منطق مقدماتی

کاربرد منطق در علوم نظری کامپیوتر ، توسعه زبان ها، با هدف مدل سازی وضعیت هایی است که به عنوان متخصص کامپیوتر با آن مواجه می شویم، به طوری که بتوانیم به طور صوری برای درستی آنها استدلالی ارائه دهیم و با اعتماد به این درستی گام های بعدی را برداریم.

به عنوان مثال زبان **ALGOL** در اوایل دهه ۱۹۶۰، از روی نیاز به بررسی درستی الگوریتم ها توسط کامپیوتر، به منظور اطمینان از این که خروجی الگوریتم ارائه شده درست است، توسعه داده شد.

ارائه استدلال برای وضعیت ها بدان معناست که دلایل لازم برای اثبات درستی آنها را ارائه دهیم. می خواهیم این کار را مستقل از زبان خاصی یا وضعیت خاص انجام دهیم تا بتواند شامل همه وضعیت های مشابه باشد. به همین دلیل این کار را به طور صوری انجام می دهیم به طوری که استدلال ها معتبر، یا روی یک ماشین قابل اجرا باشند و صحت آنها مورد آزمون قرار گیرد. برای تشریح بهتر دو مثالی که در پی می آیند را در نظر بگیرید.

مثال ۱.۰.۰. اگر قطار دیر برسد و هیچ تاکسی ای درایستگاه نباشد، انگاه محمد دیر به کلاس درس خودی می رسد.
محمد به کلاس خود دیر نرسید.
قطار دیر رسید.
بنابراین یک تاکسی در ایستگاه بوده است.

به طور شهودی، این استدلال معتبر است، زیرا اگر جمله اول و جمله سوم را با هم در نظر بگیریم، این دو جمله می گویند اگر تاکسی نبود، آنگاه محمد دیر به کلاس خود می رسید.

جمله دوم می گوید محمد دیر به کلاس نرسیده است. بنابراین باید یک تاکسی در ایستگاه بوده باشد.

بیشتر مباحث این درس به بررسی استدلال هایی می پردازد که چنین ساختاری دارند. یعنی، از یک سلسله فرض های درست، طبق قواعد خاصی، موسوم به قواعد استنتاج، درستی گزاره ای به نام نتیجه را که به دنبال کلمه «بنابراین» می آید، تضمین می کنیم.

به عبارت بهتر استدلالی درست است که جمله بعد از کلمه «بنابراین» به طور منطقی از جمله های قبلی نتیجه شده باشد.

حال مثال دوم را در نظر بگیرید.

مثال ۲.۰.۰. اگر باران بیاید و مریم چتر خود را همراه نداشته باشد، آنگاه خیس می شود.
مریم خیس نشده است.
پس مریم چتر به همراه داشته است.

این نیز استدلال درستی است. نگاهی دقیق تر با این دو استدلال نشان می دهد که در واقع این دو استدلال ساختاری شبیه یکدیگر دارند. تنها کافی است جملات یکی را جایگزین جملات دیگر کنیم.

مثال ۱,۱	مثال ۱,۲
قطار تأخیر دارد	باران می آید
تاکسی ها در ایستگاه هستند	مریم چتر خود را همراه دارد
محمد دیر به کلاس می رسد	مریم خیس شده است

استدلال در هر دو مورد می تواند بدون صحبت درباره قطار یا باران به صورت صوری، به شکل زیر انجام شود.

$$\begin{array}{l} p\wedge \sim q \longrightarrow r \\ \sim r \\ p \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

در بحث های منطق، به آنچه معنای جمله هاست کاری نداریم و فقط به ساختار منطقی آنها توجه و تاکید داریم. البته، ممکن است در حالت خاص، آن طوری که در بالا مشاهده کردیم، چنین معنایی اهمیت قابل توجهی در پیدا کردن راه حل درست داشته باشد.

برای این که «استدلال» رادقیق نمانیم، باید زبانی بسازیم که در آن جملات ساختار منطقی خود را به همراه داشته باشند. زبانی که مد نظر است، زبان منطق گزاره هاست. منطق بر مبنای گزاره ها یا همان جملات خبری بنا شده است. یعنی جملاتی که بتوان با دلیل آوردن راست بودن یا ناراست بودن آنها را تعیین کرد.

مورد دیگری که برای استدلا به آن نیاز داریم، قواعد استنتاج است که به ما اجازه می دهد نتیجه یا نتایجی را از یک یا چند فرض داده شده به دست آوریم. به این معنا که اگر همه فرض ها درست باشند، آنگاه نتیجه نیز درست خواهد بود.

