

۱. بطور مختصر اثباتی برای گزاره‌های زیر ارائه کنید. فرض کنید ماشین تورینگ دو نواره است. یک نوار فقط خواندنی که ورودی روی آن قرار گرفته است. یک نوار خواندنی-نوشتنی برای انجام محاسبات.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ TIME}(t(n)) &\subseteq \text{SPACE}(t(n)) \\ \bullet \text{ SPACE}(t(n)) &\subseteq \text{TIME}(2^O(t(n))) \end{aligned}$$

۲. زبان زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Non-Bipartite} = \{G \mid G \text{ دوبخشی نیست}\}$$

$$\text{Non-Bipartite} \in L^2 \text{ نشان دهید}$$

۳. نشان دهید زبان UCYCLE عضو کلاس L است.

$$\text{UCYCLE} = \{G \mid G \text{ دور ندارد}\}$$

راهنمایی: ببینید چگونه می‌توانید با استفاده از پیمایش DFS، درخت را از غیر درخت تشخیص دهید.

۴. یک سکه سالم را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. احتمالات زیر را بدست آورید.

(آ) تعداد شیرها از خطها بیشتر باشد

(ب) حداقل ۴ شیر متوالی داشته باشیم.

۵. دو نفر پشت سر هم بازی می‌کنند. احتمال برد در هر رقابت $\frac{1}{2}$ است و مستقل از بازیهای قبلی است. هر فردی که تعداد بردش به n رسید بازی تمام می‌شود. با چه احتمالی فرد بازنده در k رقابت برنده شده است؟

۶. فرض کنید که یک سکه اریب biased داریم که می‌دانیم احتمال آمدن شیر p است. یعنی

$$Pr[\text{شیر}] = p, \quad Pr[\text{خط}] = 1 - p,$$

نشان دهید چگونه می‌توان با استفاده از این سکه اریب، پرتاب سکه نااریب unbiased را شبیه‌سازی کرد. برای سکه نااریب داریم

$$Pr[\text{خط}] = \frac{1}{2} = Pr[\text{شیر}]$$

(راهنمایی: سکه اریب را چند بار پرتاب کنید.) بطور متوسط سکه اریب را چندبار باید پرتاب کنیم تا یک پرتاب سکه نااریب شبیه‌سازی شود؟

۷. فرض کنید می‌خواهید عددی تصادفی با توزیع یکنواخت از میان اعداد $\{0, 1, \dots, n-1\}$ تولید کنید. برای این کار فقط یک سکه سالم در اختیار دارید. برای تولید یک عدد تصادفی از مجموعه مذکور چگونه از سکه استفاده می‌کنید؟ بطور متوسط چند بار سکه را پرتاب می‌کنید؟

۸. در گراف غیر جهتدار G ممکن است چندین برش کمینه سراسری global min-cut وجود داشته باشد. با استفاده از تحلیل الگوریتم Karger (که در کلاس ارائه شد) نتیجه بگیرید که حداکثر $\frac{n(n-1)}{2}$ برش کمینه متفاوت می‌تواند وجود داشته باشد.

۹. فرض کنید آیلین و بابک هر دو یک بردار n بعدی (متشکل از اعداد صفر و یک) دارند. فرض کنید A بردار آیلین و B بردار بابک باشد. آیلین و بابک می‌خواهند بدانند که بر داری که در اختیار دارند یکسان است یا خیر.

$$A = B \text{ ?}$$

برای این کار، آیلین می‌تواند بردار خود را تمام و کامل به بابک بفرستد و بابک عمل چک را انجام دهد و نتیجه را اطلاع دهد اما انتقال بیتها هزینه‌بر است. راهی پیشنهاد دهید که آیلین و بابک با ارسال تعداد بیت کمتر از n ، با احتمال حداقل $1 - 1/k$ تساوی $A = B$ را چک کنند. فرض کنید آیلین و بابک یک منبع بیت تصادفی مشترک دارند (فرض کنید اگر آیلین و بابک به آسمان نگاه کنند هر دو یک رشته بیت کاملاً تصادفی یکسان را می‌بینند).

۱۰. در این تمرین یک الگوریتم تصادفی برای مسئله ۳-SAT پیشنهاد می‌کنیم. می‌خواهیم الگوریتم پیشنهادی را تحلیل کنیم.

توصیف الگوریتم. فرض کنید فرمول ورودی ϕ باشد. با یک مقداردهی تصادفی برای متغیرهای ϕ شروع کن (هر متغیر با احتمال یکسان true یا false است). حال هر بار یک جمله C_i (کلاز) که ارضا نشده است را انتخاب کن و مقدار یکی از متغیرهای C_i را عوض کن. این کار را حداکثر n انجام بده. اگر در نهایت همه جمله‌ها ارضا شدند، گزارش کن که ϕ صدق پذیر است در غیر این صورت گزارش کن که ϕ صدق پذیر نیست.

- با فرض اینکه ϕ صدق پذیر است نشان دهید احتمال اینکه الگوریتم یک مقداردهی تصدیق کننده را پیدا کند حداقل $(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})^{n/2}$ است. راهنمایی: فرض کنید A یک مقداردهی باشد که همه جملات فرمول را ارضا کند. با احتمال $\frac{1}{2}$ مقداردهی شروع نصف مقادیر A را درست حدس زده است. در هر قدم با چه احتمالی یکی دیگر مقادیر درست حدس زده می‌شود؟

- با توجه به گزاره قبلی، با فرض اینکه فرمول ورودی صدق پذیر باشد، الگوریتم بالا را چقدر باید تکرار کنیم تا به احتمال حداقل $\frac{3}{4}$ جواب درست بدهیم؟

- الگوریتم پیشنهادی از چه نوعی است؟ RP ، CoRP ، ZPP و شاید هیچ کدام.