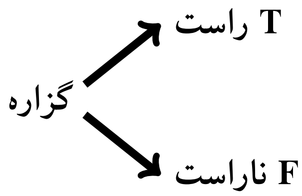
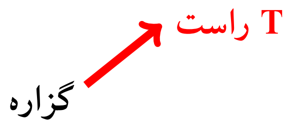
۱

راستگو[1]، استلزام[2]، و همارزی [3]

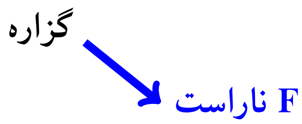
آموختیم یک گزاره دارای دو ارزش «راست» یا «ناراست» است.



اما همانطور که در تمرینات قسمت قبل ملاحظه کردیم گزاره هایی وجود دارند که به ازای تمام حالات منطقی اش همواره ارزش «راست» دارند



و یا به ازای تمام حالات منطقی اش ارزش ناراست دارند.



به عنوان مثال جدول گزاره $p \vee \sim p$ را بررسی می کنیم.

جدول ۱۰

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

ملاحظه می شود گزاره $p \vee \sim p$ در هرحالت، یعنی در تمام حالات منطقی، راست است. این نوع گزاره مهم شایسته نامی ویژه، موسوم به راستگو است.

[1] Tautology
[2] Implication
[3] Equivalence

تعریف ۱. گزاره ای که در تمام حالات منطقی راست باشد، **راستگو** نامیده می شود.

دو گزاره مرکب یا ساده P و Q مفروض اند.

قرارداد: اگر گزاره شرطی $P \longrightarrow Q$ راستگو باشد، آن را **استلزام** می نامند و با $P \Longrightarrow Q$ نمایش می دهند (بخوانید: P مستلزم Q است، یا بگویید Q از P لازم می اید). بنابراین گزاره های شرطی زیر همگی استلزام هستند.

(۱) $p \longrightarrow p$،

(۲) $p \wedge q \longrightarrow q \wedge p$،

(۳) $p \longrightarrow p \wedge p$،

(۴) $p \wedge q \longrightarrow q$.

در منطق یا ریاضیات، «قضایا» به معنی گزاره های همواره راست هستند، و «برهان» (قضیه) **اثبات درستی** آن است.

قضیه ۲. فرض کنیم p و q دو گزاره هستند. آنگاه قوانین زیر برقرارند:

(الف) **قانون جمع:** $p \Longrightarrow p \vee q$.

(ب) **قانون اختصار:** $p \wedge q \Longrightarrow p$، $p \wedge q \Longrightarrow q$.

(پ) **قانون رفع مولفه** $(p \vee q) \wedge \sim p \Longrightarrow q$.

اثبات. درستی **(الف)** و **(ب)** را می توانید با رسم جدول نشان دهید. برای **(پ)** ، ستون ششم جدول نشان می دهد که این گزاره همواره راست است.

جدول ۱۱

	(p	$\vee$	q)	$\wedge$	$\sim p$	$\longrightarrow$	q
	T	T	T	F	F	T	T
	T	T	F	F	F	T	F
	F	T	T	T	T	T	T
	F	F	F	F	T	T	F
مرحله	۱	۲	۱	۳	۲	۴	۱

□

این جدول با جدولهای درستی که قبلا رسم می کردیم کمی تفاوت دارد. در واقع، همان طور که می بینید، گزاره مرکب را در ستون مربوطه قرار نمی دهیم و فقط رابط آنر را قرار داده ایم و در هرمرحله، با توجه با ارزشی که برای مولفه ها در نظر می گیریم، در زیر ستون مربوط به مولفه، ارزش گزاره مرکب را می نویسیم. این روش، کوتاه تر و باعث صرفه جویی در مکان و عملیات می گردد.

حال اگر به جدول ۱۱ توجه کنیم، چون ستون مرحله آخر (مرحله چهارم) فقط شامل ارزش T است، نتیجه می گیریم گزاره شرطی $(p \vee q) \vee \sim p \longrightarrow q$ یک **استلزام** است.

