	$\frac{۱۸}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	۱

تمرین ۴-۸. در مثال۴-۶ و تمرین ۴-۴، تابع چگالی حاشیه ای X و تابع چگالی حاشیه ای Y را به دست آورید.

۳.۴ توزیع احتمالات شرطی

در مبحث احتمال، احتمال شرطی به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\,, \qquad \mathrm{P}(B) \neq ۰.$$

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند و قرار دهیم

$$A \equiv (X = x)$$
$$B \equiv (Y = y)$$

در این صورت

$$\underbrace{\mathrm{P}(X = x|Y = y)}_{f_{X|Y}(x|y)} = \underbrace{\frac{\mathrm{P}(X = x, Y = y)}{\mathrm{P}(Y = y)}}_{\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

به تابع $f_{X|Y}(x|y)$ تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط $Y=y$ گویند و آن را به صورت زیر محاسبه می کنند:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{\sum_x f_{X,Y}(x,y)}\ , \qquad f_Y(y)\neq ۰.$$

به همین ترتیب تابع چگالی شرطی Y به شرط $X=x$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{\sum_y f_{X,Y}(x,y)}\ , \qquad f_X(x)\neq ۰.$$

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، تابع چگالی شرطی X به شرط Y به صورت زیر تعریف می گردد:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dx}}\ , \qquad f_Y(y)\neq ۰.$$

و تابع چگالی شرطی Y به شرط X به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dy}}\ , \qquad f_X(x)\neq ۰.$$

مثال ۴-۹. در مثال ۴-۳، تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط $Y=۰$ را بدست آورده و $\mathrm{P}(X\leq ۱|Y=۰)$ را محاسبه کنید.

طبق محاسبات در دو مثال قبل، جدول ۱.۴ را داریم. و بر اساس تعریف تابع چگالی احتمال شرطی

y \ x	۰	۱	۲	$f_Y(y)$
۰	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۱۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲۱}{۳۶}$
۱	$\frac{۸}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	۰	$\frac{۱۴}{۳۶}$
۲	$\frac{۱}{۳۶}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳۶}$
$f_X(x)$	$\frac{۱۵}{۳۶}$	$\frac{۱۸}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	۱

جدول ۱.۴: جدول تابع چگالی احتمال توام و کناری برای مثال ۴-۳

بدست می آوریم:

$$f_{X|Y}(x|۰)=\frac{f_{X,Y}(x,۰)}{f_Y(۰)}=\frac{f_{X,Y}(x,۰)}{\frac{۲۱}{۳۶}}\ , \qquad x=۰,۱,۲.$$

بنابراین

$$f_{X|Y}(0|0)=\frac{f_{X,Y}(0,0)}{\frac{21}{36}}=\frac{\frac{6}{36}}{\frac{21}{36}}=\frac{6}{21}$$
$$f_{X|Y}(1|0)=\frac{f_{X,Y}(1,0)}{\frac{21}{36}}=\frac{\frac{12}{36}}{\frac{21}{36}}=\frac{12}{21}$$
$$f_{X|Y}(2|0)=\frac{f_{X,Y}(2,0)}{\frac{21}{36}}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{21}{36}}=\frac{3}{21}$$

برای محاسبه $P(X\leq 1|Y=0)$ نیز داریم

$$\begin{aligned}P(X\leq 1|Y=0)&=\sum_{x=0}^{1}f_{X|Y}(x|0)\\&=f_{X|Y}(0|0)+f_{X|Y}(1|0)\\&=\frac{6}{21}+\frac{12}{21}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}\end{aligned}$$

تمرین ۴-۱۰. در تمرین ۴-۴، تابع احتمال $f_{X|Y}(x|6)$ را به دست آورده و مقادیر $P(X<3|Y=4)$ و $P(Y=6|X=9)$ را محاسبه کنید.

مثال ۴-۱۱. در مثال ۴-۶، توابع $f_X(x)$، $f_Y(y)$ و $f_{X|Y}(x|y)$ را بدست آورید.

