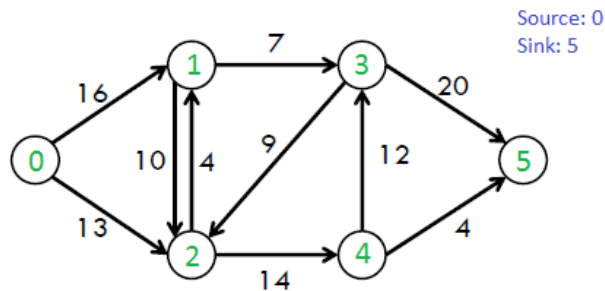


تکلیف سری چهارم

طراحی الگوریتم

دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. پاییز ۱۴۰۳

۱. الگوریتم فورد - فولکرسون را برای گراف زیر اجرا کنید. موقع انتخاب مسیر افزایشی، هر دو استراتژی انتخاب مسیر با بیشترین گلوگاه، و انتخاب مسیر با کمترین تعداد یال را امتحان کنید. کدام استراتژی در این مثال سریعتر به شار بیشینه می‌رسد. در موقعیتهای برابر، به مسیری اولویت بدهید که شماره راس بعدی کمتر است.



۲. فرض کنید (S, T) و (S', T') دو برش کمینه $s - t$ در شبکه G باشند. نشان دهید که $(S \cap S', T \cup T')$ و $(S \cup S, T \cap T')$ هم دو برش کمینه $s - t$ در شبکه G هستند.

۳. گزاره های زیر تایید می‌کنید یا رد می‌کنید؟

- اگر در شبکه‌ای همه ظرفیتهای عدد زوج باشند، آنگاه یک شار بیشینه f وجود دارد $f(e)$ برای هر یال e زوج است.
- اگر در شبکه‌ای همه ظرفیتهای عدد فرد باشند، آنگاه یک شار بیشینه f وجود دارد $f(e)$ برای هر یال e فرد است.

۴. ماتریس A یک ماتریس با ابعاد $n \times m$ است و همه درایه‌هایش حقیقی و مثبت هستند. با فرض اینکه مجموعه سطرهای A اعداد صحیح a_1, \dots, a_n و مجموع ستونهای A اعداد صحیح b_1, \dots, b_m هستند نشان دهید ماتریس B با ابعاد $n \times m$ وجود دارد که همه درایه‌هایش اعداد صحیح و مثبت هستند و از لحاظ مجموع سطرها و ستونها با A یکسان است.

۵. نیروهای اشغالگر یک شبکه ارتباطی برای انتقال تسلیحات از نقطه s به نقطه t ایجاد کرده‌اند. راه ارتباطی مستقیم از نقطه u به v ظرفیتی مشخصی برای انتقال تسلیحات دارد که با عدد صحیح مثبت $c(u, v)$ تخمین زده شده است. نیروهای مقاومت می‌خواهند شبکه ارتباطی نیروهای اشغالگر را قطع کنند. آنها راهی ندارند جز اینکه با مواد منفجره یک راه ارتباطی را مسدود کنند. اگر فقط یکبار امکان استفاده از مواد منفجره باشد، مسئله این است که کدام راه ارتباطی را مسدود کنند که ظرفیت انتقال تسلیحات توسط اشغالگران حداقل شود. شما به عنوان

یک طراح الگوریتم، به نیروهای مقاومت کمک کنید که جواب مسئله در کمترین زمان پیدا شود. اگر فرض کنیم شبکه شامل n نقطه و m راه ارتباطی است، پیچیدگی زمان الگوریتم شما چقدر است؟ اگر امکان مسدود کردن k راه را داشته باشیم، آیا می‌توانیم جواب مسئله را زمان چندجمله‌ای پیدا کنیم؟

۶. $G = (A \cup B, E)$ یک گراف دوبخشی است که در آن $|N(S)| \geq |S| - d$ برای هر $S \subseteq A$ برقرار است. نشان دهید که گراف G یک تطابق با اندازه حداقل $|A| - d$ یال دارد.

۷. یک کمپ تابستانی برنامه‌ای شامل n ورزش و سرگرمی ارائه می‌کند. این کمپ می‌خواهد مربیانی را برای این برنامه استخدام کند. تعداد m متقاضی برای این منظور ثبت نام کرده‌اند. هر متقاضی فرمی پر کرده است که در آن ورزشهای تخصصی خود را تیک زده است. کمپ می‌خواهد حداقل تعداد مربی را استخدام کند بطوریکه برای هر ورزش حداقل یک مربی داشته باشد. نشان دهید این پرسش که آیا k مربی در میان متقاضیان وجود دارد که همه ورزشها را پوشش دهند NP-Complete است.

۸. در مسئله Almost-SAT می‌خواهیم بدانیم آیا یک مقداردهی به متغیرهای یک فرمول منطقی به فرم CNF با m جمله وجود دارد که دقیقاً $m - 1$ عبارت را ارضا کند. نشان دهید مسئله Almost-SAT یک مسئله NP-Complete است.

۹. گراف غیر جهتدار $G = (V, E)$ داده شده است. یک مجموعه مستقل قوی strongly independent set در G زیرمجموعه‌ای مانند S از رئوس گراف است بطوریکه هیچ دو عضو S مسیری بطول 2 و یا کمتر از آن بینشان نباشد. مسئله Strongly Independent Set می‌پرسد آیا یک مجموعه مستقل قوی در گراف G با حداقل k راس وجود دارد یا نه. نشان دهید این مسئله NP-Complete است.