۱.۰ حساب گزاره ها به عنوان یک زبان صوری

در بخش های گذشته، درباره گزاره های ساده (جمله های خبری ای که شامل تنها یک فعل اند) بحث کردیم و ملاحظه کردیم چگونه می توان از آنها برای ساختن فرمول های منطقی پیچیده تر استفاده کرد. ما از روی عمد درباره آنها غیر دقیق بودیم، زیرا هدف اصلی، تمرکز بر ساز و کار دقیق قواعد استنتاج طبیعی بود. اما باید روشن شود که قواعدی که ذکر کردیم، برای هر فرمولی که بتوانیم بسازیم، تا زمانی که با الگوی تعریف شده توسط آنها جور در می آید، درست است. برای مثال، کاربرد قاعده $\longrightarrow e$ در

۱	$p \longrightarrow q$	فرض اولیه
۲	p	فرض اولیه
۳	q	$\longrightarrow e$ ۱, ۲

عیناً برای فرمولی که با جایگذاری p با $p \vee \neg r$ و q با $r \longrightarrow p$ به دست می آید معتبر است.

۱	$p \vee \neg r \longrightarrow (r \longrightarrow p)$	فرض اولیه
۲	$p \vee \neg r$	فرض اولیه
۳	$r \longrightarrow p$	$\longrightarrow e$ ۱, ۲

به همین دلیل بود که از حروف یونانی برای بیان چنین قوانینی در حالت کلی استفاده می کردیم. هنوز باید عبارت «هر فرمولی که می توانیم بسازیم» را دقیق تر کنیم.

چون در این کتاب با منطق های گوناگونی روبرو می شویم، در بخش حاضر یک روش ساده ساختن «فرمول خوش ساخت»[1] را معرفی می کنیم.

به طور کلی ما نیاز به یک مجموعه نامتناهی از گزاره های ساده $p, q, r, \dots$ یا $p_1, p_2, p_3, \dots$ داریم. نباید از نامتناهی بودن تعداد چنین گزاره هایی نگران بود. در واقع ما فقط به تعداد متناهی از آنها را برای پیاده سازی موفقیت آمیز یک خاصیت در یک برنامه کامپیوتری نیاز داریم، لیکن نمی توانیم دقیقاً مشخص کنیم که در هر حالت، چه تعداد از این نشان ها را نیاز داریم. بنابراین در اختیار داشتن تعداد نامتناهی تا نشان، هزینه کمی است که برای ادامه دادن راه و بیان شیوه ساختن فرمول ها می پردازیم.

می توان این وضعیت را با تعداد نامتناهی جمله در زبان انگلیسی مقایسه کرد، اما در هر شرایطی، تنها تعداد متناهی تا از چنین جملاتی مورد استفاده قرار گیرند.

در منطق گزاره ها، فرمول ها یقیناً بایستی رشته هایی از الفبای

$$\{p, q, r, \dots\} \cup \{p_1, p_2, p_3, \dots\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \longrightarrow, (\ ,)\}$$

باشد. اما این یک واقعیت بدیهی است ولی برای آنچه می خواهیم بیان کنیم کافی نیست. برای مثال رشته

$$(\neg)\ (\ )\ \vee\ p\ q \longrightarrow$$

[1] Well Formed Formula

یک کلمه ساخته شده با الفبای ما است ولی هنوز به نظر می آید تا زمانی که که این کلمه، به منطق گزاره های مربوط می شود، معنای زیادی نمی دهد.
بنابراین آنچه باید تعریف کنیم آن رشته هایی هستند که می خواهیم آنها را فرمول بنامیم. چنین فرمول هایی را «فرمول های خوش ساخت» [۱] می نامیم.

تعریف ۰.۱.۱. فرمول های «خوش ساخت» منطق گزاره ها آنهایی هستند که ما، با استفاده از قواعد زیر آنها را، و فقط آنها را در تعدادی متناهی گام می سازیم.

(۱) **جملات ساده:** هر گزاره ساده مانند $p, q, r, \ldots$ و $p_1, p_2, p_3, \ldots$ یک فرمول «خوش ساخت» است.

(۲) $\neg$: اگر ϕ یک «فرمول خوش ساخت» باشد، آنگاه $\neg\phi$ هم «خوش ساخت» است.

(۳) $\wedge$: اگر ϕ و ψ دو فرمول «خوش ساخت» باشند، آنگاه $\phi \wedge \psi$ هم «خوش ساخت» است.

(۴) $\vee$: اگر ϕ و ψ دو فرمول «خوش ساخت» باشند، آنگاه $\phi \vee \psi$ هم «خوش ساخت» است.

(۵) $\longrightarrow$: اگر ϕ و ψ دو فرمول «خوش ساخت» باشند، آنگاه $\phi \longrightarrow \psi$ هم «خوش ساخت» است.

