۱

تابع

مفهوم تابع یکی از اساسی ترین مفاهیم هر شاخه ریاضی است. زیرا به کمک آن می توان خواص یک مجموعه را از وری مجموعه دیگر به دست آورد. در واقع تابع **یک قاعده** تناظر است که به هر عنصر x از یک مجموعه (که حوزه تابع نامیده می شود) یک و فقط یک عنصر y از یک مجموعه دیگری (که برد تابع نامیده می شود) نظیر می کند. این تعریف روشن نیست. زیرا منظور از یک «قاعده» دقیقاً معلوم نیست. برای اجتناب از هرگونه ابهامی، با استفاده از زبان مجموعه ها تعریفی دقیق تر برای تابع ارائه می گردد.

تعریف ۱. X و Y را دومجموعه می گیریم. یک تابع از X به Y یک سه گانه (f, X, Y) است که در « f رابطه ای از X به Y است که در شرط های زیر صدق می کند:

(الف) $Dom(f) = X$.

(ب) اگر $(x, y) \in f$ و $(x, z) \in f$ آنگاه $y = z$.

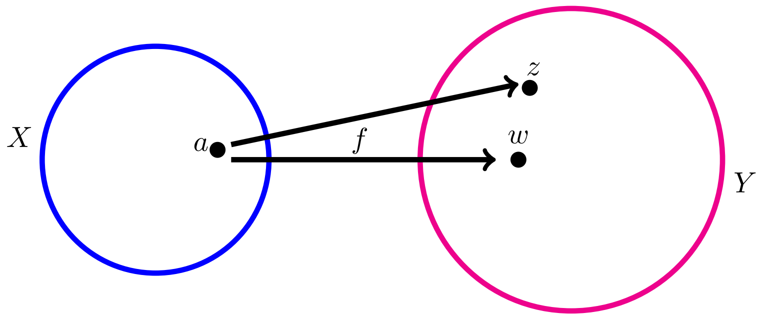
مثال ۲. فرض کنیم $X = \{a, b, c\}$ و $Y = \{z, w\}$.

۱. در این صورت، بنابرتعریف، رابطه $R = \{(a, w,), (b, w), (c, z)\}$ یک تابع از X در Y است.

۲. رابطه $R_1 = \{(a, w), (a, z), (b, z), (c, w)\}$ یک تابع از X در Y نیست زیرا $(a, w), (a, z)$ هر دو در R_1 قرار می گیرند و شرط *(ب)* تعریف نقض می شود.

۳. رابطه $R_2 = \{(a, w)\}$ یک تابع از X به Y نیست زیرا $Dom(R_2) = \{a\} \subsetneq \{a, b, c\}$

۴. رابطه $R_2 = \{(a, w), (a, z)\}$ یک تابع از X به Y نیست زیرا عنصر a به دو عنصر متمایز z و w نظیر شده است.

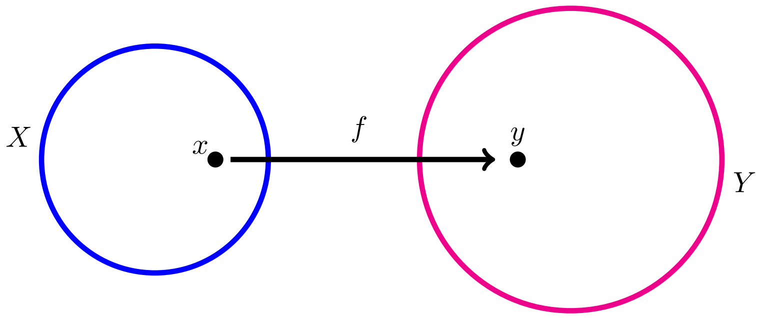


فرض کنیم (f,X,Y) تابعی از X به Y باشد. چون تابع مفهوم بسیار پر استفاده است، از این به بعد، به جای سه‌گانه (f,X,Y) از نماد $f:X\longrightarrow Y$ استفاده می‌کنیم و به جای $(x,y)\in f$ از نماد $y=f(x)$ استفاده می‌کنیم.

