۱.۰ مجموعه‌های شمارا

واقعیت ۱: به یاد بیاورید یک مجموعه X را نامتناهی خواندیم هرگاه یک زیرمجموعه سره $Y \subsetneq X$ و یک تابع یک به یک پوشای f از X به Y وجود داشته باشد.

واقعیت ۲: همچنین آموختیم هرگاه X یک مجموعه نامتناهی و f یک تابع یک به یک پوشا از X به Y باشد، آنگاه Y نیز نامتناهی است.

از ترکیب این دو واقعیت نتیجه می شود در زیرمجموعه Y در واقعیت : ۱ نیز نامتناهی است. دوباره واقعیت : ۱ را برای Y به کار ببرید. چه نتیجه ای می توان گرفت؟

قضیه ۱.۱.۰. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی است. فرض کنید $x_\circ \in X$ یک عضو دلخواه باشد. آنگاه $X - \{x_\circ\}$ نیز یک مجموعه نامتناهی است.

توجه: با توجه به روند اثبات قضیه بالا، هر گاه X یک مجموعه نامتناهی باشد آنگاه یک زیر مجموعه $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ از آن وجود دارد که با $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک قرار می گیرد. این خاصیت مهمی است که از آن بسیار استفاده می کنیم.

به علاوه از این قضیه می توانم استفاده کنیم و تعریف جدیدی از مجموعه متناهی ارائه دهیم:

مجموعه X متناهی است اگر و فقط اگر با یک $\mathbb{N}_k$ درتناظر یک به یک قرار بگیرد یا تهی باشد.

و مجموعه X نامتناهی است اگر و فقط اگر متناهی نباشد.

مسئله ۱.۱.۰. نشان دهید صفحه $\mathbb{R}^2$ با مجموعه نقاط واقع در مربع $(\circ, 1) \times (\circ, 1)$ در تناظر یک به یک قرار می گیرند. یعنی این دومجموعه هم توان هستند. به همین ترتیب نشان دهید فضای $\mathbb{R}^3$ با مکعب $(\circ, 1) \times (\circ, 1) \times (\circ, 1)$ هم توان هستند. می توانید حالت کلی تر این حکم را بنویسید؟

تعریف ۱.۱.۰. مجموعه X شمارای نامتناهی نامیده می شود هرگاه $X \sim \mathbb{N}$. مجموعه شمارا مجموعه ای است که یا متناهی باشد یا نامتناهی.

مسئله ۲.۱.۰.

۱. نشان دهید مجموعه جواب های معادله $\cos(x) = \circ$ شماراست. همین سوال را برای مجموعه جواب های معادلات $\sin(x) = \circ$، $\tan(x) = \circ$ و $\cot(x) = \circ$ پاسخ دهید.

۲. نشان دهید مجموعه جواب های معادله $\sinh(x) = \circ$ یک مجموعه شماراست. فقط تعیین کنید شمارای متناهی است یا نامتناهی. بنابر قضیه ؟؟، هرمجموعه متناهی شماراست.

۳. آیا مجموعه $\mathbb{R}$ یک مجموعه شماراست؟ مجموعه $\mathbb{C}$ چطور؟

مسئله ۰.۱.۳. نشان دهید $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ با $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ همتوان هستند. همچنین با فرض $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}\}$ نشان دهید تابع $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}$ که به صورت $f(a,b)=\frac{a}{b}$ تعریف می شود تابعی پوشا است. آیا این تابع یک به یک است؟

به خاطر بیاورید که اگر $g:X\longrightarrow Y$ یک تابع پوشا باشد آنگاه رابطه «$xRy \Longleftrightarrow g(x)=g(y)$» یک رابطه هم ارزی روی X است و X را به رده های هم ارزی $X=\bigcup_{x\in X}[x]$، که $[x]=\{y\in X\mid g(x)=g(y)\}$، افراز می کند. به نظر شما از این خاصیت می توان استفاده کرد و نشان داد $\mathbb{Q}$ مجموعه ای شمارش پذیر است؟

قضیه ۰.۱.۲. هرزیر مجموعه نامتناهی از یک مجموعه شمارای نامتناهی شمارای نامتناهی است.

