درس روش‌های آماری

دکتر احد ملک زاده

فصل اول: مقدمه‌ای بر متغیر تصادفی

فصل دوم: نمونه تصادفی، توزیع میانگین نمونه‌ای و قضیه حد مرکزی

فصل سوم: روشهای برآوردیابی پارامترهای نامعلوم

فصل چهارم: آشنایی مقدماتی با مفاهیم آزمون فرضها

فصل پنجم: استنباط در مورد دو میانگین

فصل ششم: تحلیل واریانس یکطرفه

فصل هفتم: رگرسیون خطی ساده

فصل هشتم: مفاهیم مقدماتی ناپارامتری

کتاب و مراجع:

بهبودیان، ج .آمار و احتمال مقدماتی، چاپ شانزدهم، آستان قدس رضوی ۱۳۸۳

خالداری، مجید. روشهای آماری، چاپ اول، جهاد دانشگاهی ۱۳۹۰

جانسون، ر. آ. و باتاچاریا، گ، اصول و روشهای آماری،جلد ۱ و ۲ ،ترجمه فتاح میکائیلی، نشر ارکان دانش، ۱۳۸۸

ووناکت، ت. چ. و ووناکت، ر. ج. آمار مقدماتی، جلد ۱ و۲ ،ترجمه محمدرضا مشکانی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۹۳

هاگ، ر. و، تنیس، ل .آ، احتمال و استنباط آماری، ترجمه نوروز ایزددوستدار و حمید پزشک، انتشارات دانشگاه تهران،۱۳۹۴

Hogg, R. V. Tanis, E. and Zimmerman, D. Probability and Statistical Inference, 9th Edition, Pearson, 2013.

نمره‌بندی:

حضور و غیاب: ۲ نمره

فعالیت‌های کلاسی: ۴-۳ نمره (تکالیف، ارائه و شرکت در پرسش و پاسخ کلاس و ...)

میان ترم: ۶-۵ (شامل ۳ فصل اول)

کوئیز (۲ آزمون): ۳-۲ نمره (یکی قبل میانترم و دیگری بعد از میانترم)

پایان ترم: مابقی نمره تا جمع بشود ۲۱

فعالیت کلاسی (ارائه):

- دسته‌بندی دانشجویان
- مشخص سازی قسمتی که باید هر گروه ارائه نماید
- ارائه گزارش مکتوب
- ارائه گزارش فردی (نماینده گروه) یا گروهی

فصل اول: مقدمه‌ای بر مفاهیم مورد نیاز

تعریف: هر تابع از فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی به مجموعه اعداد حقیقی را متغیر تصادفی گویند. بطور معمول متغیر تصادفی را با حروف بزرگ X، Y، Z و ... نمایش می دهیم

$$X: S \to R$$

توجه: متغیر تصادفی جنبه عددی یک آزمایش تصادفی است.

مثال: متغیرهای تصادفی زیر را در نظر بگیرید.

الف) X: تعداد شیر قابل مشاهده در پرتاب ۴ سکه

ب) Y: مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس

ج) M: ماکزیمم اعداد رو شده در پرتاب دو تاس

د) Z: تفاضل دو عدد تصادفی انتخابی از بازه $(4, 8)$

تکیه‌گاه[1] متغیر تصادفی: زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که شامل تمامی مقادیر ممکن متغیر تصادفی می باشد به بیان دیگر تکیه‌گاه همان برد متغیر تصادفی می باشد.

نکته: تکیه‌گاه یک متغیر تصادفی را با S_X، S_Y و ... نمایش می دهند

مثال: تکیه‌گاه متغیرهای تصادفی تعریف شده در مثال قبل را مشخص نمایید.

$$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$S_Y = \{2, 3, 4, \dots, 12\},$$

$$S_M = \{1, 2, \dots, 6\},$$

[1] Support

$$S_Z = (-4, 4).$$

انواع متغیر تصادفی:

متغیر تصادفی گسسته: هرگاه تکیه‌گاه یک متغیر تصادفی متناهی یا شمارش‌پذیر باشد، متغیر تصادفی را گسسته گویند.

متغیر تصادفی پیوسته: هرگاه تکیه‌گاه یک متغیر تصادفی بازه یا اجتماعی از بازه‌ها باشد، متغیر تصادفی را پیوسته گویند.

مثال: متغیر تصادفی X، Y و M گسسته و متغیر تصادفی Z پیوسته می باشند.

مثال: آزمایشی تصادفی که احتمال موفقیت در آن ۰.۴ می باشد را آنقدر تکرار می نماییم تا اینکه حالت موفقیت را مشاهده نماییم. متغیر تصادفی D تعداد این آزمایشات را شمارش می نماید. بنابراین

$$S_D = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

بنابراین متغیر تصادفی D نیز گسسته می باشد.

مثال: دو نفر بطور معمول در بین ساعات ۹ الی ۱۰ صبح به پارکی مراجعه می نمایند و بین ۳۰ الی ۴۵ دقیقه ورزش می نمایند. اگر متغیرهای زیر را تعریف نماییم، تکیه‌گاه و نوع هرکدام را مشخص نمایید

T_1: اختلاف زمانی بین ورود این دو نفر $\quad S_{T_1} = (0, 1)_h = (0,60)_m$

T_2: زمان خروج یکی از آنها از پارک $\quad S_{T_2} = (9{:}30, 10{:}45)$

T_3: اختلاف زمانی بین ورود و خروج یک شخص $\quad S_{T_3} = (30, 45)_m$

هر سه متغیر تعریف شده در این مثال، متغیرهای پیوسته می باشند.

تعریف پیشامد: براساس یک متغیر تصادفی همانند X بصورت

$$(X = a) \text{ یا } \{X = a\} \text{ یا } (X \leq 13)$$

نمایش داده می شوند و به این معنا است که متغیر تصادفی X مقداری برابر a داشته باشد.

مثال: $(X \leq 2)$: پیشامد آنکه در پرتاب ۴سکه حداکثر ۲شیر مشاهده شود.

$(Y = 6)$: پیشامد آنکه مجموع اعداد روشده در پرتاب دو تاس برابر ۶شود.

$(M > 2)$: پیشامد آنکه ماکزیمم اعداد مشاهده شده در پرتاب دو تاس بیش از ۲ باشد.

$(D = 2k;\quad k \epsilon N)$: پیشامد آنکه اولین موفقیت در پرتاب‌های زوج مشاهده شود.

$(-1 < Z < 2) \equiv \{Z \in (-1, 2)\}$: پیشامد آنکه تفاضل دو عدد تصادفی انتخاب شده از بازه $(4, 8)$ متعلق به بازه $(-1, 2)$ شود یا به بیان دیگر تفاضل بیش از ۱- و کمتر از ۲ باشد.

$(T_1 \leq 15)$: پیشامد آنکه اختلاف زمان ورود این دو نفر حداکثر ۱۵ دقیقه باشد.

$(10 < T_2 < 10:30)$: پیشامد آنکه یکی از این دو نفر بین ساعت ۱۰ الی ۱۰:۳۰ از پارک خارج شود.

مثال: با فرض سالم بودن همه سکه‌ها داریم

$$P(X = 0) = \frac{1}{16},\ P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1}}{2^4} = \frac{4}{16}, \ldots,\ P(X = 4) = \frac{\binom{4}{4}}{16} = \frac{1}{16}.$$

برای متغیرهای تصادی گسسته می توان از جدول توزیع احتمال بهره برد

$X = x$	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

می توان نتایج مربوط به احتمال متغیر تصادفی X را بصورت یک تابع احتمال نوشت

$$P(X=x)=\frac{\binom{4}{x}}{2^4};\quad x=0,1,\dots,4.$$

جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی M بصورت

$M=m$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(M=m)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$$P(M=m)=\frac{2m-1}{6^2};\quad m=1,2,\dots,6.$$

جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی D بصورت

$D=d$	۱	۲	۳	۴	...
$P(D=d)$	0.4	0.6×0.4	$0.6^2\times 0.4$	$0.6^3\times 0.4$	...

$$P(D=d)=0.6^{d-1}\times 0.4;\qquad d=1,2,3,\dots.$$

مثال: در پرتاب دو تاس متغیر تصادفی N را اختلاف اعداد روشده تعریف می نماییم.

الف) تکیه گاه این متغیر تصادفی را بدست آورید.

$$S_N=\{0,1,\dots,5\}$$

ب) جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی N را مشخص نمایید

$N=n$	0	1	2	3	4	5
$P(N=n)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

$$P(N=n)=\begin{cases}\dfrac{6}{36} & n=0\\ \dfrac{2(6-n)}{36} & n=1,\dots,5\end{cases}.$$

نتیجه: در متغیرهای تصادفی گسسته می توان بمنظور نمایش مقادیر احتمال مرتبط از جدول توزیع احتمال یا تابع احتمال بهره برد. به بیان دیگر در متغیر تصادفی گسسته مفهومی تحت عنوان تابع احتمال قابل تعریف می باشد.

امید ریاضی[2] (مقدار مورد انتظار یا متوسط مقدار): اگر از یک متغیر تصادفی بیشمار مقدار مشاهده نماییم، میانگین مقدار حاصل از این مقادیر را امید ریاضی گویند (تعریف مفهومی).

نکته: برای متغیر تصادفی X امیدریاضی آن را بصورت $E(X)$ نمایش می دهیم.

نکته: در حل مسائل مربوط به امیدریاضی می بایست فرمول محاسباتی آن، ابتدائا ذکر شود.

فرمول محاسباتی امید ریاضی در متغیرهای گسسته

$$E(X)=\sum_{x\epsilon S_X} xP(X=x).$$

مثال: امیدریاضی متغیرهای تصادفی تعریف شده تا کنون را بدست آورید

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{x=0}^{4} xP(X=x)\\ &=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{4}{16}+2\times\frac{6}{16}+3\times\frac{4}{16}+4\times\frac{1}{16}=2.\end{aligned}$$

[2] Expectation of random variable

تفسیر: در آزمایش تصادفی پرتاب ۴سکه سالم، انتظار داریم بطور متوسط ۲شیر مشاهده نماییم (تفسیر معمولی). یا به بیان دیگر اگر دفعات تکرار پرتاب ۴سکه بسیار زیاد باشد و در هر تکرار تعداد شیرمشاهده شده را یادداشت نماییم، میانگین همه اعداد یادداشت شده برابر خواهد بود با عدد ۲ (تفسیر مفهومی).

$$E(Y)=\sum_{y=2}^{12} yP(Y=y)$$
$$=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+\cdots+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$
$$=7.$$

$$E(D)=\sum_{d=1}^{\infty} dP(D=d)$$
$$=1\times 0.4+2\times 0.4\times 0.6+3\times 0.4\times 0.6^2$$
$$+4\times 0.4\times 0.6^3+\cdots$$
$$=(0.4+0.6\times 0.4+0.4\times 0.6^2+0.4\times 0.6^3+\cdots)$$
$$+(0.6\times 0.4+0.4\times 0.6^2+0.4\times 0.6^3+\cdots)$$
$$+(0.4\times 0.6^2+0.4\times 0.6^3+\cdots)+(0.4\times 0.6^3+\cdots)+\cdots$$
$$=\frac{0.4}{1-0.6}+\frac{0.6\times 0.4}{1-0.6}+\frac{0.6^2\times 0.4}{1-0.6}+\frac{0.6^3\times 0.4}{1-0.6}+\cdots$$
$$=1+0.6+0.6^2+0.6^3+\cdots=\frac{1}{1-0.6}=\frac{10}{4}=2.5.$$

تفسیر: برای رسیدن به اولین موفقیت در این آزمایش، بطور متوسط نیازمند انجام ۲.۵ آزمایش هستیم.

$$E(N)=\sum_{n\epsilon S_N} nP(N=n)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{10}{36}+\cdots+5\times\frac{2}{36}=1.9444$$

امیدریاضی برای تابعی از متغیرهای تصادفی:

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{x \epsilon S_X} g(x)P(X = x).$$

مثال: متوسط توان دوم متغیر تصادفی X، متوسط مجذور متغیر تصادفی Y و متوسط معکوس متغیر تصادفی M را بدست آورید.

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{4} x^2 P(X = x) = 0^2 \times \frac{1}{16} + 1^2 \times \frac{4}{16} + 2^2 \times \frac{6}{16} + 3^2 \times \frac{4}{16} + 4^2 \times \frac{1}{16} = \frac{80}{16} = 5.$$

تفسیر: انتظار داریم متوسط مقدار حاصل از مربع متغیر تصادفی X برابر با ۵ شود. یا به بیان دیگر امیدریاضی X^2 برابر ۵ می باشد.

خواص امید ریاضی

۱- برای هر عدد ثابت همانند a داریم $E(a) = a$

۲- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$ (امیدریاضی جمع برابر جمع امیدریاضی‌ها است)

۳- $E(aX) = aE(X)$

۴- اگر متغیر تصادفی X نامنفی باشد (یعنی مقادیر تکیه‌گاه آن همیشه مثبت باشند) آنگاه $E(X) \geq 0$. زیرا

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} xP(X = x) \geq 0.$$

واریانس: متوسط پراکندگی مقادیر متغیر تصادفی نسبت به امیدریاضی را واریانس گویند. فرمول آن بفرم زیر می باشد. برای متغیر تصادفی گسسته بصورت زیر تعریف می شود.

$$Var(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = \sum_{x \epsilon S_X} \big(x - E(X)\big)^2 P(X = x)$$
$$= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = E(X^2) - E^2(X).$$

زیرا

$$\begin{aligned} Var(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 &= E\big(X^2 + E^2(X) - 2XE(X)\big) \\ &= E(X^2) + E\big(E^2(X)\big) - 2E\big(XE(X)\big) \\ &= E(X^2) + E^2(X) - 2E(X)E(X) = E(X^2) - E^2(X) \geq 0. \end{aligned}$$

مثال: واریانس متغیرهای تصادفی X و M را بدست آورید

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 5 - 2^2 = 1.$$

$$Var(M) = E(M^2) - E^2(M) = 21.972 - (4.472)^2 = 1.973.$$

زیرا

$$E(M^2) = \sum_{m=1}^{6} m^2 P(M = m) = 1^2 \frac{1}{36} + 2^2 \frac{3}{36} + \cdots + 6^2 \frac{11}{36} = 21.972.$$

خواص واریانس

۱- $Var(aX) = a^2 Var(X)$

$$\begin{aligned} Var(aX) &= E((aX)^2) - \big(E(aX)\big)^2 = E(a^2X^2) - \big(aE(X)\big)^2 \\ &= a^2E(X^2) - a^2\big(E(X)\big)^2 = a^2\left(E(X^2) - \big(E(X)\big)^2\right) \\ &= a^2 Var(X). \end{aligned}$$

۲- برای هر عدد ثابت همانند a داریم $Var(a) = 0$

$$Var(a) = E(a^2) - \big(E(a)\big)^2 = a^2 - a^2 = 0.$$

۳- $Var(X) \geq 0$

می دانیم $Var(X)=E\big(X-E(X)\big)^2$ و همچنین $\big(X-E(X)\big)^2$ یک عبارت غیر منفی می باشد، بنابر خاصیت ۳ امیدریاضی می بایست واریانس همیشه مقدار مثبت بپزیرد.

۴- $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

۵- **مثال:** ضریب چولگی پیرسون متغیر تصادفی M را بدست آورید

۶- (نکته: فرمول چولگی پیرسون بفرم مقابل می باشد $\rho_M=\frac{E\big(M-E(M)\big)^3}{(Var(M))^{\frac{3}{2}}}$).

۷- بمنظور محاسبه ضریب چولگی، می بایست $E\big(M-E(M)\big)^3$ را محاسبه نمود. در زیر دو روش بدین منظور ارائه می نماییم.

۸- **روش اول**: روش مستقیم

9- $E\big(M-E(M)\big)^3=\sum_{m=1}^{6}\big(m-E(M)\big)^3P(M=m)=(1-4.472)^3\frac{1}{36}+(2-4.472)^3\frac{3}{36}+(3-4.472)^3\frac{5}{36}+(4-4.472)^3\frac{7}{36}+(5-4.472)^3\frac{9}{36}+(1-4.472)^3\frac{11}{36}=\cdots.$

۱۰- **روش دوم:** بسط فرمول و محاسبه آن

11- $E\big(M-E(M)\big)^3=E\big(M^3-3M^2E(M)+3ME^2(M)-E^3(M)\big)=E(M^3)-3E(M)E(M^2)+3E^2(M)E(M)-E^3(M)=E(M^3)-3E(M)E(M^2)+2E^3(M).$

12- $E(M^3)=\sum_{m=1}^{6}m^3P(M=m)=1^3\frac{1}{36}+2^3\frac{3}{36}+\cdots+6^3\frac{11}{36}=\cdots$

مثال: اگر دو تاس را بریزیم و متغیرهای تصادفی X و Y را به ترییب ماکزیمم و اختلاف اعداد روشده تعریف نماییم. خواهیم داشت

$$S_X=\{1,2,\dots,6\}.$$

$$S_Y=\{0,1,\dots,5\}.$$

$$P(Y=1)=\frac{10}{36}, \quad P(X=4, Y=2)=\frac{2}{36}, \quad P(X=6, Y=3)=\frac{2}{36}.$$

می توان احتمال رخ دادن دو متغیر تصادفی X و Y را در جدول زیر خلاصه نمود

X \ Y	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

به این جدول، جدول توزیع توام متغیر تصادفی‌های X و Y گویند.

بنابر نتایج در سطر و ستون اضافه این جدول توزیع توام می توان گفت، از جدول توزیع توام متغیرها می توان توزیع هریک از متغیرها را نیز بدست آورد که به این مقادیر توزیع احتمال حاشیه‌ای گویند.

مثال: فرض کنید جدول توزیع توام دو متغیر تصادفی M و N بفرم زیر باشد

N \ M	-2	0	2	4	$P(N=n)$
-3	0.10	0.05	0.00	0.05	0.20

-2	0.07	0.03	0.20	0.00	0.30
0	0.00	0.15	0.05	0.02	0.22
1	0.03	0.05	0.10	0.10	0.28
$P(M=m)$	0.20	0.28	0.35	0.17	1

$$S_M = \{-2, 0, 2, 4\}; \quad S_N = \{-3, -2, 0, 1\},$$

$$P(M=0, N=-2) = 0.03.$$

$$P(N=0) = 0.22; \quad P(M=4) = 0.17.$$

$$P(M^2=4) = P(M=-2) + P(M=2) = 0.20 + 0.35 = 0.55.$$

الف) امید ریاضی M (متوسط مقدار متغیر تصادفی M) را بدست آورید.

$$E(M) = \sum_{m \epsilon S_M} m\, P(M=m) = (-2)0.20 + 0 \times 0.28 + 2 \times 0.35 + 4 \times 0.17 = 0.98.$$

ب) احتمال آنرا بیابید که حاصلضرب این دو متغیر تصادفی بیشتر از صفر شود

$$\begin{aligned} P(M \times N > 0) &\\ &= P(M=-2, N=-3) + P(M=-2, N=-2) \\ &+ P(M=2, N=1) + P(M=4, N=1) \\ &= 0.1 + 0.07 + 0.1 + 0.1 = 0.37. \end{aligned}$$

ج) واریانس N را محاسبه نمایید.

$$E(N^2) = (-3)^2 * 0.2 + (-2)^2 * 0.3 + 0^2 * 0.22 + 1^2 * 0.28 = 3.28.$$

$$E(N) = (-3) * 0.2 + (-2) * 0.3 + 0 * 0.22 + 1 * 0.28 = -0.92.$$

$$Var(N) = E(N^2) - E^2(N) = 3.28 - (-0.92)^2 = 2.4336.$$

د) مقدار مربوط به $E(MN)$ را بدست آورید.

$$E(MN) = \sum_{m \epsilon S_M} \sum_{n \epsilon S_N} m \times n \times P(M = m, N = n)$$
$$= (-3)(-2) \times 0.10 + (-3)(0) \times 0.05 + (-3)(2) \times 0.00$$
$$+ (-3)4 \times 0.05 + \cdots + 1 \times 4 \times 0.10 = 0.02.$$

M \ N	-2	0	2	4
-3	0.10	0.05	0.00	0.05
-2	0.07	0.03	0.2	0.00
0	0.00	0.15	0.05	0.02
1	0.03	0.05	0.10	0.10

$$E(M^2N) = \sum_{m \epsilon S_M} \sum_{n \epsilon S_N} m^2 \times n \times P(M = m, N = n)$$
$$= (-3)(-2)^2 0.10 + (-3)(0)^2 0.05 + (-3)(2)^2 0.00$$
$$+ (-3)4^2 * 0.05 + \cdots + 1 * 4^2 * 0.10 = -16.8.$$

کوواریانس: میزان تغییرپذیری یک متغیر نسبت به متغیر دیگر را نشان می دهد.

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

این فرمول نشان میدهد، بمنظور محاسبه کوواریانس می بایست توزیع توام دو متغیر تصادفی مورد مطالعه را داشته باشیم.

ادامه مثال بالا: قسمت ه) کوواریانس دو متغیر تصادفی M و N را محاسبه کنید

$$Cov(M, N) = E(MN) - E(M)E(N)$$

$$= 0.02 - (-0.92)(0.98) = 0.9216.$$

ویژگی‌های کوواریانس: برای دو متغیر تصادفی X و Y و همچنین اعداد حقیقی a و b داریم.

۱) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

۲) $Cov(X,aY) = aCov(X,Y)$ (کوواریانس به واحد اندازه‌گیری متغیرهای تصادفی وابسته می باشد)

۳) $Cov(a,Y) = 0$

۴) $Cov(X \pm b,Y) = Cov(X,Y)$ (کوواریانس به جابجایی متغیرهای تصادفی وابسته نمی باشد)

۵) $Cov(X+Z,Y) = Cov(X,Y) + Cov(Z,Y)$

۶) $Cov(X,X) = Var(X)$ (واریانس میزان تغییر پذیری یک متغیر نسبت به خودش را نشان می دهد یا به بیان دیگر واریانس نیز یک نوع کوواریانس می باشد) زیرا

$$Cov(X,X) = E(XX) - E(X)E(X) = E(X^2) - E^2(X) = Var(X).$$

نتیجه: $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X,Y)$

$$\begin{aligned} Var(X-Y) &= \mathrm{Cov}(X-Y,X-Y) \\ &= \mathrm{Cov}(X,X-Y) - \mathrm{Cov}(Y,X-Y) \\ &= \mathrm{Cov}(X-Y,X) - \mathrm{Cov}(X-Y,Y) \\ &= \mathrm{Cov}(X,X) - \mathrm{Cov}(Y,X) - \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) \\ &= \mathrm{Var(X)} + \mathrm{Var(Y)} - 2\mathrm{Cov}(X,Y). \end{aligned}$$

ضریب همبستگی پیرسون

میزان همبستگی دو متغیر تصادفی را نشان می دهد. مقدار آن عددی است در بازه $[-1,1]$ می باشد. بفرم زیر محاسبه می شود

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\times Var(Y)}},$$

نحوه تفسیر مقدار حاصل از ضریب همبستگی

مقادیر مثبت نشان دهنده میزان همبستگی دو متغیر تصادفی در یک راستا می باشند، به این معنا که افزایش یکی باعث افزایش دیگری می شود. و مقادیر منفی عکس این مطلب برای آنها صدق می کند.

هرچقدر قدرمطلق این عدد به مقدار یک نزدیک باشد نشاندهنده قدرت یا همبستگی شدیدتر این دو متغیر می باشد. مقادیر نزدیک صفر نشان از عدم همبستگی این دو متغیر دارند.

متغیرهای تصادفی پیوسته

تعریف: هرگاه تکیه‌گاه متغیر تصادفی بازه یا اجتماعی از بازه‌ها باشد، متغیر تصادفی را پیوسته گویند.

نکته: در متغیرهای تصادفی پیوسته احتمال در تک نقطه بی معنا است (تعریف نشده است). به بیان دیگر در متغیرهای تصادفی پیوسته تابع احتمال وجود ندارد.

تابع چگالی: هر تابع همانند $f(x)$ که دارای ویژگی‌های زیر باشد را چگالی گویند

- ✓ به ازاء همه مقادیر حقیقی مقدارش غیر منفی باشند: $\forall x \in \mathcal{R}, \quad f(x) \geq 0$
- ✓ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

مثال: کدامیک از توابع زیر چگالی هستند

الف) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x \geq 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

بدلیل داشتن هر دو شرط فوق، چگالی است یعنی $f_X(x) = \frac{1}{x^2}$ برای مقادیر $x \geq 1$ یک تابع چگالی است. بنابراین می نویسیم

$$f_X(x) = \frac{1}{x^2} \qquad x \geq 1.$$

ب) $g(x) = 5x^3; \qquad 0 < x < 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{0}^{2} 5x^3 dx = \frac{5}{4}x^4\Big|_{0}^{2} = 20.$$

بدلیل نداشتن شرط دوم، چگالی نیست. ولی با تقسیم مقدار مثبت حاصل از انتگرال به طرفین تساوی خواهیم داشت

$$g_X(x) = \frac{x^3}{4}; \qquad 0 < x < 2،$$

که یک چگالی است و به این نوع توابع چگالی شدنی گویند.

ج) $h(x) = 2x - 4x^2 = 2x(1-2x); \quad 0 < x < 1$ بدلیل نداشتن شرط یک چگالی نیست

نتیجه‌گیری: توابع در ریاضیات ۳ نوع هستند

- **چگالی هستند**: یعنی توابعی که بذاته دارای دو ویژگی تابع چگالی هستند
- **چگالی شدنی**: یعنی توابعی که ویژگی اول تابع چگالی را دارند و مقدار انتگرال آنها نیز مقداری متناهی می باشد. بمنظور اینکه تابع مدنظر چگالی شود، تنها کافی است تابع را بر مقدار حاصل از انتگرال آن تقسیم نماییم.
- **غیر چگالی**: این توابع بطور معمول یا ویژگی اول تابع چگالی را ندارد یا مقدار انتگرال آن متناهی و مثبت نیست.

