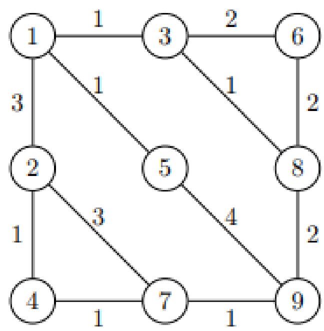
جواب تمرین سری دوم

طراحی الگوریتم
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. پاییز ۱۴۰۱

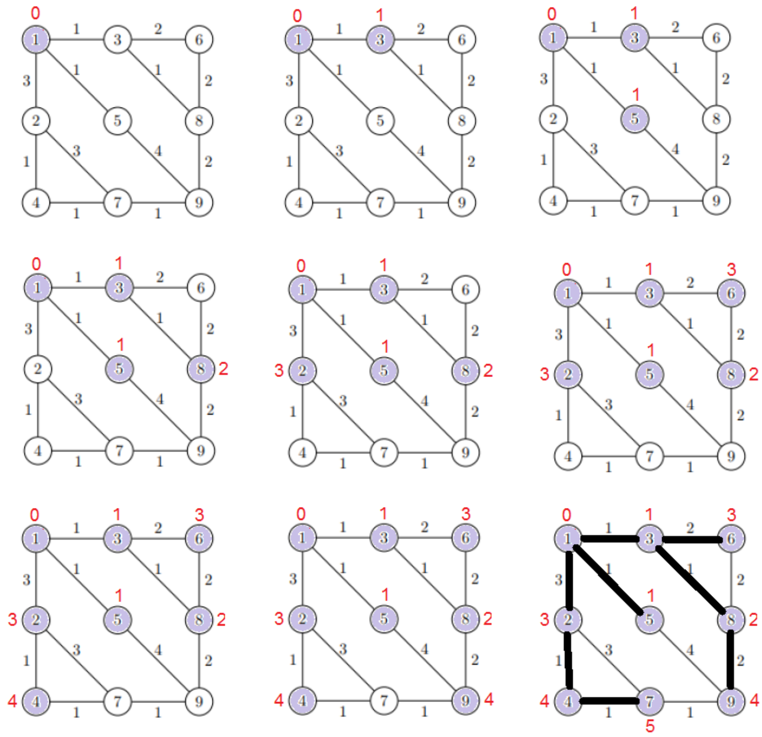
۱. گراف زیر داده شده است. به سوالات زیر پاسخ دهید.



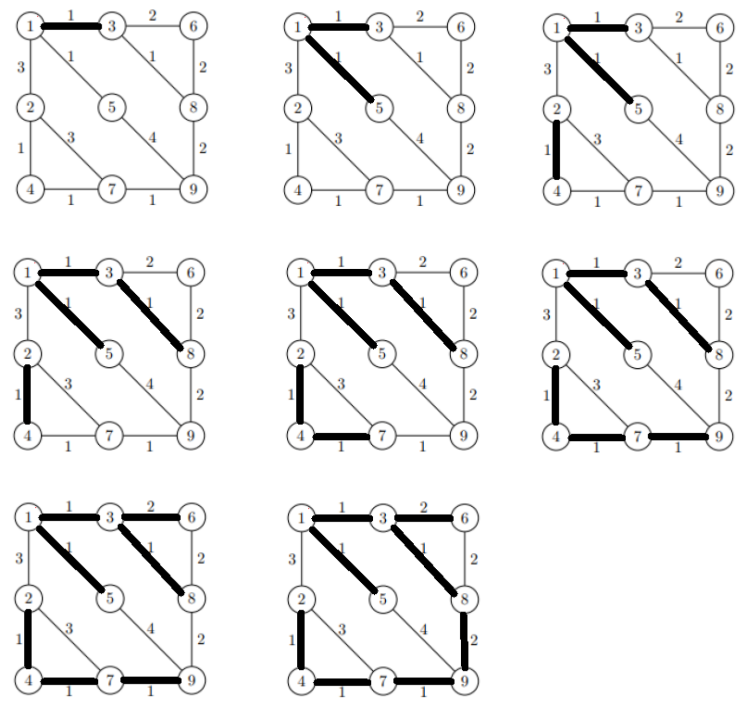
- الگوریتم دایکسترا را روی گراف بالا اجرا می‌کنیم. از راس شماره 1 شروع می‌کنیم. ترتیبی که راسهای گراف در آن ملاقات می‌شوند را بیان کنید (در حالت تساوی، راسی که شماره کمتری دارد اول ملاقات می‌شود)
- موقعی که راس شماره ۷ ملاقات می‌شود، مقدار $d(u)$ برای راسهای گراف چند است؟
- درخت کوتاهترین مسیر بدست آمده را رسم کنید.
- الگوریتمهای کروسکال و پریم را روی گراف داده شده اجرا کنید. درخت فراگیر کمینه را رسم کنید.

