مرتبهٔ همگرایی یک دنباله

تاکنون برای نحوه رشد همگرایی یک دنباله از کلمات کند و تند یا سریع استفاده کردیم. در اینجا معیاری موسوم به مرتبهٔ همگرایی تعریف می‌کنیم که توسط آن اندازه‌ای برای سرعت همگرایی بدست آورده و با استفاده از آن می‌توان سرعت همگرایی دنباله‌های متفاوت را با هم مقایسه کرد و در نتیجه دو روش را از این نظر مورد مقایسه قرار داد.

تعریف

فرض‌کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ به عدد α همگرا باشد و اعداد ثابت، حقیقی و مثبت p و c چنان باشندکه

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\right| = c \neq 0$$

در این صورت، p را مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ به α نامند.

گاهی گفته می‌شود که روشی کـه $\{x_n\}$ها از آن به‌دست می‌آیند از مرتبهٔ p است.

به راحتی می‌توان مشاهده کرد که هرچه p بزرگتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است.

قضیه

اگر $\{x_n\}$ از روش تکرار ساده به‌دست آمده باشد، و به عدد α که ریشهٔ $x= g(x)$ است همگرا باشد، و $g'(\alpha) \neq 0$، آنگاه مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ (روش تکرار ساده) یک است.

برهان

باید ثابت کنیم: $(p=1)$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right| = c \neq 0$$

برای این منظور از بسط تیلر تابع g در مجاورت α استفاده می‌کنیم

$$g(x_n) = g(\alpha) + (x_n-\alpha)g'(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)^2}{2}g''(\eta_n) \qquad (1)$$

که در آن η_n بین x_n و α است.

با توجه به این‌که: $g(x_n)= x_{n+1}$, $g(\alpha)= \alpha$

معادلهٔ (۱) را می‌توان چنین نوشت،

$$x_{n+1} = \alpha + (x_n-\alpha)g'(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)^2}{2}g''(\eta_n) \qquad (2)$$

یا

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = g'(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)}{2}g''(\eta_n)$$

با توجه به این‌که $\alpha \le \eta_n \le x_n$، داریم: $\quad 0 \le |\alpha - \eta_n| \le |\alpha - x_n|$

بنابراین، وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، $|\alpha - x_n|$ به صفر میل کرده و η_n نیز به α میل می‌کند.

بنابراین، با فرض متناهی بودن $g''(\alpha)$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - \alpha)}{2} g''(\eta_n) = \frac{0}{2} \times g''(\alpha) = 0$$

در نتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = g'(\alpha)$$

و یا

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right| = |g'(\alpha)|$$

چون بنا به‌فرض، $g'(\alpha) \neq 0$ پس، بنابر تعریف ، مرتبهٔ همگرایی روش تکرار ساده یک است.

لازم به تذکر است که عدد L، در بررسی شرایط مناسب بودن تابع تکرارروش تکرارساده ، تخمینی از $|g'(\alpha)|$ است. به عبارت دیگر، همگرایی $\{x_n\}$ بستگی به مقدار $|g'(\alpha)|$ دارد ، هرچه این عدد به صفر نزدیکتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است.

حال این سؤال مطرح می‌شود که اگر $g'(\alpha) = 0$ مرتبهٔ همگرایی چقدر است؟

قضیه

در صورتی که $g'(\alpha) = 0$ مرتبهٔ همگرایی حداقل دو است.

برهان

اگر $g'(\alpha) = 0$، معادلهٔ (۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2} g''(\eta_n) \qquad , \qquad (\eta_n \text{ بین } \alpha, x_n)$$

تساوی بالا را می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{g''(\eta_n)}{2}$$

با توجه به مطالبی که در برهان قضیهٔ قبل گفته شد، داریم : $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{g''(\eta_n)}{2} = \frac{g''(\alpha)}{2}$

بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \right| = \frac{|g''(\alpha)|}{2}$$

لذا، اگر $g''(\alpha) \neq 0$ مرتبهٔ همگرایی دو و در غیر اینصورت بیشتر از ۲ است.

در بخش بعد روشی را که دقیقاً از مرتبهٔ دو باشد معرفی می‌کنیم.

تعبیر عددی مرتبهٔ همگرایی

اگر مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ مساوی عدد دو باشد، در اینصورت برای n های نسبتاً بزرگ داریم:

$$|x_{n+1}-\alpha| \simeq c\,|x_n-\alpha|^2$$

که در آن c عددی ثابت و مخالف صفر است. فرض کنید c حدود عدد یک باشد. در این صورت، اگر $|x_1-\alpha|$ حدود $0/1$ باشد $|x_2-\alpha|$ حدود $0/01$ خواهد بود و بعد $|x_3-\alpha|$ حدود $0/0001$ و بالاخره $|x_4-\alpha|$ حدود 10^{-8} خواهد بود. به عبارت دیگر، ارقام اعشار درست x_n در هر مرحله تقریباً دو برابر مرحله قبل می‌شود.

