

## ۱۰۰ منطق مقدماتی

ریاضی‌دانان، برای این که حاصل مطالعات ریاضی خود و ادعاهای برآمده از آن را برای دیگر ریاضی‌دانان بیان کنند بایستی، استدلالی قانع‌کننده برای درستی ادعاهای خود ارائه دهند. این عمل ارائه یک سلسله دلایل که درستی هریک از آنها از قبل دانسته شده است یا نتیجه‌ای از دلایلی که از قبل درستی آن را می‌دانیم باشد استدلال می‌نامیم. این سلسله دلایل را که به نتیجه مشخصی می‌انجام، اثبات آن نتیجه می‌نامند.

در واقع، اثبات روشی برای نشان دادن یک حقیقت ریاضی است. یا وقتی الگوریتمی برای حل یک مساله ارائه می‌دهیم باید ثابت کنیم خروجی این الگوریتم برای تمام وردی‌های مشابه درست است.

یک اثبات نباید هیچ‌گونه ابهامی داشته باشد. زیرا یکی از ویژگی‌های مهم ریاضیات، دقت بالای آن در بیان حقایق ریاضی و استدلال است به طوری که خواننده متن ریاضی، با خواندن اثبات، نه تنها نسبت به درستی آن قانع شود، بلکه هیچ‌گونه تردیدی در باره درستی استدلال ارائه شده به ذهنش خطور نکند.

**منطق ریاضی، بررسی اصول و روشهایی است که برای تمیز دادن استدلال‌های درست از استدلال‌های نادرست به کار می‌روند.**

به عنوان مثال ریاضی دان ممکن است ادعا کند که مجموع دو عدد فرد یک عدد زوج است. و چنین استدلال کند:

(۱) هر یک از این دو عدد، مانده تقسیم شان بر دو برابر یک است.

(۲) بنابراین مانده تقسیم مجموع شان بر ۲ برابر صفر است.

و به این ترتیب درستی نتیجه فوق نشان داده می‌شود.

یا به عنوان مثالی دیگر: ادعا این است که اگر دو خط در صفحه بر یک خط عمود باشند، آنگاه این دو خط با هم موازی اند. استدلالی که برای درستی چنین است.

(۱) اگر این دو خط موازی نباشند آنگاه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

(۲) بنابراین از یک نقطه خارج یک خط، دو خط بر آن خط عمود شده است.

(۳) که این با قضیه‌ای که می‌گوید مجموع زوایای یک مثلث  $180^\circ$  درجه است سازگار نیست.

همان طور که ملاحظه می شود در اینجا دو روش برای نشان دادن درستی ادعا ارائه شده است. یکی روش مستقیم از فرض ها شروع شده و نتیجه را به دست می آورد.

دومی نیز روش غیرمستقیم. به این معنا که چون یک گزاره فقط می تواند یکی از دو حالت راست یا ناراست را انتخاب کند، نشان دادیم که اگر حکم را ناراست فرض کنیم به نتیجه ای می رسیم که قبلا خلاف آن را فرض کرده بودیم. و به این ترتیب درستی نتیجه را به دست می آوریم.

و به عنوان آخرین مثال، از مشاهده این که برای اکثر اعداد زوجی که می شناسیم، مشاهده می شود که این اعداد زوج مجموع دو عدد اولند. یعنی  $2k = p_1 + p_2$ ، که  $p_1, p_2$  اعدادی اولند. از این مشاهده می توان حدس زد که هر عدد زوج مجموع دو عدد اول است.

متأسفانه، علیرغم ساده بودن صورت این سوال، هنوز نتوانسته اند استدلالی پیدا کنند که نتیجه بگیرد که این حدس درست است.

به این ترتیب می توان گفت منطق علمی است با به کار بستن اصول و قواعد آن، انتخاب های درست را براساس استدلال به انسان نشان می دهد و او را از خطای فکری یا استدلال نادرست محفوظ می دارد.

هدف ما از این فصل مقدماتی منطق این است که دانشجو با اصول و روش هایی که در هر مرحله برهان به کار می رود آشنا شود.

منطق با لغت گزاره <sup>۱</sup> شروع می شود. منظور از گزاره، یک جمله خبری است که یا راست است یا ناراست ولی همزمان نمی تواند هر دو ارزش راست <sup>۲</sup> و ناراست <sup>۳</sup> را داشته باشد.

مثال ۱. (۱) در هندسه اقلیدسی مجموع زوایای یک مثلث برابر  $180^\circ$  درجه است.

(۲) ۶ یک عدد اول است.

(۳) چه کتاب با ارزشی.

(۴) او فرد بسیار ثروتمندی است.

---

<sup>۱</sup>statement

<sup>۲</sup>true

<sup>۳</sup>false

(۵) تعداد اعداد اول متناهی است

(۶) معادله خط راست در صفحه یک معادله درجه دو است.

ملاحظه می شود (۱) و (۲) گزاره‌اند زیرا راست یا نارااست بودن آن را می‌توان تعیین کرد.