مثال: در هر یک از موارد زیر مقدار m (در صورت امکان) را طوری بیابید که توابع چگالی شوند.

الف) $f(x) = \frac{m}{x^2}; \qquad x \geq 0$

ویژگی اول تابع چگالی را دارا می باشد، ولی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{m}{x^2}dx = m\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = m\left(-\frac{1}{x}\right)_0^{\infty} = \infty.$$

بنابراین مقدار متناهی برای m قابل بدست آمدن نیست، زیرا مقدار انتگرال به ازای هر m بینهایت خواهد شد. یعنی این تابع چگالی شدنی نیست.

ب) $g(y) = 4y^2 - my; \quad 0 < y < 1$

برای بدست آوردن شرط دوم، انتگرال زیر را می بایست حل بنماییم

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = \int_0^1 (4y^2 - my)dy = \left(\frac{4}{3}y^3 - \frac{m}{2}y^2\right)|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{m}{2} = 1 \to m = \frac{2}{3}.$$

مقدار $m = 2/3$ شد ولی به ازای این مقدار، تابع $g(y)$ مقادیر منفی در بازه $0 < y < 1$ خواهد پذیرفت (یعنی شرط اول برقرار نیست.). بنابراین مطالب، تابع $g(y)$ چگالی شدنی نیست.

ج) $s(z) = mze^{-3z^2}; \quad z > 0$

مقدار مناسب برای آنکه انتگرال تابع $s(z)$ برابر یک شود، برابر است با $m = 6$ زیرا

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(z)dz = \int_0^{\infty} mze^{-3z^2}dz = m\int_0^{\infty} ze^{-3z^2}dz = -\frac{m}{6}e^{-3z^2}|_0^{\infty} = \frac{m}{6} = 1 \Longrightarrow m = 6.$$

بنابراین تابع چگالی حاصل برابر خواهد بود با $s_Z(z) = 6ze^{-3z^2}; \quad z > 0$.

تعریف نمونه تصادفی: هر گاه واحدهای نمونه از یک جامعه انتخاب شوند و انتخاب آنها مستقل از یکدیگر باشند، نمونه حاصل را نمونه تصادفی گویند.

متغیر تصادفی نرمال

یکی از پرکاربردترین توزیع‌ها در علم آمار توزیع نرمال می باشد. هر متغیر نرمال همانند X بصورت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ نمایش داده می شود که دارای چگالی بفرم

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}; \qquad x \in R.$$

می باشد، برای این توزیع داریم که

$$E(X) = \mu, \qquad Var(X) = \sigma^2.$$

زیرا

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \mu. \end{aligned}$$

تبدیل در محاسبات فوق بصورت $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ انجام پذیرفته که داریم $du = \frac{dx}{\sigma}$.

برای محاسبه واریانس می بایست امیدریاضی مرتبه دوم متغیر تصادفی را بدست آورد که داریم.

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma u+\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}du$$
$$=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}u^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}du+\mu^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}du$$
$$+2\mu\int_{-\infty}^{\infty}u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}du=\sigma^2+\mu^2.$$

براحتی نتیجه می شود که $Var(X)=\sigma^2$.

مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۸.۳ و واریانس ۲۳ داشته باشیم، آنگاه

$$X\sim N(8.3,23);\quad E(X)=8.3,\quad Var(X)=23.$$

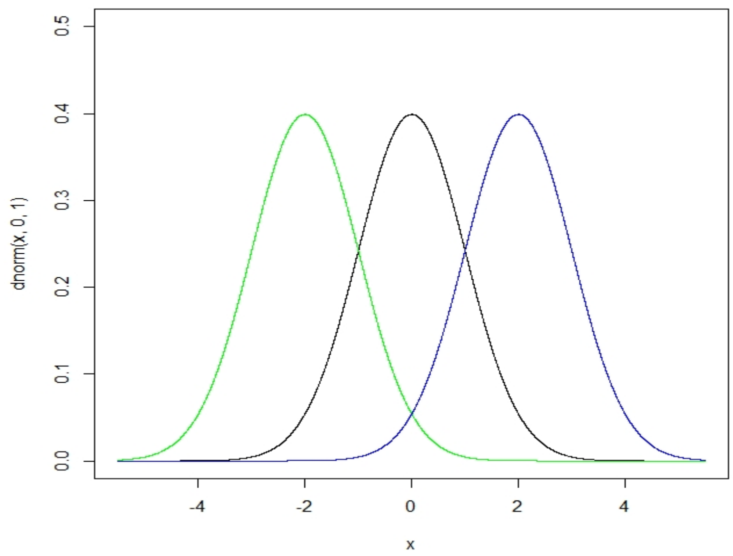
ب) امید مرتبه دوم متغیر تصادفی X را بدست آورید.

$$E(X^2)=Var(X)+E^2(X)=23+(8.3)^2=91.89.$$

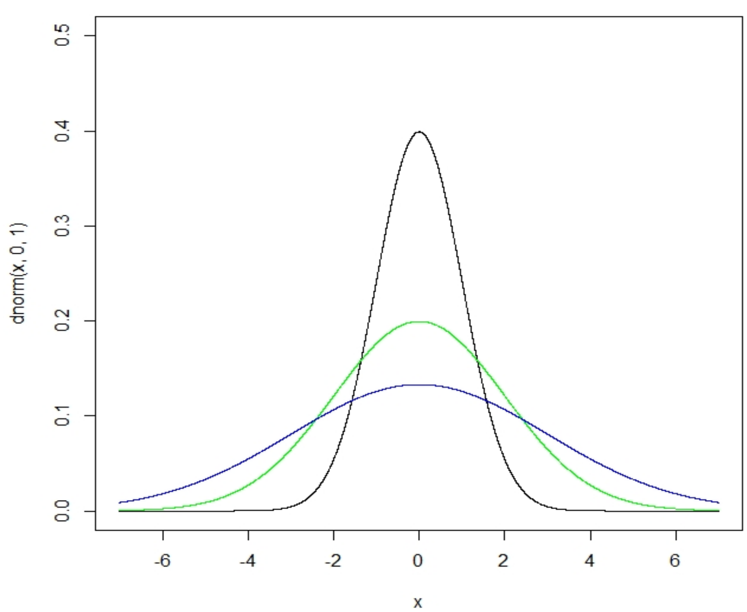
می دانیم

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)\Leftrightarrow E(X^2)=Var(X)+E^2(X).$$

توزیع نرمال نسبت به میانگین متقارن می باشد.



واریانس ثابت (برابر ۱) و میانگین متفاوت (به ترتیب ۲-، ۰ و ۲)



میانگین ثابت (مقدار صفر) و واریانس متفاوت (به ترتیب ۱، ۲ و ۳)

نکته: هر تبدیل خطی از یک متغیر تصادفی نرمال، همانند $Y = aX + b$ جاییکه a و b مقادیر ثابت هستند، دارای توزیع نرمال می باشد زیرا می دانیم تابع توزیع متغیرهای

تصادفی یکتا می باشد (یعنی هر خانواده توزیع یک تابع توزیع مخصوص بخود را دارد)، بنابراین

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

یعنی تابع توزیع متغیر تصادفی Y رفتاری شبیه تابع توزیع متغیر تصادفی X دارد.

دستاورد فوق بدین معنا است که متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرمالی بفرم $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ است، زیرا

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = a\mu + b.$$

$$Var(Y) = Var(aX + b) = Var(aX) = a^2Var(X) = a^2\sigma^2.$$

مثال: اگر داشته باشیم، متغیر تصادفی $X \sim N(-5, 16)$، این بدان معنا است که $E(X) = -5$ و $Var(X) = 16$،

همچنین، توزیع متغیر $Y = -3X + 2$ برابر با $Y \sim N(17, 144)$.

$$E(Y) = E(-3X + 2) = -3E(X) + 2 = -3(-5) + 2 = 17.$$

$$Var(Y) = Var(-3X + 2) = Var(-3X) = (-3)^2Var(X) = 9 \times 16 = 144.$$

نتیجه: از هر توزیع نرمال به هر توزیع نرمال دلخواه دیگر، با حداقل یک تبدیل خطی می توان رسید. به بیان دیگر، بین هر دو متغیر نرمال حداقل یک ترکیب خطی وجود دارد.

مثال: بمنظور نمایش این ادعا فرض می کنیم $X\sim N(10,64)$ و $Y\sim N(-4,25)$ آنگاه خواهیم داشت. حال می خواهیم نشان دهیم یک تبدیل خطی بین این دو متغیر وجود دارد. یعنی مقادیر همانند a و b وجود دارند بطوریکه $Y=aX+b$. به بیان دیگر میخواهیم مقادیر a و b در رابطه فوق را برای این دو متغیر بدست آوریم.

$Y\sim N(10a+b,a^2 64)=N(-4,25)$ و بنابراین $a^2 64=25$ یعنی $a=\pm\frac{5}{8}$

- ❖ برای $a=\frac{5}{8}$ خواهیم داشت $10\frac{5}{8}+b=-4$ در نتیجه $b=-4-\frac{50}{8}$
- ❖ برای $a=-\frac{5}{8}$ خواهیم داشت $-\frac{50}{8}+b=-4$ در نتیجه $b=-4+\frac{50}{8}$

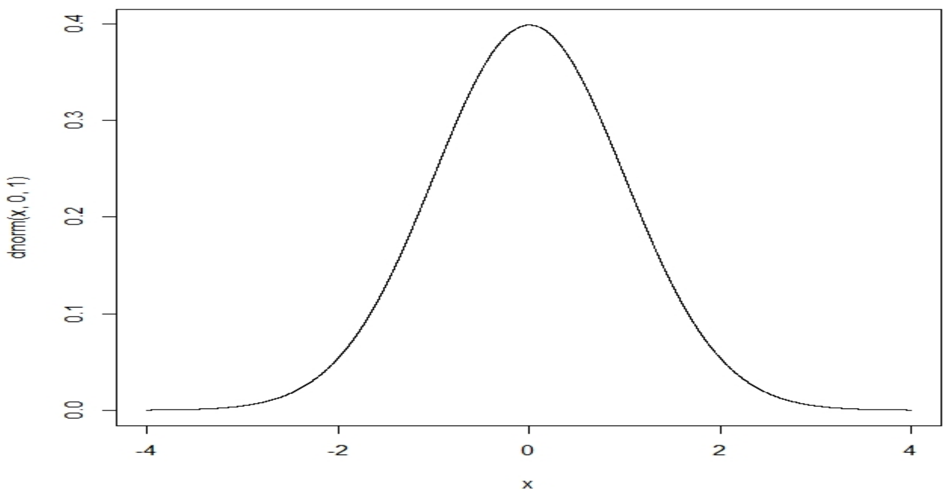
این بدان معنا است که بین دو متغیر تصادفی نرمال X و Y دو رابطه خطی بفرم‌های $Y=\frac{5}{8}X-\frac{82}{8}$ و $Y=-\frac{5}{8}X-\frac{18}{8}$.

این بدان معنا است که بین دو متغیر تصادفی دلخواه نرمال X و Y همیشه دو رابطه خطی وجود دارد (یکی با شیب مثبت و دیگری با شیب منفی).

این امکان که می توان با یک تبدیل خطی از هر توزیع نرمال به توزیع نرمال دیگر رسید، باعث معرفی توزیع خاصی در بین خانواده توزیع نرمال تحت عنوان نرمال استاندارد گردید. هرگاه در توزیع نرمال میانگین صفر و واریانس برابر ۱ باشد، آن توزیع نرمال را نرمال استاندارد گویند و آنرا بصورت $Z\sim N(0,1)$ نمایش می دهند.

مثال: هرگاه داشته باشیم $X\sim N(\mu,\sigma^2)$، آنگاه $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}Z-\frac{\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ و همچنین داریم $X=\sigma Z+\mu$

توجه داشته باشید برای هر متغیر تصادفی نرمال، به تبدیل $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ گویند.



توزیع نرمال استاندارد

چگالی توزیع نرمال استاندارد برابر است با

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}; \qquad z \in R$$

نکته: هر تبدیل خطی بین متغیرهای تصادفی نرمال مستقل، دارای توزیع نرمال می باشد. به بیان دیگر

Let $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \dots, X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ are independent[1], then for each real number[2] $a_1, \dots, a_n$, we have

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i , \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right),$$

زیرا

[1] مستقل

[2] اعداد حقیقی

$$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i.$$

$$Var(T) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2.$$

مثال: اگر متغیرهای تصادفی مستقل $X_i \sim N(i, i^2)$ برای $i = 1, \dots, n$ باشند. آنگاه

الف) توزیع میانگین این مشاهدات را بدست آورید.

میانگین یک ترکیب خطی از مشاهدات نرمال است و تنها کافی است دو پارامتر آن (یعنی میانگین و واریانس) آنرا مشخص نماییم. بنابراین

$$E(\bar{X}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}.$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

یعنی $\bar{X} \sim N\left(\frac{n+1}{2}, \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right)$

ب) با فرض اینکه تعداد مشاهدات زوج می باشد، توزیع میانگین اندیسهای زوج را بدست آورید.

اگر تعریف کنیم $\bar{X}_{2k}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2}X_{2i}$، آنگاه

$$E(\bar{X}_{2k})=E\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2}X_{2i}\right)=\frac{2}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n/2}X_{2i}\right)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2}E(X_{2i})=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2}2i$$
$$=\frac{4}{n}\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}=\frac{n}{2}+1.$$

$$Var(\bar{X}_{2k})=Var\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2}X_{2i}\right)=\frac{4}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n/2}X_{2i}\right)=\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n/2}Var(X_i)$$
$$=\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n/2}i^2=\frac{16}{n^2}\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)}{6}=\frac{2(n+2)(2n+1)}{3n}.$$

نتیجه: هرگاه متغیرهای تصادفی $X_1,\dots,X_n$، از یک جامعه نرمال بدست آمده باشند (یعنی $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$)، یعنی یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای نرمال داشته باشیم، آنگاه داریم

$$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sim N\left(\mu\sum_{i=1}^{n}a_i\,,\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)$$

نتیجه مهم: در یک نمونه تصادفی (از یک جامعه و مستقلا انتخاب شده باشند) از یک جامعه نرمال، میانگین آنها ($\bar{X}$) نیز دارای توزیع نرمال می باشد. به بیان دیگر

$$X_1,\dots,X_n\sim N(\mu,\sigma^2)\text{ Then }\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X_i\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right).$$

زیرا

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1, \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

این مطلب نشان می دهد، مقدار میانگین حاصل از نمونه نسبت به تک تک مشاهدات پراکندگی کمتری از میانگین واقعی جامعه دارد. به بیان دیگر، مقادیر حاصل از میانگین نمونه‌های تصادفی به مراتب نتایجی نزدیک به میانگین واقعی جامعه دارند.

نکته: اگر ۱۵ نمونه از مشاهدات توزیع نرمال با میانگین (بعنوان مثال) ٤ و واریانس ۹ انتخاب نماییم، آنگاه میانگین این ۱۵ مشاهده‌ای، دارای توزیع نرمال با میانگین ٤ و واریانس $\frac{9}{15}=0.6$ خواهد بود. این بدان معنا است که میانگین مشاهدات نسبت به میانگین واقعی جامعه پراکندگی به مراتب کمتری دارد، به بیان دیگر میانگین نمونه $(\bar{X})$ مقداری به مراتب نزدیکتر به میانگین واقعی جامعه (μ) را بخود خواهد گرفت.

نکته: همچنین می توان گفت اگر تعداد نمونه زیاد شود، میانگین نمونه به مقدار واقعی میانگین جامعه میل می نماید.

مثال: آیا تبدیل توان دوم توزیع نرمال استاندارد، نرمال است؟ نتیجه را با اثبات بیان نمایید.

بمنظور درک توزیع توان دوم نرمال استاندار $(T=Z^2)$ از تابع توزیع آن کمک می گیریم

$$\begin{aligned}F_T(t)&=P(T\le t)=P(Z^2\le t)=P\left(-\sqrt{t}\le Z\le\sqrt{t}\right)\\&=2P\left(0\le Z\le\sqrt{t}\right)=2\int_0^{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.\end{aligned}$$

این تابع توزیع رابطه مستقیم و یک به یک با توزیع نرمال ندارد، بنابراین توزیعی غیر نرمال دارد. بمنظور تعیین توزیع $T = Z^2$، از یک تبدیل متغیر مناسب بفرم $u = z^2$ بهره می بریم، در نتیجه $du = 2zdz$ یا به بیان بهتر $dz = \frac{du}{2\sqrt{u}}$. بنابراین

$$F_T(t) = F_{Z^2}(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{u}{2}} du = \int_0^t \frac{u^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)} \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{2^{1/2}} du.$$

در متغیرهای پیوسته تابع درون انتگرال محاسباتی تابع توزیع، همان چگالی است بنابراین داریم

$$f_T(t) = \frac{t^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2^{1/2}}; \qquad t > 0.$$

که نشان می دهد متغیر تصادفی T دارای توزیع گاما با پارامترهای $\frac{1}{2}$ و 2 می باشد، یعنی داریم $T = Z^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ می باشد. با توجه به اینکه

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{2} \Gamma(\alpha, 2),$$

همچنین می دانیم، $\Gamma(\alpha, 2) = \chi^2_{(2\alpha)}$، بنابراین موارد توزیع احتمال مربع متغیر تصادفی نرمال استاندارد ($T = Z^2$) کی-دو با یک درجه آزادی می باشد، یعنی $Z^2 \sim \chi^2_{(1)}$.

توجه: اگر $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌های تصادفی از توزیع گاما با پارامتر مقیاس برابر باشند، آنگاه جمع آنها نیز دارای توزیع گاما می باشد. به بیان دیگر

If $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$ for $i = 1, \dots, n$, then $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta)$.

از این رابطه نتیجه می گیریم که

If $X_i \sim \chi^2_{(r_i)}$ for $i = 1, \dots, n$, then $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)}$.

بنابراین اگر $Z_1, \dots, Z_n$ دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_{(n)}.$$

حال فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ دارای توزیع نرمال استاندارد $N(\mu, \sigma^2)$ باشند، آنگاه داریم

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \qquad (۱)$$

در نتیجه

$$\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = n\frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)}. \qquad (۲)$$

همچنین

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1), so \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}. \qquad (۳)$$

حال صورت فرمول فوق را بصورت زیر بسط می دهیم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}+\overline{X}-\mu\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}-\mu\right)^2+2\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(\overline{X}-\mu\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+n\left(\overline{X}-\mu\right)^2+2\left(\overline{X}-\mu\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+n\left(\overline{X}-\mu\right)^2.\end{aligned}$$

در تعریف واریانس نمونه داریم $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}$، بنابراین رابطه فوق را بطور خلاصه می توان بفرم زیر نوشت

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\frac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2}. \qquad (٤)$$

با توجه به رابطه (۳) می توان گفت سمت چپ رابطه (٤) دارای توزیع کی-دو با n درجه آزادی (یعنی $\chi^2_{(n)}$) می باشد. همچنین رابطه (۲) نتیجه می دهد عبارت سمت راست معادله (٤) دارای توزیع کی-دو با یک درجه آزادی (یعنی $\chi^2_{(1)}$) است. نتیجه می گیریم که عبارت $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ نیز دارای توزیع مستقل کی-دو با $n-1$ درجه آزادی می باشد، به بیان دیگر

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}.$$

اثبات: بمنظور اثبات رابطه فوق می توان از تابع مولد گشتاوری استفاده نمود. می دانیم تابع مولد گشتاوری یک تابع یکتا است، یعنی تابع مولد گشتاوری یک خانواده از توزیع‌ها فرم نوشتاری یکتا و مخصوص به خود را دارد و از تابع مولد گشتاوری سایر خانواده ها متفاوت است.

از طرفی می دانیم برای متغیر تصادفی $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$ داریم $M_X(t)=(1-\beta t)^{-\alpha}$.

با در نظر گرفتن $Q=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$، $R=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ و $N=\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$ داریم

$$M_Q(t)=M_{R+N}(t)\Leftrightarrow(1-2t)^{-n/2}=M_R(t)\times(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow M_R(t)=(1-2t)^{-(n-1)/2}$$

این بدان معنا است که $R=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$.

نتیجه مهم: از این رابطه می توان نتیجه گرفت، اگر $X_1,\dots,X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$ باشد، آنگاه میانگین مشاهدات از واریانس مشاهدات مستقل است. به بیان دیگر اگر مشاهداتی از یک جامعه آماری نرمال داشته باشیم، $\overline{X}$ و S^2 مستقل هستند.

می دانیم، توزیع نرمال نسبت به میانگین خود متقارن می باشد. بنابراین، اگر متغیر تصادفی $Z\sim N(0,1)$، آنگاه برای هر عدد مثبت همانند z داریم

$$P(Z\geq 0)=P(Z\leq 0)=0.5,$$

$$P(Z<-z)=P(Z>z),$$

$$P(|Z|<z)=P(-z<Z<z)=2P(0<Z<z).$$

طرز صحیح استفاده از جدول توزیع نرمال

$$P(Z<-2.05)=0.0202,$$

$$P(Z<-1.56)=0.0594.$$

$$P(Z\leq -1.63)=0.0516.$$

$$P(Z < 2) = 1 - P(Z > 2) = 1 - P(Z < -2) = 1 - 0.0228 = 0.9772.$$

برای هر نوع متغیر تصادفی داریم

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a),$$

که این احتمال برای متغیر تصادفی پیوسته تحت هر شرایطی برقرار می باشد، به بیان دیگر رابطه فوق برای متغیر تصادفی پیوسته به وجود یا عدم وجود تساوی در زیر علامات ارتباط ندارد.

$$\begin{aligned} P(-1.85 \leq Z < -0.57) &= P(Z < -0.57) - P(Z < -1.85) \\ &= 0.2843 - 0.0322 = 0.2521 = P(0.57 < Z < 1.85). \end{aligned}$$

$$P(Z > -2.08) = 1 - P(Z \leq -2.08) = 1 - 0.0188 = 0.9812.$$

$$P(Z > 1.64) = P(Z < -1.64) = 0.0505.$$

$$\begin{aligned} P(|Z| > 0.87) &= P(Z > 0.87) + P(Z < -0.87) = 2P(Z < -0.87) \\ &= 2 \times 0.1922. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-2.14 < Z < 1.5) &= P(Z < 1.5) - P(Z < -2.14) \\ &= 0.9332 - 0.0162 = 0.9170. \end{aligned}$$

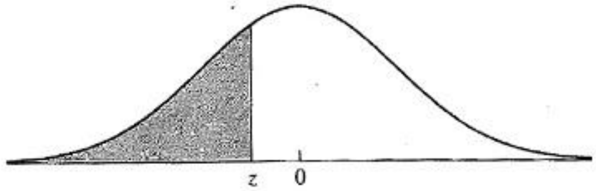
بعنوان مثالهای بیشتر داریم

$$\begin{aligned} P(Z < 1.5) &= 1 - P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < -1.5) = 1 - 0.0668 \\ &= 0.9332. \end{aligned}$$

$$P(Z > 1.67) = P(Z < -1.67) = 0.0475.$$

$$\begin{aligned} P(-1.05 < Z < 2.13) &= P(Z < 2.13) - P(Z < -1.05) \\ &= 0.9834 - 0.1469 = 0.8365. \end{aligned}$$

TABLE A.2 Cumulative normal distribution (z table)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
−3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

مثال: فرض کنید فشار خون یک شخص سالم دارای توزیعی بفرم $X \sim N(11.5, 2)$، احتمال آنرا بیابید که یک شخص سالم، علائمی همانند یک شخص با فشار خون بالا را نشان دهد (یعنی فشار خون شخص در حین اندازه‌گیری بیشتر از ۱۳.۵ شود).

X: فشار خون شخص سالم

$$P(X > 13.5) = P\left(\frac{X - 11.5}{\sqrt{2}} > \frac{13.5 - 11.5}{\sqrt{2}}\right) = P(Z > 1.41)$$
$$= P(Z < -1.41) = 0.0793.$$

تفسیر: این بدان معنا است که یک شخص سالم در هر ۱۰۰۰۰ مرتبه اندازه‌گیری فشار خونش، می تواند بطور متوسط در ۷۹۳ مرتبه مقادیر فشار خون بالای ۱۳.۵ مشاهده نماید.

ب) در چند درصد مواقع فشار خون شخص سالم، بین ۱۱ تا ۱۲ می باشد.

$$P(11 < X < 12) = P\left(\frac{11 - 11.5}{\sqrt{2}} < \frac{X - 11.5}{\sqrt{2}} < \frac{12 - 11.5}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= P(-0.36 < Z < 0.36) = P(Z < 0.36) - P(Z < -0.36)$$
$$= \big(1 - P(Z > 0.36)\big) - P(Z < -0.36)$$
$$= 1 - 2P(Z < -0.36) = 1 - 2 * 0.3594 = 1 - 0.7188$$
$$= 0.2812.$$

بنابراین توزیع فشار خون شخص سالم، نتیجه می گیریم در ۲۸درصد مواقع فشار خون شخص بین ۱۱ تا ۱۲ قابل مشاهده است.

ج) احتمال اینکه فشار خون شخص بین ۱۲ تا ۱۳.۵ بدست آید را محاسبه نمایید.

تکلیف: نمرات کلاس آمار و احتمال مهندسی بطور معمول از یک توزیع نرمال با میانگین ۱۴.۲۳ و انحراف معیار ۳ تبعیت می نماید. با توجه به این مطلب، احتمالات خواسته شده در ادامه را بدست آورید.

الف) احتمال آنکه یک شخص نمره‌ای بیش از ۱۶ بدست آورد؟

ب) احتمال آنرا بیابید که دو نفر همزمان نمره‌ای کمتر از ۱۲ داشته باشند.

