

درس مبانی نظریه محاسبه

جلسه بیست و یکم

تصمیم ناپذیری و روش تقلیل بین مسائل

Undecidability and the reduction method

آیا ماشین تورینگ M رشته w را می‌پذیرد؟

$$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ یک ماشین تورینگ است که رشته } w \text{ را می‌پذیرد} \}$$

در جلسه گذشته نشان دادیم زبان A_{TM} تصمیم ناپذیر است. به عبارت دیگر، با داشتن توصیف ماشین تورینگ M و رشته w ، الگوریتمی وجود ندارد که مشخص کند آیا ماشین M رشته w را می‌پذیرد یا نه.

مروری بر اثبات تصمیم ناپذیر بودن A_{TM} :

فرض کردیم الگوریتم H برای مسئله A_{TM} وجود دارد (برهان خلف)

$$H(\langle M, w \rangle) = \begin{cases} \text{stops and accepts} & \text{if } M \text{ accepts } w \\ \text{stops and rejects} & \text{if } M \text{ does not accept } w. \end{cases}$$

با استفاده از H ، الگوریتم D را ساختیم که ورودی اش توصیف یک ماشین تورینگ است. اگر ماشین داده شده خودش را قبول کرد، الگوریتم D جواب reject می دهد و اگر ماشین داده شده توصیف خودش را قبول نکند، الگوریتم D جواب accept می دهد.

$$D(\langle M \rangle) = \begin{cases} \text{accept} & \text{if } M \text{ does not accept } \langle M \rangle \\ \text{reject} & \text{if } M \text{ accepts } \langle M \rangle. \end{cases}$$

الگوریتم D روی توصیف خودش $\langle D \rangle$ باید بصورت زیر عمل کند.

$$D(\langle D \rangle) = \begin{cases} \text{accept} & \text{if } D \text{ does not accept } \langle D \rangle \\ \text{reject} & \text{if } D \text{ accepts } \langle D \rangle. \end{cases}$$

اما این یک تناقض است. اگر D توصیف خودش را رد کند باید آن را قبول کند! (به همین ترتیب اگر D توصیف خودش را قبول کند، باید آن را رد کند!)

پس فرض ما مبنی بر وجود الگوریتم H برای زبان A_{TM} باید نادرست باشد.
در نتیجه A_{TM} تصمیم ناپذیر است. \square

اثبات قبل از دیدگاهی دیگر

فرض کنید ماشینهای تورینگ را به ترتیب بنویسیم M_1, M_2, M_3, \dots

بر اساس این ترتیب می‌توانیم جدول زیر را تصور کنیم. هر سطر و ستون مرتبط با یک ماشین تورینگ است. در درایه مربوط به سطر i و ستون j نتیجه محاسبات ماشین تورینگ M_i روی توصیف ماشین تورینگ M_j نوشته شده است (نتایج فرضی است). عبارت ∞ به معنی عدم توقف ماشین است.

| | $\langle M_1 \rangle$ | $\langle M_2 \rangle$ | $\langle M_3 \rangle$ | $\langle M_4 \rangle$ | \dots |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------|
| M_1 | <i>accept</i> | ∞ | <i>accept</i> | ∞ | |
| M_2 | <i>accept</i> | <i>accept</i> | <i>accept</i> | <i>accept</i> | |
| M_3 | ∞ | <i>reject</i> | ∞ | <i>reject</i> | \dots |
| M_4 | <i>accept</i> | <i>accept</i> | ∞ | <i>reject</i> | |
| \vdots | | | \vdots | | |

با استفاده از ماشین تصمیم گیرنده (الگوریتم) H ، می‌توانیم حالات عدم توقف را تشخیص دهیم و جدول قبلی را بصورت زیر بروز کنیم.

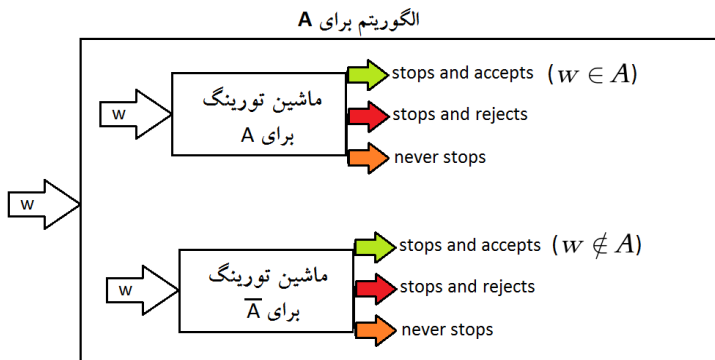
| | $\langle M_1 \rangle$ | $\langle M_2 \rangle$ | $\langle M_3 \rangle$ | $\langle M_4 \rangle$ | \dots | $\langle D \rangle$ | \dots |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|---------------------|----------|
| M_1 | <u>accept</u> | reject | accept | reject | | accept | |
| M_2 | accept | <u>accept</u> | accept | accept | | accept | |
| M_3 | reject | reject | <u>reject</u> | reject | \dots | reject | \dots |
| M_4 | accept | accept | reject | <u>reject</u> | | accept | |
| \vdots | | | \vdots | | \ddots | | |
| D | reject | reject | accept | accept | | <u>?</u> | |
| \vdots | | | \vdots | | | | \ddots |

ماشین تورینگ D که قبلا در موردش صحبت کردیم، باید یکی از ماشینهای تورینگ در جدوال بالا باشد (یکی از سطرهاى جدول). سوال این است که D روی توصیف خودش چه جوابی می‌دهد؟ هر جوابی که بدهد باعث تناقض خواهد شد. در نتیجه فرض مبنی بر وجود الگوریتم H نادرست است. \square

این یک نمونه از روش قطری diagonalization method برای اثبات است.