طبق محاسبات در مثال ۴-۶، داریم

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{9}(1+2y) & \text{if}\quad 0<x<3\ ,\ 0<y<1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

و بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dy}\\&=\int_0^1\frac{x}{9}(1+2y)\mathrm{dy}=\frac{x}{9}(y+y^2)|_0^1=\frac{2x}{9}\qquad 0<x<3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dx}\\&=\int_0^3\frac{x}{9}(1+2y)\mathrm{dx}=\frac{1}{9}(1+2y)(\frac{x^2}{2})|_0^3=\frac{1}{2}(1+2y)\qquad 0<y<1\end{aligned}$$

بنابراین

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2x}{9} & \text{if} \quad 0<x<3\\ 0 & \text{o.w}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+2y) & \text{if} \quad 0<y<1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\\ &= \frac{\frac{x}{9}(1+2y)}{\frac{1}{2}(1+2y)}=\frac{2x}{9} \qquad 0<x<3,\ 0<y<1\\ \Longrightarrow f_{X|Y}(x|y) &= \begin{cases}\frac{2x}{9} & \text{if} \quad 0<x<3,\ 0<y<1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}\end{aligned}$$

۱.۳.۴ متغیرهای تصادفی مستقل

در فصل اول بیان کردیم که دو پیشامد A و B مستقل هستند اگر و تنها اگر

$$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A) \quad \equiv \quad \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی توام $f_{X,Y}(x,y)$ و توابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند. متغیرهای تصادفی X و Y مستقل هستند اگر و تنها اگر

$$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x) \quad \equiv \quad f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \quad \forall x,y$$

مثال ۴-۱۲. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}3xy & \text{if} \quad 0<y<2x^2\ ,\ 0<x<1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

آیا X و Y مستقل هستند؟

$$f_X(x)=\int_0^{2x^2} 3xy\ \mathrm{dy}=\frac{3xy^2}{2}\Big|_0^{2x^2}=6x^5, \quad 0<x<1$$

$$0<y<2x^2 \Longrightarrow \begin{cases}\sqrt{\frac{y}{2}}<x<+\infty\\ 0<x<1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\underbrace{\max\{0,\sqrt{\frac{y}{2}}\}}_{\sqrt{\frac{y}{2}}}<x<\underbrace{\min\{1,+\infty\}}_{1}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_Y(y)=\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1} 3xy\ \mathrm{dx}=\frac{3yx^2}{2}\Big|_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1}=\frac{3}{2}y(1-\frac{y}{2}), \quad 0<y<2x^2,\ 0<x<1$$

پس داریم

$$f_{X,Y}(x,y) = ۳xy \neq f_X(x).f_Y(y) = (۶x^۵)(\frac{۳}{۲}y(۱-\frac{y}{۲}))$$

در نتیجه X و Y مستقل نیستند.

تمرین ۴-۱۳. در تمرین ۴-۴، آیا X و Y مستقل از یکدیگر هستند؟

۴.۴ امید ریاضی و واریانس تابعی از چند متغیر تصادفی

قضیه ۲-۸ را می توان به سادگی برای امید ریاضی تابعی از چند متغیر تصادفی تعمیم داد.

قضیه ۴-۱۴. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توام $f_{X,Y}(x,y)$ باشند. امید ریاضی تابع $g(X,Y)$ به صورت زیر بدست می آید:

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند آن گاه

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) f_{X,Y}(x,y)$$

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند آن گاه

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dydx}$$

براین اساس مشابه حالت تک متغیره داریم

$$\mathrm{Var}(g(X,Y)) = \mathrm{E}(g(X,Y))^۲ - \mathrm{E}^۲(g(X,Y)).$$

مثال ۴-۱۵. جعبه ای شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره از این جعبه انتخاب می کنیم و متغیر تصادفی X را برابر با تعداد مهره های سفید در این یک مهره در نظر می گیریم. سپس از مابقی مهره های جعبه دو مهره دیگر انتخاب می کنیم و متغیر تصادفی Y را برابر با تعداد مهره های سفید مشاهده شده در این دو مهره انتخابی تعریف می کنیم. تابع چگالی احتمال توام (X, Y) را بدست آورید و $\mathrm{E}(X^۲Y)$ را محاسبه کنید.

