خطای درونیابی

تاکنون دو روش برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب یک تابع در تعدادی نقطه ارائه کرده‌ایم. در این قسمت می‌خواهیم خطای $P(x)$ و یا به عبارت دیگر $|f(x) - P(x)|$ را حساب کنیم. واضح است که خطای مطلق $P(x)$ نشان خواهد داد که $P(x)$، به ازای هر x از حوزهٔ تعریف f، تقریب خوبی برای این تابع هست یا خیر؟

همچنین در خصوص مینیمم کردن یا به حداقل رساندن خطای درونیابی بحث خواهیم کرد.

قضیه

اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط دوبه‌دو متمایز x_0، x_1، ...، x_n و f دارای مشتق مرتبهٔ $(n+1)$ باشد آن‌گاه

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta_x)$$

که در آن η_x نقطه‌ای در $[x_0 , x_n]$ است که در حالت کلی به x بستگی دارد.

برهان

با توجه به این‌که

$$f(x_i) = P(x_i) \quad , \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

تابع $f(x) - P(x)$ عامل $(x - x_0)$، $(x - x_1)$، ...، $(x - x_n)$ را دارد یعنی، می‌توان نوشت:

$$f(x) - P(x) = (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n)\ g(x)$$

لذا، سعی می‌کنیم $g(x)$ را حساب کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم z عددی دلخواه و از این به بعد ثابت در $[x_0 , x_n]$ باشد و

$$z \neq x_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n \qquad (1)$$

و سعی می‌کنیم $g(z)$ را به‌دست آوریم. برای این منظور تابع کمکی ذیل را تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(x) = f(x) - P(x) - (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)\ g(z) \qquad (2)$$

با توجه به اینکه $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_0، ...، x_n است داریم

$$\varphi(x_i) = 0 \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

و با توجه به رابطه ($*$) داریم:

$$\varphi(z) = 0$$

بنابراین، معادلهٔ $\varphi(x) = 0$ حداقل $n+2$ ریشهٔ دوبه‌دو متمایز x_0، ...، x_n و z دارد.

اگر z بین دو نقطهٔ x_i و x_{i+1} باشد تابع $\varphi(x)$ در نقاط زیر صفر می‌شود:

$$x_0, x_1, \dots, x_i, z, x_{i+1}, \dots, x_n$$

از این‌رو، بنابر قضیه رل

$$\varphi'(y_j)=0 \quad , \qquad j=0,1,\dots,n$$

که در آن y_jها بین نقاط قبلی قرار دارند (به صورت زیر) و دوبه‌دو متمایزند.

$$x_0 \ , x_1 \ , x_2 ,\dots, \ x_i \ , z \ , x_{i+1} ,\dots, x_{n-1} \ , x_n$$

$$y_0 \ , y_1 \ ,\dots, \quad y_i \ , y_{i+1} ,\dots, \ y_n$$

به همین ترتیب $\varphi''(x)=0$ دارای حداقل n ریشه است و بالاخره معادلهٔ $\varphi^{(n+1)}(x)=0$ حداقل یک ریشه مانند η_z دارد. یعنی،

$$\varphi^{(n+1)}(\eta_z)=0 \qquad (3)$$

که در آن η_z وابسته به z است و در (x_0,x_n) قرار دارد.

اگر از (۲)، $(n+1)$ بار مشتق بگیریم (با توجه به اینکه مشتق چندجمله‌ای $P(x)$ صفر می‌شود و مشتق $(n+1)$ام چندجمله‌ای $(x-x_0)\dots(x-x_n)$ برابر مشتق $(n+1)$ام تابع x^{n+1} یعنی، $(n+1)!$ است داریم:

$$\varphi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-0-(n+1)!\ g(z)$$

که با توجه به (۳) خواهیم داشت:

$$g(z)=\frac{f^{(n+1)}(\eta_z)}{(n+1)!}$$

که با تبدیل z به x به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}$$

از قضیهٔ بالا نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه

با شرایط قضیهٔ قبل داریم:

$$|f(x)-P(x)| \le |(x-x_0)\cdots(x-x_n)| \times \frac{M}{(n+1)!}$$

که در آن M یک کران بالا برای $|f^{(n+1)}(x)|$ بر $[x_0,x_n]$ است. یعنی، برای هر x از $[x_0,x_n]$،

$$|f^{(n+1)}(x)| \le M$$

در عمل، به دلیل مشخص نبودن محل η_x، از کران بالای خطای فوق استفاده می‌شود.

