فصل ۱

مجموعه های شمارای نامتناهی و ناشمارا

۱.۱ مجموعه های متناهی و نامتناهی

به یادبیاورید هنگامی که مفهوم مجموعه را معرفی کردیم، مجموعه متناهی را مجموعه ای نامیدیم که فقط شامل تعداد متناهی عنصر باشد. از اینجا نتیجه می شود مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ یک مجموعه متناهی نیست، به عبارت دیگر یک مجموعه نامتناهی است.

در واقع فرض کنیم n یک عدد طبیعی دلخواه باشد و f نیز تابعی از $\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ در $\mathbb{N}$ است. فرض کنیم

$$k = ۱ + \max\{f(۱), f(۲), \ldots, f(n)\}$$

روشن است که $k \in \mathbb{N}$ اما بنابر نحوه انتخاب k، برای هر $x \in \{۱,۲,۳,\ldots,n\}$، داریم $f(x) \neq k$. در نتیجه، f پوشا نیست. بنابراین f دوسویی نیست. چون f و n دلخواه بودند، نتیجه می شود هیچ تناظر یک به یکی بین $\mathbb{N}$ و مجموعه $\{۱,۲,\ldots,n\}$ نمی توان برقرار کرد.

به این ترتیب برای این که نشان دهید مجموعه A نامتناهی است، باید نشان دهیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، هیچ تابع دوسویی از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ در A وجود ندارد.

چون در این روش بایستی تعداد حالات زیادی (در واقع نامتناهی) را نشان دهیم که به تناقض می انجامند،

روش مناسبی برای نشان دادن «نامتناهی بودن» A نیست.

حال می خواهیم یک تعریف دقیق تر ریاضی برای این مفهوم ارائه دهیم. برای این‌که زمینه تعریف راحت‌تری برای نامتناهی بودن فراهم شود به مثال زیر توجه کنید.

۱- مشاهده:

فرض کنیم $E = \{۲, ۴, ۶, \ldots\}$ مجموعه تمام اعداد طبیعی زوج باشد.

روشن است که نگاشت

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow E$$

$$n \mapsto ۲n$$

یک نگاشت یک به یک پوشاست و درنتیجه یک تناظر یک به یک بین مجموعه اعداد طبیعی و زیر مجموعه اکید آن E، یعنی اعداد زوج برقرار می گردد.

۲- مشاهده:

تابع $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که به صورت $f(n) = n + ۱$ تعریف می شود، یک تابع یک به یک است ولی پوشا نیست زیرا ۱ سایه هیچ عنصری از $\mathbb{N}$، تحت f نیست. به عبارت دیگر

$$f(\mathbb{N}) = \{۲, ۳, ۴, ۵, \ldots\} \subsetneq \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots\}$$

پس بنابر تعریف، $\mathbb{N}$ یک مجموعه نامتناهی است. نحوه عمل این تابع را می توان در جدول زیر ملاحظه نمود.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	$\ldots$
$f(n) = n + ۱$	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	$\ldots$

چون پیدا کردن یک تابع با یک ویژگی خاص، مثلاً یک به یک بودن، در مقابل بررسی همه توابع، راحت‌تر است، این دو مشاهده، ما را به سمت تعریف زیر دقیق زیر از نامتناهی بودن هدایت می کند

تعریف ۱. مجموعه X نامتناهی است اگر زیرمجموعه ای سره مانند Y وجود داشته باشد به طوری که یک تناظر یک به یک بین X و Y وجود داشته باشد.

مجموعه متناهی مجموعه ای است که نامتناهی نباشد. یعنی هیچ تناظر یک به یکی بین مجموعه و زیر مجموعه سره آن وجود نداشته باشد.

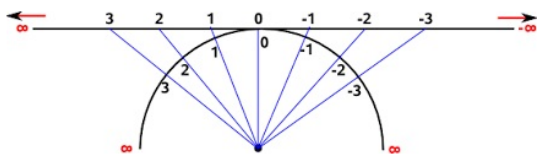
به عبارت دیگر یک مجموعه X نامتناهی است اگر و تنها اگر یک تابع یک به یک $f : X \longrightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که $f(X)$ یک زیر مجموعه سره X باشد.
به این ترتیب، و با توجه به مثال‌های دو مشاهده فوق، از این تعریف، به آسانی نتیجه می‌شود $\mathbb{N}$ یک مجموعه نامتناهی است.

