مبانی ریاضی: استقرای ریاضی

استقرا در لغت به معنای از جزء به کل رسیدن است و یکی از روشهای اثبات قضایای ریاضی، روش استقرای ریاضی است. یک حکم استقرایی، یک سور عمومی به صورت $(\forall n \in \mathbb{N})(P(n))$ است که در آن $P(n)$ گزاره نمایی درباره اشیا عالم سخن است.

یک روش بررسی درستی این سور این است که به ترتیب درستی هر یک از گزاره های $P(۱), P(۲), P(۳), \ldots$ را بررسی کنیم. ملاحظه می کنید این کار بسیار وقت گیر است و هیچ سهولتی در برهان درستی ایجاد نمی کند.

اجازه دهید با یک مثال این بحث را روشن‌تر نماییم. ادعا می کنیم گزاره نمای « $P(n) = n^۲ + n + ۴۱$، به ازای هر عدد طبیعی n، یک عدد اول است». ظاهرا بایستی به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ درستی هر یک ازگزاره های $P(۱)$، $P(۲)$، $P(۳)$، ... را بررسی کنیم و ببینیم مقدار حاصل یک عدد اول است یا خیر. در جدول زیر تعدادی از این مقادیر محاسبه شده‌اند.

$$P(۱) = ۴۳, \quad P(۲) = ۴۷, \quad P(۳) = ۵۳, \quad P(۴) = ۶۱, P(۵) = ۷۱, \ldots,$$
$$P(۳۸) = ۱۵۲۳, P(۳۹) = ۱۶۰۱, P(۴۰) = ۱۶۸۱ = ۴۱ \times ۴۱, P(۴۱) = ۴۱ \times ۴۳, \ldots$$

ملاحظه می شود که اعداد تا $P(۳۹) = ۱۶۰۱$ عدد اول هستند ولی $P(۴۰) = ۱۶۸۱ = ۴۱ \times ۴۱$ یک عدد اول نیست. به این ترتیب این نتیجه آخری نادرستی حکم فوق را نشان می دهد. این روش جایگزاری و بررسی، فقط کمک می کند یک حدس کلی درباره نتایج حاصل بزنیم. اگرچه می توانیم درستی هر مرحله را بررسی نماییم ولی حکمی را به اثبات نمی رسابیم.

یک روش ریاضی برای این که نشان دهیم $P(n)$ برای همه اعداد طبیعی برقرار است این است که نشان دهیم

(۱) $P(۱)$ درست است.

(۲) و وقتی $P(n)$ درست است نتیجه بگیریم $P(n + ۱)$ نیز درست است.

۱-حال چون فرض کرده ایم $P(۱)$ درست است پس بنابرقسمت دوم، $P(۲)$ نیز درست است.
۲-چون بنابرگام قبل $P(۲)$ درست است پس بنابرقسمت دوم $P(۳)$ درست است.
۳- چون بنابرگام قبل $P(۳)$ درست است پس بنابر قسمت دوم $P(۴)$ درست است
و همین طور الی آخر می توانیم نتیجه بگیریم به ازای هر n که $P(n)$ درست است، $P(n + ۱)$ نیز درست است.

این روش را استقرای ریاضی می نامند.

قضیه ۰.۰.۱. *(اصل استقرای ریاضی)* برای هر عدد طبیعی n فرض کنیم $P(n)$ یک ادعا در مورد اشیاء عالم سخن باشد. فرض کنیم

(۱) $P(۱)$ درست است *(مرحله پایه)*.

(۲) وقتی $P(n)$ درست است نتیجه بگیریم $P(n+1)$ نیز درست است *(مرحله استقراء)*.

آنگاه به ازای هر عدد طبیعی n، $P(n)$ درست است.

قبل از اثبات حکم فوق خاصیتی دیگر از مجموعه اعداد طبیعی را بیان می کنیم.