مثال

چندجمله‌ای درونیاب $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$ را در نقاط $x_0=0$ و $x_1=1$ به‌دست آورید و کران بالایی برای $|f(x)-P(x)|$ حساب کنید. مقدار $|f(\frac{1}{2})-P(\frac{1}{2})|$ را با کران بالا در $x=\frac{1}{2}$ مقایسه کنید.

حل: جدول مربوط به تابع عبارت است از:

x_i	f_i	تفاضل اول
۰	۱	
		-۱
۱	۰	

بنابراین، چندجمله‌ای درونیاب چنین‌است: $P(x) = ۱ + (x-۰) \times (-۱) = ۱ - x$

واضح است که
$$f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad , \quad P\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین،
$$\left| f\left(\frac{۱}{۲}\right) - P\left(\frac{۱}{۲}\right) \right| = \frac{\sqrt{۲}-۱}{۲} = ۰/۲۱$$

برای تعیین یک کران بالا برای $|f(x) - P(x)|$ باید کران بالایی برای مشتق دوم تابع f به‌دست آوریم. برای این منظور مشتقات مرتبهٔ اول و دوم تابع f را حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = -\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi x}{۲} \qquad , \qquad f''(x) = -\frac{\pi^۲}{۴}\cos\frac{\pi x}{۲}$$

در نتیجه:
$$|f''(x)| \leq \frac{\pi^۲}{۴} = M$$

پس،
$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-۰)(x-۱)| \times \frac{\frac{\pi^۲}{۴}}{۲!} = \frac{\pi^۲}{۸}|x^۲ - x|$$

مقدار کران بالا به ازای $x = \frac{۱}{۲}$:
$$\frac{\pi^۲}{۸} \times \left|\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}\right| = \frac{\pi^۲}{۳۲} = ۰/۳۱$$

که با مقدار واقعی خطا، یعنی ۰/۲۱، ۰/۱ اختلاف دارد و بیانگر خوب نبودن تقریب یا نامناسب بودن چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌عنوان یک تقریب برای $\cos\frac{\pi x}{۲}$ است.

مثال

فرض کنید $f(x) = \sin\frac{\pi x}{۲}$. چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط
$$x_۰ = ۰ \quad , \quad x_۱ = ۱ \quad , \quad x_۲ = ۲$$
به‌دست آورید و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید. آیا $P(x)$ تقریب خوبی است؟

حل: با توجه به نقاط و ضابطهٔ تابع f، جدول تفاضلات تقسیم شده را تشکیل می‌دهیم.

x_i	$\sin\frac{\pi x_i}{۲}$	$f[x_i,x_{i+۱}]$	$f[x_i,x_{i+۱},x_{i+۲}]$
۰	۰		
		۱	
۱	۱		−۱
		−۱	
۲	۰		

چندجمله‌ای درونیاب عبارت است از:

$$P(x)= ۰ + (x-۰)\times ۱ + (x-۰)(x-۱)\times(-۱) = -x^۲ + ۲x$$

برای تعیین یک کران بالا باید مشتق سوم تابع f را حساب کنیم.

$$f'(x)=\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲} \quad , \quad f''(x)=-\frac{\pi^۲}{۴}\sin\frac{\pi x}{۲} \quad , \quad f^{(۳)}(x)=-\frac{\pi^۳}{۸}\cos\frac{\pi x}{۲}$$

در نتیجه، با توجه به این‌که همواره $\left|\cos\frac{\pi x}{۲}\right| \le ۱$ ، $\left|f^{(۳)}(x)\right| \le \frac{\pi^۳}{۸} = M$

بنابراین:

$$\left|f(x)-P(x)\right| \le \left|(x-۰)(x-۱)(x-۲)\right| \times \frac{\frac{\pi^۳}{۸}}{۳!} = \frac{\pi^۳}{۴۸}\left|x(x-۱)(x-۲)\right|$$

داریم :

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad , \quad P\left(\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۱}{۴}+۲\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

و لذا:

$$\left|f\left(\frac{۱}{۲}\right)-P\left(\frac{۱}{۲}\right)\right| = \frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۲} = ۰/۰۴$$

اما، کران بالای حساب شده به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ عبارتست از:

$$\frac{\pi^۳}{۴۸}\times\left|\frac{۱}{۲}\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)\times\left(-\frac{۳}{۲}\right)\right| = \frac{\pi^۳}{۱۲۸} = ۰/۲۴$$

که نشان می‌دهد تخمین خطا فاصله زیادی تا مقدار واقعی خطا دارد. این پدیده گرچه طبیعی است ولی وقتی ارزشمند است که کران بالای خطا با خطای واقعی اختلاف زیادی نداشته باشد.