مثال ۲. ۱. مجموعه تهی $\varnothing$ و مجموعه تک عضوی $\{a\}$ متناهی‌اند.

زیرا روشن است که $\varnothing$ هیچ زیر مجموعه سره‌ای ندارد. پس نمی توان تناظر بین $\varnothing$ و زیر مجموعه آن برقرار نمود.

تک عضوی $\{a\}$ تنها دارای یک زیر مجموعه سره تهی است که آموختیم هیچ تابعی از مجموعه تهی در $\{a\}$ وجود ندارد.

۲. مجموعه $\mathbb{R}$ یک مجموعه نامتناهی است زیرا یک تناظر یک به یک بین $\mathbb{R}$ و نقاط مجموعه $(-۱,۱)$ می توان برقرار کرد. یک راه دیگر برای تعریف یک تناظر یک به یک بین $\mathbb{R}$ و $(-۱,۱)$ تابع زیر است



شکل ۱.۱: تناظر یک به یک بین نقاط نیم دایره و خط $\mathbb{R}$

$$g : (-۱,۱) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{۲}\right)$$

۳. $\mathbb{Z}$ یک مجموعه نامتناهی است زیرا تابع $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}$ که به صورت زیر تعریف می شود

$$f(x)=\begin{cases} -k & x=۲k \quad \text{اگر} \\ \left[\frac{۲k-۱}{۲}\right] & x=۲k-۱ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

تابعی یک به یک و پوشاست.

قضیه ۳. (الف) هر ابر مجموعهٔ یک مجموعه نامتناهی، یک مجموعه نامتناهی است.

(ب) هر زیر مجموعهٔ یک مجموعه متناهی، متناهی است.

اثبات. (الف) مجموعه X را نامتناهی و Y را یک ابر مجموعه X می گیریم. یعنی $X\subseteq Y$. آنگاه بنابرتعریف (۱) یک تابع یک به یک $f:X\longrightarrow X$ وجود دارد به طوری که $f(X)\neq X$. تابع $g:Y\longrightarrow Y$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$g(y)=\begin{cases} f(y) & y\in X \quad \text{اگر} \\ y & y\in Y-X \quad \text{اگر} \end{cases}$$

روشن است که g تابعی یک به یک است و $g(Y)\neq Y$. اکنون از تعریف (۱) نتیجه می شود که Y نامتناهی است.

(ب) مجموعه Y را متناهی و X را یک زیر مجموعه Y می گیریم، یعنی $X\subseteq Y$. برای این که نشان دهیم X متناهی است، خلاف آن را فرض می کنیم؛ یعنی X نامتناهی است. اما در این صورت بنابر (الف)، مجموعه Y باید نامتناهی باشد. این یک تناقض است. بنابراین مجموعه X متناهی است. □

حال می خواهیم بدانیم اگر از یک مجموعه نامتناهی یک یا تعداد متناهی عضو برداریم، آیا مجموعه حاصل باز هم نامتناهی است؟ قبل از آن اجازه دهید با دو مثال ایده‌ای برای پاسخ درست به این سوال را در ذهن خود شکل دهیم.

باز از همان مثال آشنا، یعنی مجموعه نامتناهی $\mathbb{N}$ شروع می کنیم.

مشاهده: به کمک تابع $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ که به صورت $f(n)=n+۱$ تعریف می شود، نشان دادیم مجموعه $X=\mathbb{N}$ نامتناهی است.

نمودار این تابع به صورت زیر است

$$\begin{array}{lccccccccc} n: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & \cdots & \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\ f(n)=n+۱: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & \cdots \end{array}$$

حالت اول: اگر عضو $x_۰ = ۱$ را از $\mathbb{N}$ برداریم، مجموعه $\mathbb{N} - \{x_۰ = ۱\} = \{۲,۳,۴,۵,\dots\}$ به دست می آید. این مجموعه نامتناهی است.

