به عنوان مثال اگر $a=۲$ و $x_۰=۱$ اعداد زیر، که تقریبهایی از $\sqrt{۲}$ هستند، به‌دست می‌آیند.

$$x_۱=۱/۵$$
$$x_۲=۱/۴۱۶$$
$$x_۳=۱/۴۱۴۲۱۵۶۸۶$$
$$x_۴=۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲ \quad (۸D)$$

در اینجا ویژگی مهم تقریبهایی که به روش نیوتن به‌دست می‌آید به خوبی دیده می‌شود.
$x_۲$ دارای دو رقم اعشار درست است. $x_۳$ دارای چهار رقم اعشار درست است و بالاخره $x_۴$ دارای ۸ رقم اعشار درست است.

اگر $\sqrt{۲}$ را از ماشین حساب بگیرید مقدار $x_۴$ را به شما می‌دهد. علت این است که در ماشین حسابهای امروزی نیز از روش نیوتن برای جذرگیری استفاده می‌شود.

مثال

تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=x+\cos x=۰$ را با تقریب اولیه $x_۰=-۰/۷$ حساب کنید.

$$f'(x)=۱-\sin x$$

و فرمول نیوتن چنین خواهد بود:

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{x_n+\cos x_n}{۱-\sin x_n}$$

جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به قرار زیرند: (توجه کنید که ماشین حساب در وضعیت رادیان باشد).

$$x_۱=-۰/۷۳۹۴۳۶۴۹$$
$$x_۲=-۰/۷۳۹۰۸۵۱۵$$
$$x_۳=-۰/۷۳۹۰۸۵۱۳$$
$$\vdots$$

لازم به ذکر است که $f(x_۳)=۵/۳۸۳\times ۱۰^{-۹}$ که عدد بسیار کوچکی است.

همگرایی روش نیوتن

روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است، زیرا اگر معادلهٔ $f(x)=0$ را به صورت

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

بنویسیم و $f(\alpha)=0$ آن‌گاه α در معادلهٔ بالا هم صدق می‌کند. یعنی $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

و فرمول نیوتن عبارت است از: $x_{n+1} = g(x_n)$.

بنابراین، برای بحث در همگرایی روش نیوتن، باید شرایط همگرایی روش تکرار ساده را با $g(x)$ تعریف شده در بالا بررسی کنیم.

برای این منظور $g'(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$g'(x) = 1 - \frac{\left(f'(x)\right)^2 - f''(x)f(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = \frac{f''(x)f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

حال فرض می‌کنیم که: $f'(\alpha) \neq 0$ (یعنی، α را ریشهٔ ساده فرض می‌کنیم)

در این صورت، $g'(\alpha) = 0$

بنابراین، دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از روش نیوتن حاصل می‌شود همگراست. به‌علاوه، بنابر قضیه همگرایی روش تکرار ساده، مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ حداقل دو است.

همچنین مشاهده می شود که اگر $g''(\alpha) \neq 0$، آنگاه مرتبهٔ همگرایی دقیقاً دو است. در اینجا

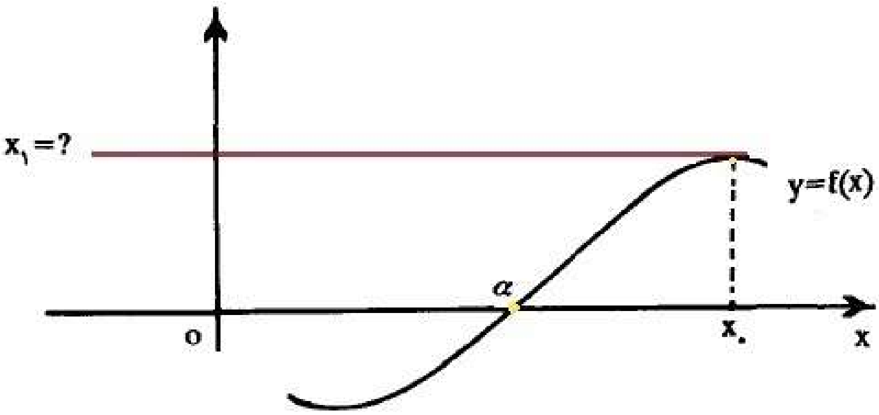
$$g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

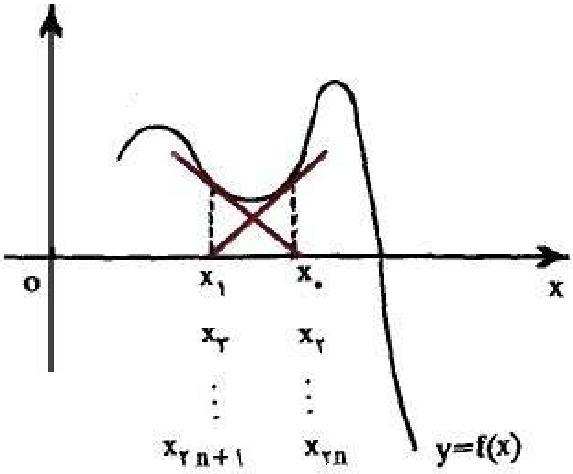
بنابراین اگر $f'(\alpha)f''(\alpha) \neq 0$ آن‌گاه مرتبهٔ همگرایی روش نیوتن دو است.