X_i: نمره شخص iام

$$P(X_1 < 12, X_2 < 12) = P(X_1 < 12)P(X_2 < 12) = \left(P(X_1 < 12)\right)^2$$
$$= (0.2296)^2 = 0.0527.$$

$$P(X_1 < 12) = P\left(\frac{X_1 - 14.23}{3} < \frac{12 - 14.23}{3}\right) = P(Z < -0.74)$$
$$= 0.2296.$$

ج) در یک کلاس درس ۲۵ نفره، احتمال آنرا بیابید که بیش از نیمی از کلاس نمره‌ای بالاتر از ۱۴.۸ داشته باشند.

X: تعداد دانشجو با نمره بیشتر از ۱۴.۸   که در آن $X \sim Bin(25, p)$

$$p = P(Y > 14.8) = P\left(\frac{Y - 14.23}{3} > \frac{14.8 - 14.23}{3}\right) = P(Z > 0.19)$$
$$= P(Z < -0.19) = 0.4247.$$

جاییکه، متغیر تصادفی Y نشان دهنده نمره دانشجو می باشد ($Y \sim N(14.23, 9)$).

$$
\begin{aligned}
P(X>12.5) = P(X \geq 13) &= P(X=13) + \cdots + P(X=25) \\
&= \binom{25}{13}(0.4247)^{13}(1-0.4247)^{11} + \cdots \\
&+ \binom{25}{25}(0.4247)^{25}(1-0.4247)^{0} \\
&= \binom{25}{13}(0.4247)^{13}(1-0.4247)^{12} + \cdots + (0.4247)^{25}.
\end{aligned}
$$

تبدیل نرمال استاندارد برای میانگین برابر است با

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Leftrightarrow Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1).$$

بعنوان مثال در نمونه ۱۵تایی داشتیم $\bar{X} \sim N(4, 0.6)$ آنگاه کسر $\frac{\bar{X}-4}{\sqrt{0.6}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد خواهد بود.

مثال: فرض کنید ۱۶ نفر از کارمندان شرکت‌های مختلف که در یکسال مشابه استخدام شده‌اند را به تصادف انتخاب می نماییم. اگر بدانیم بطور طبیعی می بایست در آمد فعلی آنها دارای میانگین ۳.۲ میلیون تومان با واریانسی برابر ۱ باشد. احتمال آنرا بیابید که درآمد متوسط این 16 نفر بیش از ۳.۳ میلیون تومان باشد.

X_i: در آمد شخص iام نمونه، $i = 1, \ldots, 16$

$$n = 16, \;\; X_i \sim N(3.2, 1) \rightarrow \bar{X} = \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{16} X_i \sim N\left(3.2, \frac{1}{16}\right),$$

$$P(\bar{X} > 3.3) = P\left(\frac{\bar{X} - 3.2}{\sqrt{1/16}} > \frac{3.3 - 3.2}{\sqrt{1/16}}\right) = P(Z > 0.4) = P(Z < -0.4)$$
$$= 0.3446.$$

تفسیر: بدین معنا است که در این جامعه در حدود ۳٤.۵ درصد مواقع ممکن است متوسط حقوق ۱۶ نفر از آنها بیش از ۳.۳ میلیون باشد.

ب) احتمال آنرا بیابید که درآمد شخص اول نمونه بیش از شخص دوم نمونه باشد.

$$P(X_1 > X_2) + P(X_1 < X_2) + P(X_1 = X_2) = 1 \rightarrow P(X_1 > X_2) + P(X_1 < X_2) = 1 \rightarrow P(X_1 > X_2) = \frac{1}{2}.$$

یادآوری: تابع مولد متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2، یعنی $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ برابر خواهد بود با

$$M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

قضیه حد مرکزی: اگر نمونه تصادفی از توزیعی با میانگین a و واریانس b (هر دو موجود باشند، یعنی نامتناهی نشوند) داشته باشیم. آنگاه برای تعداد نمونه زیاد خواهیم داشت

$$\frac{\bar{X} - a}{\sqrt{b/n}} \rightarrow N(0,1); \qquad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

اثبات: بدلیل یکتایی تابع مولد گشتاور، داریم

$$M_{\frac{\bar{X}-a}{\sqrt{b/n}}}(t) = E\left(e^{\frac{\bar{X}-a}{\sqrt{b/n}}t}\right) = E\left(e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-a}{\sqrt{b/n}}t}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i-a}{\sqrt{bn}}t}\right)$$
$$= E\left(e^{\frac{X_1-a}{\sqrt{bn}}t}\right)\dots E\left(e^{\frac{X_n-a}{\sqrt{bn}}t}\right) = \left(E\left(e^{\frac{X_1-a}{\sqrt{bn}}t}\right)\right)^n$$

رابطه فوق بدلیل هم توزیع بودن همه متغیرها نتیجه می شود. در ادامه داریم

$$E\left(e^{\frac{X_1-a}{\sqrt{bn}}t}\right) = E\left(1 + \frac{X_1 - a}{\sqrt{bn}}t + \frac{\left(\frac{X_1 - a}{\sqrt{bn}}\right)^2 t^2}{2} + o(n^{-1})\right)$$
$$= 1 + \frac{E(X_1 - a)}{\sqrt{bn}}t + \frac{E(X_1 - a)^2}{2bn}t^2 + E\big(o(n^{-1})\big)$$
$$= 1 + \frac{t^2}{2n} + E\big(o(n^{-1})\big).$$

زیرا $E(X_1 - a) = 0$ و $E(X_1 - a)^2 = b$ و به هرگاه مقدار n بزرگ شود، مقدار $o(n^{-1})$ میل به صفر خواهد داشت. بنابراین خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty} M_{\frac{\bar{X}-a}{\sqrt{b/n}}}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t^2}{2n} + E\big(o(n^{-1})\big)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t^2}{2n}\right)^n$$
$$= e^{\frac{t^2}{2}}.$$

که تابع مولد توزیع نرمال استاندارد می باشد.

نکته ۱: در قضیه حدمرکزی هیچ محدودیتی برای توزیع اولیه متغیرهای تصادفی وجود ندارد. یعنی این قضیه هم برای متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته به شرط تعداد نمونه زیاد درست می باشد.

نکته ۲: منظور از تعداد زیاد در قضیه حدمرکزی، بیشتر از ۳۰ نمونه می باشد (در بعضی از کتاب‌های آماری تعداد نمونه زیاد را بیش از ۳۵ تعریف کرده‌اند).

مثال(بسیار مهم): فردی در یک سرمایه‌گذاری بورس شرکت می نماید. او مطلع هست که احتمال موفقیت در هر سرمایه‌گذاری وی ۰.۴۵ می باشد. حال اگر وی ۴۰ شرکت را برای سرمایه‌گذاری انتخاب نماید، احتمال آنرا بیابید در حداقل ۲۳ مورد از سرمایه‌گذاری‌هایش موفق شود.

X: تعداد سرمایه‌گذاری‌های موفق شخص در ۴۰ شرکت ($X \sim Bin(40, 0.45)$)

X_i: تعداد موفقیت شخص در سرمایه‌گذاری شرکت iام ($X_i \sim Ber(0.45)$)

از این تعاریف می توان نوشت $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{40} = \sum_{i=1}^{40} X_i$

$$P(X \geq 23) = P(X = 23) + P(X = 24) + \cdots + P(X = 40) = \binom{40}{23} 0.45^{23}(1-0.45)^{17} + \binom{40}{24} 0.45^{24}(1-0.45)^{16} + \cdots + \binom{40}{40} 0.45^{40} = 0.07668171.$$

می دانیم

$$E(X_i) = 0.45; \quad var(X_i) = 0.45 * 0.55 \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 40$$

$$P(X \geq 23) = P\left(\sum_{i=1}^{40} X_i \geq 23\right) = P\left(\bar{X} \geq \frac{23}{40}\right)$$
$$= P\left(\frac{\bar{X} - 0.45}{\sqrt{0.45 \times 0.55/40}} \geq \frac{0.575 - 0.45}{\sqrt{0.45 \times 0.55/40}}\right) \cong P(Z > 1.59)$$
$$= P(Z < -1.59) = 0.0557.$$

مثال: فرض کنید بطور متوسط هر روز ۱۱ تصادف منجر به فوت در تمام جاده‌های کشور داشته باشیم. احتمال آنرا بیابید که متوسط تصادف منجر به فوت ارائه شده سالیانه توسط راهور کمتر از ۱۰ بتواند باشد.

X_i: تعداد تصادف منجر به فوت در روز iام سال ($X_i \sim Pos(11)$) $i = 1, \ldots, 365$

$$E(X_i) = 11, \quad var(X_i) = 11.$$

X: تعداد تصادفات در یکسال $Pos(365 * 11)$ (باید یادآورد کرد که $X = \sum_{i=1}^{365} X_i$)

$$P(\bar{X} < 10) = P\left(\frac{X}{365} < 10\right) = P(X < 3650) = P(X \leq 3649)$$
$$= 2.36 \times 10^{-9}.$$

. همچنین می دانیم که $E(X_i) = 11$ و $Var(X_i) = 11$. بنابراین خواهیم داشت.

$$P(\bar{X} < 10) = P\left(\frac{\bar{X} - 11}{\sqrt{11/365}} < \frac{10 - 11}{\sqrt{11/365}}\right) \cong P(Z < -5.76) = 0.$$

مثال: متوسط سن بدست آمده از افراد مبتلا به کرونا که عوارض قلبی و سپس مرگ را بدنبال داشته‌اند، ۶۷.۵ سال گزارش شده است. آیا امکان دارد در بیمارستانی که ۶۷

بیمار با این مشخصات در این ۶ماه بستری داشته است متوسط سن گزارش شده زیر ۶۵سال با انحراف معیار ۱۰سال ارائه شود.

X_i: سن شخص iام با این علایم در طول ۶ماه گذشته. $i = 1, 2, \dots, 67$

بنابر فرضیات سوال انتظار داریم که $E(X_i) = 67.5$ باشد، در حالیکه ادعای این بیمارستان زیر ۶۵سال است، بنابراین خواهیم داشت

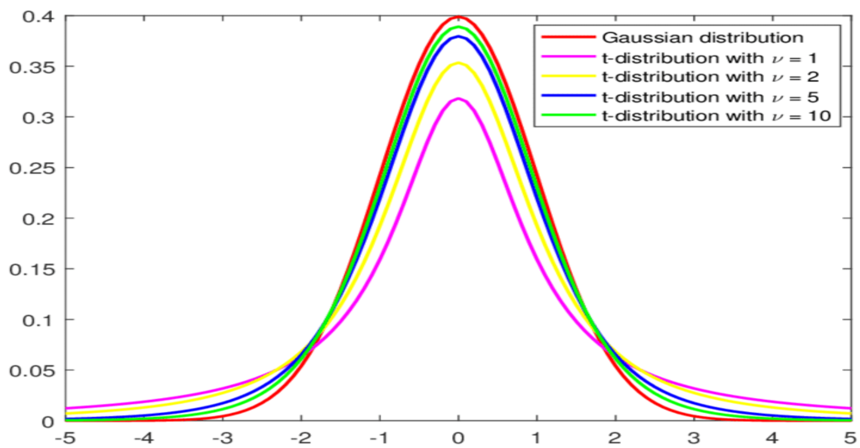
$$P(\bar{X} < 65) = P\left(\frac{\bar{X} - 67.5}{10/\sqrt{67}} < \frac{65 - 67.5}{10/\sqrt{67}}\right) \cong P(Z < -1.98) = 0.0239.$$

تفسیر: بنظر گزارش ارائه شده توسط بیمارستان، غیر محتمل (امکان حدود ۲درصد است) دارای ایراد می باشد. با دیدی متفاوت می توان گفت، احتمال اینکه سن اینگونه علائم به زیر ۶۵ سال برسد بسیار ناچیز می باشد.

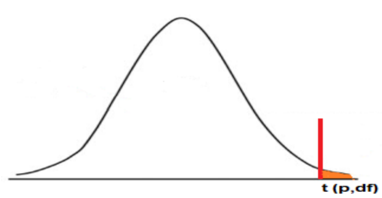
نکته مهم: در تمامی مثالهای فوق میانگین جامعه معلوم می باشد، در حالیکه در عمل واریانس توزیع جامعه نرمال مجهول می باشد، بنابراین می بایست راهکاری جدید در پیش بگیرم، که این عمل تنها با بهره از توزیع t-استودنت قابل انجام نمی باشد.

توزیع t-استودنت

یک توزیع متقارن حول نقطه صفر می باشد، با این تفاوت از توزیع نرمال، که دم‌های سنگین‌تری (یعنی دنباله‌دار یا کشیده‌تر) می باشد و تنها با یک پارامتر درجه آزادی شناخته می شود. یک متغیر تصادفی همانند X توزیع t-استودنت با درجه آزادی r را بفرم $X\sim t_{(r)}$ نمایش می دهیم. بمنظور درک این توزیع به نمودار زیر توجه کنید



جدول توزیع t-استودنت تنها بر حسب درجه آزادی است و در فصول آیند کاربرد آنرا خواهیم داشت.



نمایی از نمودار متقارن توزیع t-استودنت حول نقطه صفر

df/p	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	0.324920	1.000000	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	0.288675	0.816497	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.276671	0.764892	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	0.270722	0.740697	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103

5	0.267181	0.726687	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	0.264835	0.717558	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	0.263167	0.711142	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	0.261921	0.706387	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	0.260955	0.702722	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	0.260185	0.699812	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	0.259556	0.697445	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	0.259033	0.695483	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	0.258591	0.693829	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	0.258213	0.692417	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	0.257885	0.691197	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	0.257599	0.690132	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	0.257347	0.689195	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	0.257123	0.688364	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	0.256923	0.687621	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	0.256743	0.686954	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	0.256580	0.686352	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	0.256432	0.685805	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	0.256297	0.685306	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	0.256173	0.684850	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.256060	0.684430	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	0.255955	0.684043	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	0.255858	0.683685	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	0.255768	0.683353	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	0.255684	0.683044	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	0.255605	0.682756	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
∞	0.253347	0.674490	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905

جدول توزیع t-استودنت

توزیع t-استودنت حاصل تقسیم دو متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد ($Z\sim N(0,1)$) و توزیع کی-دو ($X\sim\chi^2_{(r)}$) بفرم زیر است

$$\frac{Z}{\sqrt{X/r}}\sim t_{(r)}.$$

توجه کنید هرگاه $X_1, \dots, X_n$ از توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ مشاهده شوند، آنگاه میانگین حاصل از مشاهدات $(\bar{X})$ مستقل از واریانس نمونه‌ها (S^2) است و همچنین داریم

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1) and \ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}.$$

بنابراین اگر واریانس توزیع نرمال مجهول باشد می توان

$$\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{(n-1)},$$

استفاده نمود، که دارای توزیع t-استودنت می باشد.

دو جامعه نرمال مستقل

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ مشاهداتی از جامعه نرمال $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $Y_1, \dots, Y_m$ مشاهداتی از جامعه نرمال $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ باشند، بطوریکه این دوجامعه مستقل هستند. آنگاه داریم

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right) and \ \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{(n-1)},$$

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}\right) and \ \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{(m-1)}.$$

بنابراین توزیع $\bar{X}-\bar{Y}$ یک رابطه خطی و از توزیع نرمال بفرم زیر تبعیت می نماید

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\right).$$

در حالت اول فرض می کنیم، مقادیر واریانس دو جامعه معلوم باشد، آنگاه

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1),$$

خواهد بود.

حالت بعد زمانی را با این فرض در نظر می گیریم که واریانس هر دو جامعه مجهول ولی برابر باشند (یعنی $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$)، آنگاه

$$\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma^2}{n}\right) and \ \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)},$$

$$\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma^2}{m}\right) and \ \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(m-1)}.$$

به بیان دیگر می توان نوشت

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right),$$

$$\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n+m-2)},$$

برای سادگی تعریف می کنیم

$$S_p^2=\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2},$$

که تحت عنوان واریانس ادغام شناخته می شود و برآورد ناااریب واریانس مجهول جامعه (یعنی σ^2) می باشد. با این تعریف خواهیم داشت

$$\frac{(n+m-2)S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n+m-2)}.$$

بنابراین

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} \sim t_{(n+m-2)}.$$

زیرا همانطور که سابق ثابت شد، میانگین حاصل از مشاهدات توزیع نرمال از واریانس نمونه مستقل می باشند و با توجه با تقسیم نرمال استاندارد بر جذر توزیع کی-دو دارای توزیع نرمال است. بنابراین مطالب، خواهیم داشت

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{(n+m-2)S_p^2}{\sigma^2}\Big/(n+m-2)}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}.$$

استفاده از قضیه حدمرکزی برای دو جامعه مستقل

هرگاه $X_1, \dots, X_n$ مشاهداتی از جامعه‌ای با میانگین a_1 و واریانس b_1 و $Y_1, \dots, Y_m$ مشاهداتی از جامعه‌ای با میانگین a_2 و واریانس b_3 باشند، زمانیکه میانگینها و واریانس هر دو جامعه مستقل متناهی باشند، آنگاه

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(a_1-a_2)}{\sqrt{\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{m}}} \to N(0,1),$$

زمانیکه تعداد نمونه‌ها $n, m \to \infty$ برقرار باشد.

نکته: اگر شرایط قضیه حدمرکزی برقرار باشد و واریانس جوامع مجهول باشد، آنگاه می توان از فرم زیر نیز استفاده نمود

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(a_1-a_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}} \to N(0,1),$$

که در آن S_1^2 و S_2^2 به ترتیب واریانس نمونه‌ای حاصل از جامعه اول و دوم می باشند.

بنابراین برای دو جامعه مستقل داریم

حالت اول: مشاهدات هر دو جامعه نرمال و واریانس معلوم باشد

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

حالت دوم: مشاهدات هر دو جامعه نرمال و واریانس برابر و نامعلوم باشد

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} \sim t_{(n+m-2)}$$

حالت سوم: تعداد نمونه زیاد و واریانس معلوم باشد

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \to N(0,1)$$

حالت چهارم: تعداد نمونه‌ها زیاد و واریانس نامعلوم باشد

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(a_1-a_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}} \to N(0,1).$$

مثال: فرض کنید دو خط تولید مشابه بمنظور پرکردن بطری نوشابه در یک کارخانه راه اندازی شده است. مسئول انبار مدعی است که اختلاف میانگین وزن شل نوشابه‌های ۲۴ عددی این دو خط اختلافی بیش از ۴۰ گرم دارند. بمنظور بررسی این موضوع از هر خط تولید تعدادی نوشابه پرشده وزن و گزارش زیر حاصل گردید.

خط تولید شماره ۱ $\begin{cases} \bar{X} = 328 \\ \sum_{i=1}^{46} X_i^2 = 4948865.35 \end{cases}$

خط تولید شماره ۲ $\begin{cases} \bar{Y} = 320 \\ \sum_{i=1}^{50} Y_i^2 = 5120004.9 \end{cases}$

احتمال صحت ادعای مسئول انبار را مشخص نمایید.

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{1.35}{45} = 0.03$$

$$S_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i^2 - n\bar{Y}^2}{m-1} = \frac{4.9}{49} = 0.1.$$

$$P\left(|\bar{X}-\bar{Y}| > \frac{40}{24}\right) = P\left(\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}}\right| > \frac{\frac{40}{24}-0}{\sqrt{\frac{0.03}{46}+\frac{0.1}{50}}}\right)$$

$$\cong P(|Z| > 59.5) = 0.$$

برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای

پارامتر: هر جزءِ قابل محاسبه و مجهول از جامعه را پارامتر گویند (دلیل مجهول بودن پارامتر آن است که برای محاسبه آن نیازمند داشتن همه اطلاعات و اعداد اعضای جامعه هستیم).

از جمله مهمترین پارامترهای جامعه می توان به میانگین جامعه (μ)، واریانس جامعه (σ^2) و نسبت در جامعه (π و P) می باشند.

برآوردگر: تابعی از مشاهدات می باشد که بمنظور برآورد یا بدست آوردن تقریبی برای پارامتر جامعه استفاده می شوند را برآوردگر گویند.

از جمله معروفترین برآوردگرها برای میانگین جامعه می توان به میانگین نمونه ($\bar{X}$) اشاره نمود. همچنین برآوردگر واریانس جامعه، واریانس حاصل از نمونه (S^2) و برآوردگر نسبت جامعه، نسبت حاصل از نمونه ($\hat{p} = \frac{\text{تعداد نمونه دارای ویژگی خاص}}{n}$) می باشند.

نکته (قابل توجه و تامل): مقدار حاصل از برآوردگرها از نمونه‌ای به نمونه دیگر لزوما یکسان نمی باشند، بنابراین خود برآوردگر نیز یک متغیر تصادفی است.

نکته: به بیان دیگر برآوردگرها خود نیز دارای توزیع آماری می باشند. یعنی دارای میانگین و واریانس هستند.

مثال (مهم): نسبت می تواند در قالب یک میانگین (از صفر و یک‌ها) نوشته شود.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{دارای ویژگی خاص باشد} \\ 0 & \text{دارای ویژگی خاص نباشد} \end{cases}.$$

$\sum_{i=1}^{n} Y_i$: برابر تعداد افرادی خواهد بود که دارای ویژگی خواص هستند.

$$\hat{p} = \frac{\text{تعداد نمونه دارای ویژگی خاص}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \bar{Y}.$$

این بدان معنا است که $\hat{p}$ یک نوع میانگین (از صفر و یک ها) می باشد.

توجه: خلاصه مطالب حاصل از بخش معرفی برآوردگر و پارامتر جدول زیر می باشد

برآوردگر		پارامتر	
عنوان برآوردگر	نماد برآوردگر	عنوان پارامتر	نماد پارامتر
میانگین نمونه	$\bar{X}$	میانگین جامعه	μ
واریانس نمونه	S^2	واریانس جامعه	σ^2
نسبت در نمونه	$\hat{p}$ یا $(\bar{Y})$	نسبت در جامعه	π یا P

توجه: به مقادیر حاصل از این برآوردگرها، **برآورد** گویند. بعنوان مثال اگر مقدار $S^2 = 6$ شود به این معنا است که برآورد واریانس جامعه (تقریبی برای واریانس جامعه) عدد ۶ می باشد. به این برآوردگرها، برآوردگر **نقطه‌ای** نیز می گویند (زیرا در انتها براساس مشاهدات تنها یک مقدار را گزارش می نمایند).

توجه: مقدار برآودگرها از نمونه‌ای به نمونه دیگر می توانند تغییر نمایند. یعنی برآوردگرها نیز متغیر تصادفی هستند و مقدار آنها به مقادیر مشاهده شده وابسته می باشد (این در حالی است که مقادیر پارامتر در یک جامعه ثابت می باشند).

توجه: در عمل/ واقعیت یکبار نمونه‌گیری انجام می دهیم و می بایست براساس همان مشاهدات حاصل از نمونه استنباط درباره پارامترهای جامعه انجام داد.

نتیجه: می بایست تلاش نماییم بر حسب مقادیر بدست آمده از تنها نمونه‌های موجود برآورد دقیق‌تر و مناسبتری برای پارامتر جامعه ارائه نماییم. این عمل به دو طریق قابل انجام است.

- **برآورد نقطه‌ای** (که شرح آن در مطالب قبل گذشت)
- **برآورد فاصله‌ای** (که در ادامه به شرح آن خواهیم پرداخت)

برآوردگر فاصله‌ای

در اینگونه برآوردگرها بجای ارائه یک نقطه بمنظور تقریب یا برآورد پارامتر جامعه (θ)، یک بازه بصورت (L,U) ارائه می نماییم، بطوریکه

$$P\big(\theta\epsilon(L,U)\big)=1-\alpha.$$

جاییکه بازه (L,U) را فاصله اطمینان یا برآوردگر فاصله‌ای برای پارامتر مدنظر در سطح اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی گویند.

نکته: در عمل امکان بدست آوردن فاصله اطمینان ۱۰۰درصدی (یعنی $\alpha=0$) وجود ندارد، زیرا برای این منظور می بایست کل مقادیر ممکن پارامتر θ را اشاره نمود.

مثال: بر اساس یک نمونه ٤٠ نفره یک فاصله اطمینان ١٠٠درصدی برای نسبت افراد موافق شرکت در یک نمایشگاه را ایجاد نمایید. (پاسخ) بدلیل اینکه می بایست ١٠٠ درصد از برآورد فاصله‌ای ارائه شده مطمئن بود فاصله اطمینان برابر است با $(0,1)$. بنابراین فاصله اطمینان ١٠٠درصدی کل بازه $(0,1)$ را شامل می شود که هیچ ارزش اطلاعاتی ندارد[1].

نکته: از نکته و مثال قبل می توان نتیجه گرفت، $\alpha > 0$. بهترین بازه بمنظور انتخاب α بازه $(0.01, 0.1)$ می باشد. بصورت پیش فرض، همیشه مقدار α برابر ٠.٠٥ در نظر گرفته می شود، یعنی فاصله اطمینان بصورت پیش فرض همیشه ٩٥درصدی در نظر گرفته می شود.

نکته مهم: منظور از عبارت $P\big(\theta \epsilon (L, U)\big) = 1 - \alpha$ آن است که در $100(1-\alpha)$درصد فاصله اطمینان‌هایی که ساخته می شود، شاهد مقدار واقعی پارامتر هستیم. به بیان دیگر (برای $\alpha = 0.05$) اگر ١٠٠ عدد فاصله اطمینان بر اساس ١٠٠ نمونه متفاوت برای پارامتر θ ایجاد نماییم، انتظار داریم بطور متوسط ٩٥ عدد از این فاصله اطمینان‌ها شامل پارامتر واقعی شوند. بنابراین فاصله اطمینان تضمین اینکه شامل پارامتر واقعی می شود را نمی نماید به بیان دیگر نمی توانیم بیان کنیم که بعنوان مثال ٠.٩٥ احتمال دارد که پارامتر θ درون بازه (L, U) قرار گیرد.