برای نشان دادن درستی این ادعا از تابع f استفاده می کنیم و تابع $g : \mathbb{N} - \{۱\} \longrightarrow \mathbb{N} - \{۱\}$ را به صورت $g(n) = n + ۱$ تعریف می کنیم.

ملاحظه می کنید که $f(\mathbb{N} - \{۱\}) = \{۲,۳,۴,۵,\dots\}$. نمودار g به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\begin{array}{lcccccccc} n: & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & \cdots & \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\ g(n)=n+۱: & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & \cdots \end{array}$$

حالت دوم: ولی اگر یک عدد دیگر را به عنوان $x_۰$ برداریم، مثلاً $x_۰ = ۵$، آنگاه $\mathbb{N} - \{x_۰۵\} = \{۱,۲,۳,۴,۶,۷,۸,۹,\dots\}$.

حال تابع $g : \mathbb{N} - \{۵\} \longrightarrow \mathbb{N} - \{۵\}$ را به صورت بالا نمی توان تعریف کرد زیرا عدد ۵ عضو $\mathbb{N} - \{۵\}$ نیست در صورتی که سایه $f(۴) = ۵$ است. در این حالت تابع g را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$g(n) = \begin{cases} n + ۱ & n \neq ۴ \text{ اگر} \\ ۱ & n = ۴ \text{ اگر} \end{cases}$$

یعنی

n	۱	۲	۳	۴		۶	۷	$\dots$
$g(n) =$	۲	۳	۴	۱		۷	۸	$\dots$

اگر به صورت دیگر بخواهیم نمایش دهیم شکل زیر را داریم.

$$\begin{array}{lcccccccc} n: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & & ۶ & ۷ & \cdots & \\ g(n)=: & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & & ۶ & ۷ & ۸ & \cdots \end{array}$$

۲- مشاهده ای دیگر:

حال نگاشت $g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ که با $g(n)=۲n$ تعریف می شود را در نظر بگیرید. روشن است که این نگاشت یک به یک است و پوشا نیست (اعداد فرد سایه هیچ عنصری از $\mathbb{N}$ تحت g نیستند).

$n:$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$\cdots$						
$g(n)=۲n:$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳ $\cdots$

حالت اول: اگر عضو $x_{\circ}=۱$ را از $\mathbb{N}$ برداریم، مجموعه $\mathbb{N}-\{x_{\circ}=۱\}=\{۲,۳,۴,۵,\dots\}$ به دست می آید. این مجموعه نامتناهی است.

برای نشان دادن درستی این ادعا از تابع f استفاده می کنیم و تابع $g:\mathbb{N}-\{۱\}\longrightarrow\mathbb{N}-\{۱\}$ را به صورت $g(n)=۲n$ تعریف می کنیم.

ملاحظه می کنید که $f(\mathbb{N}-\{۱\})=\{۲,۳,۴,۵,\dots\}$. یا به صورت نموداری، به صورت زیر قابل نمایش است.

$n:$	۲	۳	۴	۵	۶	$\cdots$						
$g(n)=۲n:$	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳ $\cdots$

حالت دوم: ولی اگر یک عدد دیگر را به عنوان $x_{\circ}$ برداریم، مثلاً $x_{\circ}=۴$، آنگاه $\mathbb{N}-\{x_{\circ}=۴\}=\{۱,۲,۳,۵,۶,۷,۸,۹,\dots\}$. حال تابع $g:\mathbb{N}-\{۴\}\longrightarrow\mathbb{N}-\{۴\}$ را به صورت بالا نمی توان تعریف کرد زیرا عدد ۴ عضو $\mathbb{N}-\{۴\}$ نیست در صورتی که سایه $f(۲)=۴$ است. در این حالت تابع g را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$g(n)=\begin{cases} ۲n & \text{اگر } n\neq ۲ \\ ۱ & \text{اگر } n=۲ \end{cases}$$

یعنی

n	۱	۲	۳	۵	۶	۷	$\dots$
$g(n) =$	۲	۷	۶	۱۰	۱۲	۱۴	$\dots$

اگر به صورت دیگر بخواهیم نمایش دهیم شکل زیر را داریم.