یک مسأله دشوار این است که اگر حدس بزنیم خاصیتی برای یک کامپیوترفرض درست است، آیا می توانیم در حساب گزاره ها، استدلالی ارائه دهیم که این خاصیت نتیجه آن استدلال باشد؟

منطقی که قصد داریم برای این کار به کار بندیم، منطق صوری نام دارد.

یک زیر مجموعه از تمام جملات خبری را به یک رشته از نمادها ترجمه می کنیم. این کار به ما اجازه می دهد فقط روی سازوکار استدلال خود تمرکز نماییم. این بسیار مهم است زیرا ویژگی های دستگاه ها یا نرم افزارهای ما، به صورت یک دنباله از جملات خبری بیان می شود. این سبب می شود دستگاه، به طور خودکار این گزاره های را اجرا کند (کاری که کامپیوتر خیلی دوست دارد آن را انجام دهد).

قرارداد: گزاره اتمی، جمله ای خبری است که به جملات خبری کوچکتر قابل تجزیه نباشد.

مثال ۳.۰.۰. گزاره «۵ عددی اول است» گزاره ای اتمی است در حالی که گزاره « n بر ۲ و ۳ بخش پذیر است» گزاره ای مرکب است و اتمی نیست.

برای نمایش این نوع جملات از حروف کوچک انگلیسی استفاده می کنیم و برای نمایش گزارهایی که اتمی نیستند از حروف بزرگ استفاده می کنیم.

می توانیم با استفاده از رابط های منطقی، جملات خبری مرکب را بسازیم. این رابط های عبارتند از

(۱) $\sim$ نفی ساز یک گزاره p که با $\sim p$ نمایش داده می شود.

(۲) ترکیب فصلی $\vee$ دو گزاره p و q [۱] که با $p \vee q$ نشان داده می شود. $p \vee q$ درست است هرگاه یکی از گزاره ها راست باشد.

(۳) ترکیب فصلی دو گزار p و q [۲] که با $p \wedge q$ نشان داده می شود. ترکیب $p \wedge q$ راست است هرگاه هر دو گزاره همزمان راست باشند.

(۴) ترکیب شرطی $\longrightarrow$، برای گزاره های مفروض p و q، فرمول $p \longrightarrow q$ ترکیب شرطی p و q نامیده می شود. «اگر p آنگاه q». این گزاره فقط وقتی ناراست است که pراست و q ناراست باشد.

[۱] disjucntion
[۲] conjunction

البته با استفاده از این روابط، مجازیم هر تعداد گزاره مرکب را بسازیم. به عنوان مثال

$$p \wedge q \longrightarrow r \vee q$$

برای خوانش بهتر این گزاره توسط ماشین، بهتر است ترتیب عمل کردن ماشین روی آن را نیز در نظر بگیریم. گزاره بالا را می توان به صورت

$$(p \wedge q) \longrightarrow (r \vee q).$$

قرارداد: ترتیب عمل کردن رابط های بالا با این صورت است که ابتدا $\sim$ روی گزاره بعدی عمل می کند، بعد رابط های $\wedge$ و $\vee$ و سپس رابط $\longrightarrow$.

توجه داشته باشید که عمل $\longrightarrow$ شرکت پذیر نیست. یعنی گزاره $p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$ با گزاره $(p \longrightarrow q) \longrightarrow r$ هم ارز نیستند.

استنتاج طبیعی و قواعد آن

برای این که بتوانیم یک نتیجه را از یک دنباله از گزاره های راست به دست آوریم، به تعداد معینی قاعده استنتاج [۱] نیاز داریم.

در زبان طبیعی، ا چنین قواعد استنتاجی را داریم و آن ها را «قواعد استنتاج طبیعی» می نامند.

این قواعد به ما اجازه می دهند فرمول هایی را به درستی از فرمول های درست دیگر نتیجه بگیریم. با به کار بستن متوالی این قواعد، می توانیم گزاره ای به نام نتیجه را از گزاره های دیگری به نام فرض، ب دست آوریم.

فرض کنیم یک دنباله از فرمول های $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ داده شده اند که آنها را فرض می نامیم و فرمول دیگری به نام Ψ که آن را نتیجه می نامیم.

با به کار بستن قواعد استنتاج روی فرض ها امیدواریم برخی فرمول ها را به دست آوریم و با به کار بستن بیشتر قواعد استدلال روی آنها، نهایتاً به نتیجه مورد نظر برسیم. این خواست را با

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

نشان می دهیم. این عبارت را یک رشته [۲] می نامیم.

