قاعده انتگرال گیری رامبرگ

با استفاده از قاعده رامبرگ و به کمک مقادیر تقریبی که از روشهای سادهای همچون قاعده ذوزنقهای برای تعیین مقدار عددی انتگرال معین یک تابع بدست می آید و بدون محاسبهٔ تابع f در نقاط اضافی، می‌توان تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x)\,dx$ بدست آورد.

به روش پیچیده ای که در اینجا از ذکر آن خودداری می کنیم، می توان نشان داد که

$$I=\int_a^b f(x)\,dx = T_N + E_2h^2 + E_4h^4 + E_6h^6 + \dots$$

که در آن E_i (ضرایب برنولی) تنها به مشتق iام تابع f بستگی دارند و مستقل از h و a و b هستند.

اگر در رابطه فوق، h را به $\frac{h}{2}$ تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx = T_{2N} + E_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + E_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + E_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots$$

برای حذف E_2 چنین عمل می کنیم:

$$3I = 4I - I = 4T_{2N} - T_N + E_4\left(\frac{h^4}{4} - h^4\right) + E_6\left(\frac{h^6}{16} - h^6\right) + \dots$$

در نتیجه:

$$I = \frac{4T_{2N} - T_N}{3} + E'_4h^4 + E'_6h^6 + \dots$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که مقدار $\boxed{\frac{4T_{2N} - T_N}{3}}$ تقریب عددی دقیق تری از I است که خطای آن متناسب با h^4 است (خطای T_N و T_{2N} متناسب با h^2 است).

اکنون قرار می دهیم: $\boxed{T_{2N}^{(1)} = \frac{4T_{2N} - T_N}{3}}$ در نتیجه:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx = T_{2N}^{(1)} + E'_4h^4 + E'_6h^6 + \dots$$

مجدداً در رابطه فوق، h را به $\frac{h}{2}$ تبدیل می‌کنیم خواهیم داشت:

$$I = T_{4N}^{(1)} + E'_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + E'_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots$$

لذا برای حذف E'_4 چنین عمل می کنیم:

$$15\, I = 16\, T_{4N}^{(1)} - T_{2N}^{(1)} + E''_6 h^6 + \dots$$

در نتیجه:

$$I = \frac{16\, T_{4N}^{(1)} - T_{2N}^{(1)}}{15} + E''_6 h^6 + E''_8 h^8 + \dots$$

و اگر قرار دهیم: $\boxed{T_{4N}^{(2)} = \frac{16\, T_{4N}^{(1)} - T_{2N}^{(1)}}{15}}$ آنگاه $I = T_{4N}^{(2)} + o(h^6)$

با تکرار این روند، مقادیر تقریبی $T_{2N}^{(1)}$ ، $T_{4N}^{(2)}$ ، $T_{8N}^{(3)}$ ، ... ، $T_{2^k N}^{(m)}$ با دقت بیشتری حاصل می شود.

در واقع:

$$\boxed{T_{2^k N}^{(m)} = \frac{4^m\, T_{2^k N}^{(m-1)} - T_{2^{k-1} N}^{(m-1)}}{4^m - 1}}$$

$m = 1, 2, \dots, k$ (مرتبه روش رامبرگ)

$k = 1, 2, \dots$ (تعداد دفعات تکرار)

و خطای $T_{2^k N}^{(m)}$ متناسب با h^{2m+2} است.

با استفاده از جدول زیر می توانیم مقادیر $T_{2^k N}^{(m)}$ را محاسبه کنیم:

$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
$T_N^{(0)}$			
$T_{2N}^{(0)}$	$T_{2N}^{(1)}$		
$T_{4N}^{(0)}$	$T_{4N}^{(1)}$	$T_{4N}^{(2)}$	
$T_{8N}^{(0)}$	$T_{8N}^{(1)}$	$T_{8N}^{(2)}$	$T_{8N}^{(3)}$

مثال. با استفاده از قاعده رامبرگ مقدار تقریبی $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ را به فرض $h=1$ و m = ۳ محاسبه کنید.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad h = 1, \quad f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$h = 1 \quad : \quad T_1 = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = 0.75$$

$$h = \frac{1}{2} \quad : \quad T_2 = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) = \frac{1}{4}(1 + \frac{2}{1.5} + \frac{1}{2}) = 0.708333$$

$$h = \frac{1}{4} \quad : \quad T_4 = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) = \frac{1}{8}(1 + \frac{2}{1.25} + \dots + \frac{1}{2}) = 0.697023$$

$$h = \frac{1}{8} : \quad T_8 = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_7 + f_8) = 0.694122$$

m = ۰	m = ۱	m = ۲	m = ۳
$T_1^{(0)} = 0.75$			
$T_2^{(0)} = 0.708333$	$T_2^{(1)} = \frac{4 \times 0.708333 - 0.75}{3} = 0.69444$		
$T_4^{(0)} = 0.697023$	$T_4^{(1)} = 0.693254$	$T_4^{(2)} = \frac{16 \times 0.693254 - 0.69444}{15} = 0.693175$	
$T_8^{(0)} = 0.694122$	$T_8^{(1)} = 0.6931555$	$T_8^{(2)} = 0.693148$	$T_8^{(3)}$

$$T_8^{(3)} = \frac{64 \times 0.693148 - 0.693175}{63} = 0.693148 \qquad (6D)$$