حل: طبق تعاریف صورت مساله داریم: $S_X = \{۰, ۱\}$ و $S_Y = \{۰, ۱, ۲\}$.

$$f_{X,Y}(۰,۰) = \mathrm{P}(X=۰, Y=۰) = \mathrm{P}(X=۰)\mathrm{P}(Y=۰|X=۰) = \frac{۳}{۵} \times \frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۴}{۲}} = \frac{۳}{۳۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$f_{X,Y}(۱,۰) = \mathrm{P}(X=۱, Y=۰) = \mathrm{P}(X=۱)\mathrm{P}(Y=۰|X=۱) = \frac{۲}{۵} \times \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۴}{۲}} = \frac{۶}{۳۰} = \frac{۲}{۱۰}$$

$$\vdots$$

y \ x	۰	۱
۰	۰٫۱	۰٫۲
۱	۰٫۴	۰٫۲
۲	۰٫۱	۰

بنابراین بدست می آوریم

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^۲Y) &= \sum_{x=۰}^{۱}\sum_{y=۰}^{۲} x^۲ y f_{X,Y}(x,y) \\ &= (۰)(۰٫۱) + (۰)(۰٫۴) + (۰)(۰٫۱) + (۰)(۰٫۲) + (۱)(۰٫۲) + (۲)(۰) = ۰٫۲\end{aligned}$$

مثال ۴-۱۶. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. امید ریاضی $\frac{X+1}{Y}$ را بدست آورید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{16y}{x^3} & \text{if} \quad x>2, 0<y<1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

حل:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\frac{X+1}{Y}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1}{y}f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dydx}\\
&= \int_{2}^{\infty}\int_{0}^{1}(\frac{x+1}{y})\frac{16y}{x^3}\mathrm{dydx}\\
&= \int_{2}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{16(x+1)}{x^3}\mathrm{dydx}\\
&= \int_{2}^{\infty}16(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})(y|_0^1)\mathrm{dx}\\
&= 16(\frac{-1}{x}-\frac{1}{2x^2})|_2^{\infty}\\
&= 16(0-(\frac{-1}{2}-\frac{1}{8}))=16\times\frac{5}{8}=10
\end{aligned}$$

تمرین ۴-۱۷. در مثال ۴-۱۶ واریانس $\frac{X+1}{Y}$ و در مثال ۴-۱۵ واریانس X^2Y را بدست آورید.

چند ویژگی از امید ریاضی و واریانس متغیرهای تصادفی توام

۱. اگر $g(X,Y)$ و $h(X,Y)$ توابعی از متغیرهای تصادفی X و Y بوده و a و b دو مقدار ثابت باشند آن‌گاه

$$\mathrm{E}(ag(X,Y)+bh(X,Y))=a\mathrm{E}(g(X,Y))+b\mathrm{E}(h(X,Y))$$

اثبات. طبق تعریف داریم:

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(ag(X,Y)+bh(X,Y)) &= \sum_x\sum_y(ag(x,y)+bh(x,y))f_{X,Y}(x,y)\\
&= \sum_x\sum_y ag(x,y)f_{X,Y}(x)+\sum_x\sum_y bh(x,y)f_{X,Y}(x,y)\\
&= a\sum_x\sum_y g(x,y)f_{X,Y}(x)+b\sum_x\sum_y h(x,y)f_{X,Y}(x,y)\\
&= a\mathrm{E}(g(X,Y))+b\mathrm{E}(h(X,Y))
\end{aligned}$$

• اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند آن گاه

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(ag(X,Y)+bh(X,Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(ag(x,y)+bh(x))f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dxdy} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}ag(x,y)f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dxdy}+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}bh(x,y)f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dxdy} \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dxdy}+b\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dxdy} \\
&= a\mathrm{E}(g(X,Y))+b\mathrm{E}(h(X,Y))
\end{aligned}$$

□

۲. اگر X و Y دو متغیر تصادفی دلخواه باشند آن گاه $\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$.