فاصله اطمینان پارامتر میانگین جامعه (μ)

یادآوری: با توجه به وجود قضیه حدمرکزی برای میانگین مشاهدات با تعداد نمونه زیاد $(n > 30)$ بمنظور ایجاد فاصله اطمینان برای میانگین جامعه می توان ٤ حالت زیر را در نظر گرفت. در حالت-های ١ و ٢ از نتایج قضیه حدمرکزی بهره می بریم.

حالت ١- هرگاه تعداد نمونه زیاد باشد، یعنی $n > 30$، و همچنین واریانس جامعه معلوم باشد، از قضیه حدمرکزی داریم

[1] Noninformative

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1).$$

حالت ۲- هرگاه تعداد نمونه زیاد باشد، یعنی $n > 30$، و همچنین واریانس جامعه نامعلوم باشد (بنابراین می بایست از برآوردگر نمونه ای واریانس یعنی S^2 استفاده نمود) و از قضیه حدمرکزی داریم

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1).$$

حالت ۳- هرگاه مشاهدات از توزیع نرمال با واریانس معلوم بدست آمده باشند، آنگاه

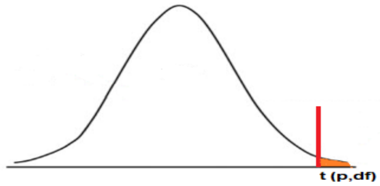
$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

حالت ٤- هرگاه مشاهدات از توزیع نرمال با واریانس مجهول بدست آمده باشند، آنگاه

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

توجه: توزیع t-استودنت تنها توسط یک پارامتر تحت عنوان درجه آزادی شناخته می شود.

توجه: هرگاه درجه آزادی توزیع t از ۳۰ بیشتر شود، رفتار آن شبیه توزیع نرمال استاندارد خواهد شد.

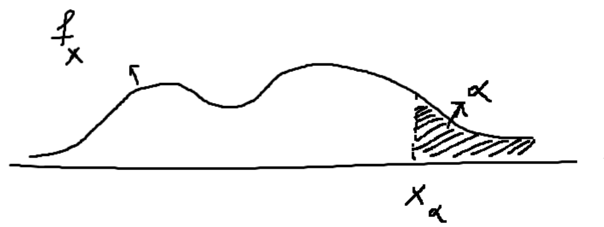


نمایی از نمودار متقارن توزیع t-استودنت حول نقطه صفر

df/p	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	0.324920	1.000000	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	0.288675	0.816497	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.276671	0.764892	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	0.270722	0.740697	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	0.267181	0.726687	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	0.264835	0.717558	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	0.263167	0.711142	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	0.261921	0.706387	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	0.260955	0.702722	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	0.260185	0.699812	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	0.259556	0.697445	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	0.259033	0.695483	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	0.258591	0.693829	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	0.258213	0.692417	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	0.257885	0.691197	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	0.257599	0.690132	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	0.257347	0.689195	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	0.257123	0.688364	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	0.256923	0.687621	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	0.256743	0.686954	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	0.256580	0.686352	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	0.256432	0.685805	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	0.256297	0.685306	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	0.256173	0.684850	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.256060	0.684430	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	0.255955	0.684043	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	0.255858	0.683685	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	0.255768	0.683353	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	0.255684	0.683044	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	0.255605	0.682756	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
∞	0.253347	0.674490	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905

جدول توزیع t-استودنت

تعریف مهم: X_α نقطه‌ای در توزیع متغیر تصادفی X، بطوریکه احتمال بعد از آن نقطه برابر α شود ($0 < \alpha < 1$)، یعنی $P(X > X_\alpha) = \alpha$ یا با رسم شکل می توان این مقدار را بفرم زیر نمایش داد



مثال: مقادیر زیر را بدست آورید

$$t_{0.025}(27) = 2.05183$$
$$t_{0.025}(5) = 2.57058, \quad t_{0.05}(11) = 1.795885$$
$$t_{0.1}(23) = 1.319460, \quad t_{0.005}(8) = 3.35539$$

$$t_{0.05}(50) = 1.644854, \quad t_{0.025}(16) = 2.11991.$$
$$t_{0.05}(10) = 1.8125, \quad t_{0.025}(21) = 2.07961, \quad t_{0.1}(5) = 1.4759$$

مثال: با توجه به تعریف فوق $Z_{0.03}$ نقطه‌ای در توزیع نرمال استاندارد بطوریکه احتمال بعد از این نقطه برابر است با ۰.۰۳ می باشد یعنی $P(Z > Z_{0.03}) = 0.03$.

$$Z_{0.03} = 1.88, \quad Z_{0.15} = 1.04, \quad Z_{0.015} = 2.17.$$

$$Z_{0.05} = 1.64, \quad Z_{0.025} = 1.96, \quad Z_{0.40} = 0.25$$

$$Z_{0.018} = 2.10, \quad Z_{0.101} = 1.27.$$

$$Z_{0.04} = 1.75, \quad Z_{0.25} = 0.67, \quad Z_{0.1} = 1.28, \quad Z_{0.05} = 1.64,$$

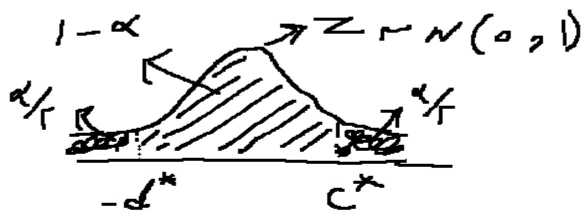
فاصله اطمینان برای میانگین جامعه (μ)

حالت ۱: (هرگاه تعداد نمونه زیاد باشد، یعنی $n > 30$، و همچنین واریانس جامعه معلوم، آنگاه $(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$

بدین منظور دو مقدار مثبت c و d را طوری بدست می آوریم که

$$1-\alpha = P\big(\mu\epsilon(L,U)\big) = P\big(\mu\epsilon(\bar{X}-c,\bar{X}+d)\big) = P(\bar{X}-c<\mu<\bar{X}+d) = P(-c<\mu-\bar{X}<d) = P(-d<\bar{X}-\mu<c) = P\left(-\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \cong P(-d^* < Z < c^*).$$

بنابراین خواهیم داشت



$$c^* = d^* = Z_{\alpha/۲}$$

می دانیم، $\frac{c}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}$ بنابراین $c = d = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}$.

که فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی بفرم

$$\left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

نتیجه می دهد.

مثال: فرض کنید ۵۳ عدد کنسرو خریداری شده توسط خانواده در مدت یکسال گذشته وزن کرده باشیم. روی ظرف کنسرو نوشته شده میزان تغییرات ۱۱ گرم می باشد (انحراف معیار تولید یا بسته بندی برابر است با ۱۱ بطور خلاصه یعنی $\sigma = 11$). فاصله اطمینای ۹۸درصدی برای میانگین وزن

واقعی قوطی‌های پر کنسرو زمانیکه متوسط حاصل از یکسال گذشته برابر ۲۴۸ گرم می باشد، تهیه نمایید.

خلاصه نویسی:

$$n = 53, \qquad \sigma = 11, \qquad \bar{X} = 248g,$$
$$100(1-\alpha) = 98 \to \frac{\alpha}{2} = 0.01 \to Z_{0.01} = 2.33.$$

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(248 - 2.33 \frac{11}{\sqrt{53}}, 248 + 2.33 \frac{11}{\sqrt{53}}\right)$$
$$= (244.48, \ \ 251.52).$$

تفسیر: می توان گفت، میانگین وزن واقعی کنسروهای تولیدی آن شرکت، با اطمینان ۹۸درصد عددی درون بازه $(244.48, \ \ 251.52)$ می باشد.

حالت ۲ (هرگاه تعداد نمونه زیاد باشد، یعنی $n > 30$، و همچنین واریانس جامعه نامعلوم، آنگاه $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \to N(0,1)$)

بدین منظور دو مقدار مثبت c و d را طوری بدست می آوریم که

$$1-\alpha = P\big(\mu \epsilon (L,U)\big) = P\big(\mu \epsilon (\bar{X}-c, \bar{X}+d)\big) = P(\bar{X}-c < \mu < \bar{X}+d) =$$
$$P(-d < \bar{X}-\mu < c) = P\left(-\frac{d}{S/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < \frac{c}{S/\sqrt{n}}\right) \cong P(-d^* < Z < c^*).$$

بنابراین $c^* = d^* = Z_{\alpha/2}$ و فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی بفرم

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

نتیجه می دهد.

مثال: فرض کنید در یک تحقیق علمی ۵۰ پرنده از انواع مختلف، طول بال آنها یادداشت شده است. اگر بدانیم مجموع طول بال این پرندگان برابر ۱۲۵۰ سانتیمتر و میانگین مربع طول بال آنها برابر با ۸۰۰ باشد. فاصله اطمینانی برای میانگین واقعی طول بال پرندگان بدست آورید.

X_i: طول بال پرنده iام. $i = 1, \dots, 50$

خلاصه نویسی:

$$n = 50, \qquad \sum_{i=1}^{50} X_i = 1250cm \Rightarrow \bar{X} = \frac{1250}{50} = 25(cm), \quad \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i^2}{50} = 800$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{50} X_i^2 = 40000.$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{40000 - 50 \times (25)^2}{49} = 178.571 \Rightarrow S = \sqrt{S^2}$$
$$= \sqrt{178.571} = 13.363.$$

$$(1-\alpha) = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow Z_{0.025} = 1.96.$$

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \left(25 - 1.96 \frac{13.363}{\sqrt{50}}, 25 + 1.96 \frac{13.363}{\sqrt{50}}\right)$$
$$= (21.29, 28.70).$$

تفسیر: متوسط طول بال پرندگان با اطمینان ۹۵درصد بیشتر از ۲۱.۲۹ و کمتر از ۲۸.۷۰ سانتیمتر می باشد.

حالت ۳ (مشاهدات نرمال و واریانس جامعه معلوم، آنگاه $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$)

بدین منظور دو مقدار مثبت c و d را طوری بدست می آوریم که

$$1 - \alpha = P\big(\mu \epsilon (L, U)\big) = P\big(\mu \epsilon (\bar{X} - c, \bar{X} + d)\big) = P(\bar{X} - c < \mu < \bar{X} + d) =$$
$$.P(-d < \bar{X} - \mu < c) = P\left(\frac{-d}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P(-d^* < Z < c^*)$$

بنابراین $c^* = d^* = Z_{\alpha/2}$ و فاصله اطمینان با سطح اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی بفرم

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{X} + Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

نتیجه می دهد.

مثال: یک دستگاه تراشکاری در بهترین عملکرد خود تولیداتی با انحراف معیار ۰.۰۳ میلیمتر تولید می نماید. از این دستگاه بمنظور تراش میله‌هایی به قطر مشخص استفاده می شود. از نمونه محصولات تولید شده این دستگاه ۱۸ عدد موجود می باشد. بمنظور درک قطر تنظیم شده بر روی دستگاه، متوسط قطر این نمونه عدد ۱.۰٤سانتیمتر بدست آمده است. فاصله‌ای با سطح اطمینانی ۹۶درصد برای میانگین قطر تنظیم شده دستگاه بدست آورید.

خلاصه‌نویستی: عبارت بهترین عملکرد دستگاه تراش، به معنای رفتار نرمال یا طبیعی در تولیدات آن می باشد.

$$n = 18, \quad \sigma^2 = (0.03)^2 \quad mm^2, \qquad \bar{X} = 1.04cm = 10.4mm.$$

$$100(1-\alpha) = 96 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.02 \Longrightarrow Z_{0.02} = 2.05.$$

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{X} + Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow \left(10.4 - 2.05\frac{0.03}{\sqrt{18}}, \qquad 10.4 + 2.05\frac{0.03}{\sqrt{18}}\right) = (10.385, \qquad 10.415).$$

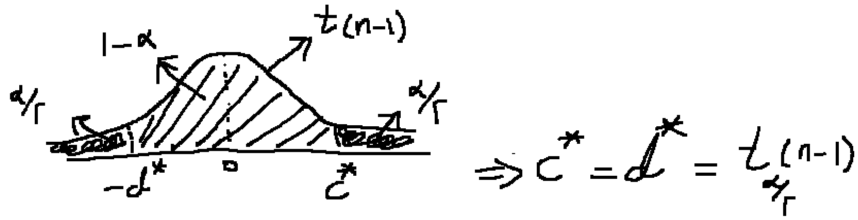
تفسیر: قطر تنظیم شده برای دستگاه توسط اپراتور، با ۹۶درصد اطمینان عددی در بازه $(10.385,\ 10.415)$ می باشد.

حالت ٤ (مشاهدات نرمال و واریانس جامعه نامعلوم آنگاه $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$)

بدین منظور دو مقدار مثبت c و d را طوری بدست می آوریم که

$$1-\alpha = P\big(\mu\epsilon(L,U)\big) = P\big(\mu\epsilon(\bar{X}-c,\bar{X}+d)\big) = P(\bar{X}-c<\mu<\ \bar{X}+d) =$$
$$P(-d<\bar{X}-\mu<\ c) = P\left(-\frac{d}{S/\sqrt{n}}<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<\ \frac{c}{S/\sqrt{n}}\right) = P(-d^*<t(n-1)<c^*).$$

بنابراین



با توجه به اینکه، $c^* = \frac{c}{S/\sqrt{n}} = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ نتیجه می گیریم $c = d = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$. یعنی فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی بفرم

$$\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

نتیجه می دهد.

مثال: شرکتی مدعی است که از یک دستگاه با عملکرد طبیعی استفاده می نماید (دستگاه در حال تولید بدون ایراد می باشد). بمنظور تعیین متوسط وزن بسته‌بندی‌های تولید شده توسط این دستگاه ۲۳ نمونه از تولیدات آنرا وزن می نماییم. مجموع مشاهدات و مجموع توان دوم آنها به ترتیب برابر ۲۵۳ و ۲۸۱۰ می باشند. فاصله اطمینانی برای میانگین واقعی بسته‌بندی این دستگاه بدست آورید.

خلاصه نویسی: مشاهدات بدست آمده دارای توزیع نرمال با واریانس مجهول می باشند.

$$n = 23, \qquad \sum_{i=1}^{23} X_i = 253, \qquad \sum_{i=1}^{23} X_i^2 = 2810,$$

$$100(1-\alpha)=95 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025 \rightarrow t_{0.025}(23-1)=t_{0.025}(22)=2.074.$$

از مطالب فوق داریم

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{23} X_i}{n}=\frac{253}{23}=11, \quad S^2=\frac{\sum_{i=1}^{23} X_i^2-n\bar{X}^2}{n-1}=\frac{2810-23(11)^2}{22}=1.23$$

$$\rightarrow S=\sqrt{1.23}=1.11.$$

بنابراین فاصله اطمینان مفید برابر خواهد بود با

$$\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=\left(11-2.074\frac{1.11}{\sqrt{23}}, 11+2.074\frac{1.11}{\sqrt{23}}\right)=(10.52, 11.48).$$

تفسیر: متوسط وزن بسته‌بندی‌های تولید شده با اطمینان ۹۵درصد عددی است درون بازه $(10.52, 11.48)$.

فاصله اطمینان برای نسب جامعه (π)

بدلیل آنکه نسبت یک نوع میانگین می باشد (میانگین یکسری صفر ویک است)، می توان از فرمول-های فوق بمنظور ایجاد فاصله اطمینان بهره برد. تنها حالتی (از حالت‌های ٤گانه مربوط به میانگین) مناسب برای ایجاد فاصله اطمینان برای نسب در جامعه، حالت دوم می باشد. بنابراین فاصله اطمینان برای نسب در سطح $100(1-\alpha)$درصدی خواهد شد برابر با

$$\left(\hat{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}},\ \hat{p}+Z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right)=\hat{p}\pm Z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}.$$

نکته: تنها الزام برای امکان ایجاد فاصله اطمینان برای نسبت درجامعه و بهره از فرمول فوق آن است که تعداد نمونه زیاد باشد $(n>30)$.

مثال: فرض کنید از مجموع افراد شرکت کننده در یک کنفرانس ۸۰ نفر در یک سخنرانی آنلاین شرکت نموده‌اند. پس از سخنرانی از تک تک شرکت کنندگان درباره کیفیت ارائه، سوال شد. تنها ۱۲ نفر راضی نبودند. فاصله اطمینانی ۹۷درصدی برای نسبت واقعی افراد راضی ایجاد نمایید. (این بدان معنا است که میخواهیم بدانیم اگر همه افراد شرکت کننده در کنفرانس در سالن ارائه حضور داشتند، چقدر از آنها راضی خارج می شدند با اطمینان برابر با ۹۷ درصد دقت.)

خلاصه نویسی: P: نسبت واقعی افراد راضی از سخنرانی

$$n = 80,\ \hat{p} = \frac{68}{80} = 0.85,\ (1-\alpha) = 0.97 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow Z_{0.015} = 2.17.$$

بنابراین فاصله اطمینان ۹۷درصدی برابر خواهد بود با

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}},\ \hat{p} + Z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right) = \left(0.85 - 2.17\sqrt{\frac{0.85\times0.15}{80}}, 0.85 + 2.17\sqrt{\frac{0.85\times0.15}{80}}\right) = (0.763,\ 0.937).$$

این بدان معنا است که با اطمینان ۹۷درصد می توان گفت میزان رضایت از سخنرانی آنلاین مقداری بین $(0.763, 0.937)$ می باشد.

مثال: بطور معمول از ۱۰۰ نفر شرکت کننده در یک کلاس آنلاین ۷۴ نفر حاضر هستند که تنها نیمی از این افراد مشغول به مطالب کلاس هستند و تمرکز دارند و مابقی دقت کافی ندارند. در هر یک از حالات زیر فاصله اطمینانی برای نسبت واقعی خواسته شده بدست آورید.

الف) نسبت افرادی که در کلاس توجه کافی دارند. (P: نسبت واقعی افراد با توجه در کلاس)

$$n = 74,\ \hat{p} = \frac{37}{74} = 0.5,\ \ (1-\alpha) = 0.95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow Z_{0.025} = 1.96.$$

$$\left(\hat{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}},\qquad \hat{p}+Z_{\alpha/2}\ \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=\left(0.50-1.96\sqrt{\frac{0.50(1-0.50)}{74}}, 0.5+1.96\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{74}}\right)$$
$$=(0.386, 0.614).$$

ب) نسبت افرادی که در کلاس شرکت نمی نمایند. (P: نسبت واقعی افرادی که در کلاس غیر حضوری شرکت ندارند)

$$n=100,\qquad \hat{p}=\frac{26}{100}=0.26,\ \ (1-\alpha)=0.95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025\rightarrow Z_{0.025}=1.96.$$
$$\left(\hat{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}},\qquad \hat{p}+Z_{\alpha/2}\ \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=\left(0.26-1.96\sqrt{\frac{0.26(1-0.26)}{100}}, 0.26+1.96\sqrt{\frac{0.26(0.74)}{100}}\right)$$
$$=(0.174, 0.346).$$

نکته مهم: اگر حد بالا یا حد پایین مربوط به فاصله اطمینان نسبت، به ترتیب بیشتر از ۱ یا کمتر از صفر شود، می بایست بجای آنها به ترتیب از اعداد ۱ و صفر استفاده نمود.

مثال: شرکتی بمنظور تهیه اقلام کامپیوتری خود ۵۶ سفارش *CPU*داشته است. از این تعداد ۲ عدد خراب بوده‌اند. نسبت خرابی قطعه *CPU* را مشخص کنید (برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای).

خلاصه نویسی: P: نسبت واقعی خرابی در قطعه *CPU*

$$n=56,\qquad \hat{p}=\frac{2}{56},\qquad (1-\alpha)=0.95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025\rightarrow Z_{0.025}=1.96.$$

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{28} - 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{28}\left(1-\frac{1}{28}\right)}{56}}, \frac{1}{28} + 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{28}\left(\frac{27}{28}\right)}{56}}\right) = (0, 0.084).$$

تکلیف ۱: بمنظور بررسی کیفیت خاک یک منطقه ٤٢ نمونه برداشت شده است. متوسط *PH* این نمونه‌ها برابر ۱۰.۲ و واریانسی برابر ١٤ داشته‌اند. فاصله اطمینانی ۹۸درصد برای متوسط *PH* خاک منطقه بدست آورید.

تکلیف ۲: ۱۲۵ کودک یک مهد، وزن شدند. بطوریکه مجموع وزن آنها ۳۰۰۰ کیلوگرم و متوسط توان دوم وزن آنها برابر ۲۷.۶ می باشد. اگر سن این کودکان ۶سال باشد و این تحقیق را بعنوان یک نمونه در کل جامعه کودکان ۶ساله بپذیرم. برآورد فاصله‌ای مربوط به متوسط وزن این کودکان را در سطح ۹۶درصد بدست آورید.

تکلیف ۳: در یک نظر سنجی که شامل ۵۰۰ نفر می باشد از افراد خواسته شد تا علاقمندی خود به مطالعه کتاب، روزنامه یا عدم مطالعه را مشخص نمایند. از بین این افراد ۲۳۰ نفر علاقمند به کتابخوانی، ۳۰۰نفر مشتاق رونامه خوانی و ۱۰۰ نفر نیز علاقمند به کتاب و روزنامه خوانی از خود نشان دادند. برای نسبت‌های خواسته شده در ادامه، فاصله اطمینان‌های ٩٤درصدی ایجاد نمایید.

الف) نسبت افرادی که به هر دو نوع مطالعه علاقمند هستند.

ب) نسبت افرادی که علاقه ای به هیچکدام ندارند.

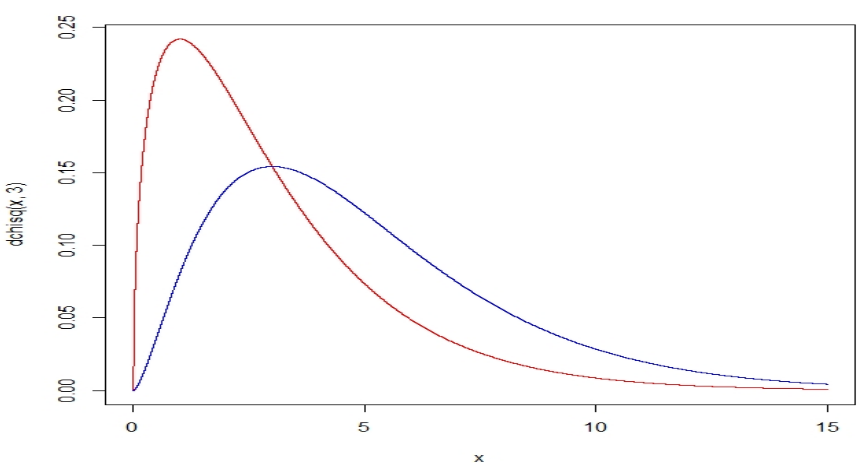
ج) نسبت افرادی که تنها به یکی از انواع مطالعه علاقمند هستند.

فاصله اطمینان برای پارامتر (σ^2)

در مبحث برآورد فاصله‌ای برای پارامتر واریانس جامعه تنها یک حالت بمنظور این مهم را در نظر می گیریم. این برآورد تحت فرض نرمال بودن مشاهدات انجام می پذیرد آنگاه

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

جاییکه توزیع کای-دو (خی-دو یا کی-دو) تنها تحت پارامتر درجه آزادی (همانند توزیع t-استودنت) شناخته می شود. این توزیع تنها مقادیر مثبت را می پذیرد و رفتار طول عمر وسایل پیچیده را مدل بندی می نماید. در این درس تنها از جدول توزیع کای-دو بهره می بریم.



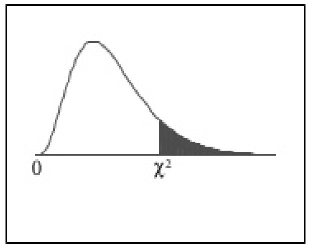
فرض کنید مشاهدات $X_1. \dots . X_n$ همگی از توزیع نرمال مشاهده شده باشند. آنگاه فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی برای σ^2 بصورت زیر بدست می آید. یعنی (L, U) باید طوری انتخاب شود که

$$1-\alpha = P\big(\sigma^2 \epsilon (L, U)\big).$$

بعنوان اولین پیشنهاد L و U را بصورت زیر تعریف می نماییم

$$L = S^2 - c \text{ and } U = S^2 + d,$$

Chi-Square Distribution Table



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

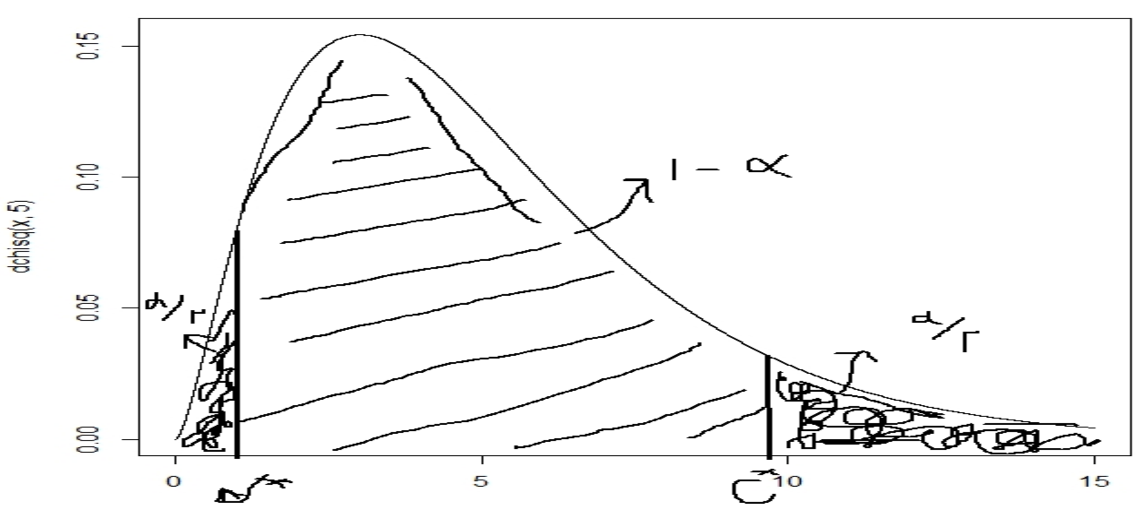
که در آن مقادیر c و d مثبت می باشند. باید یادآور شد که یک برآوردگر می بایست تمامی خصوصیات پارامتر مدنظر را داشته باشد. بعنوان مثال در برآورد واریانس براوردگر مدنظر می بایست همیشه مثبت و ویژگیهای σ^2 را داشته باشند. این در حالی است که L به ازاءِ مقادیری از c میتواند منفی شود و این با ویژگی مثبت بودن پارامتر واریانس منافات دارد. همچنین می دانیم اگر تمامی مشاهدات را در عددی ضرب کنیم (تغِییر معیار) آنگاه مقدار واریانس جدید به توان دو عدد ضرب شده در واریانس قدیم م باشد. این ویژگی نیز در L و U پیشنهادی فوق مشاهده نمی شود.