برای تعیین کران بالای مستقل از x باید ماکسیمم $|x(x-۱)(x-۲)|$ را بر $[۰, ۲]$ به‌دست آوریم. برای این منظور چنین قرار می‌دهیم:

$$g(x)=x(x-۱)(x-۲) \quad , \quad g'(x)=۳x^۲-۶x+۲$$

ریشه‌های $g'(x)=۰$ برابر است با:

$$x_۱=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad , \quad x_۲=۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

داریم که:
$$|g(x_1)| = |g(x_2)| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

پس،
$$|g(x)| \le \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

بنابراین،
$$|f(x) - P(x)| \le \frac{\pi^3}{48} \times \frac{2\sqrt{3}}{9} \simeq 0/78$$

مینیمم کردن حداکثر خطای چندجمله‌ای درونیاب

$$|f(x) - P(x)| \le |(x - x_0)\dots(x - x_n)| \frac{M}{(n+1)!}$$

آیا می‌توان نقاط درونیابی x_0، x_1، ...، x_n را چنان اختیار کرد که $\max\limits_{x\in[a,b]} |(x - x_0)\dots(x - x_n)|$ کمترین مقدار را دارا باشد؟

جواب مثبت است و در این قسمت نشان خواهیم داد که اگر x_0 تا x_n را ریشه های چندجمله‌ای چبیشف $T_{n+1}(x)$ در بازه [-1,1] اختیار کنیم، ($a = -1, b = 1$) مقدار خطا مینیمم ومساوی $\frac{1}{2^n}$ خواهد شد.

چندجمله‌ایهای چبیشف

چندجمله‌ایهای چبیشف بر $[-1 , 1]$ تعریف می‌شوند و با $T_n(x)$ به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

اگر قرار دهیم $x = \cos\theta$ ، در این صورت $\theta = \arccos x$ و فرمول به صورت زیر تبدیل می شود:

$$T_n(x) = \cos n\theta$$

با توجه به رابطهٔ مثلثاتی:
$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

به‌دست می‌آوریم:
$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\,T_n(x)$$

و یا
$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

فرض کنید:
$$T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x$$

آنگاه بر اساس رابطه بازگشتی بالا داریم:
$$T_2(x) = 2x\,T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x\,T_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2x\,T_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

به کمک استقرا ثابت می‌شود که ضریب جملهٔ پیشرو $T_n(x)$ برابر 2^{n-1} است، به‌عبارت دیگر چندجمله‌ای $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ دارای جملهٔ پیشرو x^n است.

ضمناً، اگر n فرد باشد $T_n(x)$ یک تابع فرد و در غیر این صورت یک تابع زوج است.

ریشه های چندجمله‌ای $T_n(x)$

از $T_n(x) = \cos n\theta = 0$ نتیجه می‌شود: $\quad n\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

یا $\quad \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$

و با توجه به این‌که $x = \cos\theta$، ریشه های $T_n(x)$ چنین به‌دست می‌آیند:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

مثلاً ریشه های $T_2(x)$ عبارت‌اند از:

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x_2 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

که از مساوی صفر قراردادن چندجمله ای $T_2(x) = 2x^2 - 1 = 0$ نیز به‌دست می‌آیند.