اثبات. چون X یک مجموعه شمارای نامتنهای است پس بنابرتعریف با $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک قرار می گیرد. یعنی $f:\mathbb{N}\longrightarrow X$ تابعی دوسویی است. قرار می دهیم $f(n)=x_n$. حال فرض کنیم Y یک زیرمجموعه نامتناهی X باشد. یعنی بنابرقضیه‌ای که قبلا آموختیم ، Y با هیچ مجموعه $\mathbb{N}_k$ درتناظر یک به یک قرار نمی گیرد.

۱. فرض کنیم n_1 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_1}\in Y$.

۲. فرض کنید n_2 کوچکترین اندیسی باشد که x_{n_2} در $Y-\{x_{n_1}\}$ است.

۳. فرض کنید n_3 کوچکترین اندیسی باشد که x_{n_3} در $Y-\{x_{n_1},x_{n_2}\}$ است.

۴. فرض کنیم $x_{n_{k-1}}\in Y$ را به روش فوق تعریف کرده ایم.

۵. آنگاه n_k را کوچکترین اندیسی می گیریم که $x_{n_k}\in Y-\{x_{n_1},\dots,x_{n_{k-1}}\}$.

۶. چون Y نامتناهی است، برای هر k، مجموعه $Y-\{x_{n_1},\dots,x_{n_k}\}$ مجموعه ای نامتناهی است. پس برای هر $k\in\mathbb{N}$ یک x_{n_k} وجود دارد.

۷. به این ترتیب یک تناظر یک به یک بین Y و $\mathbb{N}$ به صورت $f(k)=x_{n_k}$، برای هر $k\in\mathbb{N}$ برقرار کرده ایم. پس بنابرتعریف Y شمارای نامتناهی است.

□

مسئله ۰.۱.۴. نشان دهید هر دنباله در $\mathbb{R}$ یک مجموعه شماراست (متناهی یا نامتناهی).

مسئله ۰.۱.۵. نشان دهید مجموعه اعداد اول یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

مسئله ۰.۱.۶. نشان دهید مجموعه اعداد مرکب شمارای نامتناهی است.
آیا می توانید زیر مجموعه های شمارای نامتناهی دیگری مثال بزنید؟

نتیجه ۰.۱.۱. هر زیرمجموعه یک مجموعه شمارا، شماراست.

بر طبق قاعده ای که در پیش گرفته ایم، سعی می کنیم خواص اشیایی که معرفی کرده ایم شناسایی و درستی آنها را نشان دهیم. این خاصیت ها در رابط با اجتماع، اشتراک و حاصل ضرب دکارتی مجموعه ها مطرح می شوند.

۲.۰ ویژگی های مجموعه های شمارای نامتناهی

قضیه ۱.۲.۰. اجتماع دومجموعه شمارای نامتناهی یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

اثبات. فرض کنیم این دومجموعه A و B باشند. می خواهیم نشان دهیم $A \cup B$ شمارای نامتناهی است. **حالت اول:** فرض کنیم $A \cap B = \emptyset$. چون بنابرفرض $A \sim \mathbb{N}$ و $N \sim \mathbb{N}_e$، که $\mathbb{N}_e$ مجموعه اعداد زوج است، پس $A \sim \mathbb{N}_e$. به همین ترتیب $B \sim \mathbb{N}$ و چون $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_o$، که $\mathbb{N}_o$ مجموعه اعداد فرد است، پس $B \sim \mathbb{N}_o$. پس بنابر قضیه **؟؟**، $A \cup B \sim \mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o = \mathbb{N}$.

:حالت دوم فرض کنیم $A \cap B \neq \emptyset$. آنگاه می نویسیم $C = B - A$. به علاوه $A \cap C = \emptyset$. از طرف دیگر بنابر نحوه تعریف C، $A \cup C = A \cup B$. چون $C \subset B$ و B شمارش پذیر است پس C نیز شمارش پذیر خواهد بود. اگر C متناهی باشد آنگاه $A \cup C$ نیز شمارش پذیر نامتناهی خواهد بود. و اگر C نامتناهی باشد بنابرقضیه **؟؟** ، $A \cup C$ و در نتیجه $A \cup B$ شمارای نامتناهی خواهد بود. □

با استقرا می توان نشان داد:

نتیجه ۱.۲.۰. فرض کنیم $A_1, \dots, A_n$ مجموعه های شمارای نامتناهی باشند. آنگاه $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ نیز شمارای نامتناهی خواهد بود.

