

۱. الگوریتم همترازسازی بهینه را برای دو رشته زیر اجرا کنید. جدول مربوطه را محاسبه کنید. فرض کنید $\delta = 1$ و $\beta_{xy} = 1$ برای هر $x \neq y$. برای $x = y$ مقدار β_{xy} صفر است.

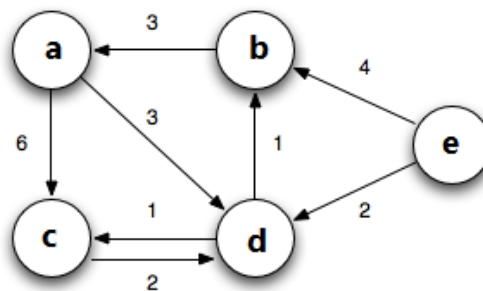
$$X = \text{salam} \quad Y = \text{madas}$$

۲. نشان دهید در الگوریتم همترازسازی بهینه اگر $\delta = 1$ و $\beta_{xy} > 2$ برای $x \neq y$ و $\beta_{xy} = 0$ برای $x = y$ آنگاه الگوریتم طولانی ترین زیردنباله مشترک میان X و Y را پیدا می کند.

یک زیردنباله مشترک میان X و Y لیستی از اندیسها در X و Y است که حروف متناظر با این اندیسها در دو رشته یکسان باشند. یک زیردنباله مشترک میان X و Y در مثال زیر بصورت برجسته نشان داده شده است.

$$X = \text{abcbbcadda} \quad Y = \text{bbcdadcbacba}$$

۳. الگوریتم بلمن فورد را برای گراف زیر با فرض اینکه a راس مقصد است اجرا کنید. جدول مربوطه را محاسبه کنید.



۴. نشان دهید اگر G یک دور منفی داشته باشد که به راس مقصد v راه دارد آنگاه دو ستون مربوط به $OPT(n-1, v)$ و $OPT(n, v)$ در الگوریتم بلمن فورد یکسان نخواهند بود.

۵. کشور فرضی زامپانیا واحد پولی اش دلار زامپانیاست. این کشور اسکناسهایی به ارزش 1, 4, 7, 13, 28, 52, 91, 365 دلار زامپانیا دارد. با استفاده از تکنیک برنامه نویسی پویا الگوریتمی طراحی کنید که برای عدد صحیح مثبت x ، کمترین تعداد اسکناس را محاسبه کند که ارزش جمعی آنها برابر با x شود. همچنین نشان دهید الگوریتم حریصانه جواب بهینه را بدست نمی آورد. (الگوریتم حریصانه برای ارزش باقیمانده هر بار بزرگترین اسکناس را برمی دارد و به این شکل کار را ادامه می دهد.)

۶. مسئله ضرب متوالی ماتریسها. فرض کنید علاقه مند هستیم حاصلضرب ماتریسی

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$$

را پیدا کنیم. اینجا هر A_i یک ماتریس است. یک روش محاسبه حاصلضرب این است که ضربها را بصورت متوالی از چپ به راست انجام دهیم. فرض کنید هزینه ضرب دو ماتریس $A_{m \times n} \times B_{n \times k}$ برابر با mnk باشد. با این فرض اگر ضرب را بصورت متوالی از چپ به راست انجام دهیم هزینه حاصلضرب $X = A_{m \times n} B_{n \times k} C_{k \times d}$ برابر با $mnk + mkd$ خواهد بود. یک راه دیگر برای محاسبه X این است که اول B را در C ضرب کنیم و سپس A را در حاصل آن ضرب کنیم. هزینه این ترتیب انجام ضربها برابر با $nkd + mnd$ است. می بینید که اگر چه ترتیب انجام ضربها در نتیجه نهایی فرقی ایجاد نمی کند اما ترتیبهای مختلف برای انجام ضربها هزینه های مختلف دارند.

با استفاده از برنامه نویسی پویا الگوریتمی با زمان چند جمله ای ارائه دهید که ترتیب بهینه را برای ضرب ماتریسها پیدا کند.

۷. دو لیست موازی از اعداد داده شده است. لیست A و لیست B. می‌خواهیم از سمت چپ شروع به حرکت کنیم و هر زمان عددی را از یکی از لیستها برداریم. می‌خواهیم مجموعه اعداد انتخاب شده ماکزیمم شود. شما می‌توانید از سمت چپ شروع به حرکت کنید و هر زمان عدد بعدی را از لیست A یا B بردارید با این محدودیت که اگر از لیستی به دیگری سوییچ کردید (تغییر لیست دادید) عدد انتخابی بعدی به حاصل جمع شما اضافه نمی‌شود. شکل زیر یک نمونه از مسئله همراه با راه حل آن را نشان می‌دهد. مجموع امتیاز کسب شده برابر است با

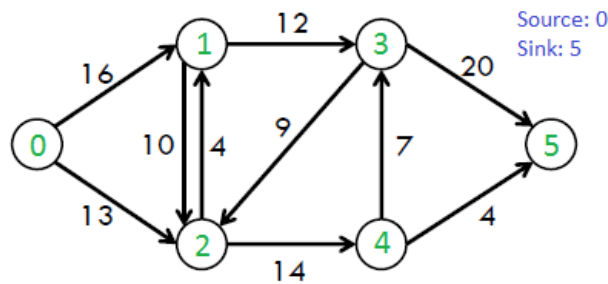
$$10 + 0 + 20 + 20 + 0 + 15 + 2 + 24$$

A	10	1	1	10	3	15	2	24
B	5	1	20	20	5	7	10	12

برای این مسئله الگوریتمی چند جمله‌ای ارائه کنید که بیشترین امتیاز را بدست آورد.

۸. فرض کنید برش (A, B) یک برش کمینه در شبکه G باشد. به ظرفیت هر یال شبکه یک واحد اضافه می‌کنیم. شبکه G' بدست می‌آید. آیا در شبکه G' نیز برش (A, B) یک برش کمینه است؟ اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید.

۹. الگوریتم فورد-فولکرسون برای پیدا کردن جریان بیشینه در شبکه زیر را اجرا کنید. در هر مرحله گراف باقیمانده را رسم کنید. یک برش از گراف که در نهایت اشباع می‌شود را بدست آورید.



۱۰. فرض کنید (S, T) و (S', T') دو برش کمینه $s-t$ در شبکه G باشند. نشان دهید که $(S \cap S', T \cap T')$ و $(S \cup S', T \cup T')$ دو برش کمینه $s-t$ در شبکه G هستند.

۱۱. الگوریتمی پیشنهاد دهید که مشخص کند که آیا رئوس گراف G را می‌توان با مجموعه‌ای از دورها پوشش داد بطوریکه دورها راس مشترک نداشته باشند. راهنمایی: از تطابق در گراف دوبخشی استفاده کنید.