خاصیت خوش ترتیبی: هر زیر مجموعه ناتهی از $\mathbb{N}$ دارای کوچکترین عضو است.

خاصیت خوشترتیبی و اصل استقرای ریاضی دو گزاره هم ارزند. با پذیرش یکی درستی دیگری را از آن نتیجه می گیریم. در این جا می پذیریم که اصل خوش ترتیبی برقرار است و اصل استقرای ریاضی را نتیجه می گیریم.

اثبات. فرض کنیم سور عمومی ($P(n)$ برای همه اعداد طبیعی درست است) درست نباشد. پس لااقل یک m وجود دارد که به ازای آن $P(m)$ درست نیست. مجموعه زیر را درنظر می گیریم

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{درست‌نیست } P(k)\}.$$

چون بنابرفرض $P(m)$ درست نیست پس $m \in A$. این یعنی $A \neq \emptyset$. چون $A \subseteq \mathbb{N}$ پس بنابراصل خوش‌ترتیبی A دارای کوچکتری عضو است. فرض کنیم این کوچکترین عضو k_0 باشد. پس $k_0 - 1 \notin A$. بنابرنحوه تعریف A، $P(k_0 - 1)$ درست است. پس بنابرفرض استقراء $P((k_0 - 1) + 1) = P(k_0)$ درست است. که این متناقض با نحوه انتخاب k_0 است. بنابراین $A = \emptyset$ و حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است. $\square$

اصل استقرای ریاضی، یکی از اصول موضوعه‌ای بود که جوزپه پئانو، ریاضی دان ایتالیایی قرن نوزدهم، برای ساختن اعداد طبیعی فرض کرده بود.

ممکن است چنین تصور شود که شرط (۲) می گوید $P(n)$ درست است، چرا آن را به عنوان یک نتیجه مجدداً بیان می کنیم.

توجه کنید ما نمی گوییم $P(n)$ درست است.

بلکه می گوییم اگر $P(n)$ درست باشد آنگاه $P(n+1)$ درست است. این حکم پیشینی در اینجا فرض استقراء نامیده می شود.

> به طور خلاصه، در اثبات به کمک استقراء فرض نمی کنیم که $p(n)$ به ازای همه اعداد صحیح n درست است. فقط نشان داده می شود با درست فرض کردن $p(n)$، نتیجه می گیریم $p(n+1)$ نیز درست است. بنابراین استدلال به روش استقراء، نوعی فرض کردن یا استدلال دوری نیست.
> به طور کلی، برای گزاره نمای $P(n)$، جمله $(\forall n \in \mathbb{N})(P(n))$ درست است اگر و فقط اگر مجموعه اعدادی که $P(n)$ یک گزاره راست است برابر $\mathbb{N}$ باشد.

مثال ۱.۰.۰. فرض کنیم θ یک عدد حقیقی باشد. نشان دهید برای همه n های عضو $\mathbb{N}$،

$$(\cos\ \theta + i \sin\ \theta)^n = \cos\ n\theta + i \sin\ n\theta$$

(i) بدیهی است که برای $n=۱$ تساوی $(\cos\ \theta + i\sin\ \theta)^۱ = \cos\ \theta + i\sin\ \theta$ برقرار است.

(ii) حال فرض کنیم برای $n=k$ این تساوی برقرا باشد. یعنی

$$(\cos\ \theta + i\sin\ \theta)^k = \cos\ k\theta + i\sin\ k\theta$$

(iii) حال

$$\begin{aligned}(\cos\ \theta + i\sin\ \theta)^{k+۱} &= (\cos\ \theta + i\sin\ \theta)^k(\cos\ \theta + i\sin\ \theta)\\ &= (\cos\ k\theta + i\sin\ k\theta)(\cos\ \theta + i\sin\ \theta)\\ &= (\cos\ k\theta\cos\ \theta + i\cos\ k\theta\sin\ \theta + i\sin\ k\theta\cos\ \theta - \sin\ k\theta\sin\ \theta)\\ &= \cos\ k\theta\cos\ \theta - \sin\ k\theta\sin\ \theta + i(\sin\ k\theta\cos\ \theta + \cos\ k\theta\sin\ \theta)\\ &= \cos(k+۱)\theta + i\sin(k+۱)\theta\end{aligned}$$

