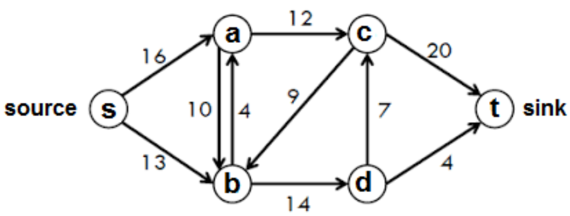
درس طراحی الگوریتم
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. پاییز ۱۴۰۱
کتاب مرجع: طراحی الگوریتم. جان کلاینبرگ و اوا تاردش

۱ مسئله جریان بیشینه در شبکه maximum flow problem

در مسئله جریان بیشینه (یا شار بیشینه) یک گراف جهت دار $G = (V, E)$ داده شده است. راس $s \in V$ به عنوان مبدا source و راس $t \in V$ به عنوان مقصد sink از میان رئوس گراف مشخص شده است. دقت کنید که رئوس مبدا و مقصد باید متفاوت باشند.

هر یال $e \in E$ یک مقدار ظرفیت مشخص دارد که با c_e نشان میدهیم. اینجا فرض ما بر این است که ظرفیت یال یک عدد صحیح مثبت است.

همچنین فرض ما بر این است که راس مبدا s یال ورودی ندارد و راس مقصد t هم یال خروجی ندارد.



یک جریان از s به t معادل با یک مقداردهی جریان $f : E \to \mathbb{R}^+$ به یالهای گراف است بطوریکه شروط زیر برآورده شود:

- $\forall e \in E, \;\; 0 \leq f(e) \leq c_e$
- $\forall x \in V \setminus \{s, t\}, \quad \sum\limits_{e \text{ enters } x} f(e) = \sum\limits_{e \text{ exits } x} f(e)$

شرط اول میگوید که مقدار جریان $f(e)$ برای یک عدد مثبت باشد و نباید از ظرفیت یال بیشتر باشد.

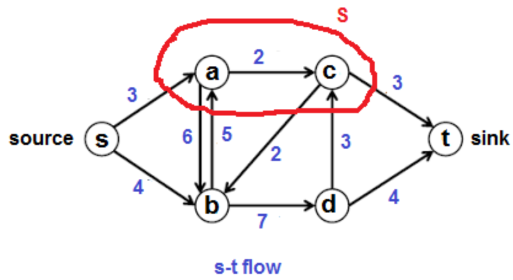
شرط دوم میگوید، برای هر راس x، غیر از راس مبدا و مقصد، مجموع جریان ورودی به راس x یعنی $\sum\limits_{e \text{ enters } x} f(e)$ باید برابر با مجموع جریان خروجی از راس یعنی $\sum\limits_{e \text{ exits } x} f(e)$ باشد.

برای راس $x \in V$ نمادهای زیر را تعریف میکنیم.

- $f^{\text{in}}(x) = \sum\limits_{e \text{ enters } x} f(e) \qquad \leftarrow \quad$ جریان ورودی به راس x
- $f^{\text{out}}(x) = \sum\limits_{e \text{ enters } x} f(e) \qquad \leftarrow \quad$ جریان خروجی از راس x

برای مجموعه رئوس $S \subseteq V$ نمادهای زیر را داریم

- $f^{\text{in}}(S) = \sum\limits_{e \text{ enters } S} f(e) \qquad \leftarrow$ جریان ورودی به مجموعه رئوس S
- $f^{\text{out}}(S) = \sum\limits_{e \text{ enters } S} f(e) \qquad \leftarrow$ جریان خروجی از مجموعه رئوس S



در مسئله جریان بیشینه، دنبال یک جریان معتبر از s به t میگردیم بطوریکه $f^{\text{out}}(s)$ بیشینه شود. به عبارت دیگر میخواهیم مجموع جریان خروجی از s بیشینه شود. در مثال بالا جریان خروجی از s برابر با 7 است. به همین ترتیب جریان ورودی به t نیز برابر با 7 است. در واقع برای یک جریان معتبر از s به t داریم

$$f^{\text{out}}(s) = f^{\text{in}}(t)$$

اثبات این تساوی را بر عهده دانشجو میگذاریم.