این خیلی مهم است که بدانیم این تعریف، همانی است که یک کامپیوتر انتظار پذیرش آن را دارد و از اولویت های «ترکیب» که قبلاً بر سر آن توافق کرده ایم استفاده نمی کنیم.

قرارداد ۰.۱.۱. در این بخش چنان عمل می کنیم که گویی یک کامپیوتر واقعی عمل می کند و فرمول ها را خوش ساخت می نامیم اگر و فقط اگر این فرمول ها چنان باشند که با توجه به قواعد فوق به دست آمده باشند.

توجه داشته باشید که در تعریف بالا، شرط «فقط آنهایی که»، امکان راه های ساخت دیگری برای فرمول های خوش ساخت را به کناری می گذارد.
تعریف های استقرایی، مانند آنی که در بالا برای فرمول های خوش ساخت منطق گزاره ها بیان گردید آنچنان فراوان هستند که گاه آنها را با یک دستور ساخت موسوم به «فرم بک‌آس–نائورِ» [۲]، ارائه می دهند. در این فرم، تعریف بالا به شکل زیر بیان می شود:

$$\phi ::= p \mid (\neg\phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \longrightarrow \phi) \qquad (۱)$$

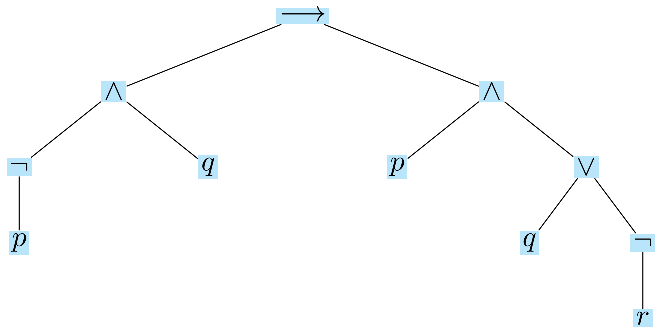
که در آن p یک گزاره ساده و هر ϕ که در سمت راست $::=$ قرار می گیرد، فرمولی است که قبلاً ساخته شده است.
به این ترتیب چگونه می توانیم نشان دهیم یک رشته خوش ساخت است؟ برای مثال چگونه می توانیم بفهمیم فرمول

$$((\neg p) \wedge q) \longrightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r)))) \qquad (۲)$$

خوش ساخت است؟
چنین استدلالی، به وسیله این واقعیت که دستورالعمل به کار رفته در (۱) در «اصل وارون» صدق کند، به این معنا که می توانیم «فرایند» ساخت را وارون کنیم، بسیار تسهیل می شود.
گرچه قواعد دستور ساخت بالا، به ما اجازه پنج روش ساخت فرمول های پیچیده را می دهد، اما در پنج شرط (۱) همیشه یک شرط یکتا وجود دارد که در آخرین مرحله مورد استفاده قرار می گیرد.

[۱] Well formed formulas
[۲] Backus-Nauer

برای فرمول (۲) این آخرین عمل، یک کاربرد شرط پنجم بود، زیرا ϕ یک استلزام با فرض $((\neg p \wedge q)$ و نتیجه $p \wedge (q \vee \neg r)))$ است.
با به کار بردن «اصل وارون» ملاحظه می شود که فرض، « ترکیب عطفی » گزاره های $\neg p$ و q است. $p\wedge(q\vee\neg r)))$ با استفاده از شرط سوم ساخته شده و فرمول خوش ساختی است. زیرا p بنابر شرط اول (۱) خوش ساخت است. فرمول $p \wedge (q \vee \neg r)))$ نیز به دلیل مشابه خوش ساخت است. به طور خلاصه (۲) خوش ساخت است.
برای ما به عنوان نوع بشر، کار کردن با نشان های جدا کننده مثل آکولاد، کروشه و پرانتز خیلی وقت گیر و زمان بر است. دلیل اینکه ما این علامت ها را نیاز داریم، این است که فرمول ها، ساختاری شبیه «درخت» دارند. اگرچه علاقه مندیم آنها را به صورت خطی نمایش دهیم، ولی نمایش آنها به صورت درخت هم مفید است زیرا ساختار آن را به صورتی واضح تر نشان می دهد. در شکل زیر، می توان تجزیه درختی فرمول خوش ساخت ϕ در (۲) را مشاهده کرد.