اثبات. برای اثبات کافی است در خاصیت چهارم قرار دهیم: $a=b=۱$، $g(X,Y)=X$ و $h(X,Y)=Y$. □

۳. اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آن گاه $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.

اثبات. می دانیم که X و Y مستقل هستند اگر و تنها اگر $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. بنابراین

• اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند آن گاه

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \sum_x\sum_y xyf_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_x\sum_y xyf_X(x)f_Y(y) \\
&= \left(\sum_x xf_X(x)\right)\left(\sum_y yf_Y(y)\right) \\
&= \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

• اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند آن گاه

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{X,Y}(x,y)\mathrm{dxdy} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\mathrm{dxdy} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\mathrm{dx}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)\mathrm{dy}\right) \\
&= \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

□

همچنین اگر X_iها مستقل باشند آن گاه

$$\mathrm{E}(\prod_{i=۱}^{n} X_i) = \prod_{i=۱}^{n} \mathrm{E}(X_i)$$

۴. اگر X و Y مستقل باشند آن گاه $\mathrm{Var}(aX+bY+c) = a^۲\mathrm{Var}(X) + b^۲\mathrm{Var}(Y)$.

- همان طور که در اثبات ها هم مشاهده شد، خواص امید ریاضی برای متغیرهای تصادفی پیوسته و گسسته برقرار است.
- توجه کنید که عکس خاصیت سوم برقرار نیست یعنی اگر برای دو متغیر تصادفی X و Y، تساوی $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ برقرار باشد آن گاه نمی توان نتیجه گرفت که این دو متغیر الزاما مستقل هستند.

مثال ۴-۱۸. فرض کنید متغیرهای تصادفی توام (X,Y) دارای تابع چگالی احتمال توام زیر باشند. واریانس $۳X+۲$ و $۴Y-۲$ را بدست آورید.

y \ x	۰	۱	$f_Y(y)$
۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳
۱	۰/۴	۰/۲	۰/۶
۲	۰/۱	۰	۰/۱
$f_X(x)$	۰/۶	۰/۴	۱

حل:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=۰}^{۱} x f_X(x) = (۰)(۰/۶) + (۱)(۰/۴) = ۰/۴$$

$$\mathrm{E}(X^۲) = \sum_{x=۰}^{۱} x^۲ f_X(x) = (۰^۲)(۰/۶) + (۱^۲)(۰/۴) = ۰/۴$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}^۲(X) = ۰/۴ - (۰/۴)^۲ = ۰/۲۴$$

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{y=۰}^{۲} y f_Y(y)=(۰)(۰/۳)+(۱)(۰/۶)+(۲)(۰/۱)=۰/۸$$

$$\mathrm{E}(Y^۲)=\sum_{y=۰}^{۲} y^۲ f_Y(y)=(۰)(۰/۳)+(۱)(۰/۶)+(۴)(۰/۱)=۱$$

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{E}(Y^۲)-\mathrm{E}^۲(Y)=۱-(۰/۸)^۲=۰/۳۶$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{Var}(۳X+۲)=۹\mathrm{Var}(X)=۹\times ۰/۲۴=۲/۱۶ \\ \mathrm{Var}(۲-۴Y)=۱۶\mathrm{Var}(Y)=۱۶\times ۰/۳۶=۵/۷۶ \end{cases}$$

۱.۴.۴ امید ریاضی شرطی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند. امید ریاضی X^r به شرط Y به صورت زیر تعریف می شود:

