جواب تکلیف اول

طراحی الگوریتم
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. پاییز ۱۴۰۳

۱. در مسئله ازدواج پایدار، اگر m نفر اول در لیست w باشد و w نفر اول در لیست m باشد در هر ازدواج پایدار زوج (m, w) وجود دارد. چرا؟

چون در هر تطابق بین زنها و مردها، اگر m و w با هم نباشند، تطابق ناپایدار خواهد بود.

۲. فرض کنید در مسئله ازدواج پایدار مقداری آزادی به افراد بدهیم و به افراد این امکان را بدهیم که از طرف مقابل تعدادی را به عنوان غیر قابل قبول اعلام کنند. مثلا w_1 به هیچ وجه حاضر نیست با m_3 یا m_7 ازدواج کند. یا مثلا m_2 اصلا زیر بار ازداواج با w_6 نمی‌رود. در این حالت شرایطی را بررسی کنید که یک تطابق پایدار می‌تواند وجود داشته باشد. در صورت وجود، آیا می‌توان یک تطابق پایدار را سریع پیدا کرد؟

در لیست هر فرد، کسانی که امکان ازدواج با آنها وجود دارد (از نظر همدیگر قابل قبول هستند) را به ترتیب قرار می‌دهیم. به انتهای لیست بقیه افراد را اضافه می‌کنیم (ترتیبش مهم نیست.) حال الگوریتم گیل_شاپلی را اجرا می‌کنیم. اگر در جواب گیل_شاپلی، زوج (m, w) باشد که حداقل یکی برای دیگری غیر قابل قبول است، زوج را از جواب حذف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم تنها مردان و زنانی که باقی می‌مانند می‌توانند در یک ازدواج پایدار باشند.

به عبارت دیگر، فرض کنید m در جواب نهایی نباشد. ادعا می‌کنیم هیچ تطابق پایداری وجود ندارد که شامل m باشد. این از خاصیت الگوریتم گیل_شاپلی نتیجه می‌شود. فرض کنید در جواب اولیه گیل_شاپلی m با w باشد. چون زوج (m, w) غیر قابل قبول بوده از جواب حذف شده. می‌دانیم که در الگوریتم گیل_شاپلی هر مرد با بهترین شریک خودش تشکیل زوج می‌دهد. پس در هیچ ازدواج پایداری m نمی‌تواند با فردی بالاتر از w باشد.

از بحث بالا نتیجه می‌شود زیرمجموعه مشخصی از مردان، مثلا $M' = \{m_1, \cdots, m_k\}$ وجود دارد که می‌توانند در یک ازدواج پایدار باشند و مرد دیگری غیر از اینها نمی‌تواند در این مجموعه خوش شانس باشد. فرض کنید زوجهای اینها به ترتیب $W' = \{w_1, \cdots, w_k\}$ باشند. ادعا می‌کنیم، فقط زنان داخل W' می‌توانند در ازدواج پایدار باشند. برای اثبات این ادعا، الگوریتم گیل_شاپلی را طوری اجرا می‌کنیم که زنها به خواستگاری بروند. مشابه استدلال قبل، مجموعه‌ای از زنان بدست می‌آید که تنها اینها می‌توانند در ازدواج پایدار باشند. این مجموعه همان W' است در غیر اینصورت تناقض پیش می‌آید.

۳. نشان دهید اگر $f(n) = O(d(n))$ و $g(n) = O(t(n))$ آنگاه $f(n)g(n) = O(d(n)t(n))$

$$f(n) = O(d(n)) \qquad \Rightarrow \qquad \exists c_1 > 0, n_1 > 0, \forall n \geq n_1, 0 \leq f(n) \leq c_1 d(n)$$

$$g(n) = O(t(n)) \qquad \Rightarrow \qquad \exists c_2 > 0, n_2 > 0, \forall n \geq n_2, 0 \leq g(n) \leq c_2 t(n)$$

نتیجه می‌شود، برای $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ داریم

$$\forall n \geq n_3, 0 \leq g(n)f(n) \leq c_1c_2t(n)d(n)$$

این همان تعریف $f(n)g(n) = O(t(n)d(n))$ است.

۴. توابع زیر را بر اساس تحلیل مجانبی مرتب کنید.

$$\begin{array}{ccccc} 6n\log n & 2^{100} & \log\log n & \log^2 n & 2^{\log n} \\ 2^{2^n} & \lceil\sqrt{n}\rceil & n^{0.01} & 1/n & 4n^{3/2} \\ 3n^{0.5} & 5n & \lfloor 2n\log^2 n\rfloor & 2^n & n\log_4 n \\ 4^n & n^3 & n^2\log n & 4^{\log n} & \sqrt{\log n} \end{array}$$

$$1/n \quad 2^{100} \quad \log\log n \quad \sqrt{\log n} \quad \log^2 n \quad n^{0.01}$$

$$\lceil\sqrt{n}\rceil \quad 3n^{0.5} \quad 2^{\log n} \quad 5n \quad n\log_4 n \quad 6n\log n$$

$$2n\log^2 n \quad 4n^{3/2} \quad 4^{\log n} \quad n^2\log n \quad n^3 \quad 2^n$$

$$4^n \quad 2^{2^n}$$

۵. گراف G شامل n راس و m یال است. چگونه در زمان $O(n)$ می‌توان تشخیص داد که G دور دارد یا ندارد؟ (راهنمایی: از DFS استفاده کنید.)

فرض: گراف ساده (غیر جهت دار).