مثال ۱.۲.۰. ۱. مجموعه $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$ یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

۲. مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = \alpha\}$ یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

۳. آیا شما هم می توانید مثالی به این لیست اضافه کنید؟

قضیه ۲.۲.۰. مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است.

اثبات. تابع $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که به صورت

$$f(j, k) = 2^i 3^k, \quad \forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

تعریف شده است تابعی یک به یک است. بنابراین

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$$

چون $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نامتناهی است، $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ نیز نامتناهی است. پس بنابرقضیه ۱.۲.۰، $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ شمارای نامتناهی است و از این رو مجموعه $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نیز شمارای نامتناهی است. $\square$

تبصره ۱.۲.۰. ۱. در استدلال بالا، به جای ۲,۳ هر دو عدد طبیعی متمایز و متفاوت دیگر هم می توان قرار داد. مثلا دو عدد اول متمایز p, q. یعنی $f_{p,q}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$، که به صورت $f_{p,q}(j,k)=p^jq^k$ تعریف می شود نیز استدلال معتبر است.

سوال ۱.۲.۰. آیا مجموعه $\{f_{p,q}\mid f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}, f_{p,q}(j,k)=p^jq^k,$ اعدادی‌متمایزاند$p,q\}$ یک مجموعه شمارای نامتناهی است؟

۲. توجه کنید نگاشت $u:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ که با $u(n)=(n,1)$ تعریف می شود یک نگاشت یک به یک است. نگاشت $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ هم یک نگاشت یک به یک است.

پس به طور خلاصه یک نگاشت یک به یک از $\mathbb{N}$ در $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ تعریف کردیم و همچنین یک نگاشت یک به یک از $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ در $\mathbb{N}$ تعریف کردیم. سوالی که پیش می آید این است که می توان یک نگاشت یک به یک پوشا از $\mathbb{N}$ در $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ تعریف کرد؟

دو پاسخ یکسان ولی دلایل مختلف برای این سوال می توان ارائه کرد. یکی با قضایایی که تا کنون آموخته ایم و دیگری با قضایایی که در فصل بعد خواهیم آموخت.

نتیجه ۲.۲.۰. برای هر $k\in\mathbb{N}$ فرض کنیم A_k یک مجموعه شمارای نامتناهی است که برای تمام $j\neq k$، در شرط $A_j\cap A_k=\emptyset$ صدق می کند. آنگاه $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$ نیز شمارای نامتناهی است.

اثبات. برای هر $k\in\mathbb{N}$، تابع $f_k:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\times\{k\}$ را که با $f_k(j)=(j,k)$ برای هر $j\in\mathbb{N}$، تعریف شده را درنظر می گیریم. این تابع یک به یک و پوشاست. بنابراین $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\{k\}$. چون برای هر $k\in\mathbb{N}$، $A_k\sim\mathbb{N}$، و $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\{k\}$، پس بنابر خاصیت تعدی رابطه هم توان بودن برای هر $k\in\mathbb{N}$ داریم $A_k\sim\mathbb{N}\times\{k\}$. از طرف دیگر به کمک یکی از مسایلی که در بالا ثابت کردیم نتیجه می شود که $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k\sim\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}\times\{k\}$. اما $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}\times\{k\}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$، که در بالا نشان دادیم مجموعه ای شمارش پذیر و نامتناهی است. بنابراین $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$ نیز شمارای نامتناهی است. $\square$

استدلال دیگری برای نتیجه بالا می توان ارائه کرد.

(اولاً) آموختیم هر دنباله در $\mathbb{R}$ یک مجموعه شماراست. به خصوص برای هر عدد طبیعی $a\geq 2$، مجموعه $X_a=\{a^n\mid n\in\mathbb{N}\}$ به کمک تابع $f_a:\mathbb{N}\longrightarrow X_a$، که به صورت $f_a(n)=a^n$ تعریف می شود و تابعی یک به یک پوشا از $\mathbb{N}$ در X_a است (شما هم سعی کنید درستی این ادعا را ثابت کنید) یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

(ثانیاً) همچنین آموختیم مجموعه اعداد اول یک مجموعه شمارای نامتناهی است. فرض کنیم این اعداد را در مجموعه $P = \{p_m \mid m \in \mathbb{N}, p_m \text{یک عدد اول است}\}$ گرد آورده ایم. همچنین می توانیم فرض کنیم $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$.
پس بنابر قسمت اولاً، برای هر $m \in \mathbb{N}$، مجموعه های X_{p_m} مجموعه های شمارای نامتناهی اند.