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند آن گاه

$$\mathrm{E}(X^r|Y=y)=\sum_x x^r f_{X|Y}(x|y)$$

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند آن گاه

$$\mathrm{E}(X^r|Y)=\int_{-\infty}^{\infty} x^r f_{X|Y}(x|y)\mathrm{dx}$$

به همین ترتیب امید ریاضی Y^r به شرط X به صورت زیر تعریف می شود:

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند آن گاه

$$\mathrm{E}(Y^r|X=x)=\sum_x y^r f_{Y|X}(y|x)$$

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند آن گاه

$$\mathrm{E}(Y^r|X)=\int_{-\infty}^{\infty} y^r f_{Y|X}(y|x)\mathrm{dy}$$

مثال ۴-۱۹. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توام زیر باشند. $\mathrm{E}(X^{۲}|Y=۳)$ را بدست آورید.

y \ x	۲	۳	۴	$f_Y(y)$
۲	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	۰	$\frac{۲}{۸}$
۳	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۴}{۸}$
۴	۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$
$f_X(x)$	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۴}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$	۱

حل: طبق تعریف داریم

$$f_{X|Y}(x|۳)=\frac{f_{X,Y}(x,۳)}{f_Y(۳)}=\frac{f_{X,Y}(x,۳)}{\frac{۴}{۸}}$$

پس

$$f_{X|Y}(۲|۳)=\frac{f_{X,Y}(۲,۳)}{\frac{۴}{۸}}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۴}{۸}}=\frac{۱}{۴}$$
$$f_{X|Y}(۳|۳)=\frac{f_{X,Y}(۳,۳)}{\frac{۴}{۸}}=\frac{\frac{۲}{۸}}{\frac{۴}{۸}}=\frac{۲}{۴}$$
$$f_{X|Y}(۴|۳)=\frac{f_{X,Y}(۴,۳)}{\frac{۴}{۸}}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۴}{۸}}=\frac{۱}{۴}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^{۲}|Y=۳)&=\sum_{x=۲}^{۴}x^{۲}f_{X|Y}(x|۳)\\&=۲^{۲}(\frac{۱}{۴})+۳^{۲}(\frac{۲}{۴})+۴^{۲}(\frac{۱}{۴})\\&=\frac{۳۸}{۴}=۹/۵\end{aligned}$$

مثال ۴-۲۰. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی توام زیر باشند، $\mathrm{E}(X^۲|Y)$ را بدست آورید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & \text{if} \quad ۰<x<y<+\infty \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

حل: طبق تعریف بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dx} \\ &= \int_{۰}^{y} e^{-y}\mathrm{dx} \\ &= xe^{-y}|_{۰}^{y} = ye^{-y} \ , \qquad y>۰ \\ \Longrightarrow f_Y(y) &= \begin{cases} ye^{-y} & \text{if} \quad ۰<y<\infty \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases} \end{aligned}$$

و بنابراین داریم

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{۱}{y}, \quad ۰<x<y<\infty \\ \Longrightarrow \mathrm{E}(X^۲|Y) &= \int_{۰}^{y} x^۲(\frac{۱}{y})\mathrm{dx} = (\frac{۱}{y})(\frac{x^۳}{۳})|_{۰}^{y} = \frac{y^۲}{۳} \end{aligned}$$

۲.۴.۴ واریانس شرطی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند. واریانس شرطی Y به شرط X به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{Var}(Y|X)=\mathrm{E}(Y^۲|X)-\mathrm{E}^۲(Y|X)$$

مثال ۴-۲۱. در مثال ۴-۲۰، $\mathrm{Var}(X|Y)$ را محاسبه کنید.