در مقابل پیشنهاد می نماییم c و d مثبت را طوری انتخاب کنیم که $0 < c < 1 < d$ آنگاه

$$L = cS^2 \text{ and } U = dS^2$$

که تمام ویژگی‌های برآوردگر واریانس را شامل می شوند. بنابراین

$$1 - \alpha = P\big(\sigma^2 \epsilon (L, U)\big) = P(cS^2 < \sigma^2 < dS^2) = P\left(c < \frac{\sigma^2}{S^2} < d\right)$$
$$= P\left(\frac{(n-1)}{d} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)}{c}\right) = P(d^* < \chi^2(n-1) < c^*)$$



با توجه به شکل می توان فهمید که $c^* = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ و $d^* = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ از این مقادیر نتیجه می گیرم که $c = \frac{(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$ و $d = \frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$. این بدان معنا است که فاصله اطمینان برای واریانس برابر خواهد با

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = \left(\frac{(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}S^2, \frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}S^2\right).$$

مثال: فرض کنید دستگاه پرکن کمپوت سیب در بهترین وضعیت عملکردی خود قرار دارد (رفتار تولیدات آن نرمال می باشد). میانگین حاصل از ٤١ مشاهده مربوط به وزن کمپوت‌های پرکرده آن مقدار ٤٩٦ گرم را نتیجه می دهد این درحالی است که واریانس این مشاهدات برابر ١٣.٤ (گرم به توان دوم) می باشد. فاصله اطمینانی ٩٥درصدی برای میانگین و انحراف معیار (σ) واقعی این مشاهدات را بدست آورید.

خلاصه نویسی: $n = 41$ و $\bar{X} = 496$ و $S^2 = 13.4$ و $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ بنابراین $t_{0.025}(40) = 1.96$.
بمنظور ایجاد فاصله اطمینان برای میانگین وزن پرکردن این دستگاه از حالت ٤ام استفاده می نمایم. برای این حالت فاصله اطمینان برابر خواهد بود با

$$\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \left(496 - 1.96\sqrt{\frac{13.4}{41}}, 496 + 1.96\sqrt{\frac{13.4}{41}}\right) = (494.88, 497.12).$$

تفسیر: با ٩٥درصد اطمینان می توان بیان کرد که دستگاه پرکن میانگین واقعی آن بر روی عددی درون بازه $(494.88, 497.12)$ تنظیم شده است.

بمنظور ایجاد فاصله اطمینان برای واریانس داریم

$$\chi^2_{0.025}(40) = 59.342 \quad \text{و} \quad \chi^2_{0.975}(40) = 24.433$$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = \left(\frac{40 * 13.4}{59.342}, \frac{40 * 13.4}{24.433}\right) = (9.03, 21.61).$$

از حدود این فاصله اطمینان (بمنظور ساخت فاصله اطمینان برای انحراف معیار) جذر می گیریم

$$\left(\sqrt{9.032}, \sqrt{21.61}\right) = (3.005, 4.65).$$

نکته: تمامی فاصله اطمینان‌هایی که تا اینجا مورد بحث قرار گرفت تحت عنوان فاصله اطمینان دو طرفه شناخته می شود.

فاصله اطمینان یکطرفه

مواقعی وجود دارد که تنها نیازمند داشته کران بالا یا پایین برای پارامتر مدنظر می باشیم. بعنوان مثال علاقمندیم (در مثال قبل) در سطح اطمینان $100(1-\alpha)$ حداکثر وزن پرشده کمپوت‌ها را بدانیم. بدین منظور باید مقدار L را در حد پایین فاصله اطمینان طوری یافت که

$$P(\theta \geq L) = P\big(\theta \in (L, \infty)\big) = 1-\alpha.$$

یا بطور مشابه برای فاصله اطمینان یکطرفه بالایی می بایست U را طوری بیابیم که

$$P(\theta \leq U) = P\big(\theta \in (-\infty, U)\big) = 1-\alpha.$$

نکته: اگر پارامتر مدنظر نسبت در جامعه باشد آنگاه دو رابطه فوق بصورت زیر می شوند

$$P(\pi \geq L) = P\big(\pi \in (L, 1)\big) = 1-\alpha,$$

$$P(\pi \leq U) = P\big(\pi \in (0, U)\big) = 1-\alpha.$$

فاصله اطمینان‌های یکطرفه برای میانگین واقعی جامعه

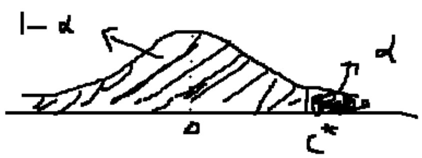
حالت ۱ (هرگاه تعداد نمونه زیاد باشد، یعنی $n > 30$، و همچنین واریانس جامعه معلوم):

در این حالت براساس قضیه حدمرکزی داریم $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$

فاصله اطمینان پایینی: بدین منظور مقدار مثبت c را طوری بدست می آوریم که

$$1-\alpha = P\big(\mu\epsilon(L,\infty)\big) = P\big(\mu\epsilon(\bar{X}-c,\infty)\big) = P(\bar{X}-c<\mu) = P(\bar{X}-\mu< \ c) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}< \ \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \cong P(Z<c^*).$$

بنابراین خواهیم داشت



$$c^* = Z_\alpha$$

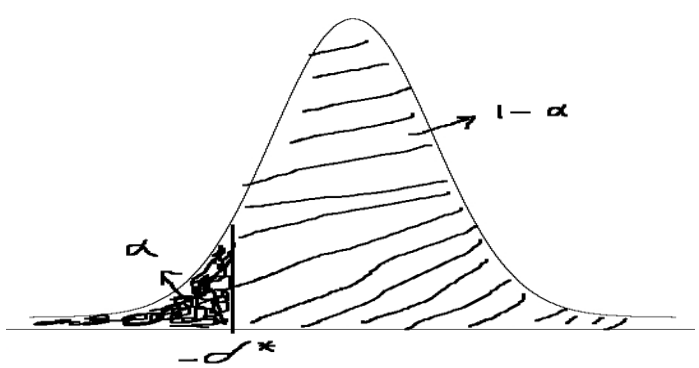
که فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی بفرم

$$\left(\bar{X}-Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\infty\right).$$

فاصله اطمینان بالایی: بدین منظور مقدار مثبت d را طوری بدست می آوریم که

$$1-\alpha = P\big(\mu\epsilon(-\infty,U)\big) = P\big(\mu\epsilon(-\infty,\bar{X}+d)\big) = P(\mu<\bar{X}+d) = P(-d<\bar{X}-\mu) = P\left(-\ \frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \cong P(-d^*<Z).$$

بنابراین خواهیم داشت



این بدان معنا است که $d^* = Z_\alpha$. بنابراین مطالب، فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی بفرم

$$\left(-\infty,\bar{X}+Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

نکته مهم: در یک نگاه کلی اگر بخواهیم برای حالت اول هر ۳ نوع فاصله اطمینان را بیاوریم، خواهیم داشت

فاصله اطمینان برای میانگین جامعه در حالت اول بفرم‌های زیر بدست می آید

دو طرفه: $\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

یکطرفه (پایین): $\left(\bar{X} - Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$

یکطرفه (بالا): $\left(-\infty, \bar{X} + Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

بعنوان تکلیف: فاصله اطمینان‌های یک طرفه برای حالت‌های ۲، ۳ و ٤ مرتبط با میانگین جامعه را بدست آورید.

مثال: متوسط برداشت گوجه فرنگی از ٤٠ قطعه گلخانه در یک ماه گذشته ۳.٤ تن می باشد. این در حالی است که انتظار داریم میزان پراکندگی برداشت در گلخانه‌ها مقداری برابر با ٠.٤ تن است. حداقل برداشت مورد انتظار از میانگین واقعی محصول در یک ماه اینچنین گلخانه‌های را بدست آورید.

خلاصه نویسی $n = 40, \quad \bar{X} = 3.4, \quad \sigma = 0.4, \quad 1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow Z_{0.05} = 1.64.$

$$\left(\bar{X} - Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) = \left(3.4 - 1.64\frac{0.4}{\sqrt{40}}, \infty\right) = (3.296, \infty).$$

تفسیر: میانگین برداشت واقعی گوجه فرنگی در هر ماه از این نوع گلخانه با اطمینان ۹۵درصد می بایست بیش از ۳.۲۹۶ تن است.

ب) بازه اطمینان ۹۸درصدی برای مقدار واقعی میانگین برداشت گوجه ماهانه بدست آورید.

$$n = 40, \quad \bar{X} = 3.4, \quad \sigma = 0.4, \quad 1-\alpha = 0.98 \Longrightarrow Z_{0.01} = 2.33.$$

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3.4 - 2.33\frac{0.4}{\sqrt{40}}, 3.4 + 2.33\frac{0.4}{\sqrt{40}}\right)$$
$$= (3.253, 3.547).$$

فاصله اطمینان‌های یکطرفه برای نسبت واقعی جامعه

تعداد نمونه زیاد ($n > 30$)

فاصله اطمینان پایینی: هرگاه تعداد نمونه زیاد باشد، فاصله اطمینان پایین $100(1-\alpha)$درصدی برای نسبت در جامعه برابر خواهد بود با

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, 1\right),$$

همچنین کران بالا برابر است با

$$\left(0, \hat{p} + Z_{\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right).$$

مثال) تعیین حداکثر خرابی محصولات تولیدی یک کارخانه امری بسیار ضروری است. بدین منظور مهندسین صنایع ۱۱۲ محصول تولیدی را مورد ارزیابی قرار دادند و در انتها به این نتیجه رسیدند که ۵ محصول با ایراد غیر قابل رفع و ۶ محصول با ایراد قابل رفع داشتند. فاصله اطمینان‌های ۹۶درصدی در حالت‌های زیر بدست آورید.

الف) برای نسبت واقعی محصولات غیرقابل رفع ایراد

خلاصه نویسی: $n = 112, \quad \hat{p} = \frac{5}{112}, \quad 1-\alpha = 0.96 \Longrightarrow Z_{0.04} = 1.75$

$$\left(0, \hat{p} + Z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0, \frac{5}{112} + 1.75\sqrt{\frac{\frac{5}{112}\left(1-\frac{5}{112}\right)}{112}}\right) = (0, 0.0787).$$

تفسیر: می توان با اطمینان ۹۶درصد بیان نمود که حداکثر خرابی تولید از نوع غیر قابل رفع ۷.۸درصد می باشد.

ب) برای نسبت واقعی ایرادات قابل مشاهده

ج) حداقل نواقص ظاهری و قابل رفع را مشخص نمایید.

فاصله اطمینان‌های یکطرفه برای واریانس واقعی جامعه

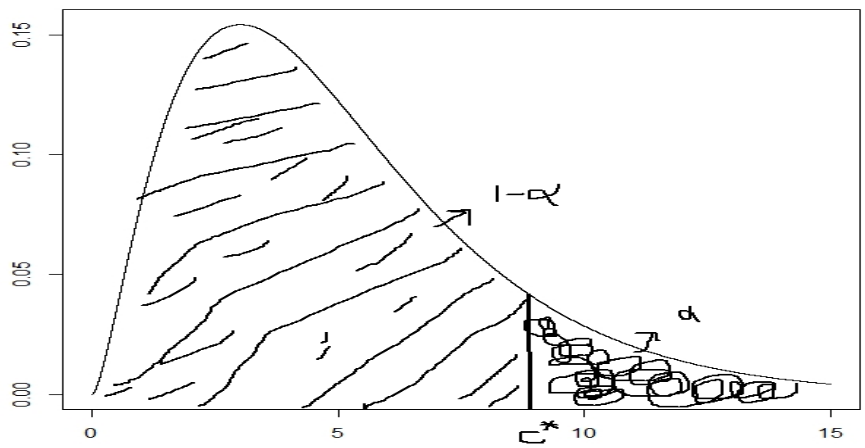
اگر مشاهدات نرمال باشند، آنگاه داریم $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

فاصله اطمینان پایینی: این فاصله اطمینان در سطح $100(1-\alpha)$درصدی برابر است با

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}, \infty\right),$$

زیرا تنها کافی است که عدد c را طوری انتخاب کنیم که $0 < c < 1$ و داشته باشیم

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\big(\sigma^2 \in (L, \infty)\big) = P\big(\sigma^2 \in (cS^2, \infty)\big) = P(cS^2 < \sigma^2) \\ &= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)}{c}\right) = P(\chi^2(n-1) < c^*). \end{aligned}$$



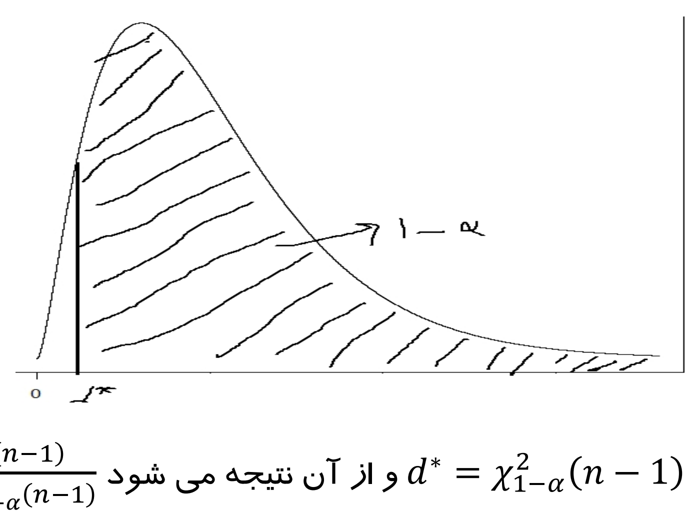
این بدان معنا است که $c^* = \chi^2_\alpha(n-1)$ و نتیجه می شود $c = \frac{(n-1)}{\chi^2_\alpha(n-1)}$.

همچنین فاصله اطمینان بالا برای واریانس واقعی جامعه برابر می شود با

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right).$$

زیرا تنها کافی است که عدد d را طوری انتخاب کنیم که $d > 1$ و داشته باشیم

$$\begin{aligned}1-\alpha = P\big(\sigma^2 \in (0, U)\big) = P\big(\sigma^2 \in (0, dS^2)\big) = P(\sigma^2 < dS^2)\\ = P\left(\frac{(n-1)}{d} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = P\big(d^* < \chi^2(n-1)\big)\end{aligned}$$



این بدان معنا است که $d^* = \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ و از آن نتیجه می شود $d = \frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$.

مثال: ۱۸ روز بمنظور تولید بلوک‌های بتنی توسط یک دستگاه کاملا سالم صرف شد. در هر روز کاری، ۱۰۰ قطعه بتن تولید و وزن نهایی این قطعات در هر روز کاری یادداشت می شده است. اگر بدانیم واریانس حاصل از وزن بتن‌های تولید شده در این ۱۸ روز برابر ۲.٤ کیلوگرم به توان ۲ بوده است حداکثر انحراف معیار تولید روزانه را بدست آورید.

$$n = 18, \quad S^2 = 2.4, \quad 1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \chi^2_{0.95}(17) = 8.672.$$

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right) = \left(0, \frac{17 \times 2.4}{8.672}\right) = (0, 4.7047).$$

تفسیر: این بدان معنا است که با اطمینان ۹۵درصد می توان گفت انحراف معیار واقعی مجموع وزن ۱۰۰ قطعه بتن در هر روز، حداکثر برابر $\sqrt{4.7047} = 2.169$ کیلوگرم می باشد.

مثال: از تمام قطعات بتن تولید شده در مثال قبل، ۱۳۰ عدد کاملا از بین رفته و قابل استفاده نبودند و ۲۰۰ عدد آنها دچار ترک و ۱۵۰ عدد آنها نیز دارای شکستگی جزیی بودند. همچنین ٤۰ عدد از آنهایی که دارای ترک بودند، شکستگی جزیی نیز داشتند. نسبت واقعی تولید قطعات بلوک سالم توسط این دستگاه را در سطح ۹٤درصد بدست آورید.

P: نسبت قطعات بلوک سالم تولید شده

$$n = 1800, \quad \hat{p} = \frac{1800 - 440}{1800} = \frac{1360}{1800} = 0.755,$$
$$1-\alpha = 0.94 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0.03} = 1.88.$$

$$\left(\hat{p}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$
$$=\left(0.755-1.88\sqrt{\frac{0.755(1-0.755)}{1800}},0.755\right.$$
$$\left.+1.88\sqrt{\frac{0.755(1-0.755)}{1800}}\right)=(0.735,0.774).$$

ب) حداکثر مشکل جزیی (ترک یا شکستگی جزئی) در تولیدات دستگاه را مشخص نمایید.

P: نسبت بلوکهای تولیدی با مشکل جزیی

$$n=1800,\quad \hat{p}=\frac{310}{1800}=0.172,\quad 1-\alpha=0.95\Longrightarrow Z_{\alpha}=Z_{0.05}=1.64.$$

$$\left(0,\hat{p}+Z_{\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)=\left(0,0.172+1.64\sqrt{\frac{0.172(1-0.172)}{1800}}\right)=(0,0.1866).$$

تفسیر: با اطمینان ۹۵درصد می توان گفت این دستگاه حداکثر ۱۸.۶درصد از تولیداتش معایب جزیی دارند.

ج) کف تولید بلوک‌های بی ارزش و غیر قابل استفاده این دستگاه را با اطمینان ۹۸درصد مشخص نمایید.

$$n=1800,\quad \hat{p}=\frac{130}{1800}=\frac{130}{1800}=0.0722,\quad 1-\alpha=0.95\Longrightarrow Z_{\alpha}=Z_{0.05}$$
$$=1.64.$$

$$\left(\hat{p}-Z_{\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},1\right)=\left(0.0722+1.64\sqrt{\frac{0.0722(1-0.0722)}{1800}},1\right)$$
$$=(0.01,1).$$

تفسیر: حداقل ۱درصد تولید بلوکهای این دستگاه در ۹۵درصد مواقع غیر قابل استفاده می باشند.

د) چه نسبت از بلوک‌های بتنی غیرسالم، قابل استفاده هستند؟ در سطح ۹۵ درصد بررسی شود.

$$n = 440, \qquad \hat{p} = \frac{310}{440} = 0.705, \quad 1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96.$$

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$
$$= \left(0.705 - 1.96\sqrt{\frac{0.705(0.295)}{n}}, 0.705 + 1.96\sqrt{\frac{0.705(0.295)}{n}}\right)$$
$$= (0.6623, 0.7476).$$

ه) اگر بدانیم انحراف معیار تولید بلوک ۰.۲۳ کیلوگرم می باشد، میانگین وزن واقعی هر بلوک حداکثر چه مقدار می باشد؟ میانگین وزن تولیدات روزهای مورد مطالعه برابر ۶.۷۵ کیلوگرم می باشد.

با توجه به توضیحات سوال، باید از فاصله اطمینان مربوط به میانگین حالت سوم استفاده نمود.

μ: میانگین وزن هر بلوک

$$n = 1800, \quad \sigma = 0.23, \quad \bar{X} = 6.75, \quad 1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96.$$

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{n}}, \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{n}}\right) = \left(6.75 - 1.96\sqrt{\frac{0.23}{1800}}, 6.75 + 1.96\sqrt{\frac{0.23}{1800}}\right)$$
$$= (6.728, 6.772).$$

تفسیر: متوسط وزن هر بلوک تولید شده توسط این دستگاه، با اطمینان ۹۵درصد عددی در بازه $(6.728, 6.772)$ کیلوگرم می باشد.

آزمون فرضیه:

هرگاه دو ادعای مکمل درباره یک پارامتر (میانگین، واریانس یا نسبت در جامعه) در جامعه‌ای مطرح گردد. به ابزار علمی-آماری بررسی صحت و سقم این دو ادعا می پردازد، آزمون فرضیه گوییم.

در آزمون فرضیه به بررسی صحت ادعاهای مطرح شده درباره پارامتر جامعه بر اساس مشاهدات پرداخته می شود. یعنی در نظر داریم با توجه به مستندات بدست آمده (مشاهدات) درستی فرضیه-ها را بررسی نماییم و تصمیم در انتها پذیرش یکی از فرضیه‌ها و رد دیگری است. بدین منظور یکی از فرض‌ها را فرض اصلی در نظر می گیریم (فرض صفر H_0) و فرض دیگر را بعنوان فرض مقابل (فرض یک H_1). اگر پارامتر مدنظر θ باشد برای فرضیه صفر و فرضیه یک ۳ حالت خواهیم داشت

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$ فرضیه دو طرفه

$$\begin{cases} H_0: & \theta \geq \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{cases}$$ فرضیه یک طرفه

$$\begin{cases} H_0: & \theta \leq \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{cases}$$ فرضیه یک طرفه

نکته: در فرضیه صفر حتما یکی از مقادیر مورد ادعا بصورت شفاف مشخص می باشد در حالیکه این انتظار در فرضیه یک الزامی ندارد.

نکته: فرضیه صفر بعنوان فرض اصلی و مورد تحقیق می باشد و از خصوصیات اصلی آن این است که قابل تحقیق می باشد (یعنی حداقل یک مقدار مشخص در آن وجود دارد).

استراتژی انجام فرآیند آزمون فرضیه بصورت گام‌های ادامه می باشد

1 - انتخاب فرضیه‌های صفر و یک (زیرا در تحقیقات بدنبال بررسی شواهدی دال بر رد فرض صفر در حضور فرض مقابل هستیم)

2 - ایجاد ناحیه رد (شرایطی که باعث رد فرض صفر می شود). این ناحیه بطور معمول با R نمایش داده می شود.

3 - بررسی مشاهدات بمنظور یافتن دلایلی بر رد فرض صفر (آیا مقادیر حاصل از مشاهدات در ناحیه R قرا ر می گیرد)

4 - تصمیم‌گیری (نتیجه‌گیری و تفسیر نتایج)

هرگاه بخواهیم تصمیم‌گیری نماییم در حالیکه از واقعیت بی اطلاع هستیم مرتکب دو نوع خطا می توانیم بشویم و می بایست بگونه ای رفتار نماییم که این دو خطا با کمترین احتمال ممکن رخ دهند.

واقعیت / تصمیم	فرض صفر درست است	فرض صفر نادرست است
فرض صفر رد می شود	خطای نوع اول	-----------
فرض صفر پذیرفته می شود	-----------	خطای نوع دوم

تعریف خطای نوع اول: هرگاه فرض صفر رد شود در حالیکه درست بوده است مرتکب خطای نوع اول می شویم.

تعریف خطای نوع دوم: هرگاه فرض صفر را بپذیریم در حالیکه نادرست بوده است مرتکب خطای نوع دوم می شویم.

نکته مهم: این دو نوع خطا با یکدیگر را بطه دارند (لزوما خطی نیست) بدین معنا که هر گاه یکی را بخواهیم حداقل نماییم دیگری افزایش می یابد.

بدین منظور (کنترل همزمان هر دو نوع خطا) می بایست یکی را ثابت و دیگری را مینیمم نمود. برای رسیدن به این هدف تعاریف زیر را انجام می دهیم

$$\alpha = P\left(\text{ارتکاب خطای نوع اول}\right) = P(R|H_0) = P_{H_0}(R).$$

و

$$\beta = P\left(\text{ارتکاب خطای نوع دوم}\right) = P(R'|H_1) = P_{H_1}(R').$$

جاییکه در تعاریف فوق R ناحیه رد در نظر گرفته می شود. به α سطح آزمون[1] گویند. در ادامه مقدار سطح آزمون را همیشه از قبل مشخص نموده و سپس تلاش می نماییم که احتمال مربوط به β را کاهش دهیم.

توجه: سطح آزمون (α) بطور معمول ۰,۰۵ در نظر گرفته می شود. باید توجه داشته بازه مورد قبول مربوط به سطح آزمون برابر است با $(0.01, 0.1)$.