(ثالثاً) بعد از این یادآوری این دو واقعیت حکم را به صورت زیر به اثبات می رسانیم.

۱. بنابرفرض، برای هر $m \in \mathbb{N}$، $A_m \sim \mathbb{N}$. فرض کنیم $f_m : A_m \longrightarrow \mathbb{N}$ تابعی باشد که این همتوانی را برقرار می سازد. $f_m(x) = r$.

۲. همچنین $X_{p_m} \sim \mathbb{N}$. فرض کنیم $g_m : \mathbb{N} \longrightarrow X_m$ تابعی باشد که این هم توانی را برقرار می سازد. به طور مشخص برای هر r، $g_m(r) = p_m^r$.

۳. ترکیب دوتابع $A_m \xrightarrow{f_m} \mathbb{N} \xrightarrow{g_m} X_m$ را با $h_m = g_m \circ f_m$ نمایش می دهیم. به طور مشخص $h_m(x) = g_m(f_m(x)) = g(r) = p_m^r$.

۴. می دانیم ترکیب دوتابع یک به یک پوشا، تابعی یک به یک پوشاست. بنابراین تابع h_m یک به یک پوشا یا به طور معادل دوسویی است.

۵. حال مجموعه $A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ همچنین مجموعه $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_{p_m}$ را درنظر می گیریم. برای هر $x \in A$، یک و تنها یک $m_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $x \in A_{m_0}$ (زیرا مجموعه های A_m دو به دو از هم جدایند.) قرار می دهیم $h(x) = h_{m_0}(x)$.

۶. با توجه به تعریف h به کمک تابع های h_m، که تابعهایی دوسویی اند، نتیجه می شود h هم تابعی دو سویی است.

۷. اما

$$X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_m = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{p_m^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{p_m^n \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$$

۸. به این ترتیب $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ با یک زیر مجموعه نامتناهی از $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک قرار می گیرد. بنابراین یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

به اعضای مجموعه X توجه کنید. علیرغم این که در مقایسه با هر یک از X_m ها عضوهای بیشتری دارد، با این حال اعضایی از $\mathbb{N}$ وجود دارند که در این مجموعه نیستند.

مثال ۲.۲.۰. مجموعه $\mathbb{Q}$، یعنی مجموعه تمام اعداد گویا شمارای نامتناهی است.

حل. بنابر تعریف $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \; 1 = (m,n)\text{.ب.م.م}\}$. فرض $(m,n) = 1$ ایجاب می کند هر عدد

گویا را به صورتی یکتا می توانیم نشان دهیم ($\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ دو نمایش برای $\frac{1}{2}$ است اما در نمایش $\frac{2}{4}$ صورت و مخرج نسبت به هم اول نیستند). فرض کنیم $\mathbb{Q}_{>0}$ مجموعه اعداد گویای مثبت باشد. آنگاه $\mathbb{Q}_{<0}$ مجموعه اعداد گویای منفی خواهد بود و $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}_{>0}\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}_{<0}$ بنابراین اگر ثابت کنیم $\mathbb{Q}_{>0}$ شمارای نامتناهی است، $\mathbb{Q}_{<0}$ هم که همتوان با $\mathbb{Q}_{>0}$ است نیز شمارا خواهد بود و در نتیجه $\mathbb{Q}$ شمارا خواهد بود.

حال تابع $f:\mathbb{Q}_{>0}\longrightarrow\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ که با ضابطه $f(m/n)=(m,n)$ تعریف می شود را در نظر می گیریم. این تابع یک به یک است. زیرا اگر $f(m/n)=(m,n)=f(m'/n')=(m',n')$ آنگاه $m=m'$ و $n=n'$. بنابراین $\mathbb{Q}_{>0}$ با یک زیر مجموعه $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک قرار می گیرد. چون $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}_{>0}$ پس $\mathbb{Q}_{>0}$ یک مجموعه شمارای نامتناهی خواهد بود.