لم: اگر زبان A و متمم آن \bar{A} هر دو قابل تشخیص با تورینگ باشند آنگاه A تصمیم پذیر است. به عبارت دیگر

$(A \in \text{Turing-recognizable}) \text{ and } (\bar{A} \in \text{Turing-recognizable}) \rightarrow A \in \text{decidable}$



نتیجه لم قبل: متمم زبان A_{TM} قابل تشخیص با تورینگ نیست. به عبارت دیگر،

$$\overline{A_{TM}} \notin \text{Turing-recognizable}$$

اثبات: اگر $\overline{A_{TM}}$ قابل تشخیص با تورینگ باشد، از آنجا که A_{TM} قابل تشخیص با تورینگ است، زبان A تصمیم پذیر خواهد شد. این متناقض با یافته‌های ماست. \square

مسائل تصمیم ناپذیر دیگر

با علم به اینکه A_{TM} تصمیم ناپذیر است، می‌توانیم نشان دهیم زبانهای دیگری هم هستند که تصمیم ناپذیرند. این کار را با استفاده از روش تقلیل reduction method انجام می‌دهیم.

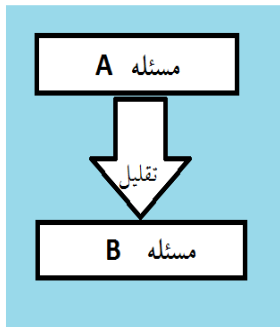
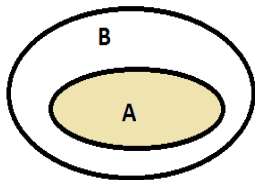
فرض کنید می‌خواهیم نشان دهیم زبان B تصمیم ناپذیر است. چگونه این کار را انجام دهیم؟

یک راه این است که مانند اثبات تصمیم ناپذیری A_{TM} مستقیماً از روش قطری استفاده کنیم.

یک راه دیگر استفاده از روش تقلیل است. اگر بتوانیم نشان دهیم با فرض تصمیم پذیر بودن B ، مسئله A_{TM} تصمیم پذیر خواهد شد (تناقض)، آنگاه ثابت کرده‌ایم B نیز تصمیم پذیر نیست. یعنی از یک الگوریتم برای B یک الگوریتم برای A_{TM} استخراج می‌کنیم.

Reduction Method

تعریف: مسئله A را تقلیل - پذیر به مسئله B گویند اگر با یک الگوریتم برای B بتوان مسئله A را حل کرد. اینطور نشان داده‌ایم که مسئله A از مسئله B سختتر نیست. به عبارت دیگر، مسئله B حداقل به سختی مسئله A است.



اگر با یک الگوریتم برای B
توان مسئله A را حل کرد

تقلیل در علم، فلسفه، فرهنگ و سیاست

- ◀ تقلیل جهانشناسی به فیزیک (علوم طبیعی)
- ◀ تقلیل فلسفه به منطق و زبانشناسی
- ◀ تقلیل هوش به توانایی حل مسئله
- ◀ تقلیل روانشناسی به روانپزشکی و بیوشیمی
- ◀ تقلیل مشکلات کلان کشور به تحریمهای اقتصادی!
- ◀ تقلیل دین به شریعت و مناسک مذهبی
- ◀ ...

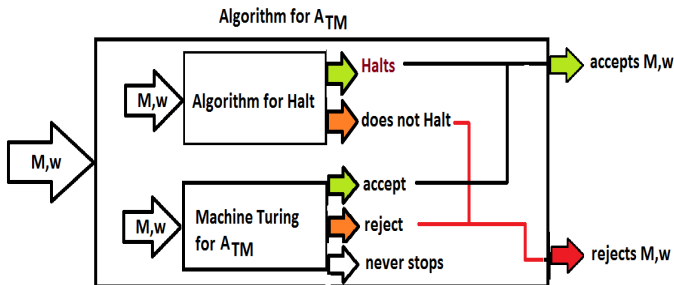
مسئله توقف ماشین تورینگ

$Halt =$

$\{ \langle M, w \rangle \mid \text{یک ماشین تورینگ است که روی رشته } w \text{ متوقف می شود} \}$

قضیه: مسئله $Halt$ تصمیم ناپذیر است.

اثبات: از روش تقلیل استفاده می کنیم. نشان می دهیم اگر الگوریتمی برای $Halt$ وجود داشته باشد، آنگاه مسئله A_{TM} را می توان حل کرد. (مسئله A_{TM} را به مسئله $Halt$ تقلیل می دهیم).



فرض کنید الگوریتم T مسئله $Halt$ را حل می کند. برای حل A_{TM} دو کار را همزمان انجام می دهیم. دقت کنید، در مسئله A_{TM} می خواهیم بدانیم ماشین M رشته w را می پذیرد یا نه.

- ▶ اجرای M روی رشته w شبیه سازی می کنیم. اگر M متوقف شد، می دانیم که رشته w را پذیرفته است یا نه.
- ▶ همزمان از الگوریتم T هم استفاده می کنیم و چک می کنیم آیا ماشین M روی رشته w متوقف می شود یا نه. اگر جواب این بود که متوقف نمی شود می دانیم که ماشین M رشته w را نمی پذیرد. پس اجرای بند بالا (شبیه سازی) را قطع می کنیم.

$$E_{\text{TM}} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) = \emptyset \}.$$

قضیه: E_{TM} تصمیم ناپذیر است.

اثبات: با روش تقلیل.