ایجاد ناحیه رد برای انجام آزمون فرضیه درباره پارامتر میانگین جامعه (μ)

❖ حالت اول (تعداد نمونه زیاد و واریانس جامعه معلوم باشد)

آزمون فرضیه را دو طرفه در نظر می گیریم $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

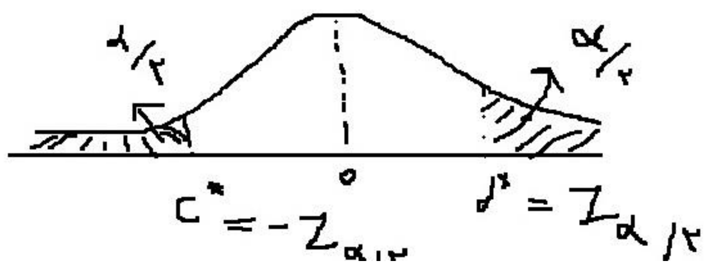
فرض صفر رد می شود هرگاه مقدار میانگین جامعه $(\bar{X})$ از مقدار ادعا شده در فرض صفر خیلی بزرگتر یا کوچکتر باشد یعنی برای $c < \mu_0 < d$ داشته باشیم

$$R = \{\bar{X} < c \quad \text{or} \quad \bar{X} > d\}.$$

بنابراین می بایست مقدار c و d را در ناحیه رد بالا بدست آورد. بدین منظور خواهیم داشت

[1] Level test

$$\begin{aligned}\alpha = P(R|H_0) &= P(\bar{X} < c \ \text{ or } \ \bar{X} > d|\ \mu = \mu_0)\\ &= P_{\mu=\mu_0}(\bar{X} - \mu_0 < c - \mu_0 \ \text{ or } \ \bar{X} - \mu_0 > d - \mu_0)\\ &= P_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ \text{ or } \ \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{d-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\\ &\cong P(Z < c^* \ \ or \ \ Z > d^*) = P(Z < c^*) + P(Z > d^*).\end{aligned}$$



بنابراین ناحیه رد بصورت زیر خواهد شد

$$R = \left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -Z_{\alpha/2} \ \text{ or } \ \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_{\alpha/2}\right\} = \left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > Z_{\alpha/2}\right\}.$$

مثال: یک دستگاه میزان انحراف تولیداتش ۸گرم از طرف سازنده ادعا شده است. مدیر تولید مدعی است که دستگاه را بر روی عدد ۵۰۰گرم بمنظور بسته‌بندی تنظیم نموده است. این در حالی است که کارگر انبار بنا بر سابقه مدعی است که تولیدات جدید متوسط وزن ۵۰۰ گرم ندارند. بمنظور بررسی ادعای این دو نفر ٤۰ نمونه از تولیدات خط بطور تصادفی انتخاب و وزن شد. اگر میانگین این نمونه ۵۱۰ گرم باشد، درباره ادعای این دونفر چه تصمیمی خواهید گرفت؟

$$n = 40, \quad \sigma = 8, \quad \bar{X} = 510, \quad \begin{cases} H_0: & \mu = 500 \\ H_1: & \mu \neq 500 \end{cases}, \quad \alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{0.025} = 1.96.$$

$$R = \left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} \Rightarrow \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{510-500}{8/\sqrt{40}}\right| = 7.906 > 1.96,$$

شرایط ناحیه رد فرض صفر برقرار می باشد. این بدین معنا است که دلیلی بر پذیرش فرض صفر وجود ندارد.

تفسیر: نظر انباردار تایید می شود و می بایست فرآیند تولید بازنگری شود.

آزمون فرضیه را یکطرفه در نظر می گیریم $\begin{cases} H_0:\ \mu \geq \mu_0 (\mu = \mu_0) \\ H_1:\ \mu < \mu_0 \end{cases}$

فرض صفر رد می شود هرگاه مقدار میانگین نمونه $(\bar{X})$ از مقدار ادعا شده یعنی μ_0 خیلی کوچکتر باشد یعنی برای $c < \mu_0$ داشته باشیم

$$R = \{\bar{X} < c\}.$$

بنابراین می بایست مقدار c را در ناحیه رد بالا بدست آورد. بدین منظور خواهیم داشت

$$\alpha = P(R|H_0) = P(\bar{X} < c|\ \mu = \mu_0) = P_{\mu=\mu_0}(\bar{X} - \mu_0 < c - \mu_0)$$
$$= P_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \cong P(Z < c^*).$$

$$\Rightarrow c^* = -Z_\alpha$$

بنابراین ناحیه رد برابر می شود با

$$R = \left\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -Z_\alpha\right\}.$$

مثال: فردی مدعی است که مبتلا به فشار خون پایین شده. این در حالی است که واریانس ثبت فشار خون ۱,۵ و نتایج ۳٤ مرتبه گرفتن فشار خون توسط شخص بیمار برابر ۱۰,۷ می باشد. اگر سطح فشار خون زیر ۱۱,۲ بعنوان فشار پایین تلقی شود. آیا ادعای فرد در سطح ۰,۰۶ را می پذیرید؟

$$n = 34, \quad \sigma^2 = 1.5, \quad \bar{X} = 10.7, \quad \begin{cases} H_0:\ \ \mu \geq 11.2 \\ H_1:\ \ \mu < 11.2 \end{cases}, \ \ \alpha = 0.06 \Longrightarrow Z_{0.06} = 1.56.$$

$$R = \left\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -Z_\alpha\right\} \Longrightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{10.7 - 11.2}{\sqrt{1.5/34}} = -2.380 < -1.56$$

دلیلی بر پذیرش فرضیه صفر وجودندارد.

تفسیر: نتایج حاصل از مشاهدات فرد نشان می دهد که ادعایش صحت دارد و هم اکنون وی بعنوان یک شخص مشکوک به ابتلا به فشار خون پایین شناخته می شود.

نکته مهم: در ایجاد فرضیات یکطرفه، آن فرضی را که مشاهدات تایید می نمایند، بعنوان فرض مقابل (H_1) در نظر گرفته می شود و مکمل آن را فرض صفر می گیریم.

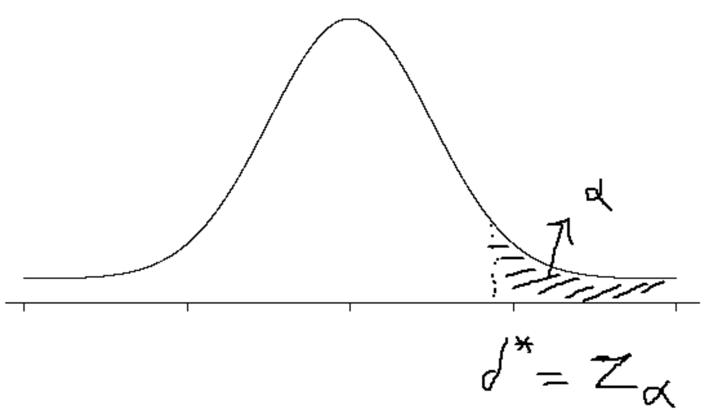
آزمون فرضیه را یکطرفه در نظر می گیریم $\begin{cases} H_0:\ \mu \le \mu_0 \\ H_1:\ \mu > \mu_0 \end{cases}$

فرض صفر رد می شود هرگاه مقدار میانگین نمونه ($\bar{X}$) از مقدار ادعا شده یعنی μ_0 خیلی بزرگتر باشد یعنی برای $d > \mu_0$ داشته باشیم

$$R = \{\bar{X} > d\}.$$

بنابراین می بایست مقدار d را در ناحیه رد بالا بدست آورد. بدین منظور خواهیم داشت

$$\alpha = P(R|H_0) = P(\bar{X} > d|\, \mu = \mu_0) = P_{\mu=\mu_0}(\bar{X} - \mu_0 > d - \mu_0)$$
$$= P_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{d - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \cong P(Z > d^*).$$



بنابراین ناحیه رد برابر می شود با

$$R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_\alpha \right\}.$$

مثال: میزان استخوان مرغ بطور استاندارد در هر ۱۰۰ گرم ژامبون می بایست کمتر از ۰,۱ گرم با انحراف معیار ۰,۰۱ گرم باشد. بمنظور اخذ استاندارد برای تولیدات جدید یک شرکت ٤٣ نمونه ژامبون ۱۰۰ گرمی را مورد آزمایش قرار داده‌ایم میانگین حاصل از آزمایشات ۰,۲ گرم نتیجه شده است. آیا می توان برای این تولیدی استاندارد را تایید نمود؟

$$n = 43, \;\; \sigma = 0.01, \quad \bar{X} = 0.2, \quad \begin{cases} H_0: & \mu \leq 0.1 \\ H_1: & \mu > 0.1 \end{cases}, \quad \alpha = 0.05 \Longrightarrow Z_{0.05} = 1.64.$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_\alpha \right\} \Longrightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{0.2 - 0.1}{0.01/\sqrt{43}} = 65.574 > 1.64.$$

دلیلی بر پذیرش فرض صفر وجود ندارد. این بدان معنا است که امکان اخذ مجوز امکان پذیر نیست.

خلاصه نویسی مربوط به آزمون فرض درباره پارامتر میانگین در حالت اول

$$\begin{cases} H_0: \; \mu = \mu_0 \\ H_1: \; \mu \neq \mu_0 \end{cases} \Longrightarrow R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_{\frac{\alpha}{2}} \quad or \quad \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -Z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} = \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > Z_{\frac{\alpha}{2}} \right\},$$

$$\begin{cases} H_0: \; \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \; \mu < \mu_0 \end{cases} \Longrightarrow R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -Z_\alpha \right\},$$

$$\begin{cases} H_0: \; \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \; \mu > \mu_0 \end{cases} \Longrightarrow R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_\alpha \right\}.$$

❖ **حالت دوم (تعداد نمونه زیاد و واریانس جامعه مجهول می باشد)**

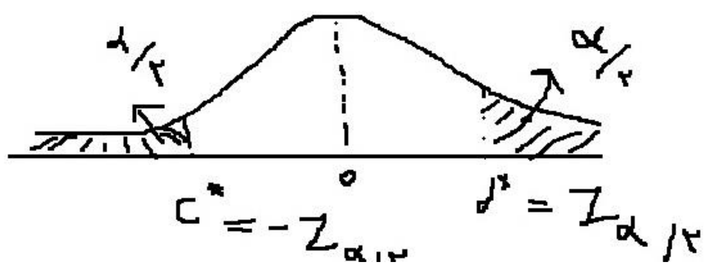
آزمون فرضیه را دو طرفه در نظر می گیریم $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

فرض صفر رد می شود هرگاه مقدار میانگین جامعه $(\bar{X})$ از مقدار ادعا شده در فرض صفر خیلی بزرگتر یا کوچکتر باشد یعنی برای $c < \mu_0 < d$ داشته باشیم

$$R = \{\bar{X} < c \quad or \quad \bar{X} > d\}.$$

بنابراین می بایست مقدار c و d را در ناحیه رد بالا بدست آورد. بدین منظور خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \alpha = P(R|H_0) &= P(\bar{X} < c \quad or \quad \bar{X} > d |\, \mu = \mu_0) \\ &= P_{\mu=\mu_0}(\bar{X} - \mu_0 < c - \mu_0 \quad or \quad \bar{X} - \mu_0 > d - \mu_0) \\ &= P_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < \frac{c - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad or \quad \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > \frac{d - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right) \\ &\cong P(Z < c^* \quad or \quad Z > d^*) = P(Z < c^*) + P(Z > d^*). \end{aligned}$$



بنابراین ناحیه رد بصورت زیر خواهد شد

$$R = \left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -Z_{\alpha/2} \text{ or } \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > Z_{\alpha/2}\right\} = \left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > Z_{\alpha/2}\right\}.$$

مثال: بمنظور بررسی ادعای تولید کننده‌ای مبنی بر اینکه وزن نان تولیدی آن واحد برابر ۱۸۵ گرم در هر قرص نان است. نمونه‌ای از ۸۰ نان تولید شده آن واحد را وزن نمودیم مجموع وزن‌ها برابر با ۱۴۲۴۰ گرم و متوسط توان دوم وزن‌ها نیز عدد ۳۱۶۹۱ بدست آمده است. در سطح ۰,۰۲ درستی این ادعا را بررسی نمایید.

$$n = 80, \quad \bar{X} = \frac{14240}{80} = 178, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{80} = 31691 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 2535280$$

$$\Longrightarrow S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{2535280 - 80 \times (178)^2}{79} = 7.088,$$

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 185 \\ H_1: & \mu \neq 185 \end{cases}, \qquad \alpha = 0.02 \Longrightarrow Z_{0.01} = 2.33$$

$$R = \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| > Z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \Longrightarrow \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{178 - 185}{\sqrt{7.088/80}} \right| = 23.517 > 2.33.$$

دلیلی بر پذیرش فرض صفر وجود ندارد. مستندات دلیلی بر پذیرش ادعای کارخانه‌دار نداشتند بنابراین ادعای ایشان رد می شود.

آزمون فرضیه را یکطرفه در نظر می گیریم $\begin{cases} H_0: \ \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \ \mu < \mu_0 \end{cases}$

فرض صفر رد می شود هرگاه مقدار میانگین نمونه $(\bar{X})$ از مقدار ادعا شده یعنی μ_0 خیلی کوچکتر باشد یعنی برای $c < \mu_0$ داشته باشیم

$$R = \{\bar{X} < c\}.$$

بنابراین می بایست مقدار c را در ناحیه رد بالا بدست آورد. بدین منظور خواهیم داشت

$$\alpha = P(R|H_0) = P(\bar{X} < c|\ \mu = \mu_0) = P_{\mu=\mu_0}(\bar{X} - \mu_0 < c - \mu_0)$$
$$= P_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < \frac{c - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right) \cong P(Z < c^*).$$

$$\Rightarrow c^* = -Z_\alpha$$

بنابراین ناحیه رد برابر می شود با

$$R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < -Z_\alpha \right\}.$$

مثال: بطور قانونی هر کارمند می تواند در هر ماه کمتر از ۲ روز مرخصی داشته باشد. بمنظور رسیدگی به وضعیت مرخصی یکی از کارمندان که مدیر ارشدش اطمینان دارد که وی بیش از حد قانونی مرخصی دارد تعداد روزهای مرخصی وی در ۶۰ ماه گذشته بررسی گردید. وی ۱۱۲ روز مرخصی گرفته است و پراکندگی مرخصی‌ها در این ۶۰ ماه حدود ۱۰ می باشد. آیا ادعای مدیر پذیرفته می شود؟

μ: متوسط روز مرخصی شخص در یک ماه

$$n = 60, \quad \bar{X} = \frac{112}{60} = 1.866, \quad S^2 = 10\ , \quad \begin{cases} H_0:\ \mu \geq 2 \\ H_1:\ \mu < 2 \end{cases},$$

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow Z_{0.05} = 1.64$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < -Z_\alpha \right\} \Longrightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}} = \frac{1.866 - 2}{\sqrt{10/60}} = -0.328 \nless -1.64.$$

دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد.

تفسیر: ادعای مدیر قابل رد کردن نیست و دلیل عمده آن واریانس بالای مرخصی‌های شخص می باشد.

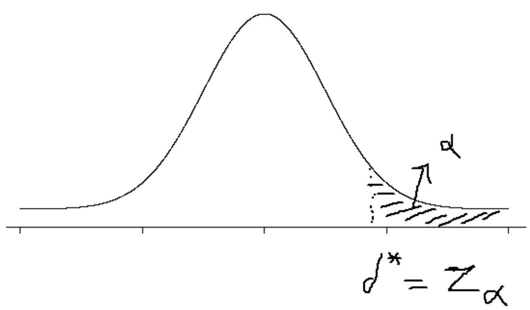
آزمون فرضیه را یکطرفه در نظر می گیریم $\begin{cases} H_0:\ \mu \leq \mu_0 \\ H_1:\ \mu > \mu_0 \end{cases}$

فرض صفر رد می شود هرگاه مقدار میانگین نمونه $(\bar{X})$ از مقدار ادعا شده یعنی μ_0 خیلی بزرگتر باشد یعنی برای $\mu_0 < d$ داشته باشیم

$$R = \{\bar{X} > d\}.$$

بنابراین می بایست مقدار d را در ناحیه رد بالا بدست آورد. بدین منظور خواهیم داشت

$$\alpha = P(R|H_0) = P(\bar{X} > d|\ \mu = \mu_0) = P_{\mu=\mu_0}(\bar{X} - \mu_0 > d - \mu_0)$$
$$= P_{\mu=\mu_0}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > \frac{d - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right) \cong P(Z > d^*).$$



بنابراین ناحیه رد برابر می شود با

$$R = \left\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > Z_\alpha\right\}.$$

مثال: بمنظور ساخت موشک می بایست از سوخت‌های جامد استفاده نمود. زمانی یک موشک را سازه سبک می نامند که متوسط سوخت مصرفی این موشک به ازاءِ ۱۰ متر جابجایی حداکثر ۱٤,۵ گرم سوخت جامد باشد. یک محقق مدعی است که موشک جدید وی در زمره موشک‌های سبک قابل استفاده است. بدین منظور ۳۵ نمونه حرکت برای داوران شبیه سازی نموده است. در این نمونه‌گیری‌ها وزن سوخت جامد قبل از حرکت و بعد از طی ۱۰۰متر مجدد اندازه‌گیری می شوند. اگر مجموع سوخت مصرفی موشک تولیدی ۵۲۸۵ گرم باشد و با انحراف معیاری برابر ۳ گرم بدست آمده باشد. در سطح ۰,۰۲ درباره درستی ادعای سازنده، چه تصمیمی خواهید گرفت.

μ: متوسط سوخت مصرفی موشک جدید در هر ۱۰ متر

$$n = 35, \quad \bar{X} = \frac{\text{۵۲۸۵}}{35 \times 10} = 15.1, \quad S = \frac{3}{10} = 0.3,$$

$$\begin{cases} H_0:\ \mu \leq 14.5 \\ H_1:\ \mu > 14.5 \end{cases}, \quad \alpha = 0.02 \Longrightarrow Z_{0.02} = 2.05.$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > Z_\alpha \right\} \Longrightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{15.1 - 14.5}{0.3/\sqrt{35}} = 11.832 > 2.05.$$

دلیلی بر پذیرش فرض صفر وجود ندارد. یعنی این موشک جدید در زمره سازه‌های سبک قرار نمی گیرد.

تکلیف: آزمون فرضیه مربوط به میانگین جامعه را در حالت‌های ۳ و ٤ بنویسید و همراه با یک مثال بارگزاری کنید.

مثال: یک مدرس کلاس فعالیت‌های صنایع دستی مدعی است که میزان درآمد ۶ماهه هر شخص شرکت کننده در این کلاس‌ها با هزینه شرکت در کلاس سر به سر می باشد. به منظور بررسی این ادعا پس از گذشت ۶ماه از کلاس‌های چرم‌دوزی از ۲٤ نفر شرکت کننده میزان درآمد آنها مورد سوال قرار گرفت. متوسط درآمد این افراد ۱۸۵۰۰۰۰ با واریانس ۵۰۰۰۰۰۰ تومان گزارش گردید. این درحالی است که هزینه شرکت در کلاس ۲,۲ میلیون تومان می باشد. آیا ادعای مطرح شده را میپذیرید؟

خلاصه نویسی: $= 24, \bar{X} = 1850000, \ \ S^2 = 5000000, \begin{cases} H_0: \mu = 2200000 \\ H_1: \mu \neq 2200000 \end{cases}$

$$\alpha = 0.05 \to t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(23) = 2.069.$$

جواب اصلی مثال: بدلیل اینکه هیچ مطلبی درباره نرمال بودن مشاهدات مطرح نشده است، روشی برای بررسی ادعا وجود ندارد.

فرض کنید، ادعای مدرس در یک وضعیت طبیعی مطرح شده و واریانس درآمدهای کارآموزان مشخص نشده است.

$$R=\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}\Rightarrow\left|\frac{1850000-2200000}{\sqrt{500000}/\sqrt{24}}\right|=2424.8$$
$$>2.069.$$

دلیلی بر پذیرش فرض صفر وجود ندارد. شواهد دلیلی بر صحت ادعای مدرس دوره ندارد.

ب) اگر اطلاعات همه کارآموزان در دسترس نباشد و مدرس مدعی باشد که بعد از ۶ماه متوسط درآمد کارآموزانش ۲۱۰۰۰۰۰ می باشد و دو نفر از کارآموزان در آمدی حدود ۱۰ میلیون داشته‌اند، درباره ادعای مطرح شده چه تصمیمی می توان گرفت.

خلاصه نویسی: $\begin{cases}H_0:\mu=2200000\\H_1:\mu\neq 2200000\end{cases}$ $n=24,\bar{X}=2000000,S^2\leq 10000000,$

$$R=\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}\Rightarrow\left|\frac{2100000-2200000}{\sqrt{10000000}/\sqrt{24}}\right|=70.6$$
$$>2.069.$$

دلیلی بر پذیرش فرض صفر وجود ندارد. شواهد دلیلی بر صحت ادعای مدرس دوره ندارد.

انجام آزمون فرض برای نسبت در جامعه (P)

❖ **تعداد نمونه زیاد باشد** ($\frac{\hat{p}-P}{\sqrt{P(1-P)/n}} \to N(0,1)$)

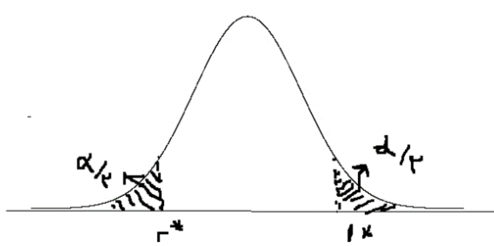
آزمون فرضیه را دو طرفه در نظر می گیریم $\begin{cases} H_0: & P = P_0 \\ H_1: & P \neq P_0 \end{cases}$

اگر بخواهیم ناحیه رد برای فرضیات فوق ایجاد کنیم می بایست مقادیر c و d را طوری بیابیم که $0 \leq c < P_0 < d \leq 1$ که

$$R = \{\hat{p} < c \quad \text{or} \quad \hat{p} > d\}$$

و در رابطه زیر صدق نمایند

$$\begin{aligned}
\alpha = P_{H_0}(R) &= P(\hat{p} < c \quad \text{or} \quad \hat{p} > d | P = P_0) \\
&= P(\hat{p} - P_0 < c - P_0 \quad \text{or} \quad \hat{p} - P_0 > d - P_0 | P = P_0) \\
&= P_{P=P_0}\Bigg(\frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} \\
&< \frac{c - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} \quad \text{or} \quad \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} > \frac{d - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}}\Bigg) \\
&\cong P(Z < c^* \quad \text{or} \ Z > d^*) = P(Z < c^*) + P(Z < d^*),
\end{aligned}$$



$\Rightarrow d^* = -c^* = Z_{\alpha/2}$

بنابراین مطالب ناحیه رد بفرم

$$R=\left\{\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}}<-Z_{\alpha/2}\quad \text{or}\quad \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}}>Z_{\alpha/2}\right\}$$
$$=\left\{\left|\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}}\right|>Z_{\alpha/2}\right\}.$$

مثال: یک مدرس مدعی است که ۹۰درصد دانش آموزانش از کیفیت تدریس وی راضی هستند. بمنظور بررسی این مطلب ۶۰ عدد از دانش آموزان وی به تصادف انتخاب و مشخص گردید ۵۰ نفر آنها رضایت کامل دارند، ۳نفر رضایت نسبی و مابقی رضایت از کیفیت تدریس مدرس ندارند. در سطح ۰.۰۶ درستی ادعای معلم را بررسی نمایید.

P: نسبت دانشجویان راضی از کیفیت تدریس مدرس

$$n=60,\qquad \alpha=0.06\Longrightarrow Z_{0.03}=1.88,$$
$$\hat{p}_1=\frac{50}{60}=0.8\bar{3},\quad \hat{p}_2=\frac{53}{60}=0.88\bar{3},\quad \begin{cases}H_0: & P=0.9\\ H_1: & P\neq 0.9\end{cases}$$

$$R=\left\{\left|\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}}\right|>Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left|\frac{\hat{p}_1-P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}}\right|=\left|\frac{0.8\bar{3}-0.9}{\sqrt{0.9(0.1)/60}}\right|=1.8074\ngtr 1.88.$$

$$\left|\frac{\hat{p}_2-P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}}\right|=\left|\frac{0.88\bar{3}-0.9}{\sqrt{0.9(0.1)/60}}\right|=0.439\ngtr 1.88.$$

در هر دو نگاه (رضایت کامل یا داشتن رضایت) دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد. این بدان معنا است که ادعای مدرس پذیرفته می شود.

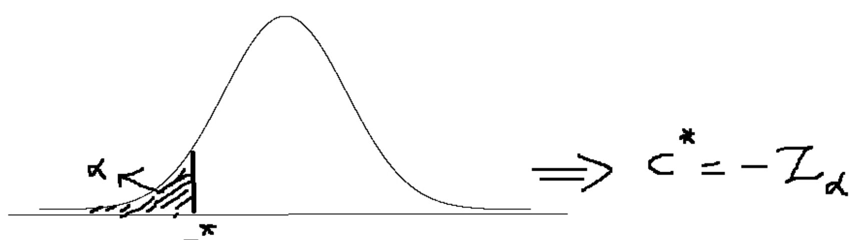
آزمون فرضیه را یکطرفه در نظر می گیریم $\begin{cases} H_0: & P \geq P_0 \\ H_1: & P < P_0 \end{cases}$

اگر بخواهیم ناحیه رد برای فرضیات فوق ایجاد کنیم می بایست مقادیر c را طوری بیابیم که $0 \leq c < P_0$ که

$$R = \{\hat{p} < c\}$$

و در رابطه زیر صدق نمایند

$$\begin{aligned} \alpha = P_{H_0}(R) &= P(\hat{p} < c | P = P_0) = P(\hat{p} - P_0 < c - P_0 | P = P_0) \\ &= P_{P=P_0}\left(\frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} < \frac{c - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}}\right) \cong P(Z < c^*), \end{aligned}$$



بنابراین مطالب ناحیه رد بفرم

$$R = \left\{\frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} < -Z_\alpha\right\}.$$

مثال: در یک محموله خریداری شده از یک شرکت معتبر ۸۰ بسته مورد ارزیابی کیفی قرار گرفت. نتایج ارزیابی نشان می دهد تنها ۱ بسته دارای کیفیت پایین بسته‌بندی است و ۶ بسته از آنها شامل محصول معیوب می باشند و ۳ عدد آنها نیز محصول فاقد علائم تجاری شرکت هستند. این موضوع با ادعای سازنده که مدعی است بیش از ۹۹درصد

بسته‌بندی‌هایش کیفیت لازم را دارند و بیش از ۹۸درصد محصولاتش فاقد عیب هستند مغایرت ایجاد می نماید یا خیر؟

۱) بررسی ادعای مطرح شده در باره کیفیت بسته‌بندی (P: نسبت بسته‌بندی‌های با کیفیت شرکت)

P: بسته بندی معیوب به معنای تغییر شکل و به هم خوردن فرم محصول تلقی شود

$$n = 80,\ \ \hat{p} = \frac{79}{80} = 0.9875,\ \ \begin{cases} H_0: & P \geq 0.99 \\ H_1: & P < 0.99 \end{cases},\quad Z_{0.05} = 1.64.$$

$$R = \left\{ \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} < -Z_\alpha \right\}$$

$$\Longrightarrow \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} = \frac{0.9875 - 0.99}{\sqrt{0.99(0.01)/80}} = -0.2247 \nless -1.64,$$

دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد. ادعای صاحب شرکت درباره بسته‌بندی پذیرفته می شود.