پس در واقع مسئله جریان بیشینه برای گراف $G = (V, E)$ با راس مبدا s و راس مقصد t را میتوانیم بصورت زیر خلاصه کنیم:

$$\max \; f^{\text{out}}(s)$$

$$\begin{cases} \forall e \in E, \quad 0 \leq f(e) \leq c_e \\ \forall x \in V \setminus \{s, t\}, \quad f^{\text{in}}(x) = f^{\text{out}}(x) \end{cases}$$

۲ الگوریتم فورد–فولکرسون برای محاسبه جریان بیشینه Ford-Fulkerson algorithm

الگوریتم فورد فولکرسون، که به نام طراحان آن مرسوم شده است، جریان بیشینه را از s به t پیدا میکند. این الگوریتم با یک جریان معتبر از s به t کار را شروع میکند و در طی یک سری مراحل، هر بار یک جریان با مقدار بیشتر را پیدا میکند. در نهایت، الگوریتم در جایی متوقف میشود و اعلام میکند که آخرین جریان بدست آمده بهینه است.

مراحل اجرای الگوریتم فورد فولکرسون در قدمهای زیر توصیف شده است.

۱. در شروع کار $f(e) = 0$ برای هر یال e در گراف. روشن است که این یک جریان معتبر است.

۲. قدمهای ۳ تا ۷ را تکرار کن تا زمانی که الگوریتم متوقف شود.

۳. فرض کنید f جریان کنونی در گراف G باشد. با توجه به f ، گراف باقیمانده G_f را بصورت زیر تعریف میکنیم:

(آ) رئوس گراف باقیمانده G_f همان رئوس گراف G هستند.

(ب) برای هر یال $e = (x, y)$ در گراف G که ظرفیت c_e دارد و جریان $f(e)$ روی آن برقرار است، بصورت زیر عمل میشود.

- اگر $c_e > f(e)$ آنگاه یک یال از x به y با ظرفیت $c_e - f(e)$ در گراف G_f قرار میدهیم (یال پیشرو).
- اگر $f(e) > 0$ آنگاه یک یال از y به x با ظرفیت $f(e)$ قرار میدهیم (یال پسرو)

۴. در گراف باقیمانده G_f یک مسیر از s به t پیدا میکنیم. اگر چنین مسیری وجود نداشته باشد، اعلام کن که جریان f بهینه است و الگوریتم را خاتمه بده.

۵. فرض کن P مسیری باشد که از s به t در گراف باقیمانده G_f پیدا شده است.

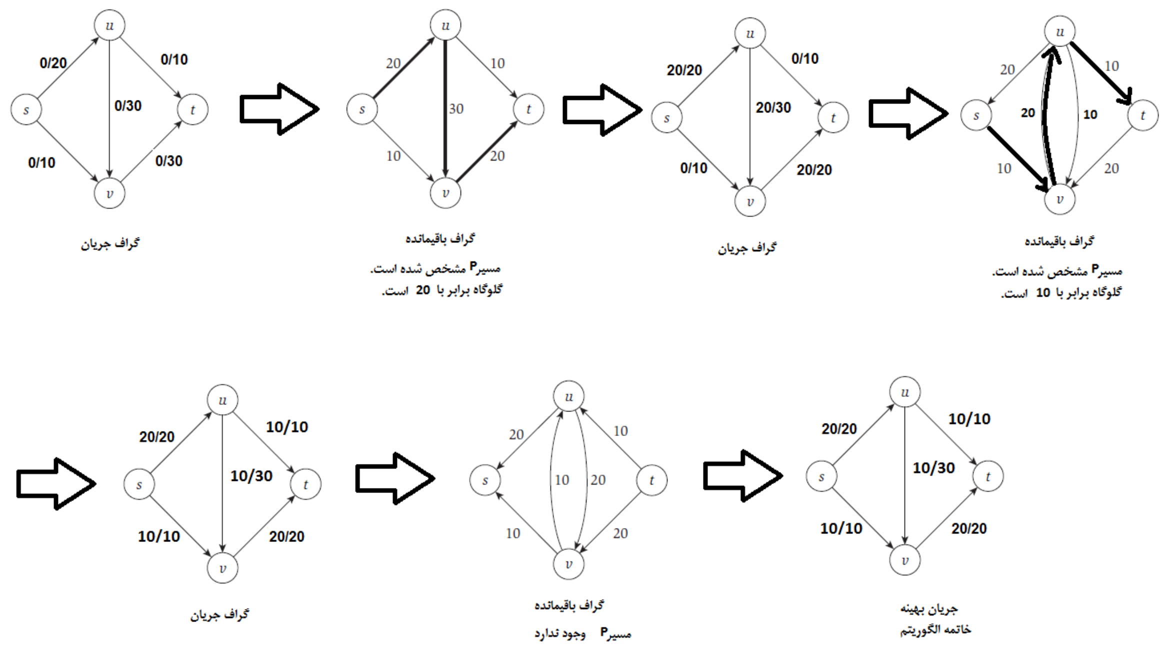
۶. فرض کن b کمترین ظرفیت در مسیر P باشد. b در واقع ظرفیت گلوگاه مسیر را مشخص میکند.

