همتوانی دو مجموعه

تعریف ۱ (هم‌توانی دو مجموعه). دومجموعه X و Y را همتوان گویند هرگاه بین X و Y یک تناظر یک به یک $f: X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد. دو مجموعه همتوان را با نماد $X \sim Y$ نشان می‌دهند.

مثال ۲. مجموعه های زیر با $\mathbb{N}$ همتوان هستند.

۱.

$$X = \left\{\frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \quad f: \mathbb{N} \longrightarrow X, \quad n \mapsto \frac{۱}{n}.$$

۲.

$$Y = \left\{\frac{۱}{n^۲+۱} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \quad g: \mathbb{N} \longrightarrow Y, \quad n \mapsto \frac{۱}{n^۲+۱}.$$

۳. با توجه به دومثال فوق، می توانیم نگاشت‌های دوسویی $f^{-۱}X \longrightarrow \mathbb{N}$ و $g: \mathbb{N} \longrightarrow Y$ را ترکیب کنیم و نگاشت دوسویی $h = g \circ f^{-۱}: X \longrightarrow Y$ را به دست آوریم. به این ترتیب $X \sim Y$.

۴. در جلسات قبل ملاحظه کردیم $\mathbb{N}$ با $\mathbb{Z}$ همتوان است.

۵. یک واقعیت کمی نابدیهی این است که مجموعه اعداد $\mathbb{Q}$ با $\mathbb{N}$ همتوان است.

در درس‌های بعدی با مثال‌های نابدیهی تر بیشتری از مجموعه‌ها همتوان آشنا خواهیم شد.

۶. آیا می توان از دو مثال اخیر نتیجه گرفت $\mathbb{Q}$ با $\mathbb{Z}$ همتوان است؟

مثال ۳. ۱. مجموعه $\mathbb{R}$ با $(-۱, ۱)$ همتوان است.

$$(-۱, ۱) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{۲}\right).$$

۲. مجموعه $\mathbb{R}$ با مجموعه $(۰, +\infty)$ همتوان است.

$$\mathbb{R} \longrightarrow (۰, +\infty), \quad x \mapsto e^x.$$

۳. آیا می توان از دو مثال بالا نتیجه گرفت $(-1,1)$ با $(0,+\infty)$ همتوان است؟

مشاهده: فرض کنید x یک مجموعه دلخواه باشد.

(الف) می دانیم تابع $id_X : X \longrightarrow X$ یک تابع یک به یک و پوشا است. پس بنابرتعریف X با «خودش همتوان است.»

یعنی نتیجه گرفتیم برای هر مجموعه X، $X \sim X$.

(ب) فرض کنیم X با Y همتوان باشد. پس بنابرتعریف یک تابع دوسویی $g : X \longrightarrow Y$ وجود دارد. چون g دوسویی است پس تابع وارون آن، $g^{-1} : Y \longrightarrow X$ وجود دارد و یک به یک و پوشاست. یعنی Y هم با X همتوان است. یعنی « اگر X با Y همتوان باشد آنگاه Y هم با X همتوان» است.

یعنی از $X \sim Y$ نتیجه گرفتیم $Y \sim X$.

(پ) فرض کنید $X \sim Y$. پس بنابرتعریف یک تابع دوسویی $f : X \longrightarrow Y$ وجود دارد.

همچنین فرض کنید $Y \sim Z$. پس بنابرتعریف یک تابع دوسویی $g : Y \longrightarrow Z$ وجود دارد.

بنابراین $g \circ f : X \longrightarrow Z$ یک تابع دوسویی است و درنتیجه X با Z همتوان است.

یعنی از $X \sim Y$ و از $Y \sim Z$ نتیجه گرفتیم $X \sim Z$.

مشاهدات فوق را می توان اثباتی برای قضیه زیر دانست.

قضیه ۴. فرض کنیم Φ یک مجموعه از مجموعه هاست و رابطه $\mathcal{R}$ روی Φ به صورت

$$X \sim Y \iff \text{همتوان‌است} \quad Y \quad \text{با} \quad X$$

تعریف می کنیم. آنگاه $\mathcal{R}$ یک رابطه هم ارزی روی Φ است.

