

تمرینات مبانی ریاضی: سورها، سری اول

گزاره‌های زیر را برحسب نمادهای \forall و \exists و $p(x)$ (گزاره نما) بنویسید.

۱. هر عدد اول فقط و فقط یک مقسوم علیه بزرگتر از یک دارد.

۲. برخی ماتریس های 3×3 با درایه های در \mathbb{R} وارون پذیر است.

۳. برخی ماتریس های $n \times n$ با درایه های در \mathbb{R} وارون پذیرند.

۴. هر عدد اول یا زوج است یا فرد.

۵. مجموع دو عدد اول فرد بر ۲ بخش پذیر است.

۶. مربع هر عدد صحیح باقیمانده تقسیم بر ۳ اش برابر ۰ یا ۱ است.

۷. در هندسه اقلیدسی، هر زاویه خارجی یک مثلث از زاویه داخلی غیر مجاور با آن بزرگتر است.

۸. در هندسه اقلیدسی، در هر مثلث متساوی الاضلاع، هر سه زاویه اش قابل انطباق اند.

۹. در هر مثلث ارتفاع ها هم رسند

۱۰. هر عدد اول به صورت $4k + 1$ را می توان به صورت $x^2 + y^2$ نوشت، که x, y اعدادی طبیعی اند.

۱۱. هیچ عدد اولی به صورت $4k + 1$ را نمی توان به صورت $x^2 + y^2$ نوشت که x, y اعدادی طبیعی اند.

۱۲. هر عدد طبیعی را می توان به صورت یکتایی به شکل حاصل ضربی از اعداد اول نوشت.

$$(n)(\exists p_1)(\dots)(\exists p_m)(\exists \alpha_1)(\dots)(\exists \alpha_m)(n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m})$$

۱۳. به ازای هر $n \geq 1$ ، عدد اولی چون p وجود دارد به طوری که $n \leq p \leq 2n$.
توضیح: این گزاره همواره درست است و به اصل پرتران (Bertrand's Postulate) معروف است.

$$(\forall n)(\exists p)[(n > 1) \wedge (n \leq p \leq 2n)].$$

۱۴. اگر n شی در r جعبه، که $r < n$ ، باشد، آنگاه دست کم یکی از جعبه ها حاوی بیش از یک شی است.
توضیح: همان طور که می دانید این حکم به «اصل لانه کبوتری (Pigeon Hole)» موسوم است.

ب) نقیض هر یک از گزاره های زیر را بنویسید.

۱. حد دنباله $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد \mathbb{R} یکتاست.

۲. دنباله $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد \mathbb{R} همگراست.

۳. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یکنواست

توضیح: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را یکنوا گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ با $x \geq y$ ، $f(x) \geq f(y)$ و تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را کاهشی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ آنگاه $f(x) \leq f(y)$. تابع f را یکنوا گوییم هرگاه f یا افزایشی باشد یا کاهشی.

پ) سوره‌های زیر را به صورت نمادین بنویسید

۱. حاصل ضرب هر دو عدد مختلط یک عدد مختلط است.
۲. حاصل جمع هر دو عدد مختلط یک عدد مختلط است.
۳. مجموع زوایای یک مثلث برابر 180° است.
۴. در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر مجموع دوزاویه غیر مجاور آن است.
۵. در هر مثلث متساوی الساقین، دوزاویه مجاور به دوساق برهم قابل انطباقند.
۶. در هر مثلث متساوی الاضلاع، هر سه ضلع بریکدیگر قابل انطباق اند.
۷. از یک نقطه خارج یک خط فقط و فقط یک خط به موازات آن خط می توان رسم کرد.
۸. از یک نقطه خارج یک خط فقط و فقط یک خط می توان برخط دیگر عمود رسم کرد.
۹. در مجموعه اعداد صحیح، برای هر عدد صحیح m و هر عدد غیر صفر n یک و فقط یک r و q وجود دارند به طوری که $m = nq + r$.
۱۰. هر عدد طبیعی بزرگتر از یک دارای لااقل یک مقسوم علیه اول است.
۱۱. برای هر دو عدد طبیعی بزرگتر از یک مانند m, n ، لااقل یک عدد طبیعی بزرگتر از یک، مانند d وجود دارد به طوری که هم m بر d بخش پذیر است و هم n بر d بخش پذیر است.
۱۲. برای هر دو عدد طبیعی m, n یک عدد طبیعی مانند ℓ وجود دارد به طوری که ℓ هم بر m بخش پذیر است و هم بر n .
۱۳. هرگاه برای هر دو عدد گویا مانند r, s داشته باشیم $rs = 0$ آنگاه لااقل یکی از دو عامل r یا s برابر صفرند.
۱۴. هر تابع پیوسته $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه از دامنه اش دارای حد است.
۱۵. هر تابع مشتق پذیر $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه (a, b) پیوسته است.
۱۶. مجموع هر دو تابع پیوسته از (a, b) در \mathbb{R} پیوسته است.
۱۷. حاصل ضرب هر دو تابع پیوسته از (a, b) در \mathbb{R} پیوسته است.
۱۸. در هر مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر برابر نصف وتر است.
۱۹. در هر مثلث، هر سه ارتفاع آن هم‌رس اند.
۲۰. در هر مثلث میانه های آن هم‌رسند.
۲۱. در هر مثلث، عمود منصف های هر سه ضلع مثلث هم‌رس اند.
۲۲. از هر دو نقطه متمایز یک صفحه، یک و فقط یک خط می گذرد.

۲۳. روی هر پاره خط یک و فقط یک نقطه وجود دارد که از دوسر آن به یک فاصله است.
۲۴. برای هر عدد حقیقی مثبت a یک عدد حقیقی مانند x وجود دارد به طوری که $x^2 = a$.
۲۵. برای هر عدد مثبت a و هر عدد طبیعی n یک عدد حقیقی مانند x وجود دارد به طوری که $x^n = a$.
۲۶. مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی محاطی برابر 2π است.
۲۷. مجموع زوایای داخلی هر پنج ضلعی محاطی برابر 3π است.
۲۸. مجموع زوایای داخلی هر شش ضلعی محاطی برابر 4π است.
۲۹. مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محاطی برابر $(n-2)\pi$ است.
۳۰. هر چهار ضلعی یک لوزی است.
۳۱. هر مثلث دارای یک دایره محیطی است.
۳۲. هرگاه عدد طبیعی a عدد طبیعی b را عاد کند و عدد طبیعی b عدد طبیعی c را عاد کند آنگاه a عدد c را عاد خواهد کرد.
۳۳. هرگاه برای هر دو عدد حقیقی a, b ، $a^2 + b^2 = 0$ آنگاه $a = b = 0$.
۳۴. هرگاه $a^2 + b^2 > 0$ آنگاه لااقل یکی از اعداد a یا b مخالف صفراند.
۳۵. برای هر دو عدد صحیح a, b با شرط $a \geq b$ و هر عدد طبیعی c ، $ac \geq bc$.
۳۶. (خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی) برای هر عدد حقیقی مثبت x یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $nx > 1$.