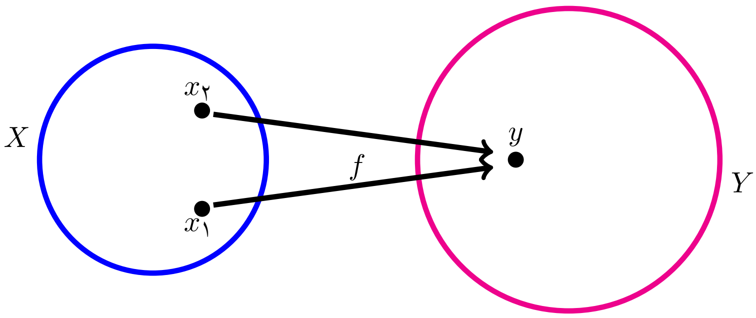
دلیل اینکه از «$y=f(x)$» به جای $(x,y)\in f$ استفاده می‌کنیم این است:

برای هر عنصر $x\in X$، **یک و فقط یک** $y\in Y$ **وجود دارد به طوری که** $(x,y)\in f$. برای این که ببینید این ادعا درست است، فرض کنید $x\in X$، آنگاه بنابر شرط (الف)، تعریف (۱)، یک عنصر $y\in Y$ وجود دارد به طوری که $(x,y)\in f$: اگر یک عنصر دیگر $z\in Y$ با شرط $(x,z)\in f$ وجود داشته باشد، آنگاه بنابرشرط (ب) $y=z$. به این ترتیب می بینید y که با $x\in X$ مشخص می شود، یکتاست.

تابع $f:X\longrightarrow Y$ مفروض است. اگر $y=f(x)$، گوییم y **نگاره** x تحت f است و x یک **پیش نگاره** y تحت f است. در شکل های زیر این مطلب مجسم شده است.



شکل ۱ y **نگاره** x **است**



شکل ۲ $x_۱, x_۲$ **پیشنگاره** y **هستند**

در این جا، مجموعه Y را در $f : X \longrightarrow Y$، برد تابع می گوییم.

باید توجه داشت که برد تابع ممکن است نگاره تابع نباشد. به عنوان مثال تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ که با $f(x) = \sin(x)$ تعریف می شود دارای بردی برابر $\mathbb{R}$ است درحالی که نگاره f برابر $[-۱, ۱]$ است.

یا به عنوان مثالی دیگر فرض کنید $y_۰$ یک عنصر تثبیت شده Y باشدو تابع $f : X \longrightarrow Y$ که با $f(x) = y_۰$ تعریف می شود داردی بردی برابر Y است اما نگاره آن برابر $\{y_۰\}$ است.

توضیح: ۳. توجه داشته باشید در برخی کتاب ها، لغت «برد» [1] را به معنای «نگاره» [2] به کار می برند، اما در این درس، بنا بر یک دلیل تکنیکی، بین «نگاره» و «برد» تابع تمایز قایل می شویم. اما می توان گفت که در حالت کلی، نگاره زیر مجموعه برد تابع است.