$n:$ ۱ ۲ ۳ ۵ ۶ ۷ $\dots$

$g(n) =:$ ۱ ۲ ۳ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ $\dots$

قضیه ۴. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی است. فرض کنید $x_{\circ} \in X$ یک عضو دلخواه باشد. آنگاه $X - \{x_{\circ}\}$ نیز یک مجموعه نامتناهی است.

اثبات. بنابر تعریف یک مجموعه نامتناهی، یک زیر مجموعه سره Y از X و یک تابع دو سویی $f : X \longrightarrow Y$ وجود دارد. چون $Y \subset X$ پس می توان تابع f را به عنوان تابعی یک به یک از X در X در نظر گرفت به طوری که $Y = f(X)$. حال بر حسب این که $x_{\circ}$ در $f(X)$ هست یا $x_{\circ} \notin f(X)$ اثبات را ارائه می دهیم. در هر حالت تابعی مانند $g : X\{x_{\circ}\} \longrightarrow X - \{x_{\circ}\}$ می سازیم که یک به یک باشد ولی پوشا نباشد. آنگاه بنابر تعریف مجموعه نامتناهی حکم قضیه را نتیجه می گیریم.

(حالت اول) چون $x_{\circ} \in \underbrace{f(X)}_{Y}$ پس یک $x_{۱} \in X$ وجود دارد به طوری که $x_{\circ} = f(x_{۱})$. حال تابع

$$g : X - \{x_{\circ}\} \longrightarrow X - \{x_{\circ}\}$$

را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \neq x_{۱} \\ x_{۲} & \text{اگر } x = x_{۱} \in X - \{x_{\circ}\}. \end{cases}$$

که در آن $x_{۲}$ یک عنصر ثابت اختیاری مجموعه ناتهی $X - \underbrace{f(X)}_{Y}$ است، تعریف می کنیم. چون $f : X \longrightarrow X$ یک به یک است پس تحدید آن نیز یک به یک است.

$$g(X - \{x_{\circ}\}) = f(X - \{x_{\circ}, x_{۱}\}) \cup \{x_{۲}\} \neq X - \{x_{\circ}\}$$

پس بنابرتعریف $X - \{x_\circ\}$ یک مجموعه نامتناهی است.

(حالت دوم) در این حالت $x_\circ \in X - f(X)$ است.

یک تابع $g : X - \{x_\circ\} \longrightarrow X - \{x_\circ\}$ به صورت $g(x) = f(x)$ برای هر $x \in X - \{x_\circ\}$ تعریف می کنیم. چون $f : X \longrightarrow X$ یک به یک است پس، تحدید آن $g : X - \{x_\circ\} \longrightarrow X - \{x_\circ\}$ نیز یک به یک است. به علاوه

$$g(X - \{x_\circ\}) = f(X) - \{f(x_\circ)\} \neq X - \{x_\circ\}$$

بنابراین در این حالت نیز $X - \{x_\circ\}$ نامتناهی است.

$\square$

مثال ۵. فرض کنید $\{x_\circ, x_1, \dots\} \subset \mathbb{R}$ به طوری که برای هر دواندیس متمایز i, j، $x_i \neq x_j$.

حال تابع $f : X \longrightarrow X$ که به صورت $f(x_n) = x_{n+1}$ تعریف می شود، به روشی مشابه تمرین قبل نشان داده می شود که اگر یک عضو $x_\circ$ را از X برداریم، به روشی مشابه تمرین قبل می توان دید چرا $X - \{x_\circ\}$ نامتناهی است.

مثال ۶. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی باشد.

۱. فرض کنیم $x_\circ \in X$. قرار می دهیم $X_1 = X - \{x_\circ\}$. بنابر قضیه ۴، X_1 نامتناهی است.

۲. فرض کنیم $x_1 \in X_1 = X - \{x_\circ\}$. بنابر قضیه ۴، $X_2 = X_1 - \{x_1\} = X - \{x_\circ, x_1\}$یک مجموعه نامتناهی است.