قرارداد: گزاره دوشرطی $P \longleftrightarrow Q$ اگر **راستگو** باشد، **هم ارزی**[۱] نامیده می شود و آن را با $P \Longleftrightarrow Q$ نشان می دهند (بخوانید: P هم ارز Q است).

[۱]equivalence

از تعریف گزاره دو شرطی و جدول ارزش آن، ملاحظه می شود $P \Longleftrightarrow Q$، به شرط آنکه درتمام حالات منطقی، P و Q یک ارزش راستی داشته باشند، و برعکس، اگر P و Q در تمام حالات منطقی یک ارزش راستی داشته باشند، آنگاه $P \Longleftrightarrow Q$.

بنابراین $P \Longleftrightarrow Q$ و $P \equiv Q$ یک معنی دارند، و از این رو می توانیم $\Longleftrightarrow$ و $\equiv$ را به جای یکدیگر به کاربریم.

قضیه ۳. فرض کنیم p و q دو گزاره هستند. آنگاه

(الف) قانون نفی مضاعف[۱]: $\sim(\sim p) \equiv p$.

(ب) قانون جابه جایی $p \vee q \equiv q \vee p$، $p \wedge q \equiv q \wedge p$:.

(پ) قانون خودتوانی[۲]: $p \vee p \equiv p$، $p \wedge p \equiv p$

(ت) قانون عکس نقیض[۳]: $(p \longrightarrow q) \equiv (\sim q \longrightarrow \sim p)$.

اثبات. برهان قسمت های (الف)، (ب)، (پ) و (ت) با کمک جدول ارزش به راحتی انجام می گیرد. □

قضیه ۴. (قانون دمورگان). فرض کنیم p و q دو گزاره هستند. آنگاه

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

به شباهت دو قانون دمورگان توجه کنید: این شباهت ها را در گزاره های زیر هم می توانید ببینید. این نوع قضیه ها را «همزاد» یا «دوگان» یکدیگر می نامند. آیا می توانید آنها را بیابید و بیان کنید؟

قضیه ۵. فرض می کنیم p، q و r گزاره هستند. آنگاه

(الف) قانون شرکت پذیری

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

---

[۱] *Double Negation*
[۲] *Idempotency*
[۳] *ContraPositive*

(ب) قانون پخش پذیری [1]

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

(پ) قانون تعدی [2]

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \Longrightarrow (p \longrightarrow r).$$

آیا مثالی از کاربست قسمت (پ) قضیه بالا را می توایند ارائه دهید؟

همچنین « برهان درستی» قضایایی که در جلسه گذشته آموختیم براساس جدول ارزش بودند. این جلسه نیز چند قضیه دیگر را بیان خواهیم کرد که «برهان درستی» آنها براساس جدول ارزش خواهد بود. اما قضایای این دو جلسه روش دیگری به جز جدول ارزش برای ارائه برهان درستی ارائه می کنند که بسیار قوی تر از جدول ارزش است.

قضیه ۶. گیریم p، q، r و s گزاره هستند. آنگاه

(الف) قیاس ذوالوجهین موجب Constructive dilemma

$$(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \Longrightarrow (p \vee r \longrightarrow q \vee s)$$

$$(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \Longrightarrow (p \wedge r \longrightarrow q \wedge s)$$

(ب) قیاس **ذوالوجهین منفی** Destructive dilemma

$$(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \Longrightarrow (\sim q \vee \sim s \longrightarrow \sim p \vee \sim r)$$

$$(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \Longrightarrow (\sim q \wedge \sim s \longrightarrow \sim p \wedge \sim r)$$

اثبات. به کمک جدول ارزش می توان نشان داد که این چهار گزاره نیز همواره ارزش راست اختیار می کنند.

