

مبانی آنالیز عددی

آنالیز عددی علم توسعه، طراحی، تجزیه و تحلیل الگوریتم های کارآمد برای حل مسائل پیوسته ی ریاضی است . مسائل پیوسته، همان مدل های ریاضی پدیده های طبیعی شامل پدیده های فیزیکی، شیمیایی، اقتصادی، مالی، زیستی و ... هستند که معمولاً در قالب یک مساله ریاضی ظاهر می شوند .

از این رو دامنه این حوزه از دانش بشری می تواند بسیار گسترده تلقی شود و در حالت کلی می توان چنین اظهار نمود که مدل سازی ریاضی بخشی از دانش آنالیز عددی است که به طور طبیعی ارتباط این علم را با سایر علوم کاربردی و مهندسی مشخص می کند .

بررسی این مدل های پیوسته در قالب یک مساله ریاضی از نگاه تئوری نظیر شرایط وجود و یکتایی جواب و یا روش های حل (تعیین جواب دقیق یا همان فرم بسته جواب) را دانشجویان تا حدی در دروس ریاضی عمومی، مبانی آنالیز ریاضی و معادلات دیفرانسیل آموخته اند. لیکن از آنجا که در عمل، چنین روش هایی در بسیاری از مواقع قادر به بدست دادن جواب هایی با فرم بسته و دقیق برای مدل های ریاضی نیستند، لذا در اکثر موارد چاره ای به جز قناعت به یک جواب تقریبی و تجزیه و تحلیل آن به کمک علم آنالیز عددی وجود ندارد .

معمولاً برای یافتن جواب تقریبی یک **مساله ریاضی** لازم است الگوریتمی طراحی کنیم که ابتدا مساله پیوسته را به یک **مساله گسسته** تبدیل نموده و سپس با استفاده از اطلاعات کافی از نحوه انجام محاسبات علمی در ماشین محاسب بتوانیم مساله را با روش های کارآمد و قابل اعتماد توسط یک ابزار محاسباتی مناسب حل کنیم.

در این درس دانشجویان با مبانی **نظری** و **اصول اولیه طراحی چنین الگوریتم هایی** آشنا می شوند.

مقدمه

برای تعیین جواب یا جوابهای یک مسئله واقعی باید مدل ریاضی آن را بسازیم و پس از تعیین راه حلی مناسب برای رسیدن به جواب، با انجام محاسبات لازم جواب را به دست آوریم. در این فرایند خطاهایی پیش می آید که انواع متفاوت دارند. آشنایی با منشأ این خطاها، نحوه بروز آنها و کنترل آنها موضوع این فصل است.

• هدفهای کلی

۱- شناخت منابع خطا

۲- بررسی منابع خطا و راههای کمینه سازی آنها

۳- شناخت انواع خطاها و رابطه آنها با دقت یک تقریب

۴- جلوگیری از رشد خطاها در محاسبات

۵- پایداری و ناپایداری در محاسبات

واژه های کلیدی:

- الگوریتم

- ماشین محاسب

- خطا

- روش های عددی عموماً شامل مراحل زیاد و هر مرحله خود شامل انجام عملیات محاسباتی زیادی است. لذا لزوم بهره گیری از یک ابزار محاسباتی در این علم اجتناب ناپذیر است.
- وقوع خطا، امری چاره ناپذیر در آنالیز عددی است و تقریباً جواب عددی هیچ مساله ریاضی فاقد خطا نیست!
- داده ها معمولاً دقیق نیست، زیرا با اندازه گیری یا تخمین و یا تقریب بدست آمده اند و لذا آگاهی از منابع خطا اهمیت دارد.

منابع خطا

- **خطای مدل**
این خطا شامل صرفنظر کردن‌ها، چشم‌پوشی‌ها و ساده‌نویسی‌ها جهت تعیین مدل ریاضی مسئله است.
- **خطای داده‌ها**
این خطا به هنگام اندازه‌گیری و برآورد مفروضات مسئله پیش می‌آید.
- **خطای نمایش اعداد**
نمایش اعشاری اکثر اعداد با تعدادی متناهی رقم امکان‌پذیر نیست. از این‌رو، انتخاب تعدادی متناهی از ارقام بسط یک عدد سبب این خطا می‌شود.
- **خطای اعمال حسابی**
غالباً در انجام محاسباتی نظیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم خطاهایی وارد مسئله می‌شود.
- **خطای روش**
روشهای عددی عموماً تکراری هستند و تقریبی از جواب دقیق را به دست می‌دهند. این تقریب‌ها خطا وارد محاسبه می‌کنند.
- از پنج منبع خطایی که ذکر شد خطای مدل و خطای داده‌ها به نوع و تعیین مدل مسئله بستگی دارند. اما، سه خطای بعدی مربوط به آنالیز عددی است.
- در این فصل خطای نمایش اعداد و خطای اعمال حسابی را مورد بررسی دقیق قرار می‌دهیم. معمولاً خطای هر روش هنگام بررسی آن روش مورد بحث قرار می‌گیرد.