جمله‌های (۳) و (۴) گزاره نیستند زیرا راست یا نارااست بودن آنها را نمی‌توان تعیین کرد.

جمله ۵ گزاره است

گزاره‌هایی که در بالا مطرح شده‌اند، همگی یک فعل دارند، به همین دلیل آنها را گزاره‌های ساده می‌نامند. اما می‌توان از ترکیب چندین گزاره ساده، یک گزاره ساخت، که آن را یک گزاره مرکب می‌نامند.

(a) « ۱۰ بر دو بخش پذیر است » و « ۱۰ بر ۵ بخش پذیر است »

(b) « مثلث ۳ زاویه قائمه دارد » و « مربع ۴ زاویه حاده دارد »

(c) اگر « ۲ عددی اول باشد » آنگاه « ۴ بر ۵ بخش پذیر است ».

در منطق، از حروف کوچک انگلیسی  $p, q, r, s, \dots$  برای نشان دادن گزاره‌های ساده استفاده می‌کنیم و از

حروف بزرگ انگلیسی  $P, Q, R, S, \dots$  برای نشان دادن گزاره‌های مرکب استفاده می‌کنیم.

برای ساختن گزاره‌های مرکب از گزاره‌های ساده، راه‌های مختلفی وجود دارد که گزاره‌های داده شده را به هم ربط می‌دهد.

در این درس فقط از پنج رابط

(۱) رابط « نفی » که با  $\sim$  نشان داده می‌شود.

(۲) رابط « و » که با  $\wedge$  نشان داده می‌شود.

(۳) رابط « یا » که به  $\vee$  نشان داده می‌شود.

(۴) رابط « اگر ... آنگاه ... » که با  $\rightarrow$  نمایش داده می‌شود.

(۵) رابط « ... اگر و فقط اگر ... » که با  $\leftrightarrow$  نشان داده می‌شود.

در این بخش دو رابط  $\sim$  و  $\wedge$  را بررسی می‌کنیم و بررسی بقیه نمادها را به بخش بعد موکول می‌کنیم. فرض کنیم  $p$  یک گزاره باشد. آنگاه گزاره  $\sim p$ ، که خوانده می‌شود «نفی  $p$ » یا «نقیض  $p$ »، راست است هرگاه  $p$  نارااست باشد و  $\sim p$  نارااست است هرگاه  $p$  راست باشد. ملاحظه می‌شود ارزش  $\sim p$  به ارزش  $p$  بستگی دارد. مناسب است که این بستگی را به صورت جدول ارزش زیر نمایش دهیم.

جدول ۱	
$p$	$\sim p$
T	F
F	T

در این جا T حرف اول کلمه *True* یا «راست» است و F حرف اول کلمه *False* یا «نارااست» است. در ستون اول جدول تمام حالت های ممکن  $p$  درج شده است. هر ردیف جدول ارزش نیز بیانگر حالتی است که باید در نظر گرفته شود. برای مثال اگر  $p$  گزاره «۵ عددی اول است» باشد، نقیض آن  $\sim p$ ، گزاره «۵ عددی اول نیست» خواهد بود. به عبارت معادل «چنین نیست که ۵ عددی اول است».

**تعریف ۲.** رابط  $\wedge$  را می‌توان بین هر دو گزاره  $p$  و  $q$  قرار داد و گزاره مرکب  $p \wedge q$  را، که ارزش‌های آن در جدول زیر آمده‌اند، تشکیل داد.

جدول ۲		
$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عبارت  $p \wedge q$  را « $p$  و  $q$ » یا «ترکیب عطفی  $p$  و  $q$  می‌خوانیم.

مثلاً فرض کنیم  $p$  نشان دهنده گزاره « $n$  عددی اول است» و  $q$  نشان دهنده « $\triangle ABC$  یک مثلث متساوی الاضلاع است» باشد آنگاه گزاره حاصل از ترکیب عطفی این دو گزاره عبارت است از

« $n$  عددی اول است» و « $\triangle ABC$  یک مثلث متساوی الاضلاع است».

در گزاره مرکب  $p \wedge q$ ، هریک از گزاره‌های  $p$  و  $q$  را مولفه گویند. مولفه ممکن است یک گزاره ساده و یا یک گزاره مرکب باشد.

روشن است که در گزاره‌های مرکب  $p \wedge q$  با دومولفه ساده  $p$  و  $q$ ، حداکثر  $(2 \times 2) = 4$  حالت وجود دارد، که حالت های منطقی یا امکان های منطقی نامیده می شود و در زیر می آیند:

(۱)  $p$  راست و  $q$  راست است،

(۲)  $p$  راست و  $q$  ناراست است،

(۳)  $p$  ناراست و  $q$  راست است،

(۴)  $p$  ناراست و  $q$  ناراست است.

در واقع هریک از چهار حالت بالا، یک ردیف از جدول ۲ است. ستون آخر جدول، ارزش  $p \wedge q$  را بیان می کند.

توجه داشته باشید که گزاره  $p \wedge q$  فقط در یک حالت راست است و آن وقتی است که  $p$  و  $q$  هر دو راست باشند و در بقیه موارد،  $p \wedge q$  ناراست است.

