

تکلیف سری دوم

طراحی الگوریتم

دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. پاییز ۱۴۰۳

۱. الگوریتم دایکسترا برای گراف $G = (V, E)$ و راس مبدا s ، با استفاده از صف اولویت pq بصورت زیر پیاده‌سازی شده است. اینجا $w(e)$ طول یال e را نشان می‌دهد.

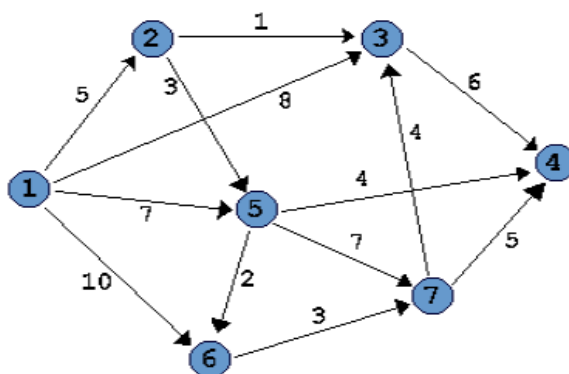
DIJKSTRA (V, E, w, s)

```

d[s] = 0
FOREACH v in V/s: d[v] = ∞
Create an empty priority queue pq
FOREACH v in V: INSERT(pq, v, d[v])
WHILE (IS-NOT-EMPTY(pq))
    u = DEL-MIN(pq)
    FOREACH edge e = (u, v) in E leaving u:
        IF d[v] > d[u] + w(e):
            DECREASE-KEY(pq, v, d[u] + w(e))
            d[v] = d[u] + w(e)

```

با شروع از راس 1 در گراف زیر الگوریتم بالا چند بار عمل DECREASE-KEY را انجام می‌دهد؟



۲. با توجه به جدول زیر، برای مجموعه کاراکتر $\{A, B, C, D, E\}$ یک کد هافمن طراحی کنید.

| character | A | B | C | D | E |
|-------------|-----|-----|-----|------|------|
| probability | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.15 | 0.15 |

۳. کدام از یک کدهای زیر نمی‌تواند یک کد هافمن باشد. چرا؟

$$\{0, 10, 11\} \quad (\bar{A})$$

$$\{00, 01, 10, 110\} \quad (\text{ب})$$

$$\{0, 01, 11\} \quad (\text{ج})$$

۴. نشان دهید اگر وزن یالها منحصر بفرد باشد، درخت فراگیر کمینه نیز منحصر بفرد است.

۵. نشان دهید الگوریتمی که بر اساس حذف یالها (برعکس کروسکال) عمل می کند، درخت فراگیر کمینه را پیدا می کند. می توانید فرض کنید که وزن یالها منحصر بفرد است.

۶. گراف جهت دار $G(V, E)$ داده شده است. می خواهیم پیامی را از راس s به راس t منتقل کنیم. برای ارسال پیام، مسیری از s به t انتخاب می شود. برای هر یال (u, v) در گراف احتمال $p(u, v) \in [0, 1]$ داده شده است. احتمال $p(u, v)$ به این معنی است که چقدر احتمال دارد که پیام مخابره شده از u به v برسد. می خواهیم مسیر L از s به t را پیدا کنیم که حاصلضرب

$$\prod_{(u,v) \in L} p(u, v)$$

را ماکزیمم کند. این حاصلضرب برابر با احتمال رسیدن پیام از s به t از طریق مسیر L است. یک راه حل برای این مسئله پیشنهاد دهید.

۷. می دانیم که اختلاف قد می تواند یک عامل تاثیرگذار در مسابقات ورزشی باشد (شاید تنها دلیل باخت تکراندوکار ایرانی در مقابل حریف مراکشی در مسابقه فینال المپیک مسئله اختلاف قد بود!) حال دو گروه ورزشکار

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} \text{ و } B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

داریم که می خواهیم دو به دو مسابقه دهند. اگر تابع $h()$ قد یک فرد را مشخص کند، می خواهیم هر ورزشکار از گروه A با یک ورزشکار از گروه B متناظر کنیم بطوریکه

$$\sum_{i=1}^n (|h(a_i) - h(\sigma(a_i))|)$$

کمینه شود. اینجا $\sigma : A \rightarrow B$ تناظر یک به یک بین A و B را مشخص می کند. برای این مسئله یک الگوریتم حریصانه پیشنهاد دهید که مجموع اختلاف قد ها را کمینه می کند.

۸. مریم خیلی مهمانی دوست دارد و وضع مالی اش هم خوب است. او به این فکر می کند که چه افرادی را به مهمانی اش دعوت کند. او می خواهد مهمانی جوری باشد که افراد احساس غریبی نکنند و عین حال برای هم خیلی هم تکراری نباشند. برای همین او این قانون را وضع می کند که هر فردی که دعوت می شود باید حداقل ۴ فرد دیگر (غیر از میزبان) را بشناسد و حداقل ۴ نفر هم در مهمانی باشند که نمی شناسد. هر فردی که دعوت می شود میزبان را می شناسد. فرض کنید که مریم از دایره آشنایش می داند هر فرد دقیقا چه کسانی را می شناسد (شناختن اینجا یک رابطه دو طرفه است). با این قانونی که مریم وضع کرده است، کمک کنید که او بیشترین تعداد افراد را به مهمانی اش دعوت کند.