تجزیه درختی فرمول (۲)

توجه داشته باشید که چگونه پرانتزها لزوم خود را در این درخت از دست می دهند، زیرا مسیرها و ساختار انشعابی این درخت، ابهام های ممکن در تعبیر ϕ را از سر راه بر می دارند. در نمایش ϕ به عنوان یک رشته خطی (یعنی (۲))، ساختار انشعابی درخت، از طریق درج پرانتزها، آن گونه که در تعریف فرمول های خوش ساخت مشخص شده، حفظ می گردد.
به این ترتیب چگونه می توان نشان داد که یک رشته ψ از نشانه ها خوش ساخت نیست؟
به نظر می آید در نگاه اول، این کار کمی با ترفندهای خاص همراه است زیرا ما باید تا اندازه ای مطمئن شویم ψ نمی توانسته توسط یک سلسله از قواعد ساخت رشته ها به دست آمده است.
به عنوان مثال، بیایید به فرمول $(\neg)(\,)\vee p\ q \longrightarrow$ نگاهی بیاندازیم. اگر خیلی دقیق باشیم، در مورد این فرمول خیلی زود می توانیم تصمیم بگیریم. رشته $(\neg)(\,)\vee p\ q \longrightarrow$ حاوی $(\neg$ و می باشد و $\neg$ بنا بر قواعد ذکر شده در بالا، نمی تواند در منتهی الیه سمت راست هیچ فرمول خوش ساختی قرار بگیرد. اما فقط زمانی یک "(" در سمت راست یک فرمول قرار می دهیم که بدانیم آن فرمول «خوش ساخت» است. بنابراین $(\neg)(\,)\vee p\ q \longrightarrow$ خوش ساخت نیست.
شاید ساده ترین راه برای بررسی این که آیا یک فرمول ϕ خوش ساخت است این باشد که «درخت تجزیه» آن را رسم کنیم. به این ترتیب می توانیم بررسی کنیم که آیا فرمول (۲) خوش ساخت است یا نه. در شکل (؟؟) ملاحظه می شود که درخت تجزیه نشان $\longrightarrow$ را در ریشه خود دارد، که این بیانگر این است که فرمول در بالاترین سطح خود، یک استلزام است.
با استفاده از دستور ساخت فرمول ها برای استلزام، کافی است نشان دهید که زیر درخت‌های چپ و راست این ریشه خوش ساخت هستند. یعنی ما می‌توانیم به روشی موفقیت آمیز از بالا به پایین به پیش برویم.
توجه داشته باشید درخت تجزیه فرمول های خوش ساخت، یا یک گزاره ساده را به عنوان ریشه خود دارند (و این تمام آن چیزی است که درخت دارد) یا ریشه شامل $\neg$، $\vee$، $\wedge$ یا $\longrightarrow$ است. در حالت $\neg$ فقط یک زیر درخت وجود دارد که از ریشه خارج می شود زیرا $\neg$ عملی یکتایی است ولی دیگر رابط ها عملی دوتایی هستند. یعنی در حالتی که

ریشه شامل $\wedge$، $\vee$ یا $\longrightarrow$ است، بایستی دو زیر درخت از ریشه خارج شود که هریک بایستی رفتاری شبیه آنچه هم اکنون توصیف گردید باشد. این می تواند مثالی دیگر از یک تعریف استقرایی باشد.

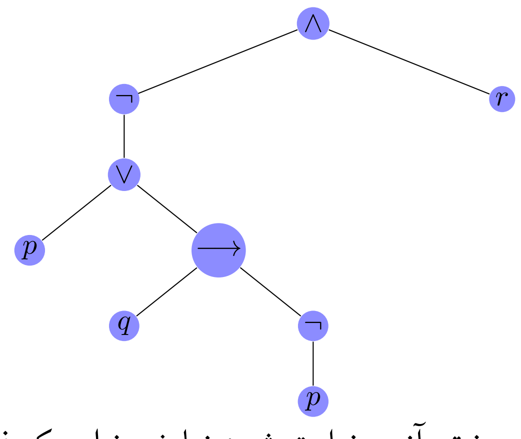
تفکر به کمک «درخت ها» کمک می کند مفاهیم استاندارد منطق را بهتر بفهمیم. برای یک فرمول خوش ساخت ϕ، داده شده در بالا، زیر فرمول های آن دقیقاً آنهایی هستند که متناظر به زیر درخت های درخت تجزیه آن در شکل (؟؟) می باشد. به این ترتیب می توانیم تمام «برگ»های آن، p، q (هرکدام دوبار ظاهر می شوند) و r را فهرست نماییم، آنگاه $(\neg p)$ و $((\neg p) \wedge q)$ در زیر درخت چپ $\longrightarrow$ و $(q \vee (\neg r))$ و $(\neg r)$ و $((q \wedge (q \vee (\neg p))))$ در زیر درخت راست $\longrightarrow$ هستند.

چون تمام یک درخت، زیر درخت خودش هم هست، تمام ۹ فرمول ϕ را می توانیم به صورت زیر فهرست نماییم.

$$
\begin{array}{l}
p \\
q \\
r \\
(\neg p) \\
((\neg p) \wedge q) \\
(\neg r) \\
(q \vee (\neg r)) \\
((p \wedge (q \vee (\neg r)))) \\
((\neg p) \wedge q) \longrightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r))))
\end{array}
$$

اجازه دهید درخت شکل (؟؟) را بررسی کنیم. چرا این درخت نشاندهنده یک فرمول خوش ساخت است؟

تمام برگ های آن گزاره هایی ساده اند (p و q دوبار و r یک بار)، همه راس های انشعاب های رابط های منطقی اند ($\neg$ دوبار، $\wedge, \vee$ و $\longrightarrow$ یک بار) و تعداد زیر درخت ها در تمام حالت ها (یک زیر درخت برای راس $\neg$ و دو زیر درخت برای بقیه راس های غیر برگی) درست هست.