□

واقعیت بعدی بیان می کند که $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعه شمارای نامتناهی است

قضیه ۳.۲.۰. هر مجموعه نامتناهی شامل یک زیر مجموعه شمارای نامتناهی است.

اثبات. با نحوه استدلالی که برای اثبات این قضیه می آوریم قبلاً آشنا شده اید. توجه کنید در این قضیه صحبتی از شمارا بودن یا شمارا نبودن X نشده است. بلکه فقط فرض شده که نامتناهی است.

فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی است. چون X نامتناهی است پس $X\neq\emptyset$. پس می توانیم یک عنصر x_1 از مجموعه X انتخاب نماییم. چون X نامتناهی است پی $X-x_1$ نامتناهی و در نتیجه ناتهی است. پس یک عنصر $x_2\in X-x_1$ را می توانیم انتخاب نماییم. چون $X-\{x_1,x_2\}$ نامتناهی است پس بنابر قضیه ۱.۱.۰ ، $X-\{x_1,x_2\}$ نامتناهی است و یک عنصر $x_3\in X-\{x_1,x_2\}$ از آن می توانیم انتخاب کنیم. به استقرا فرض کنیم x_{k-1} را از $X_{\{x_1,\ldots,x_{k-2}\}}$ انتخاب کرده ایم. چون $X-\{x_1,\ldots,x_{k-2}\}$ نامتناهی است پس $X-\{x_1,\ldots,x_{k-2},x_{k-1}\}$ نیز نامتناهی است. پس بنابر ۱.۱.۰ یک نقطه x_k از این مجموعه می توانیم انتخاب کنیم. بنابراین، طبق اصل استقرای ریاضی، می توانیم برای هر $k\in\mathbb{N}$، یک نقطه از $X-\{x_1,\ldots,x_{k-1}\}$ انتخاب کنیم. مجموعه انتخاب شده را با Y نمایش می دهیم. بنابر نحوه انتخاب، عناصر Y متمایزند. همچنین بنابر نحوه انتخاب عناصر Y شمارای نامتناهی است. □

۳.۰ مجموعه های ناشمارا

می دانیم هر عضو بازه $(0,1)$ را در پایه دهدهی (اعشاری) می توان به صورت $0.x_1x_2x_3\ldots$، که برای هر $n\in\mathbb{N}$، x_n یک از ارقام صفر تا ۹ است نوشت. مثلا $\frac{1}{7}=0/142857142857\ldots$ یا $\frac{1}{11}=0/090909\ldots$ نوشت.

برخی اعداد مانند $۰/۲۵ = \frac{۱}{۴}$ یا $۰/۱۲۵ = \frac{۱}{۸}$ در مرحله ای بعد از اعشار خاتمه می یابد.
برای اینکه بتوانیم نمایش یکتایی از اعداد اعشاری نامتناهی داشته باشیم، می توان اعدادی که بسط اعشاری شان متناهی می شود را به این صورت بنویسیم که بسط اعشاری عدد تا یکی مانده با آخرین رقم را بنویسیم و از آخرین رقم یکی کم کنیم و آن را بنویسیم و رقم های بعد از آن را ۹ بنویسیم. به عنوان مثال ۰/۳۵ را می توان با $۰/۳۴۹۹۹۹\ldots$ جایگزین کرد.

مشاهده

(۱) می دانیم

$$\begin{aligned} ۰/۹۹۹۹۹\ldots &= \frac{۹}{۱۰} + \frac{۹}{۱۰^۲} + \frac{۹}{۱۰^۳} + \cdots = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۹}{۱۰^n} \\ &= \frac{۹}{۱۰} \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۱۰^n} = \frac{۹}{۱۰} \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{۱-(\frac{۱}{۱۰})^n}{۱-\frac{۱}{۱۰}} = \frac{۹}{۱۰}\frac{۱}{\frac{۹}{۱۰}} = ۱. \end{aligned}$$

