دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی .

مسائل ریاضی (شماره ۳)

---

۱. اگر a، b و c مقادیری ناصفر و به ترتیب طول از مبدأ، عرض از مبدأ و ارتفاع از مبدأ صفحه‌ای باشند، ثابت کنید معادله‌ای برای این صفحه عبارت است از $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

۲. معادلهٔ صفحهٔ شامل سه نقطه $A=(-1,-2,5)$، $B=(1,7,1)$ و $C=(3,4,1)$ را بیابید.

۳. فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0;\\ 0, & xy=0;\end{cases}$$

در صورت وجود $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ را بیابید.

۴. ثابت کنید چنانچه تابع دو متغیری f در نقطه‌ای مشتق پذیر باشد، آنگاه f در آن نقطه پیوسته نیز هست.

۵. نشان دهید تابع $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ در معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ صدق می‌کند.

۶. ذره‌ای در امتداد یک منحنی با معادلهٔ برداری $\vec{\mathbf{R}}(t)=e^t\,\vec{\mathbf{i}}+e^{-t}\,\vec{\mathbf{j}}+2t\,\vec{\mathbf{k}}$ در حرکت است. مطلوب است بردارهای واحد $\vec{\mathbf{T}}$، $\vec{\mathbf{B}}$، $\vec{\mathbf{N}}$، انحناً و تاب در لحظهٔ $t=0$. معادلهٔ صفحهٔ قائم بر منحنی را در نقطه $(1,1,0)$ بیابید.

۷. مطلوب است سه وجهی متحرک (کنج فرنه) منحنی $\vec{\mathbf{R}}(t)=e^t\cos t\,\vec{\mathbf{i}}+e^t\sin t\,\vec{\mathbf{j}}+e^t\,\vec{\mathbf{k}}$ در نقطه‌ای که $t=0$.

۸. مشتق جهتی $f(x,y)=3x^2-2xy+1$ را در نقطهٔ $P=(5,10)$ و در جهت $\vec{\mathbf{U}}=\frac{3}{5}\vec{\mathbf{i}}-\frac{4}{5}\vec{\mathbf{j}}$ بیابید.

۹. معادله صفحهٔ مماس بر سهمیوار بیضوی $4x^2+y^2-16z=0$ را در نقطهٔ $(2,4,2)$ بیابید.

۱۰. معادلهٔ خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه های $3x^2+2y^2+z^2=49$ و $x^2+y^2-2z^2=10$ را در نقطهٔ $(3,-3,2)$ به دست آورید.

۱۱. معادلهٔ صفحهٔ مماس و معادلات خط قائم بر رویهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4$ در نقطهٔ $(4,1,1)$ را بیابید.

۱۲. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ کمترین و بیشترین فاصلهٔ بین مبدأ مختصات و بیضیوار $9x^2+4y^2+z^2=36$ را بیابید.

۱۳. نشان دهید مقدار انتگرال منحنی الخط زیر مستقل از مسیر است، و سپس با استفاده از تابع پتانسیل این انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int_C(\tan y+2xy\sec z)dx+(x\sec^2 y+x^2\sec z)dy+\sec z(x^2 y\tan z-\sec z)dz,$$

C: مسیری است با نقطه ابتدای $A=(2,\frac{\pi}{4},0)$ و انتهای $B=(3,\pi,\pi)$.

۱۴. انتگرال دوگانه زیر را در مختصات قطبی حل کنید:

$$\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dydx.$$

موفق و سربلند باشید