داده شده: یک درخت، آنچه خواسته شده: نمایش خطی یک فرمول منطقی.

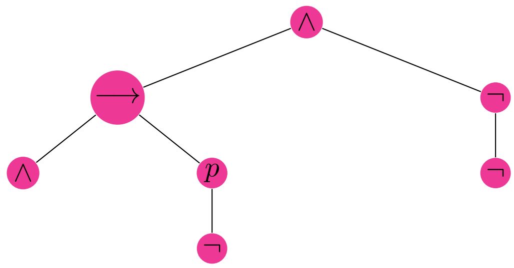
چگونه نمایش خطی این درخت را به دست می آوریم؟

اگر پرانتزها را نادیده بگیریم، آنگاه به دنبال هیچ چیزی به جز نمایش این درخت به عنوان یک لیست نخواهیم بود. به این ترتیب فرمول خوش ساخت حاصل

$$((\neg(p \vee (q \longrightarrow (\neg p)))) \wedge r)$$

خواهد بود.

اما درخت زیر به دو دلیل نمی تواند یک فرمول خوش ساخت را نمایش دهد.



یک دلیل این که برگ ($\wedge$) (و به دلیل مشابه دو برگ $\neg$) در زیر درخت چپ گره $\longrightarrow$، یک گزاره ساده نیست.

۲.۰ معنا شناسی زبان منطق گزاره ها

آنچه تا کنون از زبان صوری منطق گزاره ها فرا گرفته ایم، ساختار نحوی[1] آن بوده است. واژگان آن را می دانیم و فرمول های درست ساخت آن را نیز می توانیم از رشته های دیگر زبان جدا کنیم.

قاعده های استنتاج هم چیزی به جز قاعده های حاکم بر این رشته ها نیست. به بیانی دیگر، تا کنون با گروهی از نشانه ها و قاعده های حاکم بر آنها سر و کار داشتیم. اگرچه ϕ، ψ و مانند آنها را فرمول و $\neg$، $\wedge$، $\vee$، و $\longrightarrow$ را نقیض، عاطف، فاصل و شرط نامیدیم، اما این نام ها، به اعتبار معنایی که دارند، تعبیری از این نشانه ها بودند و لیکن می توانستیم به جای این نام ها، نام ها دیگری که این دلالت های معنایی را نداشته باشند به کار بریم تا مفهوم صوری بودن استنتاج ها و دخالت نداشتن معنی در برهان ها آشکارتر شود.

البه در ابتدای کار، برای آسانتر کردن کار، گریزی از بحث های معنایی و وارد کردن راست و ناراست نیست، اما از جایی به بعد می توانیم و باید مفاهیم صوری را از مفاهیم معنایی جدا کنیم.

جدا کردن صورت از معنا، در زبان های صوری منطق و ریاضی کاری است شدنی و نه چندان دشوار. اما در زبان های طبیعی، جدا سازی چندان ساده نیست. به خصوص، معنا شناسی زبان طبیعی دشوار و پیچیده است.

معنا [2] در منطق مفهوم دقیقی دارد که برای روشن کردن آن ناچار به توضیح کوتاهی هستیم.

عنصرهای اساسی فرمول های خوش ساخت زبان منطق گزاره ها، رابط های منطقی و متغییرهای گزاره ای هستند. تا زمانی که معنایی به متغییرهای گزاره ای ندهیم، در نگارش، چیزی جز نشانه هایی بر کاغذ، و در گفتار چیزی جز صوت هایی در فضا نیستند. بنابراین انتظار ما از معنا شناسی زبان منطق جمله ها، این است که معلوم کند متغییرهای گزاره ای به چه دلالت دارند، مدلول آنها چیست و به اصطلاحی که به کار خواهیم برد، چه ارزشی به آنها می توان نسبت داد.

برای این که با ماهیت صوری این معنا شناسی آشنا شویم، نخست انتساب ارزش به متغییرهای گزاره ای را در عام ترین شکل آن، و بدون توجه به رابطه «زبان منطق گزاره ها» با «زبان طبیعی» بیان می کنیم و سپس درباره این رابطه و چگونگی آن سخن می گوییم.

قاعده های معنا شناسی

معنا شناسی در زبان منطق گزاره ها بر این اصل استوار است که: هر متغییر گزاره ای می تواند تنها یکی از دو ارزش راست T، و ناراست F را داشته باشد. از این رو این منطق را منطق دو ارزشی می نامند.