جواب سوال در صفحه بعد

Dijkstra



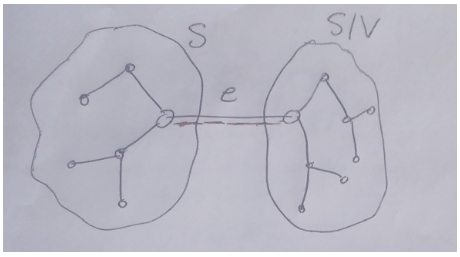
Kruskal



۲. نشان دهید اگر در گراف وزندار G همه وزنها متمایز باشند، آنگاه درخت فراگیر کمینه G منحصر بفرد است.

فرض کنید دو درخت کمینه فراگیر T_1 و T_2 برای گراف G وجود دارد که متمایز هستند.

یال $e \in T_1$ را در نظر بگیرید که در درخت T_2 حضور ندارد. برداشتن یال e درخت T_1 را به دو مولفه همبند تقسیم میکند.

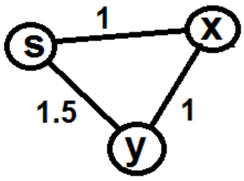


با توجه به قضیه ای که در کلاس اثبات کردیم، چون وزن یالها متمایز هستند و T_1 یک درخت فراگیر کمینه است پس e باید سبکترین یال در برش $(S, V \setminus S)$ باشد. لذا e حتما باید در درخت فراگیر کمینه حضور داشته باشد. این با کمینه بودن T_2 در تناقض است. لذا T_1 و T_2 باید یکسان باشند.

۳. گراف $G = (V, E)$ و راس $s \in V$ را مثال بزنید که درخت فراگیر کمینه آن و درخت کوتاهترین مسیر با مبدا s یکسان باشند. مثالی بزنید که خلاف این باشد. آیا امکان دارد که دو درخت هیچ اشتراک یالی نداشته باشند؟

برای مورد اول G اگر یک درخت باشد، قاعدتا درخت فراگیر کمینه و درخت کوتاهترین مسیر یکسان خواهند بود.

برای مورد دوم مثال زیر را ببینید.



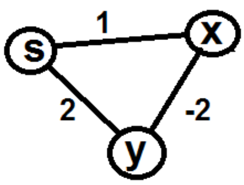
اگر وزن یالها مثبت باشد، حتما درخت فراگیر کمینه و درخت کوتاهترین مسیر با مبدا s حداقل در یک یال اشتراک خواهند داشت. فرض کنید سبکترین یال روی s یال (s, x) باشد. این یال حتما جزو درخت فراگیر کمینه است (با فرض اینکه روی راس s یال دیگری با همین وزن وجود نداشته باشد.) از طرف دیگر، چون وزنها مثبت هستند، کوتاهترین مسیر از s به x همان یال (s, x) است. لذا این یال باید در درخت کوتاهترین مسیر نیز باشد.

اگر وزن تکراری داشته باشیم، ممکن است یالی دیگر هموزن با (s, x) روی راس s داشته باشیم. فرض کنید

$$w(s, x) = w(s, y)$$

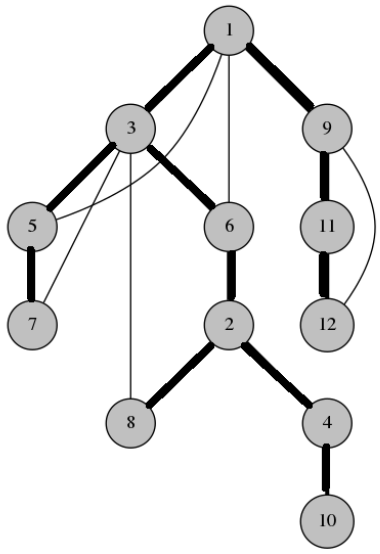
هر دو یال (s, x) و (s, y) جزو درخت کوتاهترین مسیر هستند و حتما یکی از اینها جزو درخت فراگیر کمینه است. پس در این حالت هم درخت فراگیر کمینه و کوتاهترین مسیر اشتراک یالی خواهند داشت.

اگر وزن منفی داشته باشیم، درخت کوتاهترین مسیر ممکن است وجود نداشته باشد. به مثال زیر توجه کنید.



۴. گراف ساده G و یک درخت فراگیر آن T داده شده است. الگوریتمی طراحی کنید که تشخیص دهد آیا T میتواند یک درخت DFS معتبر برای G باشد. زمان اجرای الگوریتم شما چقدر است؟

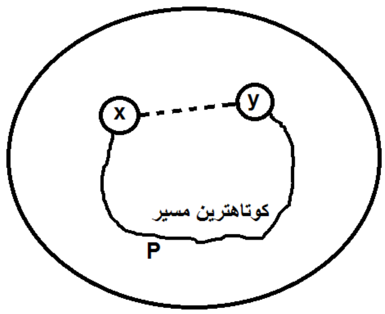
برای حل این سوال از یک خاصیت درخت DFS استفاده میکنیم. فرض کنید T یک درخت DFS برای گراف G باشد که از مبدا s شروع شده است. T در واقع یک درخت با ریشه s است. یک خاصیت درخت DFS این است که اگر یال e جزو درخت DFS نباشد آنگاه حتما e یک راس را به یکی از اجدادش در T وصل میکند. به شکل زیر توجه کنید. یالهای پررنگ یالهای درخت DFS هستند. همانطور که میبینید بقیه یالها راسی را به یکی از اجدادش وصل میکند.



