درس مبانی نظریه محاسبه

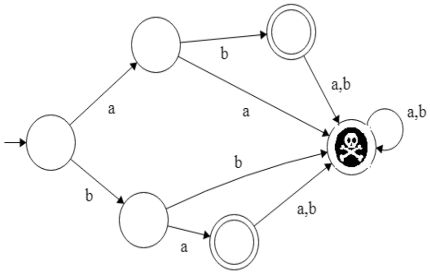
جلسه هشتم

حل چند مسئله مربوط به فصل اول

طراحی ماشین متناهی

یک ماشین متناهی برای زبان زیر طراحی کنید.

$$L = \{ab, ba\}$$

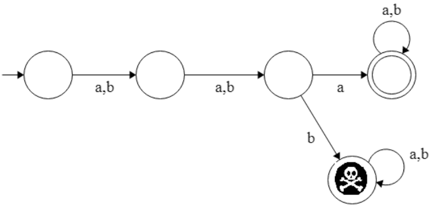


$$L = ab + ba$$

طراحی ماشین متناهی

یک ماشین متناهی برای زبان زیر طراحی کنید. $\Sigma = \{a, b\}$

رشته‌های به طول حداقل 3 بطوریکه حرف سوم آنها a باشد.

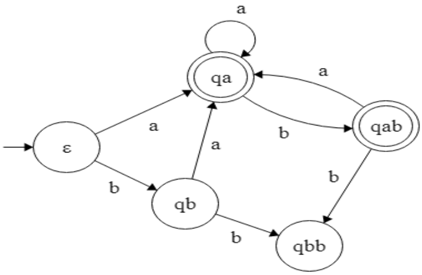


$$L = (aaa + aba + bba + baa)\Sigma^*$$

طراحی ماشین متناهی

یک ماشین متناهی برای زبان زیر طراحی کنید. $\Sigma = \{a, b\}$

رشته‌های که حداقل یک a دارند و زیررشته bb را ندارند.

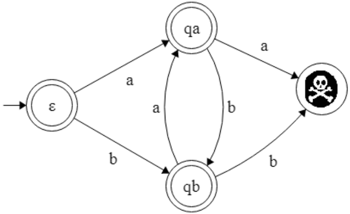


$$L = a^*(ba^+)^* + a^*(ba^+)^*b + a^+$$

طراحی ماشین متناهی

یک ماشین متناهی برای زبان زیر طراحی کنید. $\Sigma = \{a, b\}$

رشته‌هایی که هر دو حرف متوالی متفاوت باشند.



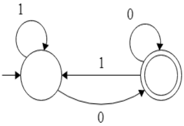
$$L = (ab)^*(a+\epsilon) + (ba)^*(b+\epsilon) + \epsilon$$

طراحی ماشین متناهی

یک ماشین متناهی برای زبان زیر طراحی کنید. $\Sigma = \{0, 1\}$

همه رشته‌هایی که معادل یک عدد زوج هستند. برای مثال عدد 110 زوج است چون معادل 6 است ولی عدد 1011 فرد است چون معادل 11 است.

حرف آخر رشته باید 0 باشد.

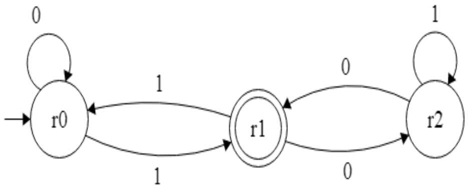


$$L = \Sigma^* 0$$

طراحی ماشین متناهی

یک ماشین متناهی برای زبان زیر طراحی کنید. $\Sigma = \{0, 1\}$

همه رشته‌هایی که معادل دهدهی آنها را می‌توان بصورت $3k + 1$ نوشت.
برای مثال عدد 111 معادل 7 است و جزو زبان است اما 1011 معادل 11 است و جزو زبان نیست.



r_0 وضعیت باقیمانده صفر موقع تقسیم بر 3 است. r_1 وضعیت باقیمانده یک است. r_2 وضعیت باقیمانده دو است.

واورن رشته: اگر w یک رشته باشد، واورن w را با w^R نشان می‌دهیم.

$$w = baba \quad \Rightarrow \quad w^R = abab$$
$$w = abc \quad \Rightarrow \quad w^R = cba$$

تعریف : اگر L یک زبان باشد آنگاه تعریف می‌کنیم

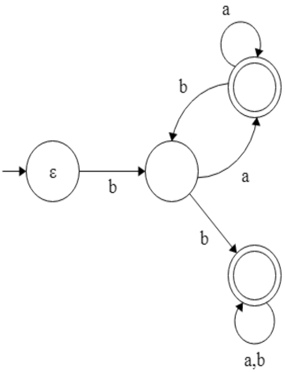
$$L^R = \{w^R \mid w \in L\}$$

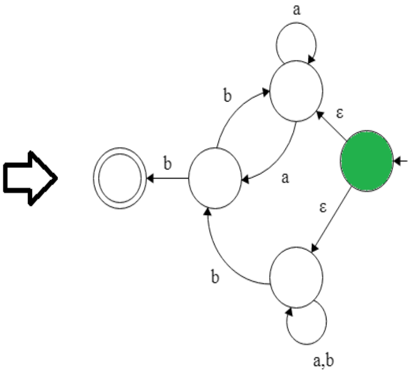
مسئله : اگر A یک زبان منظم باشد نشان دهید A^R هم یک زبان منظم است.