[1] *Distributive*
[2] *Transitive*

p	q	r	s	p$\longrightarrow q$	r$\longrightarrow s$	p$\vee r$	q$\vee s$	(p$\longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \longrightarrow (p \vee r \longrightarrow q \vee s)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T	F	F	T

□

قضیه ۷. فرض کنید p و q گزاره هستند. آنگاه

(الف) **قیاس استثنایی** [1] $(p \longrightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q$

(ب) **قیاس دفع** [2] $(p \longrightarrow q) \wedge \sim q \Longrightarrow \sim p$

(پ) **برهان خلف** [3] $(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q \longrightarrow q \wedge \sim p)$.

اثبات. به کمک جدول ارزش می توان نشان داد که این سه گزاره نیز همواره ارزش راست اختیار می کنند.

(الف)

p	q	$(p \longrightarrow q)$	$(p \longrightarrow q) \wedge p$	$(p \to q) \wedge p \longrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

پس با توجه به ارزش ستون ۵، نتیجه می گیریم گزاره شرطی $[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q$ همیشه ارزش راست دارد.

پس یک استلزام است و باید به صورت $[(p \longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$ نوشته شود.

(ب)

[1] *Modus Ponens*

[2] *Modus Tollens*

[3] *By Contradiction*

p	q	$(p\longrightarrow q)$	$\sim q$	$(p\longrightarrow q)\wedge\sim q$	$\sim p$	$(p\longrightarrow q)\wedge\sim q\longrightarrow\sim p$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

پس با توجه به ارزش ستون ۵، نتیجه می گیریم گزاره شرطی $[(p\longrightarrow q)\wedge\sim q]\longrightarrow\sim p$ همیشه ارزش راست دارد. پس یک استلزام است و باید به صورت $[(p\longrightarrow q)\wedge\sim q]\Longrightarrow\sim p$ نوشته شود.

(پ)

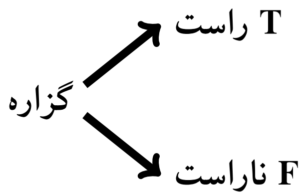
p	q	$(p\longrightarrow q)$	$(p\wedge\sim q)$	$q\wedge\sim p)$	$(p\wedge\sim q)\longrightarrow q\wedge\sim p)$	$(p\longrightarrow q)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T

ملاحظه می شود دو ستون آخر این جدول به ازای تمام حالات منطقی دارای یک ارزش هستند. پس بنابرتعریف دو گزاره ای که در عنوان این دو ستون نوشته شده اند، هم ارزند.

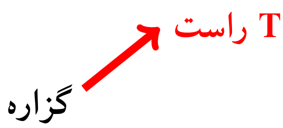
□

تناقض

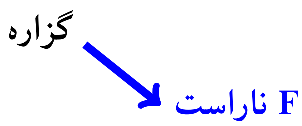
برخلاف راستگوها، گزاره هایی وجود دارند که ارزش راستی آنها برای هر امکان منطقی «ناراست» است. چنین گزاره هایی را **تناقض** [1] می نامند. به عنوان مثال $p \wedge \sim p$ یک تناقض است. آموختیم یک گزاره دارای دو ارزش «راست» یا «ناراست» است.



اما همانطورکه در تمرینات قسمت قبل ملاحظه کردیم گزاره هایی وجود داردند که به ازای تمام حالات منطقی اش همواره ارزش «راست» دارند



و یا به ازای تمام حالات منطقی اش ارزش ناراست دارند.



به عنوان مثال جدول گزاره $p \wedge \sim p$ را بررسی می کنیم.

جدول ۱۰

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

[1] Contradiction

به این ترتیب گزاره $p \wedge \sim p$ یک تناقض است.

بدیهی است که اگر گزاره t یک راستگو باشد، آنگاه $\sim t$ یک تناقض است و برعکس، اگر c یک تناقض باشد، آنگاه $\sim c$ یک راستگو است.

قضیه ۸. فرض کنیم t، c و p، به ترتیب یک راستگو، یک تناقض و یک گزاره دلخواه باشند. آنگاه

(الف) $p \wedge t \Longleftrightarrow p$،

$p \vee t \Longleftrightarrow t,$

(ب) $p \vee c \Longleftrightarrow p,$

$p \wedge c \Longleftrightarrow c$.