(۲) فرض کنیم بسط اعشاری x نامتناهی نباشد. یعنی $x = ۰.x_۱x_۲\ldots x_n$ $(x_n \neq ۰)$. می توانیم x_n را با رقمی به صورت $y+۱$ جایگزین کنیم. آنگاه

$$\begin{aligned} ۰.x_۱x_۲\ldots x_n &= \frac{۱}{۱۰^n}(x_۱x_۲\ldots x_{n-۱}x_n) \\ &= \frac{۱}{۱۰^n}(x_۱x_۲\ldots x_{n-۱}y+۱) \\ &= \frac{۱}{۱۰^n}(x_۱x_۲\ldots x_{n-۱}y+۰/۹۹۹\ldots) \\ &= ۰.x_۱x_۲\ldots x_{n-۱}y + \frac{۱}{۱۰^n}(۰/۹۹۹\ldots) \\ &= ۰.x_۱x_۲\ldots x_{n-۱}y + ۰.\underbrace{۰۰\ldots۰}_{n}۹۹۹\ldots \\ &= ۰.x_۱x_۲\ldots x_{n-۱}y۹۹۹\ldots, \end{aligned}$$

که $y = x_n - ۱$.

با یک محاسبه ساده می توانید ببینید حد این عدد همان عدد قبلی خواهد بود و چون حد دنباله های همگرا در $\mathbb{R}$ یکتاست، پس این تغییر، اثری بروی نمایش اعداد این بازه نمی گذارد و می توانیم همه را به صورت بسط اعشاری نامتناهی نمایش دهیم.

دوبسط اعشاری نامتناهی $۰.x_۱x_۲x_۳\ldots$ و $۰.y_۱y_۲y_۳\ldots$ را یکی می گیریم هرگاه به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $x_i = y_i$.
این دو بسط اعشاری متفاوت می نامیم هرگاه یک $i_۰$ وجود داشته باشد به طوری که $x_{i)۰} \neq y_{i_۰}$.

قضیه ۱.۳.۰ فاصله یکه باز $(\circ,۱) = \{x \in \mathbb{R} \mid \circ < x < ۱\}$ یک مجموعه ناشماراست.

اثبات. به‌خلاف فرض‌کنیم $(\circ,۱)$ یک‌مجموعه شماراست. بنابر تعریف یک تابع یک‌به‌یک پوشای $f:\mathbb{N} \longrightarrow (\circ,۱)$ وجود دارد. فرض کنید عناصر $(\circ,۱)$ را به صورت زیر مرتب کرده ایم.

$$f(۱) = \circ.a_{۱۱}a_{۱۲}a_{۱۳}a_{۱۴}a_{۱۵}\dots$$

$$f(۲) = \circ.a_{۲۱}a_{۲۲}a_{۲۳}a_{۲۴}a_{۲۵}\dots$$

$$f(۳) = \circ.a_{۳۱}a_{۳۲}a_{۳۳}a_{۳۴}a_{۳۵}\dots$$

$$f(۴) = \circ.a_{۴۱}a_{۴۲}a_{۴۳}a_{۴۴}a_{۴۵}\dots$$

$$\vdots$$

$$f(n) = \circ.a_{n۱}a_{n۲}\dots a_{n\ n-۱}a_{nn}a_{n\ n+۱}a_{n\ n+۲}\dots$$

$$\vdots$$

در این جا هر یک از a_{ij} ها یکی از ارقام $\{\circ,۱,\dots,۹\}$ است.

حال یک عدد اعشاری $b \in (\circ,۱)$ می سازیم که در لیست فوق قرار ندارد. یعنی با هیچ یک از $f(n)$ ها برابر نیست.

عدد $b = \circ.b_۱b_۲b_۳\dots$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار می دهیم $b_n = \begin{cases} ۳ & \text{اگر } a_{nn} \neq ۳ \\ ۷ & \text{اگر } a_{nn} = ۳ \end{cases}$.

عدد b برابر هیچ یک از اعداد $f(n)$ نمایش داده شده در بالا نیست. زیرا اولاً $\circ < b < ۱$، ثانیاً $b \neq f(۱)$ زیرا بنابرنحوه تعریف $b_۱$، $b_۱ \neq a_{۱۱}$. $b \neq f(۲)$ زیرا بنابرنحوه تعریف $b_۲$، $b_۲ \neq a_{۲۲}$. $b \neq f(۳)$ زیرا بنابرنحوه تعریف $b_۳$، $b_۳ \neq a_{۳۳}$ و همین طور در حالت کلی برای هر $n \in \mathbb{N}$، $b \neq f(n)$ زیرا بنابر نحوه تعریف b_n، $b_n \neq a_{nn}$. بنابراین $b \notin f(\mathbb{N})$. به این ترتیب عنصری در $(\circ,۱)$ پیدا کردیم که در $f(\mathbb{N})$ نیست. یعنی نگاشت f پوشا نیست. این متناقض با فرض است. به این ترتیب فرض شمارا بودن$(\circ,۱)$ به تناقض انجامید. پس $(\circ,۱)$ ناشماراست. $\square$

توجه داشته باشید که انتخاب ۳ و ۷ در بالا اختیاری است و هر رقم دیگری که بتواند تفاوت ایجاد کند را می توان انتخاب کرد.