اکنون با این اصل، و تعریف های بازگشتی زیر، می توان هر «فرمول خوش ساخت» از زبان منطق گزاره ها را با داشتن ارزش متغییرهای گزاره ای آن پیدا کرد.

[1] Syntactical
[2] Semantiic

اگر p و q دو متغییر گزاره ای از زبان منطق گزاره ها باشند،

(۱) $\neg p$ ارزش T دارد اگر و فقط اگر p ارزش T نداشته باشد.

(۲) $p \wedge q$ ارزش T دارد اگر و فقط اگر هم p و هم q ارزش T داشته باشند.

(۳) $p \vee q$ ارزش T دارد اگر و فقط اگر دست کم یکی از p و q ارزش T داشته باشند.

(۴) $p \longrightarrow q$ ارزش T دارد اگر و فقط اگر دست کم یا p ارزش T نداشته باشد یا q ارزش T داشته باشد.

(۵) اگر فرمول خوش ساختی ارزش T نداشته باشد، ارزش F دارد.

اکنون با مثالی روش کاربست این قواعد را تشریح می کنیم.

مثال ۰.۲.۱. فرمول خوش ساخت

$$\neg p \longrightarrow p \vee q$$

به ازای چه ارزش هایی از متغییرهای گزاره ای خود، ارزش T دارد؟

حل. بنابر بند ۴ بالا این فرمول خوش ساخت در دو حالت ارزش T دارد. یکی در حالتی که $\neg p$ ارزش T نداشته باشد، که در این صورت p باید ارزش T داشته باشد و دیگری در حالتی که $p \vee q$ ارزش راست داشته باشد. اما بنابر بند ۳ این فهرست، این ترکیب هنگامی ارزش T دارد که دست کم p یا q ارزش T داشته باشند.

به این ترتیب شرط ارزش T داشتن عبارت $\neg p \longrightarrow p \vee q$ این است که p ارزش راست داشته باشد یا q ارزش راست داشته باشد. یعنی اگر p ارزش راست داشته باشد و q راست، و همچنین p راست و q ناراست باشد، فرمول بالا ارزش راست دارد و در سایر حالت ها ارزش ناراست دارد. □

یاد آور می شود جدول ارزش رابط های منطقی $\neg$، $\wedge$، $\vee$ و $\longrightarrow$ که در مبانی ریاضی آموختیم، روشی مکانیکی برای تعیین ارزش فرمول های خوش ساخت به دست می دهند.

۰.۲.۱ ترجمه زبان طبیعی به زبان منطق گزاره ها

خاستگاه زبان صوری منطق، زبان طبیعی است. هدف از ساختن منطق صوری این است که ساختار منطقی استنتاج هایی را که در زبان طبیعی صورت می گیرد، به دور از ابهام های زبان طبیعی، آشکار نماید و قاعده های حاکم بر این استنتاج ها را به دست دهد.

برای بررسی یک استنتاج، نخست باید آن را با این زبان صوری نشان داد. برای این کار باید هر جمله زبان طبیعی را به فرمول خوش ساختی که نزدیکترین ساختار منطقی را به آن جمله داشته باشد، ترجمه کرد. حال که معنا شناسی زبان صوری منطق گزاره ها را داریم، چگونگی این ترجمه ها را برای این بخش از منطق می توانیم به دقت شرح دهیم.

در این ترجمه، جمله های خبری زبان طبیعی به گزاره ها ترجمه می شوند، اما هر جمله خبری زبان طبیعی یا راست است یا نا راست. بنابراین طبیعی است که در این ترجمه T را به ارزش «صدق» و F را به ارزش «کذب» تغییر دهیم.

آنچه می ماند، معادل های $\neg$، $\wedge$، $\vee$ و $\longrightarrow$ در زبان طبیعی است. راهنمای ما برای این کار جداول ارزش رابط های منطقی است. اما قبل از این که به این کار بپردازیم، لازم است توضیحی درباره معنا در «معنا شناسی منطق» ارائه دهیم.

می گوئیم معنای جمله «مجموع زوایای یک مثلث 180° است» متفاوت از معنای جمله «امروز هوا ابری است» می باشد. یعنی جمله اول چیزی می گوید متفاوت از چیزی که جمله دوم می گوید. این دو جمله هم معنی نیستند ولی از سوی دیگر در یک چیز مشترکند: هر دو صادق هستند. در واقع این دو جمله هم معنا نیستند ولی هم ارزش هستند.