مثال ۲.۰.۰. اصل ارشمیدسی برای $\mathbb{N}$. نشان دهید: برای هر دو عدد طبیعی $a,$ و b، یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $P(n): nb > a$.

b را ثابت می گیریم. حال با استقرا روی a حکم را به اثبات می رسانیم.

(i) اگر $a=۱$، n را برابر ۲ اختیار می کنیم. آنگاه $۲b > a = ۱$.

(ii) حال فرض کنیم گزاره برای وقتی که $a=k$، که k یک عدد طبیعی است، برقرار باشد. *(یعنی یک* n وجود دارد به طوری که $nb > a$ *است)*. پس بنابر این فرض یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $nb > k$. حال

$$(n+۱)b = bn + b > k + b > k + ۱$$

بنابراین حکم برای $a = k+۱$ هم برقرار است.

(iii) پس بنابر اصل استقرای ریاضی، برای تمامی اعداد طبیعی a و b این حکم که به ازای یک n، $nb > a$ برقرار است.

به طور هندسی، این مسأله بیان می کند که اگر b واحد طول باشد، آنگاه بعد از n بار کنار هم قرار دادن b، طول پارخط حاصل از طول a بزرگتر خواهد شد و به این ترتیب می توان واحد طول را برابر b اختیار کرد.

توضیح ۱.۰.۰. در اصل استقرای ریاضی، این که فرض کنیم $P(۱)$ درست است، ضروری نیست بلکه هرعدد صحیح دیگری، حتی یک عدد صحیح منفی، نیز می تواند انتخاب شود. به شرطی که $P(n_\circ)$ معنی داشته باشد. به طور دقیق‌تر می توان اصل استقراء را به صورت زیر بیان کرد.

$$[P(n_\circ) \wedge [\forall k \geq n_\circ\ [P(k) \Rightarrow P(k+۱)]]] \Longrightarrow \forall(n \geq n_\circ)(P(n)),$$

آنگاه برای هر $n \geq n_\circ$، گزاره $P(n)$ درست است.

مثال ۳.۰.۰. نشان دهید $P(n) = n^2 - n - 20 > 0$ برای همه $n > 5$.

(i) برای $n = 6$، می دانیم $P(6) = 6^2 - 6 - 20 = 10$ که روشن است که بزرگتر از یک می باشد.

(ii) فرض کنیم برای یک $k > 5$ داشته باشیم $P(k) = k^2 - k - 20 > 0$.

(iii) حال

$$P(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) - 20 = k^2 + 2k + 1 - k - 1 - 20$$
$$k^2 - k - 20 + 2k$$

چون $P(k) = k^2 - k - 20 > 0$ *(* بنابرفرض استقراء*)* و $2k > 0$ *(*چون $k > 0$*)* پس $k^2 - k - 20 + 2k > 0$.
بنابراین $P(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) - 20 > 0$.

پس بنابر اصل استقرای ریاضی $P(n) = n^2 - n - 20 > 0$ برای هر $n > 5$ درست است.

اصل استقرای ریاضی، صورت دوم: برای یک عدد طبیعی n فرض کنید $Q(n)$نشان دهنده یک خاصیتی باشد

(۱) $Q(1)$ درست است.

(۲) برای همه اعداد صحیح تا n، اگر $Q(1)$ و $Q(2)$ و $Q(3)$ و ... و $Q(n)$ درست باشد، آنگاه $Q(n+1)$ نیز درست است.

آنگاه $Q(n)$ برای همه اعداد طبیعی درست است .
وقتی این صورت اصل استقراء را به دقت بررسی کنیم، ملاحظه می شود برای اثبات درستی $Q(n+1)$، ممکن است به درستی گزاره‌هایی به غیر از گزاره $S(k)$ نیاز داشته باشیم.