P: بسته بندی معیوب به معنای هرگونه تغییر در بسته بندی استاندارد در نظر گرفته می شود.

$$n = 80,\ \ \hat{p} = \frac{76}{80} = 0.95,\ \ \begin{cases} H_0: & P \geq 0.99 \\ H_1: & P < 0.99 \end{cases},\quad Z_{0.05} = 1.64.$$

$$R = \left\{ \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} < -Z_\alpha \right\}$$

$$\Longrightarrow \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} = \frac{0.95 - 0.99}{\sqrt{0.99(0.01)/80}} = -3.59 < -1.64,$$

دلیلی بر پذیرش فرض صفر وجود ندارد. ادعای صاحب شرکت درباره بسته‌بندی پذیرفته نمی شود. بنا به تحقیق می توان گفت برای ایشان تنها تغییر شکل نیافتن بسته بندی های شرکتش مهم می باشد.

بررسی ادعای مطرح شده درباره کیفیت محصول (P: نسبت محصولات با کیفیت شرکت)

$$n = 80,\ \ \hat{p} = \frac{74}{80} = 0.925,\ \ \begin{cases} H_0: & P \geq 0.98 \\ H_1: & P < 0.98 \end{cases},\quad Z_{0.05} = 1.64.$$

$$R = \left\{ \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} < -Z_\alpha \right\}$$

$$\Longrightarrow \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} = \frac{0.925 - 0.98}{\sqrt{0.98(0.02)/80}} = -3.513 < -1.64,$$

دلیلی بر پذیرش فرض صفر وجود ندارد. ادعای صاحب شرکت درباره کیفیت محصول قابل پذیرش نیست.

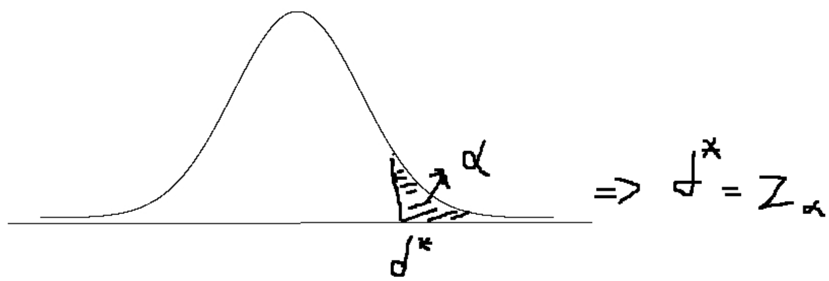
آزمون فرضیه را یکطرفه در نظر می گیریم $\begin{cases} H_0: & P \leq P_0 \\ H_1: & P > P_0 \end{cases}$

اگر بخواهیم ناحیه رد برای فرضیات فوق ایجاد کنیم می بایست مقدار d را طوری بیابیم که $P_0 < d \leq 1$

$$R = \{\hat{p} > d\}$$

و در رابطه زیر صدق نمایند

$$\alpha = P_{H_0}(R) = P(\hat{p} > d) = P(\hat{p} - P_0 > d - P_0)$$
$$= P\left(\frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} > \frac{d - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}}\right) \cong P(Z > d^*),$$



بنابراین مطالب ناحیه رد بفرم

$$R = \left\{\frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} > Z_\alpha\right\}.$$

مثال: از مجموع ۱۰۶ هواپیمای مسافربری شرکت‌های هوایی ایران روزانه ۹۰عدد آنها در خطوط هوایی کشور مشغول خدمات رسانی هستند. آیا می توان ادعای رییس سازمان هوایی کشور مبنی بر خدمات رسانی بیش از ۸۰درصد هواپیماهای موجود کشور را در سطح ۰.۰٤ پذیرفت؟

P: نسبت هواپیماهای خدمات رسانی کشور

$$n = 106, \quad \hat{p} = \frac{90}{106} = 0.849, \quad \begin{cases} H_0: & P \leq 0.8 \\ H_1: & P > 0.8 \end{cases}, \quad \alpha = 0.04 \Rightarrow Z_{0.04} = 1.75.$$

$$R = \left\{\frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} > Z_\alpha\right\} \Rightarrow \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} = \frac{0.849 - 0.8}{\sqrt{0.8(0.2)/106}}$$
$$= 1.261 \ngtr 1.75.$$

دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد. نتایج تایید اکیدی بر درستی مطالب رییس سازمان هوایی کشور ندارند.

جمع‌بندی درباره آزمون فرض‌های مرتبط با نسبت

$$\begin{cases} H_0: & P = P_0 \\ H_1: & P \neq P_0 \end{cases} \Leftrightarrow R = \left\{ \left| \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} \right| > Z_{\frac{\alpha}{2}} \right\},$$

$$\begin{cases} H_0: & P \geq P_0 \\ H_1: & P < P_0 \end{cases} \Leftrightarrow R = \left\{ \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} < -Z_{\alpha} \right\},$$

$$\begin{cases} H_0: & P \leq P_0 \\ H_1: & P > P_0 \end{cases} \Leftrightarrow R = \left\{ \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/n}} > Z_{\alpha} \right\}.$$

انجام آزمون فرض برای واریانس در جامعه (σ^2)

❖ **مشاهدات نرمال باشند** ($\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$)

آزمون فرضیه را دو طرفه در نظر می گیریم $\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$، جاییکه σ_0^2 مقداری از قبل مشخص شده می باشد.

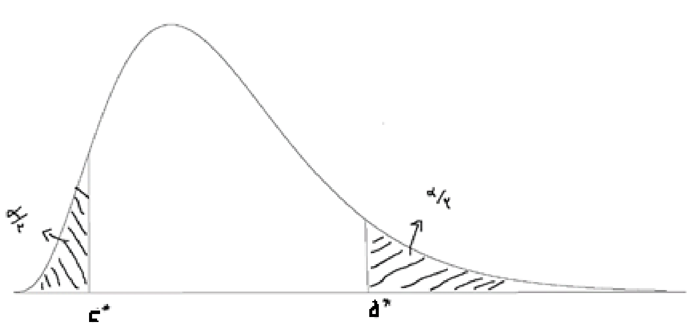
زمانی فرض صفر رد می شود که واریانس حاصل از مشاهدات (S^2) بطور معناداری با مقدار σ_0^2 تفاوت داشته باشد. بنابراین مقادیر c و d را طوری مشخص می کنیم ($0 < c < 1 < d$) که ناحیه ردی بفرم زیر ایجاد شود

$$R = \{S^2 < c\sigma_0^2 \ \text{ or } \ d\sigma_0^2 < S^2\},$$

حال می بایست مقادیر c و d در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{aligned} \alpha = P_{H_0}(R) &= P\{S^2 < c\sigma_0^2 \ \text{ or } \ d\sigma_0^2 < S^2 | \sigma^2 = \sigma_0^2\} \\ &= P_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < c(n-1) \ \text{ or } \ d(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right\} \\ &= P\{\chi^2(n-1) < c(n-1) \ \text{ or } \ d(n-1) < \chi^2(n-1)\} \\ &= P\{\chi^2(n-1) < c^* \ \text{ or } \ d^* < \chi^2(n-1)\} \\ &= P\{\chi^2(n-1) < c^*\} + P\{d^* < \chi^2(n-1)\}. \end{aligned}$$

بنابر مطالب فوق داریم



از این شکل متوجه می شویم که $d^* = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ و $c^* = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$. در نتیجه ناحیه رد بفرم

$$R = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \ \text{ or } \ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \right\},$$

خواهد شد.

مثال: در یک تحقیق مرتبط با کنترل کیفیت محصولات تولیدی یک شرکت، صاحب صنعت مدعی است که پراکندگی قابل مشاهده در دستگاه‌های آزمایش برابر ۶ واحد است. آیا در یک تولید با شرایط کنترل شده و بدون ایراد در دستگاه اندازه‌گیری و آزمایش که برحسب ۱۸ مشاهده بدست آمده می توان ادعای شخص را پذیرفت؟، زمانیکه واریانس حاصل از این نمونه برابر ۱۲.٤ شده است.

خلاصه نویسی:

$$n = 18, \quad \alpha = 0.05, \quad \chi^2_{0.025}(17) = 30.191,$$
$$\chi^2_{0.975}(17) = 7.564, \quad S^2 = 12.4, \quad \begin{cases} H_0: & \sigma^2 = 6 \\ H_1: & \sigma^2 \neq 6 \end{cases}$$

$$R = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \ \text{ or } \ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \right\}.$$

$$\Longrightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{17 \times 12.4}{6} = 35.13 > \chi^2_{0.025}(17) = 30.191.$$

دلیلی بر پذیرش فرض صفر نداریم. بنابراین نتایج نمی توان ادعای مطرح شده شخص را پذیرفت.

تکلیف: با فرض نرمال بودن مشاهدات برای آزمون فرضهای زیر ناحیه را مشخص نمایید.

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \ \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1: \ \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}.$$

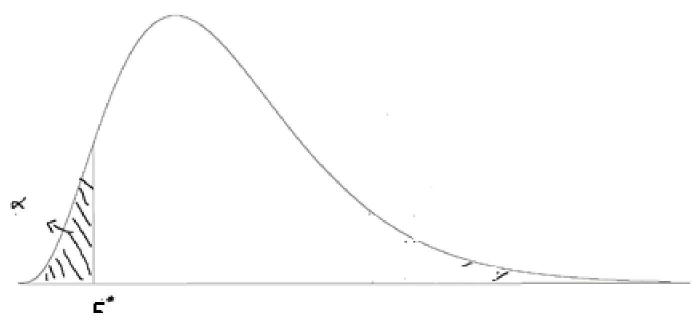
انجام آزمون فرض در مشاهدات نرمال برای فرضیه‌های $\begin{cases} H_0: \ \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: \ \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$

فرض صفر رد می شود هرگاه واریانس نمونه عددی به مراتب کوچکتر از σ_0^2 شوند، به بیان دیگر داشته باشیم $S^2 < c\sigma_0^2$ جاییکه $0 < c < 1$. بنابراین ناحیه رد بفرم

$$R = \{S^2 < c\sigma_0^2\}.$$

حال می بایست مقدار c را طور مشخص نمود که در سطح آزمون قرار گیرد، یعنی

$$\alpha = P(R|H_0) = P(S^2 < c\sigma_0^2 | \sigma^2 = \sigma_0^2) = P_{\sigma^2 = \sigma_0^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < (n-1)c\right)$$
$$= P\big(\chi^2(n-1) < c(n-1)\big) = P(\chi^2(n-1) < c^*).$$



نتیجه می گیریم $c^* = \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$. ناحیه رد کامل و بفرم زیر می باشد

$$R = \left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}.$$

خلاصه نویسی درباره آزمون فرض واریانس

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow R$$
$$= \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ or } \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \right\},$$

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow R = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}(n-1) \right\},$$

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow R = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha}(n-1) \right\}.$$

مثال: میزان پراکندگی نمک محصولات شرکت می بایست از ٤ واحد به توان دو کمتر باشد تا بتوان با اطمینان درباره زمان ماندگاری محصولات صحبت نمود. بدین منظور از واحد تولید تحت کنترل شرکت مقدار نمک ۲۳ محصول اندازه‌گیری و واریانس آن برابر با ۶.۷ بدست آمد. با توجه به این عدد، آیا می توان نسبت به خارج از تولیدشدن پراکندگی تولیدات نگران شد؟

σ^2: واریانس نمک محتوایی محصولات

$$n = 23, \quad \alpha = 0.05, \quad S^2 = 6.7, \quad \begin{cases} H_0: & \sigma^2 \leq 4 \\ H_1: & \sigma^2 > 4 \end{cases}, \quad \chi^2_{0.05}(22) = 33.926$$

$$R = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha}(n-1) \right\},$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{22 \times 6.7}{4} = 36.85 > 33.926.$$

دلیلی بر پذیرش فرض صفر وجود ندارد. با توجه به نتایج و رد فرض صفر صاحب شرکت می بایست نسبت به پراکندگی مقدار نمک در محصولاتش نگران باشد و چاره‌اندیشی نماید.

مثال: حداقل مقاومت بتن برای گرفتن استاندارد بعنوان یک بلوک دیواری ۳.٤ می باشد. بدین منظور ٤۳ دیوار بتنی از بلوک‌های جدید ایجاد نمودیم و میزان فشار لازم تا از بین رفتن دیوارها را مورد سنجش قرار دادیم. متوسط حاصل عدد ۳.٤۸ بدست آمده است. با توجه به اینکه واریانس مشاهدات ١٤ است. آیا این بلوک‌های جدید استاندارد را می توانند پاس نمایند.

$$n = 43,\quad S^2 = 14,\quad \bar{X} = 3.48,\quad \begin{cases} H_0:\ \mu \le 3.4 \\ H_1:\ \mu > 3.4 \end{cases},\qquad \alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{0.05} = 1.64.$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > Z_\alpha \right\} \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{3.48 - 3.4}{\sqrt{14/43}} = 0.14 \ngtr 1.64.$$

دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد. بنابراین نمی توان با این نتایج بطور حتم گفت مقاومت بلوک‌-های جدید استاندارد را پاس می کنند.

مثال: بمنظور اخذ مدرک تافل در بخش writing می بایست حداقل نمره یک زبان آموز ۷٤ از ۱۰۰ سوال باشد. آیا کسی که ٤۶ سوال را در امتحان آزمایشی از ۶۰ سوال پاسخ صحیح داده می تواند امیدوار به پاس شدن در بخش writing با اطمینان بالا باشد.

پاسخ: این مثال را در قالب یک آزمون فرض یکطرفه مطرح و انجام می دهیم. بدین منظور P را نسبت سوالات دارای پاسخ درست در بخش writing نظر می گیریم.

$$n = 60,\quad \hat{p} = \frac{46}{60} = 0.7\bar{6},\quad \alpha = 0.01 \Rightarrow Z_{0.01} = 2.33,\qquad \begin{cases} H_0:\ \ P \le 0.74 \\ H_1:\ \ P > 0.74 \end{cases}.$$

$$P = \left\{ \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} > Z_\alpha \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0.7\bar{6} - 0.74}{\sqrt{\frac{0.74(0.26)}{60}}} = 0.4709 \ngtr 2.33.$$

دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد. با این نتایج آزمایشی نمی توان قویا گفت این شخص می تواند در بخش نگارش موفق شود.

ب) چند سوال را اگر بدرستی پاسخ داده بود، می توانستیم قویا تایید کنیم وی قادر به پاس کردن این بخش از آزمون تافل است.

$$\frac{\hat{p}^* - 0.74}{\sqrt{\frac{0.74(0.26)}{60}}} > 2.33 \Longrightarrow \hat{p}^* > 2.33\sqrt{\frac{0.74(0.26)}{60}} + 0.74 = 0.8716$$

این بدان معنا است که شخص اگر از ۶۰ سوال بالای ۰.۸۷درصد را پاسخ می گفت قطع به یقین می گفتیم وی حتما در این بخش موفق خواهد شد. بمنظور تعیین حداقل تعداد (n^*) سوال می بایست طرفین را در ۶۰ ضرب کنیم

$$n^* > 60 \times 0.8716 = 53.$$

ج) در حالت معمول ($\alpha = 0.05$) وی چند سوال را می بایست پاسخ دهد.

$$\frac{\hat{p}^* - 0.74}{\sqrt{\frac{0.74(0.26)}{60}}} > 1.64 \Longrightarrow \hat{p}^* > 1.64\sqrt{\frac{0.74(0.26)}{60}} + 0.74 = 0.8329$$

$$\Longrightarrow n^* > 60 \times 0.8329 = 50.$$

استنباط آماری درباره اختلاف میانگین دو جامعه مستقل

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ مشاهداتی از یک جامعه با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 و $Y_1, \dots, Y_m$ مشاهداتی از جامعه دوم با میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 باشند. با فرض مستقل بودن این دو جامعه یکی از مهمترین موضوعات مدنظر انجام استنباط آماری (ایجاد فاصله اطمینان و انجام آزمون فرضیه) برای اختلاف میانگین این دو جامعه $(\mu_1 - \mu_2)$ است. بسیار پرواضح است که برآوردگر مناسب برای این تفاضل برابر است با $\bar{X} - \bar{Y}$، بنابراین در ادامه از این برآوردگر وخصوصیات تشریح شده برآن بمنظور استنباط های لازم بهره خواهیم برد. بنا به مطالب ارائه شده در فصل مربوط به توزیع نرمال و قضیه حد مرکزی، ٤ حالت برای انجام این استنباط می توان متصور بود

حالت اول: تعداد نمونه زیاد و واریانس‌ها معلوم

می دانیم بنا بر قضیه حد مرکزی وقتی تعداد نمونه در هر دوجامعه زیاد باشد، در این حالت داریم

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \to N(0,1)$$

همانند قبل بمنظور ایجاد فاصله اطمینان دوطرفه قرار می دهیم

$$L = \bar{X} - \bar{Y} - c$$

و

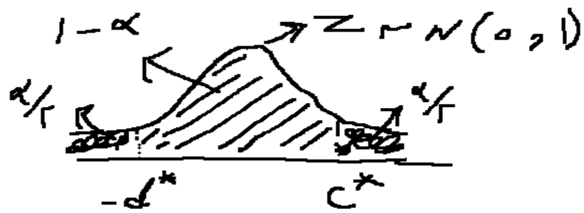
$$U = \bar{X} - \bar{Y} + d$$

که در آن c و d دو عدد مثبت حقیقی می باشند، پس

$$1 - \alpha = P\big(\mu_2 - \mu_1 \epsilon (L, U)\big) = P\big(\mu_1 - \mu_2 \epsilon (\bar{X} - \bar{Y} - c, \bar{X} - \bar{Y} + d)\big) =$$
$$P(\bar{X} - \bar{Y} - c < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + d) = P(-c < \mu_1 - \mu_2 - (\bar{X} - \bar{Y}) < d) =$$

$$P(-d < \bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2) < c) = P\left(-\frac{d}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} < \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} < \frac{c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\right) \cong P(-d^* < Z < c^*).$$

در نتیجه خواهیم داشت



$$c^* = d^* = Z_{\alpha/2}$$

می دانیم، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}$ بنابراین $c = d = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}$.

که فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی بفرم

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}, \qquad \bar{X} - \bar{Y} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right) = \bar{X} - \bar{Y} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}.$$

نتیجه می دهد.

مثال: تجربه نشان داده انحراف معیار نمرات دانشجویان در درس فیزیک عمومی دو دانشگاه متفاوت ۳.۲ و ۲.٤ می باشد. بمنظور بررسی اختلاف میانگین در درس فیزیک این دو دانشگاه، به تصادف از دیتا بیس آنها نمونه‌هایی به حجم ۵۳ و ۷۱ نفر انتخاب می نماییم. میانگین و واریانس حاصل از نمرات دانشگاه اول ۱۳.۷۸ و ۷.۸۷ نتیجه شد، در حالیکه همین اعداد برای دانشجویان دانشگاه دوم ١٤.۵۱ و ۸.٤۲ بدست آمد. برای اختلاف میانگین این دو دانشگاه در درس فیزیک عمومی فاصله اطمینانی ۹۸درصدی ایجاد نمایید.

خلاصه نویسی: لطفا به نتایج حاصل دقت کافی داشته باشید

$$n = 53, \qquad \sigma_1^2 = (3.2)^2, \qquad \bar{X} = 13.78, \qquad S_1^2 = 7.87,$$

$$m = 71, \qquad \sigma_2^2 = (2.4)^2, \qquad \bar{Y} = 14.51, \qquad S_2^2 = 8.42,$$

$$100(1-\alpha) = 98 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.01} = 2.33.$$

توجه: همیشه خاطرنشان می نمایم که هرگاه واریانس جامعه گزارش شده باشد، هرگز از واریانس نمونه بهره نمی بریم. بنابراین در این مثال واریانس جامعه معلوم فرض می شود و تعداد نمونه زیاد (یعنی حالت اول) و داریم

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, \bar{X} - \bar{Y} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

$$= \left((13.78 - 14.51) - \underbrace{2.33\sqrt{\frac{10.24}{53} + \frac{5.76}{71}}}_{1.2204}, (13.78 - 14.51) + 2.33\sqrt{\frac{10.24}{53} + \frac{5.76}{71}}\right) = (-1.9504, 0.4904).$$

تفسیر: اختلاف میانگین نمره فیزیک عمومی دانشجویان دانشگاه اول نسبت به دانشگاه دوم با اطمینان ۹۸درصد می تواند حداقل ۱.۹ کمتر یا حدود ۰.۵ بیشتر باشد.

حالت دوم: تعداد نمونه‌ها زیاد و واریانس‌ها نامعلوم

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}} \to N(0,1).$$

همانند قبل بمنظور ایجاد فاصله اطمینان دوطرفه قرار می دهیم $L=\bar{X}-\bar{Y}-c$ و $U=\bar{X}-\bar{Y}+d$ که در آن c و d دو عدد مثبت حقیقی می باشند، پس

$$1-\alpha = P\big(\mu_2-\mu_1 \epsilon (L,U)\big) = P\big(\mu_1-\mu_2 \epsilon (\bar{X}-\bar{Y}-c, \bar{X}-\bar{Y}+d)\big) =$$
$$P(\bar{X}-\bar{Y}-c<\mu_1-\mu_2<\bar{X}-\bar{Y}+d) = P(-c<\mu_1-\mu_2-(\bar{X}-\bar{Y})<d) =$$
$$P(-d<\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)<c) = P\left(-\frac{d}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}} < \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}} < \frac{c}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}}\right) \cong$$
$$P(-d^*<Z<c^*).$$

در نتیجه خواهیم داشت، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}}$ بنابراین $c=d=Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}$.

که فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی بفرم

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}, \qquad \bar{X}-\bar{Y}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}\right) = \bar{X}-\bar{Y} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}.$$

نتیجه می دهد.

مثال: موضوع مورد اهمیت برآورد اختلاف احتمالی بین قطر محصولات تولیدی توسط دو دستگاه تراشکاری می باشد. بدین منظور از دستگاه اول ۴۲ قطعه تولیدی با میانگین قطر ۱۰.٤ میلیمتر و واریانس ۰.۸ و از دستگاه دوم ۳۸ قطعه با میانگین ۱۰.۱ با واریانس ۱ حاصل شده است. یک برآورد فاصله‌ای مناسب برای اختلاف قطر این دودستگاه بدست آورید.

خلاصه نویسی:

$$n=42, \qquad \bar{X}=10.4, \quad S_1^2=0.8,$$

$$m = 38, \qquad \bar{Y} = 10.1, \quad S_2^2 = 1, \quad 100(1-\alpha) = 95 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96.$$

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}, \qquad \bar{X} - \bar{Y} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}\right)$$
$$= \left((10.4 - 10.1) - 1.96\sqrt{\frac{0.8}{42} + \frac{1}{38}}, (10.4 - 10.1)\right.$$
$$\left. - 1.96\sqrt{\frac{0.8}{42} + \frac{1}{38}}\right) = (-0.117, 0.717).$$

تفسیر: با اطمینان ۹۵درصد می توان اذعان داشت که تفاوت قطر حاصل از دستگاه اول نسبت به دستگاه دوم عددی درون بازه $(-0.117, 0.717)$ است.

حالت سوم: مشاهدات هر دو جامعه نرمال و واریانس‌ها معلوم

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

بمنظور ایجاد فاصله اطمینان دوطرفه قرار می دهیم $L = \bar{X} - \bar{Y} - c$ و $U = \bar{X} - \bar{Y} + d$ که در آن c و d دو عدد مثبت حقیقی می باشند، پس

$$1 - \alpha = P\big(\mu_2 - \mu_1 \epsilon (L, U)\big) = P\big(\mu_1 - \mu_2 \epsilon (\bar{X} - \bar{Y} - c, \bar{X} - \bar{Y} + d)\big) =$$
$$P(\bar{X} - \bar{Y} - c < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + d) = P(-c < \mu_1 - \mu_2 - (\bar{X} - \bar{Y}) < d) =$$
$$P(-d < \bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2) < c) = P\left(-\frac{d}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} < \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} < \frac{c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}\right) =$$
$$P(-d^* < Z < c^*).$$

در نتیجه خواهیم داشت، $c = d = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}$. این بدان معنا است که فاصله اطمینان دقیق $100(1-\alpha)$درصدی بفرم

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, \qquad \bar{X} - \bar{Y} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right) = \bar{X} - \bar{Y} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}.$$

نتیجه می دهد.

مثال: در نظر داریم، اختلاف میانگین وزن یک نوع کیک تولید شده توسط دو کارخانه را بررسی کنیم. روی بسته‌بندی‌های ساخته شده توسط این دو کارخانه عدد ۵ و ۷گرم برای انحراف معیار نوشته شده است. ۱۳ کیک از کارخانه اول و ۱۷ کیک از کارخانه دوم وزن شدند. مجموع وزن‌ها به ترتیب ۶۹۵.۵ و ۹۶۹ گرم بدست آمد. اختلاف میانگین وزن کیک کارخانه دوم نسبت به کارخانه اول را در سطح ۹٤درصد بدست آورید.