از این جا آشکار می شود که آنچه ما در این بخش قاعده های معنا شناختی نامیدیم در واقع قاعده های مربوط به ارزش جمله هاست، نه معنای آنها. کار برد اصطلاح معنا شناسی در این مورد چه بسا گمراه کننده باشد. از این رو کُواین پیشنهاد کرده است به جای اصطلاح «معنا شناسی» عبارت «نظریه دلالت» را به کار بریم.
معنا شناسی زبان منطق جمله ها در شکل صوری آن چیزی جز تعیین ارزش فرمول های خوش ساخت، بر اساس ارزش های متغییر های گزاره ای سازنده آن نیست.
از آنجائیکه منطق ما دو ارزشی است، اگر بدانیم یک «فرمول خوش ساخت» به ازای چه ارزش هایی از متغییر های گزاره ای خود ارزش راست دارد، می دانیم به ازای چه ارزش هایی از آنها، ارزش ناراست F دارد. بنابراین می توانیم بگوییم دانستن معنای یک «فرمول خوش ساخت» چیزی جز دانستن این که به ازای چه ارزش های متغییرهای گزاره ای خود ارزش T دارد نیست. این را چنین بیان می کنند:
معنای یک «فرمول خوش ساخت» همان شرط های T آن است و با تعبیر T به صدق، معنای یک «فرمول خوش ساخت» همان شرط های صدق آن است.

تعریف ۱.۲.۰. اگر برای همه مقادیری که برای آنها $\phi_۱$، $\phi_۲$، ...، ϕ_n ارزش T می گیرند، ψ نیز ارزش T بگیرد، می گوئیم

$$\phi_۱, \phi_۲, \ldots, \phi_n \models \psi$$

برقرار است و $\models$ رابطه استلزام معنایی [1] نامیده می شود.

توضیح ۱.۲.۰. $(*)$ می دانیم $\phi_۱, \phi_۲, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ درست است هرگاه به کمک قاعده های استنتاج، بتوان از $\phi_۱$، ...، ϕ_n فرمول ψ را نتیجه گرفت. این یعنی درستی یک «صورت برهان» [2].
به این ترتیب، درستی یک «صورت برهان» مفهومی است صوری و بستگی به «تعبیری» که از فرمول های خوش ساخت آن می کنیم ندارد. از طرف دیگر در زبان طبیعی، فرمول های خوش ساخت «صورت برهان ها» را به جمله های زبان تعبیر می کنیم و در اینجا مسأله صدق و کذب پیش می آید و برداشت ما از «درستی یک صورت برهان» بیش از هر چیز این خواهد بودکه اگر «مقدم های آن» جمله های صادقی باشند، آنچه را نتیجه می نامیم هم جمله صادقی باشد. در اینجا مفهوم درستی با صدق پیوند پیدا میکند.
در واقع می توانیم برای درستی یک «صورت برهان» در برابر تعریف صوری $(*)$ تعریفی «معنایی» هم به دست دهیم. برای این کار نخست باید مفهوم «نمونه صادق بودن» را که برای فرمول های خوش ساخت تعریف کردیم، به «صورت برهان ها» هم تعمیم دهیم.
$(**)$ «صورت برهان» $\phi_۱, \phi_۲, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ را «نمونه صادق» می نامیم اگر هیچ تعبیری نتوان یافت که $\phi_۱, \phi_۲, \ldots, \phi_n$ در آن صادق، اما ψ کاذب باشد.
برای جدا کردن $(*)$ و $(**)$ از هم گاهی چنین می گویند:
در $(*)$، ψ «نتیجه صوری» مقدم ها است و در $(**)$، ψ «نتیجه معنایی» آنهاست.
اگر ψ «نتیجه معنایی» مقدم ها باشد، به جای نشان $\vdash$، از نشان $\models$ استفاده می کنیم. با این قرار داد، منظور از

$$\phi_۱, \phi_۲, \ldots, \phi_n \models \psi$$

این است که نمی توان تعبیری یافت که در آن $\phi_۱$ تا ϕ_n صادق باشند ولی ψ کاذب باشد.
اگر قاعده های استنتاج «صورت برهان هایی» بسازند که نمونه صادق نباشند، یعنی از مقدم های صادق گاهی نتایج کاذب به بار آورند، ارزش خود را از دست می دهند.

[1] Semantic Entailment
[2] sequent

قضیه ۱.۲.۰ (قضیه صحت). فرض کنیم ϕ_1، ϕ_2، ...، ϕ_n و ψ فرمول های منطق گزاره ها باشند. اگر صورت برهان $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ درست باشد، آنگاه نتیجه معنایی $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$ نیز برقرار است.

در ادامه می خواهیم شما را متقاعد کنیم که قواعد استنتاج طبیعی کامل هستند. یعنی
هنگامی که $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$ برقرار است، آنگاه یک اثبات مبتنی بر استنتاج طبعی برای «صورت برهان» $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ وجود دارد.
ترکیب این دو با یکدیگر سبب می شود بتوان نوشت:

قضیه ۲.۲.۰. $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ درست است اگر و فقط اگر $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$ درست باشد.