۷. برای هر یال $e = (x, y)$ در P کارهای زیر را انجام بده.

(آ) اگر e یک یال پیشرو باشد، آنگاه $f(x, y) \leftarrow f(x, y) + b$

(ب) در غیر اینصورت اگر e یک یال پسرو باشد آنگاه $f(y, x) \leftarrow f(y, x) - b$

۳ یک نمونه از اجرای الگوریتم فورد فولکرسون



به نکات زیر دقت کنید:

- مسیر P، در صورت وجود، در گراف باقیمانده است و نه در گراف اصلی.
- به یالهای پیشرو و پسرو در گراف باقیمانده دقت کنید. اضافه شدن یا کم شدن جریان در یک یال وابسته به پیشرو و پسرو بودن یال در گراف باقیمانده است. در واقع وجود یال پیشرو در مسیر P باعث اضافه شدن جریان در یال مربوطه میشود. وجود یال پسرو، باعث کم شدن جریان در یال مربوطه میشود.

۴ اثبات درستی الگوریتم

برای اثبات اینکه الگوریتم فورد فولکرسون جریان بیشینه را بعد از تعدادی قدم متناهی پیدا میکند، نیاز به اثبات سه گزاره داریم.

- **جریان f بعد از بروزرسانی (در قدم ۷ الگوریتم) یک جریان معتبر است.**

فرض کنید f' جریان جدید بعد از بروزرسانی باشد. برای اثبات این گزاره، باید نشان دهیم که f' جدید دو شرط معتبر بودن جریان که ابتدای درس بیان شد را برآورده میکند. به عبارت دیگر،

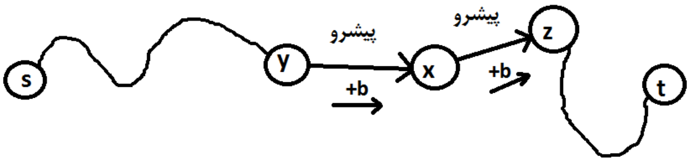
- $\forall e \in E, \;\; 0 \leq f'(e) \leq c_e$
- $\forall x \in V \setminus \{s,t\}, \quad \sum_{e \text{ enters } x} f'(e) = \sum_{e \text{ exits } x} f'(e)$

برای شرط اول، دقت کنید مقدار جریان روی یال (x,y) به اندازه ظرفیت گلوگاه مسیر یعنی b کم یا زیاد میشود. اگر $e=(x,y)$ یک یال پیشرو باشد، جریان روی یال (x,y) در گراف G به اندازه b افزایش می یابد. این مسئله مشکلی ایجاد نمیکند چون یال (x,y) به اندازه $f(e)-c_e$ ظرفیت باقیمانده داشت و چون b گلوگاه مسیر است پس $b\leq f(e)-c_e$ است.

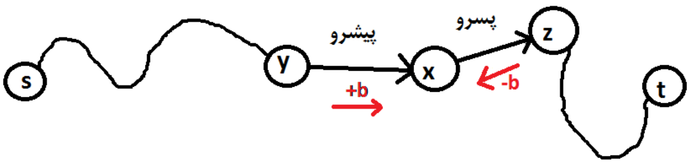
اگر $e=(x,y)$ یک یال پسرو باشد، یعنی در گراف اصلی، به اندازه $f(e)$ جریان از سمت y به x داریم. حال این جریان را به اندازه b کم میکنیم و بدست می آید: $f'(y,x)=f(y,x)-b$ این هم مشکلی ایجاد نمیکند چون $b\leq f(e)$ طبق تعریف گراف باقیمانده و تعریف b.