حل: طبق مثال ۴-۲۰ داریم:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & \text{if} \quad 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}, \qquad f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y} & \text{if} \quad 0<y<\infty \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

و همچنین $0<x<y<\infty$ ، $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{1}{y}$.

$$\mathrm{E}(X|Y)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\mathrm{dx}=\int_0^y x(\frac{1}{y})\mathrm{dx}=(\frac{1}{y})(\frac{x^2}{2})|_0^y=\frac{y}{2}$$
$$\mathrm{E}(X^2|Y)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X|Y}(x|y)\mathrm{dx}=\int_0^y x^2(\frac{1}{y})\mathrm{dx}=(\frac{1}{y})(\frac{x^3}{3})|_0^y=\frac{y^2}{3}$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(X|Y)=\mathrm{E}(X^2|Y)-\mathrm{E}^2(X|Y)=\frac{y^2}{3}-(\frac{y}{2})^2=\frac{y^2}{12} \quad y>x>0$$

۵.۴ کواریانس و خواص آن

فرض کنید علاقمند به بررسی وجود ارتباط خطی بین متغیر تصافی X و Y باشیم. در واقع وجود ارتباط خطی بدین معناست که آیا افزایش X، Y افزایش پیدا خواهد کرد و یا کاهش می یابد؟

- اگر با افزایش X، Y نیز افزایش یابد، گوییم X و Y دارای تغییرات **همسو** هستند.
- اگر با کاهش X، Y نیز کاهش یابد، گوییم X و Y دارای تغییرات **همسو** هستند.
- اگر با افزایش X، Y کاهش یابد، گوییم X و Y دارای تغییرات **ناهمسو** هستند.
- اگر با کاهش X، Y افزایش یابد، گوییم X و Y دارای تغییرات **ناهمسو** هستند.

شایان ذکر است که معیار افزایش یا کاهش یک متغیر تصادفی، مقایسه آن با مقدار مورد انتظار (امید ریاضی) است.

برای یافتن این ارتباط ابتدا متغیر تصادفی T را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$T=(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))$$

واضح است که اگر X و Y همسو باشند آن گاه $T>0$ و اگر X و Y ناهمسو باشند آن گاه $T<0$. از آن جایی که T یک متغیر تصادفی است، مقدار مورد انتظار آن را محاسبه کرده که به آن کواریانس X و Y

می گویند. داریم

$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))\right)$$

و برای X و Y همسو $\sigma_{XY} > ۰$ و برای X و Y ناهمسو $\sigma_{XY} < ۰$. برای اینکه محاسبه کواریانس ساده تر شود، رابطه بالا را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))\right)\\ &= \mathrm{E}\left(XY - X\mathrm{E}(Y) - Y\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\right)\\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X\mathrm{E}(Y)) - \mathrm{E}(Y\mathrm{E}(X)) + \mathrm{E}(\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y))\\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(Y)\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

مثال ۴-۲۲. در مثال ۴-۱۸، کواریانس متغیرهای تصادفی X و Y را بدست آورید.

حل: طبق محاسبات در مثال ۴-۱۸ داریم

y \ x	۰	۱	$f_Y(y)$
۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳
۱	۰/۴	۰/۲	۰/۶
۲	۰/۱	۰	۰/۱
$f_X(x)$	۰/۶	۰/۴	۱

و همچنین $\mathrm{E}(X) = ۰/۴$ و $\mathrm{E}(Y) = ۰/۸$. بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_{x=۰}^{۱}\sum_{y=۰}^{۲} xy f_{X,Y}(x,y)\\ &= (۰)(۰)(۰/۱) + (۰)(۱)(۰/۴) + (۰)(۲)(۰/۱) + (۱)(۰)(۰/۲) + (۱)(۱)(۰/۲) + (۱)(۲)(۰)\\ &= ۰/۲\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = ۰/۲ - (۰/۴)(۰/۸) = ۰/۲ - ۰/۳۲ = -۰/۱۲$$

چون کواریانس منفی بدست آمد پس X و Y ناهمسو هستند.

خواص کواریانس

فرض کنید a، b، c و d اعداد ثابت و X و Y متغیرهای تصادفی باشند. در این صورت داریم:

۱. $\mathrm{Cov}(X,X)=\mathrm{Var}(X)$.