مثال ۴.۰.۰. پس از n ماه آزمایش گلخانه ای، $F(n)$، یعنی تعداد گیاهانی از نوع خاص در معادله های $F(0) = 3$، $F(1) = 7$، و $F(n) = 3F(n-1) - 2F(n-2)$ برای $n \geq 2$ صدق می کنند. نشان دهید به ازای همه مقادیر $n \geq 0$، $F(n) = 2^{n+2} - 1$.
در اینجا حکم زیر را داریم

$$P(n) : F(0) = 3, F(1) = 7, \qquad F(n) = 3F(n-1) - 2F(n-2) \Longrightarrow F(n) = 2^{n+2} - 1, \forall n \geq 0$$

چون $F(0) = 2^{0+2} - 1 = 3$ پس $P(0)$ درست است. همچنین $P(1) = 2^{1+2} - 1 = 7$ پس $P(1)$ نیز درست است.
حال درستی $P(0)$، $P(1)$، $P(2)$، ...، $P(k-1)$ و $P(k)$ را می پذیریم و حالتی را درنظر می گیریم که $n =$

$k+1 \geq ۲$. بنابراین

$$\begin{aligned} F(k+۱) &= ۳F(k) - ۲F(k-۱) \\ &= ۳[۲^{k+۲} - ۱] - ۲[۲^{(k-۱)+۲} - ۱ \\ &= ۳(۲^{k+۲}) - ۳ - ۲^{(k-۱)+۳} + ۲ \\ &= ۳(۲^{k+۲}) - ۲^{k+۲} - ۱ \\ &= ۲(۲^{k+۲}) - ۱ = ۲^{(k+۱)+۲} - ۱ \end{aligned}$$

در اینجا جایگذاریهای مربوط به $F(k)$ و $F(k-۱)$ بر پایه فرض استقرا برای دو نتیجه قبلی $P(k)$ و $P(k-۱)$ صورت گرفته است.

در نتیجه بنابر اصل استقرا، $P(n)$ برای همه $n \geq ۰$ درست است.

مثال ۵.۰.۰. محاسبات زیر نشان می دهند(بدون توجه به ترتیب) اعداد ۱۴، ۱۵، ۱۶ را می توان با استفاده از اعداد فقط ۳و ۸ نوشت.

$$\begin{aligned} ۱۴ =& ۳ + ۳ + ۸, \\ ۱۵ =& ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳, \\ ۱۶ =& ۸ + ۸. \end{aligned}$$

برپایه این بررسی حدس $P(n)$ را به صورت زیر مطرح می کنیم.

حدس ۱.۰.۰. برای هر $n \in \mathbb{Z}$، اگر $n \geq ۱۴$، آنگاه n را می توان به صورت مجموعی از ارقام ۳ و ۸ نوشت.

اثبات. روشن است که $P(۱۴)$، $P(۱۵)$ و $P(۱۶)$ را می توان به صورت خواسته نوشت. فرض کنیم $P(۱۷) = ۱۷$، $P(۱۸) = ۱۸$ و ... و $P(k-۲) = k-۲$، $P(k-۱) = k-۱$ و $P(k) = k$، با $k \geq ۱۶$، را بتوانیم به صورت مجموعی از ارقام ۳و ۸ بنویسیم. اما $۳ + (k-۱) = k+۲$. پس بنابرفرض $k-۲$ را می توان برحسب مجموعی از ارقام ۳و ۸ نوشت. درنتیجه $k+۱$ را نیز می توان برحسب مجموعی از ارقام ۳و ۸ نوشت. □

تمرین:

۱. فرض کنید A یک مجموعه از اعداد طبیعی باشد. فرض کنید ۱ عضوی از A باشد و A دارای این خاصیت است که اگر n عضو A باشد، آنگاه $n+۱$ نیز عضو A است. نتیجه بگیرید A برابر مجموعه اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ است.