این یک آزادی عمل به ما می دهد که بنابر آن می توانیم تصمیم بگیریم کدام روش را برای استفاده ترجیح بدهیم.
در عمل اغلب از آنی که آسانتر است استفاده می کنیم. در اولی لازم است در جستجوی یک اثبات باشیم، که بر اساس آن دوگانه نمای «برنامه نویسی منطقی» استوار است و دومین روش بر این اساس استوار است که شما را وادار می کند یک جدول درستی بسازید که اندازه آن به گزاره های تشکیل دهنده آن بستگی دارد و به صورت نمایی رشد می کند.
به طور کلی، هر دو روش دشوار هستند، اما بسته به حالت های خاص فرمول ها، استفاده های متفاوت این دو روش را موجب می شود.
در ادامه به این استدلال می پردازیم که اگر $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$ برقرار بود آنگاه $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ نیز برقرار است.
فرض کنیم نتیجه گیری معنایی $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$ درست است.
می خواهیم نشان دهیم «صورت برهان» $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ درست است.
استدلال در سه مرحله تکمیل می شود.
مرحله ۱: نشان می دهیم $\models \phi_1 \longrightarrow (\phi_2 \longrightarrow (\phi_3 \longrightarrow (\ldots (\phi_n \longrightarrow \psi) \ldots)))$ درست است.
مرحله ۲: نشان می دهیم $\vdash \phi_1 \longrightarrow (\phi_2 \longrightarrow (\phi_3 \longrightarrow (\ldots (\phi_n \longrightarrow \psi) \ldots)))$ درست است.
مرحله ۳: در نهایت نشان می دهیم $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ درست است.

اولین و سومین مرحله کاملاً آسان است ولی مرحله ۲ واقعاً کار می برد.
مرحله ۱:

تعریف ۲.۲.۰. یک فرمول منطق گزاره ها ϕ یک توتولوژی [1] نامیده می شود هرگاه برای تمام ارزش های گزاره های ساده سازنده آن، ارزش راست اختیار کند.

فرض کنیم $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$ درست است. می خواهیم نشان دهید $\phi_1 \longrightarrow (\phi_2 \longrightarrow \ldots (\phi_n \longrightarrow \psi)))\ldots)$ در واقع یک توتولوژی است.
چون فرمول اخیر یک استلزام تودرتو است، این فرمول مقدار F می گیرد هرگاه تمام فرمول های ϕ_1، ϕ_2، ...، ϕ_n ارزش T بگیرند ولی ψ ارزش F بگیرد که hdk ناقض فرض درستی $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$ است. بنابراین

$$\models \phi_1 \longrightarrow (\phi_2 \longrightarrow (\ldots (\phi_n \longrightarrow \psi)) \ldots)))$$

درست است.
مرحله ۲:

قضیه ۳.۲.۰. اگر $\models \eta$ درست باشد، آنگاه $\vdash \eta$ هم درست است. به عبارت دیگر اگر η یک توتولوژی باشد، آنگاه η یک قضیه است.

[1] Tautology

این مرحله نسبتاً دشوار است.
فرض کنید $\models \eta$ درست است. برای η ی مفروض، که حاوی n گزاره ساده $p_1,\ldots,p_n$ است، می دانیم ارزش η در جدول ارزش، برای تمام 2^n حالت برابر T است. (هر سطر جدول ارزش، یک ارزیابی η را فهرست می کند). حال چگونه می توانیم از این اطلاعات استفاده کنیم و اثباتی برای درستی η ارائه نمائیم؟

در برخی حالت ها، با نگاهی دقیق به ساختارهای خاص η، این کار به آسانی میسر می گردد. اما در این جا باید به روشی مستقل از حالت های خاص و به صورتی متحدالشکل چنین اثباتی را ارائه دهیم.

کلید اصلی در این است که هر خط جدول ارزش η را به یک دنباله تبدیل کنیم. آنگاه یک اثبات برای 2^n دنباله ساخته ایم و همه آنها را به عنوان یک اثبات برای η ادغام می کنیم.

گزاره ۱.۲.۰. فرض کنیم ϕ یک فرمول است به طوری که $p_1,p_2,\ldots,p_n$ تمامی گزاره های سازنده آن هستند. فرض کنیم ℓ یکی از خطوط جدول ارزش ϕ است. برای همه $1 \leq i \leq n$ ها، فرض کنیم $\widehat{p_i}$ را برابر p_i بگیریم هرگاه ارزش آن در خط ℓ ام برابر T باشد، در غیر این صورت $\widehat{p_i}$ را برابر $\neg p_i$ می گیریم. آنگاه داریم:

(۱) $\widehat{p_1},\widehat{p_2},\ldots,\widehat{p_n} \vdash \phi$ اثبات پذیر است هرگاه درایه ϕ در خط ℓ-ام برابر T باشد.

(۲) $\widehat{p_1},\widehat{p_2},\ldots,\widehat{p_n} \vdash \neg\phi$ اثبات پذیر است هرگاه درایه ϕ در خط ℓ-ام برابر F باشد.

اثبات. اثبات با استقرا روی تعداد گزاره های ساده سازنده ϕ انجام می گیرد.

