نوع خاصی از رابطه است که به تابع موسوم است. تاکنون با مثال های زیادی از تابع آشنا شده ایم.

در واقع، یک تابع از A به B یک رابطه ای است که به هر عضو A، یک و فقط یک عضو B را نظیر می کند.

به عنوان مثال:

مثال ۱. *a)* به یاد بیاورید برای محاسبه جدول ارزش عبارت های منطقی به یک دنباله از ارزش های گزاره های مولفه های یک گزاره مرکب، ، ارزش گزاره را تعیین می کردیم. در واقع در این موارد هم یک رابطه بین ارزش های مولفه های یک گزاره مرکب و مجموعه $\{T,F\}$ برقرار می کردیم. به عنوان مثال

.۱

$$\begin{aligned} \{T,F\} &\longrightarrow \{T,F\} \\ q &\mapsto \sim q \end{aligned}$$

.۲

$$\begin{aligned} \{T,F\}\times\{T,F\} &\longrightarrow \{T,F\} \\ (p,q) &\longrightarrow p\vee q \end{aligned}$$

.۳

$$\begin{aligned} \{T,F\} &\longrightarrow \{T,F\} \\ q &\mapsto \sim q \end{aligned}$$

.۴

$$\begin{aligned} \{T,F\}\times\{T,F\} &\longrightarrow \{T,F\} \\ (p,q) &\mapsto p\wedge q \end{aligned}$$

.۵

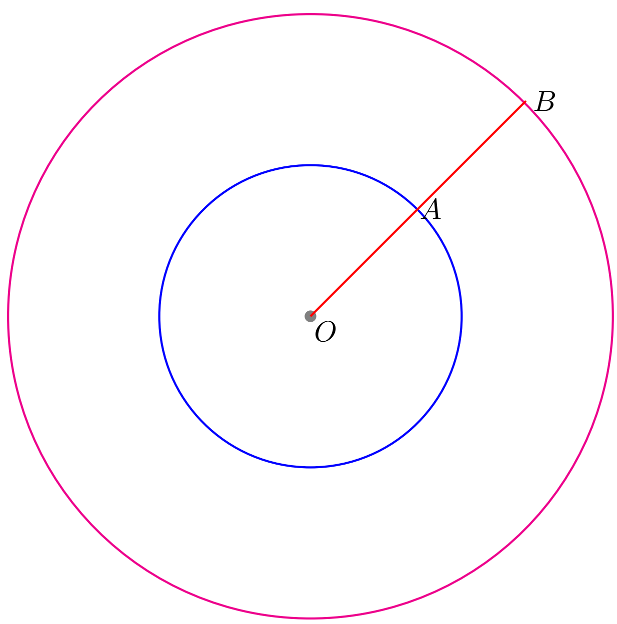
$$\begin{aligned} \{T,F\}\times\{T,F\}\times\{T,F\} &\longrightarrow \{T,F\} \\ (p,q,r) &\mapsto p\wedge(q\vee r) \end{aligned}$$

.۶

$$\begin{aligned} \{T,F\}\times\{T,F\} &\longrightarrow \{T,F\} \\ (p,q) &\mapsto p\longrightarrow q \end{aligned}$$

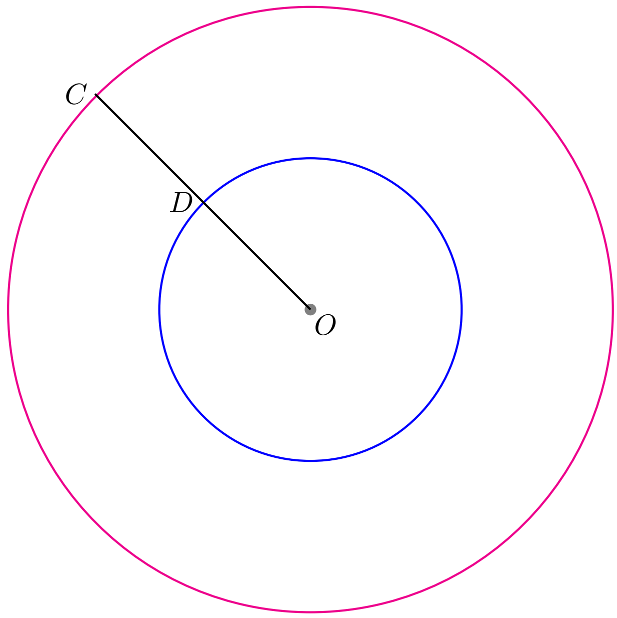
مثال ۲. $b)$ به عنوان مثالی دیگر در این تصاویر، سعی می شود از طریق شعاع یک دایره و محل برخورد امتداد یافته این شعاع با دایره دیگر، یک مفهوم مهم را به صورت تصویری آموزش دهیم. آیا شما می توانید بگویید این مفهوم چیست؟