۲. فرض کنید مجموعه A شامل بخش از اعداد صحیح است به طوری که عدد صحیح k را داشته باشد. فرض کنید A دارای این خاصیت است که « اگر n را دربر داشته باشد، آنگاه $n+۱$ را نیز در بر داشته باشد». نشان دهید این مجموعه همه اعداد صحیح بزرگتر از k را در بردارد.

۳. نشان دهید $۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$.

۴. نشان دهید $\text{۱} + \text{۳} + \text{۵} + \cdots + (\text{۲}n - \text{۱}) = n^{\text{۲}}$.
در مورد مجموع n عدد اول ۲ تا $\text{۲}n$ چه می توان گفت؟ ادعای خود را بنویسید و با روش استدلال استقرایی درستی آن را نشان دهید.

۵. نشان دهید

$$\text{۱}^{\text{۲}} - \text{۲}^{\text{۲}} + \text{۳}^{\text{۲}} - \text{۴}^{\text{۲}} + \cdots + (-\text{۱})^{n-\text{۱}} n^{\text{۲}} = (-\text{۱})^{n-\text{۱}} n(n+\text{۱})/\text{۲}.$$

۶. نشان دهید $\text{۱}^{\text{۳}} + \text{۲}^{\text{۳}} + \cdots + n^{\text{۳}} = (\text{۱} + \text{۲} + \cdots + n)^{\text{۲}}$.

۷. با فرض $r \neq \text{۱}$، نشان دهید $\sum_{k=\text{۰}}^{k=n-\text{۱}} r^k = \frac{\text{۱}-r^n}{\text{۱}-r}$.

۸. نشان دهید $\text{۲}^n \leq n!$.

۹. کوچکترین nای که نامساوی $\text{۳}^n \leq n!$ برقرار است بیابید و بعد نشان دهید این نامساوی برای هر n بزرگتر از این عدد نیز برقرار است.

۱۰. کوچکترین nای که به ازای آن نامساوی $\text{۵}^n \leq n!$ برقرار است را بیابید و بعد نشان دهید این نامساوی به ازای هر n بزرگتر از این عدد نیز برقرار است.

۱۱. کوچکترین nای که به ازای آن نامساوی $\text{۷}^n \leq n!$ برقرار است را بیابید و بعد نشان دهید این نامساوی به ازای هر n بزرگتر از این عدد نیز برقرار است.

۱۲. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، نامساوی $n! \leq n^n$ برقرار است.

۱۳. با استقرای ریاضی ثابت کنید

$$\sum_{k=\text{۰}}^{n} \frac{\text{۱}}{k^{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۱}^{\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲}}} + \cdots + \frac{\text{۱}}{n^{\text{۲}}} < \text{۲} - \frac{\text{۱}}{n}$$

۱۴. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید

$$\text{۱}.\text{۲} + \text{۲}.\text{۳} + \text{۳}.\text{۴} + \cdots + n.(n+\text{۱}) = n(n+\text{۱})(n+\text{۲})/\text{۳}$$

۱۵. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید

$$\text{۱}.\text{۱}! + \text{۲}.\text{۲}! + \text{۳}.\text{۳}! + \cdots + n.n! = (n+\text{۱})! - \text{۱}.$$

۱۶. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید $n^{\text{۵}} - n$ بر ۵ بخش پذیر است.

۱۷. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$، عبارت $x^n - y^n$ بر $x - y$ بخش پذیر است.

۱۸. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید برای هر n، یک صفحه شطرنجی $2^n \times 2^n$ که یک خانه آن را حذف کرده اند، می تواند با شکل هایی به صورت L، مرکب از سه مربع، پوشانده شود.