(پ) $t \Longrightarrow p$ و $p \Longrightarrow c$.

اثبات. (الف) یکسان بودن ارزش گزاره p و $p \wedge t$ در جدول زیر نشان می دهد $p \longleftrightarrow p \wedge t$ همواره راست است. یعنی $p \wedge t$ با p هم ارز است.

p	$\longleftrightarrow$	t	$\wedge$	p	
T	T	T	T	T	
F	T	T	F	F	
۱	۳	۱	۲	۱	**مرحله**

هم ارزی $t \Longleftrightarrow p \vee t$ به طریقی مشابه به اثبات می رسد.

(ب) از جدول ارزش زیر در می یابیم گه گزاره شرطی $p \longleftrightarrow p \vee c$ یک راستگو است و ازاین رو، $p \Longleftrightarrow p \vee c$.

	p	$\vee$	c	$\longleftrightarrow$	p
	T	T	F	T	T
	F	F	F	T	F
مرحله	۱	۲	۱	۳	۱

برهان $c \longleftrightarrow p \wedge c$ به طریقی مشابه انجام می گردد.

(پ) جدول های ارزش $p \longrightarrow c$ و $t \longrightarrow p$ نشان می دهند $p \Longrightarrow c$ و $t \Longrightarrow p$ راستگو هستند.

c	$\longrightarrow$	p
F	T	T
F	T	F

اگرچه می توان از هم ارزی $s \vee r \sim\equiv s \longrightarrow r$ استفاده کرد و $p \longrightarrow c$ را به صورت $p \vee t \equiv p \vee c \sim$ نوشت که می دانیم همواره ارزش راست دارد. بنابراین $p \longrightarrow c$ را می توان به صورت $p \Longrightarrow c$ نوشت. گاه راستگوی $p \Longrightarrow c$ را انتفاء مقدم می نامند.

همچنین با استفاده از عکس نقیض می توان نوشت $(t \longrightarrow p \sim\equiv p \sim\sim) \longleftrightarrow (p \sim\equiv p \longrightarrow c)$ است که ارزش آن همیشه راست خواهد بود. $\square$

مباحث این درس را به صورت زیر می توان خلاصه کرد:

۱-گزاره ای که در تمام حالات منطقی راست باشد، **راستگو** نامیده می شود.

۲- اگر گزاره $p \longrightarrow q$ گزاره ای راستگو باشد، آن را **استلزام** می نامیم و با $p \Longrightarrow q$ نمایش می دهیم.

۳- اگر گزاره دو شرطی $p \longleftrightarrow q$ گزاره ای راستگو باشد آن را **هم ارزی** می نامیم و با $p \Longleftrightarrow q$ نمایش می دهیم.

۴- اگر گزاره ای به ازای تمام حالات منطقی اش ناراست باشد آن را **تناقض**[۱] می نامیم و معمولا با حرف اول نام لاتین آن **c** نمایش می دهیم.

[۱] contradiction

تمرین ۹. تعیین کنید کدامیک از گزاره های زیر «راستگو» و کدامیک «تناقض» اند.

۱. $۶ = ۰$

۲. $۶ = ۰ \vee ۶ > ۰$

۳. $۶ \geq ۰ \vee ۶ < ۰$

۴. $۶ \neq ۰ \vee ۶ = ۰$

۵. مساحت یک مثلث با طول اضلاع عدد صحیح با مساحت دایره برابر است.

۶. مساحت دایره یک عدد منفی است.

۷. حاصل ضرب یک عدد مثبت در یک عدد مثبت دیگر یک عدد منفی است.

۸. حاصل ضرب یک عدد مثبت در یک عدد مثبت دیگر یک عدد مثبت است.

۹. اگر $a^۲ + b^۲ = ۰$ آنگاه $a \neq ۰$ و $b \neq ۰$.