به عنوان مثال، برای دومثال بالا، این رشته به صورت زیر خواهد بود

$$p\wedge \sim q \longrightarrow r, \sim r, p \vdash q$$

ساختن چنین دنباله ای یک کار خلاقانه ای است، مثل برنامه نویسی و به هیچ وجه بدیهی نیست چه قواعدی را باید به کار بست تا بتوان نتیجه مورد نظر را از فرض ها استنتاج کرد. به علاوه قواعد برهان باید به دقت انتخاب شوند، وگرنه ممکن است یک الگوی غیر معتبری از استدلال را به دست دهد. برای مثال نمی توانیم نشان دهید

$$p, q \vdash p\wedge \sim q$$

p نشاندهنده گزاره: طلا یک فلز است.

q نشاندهنده گزاره: نقره یک فلز است.

این دو واقعیت ممکن است ما را به این سمت هدایت کند که نتیجه بگیریم «طلا یک فلز است در حالی که نقره نیست».

---

[۱] deduction rules

[۲] sequent

قواعد استنتاج

قواعد عطف

اولین قاعده استنتاج، قاعده عطف می باشد و چون یک گزاره جدید را معرفی می کند به آن introduction یا «معرفی» هم می گویند. برای کوتاه تر کردن ارجاع به نام قاعده از نشان $\wedge i$ استفاده می شود.

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

آنچه بالای خط قرار گرفته، دو فرض قاعده استنتاجی نامیده مي شود و آنچه در زیر خط قرار گرفته، نتیجه آن. در قسمت راست خط نیز نام قاعده استنتاج را می نویسیم که i سرحرف کلمه introduction است.

برای هر رابط، یک یا چند قاعده برای «معرفی» آن وجود دارد و یک یا چند قاعده برای «حذف» آن وجود دارد. برای مثال برای ترکیب عطفی، قواعد حذف به شرح زیرند.

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1 \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2$$

اگر شما درستی $\phi \wedge \psi$ را به اثبات رسانده باشید، با کاربست این قاعده، درستی ϕ را می توانید نتیجه بگیرید و این قاعده را با e_1 نمایش می دهند. e_2 نیز به طور مشابه کار می کند.

مثال ۴.۰.۰. نشان دهید استنتاج زیر درست است.

$$p \wedge q, r \vdash q \wedge r$$

1	$p \wedge q$	فرض
2	r	فرض
3	q	$e_2, 1$
4	$q \wedge r$	$\wedge i, 3, 2$

مثال ۵.۰.۰. نشان دهید استنتاج زیر درست است.

$$(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$$

1	$(p \wedge q) \wedge r$	فرض
2	$s \wedge t$	فرض
3	$p \wedge q$	$\wedge e_1, 3$
4	q	$\wedge e_2, 3$
5	s	$\wedge e_1, 2$
6	$q \wedge s$	$\wedge i,\ 4, 5$

قاعده نفی مضاعف

به طور شهودی، هیچ فرقی بین فرمول ϕ و نفی مضاعف آن $\sim\sim \phi$ که هیچ چیز بیشتر و هیچ چیزی کمتر از ϕ بیان نمی کند، وجود ندارد. در زبان معمولی، معنای جمله «چنین نیست که باران نمی آید» فقط روشی ساختگی برای بیان جمله ساده «باران نمی آید» است.

برعکس، با دانستن این که «باران می آید»، آزادیم اگر بخواهیم، این واقعیت را در شکل پیچیده تری بیان کنیم. به ایت ترتیب قواعد حذف [1] و معرفی برای نفی مضاعف را به دست می آوریم.

$$\frac{\sim\sim \phi}{\phi} \sim\sim e \qquad\qquad \frac{\phi}{\sim\sim \phi} \sim\sim i$$

مثال ۶.۰.۰. نشان دهید

$$p, \sim\sim (q \wedge r) \vdash \sim\sim \wedge r$$

برای این کار سلسله دلایل و استنتاج های زیر را می توان ارائه داد

1	p	فرض
2	$\sim\sim (q \wedge r)$	فرض
3	$\sim\sim p$	$\sim\sim i, 1$
4	$q \wedge r$	$\sim\sim e, 2$
5	r	$\wedge e_2, 4$
6	$\sim\sim p \wedge r$	$\wedge i 3, 5.$

تمرین ۱.۰.۰. نشان دهید

$$(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$$

قیاس استثنایی

یک قاعده منطقی وجود دارد که استلزام lra را معرفی می کند و یک قاعده برای حذف آت. این آخری از بهترین قواعد شناخته شده حساب گزاره هاست و اغلب با نام لاتین آن، یعنی Modus Ponens فراخوانده می شود. نام جدید این قاعده، «حذف ایجاب» ذکر کرده اند.

این قاعده بیان می کند که اگر ϕ راست باشد و اگر $\phi \longrightarrow \psi$ نیز راست باشد، آنگاه به درستی می توانیم بگوییم ψ نیز درست است. این را در حساب گزاره ها به صورت

$$\frac{\phi \quad \phi \longrightarrow \psi}{\psi} \longrightarrow e$$

مثال ۷.۰.۰. فرض کنید

باران باریده است	$p:$
اگر باران بیاید آنگاه زمین خیس می‌شود	$p \longrightarrow q$

بنابراین: q همان گزاره «زمین خیس است» می باشد.