اثبات. طبق تعریف داریم:

$$\mathrm{Cov}(X,X)=\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(X-\mathrm{E}(X)))=\mathrm{E}(X-\mathrm{E}(X))^{2}=\mathrm{Var}(X).$$

□

۲. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$.

اثبات.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)))\\&=\mathrm{E}((Y-\mathrm{E}(Y))(X-\mathrm{E}(X)))=\mathrm{Cov}(Y,X)\end{aligned}$$

□

۳. $\mathrm{Cov}(X,c)=0$.

اثبات. طبق ویژگی های امید ریاضی داریم:

$$\mathrm{Cov}(X,c)=\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(c-\mathrm{E}(c)))=\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(c-c))=\mathrm{E}(0)=0$$

□

۴. $\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\mathrm{Cov}(X,Y)$.

اثبات. طبق خواص امید ریاضی بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)&=\mathrm{E}((aX+b-\mathrm{E}(aX+b))(cY+d-\mathrm{E}(cY+d)))\\&=\mathrm{E}((aX+b-a\mathrm{E}(X)-b)(cY+d-c\mathrm{E}(Y)-d))\\&=\mathrm{E}\left(a(X-\mathrm{E}(X))c(Y-\mathrm{E}(Y))\right)\\&=ac\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)))=ac\mathrm{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

□

۵. اگر X_1 و X_2 را نیز دو متغیر تصادفی دلخواه در نظر بگیریم آن گاه $\mathrm{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\mathrm{Cov}(X_1, Y) + b\mathrm{Cov}(X_2, Y)$. (اثبات به عنوان تمرین)

۶. اگر $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ آن گاه X و Y ناهمبسته خطی هستند.

- توجه کنید که اگر $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ آن گاه X و Y ناهمبسته خطی هستند اما **نمی توان نتیجه گرفت که آن ها مستقلند.**
- خواص کواریانس نشان می دهد که اگر مبدا اندازه گیری X و Y تغییر کند، کواریانس تغییر نمی کند اما اگر واحد اندازه گیری X و Y تغییر کند آن گاه کواریانس تغییر خواهد کرد.
- **توجه کنید که علامت کواریانس تنها برای تشخیص همسو بودن یا نبودن X و Y اهمیت دارد.**

۶.۴ ضریب همبستگی و خواص آن

اگر بجای محاسبه کواریانس متغیرهای تصادفی X و Y، کواریانس متغیرهای تصادفی استاندارد شده $\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ و $\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$ را محاسبه کنیم، داریم:

$$\mathrm{Cov}(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

که آن را ضریب همبستگی X و Y نامیده و با نماد $\rho_{X,Y}$ یا $\mathrm{Corr}(X, Y)$ نمایش می دهند، یعنی

$$\rho_{X,Y} = \mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y ارتباط خطی دو متغیر را نشان می دهد و همانند کواریانس داریم:

- اگر $\rho_{X,Y} < 0$، آن گاه تغییرات X و Y در خلاف جهت یکدیگر است و اصطلاحاً X و Y ناهمسو هستند.
- اگر $\rho_{X,Y} > 0$، آن گاه تغییرات X و Y در جهت یکدیگر است و اصطلاحاً X و Y همسو هستند.
- اگر $\rho_{X,Y} = 0$، آن گاه X و Y ناهمبسته خطی هستند.

مثال ۴-۲۳. در مثال ۴-۱۸، ضریب همبستگی X و Y را بدست آورید.

حل: طبق مثال ۴-۱۸، $\mathrm{Var}(X) = ۰/۲۴$ و $\mathrm{Var}(Y) = ۰/۳۶$. همچنین در مثال ۴-۲۲ بدست آوردیم: $\mathrm{Cov}(X, Y) = -۰/۱۲$. بنابراین

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{-۰/۱۲}{\sqrt{(۰/۲۴)(۰/۳۶)}} = -۰/۴۰۸$$

خواص ضریب همبستگی

فرض کنید a، b، c و d اعداد ثابت و X و Y دو متغیر تصادفی دلخواه باشند. در این صورت داریم:

۱. $\mathrm{Corr}(aX+b, cY+d) = \mathrm{Corr}(X,Y)$.

