روش انتگرال گیری گاوس

در این روش نقاط و ضرایب همگی مجهول فرض می‌شوند. لذا در فرمول

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) + E$$

$(m+1)$ نقطهٔ x_0، ...، x_m و $(m+1)$ ضریب w_0، ...، w_m مجهول هستند.

برای به دست آوردن این $2m+2$ مجهول قرارمی‌دهیم: $E=0$ برای

$$f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^{2m+1}$$

به عبارت دیگر کاری می‌کنیم که $\sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k)$ برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ $2m+1$ دقیق باشد. واضح است که این روش از روشهای متناظر در روش نیوتن ـ کوتز دقیقتر است.

قاعده دو نقطه‌ای گاوس

به دلایلی که بعداً شرح می‌دهیم، فرمولهای گاوس را برای بازه $[-1,1]$ به دست می‌آوریم. در این صورت واضح است که بازه‌های $[a,b]$ و $[-1,1]$ را به سادگی می‌توان به هم تبدیل کرد.

با تغییر متغیر:

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)u + (b+a)\right]$$

داریم:

$$dx = \frac{(b-a)}{2}\,du$$

لذا:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \psi(u)\,du$$

که در آن

$$\psi(u) = \frac{(b-a)}{2} f\left(\frac{1}{2}((b-a)u + (b+a))\right)$$

پس، فرمول دو نقطه‌ای گاوس را برای تقریب $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ چنین به دست می آوریم.

می‌خواهیم داشته باشیم:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{1} w_k f(x_k) + E}$$

برای تعیین x_0، x_1، w_0 و w_1 قرار می‌دهیم: $E=0$ برای $f(x) = 1, x, x^2, x^3$

مشابه روش نیوتن ـ کوتز، در اینجا نیز دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$f(x)=1: \qquad \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 = w_0 + w_1 \qquad (1)$$

$$f(x)=x: \qquad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = w_0 x_0 + w_1 x_1 \qquad (2)$$

$$f(x)=x^2: \qquad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 \qquad (3)$$

$$f(x)=x^3: \qquad \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 \qquad (4)$$

مشاهده می‌شود که چهار معادله و چهار مجهول داریم که نسبت به w_0 و w_1 خطی ولی نسبت به x_0 و x_1 غیرخطی هستند. برای حل دستگاه چنین عمل می کنیم:

معادلهٔ (۲) را در x_0^2 ضرب و با معادله (۴) جمع می‌کنیم: $w_1 x_1^3 - w_1 x_0^2 x_1 = 0$

بنابراین،

$$w_1 x_1 (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = 0$$

در تساوی بالا ثابت می‌کنیم که تنها $(x_1 + x_0) = 0$ و بقیهٔ عوامل سمت چپ تساوی مخالف صفر هستند. این مطلب را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید $w_1 x_1 = 0$

از این تساوی و (۲) نتیجه می‌گیریم: $w_0 x_0 = 0$

و با توجه به (۳) نتیجه می شود: $\frac{2}{3} = 0$ که یک تناقض است. پس فرض $w_1 x_1 = 0$ باطل است و $w_1 x_1 \neq 0$. اکنون فرض می‌کنیم: $x_1 - x_0 = 0$ که از آن نتیجه می‌شود: $x_1 = x_0$

با استفاده از (۲) داریم: $0 = (w_0 + w_1)\, x_1$

که با توجه به (۱) نتیجه می‌گیریم: $0 = 2x_1$ که خلاف $w_1 x_1 \neq 0$ است.

پس $x_1 - x_0 \neq 0$. از این رو، باید داشته باشیم:

$$x_1 + x_0 = 0$$

یعنی، $x_1 = -x_0$ و چون x و x_1 صفر نیستند، فرض کنید x_0 کوچکتر از x_1 باشد.

$$x_1 > 0 \quad , \quad x_0 < 0$$

از (۳) به دست می‌آوریم:

$$\frac{۲}{۳} = w_0x_0^۲ + w_1x_0^۲ = (w_0+w_1)x_0^۲$$

که با توجه به (۱) نتیجه می‌دهد: $x_0^۲ = \frac{۱}{۳}$

بنابراین، $x_0 = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $x_1 = -x_0 = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ضمناً از (۲) نتیجه می‌شود که: $۰ = w_0 x_0 - w_1 x_0 = (w_0 - w_1) x_0$

که چون $x_0 \neq ۰$، لذا $w_0 - w_1 = ۰$

نهایتاً با استفاده از (۱) داریم: $w_0 = w_1 = ۱$

بنابراین، فرمول دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از:

$$\boxed{\int_{-۱}^{۱} f(x)\,dx \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = f\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) + f\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)}$$

این فرمول برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ سوم دقیق است و تنها از دو مقدار تابع استفاده می‌کند. بنابراین، قاعدهٔ دو نقطه‌ای گاوس از نظر دقت و خطا تقریباً مشابه قاعده سیمسون است که مقادیر بیشتری از تابع را نیاز داشته و در نتیجه از آن بهتر است.