اصل استقرای ریاضی، لزوماً برای اثبات درستی یک حکم ریاضی به کار نمی رود، بلکه برای تعریف برخی مفاهیم ریاضی نیز می تواند مورد استفاده قرار گیرد. به عنوان مثال، فرض کنیم x نشان دهنده یک عنصر $\mathbb{N}$ باشد. می خواهیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، حاصل‌ضرب n بار نماد x را تعریف کنیم. برای این کار قرار می دهیم: $x^0 = 1$ و سپس قرار می دهیم $x^n = x^{n-1} * x$.

این به این معناست که x^n به کمک مقدار x^{n-1} و x، که هردو قبلا محاسبه شده‌اند، تعیین می شود. چنین روابطی را روابط بازگشتی (Recursive) می نامند. به عبارت دیگر

: **« یک رابطه بازگشتی فرایند بیان جواب یک مساله برحسب جواب های ساده تر یک مساله است».**

مثال ۶.۰.۰. به عنوان مثال برای تعریف حاصل صرب n عدد متوالی ۱ تا n، برای n دلخواه به صورت زیر آن را تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} & n = 1 \\ & n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1, \quad n > 1 \text{ برای } . \end{aligned}$$

مثال ۷.۰.۰. دنباله فیبوناچی که به کمک رابطه بازگشتی زیر ساخته می شود.

$$\begin{aligned} & x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \\ & x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n > 2 \end{aligned}$$

چندجمله اول این دنباله عبارت است از:

$$\begin{aligned} n &= 2 & x_2 &= 1 + 1 = 2, \\ n &= 3 & x_3 &= 2 + 1 = 3, \\ n &= 4 & x_4 &= 3 + 2 = 5, \\ n &= 5 & x_5 &= 5 + 3 = 8, \end{aligned}$$

و به همین ترتیب الی آخر.

مثال ۸.۰.۰. فرض کنیم n و r اعدادی طبیعی باشند. علامت $C(n,r)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} & C(0,0) = 1, C(0,r) = 0, && r \neq 0 \text{ برای‌هر } \\ & C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1), && n > 0, r > 0 \text{ برای‌هر } \end{aligned}$$

حرف C در عبارت بالا حرف اول کلمه $Choose$ است، به معنای «انتخاب»، می باشد.

قضیه ۲.۰.۰. فرض کنیم r,n دوعدد طبیعی باشند به طوری که $0 \leq r \leq n$. آنگاه

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

اثبات. بااستفاده از مثال قبل و استقراء، حکم به اثبات می رسد. □

قضیه ۳.۰.۰. *(قضیه دوجمله‌ای)* اگر x,y دو متغییر و n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 + \cdots + C(n,r)x^{n-r}y^r + \cdots + C(n,n)y^n.$$

تمرین:

۱. فرض کنید $L_1 = 1, L_2 = 2$ و برای هر $n > 2$، $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. دنباله ای که به این ترتیب تعریف می شود به دنباله «لوکا» [1]موسوم است. ۱۰ جمله اول این دنباله را بنویسید. آیا می توانید حدسی کلی برای مجموع n جمله اول این دنباله را بنویسید.
توجه داشته باشید این دنباله شبیه دنباله فیبوناچی است اما تنها جمله دوم آن با جمله دوم دنباله فیبوناچی متفاوت است.

۲. فرض کنید $u_1 = 1, u_2 = 5$ و برای $n \geq 3$، $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$. نشان دهید $u_n = 2^n + (-1)^n$.

۳. فرض کنید $u_1 = 2$، $u_{n+1} = 2u_n$. پنج جمله اول این دنباله را بنویسید. با روش استقرا، نشان دهید جمله عمومی این دنباله $u_n = 2^n$ است.

۴. فرض کنید دنباله $\{u_n\}$ به صورت بازگشتی، به شکل زیر تعریف شده است.

$$u_1 = 1,\ u_n = 2^{u_{n-1}}.$$

چهار جمله اول این دنباله را بنویسید و به کمک استقراء جمله عمومی این دنباله را تعیین کنید.

[1] Lucas