حال می دانیم اگر «باران باریده باشد و اگر زمین، به شرط بارش باران، خیس شده باشد» می توانیم این دو گزاره را با هم ترکیب کنیم و نتیجه بگیریم که در واقع زمین خیس است.

مقدار ورودی برنامه یک عدد صحیح است	p
اگر ورودی یک برنامه یک عدد صحیح باشد آنگاه، خروجی آن یک مقدار بولی است	$p \longrightarrow q$

[1] elimination

مجددا می توانیم این دو گزاره را با هم ترکیب کنیم و نتیجه بگیریم که خروجی برنامه ما یک مقدار بولی است.
توجه داشته باشید که در اینجا وجود p برای استنتاج اساسی است. برای مثال برنامه ما ممکن است در شرط $p \longrightarrow q$ صدق کند اما در p صدق نکند. مثلاً p نام فامیل یک فرد است و نمی توانیم q را نتیجه بگیریم.
همان طور که قبلاً دیده ایم، پارامترهای صوری ϕ و ψ برای $\longrightarrow$ می تواند با هر جمله ای مقدار دهی شوند. به خصوص از نوع جمله های مرکب آن.

1	$\sim p \wedge q$	فرض
2	$\sim p \wedge q \longrightarrow r \vee \sim p$	فرض
3	$r \vee \sim p$	$\longrightarrow e \;\; 2,1$

این قواعد را به هر تعداد که بخواهیم می توانیم به کار بندیم. برای مثال

1	$p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$	فرض
2	$p \longrightarrow q$	فرض
3	p	فرض
4	$q \longrightarrow r$	$\longrightarrow e \;\; 1,3$
5	q	$\longrightarrow e \;\; 2,3$
6	r	$\longrightarrow e \;\; 4,5$

حال فرض کنید $p \longrightarrow q$ و $\sim q$ راست هستند. آنگاه اگر p راست باشد، با استفاده از قیاس استثنایی نتیجه می شود q هم راست است. بنابراین $q \wedge \sim q$ را داریم که یک تناقض است و غیر ممکن است. پس می توانیم نتیجه بگیریم p باید نادرست باشد. اما این به معنای راست بودن $\sim p$ است.
آنچه در بالا مورد بررسی قرار گرفت را می توان به صورت زیر خلاصه کرد
قاعده قیاس دفع: یا Modus Tollens

$$\frac{\phi \longrightarrow \psi \qquad \sim \psi}{\sim \phi}\; MT$$

اگر محمد اتیوپیایی بود آنگاه او آفریقایی بود.
محمد آفریقایی نیست. پس او اتیوپایی نیست.

مثال ۸.۰.۰.

$$p \longrightarrow (q \longrightarrow r), p, \sim r \vdash \sim q$$

برای نشان دادن درستی این استنتاج، می توان به صورت زیر استدلال کرد

1	$p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$	فرض
2	p	فرض
3	$\sim r$	فرض
4	$q \longrightarrow r$	$\longrightarrow \;\; 1,2$
5	$\sim q$	$MT \;\; 4,3$

در این جا دو مثال از برهان وجود دارد که قاعده MT را با یکی از قواعد $\sim\sim e$ یا $\sim\sim i$ ترکیب می کند.

مثال ۹.۰.۰.

1	$\sim p \longrightarrow q$	فرض
2	$\sim q$	فرض
3	$\sim\sim p$	$MT \;\; 1,2$
4	p	$\sim\sim e \;\; 3$

این نشان می دهد برهان

$$\sim p \longrightarrow q, \sim q \vdash p$$

معتبر است.

مثال ۱۰.۰.۰.

1	$p \longrightarrow q$	فرض
2	q	فرض
3	$\sim\sim q$	$\sim\sim i \;\; 2$
4	$\sim p$	$MT \;\; 1,3$

این درستی

$$p \longrightarrow \sim q, q \vdash \sim p$$

را نشان می دهد.

قاعده معرفی استلزام:

قاعده MT برا نشان دادن این که

$$p \longrightarrow q \sim q \vdash \sim p$$

اعتبار دارد اما اعتبار

$$p \longrightarrow q \vdash \sim q \longrightarrow \sim p$$

نیز به نظر موجه می آید. این رشته، به یک معنا، همان چیز را بیان می کند.

می خواهیم استلزام هایی بسازیم که قبلاً به عنوان فرض مطرح شده اند. ساز و کار چنین ساختنی، ظریف است و کمی کار می برد. بنابراین لازم است با دقت بیشتری این کار را انجام دهیم.

۴ آذر ۱۴۰۲