۳. به روشی مشابه، فرض کنید $x_2 \in X_2$ آنگاه بنابرقضیه ۴، $X_3 = X_2 - \{x_2\} = X - \{x_\circ, x_1, x_2\}$ یک مجموعه نامتناهی است.

۴. به استقرا فرض کنیم $X_k = X - \{x_\circ, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ یک مجموعه نامتناهی باشد. فرض کنیم $x_k \in X_k$ در این صورت بنابر قضیه ۴ ، $X_k - \{x_k\} = X - \{x_\circ, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ یک مجموعه نامتناهی است.

۵. پس بنابراصل استقرای ریاضی، برای هر k، مجموعه $X - \{x_0, \dots, x_k\}$ یک مجموعه نامتناهی است.

یکی از اصول شمارش یک مجموعه Y، ایجاد یک تناظر بین این مجموعه و یک مجموعه شمارش‌پذیر دیگر است. ما این اصل را در حالت کلی تر زیر به کار می بریم.

قضیه ۷. فرض کنیم $g : X \longrightarrow Y$ یک تناظر یک به یک باشد. اگر مجموعه X نامتناهی باشد، Y نیز نامتناهی است.

اثبات. چون X نامتناهی است، بنابرتعریف (۱) یک تابع یک به یک $f : X \longrightarrow X$ وجود دارد به طوری که $f(X) \neq X$. چون $g : X \longrightarrow Y$ یک تناظر یک به یک است، $g^{-1} : Y \longrightarrow X$ نیز یک تناظر یک به یک است. اکنون به نمودار توابع یک به یک زیر توجه می کنیم.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "g^{-1}"'] & Y \\
X \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

در نتیجه $h = g \circ f \circ g^{-1} : Y \longrightarrow X$ که ترکیبی از توابع یک به یک است، یک تابع یک به یک است. بالاخره داریم

$$h(Y) = (g \circ f \circ g^{-1})(Y) = (g \circ f)(g^{-1}(Y))$$
$$= (g \circ f)(X) = g(f(X))$$

و $g(f(X)) \neq Y$ زیرا $f(X) \neq X$.

پس $h(Y)$ یک زیر مجموعه سره Y است و از این رو Y نامتناهی است. $\square$

نتیجه ۸. فرض کنیم $g : X \longrightarrow Y$ یک تناظر یک به یک است. اگر مجموعه X متناهی باشد، Y نیز متناهی خواهد بود.

نمادگذاری ۹. چون از این به بعد مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ به طور مکرر به کار گرفته می شود برای کوتاه‌تر کردن نمایش آن، یک علامت خاص به کار می‌بریم. قرار داد می کنیم این مجموعه را با $\mathbb{N}_k$ نمایش دهیم.

$$\mathbb{N}_k = \{۱, ۲, \ldots, k\}$$

در مثال زیر نشان می‌دهیم این مجموعه، یک مجموعه متناهی است.

مثال ۱۰. برای هر $k \in \mathbb{N}$، مجموعه $\mathbb{N}_k$ یک مجموعه متناهی است.

اثبات. این حکم را با استقرا به اثبات می رسانیم. **پایه استقراء:** می دانیم مجموعه تک عضوی $\mathbb{N}_۱ = \{۱\}$ یک مجموعه متناهی است.

فرض استقراء: فرض کنیم $\mathbb{N}_k$ متناهی است.

حکم استقراء: مجموعه $\mathbb{N}_{k+۱} = \mathbb{N} \cup \{k+۱\}$ را در نظر بگیرید.

اگر $\mathbb{N}_{k+۱}$ نامتناهی باشد، آنگاه بنابر ۴، مجموعه $\mathbb{N}_k = \{k+۱\} - \mathbb{N}_{k+۱}$ نیز نامتناهی است که این مخالف فرض متناهی بودن $\mathbb{N}_k$ است. پس اگر $\mathbb{N}_k$ متناهی باشد، آنگاه $\mathbb{N}_{k+۱}$ نیز متناهی است.