جواب مسئله: اگر A یک زبان منظم باشد، پس ماشین متناهی M وجود دارد بطوریکه $L(M) = A$. نشان می‌دهیم با انجام تغییراتی در ماشین M می‌توان یک ماشین متناهی برای زبان A^R ساخت.

می‌توانیم فرض کنیم که ماشین M تنها یک وضعیت پذیرش دارد (چرا؟)

کافیست جهت فلشها را برعکس کنیم. وضعیت پذیرش M به وضعیت شروع تبدیل می‌شود. وضعیت شروع M را هم وضعیت پذیرش می‌کنیم.





تعریف: اگر w یک رشته غیر تهی باشد، $RemoveFirst(w)$ رشته‌ای است که از حذف اولین حرف w حاصل می‌شود.

$$w = baba \quad \Rightarrow \quad RemoveFirst(w) = aba$$
$$w = abc \quad \Rightarrow \quad RemoveFirst(w) = bc$$

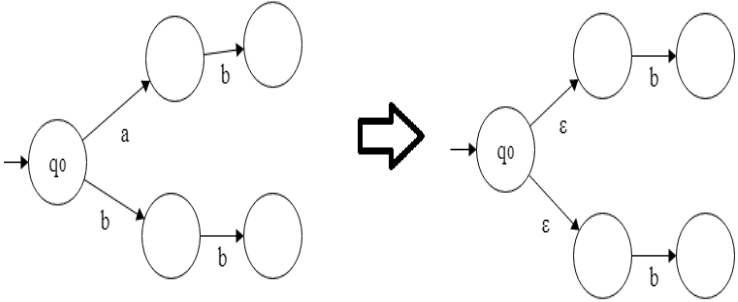
تعریف : اگر L یک زبان باشد آنگاه تعریف می‌کنیم

$$RemoveFirst(L) = \{RemoveFirst(w) \mid w \in L\}$$

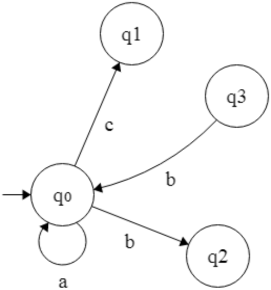
مسئله : اگر A یک زبان منظم باشد نشان دهید $RemoveFirst(A)$ هم یک زبان منظم است.

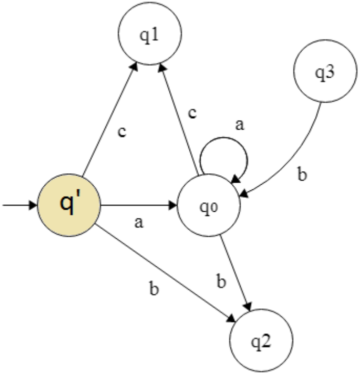
جواب مسئله: اگر A یک زبان منظم باشد، پس ماشین متناهی قطعی $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ وجود دارد بطوریکه $L(M) = A$. نشان می‌دهیم با انجام تغییراتی در ماشین M می‌توان یک ماشین متناهی برای زبان A^R ساخت.

اول برای سادگی فرض کنید وضعیت شروع M فلش ورودی ندارد. این فرض را بعدا حذف می‌کنیم. با داشتن این فرض، کافی است برچسب همه فلشهای خروجی از q_0 را تبدیل به ϵ کنیم.



حال فرض کنید q_0 فلش ورودی داشته باشد. در این حالت کافی است که وضعیت q' به ماشین M اضافه کنیم و از q' به وضعیت هایی که q_0 به آنها فلش دارد، فلش با همان برچسپها اضافه کنیم.





مسئله : نشان دهید زبان زیر منظم نیست.

$$L = \{w \in \{a\}^* \mid \text{یک عدد اول است } |w|\}$$

اثبات با برهان خلف: فرض کنید L منظم باشد. پس شرایط لم تزریق در مورد L باید صادق باشد. حال فرض کنید عدد p در صورت لم را انتخاب کرده‌ایم. می‌توانیم فرض بگیریم که p یک عدد اول است (اگر نبود، کوچکترین عدد اول بزرگتر از p را انتخاب می‌کنیم.) رشته زیر را در نظر بگیرید

$$w = a^p$$

یک تقسیم بندی دلخواه از w به سه قسمت x و y و z در نظر بگیرید. فرض کنید طول y برابر با q باشد.

$$w = \underbrace{a \ldots a}_{x}\underbrace{\overbrace{a \ldots a}^{q}}_{y}\underbrace{a \ldots a}_{z}$$

در نتیجه همه اعداد زیر باید اول باشند.

$$p-q,\ p,\ p+q,\ p+2q,\ p+3q,\ \ldots,\ p+iq,\ \ldots$$

از این میان، بالاخص برای $i=p$ عدد $p+iq$ باید اول باشد. اما عدد $p+pq$ اول نیست. یک تناقض. پس زبان L نمی‌تواند منظم باشد.

تمرین : نشان دهید زبان زیر منظم نیست.

$$L = \{w \in \{a\}^* \mid \exists\, n \geq 0,\ |w| = n^2\}$$