خلاصه نویسی: توجه کنید که اختلاف میانگین کارخانه دوم به کارخانه اول مدنظر است، بنابراین

$$n = 17, \qquad \sigma_1^2 = (7)^2 = 49, \sum_{i=1}^{17} X_i = 969, \qquad \bar{X} = 57,$$
$$m = 13, \qquad \sigma_2^2 = (5)^2 = 25,, \sum_{i=1}^{13} Y_i = 695.5, \quad \bar{Y} = 53.5,$$
$$100(1-\alpha) = 94 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.03} = 1.88.$$

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}},\qquad \bar{X}-\bar{Y}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

$$=\left((53.5-57)-\underbrace{1.88\sqrt{\frac{49}{17}+\frac{25}{13}}}_{4.366},(53.5-57)+1.88\sqrt{\frac{49}{17}+\frac{25}{13}}\right)$$

$$=(-0.866,7.866).$$

تفسیر: با اطمینان می توان گفت که میانگین کیک کارخانه دوم نسبت به کارخانه اول عددی در بازه $(-0.866,7.866)$ است.

حالت چهارم: مشاهدات هر دو جامعه نرمال و واریانس‌ها برابر و نامعلوم

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}\sim t(n+m-2).$$

همانند قبل بمنظور ایجاد فاصله اطمینان دوطرفه قرار می دهیم $L=\bar{X}-\bar{Y}-c$ و $U=\bar{X}-\bar{Y}+d$ که در آن c و d دو عدد مثبت حقیقی می باشند، پس

$$1-\alpha=P\big(\mu_2-\mu_1\epsilon(L,U)\big)=P\big(\mu_1-\mu_2\epsilon(\bar{X}-\bar{Y}-c,\bar{X}-\bar{Y}+d)\big)=$$
$$P(\bar{X}-\bar{Y}-c<\mu_1-\mu_2<\bar{X}-\bar{Y}+d)=P(-c<\mu_1-\mu_2-(\bar{X}-\bar{Y})<d)=$$
$$P(-d<\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)<c)=P\left(-\frac{d}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}<\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}<\right.$$
$$\left.\frac{c}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}\right)=P(-d^*<t(n+m-2)<c^*).$$

در نتیجه خواهیم داشت، $\frac{c}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}=\frac{d}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}=t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$ بنابراین

$$c = d = t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}.$$

که فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$درصدی بفرم

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)},\right.$$

$$\left.\bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}\right)$$

$$= \bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}.$$

جاییکه $S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{m+n-2}$ را نتیجه می دهد.

مثال: تفاوت دبی رودخانه کارون از رودخانه دز موضوع مورد اهمیتی بمنظور آبگیری سدهای مربوطه هست. بمنظور درک این تفاوت، ۱۸ روز دبی این دو رودخانه بررسی شد و میانگین حاصل از دبی دو رودخانه ٤۰۰ و ۳۷٤ لیتر بر ثانیه و واریانس حاصل از آنها ۲٤.۱ و ۱۸.٤ میباشد. برای تفاوت ممکن بین دبی این دو رودخانه فاصله اطمینانی ایجاد نمایید.

خلاصه نویسی: رفتار دبی رودخانه یک رفتار طبیعی است، بنابراین می توان توزیع نرمال را برای دبی آب این دو رودخانه تصور کرد. همچنین بدلیل اینکه هر دو در یک منطقه آب و هوایی هستند می توان تصور نمود تغییرات دبی آب این دو رودخانه مشابه هستند.

$$n = 18, \qquad \bar{X} = 400, \quad S_1^2 = 18.4,$$

$$m = 18, \qquad \bar{Y} = 374, \quad S_2^2 = 24.1,$$

$$100(1-\alpha) = 95 \Longrightarrow t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) = t_{0.025}(34) = 1.96.$$

بنابراین واریانس ادغام شده را بدست می آوریم

$$S_p^2=\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{m+n-2}=\frac{17\times 18.4+17\times 24.1}{34}=21.25$$

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)},\right.$$

$$\left.\bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}\right)$$

$$=\left((400-374)-\underbrace{1.96\sqrt{21.25\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{18}\right)}}_{3.012},(400-374)\right.$$

$$\left.-1.96\sqrt{21.25\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{18}\right)}\right)=(22.988, 29.012)$$

تفسیر: اختلاف دبی این رودخانه بین ۲۳ الی ۲۹ لیتر برثانیه می باشد.

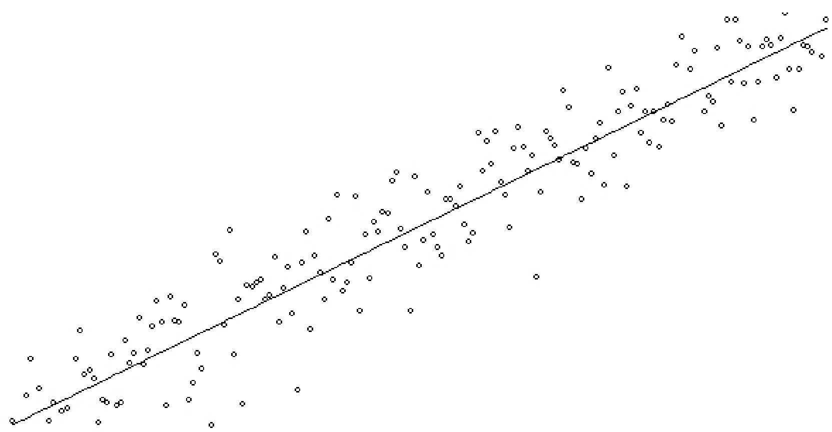
تکلیف: فاصله اطمینان‌های یکطرفه (بالایی و پایینی) مابقی حالات را مشخص نمایید.

رگرسیون

هرگاه ضریب همبستگی بین مشاهدات (X_i, Y_i) برای $i = 1, \dots, n$ مقادیر نزدیک ۱ یا ۱- نتیجه می دهند، گوییم بین این دو متغیر یک رابطه خطی معناداری وجود دارد. برآورد ضریب همبستگی بر اساس مشاهدات به فرم

$$(\hat{\rho}_{X,Y} =) r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{(n-1)\sqrt{S_X^2 \times S_Y^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{(n-1)\sqrt{S_X^2 \times S_Y^2}}.$$

اولین گام در مبحث رگرسیون رسم نمودار پراکندگی[1] مشاهدات می باشد.



نکته: هرگاه تغییرات هر دو متغییر موثر در تغییرات متغیر دیگر می توانند باشند، تنها مبحث مفید برای تعیین رابطه بین آنها استفاده از ضریب همبستگی مناسب می باشد و بمنظور درک بهتر چگونگی رابطه بین متغیرها بهتر است از رسم نمودار پراکندگی استفاده شود.

نکته مهم: زمانی بدنبال تعیین رابطه رگرسیونی بین متغیرهای مدنظر هستیم که بتوان یکی را علت (متغیر مستقل) و دیگری را معلول (متغیر وابسته یا پاسخ) دانست.

هرگاه در نمودار پراکندگی رسم شده، رابطه خطی از درجه ۱ برای مشاهدات وجود داشته باشد، بدنبال تعیین این رابطه خواهیم بود. بنابراین بصورت پیش فرض در نظر می گیریم

[1] Scatter plot

$$y_i = a + bx_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

که در آن y_i را متغیر پاسخ یا وابسته، x_i متغیر مستقل یا پیشگو یا متغیر توصیفی، a عرض از مبداء، b شیب و ϵ_i جمله خطا گویند. (هدف یافتن مقادیر دو پارامتر a و b می باشد). بطور معمول جمله خطا، ϵ_i، فرض می شود دارای میانگین صفر و واریانس مجهولی برابر σ^2 می باشد.

در یک مدل رگرسیونی مقدار a نشان دهنده متوسط مقدار مورد انتظار برای متغیر y می باشد، زمانیکه متغیر مستقل برابر صفر است. اگر به متغیر توصیفی x_i یک واحد اضاف نماییم، مقدار متغیر پاسخ به اندازه b تغییر می نماید (این همان معنا یا مفهوم این مقدار رابطه رگرسیونی است). به بیان بهتر مقدار b میزان تغییرات متغیر پاسخ به ازاءِ یک واحد تغییر در متغیر مستقل را نشان می دهد.

نکته: خطا در مدل رگرسیونی فوق برابر خواهد بود با $\epsilon_i = y_i - (a + bx_i)$

برآورد پارامترهای مدل

بمنظور برآورد این دو مقدار از روش حداقل مربعات[2] خطا استفاده می نماییم. همانطور که می دانیم تعداد خطوط قابل رسم برای این مشاهدات زیاد هستند و می بایست آنرا انتخاب نمود که ویژگی‌های بهتری داشته باشد. ملاک بهتری را مقادیر از a و b تعریف می کنیم که مجموع مربع خطای مدل حاصل بر اساس مشاهدات موجود را مینیمم نماید.

$$L(a,b) = \sum_{i=1}^{n} {\epsilon_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a + bx_i)\right)^2.$$

بمنظور پیدا کردن مقادیری از a و b بطوریکه تابع $L(a,b)$ مینیمم شود از روش مشتق‌گیری استفاده می نماییم

[2] Least Square

$$\frac{dL(a,b)}{da}=\frac{d\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(a+bx_i)\right)^2}{da}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\left(y_i-(a+bx_i)\right)^2}{da}$$
$$=-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(a+bx_i)\right)=0\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}y_i-na-b\sum_{i=1}^{n}x_i$$
$$=n\bar{y}-na-nb\bar{x}=0\Longrightarrow\bar{y}-a-b\bar{x}=0.\qquad(1)$$

$$\frac{dL(a,b)}{db}=\frac{d\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(a+bx_i)\right)^2}{db}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\left(y_i-(a+bx_i)\right)^2}{db}$$
$$=-2\sum_{i=1}^{n}x_i\left(y_i-(a+bx_i)\right)=0$$
$$\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0.\qquad(2)$$

$$(1)and\ (2)\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-(\bar{y}-b\bar{x})n\bar{x}-b\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}\right)-b\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=0$$

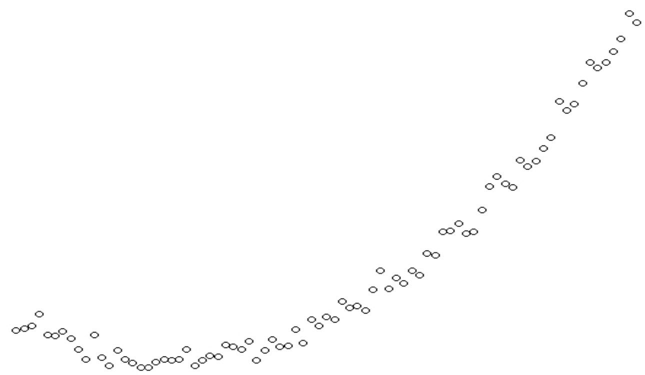
$$\Longrightarrow\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\qquad\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

به مقادیر حاصل از $\hat{a}$ و $\hat{b}$ برآوردگر حداقل مربع خطا (LSE[3]) گویند زیرا به ازای این دو مقدار تابع $L(a,b)$ کمترین مقدار خود را خواهد پذیرفت.

رگرسیون خطی درجه دوم:

در مواقعی با نمودار پراکندگی روبرو می شویم که نشان و رفتاری خطی در آن مشاهده نمی شود بلکه رفتار از درجه بیش از یک می باشد. بعنوان مثال نمودار مشاهدات بفرم زیر را در نظر بگیرید

[3] Least Square Estimator



در چنین مواقعی (بعنوان مثال) می توان مدل زیر را در نظر بگیریم

$$y_i = a + bx_i + cx_i^2 + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

در اینجا مسئله یافتن مقادیر a، b و c می باشد. در این نوع مدل‌ها پارامتر a همان معنای مدل رگرسیون خطی ساده را خواهد داشت ولی پارامترهای b و c دارای معنای مشخصی نیستند. به منظور برآورد پارامترهای مدل درجه دوم فوق از روش حداقل مربع خطا بصورت زیر بهره می بریم

$$L(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} {\epsilon_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a + bx_i + cx_i^2\right)\right)^2.$$

در اینجا بمنظور مینیمم سازی تابع $L(a,b,c)$ می بایست نسبت به این پارامترها مشتق گرفت و با صفر قراردادن مشتقات، برآوردهای (نقطه‌ای) حاصل را نسبت به این پارامترها بدست آورد.

$$\begin{aligned}
\frac{dL(a,b)}{da} &= \frac{d\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(a + bx_i + cx_i^2\right)\right)^2}{da} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\left(y_i - \left(a + bx_i + cx_i^2\right)\right)^2}{da} \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(a + bx_i + cx_i^2\right)\right) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - na - b\sum_{i=1}^{n} x_i - c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&= n\bar{y} - na - nb\bar{x} - nc\overline{x^2} = 0 \Rightarrow \bar{y} - a - b\bar{x} - c\overline{x^2} = 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\frac{dL(a,b)}{db}=\frac{d\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i+cx_i^2\right)\right)^2}{db}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\left(y_i-\left(a+bx_i+cx_i^2\right)\right)^2}{db}$$

$$=-2\sum_{i=1}^{n}x_i\left(y_i-\left(a+bx_i+cx_i^2\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i^2-c\sum_{i=1}^{n}x_i^3=0. \qquad (2)$$

$$\frac{dL(a,b)}{dc}=\frac{d\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i+cx_i^2\right)\right)^2}{dc}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\left(y_i-\left(a+bx_i+cx_i^2\right)\right)^2}{dc}$$

$$=-2\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left(y_i-\left(a+bx_i+cx_i^2\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b\sum_{i=1}^{n}x_i^3-c\sum_{i=1}^{n}x_i^4=0. \qquad (3)$$

در انتها به معادله زیر مواجه خواهیم شد

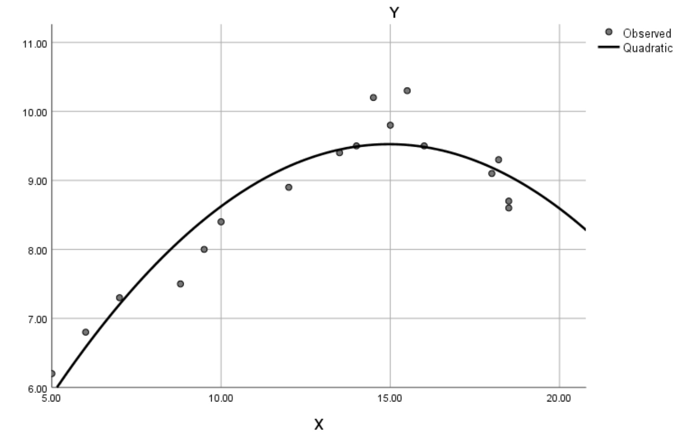
$$\begin{cases} a+b\bar{x}+c\overline{x^2}=\bar{y} \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i^3=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\,, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^4=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+b\bar{x}+c\overline{x^2}=\bar{y} \\ a\bar{x}+b\overline{x^2}+c\overline{x^3}=\overline{xy} \\ a\overline{x^2}+b\overline{x^3}+c\overline{x^4}=\overline{x^2y} \end{cases}.$$

مثال: میزان مصرف سیمان و مقاومت بتن در یک تحقیق اعداد گزارش شده زیر می باشند. در نظر داریم رابطه رگرسیونی بین این متغیرها را مشخص نماییم

شماره	۱	۲	۳	٤	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱٤	۱۵	۱۶	۱۷
مصرف	۵	۶	۷	۸.۸	۹.۵	۱۰	۱۲	۱۳.۵	۱٤	۱٤.۵	۱۵	۱۵.۵	۱۶	۱۸	۱۸.۲	۱۸.۵	۱۸.۵
مقاومت	۶.۲	۶.۸	۷.۳	۷.۵	۸	۸.٤	۸.۹	۹.٤	۹.۵	۱۰.۲	۹.۸	۱۰.۳	۹.۵	۹.۱	۹.۳	۸.۶	۸.۷

نمودار این داده‌ها با مدل برازش شده بفرم زیر است



برآورد پارامترهای حاصل بفرم زیر نتیجه خواهد شد

$$\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.323\\ 1.097\\ -0.037\end{bmatrix}.$$

نکته: همانطور که نمودار پراکندگی مشاهدات نشان می دهد رابطه بین دو متغیر میزان مصرف سیمان و مقاومت بتن خطی نیست.

نکته بسیار مهم: در حالت کلی رابطه بین دو متغیر علی و معلولی x و y لزوما خطی نیست بلکه می تواند بفرم

$$y_i = f(x_i) + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

جاییکه تابع f بطور کامل مشخص نیست. بمنظور تعیین تابع f از بسط تیلور استفاده می نماییم و می دانیم

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^p(0)}{p!}x^p + error - term.$$

که این معادله در زبان آماری (مبحث رگرسیون) به فرم

$$y = a + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_px^p + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

در ادامه منظور از رگرسیون، تنها رگرسیون خطی از نوع ساده می باشد، یعنی مدلی بفرم

$$y_i = a + bx_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

که برآوردرگرهای پارامتر آن نیز بفرم زیر بدست آمدند

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}, \qquad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

در مطالب ادامه در نظر داریم نحوه ایجاد فاصله اطمینان و انجام آزمون فرض برای دو پارامتر a و b را شرح دهیم.

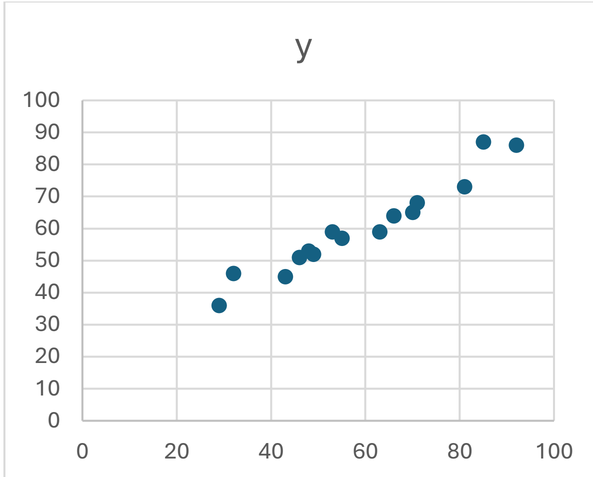
مثال: در نظر داریم رابطه بین هوش علمی با خلاقیت را بررسی نماییم. بدین منظور تعدادی نمونه را انتخاب و از همه افراد انتخاب شده هوش علمی و نمره خلاقیت را جویا می شویم. این بدان معنا است که از هر نفر یک زوج مرتب شامل نمره هوش و نمره خلاقیت خواهیم داشت. انتظار داریم نمره هوش علمی بر خلاقیت تاثیرگذار باشد این بدان معنا است که نمره هوش متغیر مستقل یا توصیفی (x_i) و نمره خلاقیت متغیر وابسته یا پاسخ (y_i) می باشد.

(فرض می نماییم ماکزیمم هر دو نمره برابر ۱۰۰ باشد)

جدول داده ها بفرم زیر می باشد.

ردیف	نمره هوش x	نمره خلاقیت y	xy	x^2	y^2
1	46	51	2346	2116	2601
2	32	46	1472	1024	2116
3	85	87	7395	7225	7569
4	92	86	7912	8464	7396
5	48	53	2544	2304	2809
6	55	57	3135	3025	3249
7	66	64	4224	4356	4096
8	43	45	1935	1849	2025
9	29	36	1044	841	1296
10	71	68	4828	5041	4624
11	63	59	3717	3969	3481
12	70	65	4550	4900	4225
13	81	73	5913	6561	5329
14	53	59	3127	2809	3481
15	49	52	2548	2401	2704
جمع	883	901	56690	56885	57001

الف: در گام اول می بایست نمودار پراکندگی این دو متغیر را رسم نمود



ب) محاسبه ضریب همبستگی بین دو متغیر.

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{(n-1)\sqrt{S_X^2S_Y^2}}=\frac{56690-15\times 58.8\bar{6}\times 60.0\bar{6}}{14\sqrt{350.4095\times 205.781}}=0.9714.$$

می دانیم

$$S_X^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}=\frac{56885-15\times(58.8\bar{6})^2}{14}=350.4095,$$

$$S_Y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2}{n-1}=\frac{57001-14\times(60.0\bar{6})^2}{14}=205.781.$$

با توجه به نمودار پراکندگی و همچنین ضریب همبستگی قابل توجه (بسیار نزدیک به ۱) بنظر بین این دو متغیر یک رابطه رگرسیون خطی ساده بفرم

$$y_i=a+bx_i+\epsilon_i,\quad i=1,\ldots,n,$$

برقرار می باشد.

ج) برآورد پارامترهای مدل را انجام دهیم. بدین منظور می بایست از فرمولهای ادامه استفاده نمود

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{56690 - 15 \times 58.8\bar{6} \times 60.0\bar{6}}{56885 - 15 \times (58.8\bar{6})^2} = 0.7448,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 60.0\bar{6} - 0.7448 \times 58.8\bar{6} = 16.223.$$

این نشان می دهد که رابطه خطی برآوردی میان هوش علمی و میزان خلاقیت بفرم

$$y = 16.223 + 0.7448x + \epsilon,$$

می باشد. از این فرمول می توان گفت شخص با بهره پایین هوش علمی (یعنی هوش علمی صفر) انتظار خلاقیت از وی وجود دارد که مقدار نزدیک 16.223 است. همچنین به ازاءِ یک واحد افزایش در میزان هوش علمی شخص انتظار داریم خلاقیت وی نزدیک ۰.۷٤٤۸ افزایش یابد.

بعنوان مثال متوسط خلاقیت شخص با نمره هوش علمی (۵۰) برابر است با

$$y_{50} = 16.223 + 0.7448 \times 50 = 53.463.$$

این بدان معنا است که شخصی با نمره هوش علمی متوسط (یعنی ۵۰) دارای خلاقیتی حول و حوش ۵۳.٤۶۳ می باشد.

روابط مفید:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i - \bar{x})}{SSX} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x_i - \bar{x})}{SSX}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} y_i (x_i - \bar{x}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x}) = SSX.$$

نکته: مقادیر $\hat{a}$ و $\hat{b}$ از نمونه‌ای به نمونه دیگر می توانند مقادیر مختلفی داشته باشند، بدین معنا که این دو برآوردگر متغیر تصادفی هستند.

ایجاد فاصله اطمینان برای پارامترهای مدل خطی ساده می باشد.به بیان دیگر میخواهیم فاصله اطمینان‌هایی $100(1-\alpha)$درصدی برای پارامتر a و b در مدل $y_i = a + bx_i + \epsilon_i$ بدست آوریم. ابتدا می بایست توزیع برآوردگرهای $\hat{a}$ و $\hat{b}$ را مشخص نماییم. بدین منظور فرض می کنیم جملات خطای مدل دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس مجهول σ^2 هستند، یعنی $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

می دانیم هر تبدیل خطی از توزیع نرمال یک توزیع نرمال را نتیجه می دهد بنابراین

$$y_i = a + bx_i + \epsilon_i \sim N(a + bx_i, \sigma^2)$$

زیرا

$$E(y_i) = E(a + bx_i + \epsilon_i) = a + bx_i + E(\epsilon_i) = a + bx_i.$$

$$var(y_i) = var(a + bx_i + \epsilon_i) = var(\epsilon_i) = \sigma^2.$$

همچنین $\hat{b} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x_i - \bar{x})}{SSX}$ نیز ترکیب خطی از y_iها می باشد با ضریب $\frac{(x_i - \bar{x})}{SSX}$. بنابراین $\hat{b}$ نیز دارای توزیع نرمال می باشد

$$\hat{b} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{SSX}\right),$$

زیرا

$$E(\hat{b}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x_i - \bar{x})}{SSX}\right) = \sum_{i=1}^{n} E(y_i) \frac{(x_i - \bar{x})}{SSX}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i) \frac{(x_i - \bar{x})}{SSX}$$
$$= a \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})}{SSX} + b \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{(x_i - \bar{x})}{SSX}$$
$$= a \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}{SSX} + b \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x})}{SSX} = b.$$

$$var(\hat{b}) = var\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x_i - \bar{x})}{SSX}\right) = \sum_{i=1}^{n} var(y_i) \frac{(x_i - \bar{x})^2}{SSX^2}$$
$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{SSX^2} = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{SSX^2} = \frac{\sigma^2}{SSX}.$$

اگر به برآوردگر $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ توجه کنیم می توان مشاهده نمود که ترکیب خطی از دو متغیر نرمال $\bar{y}$ و $\hat{b}$ می باشد. یعنی $\hat{a}$ دارای توزیع نرمال است.

$$\hat{a} \sim N\left(a, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{SSX}\right)\right),$$

زیرا

$$E(\hat{a}) = E(\bar{y} - \hat{b}\bar{x}) = E(\bar{y}) - E(\hat{b})\bar{x} = a + b\bar{x} - b\bar{x} = a,$$

$$E(\bar{y}) = \frac{E(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(y_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (a + bx_i)}{n} = a + b\bar{x}.$$

$$var(\hat{a}) = var(\bar{y} - \hat{b}\bar{x}) = var\left(\sum_{i=1}^{n} y_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 var(y_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} r_i^2$$
$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{SSX}\right).$$

جاییکه $r_i = \left(\frac{1}{n} - \frac{\bar{x}(x_i - \bar{x})}{SSX}\right)$، زیرا

$$\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{n}-\sum\nolimits_{i=1}^{n} y_i\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{SSX}=\sum\nolimits_{i=1}^{n} y_i\left(\frac{1}{n}-\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{SSX}\right),$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{SSX}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{\bar{x}^2(x_i-\bar{x})^2}{SSX^2}-2\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{nSSX}\right)$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{SSX^2}-2\frac{\bar{x}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{nSSX}=\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{SSX}.$$

بنا به پیشنهاد یکی از دوستان کوواریانس بین $\bar{y}$ و $\hat{b}$ را محاسبه می نماییم.

$$cov(\hat{b},\bar{y})=cov\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} y_i\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{SSX},\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{nSSX}cov(y_i,y_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{nSSX}var(y_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{x}(x_i-\bar{x})}{nSSX}=\sigma^2\frac{\bar{x}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{nSSX}$$
$$=0.$$