برهان درستی

یکی از وظایف یک منطق دان آزمون **حکم ها** است. یک حکم تصدیق این است که گزاره ای به نام نتیجه از گزاره های دیگری به نام مفروضات یا **مقدمات** به دست می آید. یک حکم درست تلقی می شود هرگاه ترکیب عطفی مفروضات نتیجه را ایجاب نماید. مثلاً آنچه در زیر می آید، یک حکم است که در آن چهار گزاره اول مفروضات هستند و گزاره آخر نتیجه است.

اگر او پزشکی می خواند آنگاه درآمد خوبی در انتظارش است.

اگر به تحصیل هنر می پردازد، آنگاه زندگانی خوبی در انتظارش است.

اگر درآمد خوبی در انتظارش است یا زندگانی خوبی در انتظارش است، شهریه ای که به کالج می پردازد به هدر نرفته است.

شهریه او به هدر رفته است

بنابراین، او نه پزشکی می خواند نه هنر تحصیل می کند.

این حکم را می توان به صورت نمادی زیر نوشت:

ف۱. $P \longrightarrow D$ **(ف=فرض، P= اوپزشکی می خواند، D= درآمد خوبی در انتظارش است)**

ف۲. $T \longrightarrow Z$ **(T= به تحصیل هنر می پردازد، Z= زندگانی خوبی در انتظارش است)**

ف۳. $D \vee Z \longrightarrow \sim S$ **(S= شهریه کالج او به هدر رفته است)**

ف۴. S

ن $\therefore \; \sim P \wedge \sim T$

از فرض های ف ۳ و ف ۴ (یعنی از $S \vee Z \longrightarrow \sim S$ و S) بر طبق قانون قیاس دفع، $\sim (D \vee Z)$ نتیجه می شود و این بنابرقانون دمورگان با $\sim D \wedge \sim Z$ هم ارز است. بنابر قانون اختصار از $\sim D \wedge \sim Z$ درستی $\sim D$ (و همچنین درستی $\sim Z$) را نتیجه می گیریم. از ف۱ (یعنی $P \longrightarrow D$) و $\sim D$ درستی $\sim P$ را به دست می آوریم همچنین از ف۲ (یعنی از $T \longrightarrow Z$) و $\sim Z$ درستی $\sim T$ رانتیجه می گیریم. بالاخره عطف $\sim P$ و $\sim T$، گزاره $\sim P \wedge \sim T$ را نتیجه می دهد. در این برهان، قواعد استنتاج قیاس دفع، قانون دمورگن و قانون اختصار

به کار گرفته شده اند.

یک روش صوری و مختصر تر برای بیان این برهان درستی، این است که فرض ها و گزاره هایی را که از فرض ها نتیجه می شوند را در یک طرف بنویسیم و در هر مرحله توجیه آن را کنارش ذکر کنیم.

در هر مرحله «توجیه» مشخص می کند که گزاره این مرحله از کدام گزاره های قبلی و طبق چه قواعد استنتاجی به دست آمده است. برای آسانی مراجعه، بهتر است که فرض ها و گزاره های منتج از آنها را شماره گذاری کرده و نتیجه را در سمت چپ آخرین فرض بنویسیم و آن را با خطی کج مانند / از فرض جدا کنیم تا مشخص شود که گزاره های قبل از آن همگی مفروضات اند. برهان صوری درستی حکم بالا را می توان به صورت زیر نوشت.