با انتخاب نقطه A روی دایره آبی رنگ و با امتداد دادن شعاع OA، دایره بنفش رنگ را در یک و فقط یک نقطه B قطع می کند.



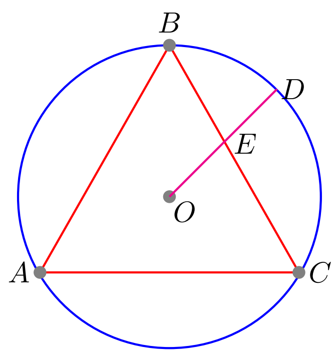
سوال ۳. با تغییر A روی دایره آبی رنگ، آیا نقطه متناظر به A، یعنی نقطه B از تمامی نقاط دایره بنفش می گذرد؟

برعکس، با انتخاب نقطه C روی دایره آبی رنگ شعاع CA، دایره بنفش رنگ را در یک و فقط یک نقطه D قطع می کند.



سوال ۴. با تغییر C روی دایره بنفش رنگ، آیا نقطه متناظر به C یعنی نقطه D از تمامی نقاط دایره آبی می گذرد؟

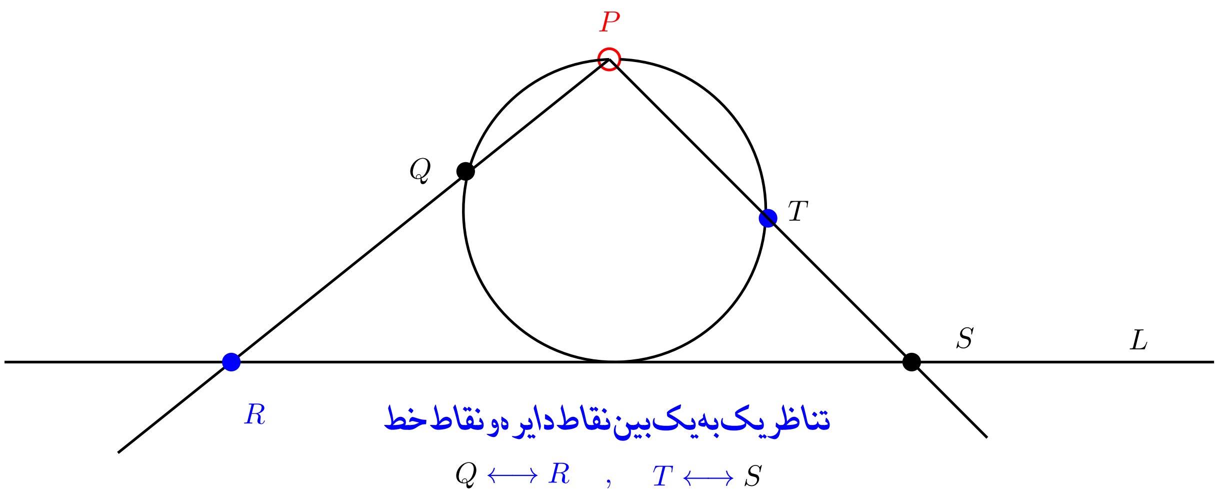
مثال ۵. سوالی مشابه سوال های قبل. آیا یک رابطه از نقاط روی اضلاع مثلث در نقاط روی محیط دایره وجود دارد؟



نیم خط OE، دایره آبی را در نقطه D قطع می کند و می توان گفت رابطه $E \longleftrightarrow D$.