پس کافی است چک کنیم که یالهایی که جزو T نیستند آیا یک راس را به جدش وصل میکنند یا نه. اگر یالی پیدا شد که راسی را به جدش وصل نکند، آنگاه T یک درخت معتبر DFS نخواهد بود در غیر اینصورت T حتما یک درخت معتبر DFS خواهد بود.

۵. گراف وزن دار G (یالها وزن مثبت دارند) داده شده است. با فرض اینکه G درخت نیست، دوری ساده در G پیدا کنید که کمترین وزن را داشته باشد. منظور از وزن یک دور، مجموع وزن یالهای دور است. زمان اجرای الگوریتم شما چقدر است؟

میتوانیم هر بار یک یال (x,y) را انتخاب کنیم و آن را از گراف حذف کنیم. فرض کنید G_{xy} گراف حاصل باشد. حال کوتاهترین مسیر بین x و y را در گراف G_{xy} پیدا میکنیم. فرض کنید $\ell(x,y)$ طول یال (x,y) باشد. فرض کنید P کوتاهترین مسیر بین x و y در گراف G_{xy} باشد. طول دوری که از $P+(x,y)$ بدست میآید برابر با $\ell(P)+\ell(x,y)$ است. این کار را برای همه یالهای تکرار میکنیم. یالی که باعث پیدا شدن دوری با کمترین وزن شد، جواب مسئله است.



۶. گراف همبند، ساده و وزن دار $G=(V,E)$ داده شده است. فرض کنید F یک زیرمجموعه از E باشد که هیچ دوری ندارد. الگوریتمی ارائه دهید که یک درخت فراگیر G را پیدا که کمترین وزن را داشته باشد و شامل همه یالهای F باشد.

از الگوریتم کراسکال استفاده میکنیم. الگوریتم کراسکال با گراف تهی شروع میکند و یالهای مرتب شده (بر اساس وزن) را تک به تک بررسی میکند. برای این مسئله، جای اینکه از گراف تهی شروع کنیم، از مجموعه یال F روند الگوریتم کراسکال را ادامه میدهیم تا اینکه یک درخت فراگیر بدست آید.

۷. یک مسیر ساده را همیلتونی گویند اگر شامل همه رئوس گراف باشد. گراف جهت دار بدون دور G داده شده است، یک الگوریتم در زمان $O(m+n)$ ارائه دهید که تشخیص دهد G یک مسیر همیلتونی دارد یا نه.

چون G یک گراف جهت دار بدون دور است پس یک ترتیب توپولوژیکی برای رئوس G وجود دارد. یک ترتیب توپولوژیکی را میتوان در زمان $O(m+n)$ بدست آورد. فرض کنید

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

ترتیب توپولوژیکی بدست آمده باشد. میدانیم که همه یالهای G بین دو راس (v_i, v_j) است بطوریکه $i < j$.

اگر G یک مسیر همیلتونی داشته باشد، باید بین هر v_i و v_{i+1} یک یال داشته باشیم، در غیر اینصورت G نمیتواند یک مسیر همیلتونی داشته باشد. با این مشاهده چک کردن وجود مسیر همیلتونی در G یک کار ساده است.

۸. فرض کنید n روستا روی یک جاده مستقیم در فواصل نامنظم قرار گرفته اند. دولت میخواهد یک سری دکل مخابراتی را برای وصل کردن این روستاها به شبکه موبایل نصب کند. برای سادگی فرض کنید جاده یک خط راست است و محل احتمالی دکلها و روستاها نقاطی روی این خط هستند. میخواهیم فاصله هر روستا از نزدیکترین دکل حداقل ٤ کیلومتر باشد. یک الگوریتم سریع ارائه دهید که حداقل تعداد دکل را نصب کند و همه روستاها پوشش داده شوند.

فرض کنید $r_1, \ldots, r_n$ موقعیت روستاها در جاده باشند بطوریکه $r_1 \leq \ldots \leq r_n$. روشن است که روستای در موقعیت r_1 باید یک دکل در فاصله 4 کیلومتر داشته باشد. لذا کافی است یک دکل در موقعیت $r_1 + 4$ قرار دهیم. قرار دادن دکل در موقعیتی نزدیکتر به r_1 نفعی برای بقیه روستاها ندارد. لذا روستاهایی که با این دکل پوشش داده میشوند را حذف میکنیم و دوباره همین کار را با بقیه روستاها ادامه میدهیم.