به این ترتیب ملاحظه می شود رابطه «همتوانی» مجموعه Φ را به رده های هم ارزی افراز می کند و هر دو عضو از یک رده هم ارزی با همتوان هستند و هر دوعضو از دو رده هم ارزی متفاوت همتوان نیستند.

قضیه ۵. مجموعه‌های X,Y,Z و W با شرط مفروضند. همچنین فرض می کنیم $f: X \longrightarrow Y$ و $g: Z \longrightarrow W$ دوتابع دوسویی باشند. آنگاه $X \cup Z \sim Y \cup W$.

اثبات. تابع h که به صورت زیر تعریف می شود

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{اگر } a \in X \\ g(a) & \text{اگر } a \in Z \end{cases}$$

تابعی یک به یک و پوشاست. بنابراین $X \cup Z$ با $Y \cup W$ در تناظری یک به یک قرار می گیرد. $\square$

مثال ۶. می دانیم $\mathbb{N}_e$، مجموعه اعداد زوج، با مجموعه $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک است. همچنین $\mathbb{N}_o$، مجموعه اعداد فرد، با مجموعه $\{\ldots, -۴, -۳, -۲, -۱, ۰\}$ در تناظر یک به یک است. پس بنابر قضیه ۵ تناظر زیر برقرار است.

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o \sim \{۰, -۱, -۲, -۳, -۴, \ldots\} \cup \{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\} = \{۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, \pm۴, \ldots\} = \mathbb{Z}$$

قضیه ۷. فرض کنیم X,Y,Z و W مجموعه‌هایی با شرط $X \sim Y$ و $Z \sim W$ باشند. آنگاه $X \times Z \sim Y \times W$.

اثبات. چون $X \sim Y$ پس یک تابع دوسویی $f: X \longrightarrow Y$ وجود دارد. چون $Z \sim W$ پس یک تابع دوسویی $g: Z \longrightarrow W$ وجود دارد. حال تابع h که به صورت زیر تعریف می شود

$$h: X \times Z \longrightarrow Y \times W$$

$$(x,z) \mapsto (f(x), g(z))$$

تابعی دوسویی است $\square$

مثال ۸. ۱. اگر $X \sim Y$ آنگاه $X^۲ = X \times X \sim Y \times Y = Y^۲$. به استقرا می توان نشان داد

$$X^n = X \times X \times \cdots \times X \sim Y \times Y \times \cdots \times Y = Y^n$$

۲. می دانیم $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. پس بنابر قضیه فوق $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

آموختیم برای هر $k \in \mathbb{N}$، مجموعه $\mathbb{N}_k$ مجموعه‌ای متناهی است. همچنین مجموعه $\mathbb{N}$ یک مجموعه نامتناهی است. از طرف دیگر مجموعه های $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ نیز نامتناهی اند و شامل $\mathbb{N}$.

از این مشاهده می توان نتیجه گرفت $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعه نامتناهی است؟ به عبارت دیگر هم مجموعه نامتناهی شامل $\mathbb{N}$ است؟

پاسخ: بله. همان طور که در استدلال های پیش مشاهده کردیم، می توان از هر مجموعه نامتناهی X، یک دنباله $\{x_۱, x_۲, \}$ که اعضایش دو به دو متمایزد، از X استخراج کرد و این دنباله با $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک است.

این مشاهده، زمینه ساز تعریف زیر می شود.

تعریف ۹. مجموعه X شمارای نامتناهی [۱] نامیده می شود هرگاه یک تابع دوسویی $g : X \longrightarrow \mathbb{N}$ وجود داشته باشد. مجموعه شمارا، مجموعه ای است که یا متناهی باشد یا شمارای نامتناهی.

به این ترتیب منظور از شمردن عناصر یک مجموعه شمارا، پیدا کردن یک تابع دوسویی $f : X \longrightarrow \mathbb{N}_k$، به ازای یک $k \in \mathbb{N}$ و یا یک تابع دوسویی $g : X \longrightarrow \mathbb{N}$ است.