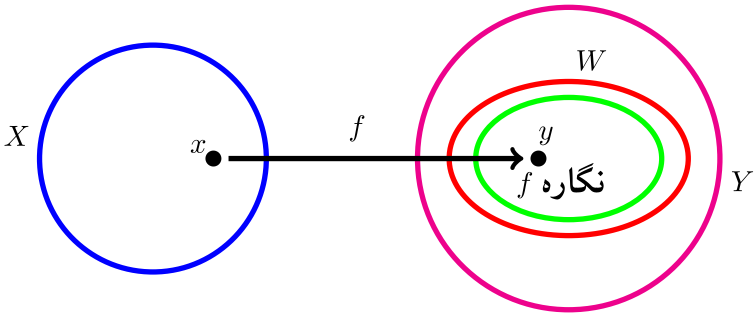
همچنین در برخی کتاب ها از اصطلاح «هم دامنه» [3] به جای «برد» استفاده می کنند. معمولاً افرادی که این واژه را به کار می برند، دانش تخصصی شان «نظریه رسته ها» [4] می باشد، که چون در این مرحله این نظریه و درس هایی که مربوط به این نظریه مطرح نمی شوند، لذا نیازی به استفاده از این اصطلاح نیست و بهتر است همان اصطلاح رایج در اکثر بخش های ریاضی یا علوم کامپیوتر، یعنی «برد» استفاده شود.

مثال ۴. تابع قسمت صحیح، یعنی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، که به صورت $f(x) = [x]$ (مقدار صحیح x) تعریف می شود، به ازای تمام $x \in \mathbb{R}$ تعریف می شود. در این جا برد تابع مجموعه $\mathbb{R}$ است در صورتی که نگاره تابع $\mathbb{Z}$

[1] *Range*
[2] *Image*
[3] *Codomain*
[4] *Category Theory*

است.

می توان برد یک تابع را بدون تغییر دادن تابع، عوض کرد. به عنوان مثال تابع مقدار صحیح که یک تابع از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{Z}$ است را می توان همان تابع مقدار صحیح منتهی به جای $\mathbb{Z}$ می توان $\mathbb{Q}$، یعنی اعداد گویا را به جای $\mathbb{Z}$ قرار داد. زیرا در تعریف (۱) صدق می کند.



شکل ۳ y **نگاره** x **است**

قضیه ۵. تابع $f : X \longrightarrow Y$ و W یک مجموعه شامل نگاره f مفروض اند. آنگاه $f : X \longrightarrow W$ نیز یک تابع است.

اثبات. نخست نشان می دهیم که f یک رابطه از X به W است:

$(x, y) \in f \Longrightarrow x \in X \wedge y \in (Im\ f)$	**تعریف** Im
$\Longrightarrow x \in X \wedge y \in W$	$Im(f) \subseteq W$
$\Longrightarrow (x, y) \in X \times W$	**تعریف ضرب دکارتی**

به این ترتیب ثابت شد که $f \subseteq X \times W$؛ به عبارت دیگر، f یک رابطه از X به W است. حال چون $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع است، و $Dom(f) = X$، و شرط (ب) تعریف (۱) نیز برقرار است، بنابراین $f : X \longrightarrow W$ یک تابع است.

$\square$

تعریف زیر یکی از تعاریف مهم می باشد که همیشه برای اثبات تساوی دو تابع می توان از آن استفاده کرد.

قضیه ۶. توابع $f : X \longrightarrow Y$ و $g : X \longrightarrow Y$ مفروض اند. آنگاه $f = g$ اگر و تنها اگر $f(x) = g(x)$ به ازای هر $x \in X$.

اثبات. (۱) فرض کنیم که $f = g$ و x یک عنصر دلخواه X باشد. آنگاه

$y = f(x) \iff (x, y) \in f$	**نماد**
$\iff (x, y) \in g$	$f = g$
$\iff g(x) = y$	**نماد**