استدلال بالا منسوب به جرج کانتور، بنیان گذار نظریه مجموعه هاست. با توجه به نحوه انتخاب ارقام b، این استدلال به روش قطری کانتور موسوم است.

مثال ۱.۳.۰. برای تشریح نحوه انتخاب b مثال زیر را در نظر بگیرید

$$
\begin{aligned}
f(۱) &= ۰.۱۲۳۱۲۳۴۵\ldots \\
f(۲) &= ۰/۴۲۳۵۶۹۳۴\ldots \\
f(۳) &= ۰/۷۸۴۳۸۹۲۳\ldots \\
f(۴) &= ۰/۳۷۴۸۳۴۹۸\ldots \\
f(۵) &= ۰/۳۵۷۹۳۸۷۵\ldots \\
f(۶) &= ۰/۹۲۷۵۴۳۴۳۸۲\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

بنابر نحوه انتخاب ارقام b از جدول فوق عدد b به صورت $b = ۰/۳۳۳۳۷۷\ldots$ خواهد بود.

نتیجه ۱.۳.۰. $\mathbb{R}$ یک مجموعه ناشماراست.

اثبات. چون $(۰,۱)$ با $\mathbb{R}$ هم توان است، پس $\mathbb{R}$ نیز ناشماراست. $\square$

مثال های زیر، مثالهایی آشنا از مجموعه های ناشماراست.

مثال ۲.۳.۰. مجموعه اعداد گنگ ناشماراست.

حل. ملاحظه کردیم که مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$ یک مجموعه شماراست. مجموعه اعداد گنگ $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ نامتناهی است زیرا شامل مجموعه $\{n\sqrt{۲} \mid n \in \mathbb{N}\}$ است. حال اگر مجموعه $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ شمارا باشد، آنگاه $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ که اجتماع دو مجموعه شماراست، نیز شمارا خواهد بود. اما $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}-\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. پس $\mathbb{R}$ هم باید شمارا باشد، که این با نتیجه فوق در تناقض است. $\square$

به یاد بیاورید یک عدد $a \in \mathbb{R}$ را متعالی می نامیم هرگاه در هیچ معادله چندجمله ای با ضرایب در $\mathbb{Z}$، صدق نکند. به عنوان مثال π یک عدد متعالی است. یا e^a، برای هر $a \in \mathbb{R}-\{۰\}$ یک عدد متعالی است.

مثال ۳.۳.۰. مجموعه اعداد متعالی ناشماراست.

حل. به آسانی می توان نشان داد مجموعه جواب های تمام چندجمله ای ها با ضرایب در $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{C}$ یک مجموعه شماراست. این مجموعه را با A نمایش می دهیم. هر عضو $\mathbb{R}-A$، در هیچ چندجمله ای با ضرایب صحیح صدق نمی کند. بنابراین اعضای مجموعه $\mathbb{R}-A$ اعداد متعالی هستند. حال اگر $\mathbb{R}-A$ شمارا باشد، آنگاه مجموعه $A \cup \mathbb{R}-A = \mathbb{R}$ نیز شمارا خواهد بود که این تناقض است. $\square$

می دانیم هر زیر مجموعه یک مجموعه شمارای نامتناهی شماراست. عکس نقیض این حکم می شود اگر یک زیر مجموعه Y از مجموعه X ناشمارا باشد آنگاه X نیز ناشماراست. از این ویژگی استفاده می کنیم و نشان می دهیم.

مثال ۴.۳.۰. مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ یک مجموعه ناشماراست.

حل. در واقع، به لحاظ مجموعه ای $\mathbb{C} = \mathbb{R}^۲$. چون $\mathbb{C} \supset \{۰\} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$، و چون $\mathbb{R}$ ناشماراست، پس $\mathbb{C}$ نیز ناشمارا خواهد بود.

□