۱۰. دایره صفحه را به دو ناحیه بسته و باز تقسیم می کند.

۱۱. از یک نقطه خارج یک خط بیش از دوخط عمود بر آن خط می توان رسم کرد.

۱۲. عدد پی یک عدد گویا است.

۱۳. عدد پی یک عدد اول است.

۱۴. معادله $x+2$ در مجموعه اعداد طبیعی دارای جواب است.

۱۵. معادله $3x+2=0$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است.

۱۶. معادله x^2-2 در مجموعه اعداد گویا دارای جواب است.

تمرین ۱۰. نشان دهید $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$.

تمرین ۱۱. نشان دهید $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$.

تمرین ۱۲. نشان دهید $(p\longrightarrow q)\Longrightarrow(p\wedge r\longrightarrow q\wedge r)$

تمرین ۱۳. نشان دهید $(p\longleftrightarrow q)\equiv(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$.

تمرین ۱۴. با استفاده از قانون دمورگان نقیض گزاره « این تابع مشتق دارد یا این تابع افزایشی است» را بنویسید.

تمرین ۱۵. قوانین دمورگان را برای سه مولفه p,q,r بنویسید.

(الف) $\sim(p\wedge q\wedge r)\equiv\sim p\vee\sim q\vee\sim r$

(ب) $\sim(p\vee q\vee r)\equiv\sim p\wedge\sim q\wedge\sim r$

تمرین ۱۶. آیا می توانید بدون اثبات قوانین دمورگان را برای n مولفه تعمیم دهید؟ (راهنمایی: تمرین ۱۵ را مبنای تعمیم خود قرار دهید).

تمرین ۱۷. می دانیم $(p\longrightarrow q)\wedge(q\longrightarrow s)\Longrightarrow(p\longrightarrow s)$ آیا می توانید این گزاره را تعبیر کنید و معادل فارسی آن را بنویسید؟

تمرین ۱۸. آیا $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ هم ارز منطقی $(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ است؟

تمرین ۱۹. آیا $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ هم ارز منطقی $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$ است؟

تمرین ۲۰. نشان دهید $(p \vee q) \wedge \sim p$ هم ارز منطقی $q \wedge \sim p$ است.

تمرین ۲۱. نشان دهد $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ هم ارز منطقی $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ است.

در نمرین های زیر ستون آخر جدول ارزش یک گزاره مجهول شامل گزاره های ساده p، q و r داده شده است. این گزاره مرکب را پیدا کنید.

تمرین ۲۲. $TFFFFFFF$.

تمرین ۲۳. $FFFFFFFT$.

تمرین ۲۴. $TFFFFFFFT$. (راهنمایی: اگر X و Y به ترتیب جواب های دو تمرین قبل باشد آنگاه $X \vee Y$ جواب مساله آخر است).

تمرین ۲۵. نشان دهید $p \wedge c \Leftrightarrow c$ و $p \vee t \Leftrightarrow t$.

تمرین ۲۶. نشان دهد که $\sim t \Leftrightarrow c$ و $\sim c \Leftrightarrow t$.

تمرین ۲۷. برهان خلف زیر را ثابت کنید

$$(p \wedge \sim q) \longrightarrow c) \Longleftrightarrow (p \longrightarrow q)$$

تناقض c معمولاً به صورت گزاره $r \wedge \sim r$ است. به علاوه، این شکل از برهان خلف برای نشان دادن درستی یک نتیجه مورد استفاده قرار می گیرد.

تمرین ۲۸. نشان دهید که $p \wedge (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow \sim q) \Longleftrightarrow c$.

تمرین ۲۹. نشان دهید برای هر گزاره r، $(p \longrightarrow q) \Longrightarrow (p \vee r \longrightarrow q \vee r)$.

تمرین ۳۰. جواد ادعا می کند که هرکاری را می تواند انجام دهد. آیا جواد می توانست شیئی بسازد که نتواند آن را بلند کند؟