اثبات. طبق خواص کواریانس و واریانس بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Corr}(aX+b, cY+d) &= \frac{\mathrm{Cov}(aX+b, cY+d)}{\sqrt{\mathrm{Var}(aX+b)\mathrm{Var}(cY+d)}} \\
&= \frac{ac\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{(a^۲\mathrm{Var}(X))(c^۲\mathrm{Var}(Y))}} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \mathrm{Corr}(X,Y)
\end{aligned}$$

□

۲. **اگر X و Y مستقل باشند آن گاه** $\rho_{X,Y} = ۰$.

اثبات. می دانیم که اگر X و Y مستقل باشند آن گاه $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ و بنابراین $\mathrm{Cov}(X,Y) = ۰$ و از این رو $\rho_{X,Y} = ۰$. □

• توجه کنید که اگر $\rho_{X,Y} = ۰$ آن گاه X و Y ناهمبسته خطی هستند اما **نمی توان نتیجه گرفت که مستقلند.**

۳. $-۱ \leq \rho_{X,Y} \leq ۱$ به این صورت که هر چه مقدار ضریب همبستگی بین دو متغیر از صفر دورتر و به یک یا منفی یک نزدیک تر باشد، شدت همبستگی خطی بین دو متغیر بیشتر است.

مثال ۴-۲۴. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{if} \quad ۰ < x < y < \infty \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

حل: در حل انتگرال های زیر از این نکته استفاده می کنیم که طبق انتگرال و خواص آن، $\int_۰^\infty x^n e^{-x}\mathrm{dx} = n!$. داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)\mathrm{dxdy} \\ &= \int_۰^{\infty}\int_۰^{y} xye^{-y}\mathrm{dxdy} \\ &= \int_۰^{\infty} ye^{-y}\left(\frac{x^۲}{۲}|_۰^y\right)\mathrm{dy} \\ &= \frac{۱}{۲}\int_۰^{\infty} y^۳e^{-y}\mathrm{dy} = \frac{۳!}{۲} = ۳ \end{aligned}$$

برای محاسبه واریانس X و Y باید توابع چگالی حاشیه ای X و Y را بدست آوریم:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dy} = \int_x^{\infty} e^{-y}\mathrm{dy} = -e^{-y}|_x^{\infty} = e^{-x}, \quad x > ۰$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{dx} = \int_۰^{y} e^{-y}\mathrm{dx} = -e^{-y}x|_۰^{y} = ye^{-y}, \quad y > ۰.$$

داریم:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\mathrm{dx} = \int_۰^{\infty} xe^{-x}\mathrm{dx} = ۱! = ۱$$
$$\mathrm{E}(X^۲) = \int_{-\infty}^{\infty} x^۲f_X(x)\mathrm{dx} = \int_۰^{\infty} x^۲e^{-x}\mathrm{dx} = ۲! = ۲$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}^۲(X) = ۲ - ۱^۲ = ۱$$
$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\mathrm{dy} = \int_۰^{\infty} y^۲e^{-y}\mathrm{dy} = ۲! = ۲$$
$$\mathrm{E}(Y^۲) = \int_{-\infty}^{\infty} y^۲f_Y(y)\mathrm{dy} = \int_۰^{\infty} y^۳e^{-y}\mathrm{dy} = ۳! = ۶$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^۲) - \mathrm{E}^۲(Y) = ۶ - ۲^۲ = ۲$$

بنابراین

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = ۳ - (۱)(۲) = ۱$$
$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ \times ۲}} = ۰/۷۰۷$$

و نتیجه می گیریم که بین X و Y یک رابطه خطی نسبتا قوی بصورت همسو وجود دارد.