برای بررسی شرط دوم، یعنی بعد از بروزرسانی جریان ورودی و جریان خروجی برای هر راس در گراف، غیر از مبدا و مقصد، برابر هستند. دقت کنید اگر راس x روی مسیر P نباشد، هیچ تغییری در جریان روی x اتفاق نمی افتد. لذا فقط باید حالتی را بررسی کنیم که x جزوی از مسیر P است.

اگر $e=(y,x)$ و $e'=(x,z)$ هر دو پیشرو باشند، جریان ورودی به x به اندازه b افزایش می یابد. همینطور جریان خروجی از x هم به اندازه b افزایش می یابد. لذا در این حالت ورودی و خروجی هموزن باقی میمانند.



اگر یال $e=(y,x)$ پیشرو باشد و یال $e'=(x,z)$ پسرو باشد یعنی جریان از y به x به اندازه b افزایش می یابد و جریان از z به x هم به اندازه b کاهش مییابد. در این حالت میزان جریان ورودی به x تغییری نمیکند و خروجی هم همان مقدار قبلی را دارد.



بررسی بقیه حالات را بر عهده دانشجو میگذاریم.

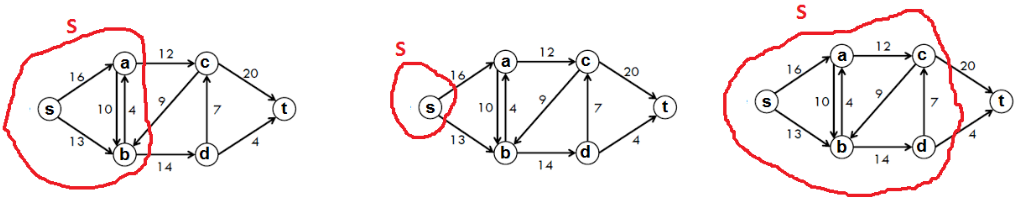
- **مقدار $f^{\text{out}}(s)$ در هر مرحله افزایش می یابد.**

چون طبق فرض مسئله s یال ورودی ندارد، پس در گراف باقیمانده همه یالهای خروجی از s یال پیشرو هستند. این یعنی اینکه اولین یال مسیر P همواره یک یال پیشرو است. پس در هر مرحله جریان خروجی از s به اندازه ظرفیت گلوگاه مسیر افزایش می یابد. این خود نشان میدهد که الگوریتم بعد از طی یک سری قدمهای متناهی خاتمه می یابد. یک نکته اینجا وجود دارد، میزان افزایش $b\geq 1$ همواره یک عدد صحیح مثبت است. لذا اگر C مجموع ظرفیت یالهای روی s باشد، الگوریتم بعد از حداکثر C مرحله خاتمه می یابد.

• **در هنگام توقف الگوریتم، آخرین جریان بدست آمده بهینه است.**

برای اثبات این گزاره نیاز به چند تعریف داریم.

تعریف. یک **برش** (s,t) رئوس گراف را به دو قسمت S و T افراز میکند بطوریکه $s \in S$ و $t \in T$.
در شکل زیر سه برش (s,t) مختلف از یک گراف را مشاهده میکنید.



تعریف. فرض کنید (S,T) یک برش (s,t) باشد. ظرفیت برش برابر با مجموع ظرفیت یالهایی است که از S خارج میشود.

$$c(S,T) = \sum_{e \text{ exits } S} c_e = \sum_{e \text{ enters } T} c_e$$

برای مثال ظرفیت برش شکل بالا سمت چپ برابر با $12 + 14$ است.