مثال ۱۰. ۱. مجموعه جملات تصاعد هندسی $X = \{۲^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ یک مجموعه شمارای نامتناهی است زیرا تابع

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$n \mapsto ۲^n$$

تابعی دوسویی است.

به طور کلی مجموعه جملات تصاعد هندسی با قدر نسبت $q > ۰$، یعنی $X = \{q^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ یک مجموعه شمارای نامتناهی است. زیرا تابع

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$n \mapsto q^n$$

[۱] *denumerable*

تابعی دوسویی است.

۲. مجموعه جملات تصاعد حسابی $Y = \{3n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ یک مجموعه شمارای نامتناهی است. زیرا تابع

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \mapsto 3n+1$$

یک تابع دوسویی است. در نتیجه بنابر تعریف Y یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

به طور کلی مجموعه جملات یک تصاعد حسابی با قدر نسبت n، یعنی برای هر دو عدد $a, b \in \mathbb{R}$، با $a \neq 0$، مجموعه $X = \{an+b \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

۳. یک واقعیت مهم: مجموعه $\mathbb{R}$ نامتناهی است ولی «شمارا» نیست.

قضیه ۱۱. هر زیر مجموعه یک مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

اثبات. فرض کنیم Y یک زیر مجموعه نامتناهی از مجموعه شمارای نامتناهی $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ است. چون Y ناتهی است، پس می توان فرض کرد n_1، کوچکترین اندیسی است که $x_{n_1} \in Y$. همینطور، فرض کنیم n_2 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_2} \in Y - \{x_{n_1}\}$. فرض کنید n_{k-1} نیز به همین ترتیب از مجموعه $Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-2}}\}$ انتخاب شده است.

حال n_k را کوچکترین اندیسی می گیریم که $x_k \in Y - \{x_1, \dots, x_{n_{k-1}}\}$. چون Y نامتناهی است، برای هر $k \in \mathbb{N}$، $Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}\} \neq \varnothing$. پس برای هر $k \in \mathbb{N}$، همیشه یک x_k وجود دارد.

به این ترتیب، یک تناظر یک به یک $f : \mathbb{N} \longrightarrow Y$ به صورت $f(k) = x_{n_k}$ ساخته ایم. پس بنابر تعریف Y شمارای نامتناهی است. □

نتیجه ۱۲. هر زیر مجموعه یک مجموعه شمارا، شماراست.

مثال ۱۳. ۱. مجموعه $\mathbb{Q}$، یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

در واقع برای هر $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ تابع $f(p/q) = ۲^p۳^q$ یک تابع یک به یک از $\mathbb{Q}_+$ در $\mathbb{N}$ است. بنابراین $\mathbb{Q}_+$ با یک زیر مجموعه $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک است. پس $\mathbb{Q}_+$ شمارای نامتناهی است.

به همین ترتیب برای هر $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}_-$، تابع $g : \mathbb{Q}_- \longrightarrow \mathbb{N}$ که با $g(r/s) = ۵^r۷^s$ تعریف می شود، یک تابع یک به یک از $\mathbb{Q}_-$ در $\mathbb{N}$ است. در نتیجه

$$h(u/v) = \begin{cases} u^۲v^۳ & \text{اگر } u/v \in \mathbb{Q}_+ \\ \circ & \text{اگر } u/v = \circ \\ u^۵v^۷ & \text{اگر } u/v \in \mathbb{Q}_- \end{cases}$$

سوال ۱۴. ۱. نشان دهید تابع $f : (\circ,\infty) \longrightarrow (\circ,۱)$ که به صورت $f(x) = \frac{x}{۱+x}$ تعریف می شود، یک تابع دوسویی است. از این خاصیت چه نتیجه ای می توان گرفت؟

۲. نشان دهید تابع $g : (-\infty,\circ) \longrightarrow (-۱,\circ)$ که به صورت $g(x) = \frac{x}{۱-x}$ تعریف می شود تابعی یک به یک و پوشاست. از این خاصیت چه نتیجه ای می توان گرفت؟

۳. با کمک دو تمرین اخیر نشان دهید $(-\infty,\infty)$ با مجموعه $(-۱,۱)$ همتوان است.