برای تعیین ریشه های $T_3(x)$ داریم:

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x_2 = \cos\frac{3\pi}{6} = 0 \quad , \quad x_3 = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نقاط برگشت $T_n(x)$

برای تعیین نقاط برگشت $T_n(x)$ ابتدا لازم است مشتق آن را به‌دست آوریم:

با توجه به این‌که $x = \cos\theta$ داریم $dx = -\sin\theta\, d\theta$، پس، $\quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}$

و از اینجا، $\quad T'_n(x) = \frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$

بنابراین، اگر، $\theta_k = \frac{k\pi}{n}$ آن‌گاه $T'_n(x) = 0$. لذا نقاطی که در آنها چندجمله‌ای $T_n(x)$ ماکسیمم یا مینیمم می‌شود عبارت‌اند از:

$$x = \cos\theta = \cos\frac{k\pi}{n} \quad , \quad k = 1, \ldots, n-1$$

این نقاط بین ریشه های $T_n(x)$ قراردارد (هر ریشه مشتق بین ریشه های $T_n(x)$ قراردارد) و مقدار $T_n(x)$ در این نقاط عبارتست از:

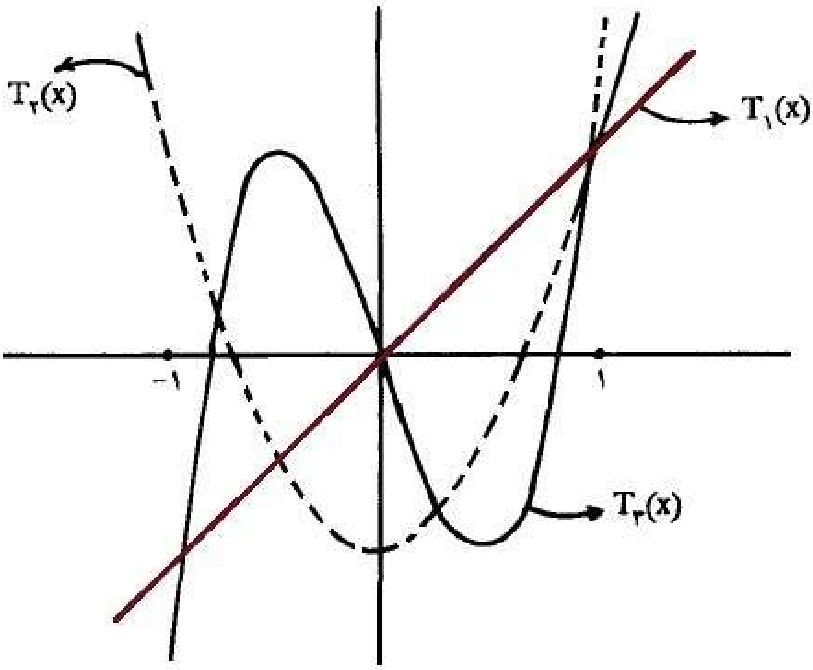
$$T_n(x)=\cos n\theta=\cos k\pi=(-1)^k \quad , \quad k=1,\dots,n-1$$

همچنین در نقاط انتهایی $x=-1$ و $x=1$ که به ترتیب $\theta=\pi$ و $\theta=0$ مقادیر $T_n(x)$ برابر $(-1)^n$ و ۱ می‌شود. لذا $T_n(x)$ در $(n+1)$ نقطهٔ زیر ماکسیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند:

$$x=\cos\frac{k\pi}{n} \quad , \quad k=0,1,\dots,n$$ (n+1 نقطه اکستروموم تابع)

بدیهی است که:

$$\max_{-1\le x\le 1}|T_n(x)|=1$$



اکنون به مسئله مینیمم کردن حداکثر خطای $P(x)$ می‌پردازیم:

قضیه

در صورتی که $x_0, x_1, \dots, x_n$ ریشه های چندجمله‌ای $T_{n+1}(x)$ باشند، آنگاه

$$\max_{-1\le x\le 1}|(x-x_0)\dots(x-x_n)|$$

کمترین مقدار را خواهد داشت.

برهان: چون جملهٔ پیشرو $T_{n+1}(x)$ برابر $2^n x^{n+1}$ است و $x_0,\dots,x_n$ ریشه های $T_{n+1}(x)$ هستند، داریم:

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)=\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$$

پس، کافی است ثابت کنیم بین تمام چندجمله‌ایهای درجهٔ $n+1$ با ضریب جملهٔ پیشرو ۱، چندجمله‌ای $\frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$ بر $[-1, 1]$ دارای کمترین حداکثر قدرمطلق است، که برابر $\frac{1}{2^n}$ است.