لم. برای هر جریان معتبر f از s به t و برش دلخواه (S,T) داریم

$$f^{\text{out}}(s) = f^{\text{out}}(S) - f^{\text{in}}(S)$$

اثبات. برای هر $x \in S \setminus \{s\}$ داریم

$$f^{\text{in}}(x) = f^{\text{out}}(x)$$

لذا داریم

$$\sum_{x\in S} \Big(f^{\text{out}}(x) - f^{\text{in}}(x)\Big) = f^{\text{out}}(s) - f^{\text{in}}(s) = f^{\text{out}}(s)$$

حال به مجموع سمت چپ دقت کنید. یک یال اگر درون S باشد، یک بار بصورت مثبت ظاهر میشود و یک بار بصورت منفی. لذا از مجموع حذف میشود. اگر یال از S خارج شود، در مجموع یکبار و آن هم بصورت مثبت ظاهر میشود. اگر یال به S وارد شود در مجموع یکبار و آن هم بطور منفی ظاهر میشود. لذا مجموع را میتوانیم بصورت زیر بنویسیم

$$f^{\text{out}}(S) - f^{\text{in}}(S) = \sum_{x\in S} \Big(f^{\text{out}}(x) - f^{\text{in}}(x)\Big) = f^{\text{out}}(s)$$

■

لم. برای هر جریان معتبر f از s به t و برش دلخواه (S,T) داریم

$$f^{\text{out}}(s) \leq c(S,T)$$

اثبات. این یعنی اینکه میزان جریان خروجی از s هیچگاه نمیتواند از ظرفیت یک برش (s,t) بیشتر باشد. با استفاده از لم قبلی داریم

$$f^{\text{out}}(s) = f^{\text{out}}(S) - f^{\text{in}}(S) \leq f^{\text{out}}(S) \leq c(S,T)$$

■

لم زیر اثبات میکند که الگوریتم فورد فولکرسون جواب بهینه را پیدا میکند چون یک برش (s,t) پیدا کرده ایم که مقدار جریان دقیقا برابر با ظرفیت آن است. چون هیچ جریانی از ظرفیت برش مذکور نمیتواند بیشتر باشد، لذا جریان پیدا شده بهترین است.

لم. در پایان الگوریتم فورد فولکرسون یک برش (S^*,T^*) پیدا میشود بطوریکه $s \in S^*$ و $t \in T^*$ و

$$f^{\text{out}}(s) = c(S^*,T^*)$$

اثبات. فرض کنید f جریان نهایی باشد و G_f گراف باقیمانده در خاتمه الگوریتم باشد. تعریف میکنیم

$$S^* = \{x \in V \mid \text{در گراف باقیمانده } x \text{ از } s \text{ قابل دسترسی است}\}$$

$$T^* = V \setminus S^*$$

میدانیم که مسیری از s به t در گراف باقیمانده وجود ندارد. لذا برش (S^*,T^*) یک برش (s,t) معتبر است.

حال به یالهای خروجی از S^* دقت کنید. ادعا میکنیم که جریان روی اینها اشباع شده است. یعنی برای هر یال e خروجی از S^* داریم

$$f(e) = c_e$$

اگر اینطور نباشد و یال $e = (x,y)$ وجود داشته باشد و $f(e) < c_e$ باشد، آنگاه در گراف باقیمانده باید یک یال پیشرو از x به y وجود داشته باشد. این یعنی اینکه $x \in S^*$ یک یال به $y \in T^*$ دارد. لذا y هم باید طبق تعریف برش عضور S^* باشد و این یک تناقض است.

حال یالهای ورودی به S^* را در نظر بگیرید. ادعا میکنیم جریان روی همه این یالها صفر است. برای تناقض فرض کنید یال $e = (z,x)$ وجود دارد که $z \in T^*$ و $x \in S^*$ و داریم $f(e) > 0$. طبق تعریف گراف باقیمانده باید یک یال پسرو از x به سمت z در گراف باقیمانده وجود داشته باشد. باز هم تناقض پیش آمد چون این یعنی اینکه z باید در مجموعه S^* باشد در حالیکه در مجموعه T^* است.

لذا مقدار جریان خروجی از S^* دقیقا برابر با ظرفیت برش (S^*,T^*) است.

$$f^{\text{out}}(s) = \overbrace{f^{\text{out}}(S^*)}^{c(S^*,T^*)} - \underbrace{f^{\text{in}}(S^*)}_{0} = c(S^*, T^*)$$

این اثبات لم را کامل میکند. ■