۱.	$P \longrightarrow D$	**(ف)**
۲.	$T \longrightarrow Z$	**(ف)**
۳.	$D \vee Z \longrightarrow \sim S$	**(ف)**
۴.	$S / \therefore\ \sim P \wedge \sim T$	**(ف/ن)**
۵.	$\sim (D \vee Z)$	**۳، ۴، قیاس دفع**
۶.	$\sim D \wedge \sim Z)$	**۵، دمورگن**
۷.	$\sim D$	**۶، اختصار**
۸.	$\sim Z$	**۶، اختصار**
۹.	$\sim P$	**۱، ۷، قیاس دفع**
۱۰.	$\sim T$	**۲، ۸، قیاس دفع**
۱۱.	$\sim P \wedge \sim T$	**۹، ۱۰، قانون عطف**

در مرحله ۱۱ بالا، حکم زیر را که به روشنی معتبر است و قانون عطف خوانده می شود، به کار برده ایم.

p	ف ۱
q	ف ۲
$\therefore\ p \wedge q$	ن

برهان درستی صوری یک حکم داده شده، دنباله ای از گزاره هاست که هریک یا فرض حکم است یا از گزاره قبلی یا حکمی که درستی آن شناخته شده به دست آمده است، و به نتیجه حکم ختم می شود.

به عبارت دیگر، یک برهان درستی را می توان یک دنباله متناهی از گزاره هایی به صورت

دلیل	S_1
دلیل	S_2
دلیل	S_3
$\vdots$	$\vdots$
دلیل	S_{n-1}
نتیجه	S_n

که هریک از گزاره های S_i، یک فرض، یا یک گزاره ای که درستی آن قبلا به اثبات رسیده است یا یک تعریف و یا طبق قواعد استنتاج، نتیجه ای از گزاره های قبلی است. در مقابل هر سطر نیز باید دلیل درستی این گزاره را قید کرد. و گزاره S_n همان نتیجه مورد نظر می باشد.

مثال ۱. برای حکم زیر یک برهان درستی صوری بیاورید. نمادهای پیشنهادی را به کار برید.

یا واجدی به ریاست هیات مدیره انتخاب شده است (W) یا هدایت ولطفی به معاونت هیات مدیره انتخاب شده اند (L, H). اگر یا واجدی به ریاست هیات مدیره انتخاب شود یا هدایت به معاونت هیات مدیره انتخاب شود، آنگاه داود اعتراض خواهد کرد (D)، بنابراین یا واجدی به ریاست هیات مدیره انتخاب شده است یا داود اعتراض کرده است.

اثبات.

۰۱	$W \vee (H \wedge L)$	
۰۲	$W \vee H \longrightarrow D/ \quad \therefore W \vee D$	
۰۳	$(W \vee H) \wedge (W \vee L)$	**۱، پخشپذیری**
۰۴	$W \vee H$	**۳، اختصار**
۰۵	D	**۲، ۴، قیاس استثنایی**
۰۶	$D \vee W$	**۵، جمع**
۰۷	$W \vee D$	**۶، جابه جایی**

$\square$

یک روش دیگر برهان، روش برهان غیر مستقیم یا روش برهان خلف است. در این روش، برای اثبات درستی یک حکم مفروض، نقیض نتیجه را به مفروضات حکم می افزاییم و سپس یک تناقض به دست می آوریم؛ با به دست آوردن تناقض، برهان کامل می شود.

مثال ۲. یک برهان غیر مستقیم برای درستی حکم زیر بیاورید:

$$p \vee q \longrightarrow r$$

$$s \longrightarrow p \wedge u$$

$$q \vee s/ \quad \therefore r$$

اثبات.

۱.	$p \vee q \longrightarrow r$	
۲.	$s \longrightarrow p \wedge u$	
۳.	$q \vee s / \quad \therefore r$	
۴.	$\sim r$	**برهان خلف**
۵.	$\sim (p \vee q)$	**۱، ۴، قیاس دفع**
۶.	$\sim p \wedge \sim q$	**۵، دمورگن**
۷.	$\sim p$	**۶، اختصار**
۸.	$\sim q$	**۶، اختصار**
۹.	s	**۳، ۸، رفع مولفه**
۱۰.	$p \wedge u$	**۲و۹، قیاس استثنایی**
۱۱.	p	**۱۰، اختصار**
۱۲.	$p \wedge \sim p$	**۷، ۱۱، قانون عطف**

گزاره $p \wedge \sim p$ در مرحله ۱۲، یک تناقض است؛ پس برهان غیر مستقیم درستی کامل است. □

در مقابل «برهان غیرمستقیم» برهان درستی صوری را که قبلاً به آن اشاره کردیم، می توان «برهان مستقیم» نامید. در یک برهان ریاضی می توان یک برهان مستقیم یا یک برهان غیر مستقیم به کار برد. انتخاب روش برهان برای یک حکم ریاضی مفروض، بستگی دارد به سلیقه و تناسب روش با حکم.