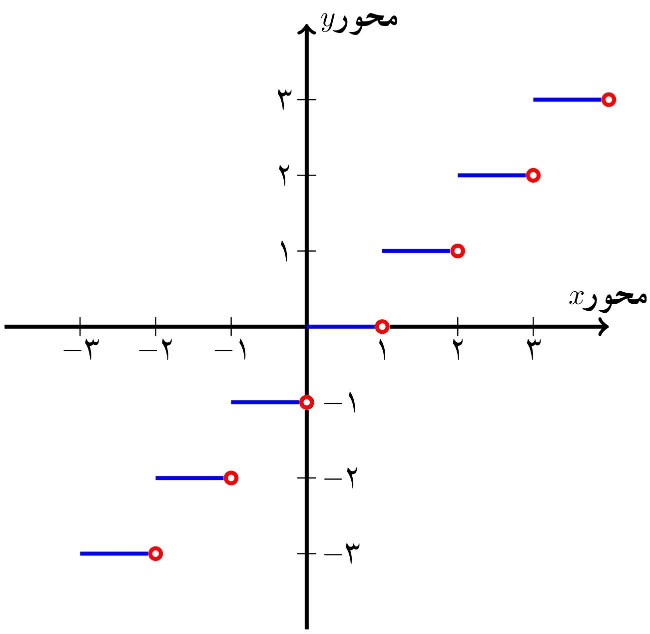
بنابراین $f(x) = g(x)$.

(۲) فرض کنیم که $f(x) = g(x)$ برای هر $x \in X$. آنگاه

$(x, y) \in f \iff y = f(x)$	**نماد**
$\iff y = g(x)$	$f(x) = g(x)$
$\iff (x, y) \in g$	**نماد**

بنابراین $f = g$. □

اگر حوزه و برد یک تابع زیر مجموعه هایی از مجموعه اعداد حقیقی باشند، آنگاه می توان نمودار تابع را در یک صفحه دکارتی رسم کرد.



نمودار تابع جزءصحیح $[x]$

یکی از توابعی که کاربردهای زیادی در ریاضیات دارد تابع مشخصه [1] یک زیر مجموعه A از مجموعه X نام دارد. درواقع اگر بخواهیم عضو بودن در مجموعه A را به صورت تابعی بیان کنیم از این تابع استفاده می کنیم.

مثال ۷. فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی X است. آنگاه رابطه

$$\{(x,y) \in X \times \{۰,۱\} | y = ۱, \quad x \in A \ \text{اگر}, \quad y = ۰, \quad x \notin A \ \text{اگر}\}$$

تابعی از X به $\{۰,۱\}$ است.

این تابع را تابع مشخصه A می نامند و با χ_A نمایش می دهند.

حرف یونانی χ را «**خی**» بخوانید.

به عبارت دیگر

$$\chi_A : X \longrightarrow \{۰,۱\}$$

[1] Characteristic function

به صورت زیر تعریف می شود.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \text{ اگر} \\ ۰ & x \in X - A \text{ اگر} \end{cases}$$

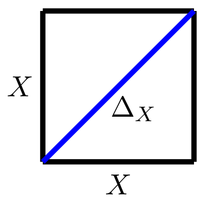
اگر چه یک تابع به صورت (f, X, Y) و یا $f : X \longrightarrow Y$ نوشته می شود، اما اغلب وقتی از متن، به طور ضمنی حوزه و برد تابع مشخص می شوند، نوشتن آنها ضرورت ندارد.

به این جهت وقتی حوزه و برد تابع معلوم هستند، تابع را با f نمایش خواهیم داد، بدون این که حوزه و برد f را ذکر کنیم.

مثال ۸. مجموعه X مفروض است. رابطه قطری Δ_X روی X که در صفحه های قبل تعریف شده است، یک تابع از X به X است. وقتی می خواهیم تاکید کنیم که رابطه Δ_X یک تابع ااست، نماد $I_X : X \longrightarrow X$ (یا id_X، دوحرف اول ***identity function*** را به کار می بریم.

با این نماد، برای هر $x \in X$، $id_X(x) = I(x) = ۱_X(x) = x$.

تابع I_X را تابع همانی روی X می نامند.



یک تابع دیگر که به طور فراوان به کار می رود، تابع ثابت است.

مثال ۹. فرض کنید X و Y دو مجموعه ناتهی و b یک عنصر ثابت Y است. با رابطه

$$C_b = \{(x, b) | x \in X\}$$

تابع $C_b : X \longrightarrow Y$ تعریف می شود.