مقادیر x_0، x_1، ...، و w_0، w_1، ... به ازای m های مختلف محاسبه شده و در جدولهایی در اختیار هستند:

m	x_i (ریشه های چندجمله ای لژاندر)	w_i
۱	$x = -x_0 = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$w_1 = w_0 = ۱$
۲	$x_1 = ۰$ $x_۲ = -x_0 = \sqrt{\frac{۳}{۵}}$	$w_1 = \frac{۸}{۹}$ $w_۲ = w_0 = \frac{۵}{۹}$
۳	$x_۲ = -x_1 \simeq ۰/۳۳۹۹۸۱۰۴$ $x_۳ = -x_0 \simeq ۰/۸۶۱۱۳۶۳۱$	$w_۲ = w_1 \simeq ۰/۶۵۲۱۴۵۱۵$ $w_۳ = w_0 = ۰/۳۴۷۸۵۴۸۵$
۴	$x_۲ = ۰$ $x_۳ = -x_1 = ۰/۵۳۸۴۶۹۳۱$ $x_۴ = -x_0 = ۰/۹۰۶۱۷۹۸۵$	$w_۲ = ۰/۵۶۸۸۸۸۸۹$ $w_۳ = w_1 = ۰/۴۷۸۶۲۸۶۷$ $w_۴ = w_0 = ۰/۲۳۶۹۲۶۸۹$

از جمله خصوصیات فرمولهای انتگرالگیری گاوس این است که اگر m فرد باشد تعداد نقاط زوج است و داریم:

$$\begin{cases} x_{m-i} = -x_i \ , \\ w_{m-i} = w_i \ , \end{cases} \qquad i = ۰, ۱, \dots, \frac{m-۱}{۲}$$

و اگر m زوج باشد تعداد نقاط فرد است و

$$\begin{cases} x_{m-i} = -x_i \ , & i = ۰, ۱, \dots, \frac{m}{۲} - ۱ \\ x_{\frac{m}{۲}} = ۰ \ , & \\ w_{m-i} = w_i \ , & i = ۰, ۱, \dots, \frac{m}{۲} - ۱ \end{cases}$$

این خصوصیات در جدول مشاهده می شود.

از خصوصیات بارز فرمولهای انتگرالگیری گاوس آن است که تمام ضرایب w_i مثبت هستند و $|w_i| \leq ۱$. این ویژگی و دقت بالای این فرمولها استفاده از آنها را اجتناب ناپذیر می‌کند.

مثال

با استفاده از فرمول سه نقطه‌ای گاوس تقریبی از انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I = \int_{۱}^{۳} \frac{\sin^{۲} x}{x} dx$$

حل: با تغییر متغیر $x = u + ۲$ داریم:

$$I = \int_{-۱}^{۱} \frac{\sin^{۲}(u+۲)}{u+۲} du$$

$$f(u) = \frac{\sin^{۲}(u+۲)}{u+۲} \ , \qquad I = \frac{۵}{۹} f\left(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}\right) + \frac{۸}{۹} f(۰) + \frac{۵}{۹} f\left(\sqrt{\frac{۳}{۵}}\right)$$

$$\simeq ۰/۷۹۴۲۸۳۳$$

(فرمول دو نقطه‌ای گاوس)

$$I = \int_{۰}^{۱} e^{-x^{۲}} dx$$

$$x = \frac{(b-a)u + (b+a)}{۲} = \frac{u+۱}{۲}, \qquad dx = \frac{۱}{۲}du$$

$$I = \int_{-۱}^{۱} e^{-(\frac{u+۱}{۲})^۲} \times \frac{۱}{۲}du = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} e^{-(\frac{u+۱}{۲})^۲} du$$

$$f(u) = e^{-(\frac{u+۱}{۲})^۲} \quad , \qquad I = \frac{۱}{۲}\left[f(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + f(\frac{\sqrt{۳}}{۲})\right] \simeq ۰/۷۴۶۵۸$$

$$I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin t \, dt$$

(فرمول چهار نقطه‌ای گاوس)

حل: با تغییر متغیر $x = \frac{\pi}{۴}(u+۱)$ داریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{۴}\int_{-۱}^{۱} \sin\frac{\pi(u+۱)}{۴} du = ۱/۰۰۰۰۰۰$$

تحقیق کنید که تقریب ۱/۰۰۰۰۰۰ را با ۶۵ نقطه و به قاعدهٔ سیمسون می‌توان بـه دست آورد!