فرض کنید چندجمله‌ای دیگری مانند $Q(x)$، از درجهٔ $n+1$ و با جملهٔ پیشرو x^{n+1}، موجود باشد به‌طوری که:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)| < \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{1}{2^n} |T_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}$$

چندجمله‌ای $R_n(x)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$R_n(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) - Q(x)$$

واضح است که $R_n(x)$ حداکثر از درجهٔ n است. نشان می‌دهیم که $R_n(x)$ در هریک از $(n+2)$ نقطهٔ اکسترموم $T_{n+1}(x)$ با $T_{n+1}(x)$ هم علامت است.

زیرا اگر: $T_{n+1}(x) = 1$ آن‌گاه:

$$Q(x) \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)| < \frac{1}{2^n}$$

پس $\frac{1}{2^n} - Q(x) > 0$ و لذا: $R_n(x) > 0$

همچنین اگر $T_{n+1}(x) = -1$ در این صورت:

$$R_n(x) = -\frac{1}{2^n} - Q(x)$$

$$|Q(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)| < \frac{1}{2^n} \longrightarrow -\frac{1}{2^n} < Q(x) < \frac{1}{2^n}$$

در نتیجه $-\frac{1}{2^n} - Q(x) < 0$ و لذا: $R_n(x) < 0$

پس چندجمله‌ای $R_n(x)$ در $n+2$ نقطهٔ اکسترموم $T_{n+1}(x)$ با آن هم علامت است. اما، $T_{n+1}(x)$ در $n+2$ نقطهٔ مذکور متناوباً مثبت و منفی می‌شود، یعنی بین هر دو نقطهٔ متوالی یک ریشه دارد، پس $R_n(x)$ لااقل دارای $n+1$ ریشه است که این غیرممکن است زیرا $R_n(x)$ حداکثر از درجهٔ n است.

ازاین‌رو، اگر $P^*(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط ریشه های $T_{n+1}(x)$ باشد داریم:

$$|f(x) - P^*(x)| \leq \frac{M}{2^n (n+1)!}$$

که در آن:

$$\forall x \in [-1, 1] \quad , \quad |f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

تذکر: اگر بازه درونیابی $[a\ ,\ b]$ باشد، آنگاه با تغییر متغیر $t = \frac{2x}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}$ می‌توان $[a\ ,\ b]$ را به $[-1\ ,\ 1]$ تبدیل کرد.

$$\Psi : [a,b] \to [-1, 1]$$

ملاحظه می‌شود که $\Psi(a) = -1$ و $\Psi(b) = 1$ و هر مقدار بین a و b به مقداری بین ۱- و ۱ تبدیل می‌شود.

مثال

چندجمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ را در نقاط $x_0 = -1$ و $x_1 = 1$ به‌دست آورید و حداکثر خطای آن را با چندجمله‌ای درونیاب مبتنی بر ریشه های $T_2(x)$ مقایسه کنید.

حل:

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$
-1	-1	
		1
1	1	

چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از:

$$P(x) = -1 + (x+1) \times 1 = x$$

برای تعیین کران بالای $|f(x) - P(x)|$ باید مشتق دوم تابع f را حساب کنیم:

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} \quad , \quad f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}$$

پس،

$$|f''(x)| \le \frac{\pi^2}{4}$$

در نتیجه:

$$|f(x) - P(x)| \le |(x+1)(x-1)| \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2!} = (1 - x^2) \times \frac{\pi^2}{8}$$

اما،

$$\max_{-1 \le x \le 1} (1 - x^2) = 1$$

در نتیجه، همواره

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{\pi^2}{8}$$

برای مقایسهٔ این کران بالا با خطای $P^*(x)$ ابتدا این چندجمله‌ای را به‌دست می‌آوریم. ریشه های $T_2(x)$ عبارت‌اند از:

$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس جدول تفاضلات چنین است:

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$
$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-۰/۸۹۶$	
		$۱/۲۶۷$
$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$۰/۸۹۶$	

$$P^*(x) = -۰/۸۹۶ + ۱/۲۶۷(x + ۰/۷۰۷) \;= ۱/۲۶۷x - ۰/۰۰۰۲۳۱$$

خطای P^* حداکثر برابر است با

$$\frac{\frac{\pi^۲}{۴}}{۲\times ۲!} = \frac{\pi^۲}{۱۶}$$

که نصف حداکثر خطای $P(x)$ است.