خودآزمایی

برای تعیین تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2+x-1=0$ قرار می‌دهیم:

$$g_5(x)=\frac{x^2+1}{2x+1}$$

با توجه به اینکه $\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ توضیح دهید چرا سرعت همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از $g_5(x)$ حاصل می‌شود بسیار سریع است (به ستون آخر جدول مربوطه مراجعه کنید).

(*راهنمایی:* ثابت کنید، $g'_5(\alpha)=0$)

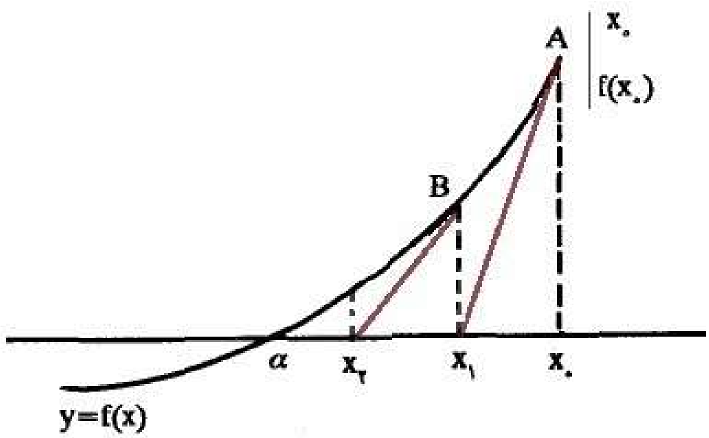
روش نیوتن -رافسون

این روش حالت خاصی از روش تکرار ساده و یکی از سریعترین روشهایی است که تاکنون بررسی کرده‌ایم. برای به‌کار بردن این روش باید تخمین نسبتاً نزدیکی از ریشهٔ مورد نظر در دست باشد. از این‌رو، این روش بیشتر برای تصحیح تقریبهای نادقیقی که از روشهای دیگر به‌دست آمده است به کار می‌رود.

فرمول روش نیوتن

فرض کنید x_0 تقریبی از α باشد، از نقطهٔ A واقع بر منحنی $y=g(x)$ به طول x_0 مماس بر این منحنی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با محور طولها x_1 می‌نامیم.

سپس این عمل را تکرار می‌کنیم تا به تقریب مطلوب برسیم.



اگر x_0 معلوم باشد، برای به‌دست آوردن x_1 باید معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ را در نقطهٔ $A \left| \begin{array}{l} x_0 \\ f(x_0) \end{array} \right.$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور x ها تعیین کنیم. ضریب زاویهٔ این خط $f'(x_0)$ است.

بنابراین،

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

محل تلاقی این خط با محور طولها نقطهٔ $(x_1, 0)$ است. پس،

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

به فرض $f'(x_0) \neq 0$، نتیجه می شود:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

پس به طور کلی می‌توان نوشت:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

n= 0, 1, 2, ...

مثال

a عددی مثبت است. مطلوب است محاسبهٔ تقریبی از $\sqrt{a}$ به روش نیوتن.

واضح است که $\sqrt{a}$ ریشهٔ مثبت معادلهٔ فوق است:

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

بنابراین، $f'(x) = 2x$ و فرمول نیوتن چنین است:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

این فرمول را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}$$

به عنوان مثال اگر $a=2$ و $x_0=1$ اعداد زیر، که تقریبهایی از $\sqrt{2}$ هستند، به‌دست می‌آیند.

$$x_1 = 1/5$$

$$x_2 = 1/416$$

$$x_3 = 1/41421568۶$$

$$x_4 = 1/414213562 \quad (8D)$$

در اینجا ویژگی مهم تقریبهایی که به روش نیوتن به‌دست می‌آید به خوبی دیده می‌شود. x_2 دارای دو رقم اعشار درست است. x_3 دارای چهار رقم اعشار درست است و بالاخره x_4 دارای ۸ رقم اعشار درست است.

اگر $\sqrt{2}$ را از ماشین حساب بگیرید مقدار x_4 را به شما می‌دهد. علت این است که در ماشین حسابهای امروزی نیز از روش نیوتن برای جذرگیری استفاده می‌شود.