اینجا از این مشاهده استفاده می‌کنیم که گرافی با n راس اگر تعداد یالهایش از $n-1$ بیشتر باشد، حتما دور دارد. دقت کنید گراف بصورت لیست مجاورتی داده شده است. همچنین تعداد رئوس n است. ابتدا تعداد یالهای گراف را می‌شماریم (برای این کار می‌توانیم مجموع درجات رئوس را جمع بزنیم. اگر درجات رئوس مستقیما در دسترس نباشد، می‌توانیم لیست همسایه‌ها را پیمایش کنیم و هر وقت تعداد همسایه از $2(n-1)$ بیشتر شد، متوقف شویم و اعلام کنیم که گراف دور دارد.) اگر تعداد یالها از $n-1$ کمتر باشد. با استفاده از DFS یا BFS جنگل فراگیر گراف را پیدا می‌کنیم. اگر یالی باشد که در جنگل فراگیر نباشد، گراف حتما دور دارد. عکس این مطلب نیز صادق است.

۶. در مسائل زیر G گرافی ساده است که شامل n راس و m یال است. برای هر کدام از موارد زیر یک الگوریتم با زمان $O(n+m)$ ارائه کنید.

(آ) دو یال e_1 و e_2 در گراف G داده شده. الگوریتمی ارائه کنید که تشخیص دهد آیا e_1 و e_2 در یک دور قرار گرفته‌اند یا نه.

برای جواب به کتاب Introduction to algorithms, a creative approach نوشته Udi Manber فصل ۷ بخش ۹ مراجعه کنید. این مسئله در زمان گفته شده قابل حل است اما نیازمند الگوریتمی برای یافتن مولفه‌های ۲ـ همبند گراف است که در کلاس تدریس نشده است.

(ب) الگوریتمی ارائه کنید که تشخیص دهد G حداقل ۲ دور دارد.

اگر گراف همبند باشد، حداقل 2 دور دارد اگر و فقط اگر تعداد یالها از n بیشتر باشد. اگر گراف همبند نباشد، این موضوع را برای هر مولفه همبندی می‌توانیم چک کنیم. مثلا اگر یک مولفه همبندی k راس داشته باشد و بیشتر از k یال داشته باشد آنگاه حداقل دو دور دارد. لذا مولفه‌های همبندی گراف را پیدا می‌کنیم و تعداد یالهای هر مولفه را می‌شماریم. همه اینها در زمان $O(n+m)$ قابل انجام است.

(ج) الگوریتمی ارائه کنید که تشخیص دهد G دقیقا ۲ دور دارد که یال مشترک هم ندارند.

فرض می‌کنیم گراف همبند است. تعداد یالها را می‌شماریم اگر از $n+1$ بیشتر باشد، تعداد دورها بیشتر از 2 خواهد شد (اگر تعداد یالها کمتر از $n+1$ باشد، تعداد دورها کمتر از 2 خواهد شد.) پس می‌توانیم فرض بگیریم که تعداد یالها $n+1$ است. با استفاده از BFS یا DFS یک درخت فراگیر را محاسبه می‌کنیم. دو یال e_1 و e_2 وجود دارند که در درخت نیستند. یال e_1 را به درخت اضافه می‌کنیم، یالهای دور ایجاد شده C_1 را ثبت می‌کنیم. حال e_1 را برمی‌داریم و e_2 را اضافه می‌کنیم. یالهای دور ایجاد شده C_2 را ثبت می‌کنیم. اگر C_1 و C_2 اشتراک نداشتند، گزارش می‌کنیم که گراف ۲ دور دارد که اشتراک یالی ندارند.

اگر گراف همبند نباشد، مولفه‌های همبندی را پیدا می‌کنیم و الگوریتم گفته شده را برای هر مولفه همبندی تکرار می‌کنیم.

۷. فرض کنید G یک گراف ۳ـ رنگ پذیر باشد (یعنی می‌توان رئوسش را با استفاده از ۳ رنگ رنگ آمیزی کرد بطوریکه هیچ یالی دو سرش همرنگ نباشد.) نشان دهید برای هر راس v در گراف G، همسایه‌های v و یالهایی که بینشان وجود دارد تشکیل یک گراف دوبخشی را می‌دهند.

اگر گراف ۳ـ رنگ پذیر باشد، همسایه‌های هر راس را می‌توان با ۲ رنگ، رنگ آمیزی کرد. لذا حتما همسایه‌های هر راسی تشکیل یک گراف دوبخشی را می‌دهند.

۸. از تمرین قبل استفاده کنید و الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای ارائه دهید که یک گراف ۳ـ رنگ پذیر را با استفاده از $O(\sqrt{n})$ رنگ رنگ آمیزی کند. راهنمایی: یک گراف با ماکزیمم درجه Δ را می‌توان با $\Delta+1$ رنگ آمیزی کرد.

اگر $\Delta \le \sqrt{n}$ با استفاده از قضیه گفته شده می‌توان گراف را با $\sqrt{n}+1$ رنگ رنگ آمیزی کرد. پس فرض می‌کنیم $\Delta > \sqrt{n}$. راس با ماکزیمم درجه را برمی‌داریم و خودش و همسایه‌هایش را با ۳ رنگ جدید رنگ آمیزی می‌کنیم (این کار با توجه به مشاهده گفته شده در سوال قبلی، شدنی است.) این کار را تکرار می‌کنیم (هر بار راس با ماکزیمم درجه و همسایه‌هایش را رنگ می‌کنیم) تا جایی که درجه گراف حاصل به $\sqrt{n}$ یا کمتر از آن برسد. دقت کنید این مرحله حداکثر $\sqrt{n}$ بار تکرار می‌شود. پس تا اینجا حداکثر $3\sqrt{n}$ رنگ استفاده کردیم. گراف باقیمانده ماکزیمم درجه اش $\sqrt{n}$ است و لذا می‌توان آن را با حداکثر $\sqrt{n}+1$ رنگ رنگ آمیزی کرد. لذا در مجموع $4\sqrt{n}+1$ رنگ استفاده کردیم.