بنابر اصل استقرای ریاضی، برای هر $k \in \mathbb{N}$، مجموعه $\mathbb{N}_{k+۱}$ نیز متناهی است. $\square$

حال نشان می دهیم یک رابطه نزدیک بین یک مجموعه متناهی ناتهی و یک مجموعه $\mathbb{N}_k$ وجود دارد.

قضیه ۱۱. مجموعه X متناهی است اگر و فقط اگر یا $X = \varnothing$ یا X با یک $\mathbb{N}_k$ در تناظر یک به یک قرار می گیرد.

اثبات. ۱-$\Longrightarrow$: اگر X تهی باشد یا با یک $\mathbb{N}_k$ در تناظر یک به یک قرار گیرد، آنگاه بنابر نتیجه ۸، مجموعه X متناهی است.

۲-$\Longleftarrow$: می دانیم به کمک هم ارزی $p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$، می توانیم عکس نقیض حکم را ثابت می کنیم.

اگر $X \neq \varnothing$ و X با هیچ‌یک از $\mathbb{N}_k$ ها در تناظر یک به یک نباشد، نشان می دهیم X یک مجموعه نامتناهی خواهد بود.

چون $X \neq \varnothing$، یک $x_1 \in X$ وجود دارد. اما $X_1 = X - \{x_1\}$ یک مجموعه تهی نیست، زیرا اگر $X_1 = \varnothing$ آنگاه $X = \{x_1\}$ و در تناظر یک به یک با $\mathbb{N}_1$ قرار می گیرد که مخالف فرض نامتناهی بودن X است.

به طور مشابه، چون $X_1 = X - \{x_1\} \neq \varnothing$، می توان عنصر x_2 را از آن برداشت و مجموعه $X - \{x_1, x_2\}$ تهی نیست.

با ادامه این روش، فرض کنید که عناصر $x_1, x_2, \ldots, x_k$ را از X انتخاب کرده ایم، آنگاه $X - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ تهی نیست. زیرا اگر تهی بود با $\mathbb{N}_k$ در تناظر قرار می گرفت که خلاف فرض نامتناهی بودن X است.

به این ترتیب همیشه می توانیم یک عنصر x_{k+1} از $X - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ انتخاب کنیم.

پس بنابر اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n، یک زیر مجموعه سره X، مانند $\{x_1, \ldots, x_n\}$ وجود دارد.

مجموعه x_n های انتخابی را با Y نشان می دهیم.

$$Y = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

حال تابع $g : Y \longrightarrow Y - \{x_1\}$ را که با $g(x_k) = x_{k+1}$ تعریف می شود، در نظر بگیرید. $Y - \{x_1\}$ یک زیر مجموعه Y است و از طریق g در تناظر یک به یک با Y قرار می گیرد. پس بنابر تعریف ۱ (مجموعه نامتناهی)، Y نیز نامتناهی خواهد بود. □

با نگاهی دقیق به اثبات فوق، می توان نتیجه زیر را ثبت کرد.

نتیجه ۱۲. هرگاه X یک مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه X حاوی یک زیر مجموعه مانند Y است که با $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک قرار می گیرد.

سوال ۱۳. ۱. نشان دهید مجموعه های $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ نامتناهی اند.

۲. نشان دهید هرگاه A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، ـنگاه $A \cup B$ نیز نامتناهی است.

۳. نشان دهید هرگاه A نامتناهی باشد، آنگاه $A \times A$ نیز نامتناهی است.

۴. نشان دهید هر گاه A و B دو مجموعه متناهی باشند، $A \cup B$ نیز متناهی است. همچنین نشان دهید هرگاه $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ مجموعه هایی متناهی باشند آنگاه $A = A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n$ نیز یک مجموعه متناهی است.

۵. هر گاه مجموعه A چنان باشد که هر ابر مجموعه آن که اکیداً شامل A است، نامتناهی است. نشان دهید A نیز نامتناهی است.

۶. هرگاه مجموعه A چنان باشد که هر زیر مجموعه سره آن متناهی باشد، نشان دهید A نیز متناهی است.

۷. نشان دهید هرگاه مجموعه $A \Delta B = A - B \cup B - A$ یک مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه یا مجموعه A یا B نیز نامتناهی اند.