تمرینات نظریه مجموعه ها: سری اول

۱. فرض کنید $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^{۲} < ۴\}$، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < ۲\}$.

(a) آیا $A \subseteq B$؟ در صورت مثبت بودن درستی ادعای خود نشان را دهید و در صورت منفی بودن یک مثال نقض ارائه دهید.

(b) آیا $B \subseteq A$؟ در صورت مثبت بودن درستی ادعای خود نشان را دهید و در صورت منفی بودن یک مثال نقض ارائه دهید.

۲. در هریک از حالت های زیر تعیین کنید آیا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ یا $A = B$ یا $A \cap B = \varnothing$. (منظور از $a \equiv b (\mod c)$ این است که a و b در تقسیم بر c هم باقی مانده‌اند).

(a)

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv ۲ (\mod ۳)\}, \quad B = \{y \in \mathbb{Z} \mid ۲y \equiv ۴ (\mod ۶)\}.$$

$A = B$. از تعریف تساوی دو مجموعه و خاصیت بخش پذیری استفاده کنید

$$x \in A \Longrightarrow x \equiv ۲ \mod ۳ \Longrightarrow x - ۲ = ۳k \Longrightarrow ۲x - ۴ = ۶k \Longrightarrow ۲x \equiv ۴ \mod ۶$$

$$\Longrightarrow x \in B \Longrightarrow A \subset B.$$

(b)

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv ۳ (\mod ۴)\}, \quad B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv ۲ (\mod ۳)\}.$$

(c)

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv ۱ (\mod ۵)\}, \quad B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv ۷ (\mod ۱۰)\}.$$

۳. با استفاده از تعریف تساوی دو مجموعه نشان دهید

(a)

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^{۲}-۳x-۱۰<۰\}=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲<x<۵\}=B.$$

راهنمایی: رابطه زیر را از شرط تعریف کننده مجموعه A می توان نوشت.

$$x\in A\Longrightarrow x^{۲}-۳x-۱۰=(x-۵)(x+۲)<۰\Longrightarrow (x-۵<۰\vee x+۲>۰)\Longrightarrow x<۵\vee x>-۲$$

فقط باید توضیح دهید چرا حالت دیگر $x-۵>۰$ و $x+۲<۰$ نمی تواند روی دهد.

(b)

$$\{x\in\mathbb{R}\mid x^{۲}-۵x+۶<۰\}=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲<x<۳\}.$$

(c)

$$\{x\in\mathbb{R}\mid x^{۲}\geq ۴\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq -۲\}\cup\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq ۲\}.$$

۴. نقیض گزاره های زیر را با استفاده از تعریف بنویسید.

$$x\in A\cup B$$

$$x\in A\cap B$$

$$x\in C_B^A$$

$$x\in A\cup B\iff x\in A\vee x\in B$$

$$\sim(x\in A\cup B)\iff\sim(x\in A\vee x\in B)\iff (x\notin A\wedge x\notin B).$$

۵. فرض کنید A و B زیر مجموعه یک مجموعه X باشند. نشان دهید تساوی های زیر برقرارند.

$$(a) A\cap B\subseteq A,\qquad (b) A\cap B\subseteq B,$$

$$(c) A\subseteq A\cup B.\qquad (d) A\subseteq A\cup B.$$

۶. فرض کنید A و B زیر مجموعه های یک مجموعه X باشند. نشان دهید

$$A \subseteq B \iff A^c \supseteq B^c.$$

۷. فرض کنید $A, B \subset X$. نشان دهید $A \subseteq B \iff A \cap B^c = \varnothing$.

۸. فرض کنید A, B, C, D زیر مجموعه های یک مجموعه X باشند. بررسی کنید کدامیک از گزاره های زیر راست اند و کدام ناراست.

(a) اگر $A \subset B$ و $C \subset D$ و $A \cap C = \varnothing$ آنگاه $B \cap D = \varnothing$.

(b) اگر $A \subset B$ و $C \subset D$ و $B \cap D = \varnothing$ آنگاه $A \cap C = \varnothing$.

۹. فرض کنید A, B, C زیر مجموعه های یک مجموعه X باشند. نشان دهید

(a) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cap C \subseteq B \cap C$.

(b) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cup C \subseteq B \cup C$.

۱۰. فرض کنید A, B, C زیر مجموعه های یک مجموعه X باشند. آیا گزاره های زیر راست اند؟ اگر بلی درستی پاسخ خود را نشان دهید در غیر اینصورت یک مثال نقض برای آن ارائه دهید.

(a) اگر $A \cap C \subseteq B \cap C$ آنگاه $A \subseteq B$.

(b) اگر $A \cup C \subseteq B \cup C$، آنگاه $A \subseteq B$.

(c) اگر $A \cup C = B \cup C$ آنگاه $A = B$.

(d) اگر $A \cap C = B \cup C$ آنگاه $A = B$.

(e) اگر $A \cup C = B \cup C$ و $A \cap C = B \cap C$ آنگاه $A = B$.

با رسم نمودار ون می توانید برای درستی یا نادرستی گزاره های بالا می توانید حدسی اولیه بزنید و بعد تلاش کنید حدستان را ثابت کنید.

۱۱. فرض کنید A,B,C زیر مجموعه های یک مجموعه X باشند. اگر $A\cap B = A\cap C$ و $A^c\cap B = A^c\cap C$ نتیجه بگیرید $B = C$.

راهنمایی باید نشان دهید $B = C$. روش معمول این است که از $x \in B$ نتیجه بگیرید $x \in C$ و برعکس از $x \in C$ نتیجه بگیرید $x \in B$.

پس اگر $x \in B$ آنگاه چون $X = A \cup A^c$ پس $x \in A$ یا $x \in A^c$. اگر $x \in A$ چون $x \in B$ پس $x \in A\cap B$. چون $A\cap B = A\cap C$ پس $x \in A\cap C$ و درنتیجه $x \in C$ بنابرتعریف اشتراک. اگر $x \in A^c$ آنگاه $x \in B \cap A^c$. شبیه استدلالی که الان انجام دادیم نتیجه می گیریم $B \subset C$. به ترتیبی مشابه نتیجه می شود $C \subset B$.

۱۲. تعیین کنید کدامیک از گزاره های دوشرطی زیر راست و کدامیک نا راست اند. دلیل انتخاب خود را بنویسید. اگر یک گزاره دو شرطی ناراست باشد، تعیین کنید کدامیک از گزاره های شرطی تشکیل دهنده گزاره دوشرطی راست اند و برای آن برهانی ارائه دهید.

(a) فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه یک مجموعه X باشند. آنگاه $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $A\cap B^c = \varnothing$.
راهنمایی: از $A \subseteq B$ مکمل بگیرید.

(b) فرض کنید A و B دو زیر مجموعه مجموعه X باشند. آنگاه $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $A \cup B = B$.
راهنمایی: از تعریف اجتماع استفاده کنید.

(c) فرض کنید A, B دو زیر مجموعه X باشند. آنگاه $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $A \cap B = A$.
راهنمایی: از تعریف اشتراک استفاده کنید.

(d) فرض کنید A, B, C زیر مجموعه های X باشند. آنگاه $A \subseteq B \cap C$ اگر و فقط اگر $A \subset B$ و $A \subset C$.

راهنمایی: از تعریف اشتراک استفاده کنید.

(e) فرض کنید A, B, C زیر مجموعه های X باشند. آنگاه $A \subseteq B \cup C$ اگر و فقط اگر $A \subset B$ یا $A \subset C$.

۵

راهنمایی: از تعریف اجتماع استفاده کنید.