خصوصیات روش نیوتن

الف) اشکال اساسی روش نیوتن آن است که، آن همسایگی که در آن $|g'(x)| < 1$، ممکن است بسیار کوچک باشد، به‌عبارت دیگر x_0 باید بسیار نزدیک به α باشد تا جملات دنباله حاصل از روش نیوتن به α همگرا باشند.

شکلهای زیر واگرایی روش نیوتن و نوسان بین دو نقطه را نشان می‌دهند.





برای رفع این مشکلات ابتدا، به وسیلهٔ یکی از روشهای همیشه همگرا، تقریبی نزدیک به α به‌دست می‌آورند و بعد این تقریب را x_0 می‌گیرند و از روش نیوتن استفاده می‌کنند.

لذا روش نیوتن معمولاً برای تصحیح تقریب های نادقیق سایر روش های تکراری مورد استفاده قرار می گیرد.

ب) اشکال دوم روش نیوتن لزوم موجود بودن $f'(x)$ و محاسبهٔ آن در نقاط x_n است و این که همواره $f'(x_n) \neq 0$. گاهی تابع f مشتق ندارد، که در نتیجه امکان استفاده از فرمول نیوتن نخواهد بود، و یا شکل $f'(x)$ و محاسبهٔ آن پیچیده است.

ج) مزیت عمدهٔ روش نیوتن، در صورت همگرایی، سرعت سریع آن است که جذابیت و کاربرد آن را فزونی بخشیده است.

روش وتری

مشاهده شد که یکی از اشکالات روش نیوتن نیاز آن به وجود مشتق تابع **f** و محاسبهٔ آن در نقاط x_n است. در روش وتری از مشتق تابع استفاده نمی‌شود و همگرایی نسبتاً تند، در مقایسه با روشهای دوبخشی، نابه‌جایی و تکرار ساده دارد.

می‌دانیم که:

$$\lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x_n)$$

بنابراین، اگر x مقداری نزدیک به x_n داشته باشد، مثلاً x_{n-1}، آنگاه:

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \simeq f'(x_n)$$

از این‌رو، در فرمول نیوتن به‌جای $f'(x_n)$ از رابطهٔ فوق استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

و یا

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - (f x_{n-1})}$$

پس از ساده کردن:

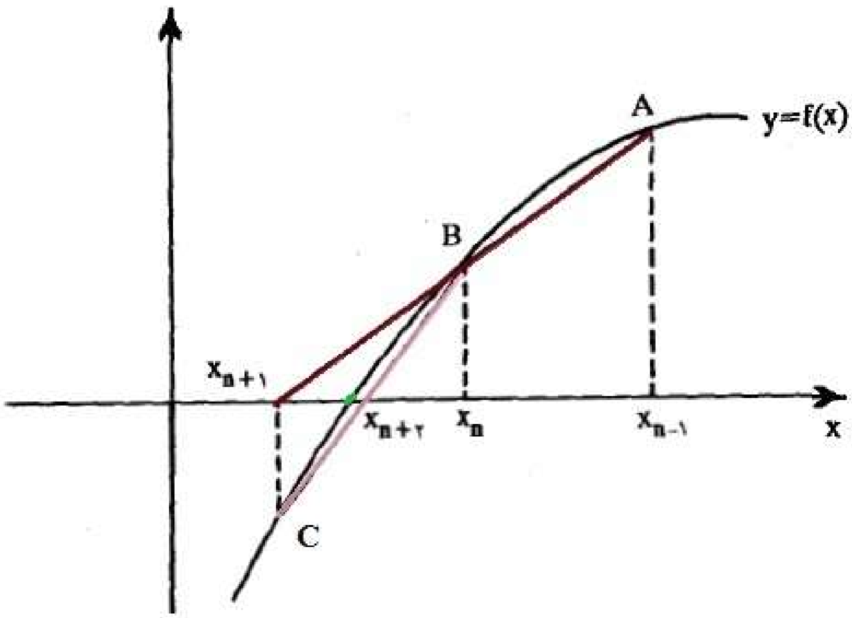
$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

برای محاسبهٔ جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به روش وتری نیاز به دو مقدار اولیهٔ x_0 و x_1 داریم.

علت اینکه این روش را روش وتری نامیده‌ایم آن است که x_{n+1} از محل برخورد خطی که نقاط $B \Big|_{f(x_n)}^{x_n}$ ، $A \Big|_{f(x_{n-1})}^{x_{n-1}}$ را به هم وصل می‌کند، بامحور x حاصل می‌شود.

ثابت می‌شود که اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از روش وتری حاصل می شود همگرا باشد، همگرایی آن از مرتبهٔ $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1{,}618$ است.

بنابراین، این روش سرعتی کندتر از نیوتن ولی به‌مراتب سریعتر از دوبخشی و نابه‌جایی دارد.



با توجه به شکل روش وتری ممکن است همگرا نباشد. مثلاً اگر خط AB موازی محور x باشد و یا آن را در دور دست قطع کند، جایی که احتمالاً جزء حوزهٔ تعریف f نیست، x_{n+1} یا قابل محاسبه نیست و یا مفید نیست.