اشتباه (خطای غیر قابل بخشش!)

در زبان آنالیز عددی، **یک اشتباه خطا نیست!** اشتباه ممکن است بدیهی و تاثیری اندک بر دقت محاسبات داشته باشد و یا حتی بدون تاثیر باشد. از طرفی اشتباه ممکن است چنان خطرناک باشد که نتایج محاسبه را کاملاً به هم بریزد. ما به عنوان یک کاربر حق اشتباه در محاسبات را نداریم! اگر چه خطا ناخواسته در محاسبات ممکن است ایجاد شود.

عوامل موثر در جلوگیری از اشتباه: دقت - بازبینی - آگاهی از منابع متداول اشتباه

اشتباهات متداول:

- جابجا نوشتن ارقام: $۲۲۳ \rightarrow ۲۳۲$
- خواندن غلط ارقام به خصوص ارقام تکراری: $۶۲۲۳۸ \rightarrow ۶۲۳۳۸$
- درج ممیز نادرست: $۳۵/۶ \rightarrow ۳/۵۶$
- عدم توجه به علامت ها: $-۳ \rightarrow ۳$
- مراجعه به یک سطر یا ستون اشتباه از یک ماتریس

خطای نمایش اعداد:

ساده ترین راه کاهش تعداد ارقام بامعنی یک عدد، این است که ارقام ناخواسته را حذف کنیم. این کار به گرد کردن عدد موسوم است که امروزه توسط بسیاری از ماشین های محاسب مورد استفاده قرار می گیرد.

در این روش با توجه به مقدار اولین رقم ناخواسته، تقریبی از عدد را به دست می آوریم. مثلاً در

گرد کردن تا دو رقم اعشار: $(۲D) \quad ۳/۷۸۳۰۱=۳/۷۸$ و $(۲D) \quad ۲/۳۴۷۶=۲/۳۵$

یعنی، اگر اولین رقم ناخواسته بزرگتر از ۵ باشد یک واحد به رقم قبل از آن اضافه و عدد را قطع می کنیم، و اگر اولین رقم ناخواسته کمتر از ۵ باشد عدد را بدون تغییر قطع می کنیم. اما وقتی اولین رقم ناخواسته ۵ باشد به گونه دیگری عمل می کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید:

$$(۲D) \quad ۳/۶۸۵۰۰۰۱۰۶ = ۲/۶۹$$

(توجه کنید که در مثال بالا اولین رقم ناخواسته ۵ است و بعد از آن رقم مخالف صفر وجود دارد)

$$(۲D) \quad ۱۷/۸۳۵ = ۱۷/۸۴ \quad (\text{رقم قبل از ۵ فرد است})$$

$$(۲D) \quad ۲/۴۶۵ = ۲/۴۶ \quad (\text{رقم قبل از ۵ زوج است})$$

علت اصلی در نحوه گرد کردن اعداد در دو حالت اخیر آن است که مقادیری که از اعداد کم یا به آنها اضافه می شود در عمل همدیگر را خنثی می کنند. به عبارت دیگر، در یک مسئله با محاسبات زیاد، احتمال وقوع اعداد اعشاری با رقم سوم اعشار ۵ و رقم دوم اعشار زوج یا فرد یکسان است، از این رو، میانگین خطای گرد کردن متناظر با آنها صفر است.

گرد کردن A تا n رقم اعشار

$$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots$$

I. اگر $b_{n+1} > 5$ یک واحد به b_n اضافه و عدد را از b_{n+1} قطع می‌کنیم

II. اگر $b_{n+1} < 5$ عدد را از b_{n+1} قطع می‌کنیم

III. اگر $b_{n+1} = 5$ و بعد از این رقم، رقم مخالف صفر وجود داشته باشد مانند (I) عمل می‌کنیم

IV. اگر $b_{n+1} = 5$ و بعد از این رقم، رقم دیگری نباشد، یا فقط صفر باشد، در صورتی که b_n فرد باشد

مانند (I) و در غیر این صورت مانند (II) عمل می‌کنیم.

مثال: در زیر گرد شده اعداد را تا ۳ رقم اعشار مشاهده می‌کنید:

$$73/5268 \longrightarrow 73/527$$

$$73/522368 \longrightarrow 73/522$$

$$73/1525000 \longrightarrow 73/152$$

$$73/1515000 \longrightarrow 73/152$$

$$73/627000106 \longrightarrow 73/628$$

نتیجه: بر اساس قانون فوق، خطای گرد کردن همواره کوچک تر یا مساوی با $\frac{1}{2} \times 10^{-m}$

خواهد بود که در آن m تعداد ارقام اعشار بامعنی عدد خواهد بود.