۱. اگر ϕ فقط از یک گزاره ساده p تشکیل شده باشد، نیاز داریم نشان دهیم $p \vdash p$ و $\neg p \vdash \neg p$.

اما این ها اثبات های تک خطی هستند که قبلاً درستی آنها را مشاهده کرده ایم.

۲. اگر ϕ به شکل $\neg\phi_1$ باشد، باز دو حالت را باید در نظر بگیریم. **حالت اول:** فرض کنیم که ارزش ϕ برابر T است. در این حالت ارزش ϕ_1 برابر F خواهد بود. توجه داشته باشید که ϕ_1 همان گزاره های ساده ϕ را دارد. می توانیم از فرض استقرا روی ϕ_1 استفاده کنیم و نتیجه بگیریم $\widehat{p_1},\widehat{p_2},\ldots,\widehat{p_n} \vdash \neg\phi_1$. اما $\neg\phi_1$ همان ϕ است. بنابراین در این حالت نیز به نتیجه مورد نظر رسیده ایم.

حالت دوم: اگر ارزش ϕ برابر F شود آنگاه ϕ_1 ارزش T خواهد گرفت و بنابر فرض استقرا خواهیم داشت $\widehat{p_1},\widehat{p_2},\ldots,\widehat{p_n} \vdash \phi_1$.
با استفاده از قاعده استنتاج $\neg\neg i$، می توانیم اثبات $\widehat{p_1},\widehat{p_2},\ldots,\widehat{p_n} \vdash \phi_1$ را به $\widehat{p_1},\widehat{p_2},\ldots,\widehat{p_n} \vdash \neg\neg\phi_1$ گسترش دهیم، اما $\neg\neg\phi_1$ همان $\neg\phi$ است. که به این ترتیب باز هم به نتیجه مورد نظر دست یافته ایم.

در حالت های باقی مانده با دو زیر فرمول مواجه می شویم: ϕ برابر $\phi_1 \circ \phi_2$ است که $\circ$ یکی از رابط های منطقی $\longrightarrow$، یا $\wedge$ و یا $\vee$ است.
در همه این حالت ها، فرض می کنیم $q_1,q_2,\ldots,q_m$ گزاره های ساده سازنده ϕ_1 و $r_1,r_2,\ldots,r_k$ گزاره های ساده سازنده ϕ_2 باشند. آنگاه یقیناً

$$\{q_1,q_2,\ldots,q_m\} \cup \{r_1,r_2,\ldots,r_k\} = \{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$$

بنابراین وقتی $\widehat{q_1},\widehat{q_2},\ldots,\widehat{q_m} \vdash \psi_1$ و $\widehat{r_1},\widehat{r_2},\ldots,\widehat{r_k} \vdash \psi_2$ درست هستند، آنگاه $\widehat{p_1},\widehat{p_2},\ldots,\widehat{p_n} \vdash \psi_1 \wedge \psi_2$ نیز با استفاده از قاعده $\wedge i$ درست است.
به این ترتیب می توانیم از فرض استقرا استفاده کنیم و با توجه به ترکیب های عطفی که به دست می آید می توانیم نتیجه مورد نطر را برای ϕ یا $\neg\phi$ به دست آوریم.

این روش ها را برای $\models \phi_1 \longrightarrow (\phi_2 \longrightarrow (\dots(\phi_n \longrightarrow \psi))\dots))$ به کار می بریم. چون این فرمول یک توتولوژی است، ارزش آن برای تمام 2^n حالت جدول ارزش برابر T خواهد بود. به این ترتیب گزاره بالا 2^n اثبات $\widehat{p_1}, \widehat{p_2}, \dots, \widehat{p_n} \vdash \eta$ را به ما می دهد، یک اثبات برای هر حالتی که $\widehat{p_i}$ یا p_i است یا $\neg p_i$.

بعد از آن کار ما ادغام همه این حالت ها در یک اثبات برای η است که از هیچ فرض اولیه ای استفاده نمی کند. $\square$

مرحله ۳

در نهایت نیاز داریم اثباتی برای $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$ بیابیم.

اثبات. $\vdash \phi_1 \longrightarrow (\phi_2 \longrightarrow (\phi_3 \longrightarrow (\dots(\phi_n \longrightarrow \psi))\dots))$ که در مرحله ۲ انجام شد، را در نظر بگیریدو اثبات آن را با معرفی ϕ_1، ϕ_2، … و ϕ_n به عنوان فرض اولیه به کار ببندید (از ϕ_1 شروع کنید و همینطور با ϕ_2 و … ادامه دهید). به این ترتیب به نتیجه ψ می رسیم که اثباتی برای $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$ را به ما می دهد. $\square$

نتیجه ۱.۲.۰ (قضایای صحت و تمامیت). فرض کنید ϕ_1، ϕ_2، …، ϕ_n و ψ فرمول های منطق گزاره ها باشند. آنگاه $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$ درست است اگر و فقط اگر $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$ درست باشد.