چون نگاره تابع C_b مجموعه تک عضوی $\{b\}$ است، آن را تابع ثابت می نامند و با $C_b(x) = b$، که برای هر $x \in X$، مشخص می شود.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، اغلب به توابعی برمی خوریم که با دو قاعده تناظر (با بیش از دو قاعده) تعریف شده اند. مثلاً تابع h که به صورت زیر تعریف شده است

$$h(x) = \begin{cases} ۱ - ۲x & \text{اگر } x \leq ۰ \\ x^{۲} + ۱ & \text{اگر } x \geq ۰ \end{cases}$$

با دو قاعده تعریف شده است. این تابع ممکن است به صورت اجتماع دو تابع زیر درنظر گرفته شود.

(۱) $f : (-\infty, ۰] \longrightarrow \mathbb{R}$، که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = ۱ - ۲x, \quad \forall x \in (-\infty, ۰]$$

(۲) $g : [۰, +\infty)$ که به صورت زیر تعریف شده است.

$$g(x) = x^{۲} + ۱ \quad \forall x \in [۰, +\infty)$$

باید توجه داشته باشید که در این جا $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \{۰\}$، و $f(۰) = g(۰)$. مثال اخیر برای هر دو تابعی که در شرایط بالا صدق کند، معتبر است. این را می توان در قالب قضیه زیر بیان کرد.

قضیه ۱۰. دو تابع $f : A \longrightarrow C$ و $g : B \longrightarrow D$ به قسمی که $f(x) = g(x), \quad \forall x \in A \cap B$ مفروض اند. آنگاه h، اجتماع f, g:

$$h = f \cup g : A \cup B \longrightarrow C \cup D$$

که در آن

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \in A \\ g(x) & \text{اگر } x \in B \end{cases}$$

یک تابع است.

اثبات. چون f و g رابطه هستند، $f \subseteq A \times C$ و $g \subseteq B \times D$ و داریم

$$\begin{aligned} h = f \cup g &\subseteq (A \times C) \cup (B \times C) \\ &\subseteq (A \cup B) \times (C \cup D) \end{aligned}$$

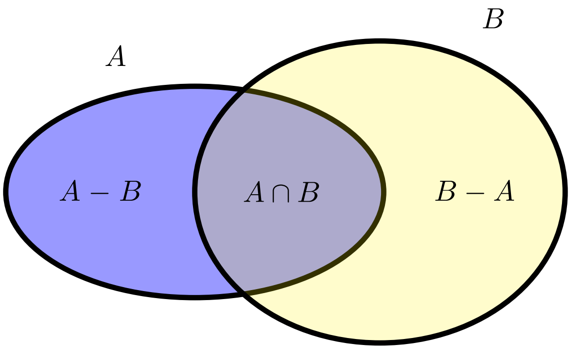
زیرا هر دو مجموعه $A \times C$ و $B \times D$، زیر مجموعه های $(A \cup B) \times (C \cup D)$ هستند. بنابراین، h یک رابطه از $A \cup B$ به $C \cup D$ است.

روشن است که

$$\mathrm{Dom}(h) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = A \cup B.$$

این نشان می دهد که رابطه h در تعریف (۱) (الف) صدق می کند.

(۱) $x \in A - B$ و (۲) $x \in B - A$ و (۳) $x \in A \cap B$.



از این که $f : A \longrightarrow C$ و $g : B \longrightarrow D$ در تعریف (۱) (ب) صدق می کنند و $f(x) = g(x), \ \forall x \in A \cap B$ نتیجه می شود که $h(x)$ در هر سه حالت تعریف شد یکتاست. بنابراین رابطه h در تعریف (۱) (ب) هم صدق می کند. از این رو $h : A \cup B \longrightarrow C \cup D$ واقعاً یک تابع است. □

تمرین های صفحه ۸۳، شماره های ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۴ را حل نمایید.