با پویش E روی مثلث آیا نقطه مرتبط با آن، یعنی D تمام دایره را می پیماید؟

مثال ۶. در مثال زیر ملاحظه می شود یک تابع از دایره که یکنقطه آن حذف شده و خط $\mathbb{R}$ وجود دارد.



مثال ۷. سوالی که پیش می آید این است که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، مجموعه توانی آن $P(A)$ چند عضو دارد؟

در پایین یک رابطه بین مجموعه زیر مجموعه های A و مجموعه دنباله های صفر و یک برقرار می کنیم به طوری که این رابطه به هر زیر مجموعه A یک و فقط یک دنباله n تایی از صفر و یک ها نظیر می کند و به هر دنباله به طول n از صفر و یک ها یک و فقط یک زیر مجموعه از A نظیر می کند و به این ترتیب تعداد عناصر $P(A)$ پیدا می کنیم.

به عبارت دیگر از طریق یک رابطه بین محموعه $\{a_1a_2\dots a_n \mid a_i = 0$ یا $1\}$ و $P(A)$ تعداد عناصر $P(A)$ را می شماریم.

قضیه ۸. اگر A از n عنصر نشکیل شده باشد، آنگاه مجموعه توانی $P(A)$ دقیقاً از 2^n عنصر تشکیل شده است.

اثبات. به استقرا درستی حکم بالا را نشان می دهیم.

بدیهی است که اگر $A = \phi$ آنگاه تعداد عناصر برابر $1 = 2^0$ است.

پس فرض می کنیم A تهی نباشد. اعضای آن را می توانیم به صورت $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ بنویسیم. یک

عنصر A مانند a_k را درنظر می گیریم. هر زیر مجموعه A یا این را دارد یا به آن تعلق ندارد. بنابراین، مساله یافتن تعداد زیر مجموعه های A برمی گردد به این که n مربع خالی که از ۱ تا n شماره گذاری شده داریم. بسته به اینکه آیا عضو a_k در زیر مجموعه B هست یانه؟ در مربع k ام عدد ۱ را قرار می دهیم هرگاه $a_k \in B$ و صفر قرار می دهیم هرگاه $a_k \notin B$. به عبارت دیگر

$$\text{مقدار خانه } k \text{ ام} = \begin{cases} ۱ & a_k \in B \text{ اگر} \\ ۰ & a_k \notin B \text{ اگر} \end{cases}$$

۱	۲	۳	۴	۵	۶		$n-۱$	$n-۴$	$n-۳$	$n-۲$	$n-۱$	n
۱یا۰	۱یا۰	۱یا۰	۱یا۰	۱یا۰	۱یا۰	$\cdots$	۱یا۰	۱یا۰	۱یا۰	۱یا۰	۱یا۰	۱یا۰

توزیع عناصر B در جدول بالا

به این ترتیب چون تعداد دنباله های اعدادی متشکل از صفر و یک ها برابر ۲^n است، پس تعداد زیر مجموعه های A حداقل برابر ۲^n است. از طرف دیگر هر دنباله از صفر و یک ها به طول n، یک و فقط یک زیر مجموعه از A را تعیین می کند بنابراین تعداد این چنین دنباله هایی ، که برابر ۲^n است،حداقل برابر تعداد زیر مجموعه های A است. به این ترتیب $P(A)$ دارای ۲^n عضو است. $\square$

مثال ۹. از مجموعه $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ در $\mathbb{N}$ می توان تابع زیر را تعریف کرد

$$\begin{aligned} \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m,n) &\mapsto ۲^m۳^n \end{aligned}$$

مثال ۱۰.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ m & \mapsto & \begin{cases} ۲m & m > ۰ \\ ۰ & m = ۰ \\ ۲\mid m\mid -۱ & m < ۰ \end{cases} \end{array}$$

مثال ۱۱.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (-۱,۱) & \mapsto & \tan\frac{\pi x}{۲} \end{array}$$