چند نمونه از برهان های غیر مستقیم

همان طور که قبلا بیان شده، برهان غیر مستقیم یا **برهان خلف** ، به صورت صوری، به شکل یکی از دو گزاره زیر است:

$$(p\wedge\sim q\longrightarrow c)\iff(p\longrightarrow q)\quad(۱)$$

$$(p\longrightarrow q)\iff(p\wedge\sim q\longrightarrow q\wedge\sim p)\quad(۲)$$

فرض کنید می خواهیم نشان دهیم یک گزاره p راست است. فرض کنید یک تناقض مانند q پیدا می کنیم به طوری که $\sim p\longrightarrow q$ راست است. چون q ناراست است و $\sim p\longrightarrow q$ نیز راست است پس $\sim p$ باید ناراست باشد. این نشان می دهد p باید راست باشد. حال چگونه می توانیم یک تناقض مانند q پیدا کنیم به طوری که به ما کمک کند تا نشان دهیم p راست است؟

اگر r یک گزاره باشد چون گزاره $r\wedge\sim r$ یک تناقض است، اگر بتوانیم ثابت کنیم گزاره $\sim p\longrightarrow r\wedge\sim r$ یک گزاره راست است آنگاه نتیجه می گیریم p راست خواهد بود. چون این نوع استدلال به طور فراوانی در برهان درستی به کار گرفته می شود، در اینجا به چند نمونه آن اشاره می کنیم.

مثال ۳. فرض کنیم ۸ روز پیاپی از یک ماه را انتخاب کرده ایم. نشان دهید لااقل دو روز از این ایام در یک روز هفته واقع می شوند.

حل. به خلاف فرض کنیم چنین نباشد. یعنی حداکثر یک روز از این روزها در یک روز از هفته واقع می شود. بنابراین حداکثر هفت روز می تواند درایام هفته قرار گیرد. و این یعنی کل روهای انتخاب شده حداکثر هفت روز است. که متناقض با فرض « ۸ روز پیاپی انتخاب شده» است. □

۲- به طور مشابه، فرض کنید ۱۵ روز پیاپی از ایام ماه را انتخاب کرده باشیم در این صورت لااقل سه روز وجود دارد که به نام یک روز از هفته نام گذاری شوند.

حل. مشابه استدلال بالا فرض کنیم چنین نباشد که « لااقل سه روز از ایام انتخاب شده در یک روز از هفته واقع شوند». پس هر روز هفته حداکثر دو روز از این ایام را نام گذاری می کنند. بنابراین حداکثر ۱۴ روز خواهیم داشت که متناقض با فرض « ۱۵ روز پیاپی » انتخاب شده است. □

۳- به طور مشابه، فرض کنید ۳۰ روز پیاپی از ایام ماه را انتخاب کرده باشیم در این صورت لااقل پنج روز وجود دارد که به نام یک روز از هفته نام گذاری شوند.

حل. مشابه استدلال بالا فرض کنیم چنین نباشد که « لااقل پنج روز از ایام انتخاب شده در یک روز از

هفته واقع شوند». پس هر روز هفته حداکثر چهار روز از این ایام را نام گذاری می کنند. بنابراین حداکثر ۲۸ روز خواهیم داشت که متناقض با فرض « ۳۰ روز پیاپی » انتخاب شده است. □

می توانید این مثال را برای هر $۷n+۱$ روز پیاپی از ایام سال انتخاب کنید. در این صورت نام $n+۱$ روز از این روز ها یکی خواهد بود.

