درس مبانی نظریه محاسبه

ادامه گرامرهای مستقل از متن

Context-Free Grammers

تمرین: یک گرامر مستقل از متن برای زبان زیر بنویسید.

$$L = \{x\#y \mid x, y \in \{a\}^*, |x| = |y|\}$$

$$S \to aSa \mid \#$$

$$L' = \{x\#y \mid x, y \in \{a\}^*, |x| \neq |y|\}$$

زبان L' را بصورت اجتماع دو زبان می‌نویسیم.

$$L' = \overbrace{\{x\#y \mid x, y \in \{a\}^*, |x| > |y|\}}^{L'_1} \cup \overbrace{\{x\#y \mid x, y \in \{a\}^*, |x| < |y|\}}^{L'_2}$$

یک گرامر برای L'_1 می‌تواند بصورت زیر باشد.

$$S_1 \to aA$$
$$A \to aA$$
$$A \to aAa \mid \#$$

یک گرامر برای L'_2 می‌تواند بصورت زیر باشد.

$$S_2 \rightarrow Ba$$
$$B \rightarrow Ba$$
$$B \rightarrow aBa \mid \#$$

حال برای ساختن یک گرامر برای زبان L' دو گرامر بالا را کنار هم می‌گذاریم و قانون $S \rightarrow S_1 \mid S_2$ را به آن اضافه می‌کنیم.

$$S \rightarrow S_1 \mid S_2$$

$$S_1 \rightarrow aA$$
$$A \rightarrow aA$$
$$A \rightarrow aAa \mid \#$$

$$S_2 \rightarrow Ba$$
$$B \rightarrow Ba$$
$$B \rightarrow aBa \mid \#$$

تعریف: زبان A را مستقل از متن گوییم اگر گرامر مستقل از متن G وجود داشته باشد بطوریکه $L(G) = A$

نتیجه: اگر A و B مستقل از متن باشند آنگاه $A \cup B$ نیز مستقل از متن است.

اثبات: فرض کنید $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ یک گرامر مستقل از متن برای زبان A باشد. به همین ترتیب فرض کنید $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$ یک گرامر مستقل از متن برای زبان B باشد. با استفاده از تغییر نام متغیرها، می‌توانیم فرض بگیریم که V_1 و V_2 اشتراک ندارند. بدیهی است که گرامر زیر یک گرامر مستقل از متن برای $A \cup B$ است.

$$G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\},\ \Sigma_1 \cup \Sigma_2,\ R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\},\ S)$$

تمرین: یک گرامر مستقل از متن برای زبان زیر بنویسید.

$$A = \{w \in \{a,b\} \mid n_a(w) = n_b(w)\}$$

جواب:

$$G: \qquad S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid \epsilon$$

باید نشان دهیم زبان A و گرامر G معادل هستند. برای اینکار باید دو چیز را نشان دهیم. اول

$$L(G) \subseteq A$$

این بدیهی است چون در گرامر G هر بار که یک a تولید می‌شود یک حرف b نیز تولید می‌شود (و بالعکس) پس تعداد a ها و b ها در همه رشته‌هایی تولید شده برابر است.

دوم باید نشان دهیم

$$A \subseteq L(G)$$

یک w که در A باشد را در نظر بگیرید. باید نشان دهیم w توسط گرامر G تولید می‌شود. این کار را با استفاده از استقرای قوی روی طول رشته نشان می‌دهیم.

پایه استقرا: $w = ab$ یا $w = ba$. بدیهی است که در این حالت w توسط گرامر G تولید می‌شود.

فرض استقرا: همه رشته‌های با طول حداکثر $2k$ در زبان A توسط گرامر G تولید می‌شوند.

حکم استقرا: همه رشته‌های با طول $2k+2$ در زبان A توسط G تولید می‌شوند.

فرض کنید w طولش $2k + 2$ باشد. چهار حالت برای w وجود دارد:

- $w = aw'b$

در این حالت برای تولید w ابتدا از قانون $S \to aSb$ استفاده می‌کنیم. چون تعداد a ها و b ها در رشته میانی w' برابر است و طول w' برابر با $2k$ است، با فرض استقرا w' توسط گرامر G تولید می‌شود. در نتیجه w توسط گرامر G تولید می‌شود.

- $w = bw'a$

مشابه حالت قبلی است.

- $w = aw'a$

نشان می‌دهیم $w = xy$ بطوریکه x و y ناتهی هستند و جزو زبان A هستند. قبل از اینکه این را اثبات کنیم، دقت کنید در این حالت ابتدا از قانون $S \to SS$ شروع می‌کنیم. چون طول x و y حداکثر $2k$ است، با فرض استقرا، این رشته ها توسط G تولید می‌شوند و در نتیجه xy توسط G تولید می‌شود.

$$w = w_1 w_2 \ldots w_n$$

تابع $f(x) = n_a(x) - n_b(x)$ را در نظر بگیرید. در اینجا $n_a(x)$ تعداد a ها در رشته x است.

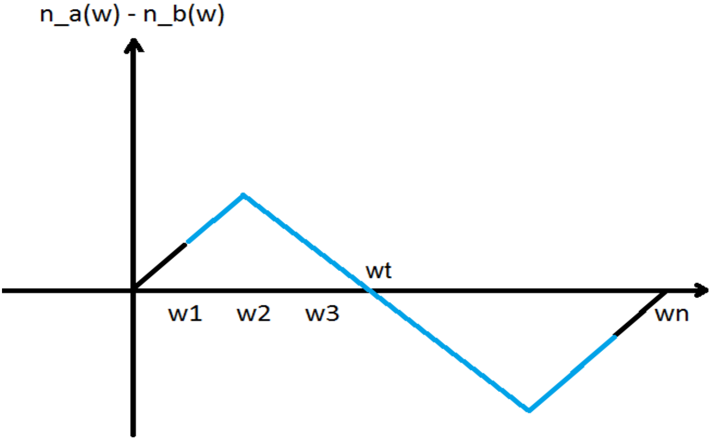
تابع f در ابتدای رشته w صفر است. $f(\epsilon) = 0$

در آخر رشته w نیز صفر است. $f(w) = 0$

چون اولین کاراکتر w حرف a است. تابع f در ابتدا اوج می‌گیرد و مثبت است.
$f(w_1) = 1$

همچنین چون آخرین کاراکتر a است، باید داشته باشیم
$f(w_1 \ldots w_{n-1}) = -1$

از بحثها نتیجه می‌گیریم که تابع f باید جایی در میانه رشته w صفر باشد.
$f(w_1 \ldots w_t) = 0$



$$x = w_1 \dots w_t$$

$$y = w_{t+1} \dots w_n$$

تمرین: نشان دهید گرامر G' هم معادل با زبان A است.

$$A = \{w \in \{a,b\} \mid n_a(w) = n_b(w)\}$$

$$G' : \qquad S \rightarrow \epsilon \mid aSbS \mid bSaS$$