مثال ۴. :اصل لانه کبوتری فرض کنید m شئ در k جعبه با فرض، $m>k$ قرار داده می شود. در این صورت لااقل یک جعبه وجود دارد که شامل بیش از یک شئ است.

حل. به خلاف فرض کنیم چنین نباشد. یعنی چنین نباشد که « یک جعبه وجود دارد که شامل بیش از یک شئ است».

پس بنابر $\sim(\exists x)(p(x))$، یا به طور معادل $(\forall x)(\sim p(x))$ باید در هر جعبه حداکثر یک شئ قرار گیرد. چون دقیقاً k جعبه داریم، و در هر جعبه حداکثر یک شئ قرار می گیرد، پس حداکثر k شئ خواهیم داشت. یعنی $m\leq k$ که با فرض $m>k$ در تناقض قرار می گیرد. □

مثال ۵. اگر تابع $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ در نقطه $x_\circ$ دارای حد ℓ باشد، آنگاه حد آن یکتاست.

حل. فرض کنیم چنین نباشد. پس دو عدد ℓ و ℓ' وجود دارند به طوری که $\ell\neq\ell'$. چون $\ell\neq\ell'$ بنابراین $\ell-\ell'\neq\circ$. قرار می دهیم $\varepsilon=\frac{|\ell-\ell'|}{۳}$.

بنابرفرض، برای $\varepsilon=\frac{|\ell-\ell'|}{۳}$ یک δ وجود دارد به طوری که وقتی $\circ<|x-x_\circ|<\delta$ آنگاه

چون ℓ حد f در $x_\circ$ است $\quad |f(x)-\ell|<\varepsilon$

چون ℓ' حد f در $x_\circ$ است $\quad |f(x)-\ell'|<\varepsilon$

اما

$$|\ell-\ell'|=|\ell-f(x)+f(x)-\ell'|\leq|f(x)-\ell|+|f(x)-\ell'|<\varepsilon+\varepsilon=۲\varepsilon=۲\frac{|\ell-\ell'|}{۳}$$

در نتیجه $۱<\frac{۲}{۳}$ که یک تناقض است.

□

مساله ۱۱ کتاب:

۱-اگر جمعیت به سرعت افزایش یابد و تولید ثابت بماند، آنگاه قیمت ها بالا می روند.

۲-اگر قیمت ها بالا روند، آنگاه دولت قیمت ها را کنترل خواهد کرد

۳-اگر من ثروتمند باشم، آنگاه نگران افزایش قیمت ها نیستم.

۴-چنین نیست که من ثروتمند نیستم.

۵-یا دولت قیمت ها را کنترل نمی کند یا من نگران افزایش قیمت ها هستم.

بنابراین چنین نیست که جمعیت به سرعت افزایش می یابد و تولید ثابت می ماند.

حل. قرار می دهیم:

P= جمعیت به سرعت افزایش می یابد.

C= قیمت ها ثابت می ماند.

R= قیمت ها بالا می روند.

G = دولت قیمت ها را کنترل خواهد کرد.

H= من ثروتمند هستم.

I= من نگران افزایش قیمت ها هستم.

۰۱	$P \wedge C \longrightarrow R$	
۰۲	$R \longrightarrow G$	
۰۳	$H \longrightarrow \sim I$	
۰۴	$\sim (\sim H)$	
۰۵	$\sim G \vee I \quad \therefore \sim (P \wedge C)$	
۰۶	H	**نفی مضاعف**
۰۶	$\sim I$	**قیاس استثنایی و فرض ۳**
۰۷	$\sim G$	**قیاس استثنایی و فرض ۵**
۰۸	$\sim R$	**قیاس دفع، ۷ و فرض ۲**
۰۹	$\sim (P \wedge C)$	**قیاس دفع،۸ و فرض ۱**

$\square$