با کمی دقت متوجه می شوید که این جدول ارزش در واقع روش استفاده «و» در زبان محاوره روزمره است. با استفاده از جدول های ۱ و ۲ می توان ارزش گزاره های پیچیده تری را که فقط شامل رابط های  $\sim$  و  $\wedge$  هستند، معلوم کرد.

مثال ۳. جدول ارزش گزاره مرکب زیر را تشکیل دهید.

$$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$$

حل.

جدول ۳

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
$T$	$T$	$F$	$F$	$F$	$T$
$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$T$
$F$	$T$	$T$	$F$	$F$	$T$
$F$	$F$	$T$	$T$	$T$	$F$
مرحله		۱	۱	۲	۳

توجه کنید: جدول فوق به صورت زیر ساخته شده است:

عنوان های ستون ها طوری انتخاب شده اند که گزاره مرکب مورد نظر به تدریج از مولفه هایش (در ستون آخر) ساخته شود.

در دو ستون اول فقط ارزش های  $p$  و  $q$  را برای تمام حالات ممکن ثبت کرده ایم.

سپس با استفاده از جدول ۱ در ستون های سوم و چهارم ارزش های  $\sim p$  و  $\sim q$  متناظر را نوشته ایم.

در ستون پنجم ارزش های ترکیب عطفی عنوان های ستون های سوم و چهارم را با استفاده از جدول ۲

نمایانده ایم و بالاخره در ستون ششم ارزش های ستون پنجم، یعنی ارزش های گزاره اصلی

$$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$$

را با استفاده از جدول ۱ نوشته ایم.

بهتر است شما دانشجوی محترم، صورت گزاره اخیر را در جایی بنویسید و خود تلاش کنید این جدول ارزش

را بنویسید.

در مثال بالا، در عبارت  $[(\sim p) \wedge (\sim q)]$ ، از پرانتزها و کروشه ها برای نشان دادن ترتیبی که رابطها

عمل می کنند استفاده شده است. اغلب هر جا امکان داشته باشد بر طبق قراردادهایی برای ساده کردن عبارات،

پرانتزها یا کروشه ها را حذف می کنیم. قرارداد معمول آن است که توافق کنیم اول ارزش  $\sim$  را به دست آوریم و

بعد ارزش گزاره هایی که با  $\wedge$  ترکیب شده اند.

عبارت  $(\sim p) \wedge (\sim q)$  را می توان به صورت ساده  $p \wedge q$  نوشت.

## تمرین ۴.

۱)  $\sim (\sim p)$

۲)  $\sim [\sim (\sim p)]$

۳)  $p \wedge p$

۴)  $\sim (p \wedge \sim p)$

۵)  $p \wedge \sim q$

۶)  $\sim p \wedge q$

۷)  $(p \wedge q) \wedge \sim p$

۸)  $\sim (p \wedge q)$ .

۹) در یک گزاره مرکب که شامل سه گزاره  $p, q, r$  است، چند حالت منطقی باید در نظر گرفت؟ اگر چهار گزاره متفاوت داشته باشیم، چند حالت؟ در حالت کلی وقتی  $n$  گزاره متفاوت داریم، چند حالت لازم است؟ در مسایل زیر، جدول ارزش هریک از گزاره‌ها را تشکیل دهید.

۱۱)  $(p \wedge q) \wedge r$

۱۲)  $p \wedge (q \wedge r)$

۱۳)  $(p \wedge \sim q) \wedge r$

۱۴)  $\sim q \wedge (r \wedge p)$

□

## سه نماد دیگر

سه نماد دیگر معادل کلمات «یا»، «اگر... آنگاه...» و «... اگر و فقط اگر...» است.

در زبان فارسی «یا» کمی ابهام دارد. به جملات زیر توجه نمایید:

۱- «علی در مدرسه است» یا «علی در منزل است».

۲- «علی در حال درس خواندن است» یا «علی در منزل است».

گزاره اول با این که با حرف ربط «یا» به گزاره دوم ربط داده شده است ولی به این معناست که هر دو گزاره به طور همزمان نمی توانند راست یا ناراست باشند (یای مانعه الجمع) و لی در گزاره مرکب ۲، هر دو گزاره می توانند به طور همزمان راست باشند یا به طور همزمان ناراست باشند (یای «شمول»).

چون گزاره ها باید ارزش راست یا ناراست داشته باشند و نمی توانند مبهم باشند بنابراین بایستی بین این دو «یا» تفاوت قایل شویم.

**تعریف ۵.** رابط  $\vee$  مابین دو گزاره  $p$  و  $q$  برای تشکیل گزاره مرکب  $p \vee q$  به کار می رود. ارزشهای راستی  $p \vee q$  در جدول ۴ نشان داده شده است. بنابراین رابط  $\vee$  به معنای «یا شمول» است. یعنی «یا» ی گزاره دوم است.

جدول ۴

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

**مثال ۶.** ۱. فرض کنید  $ab = 0$ . در این صورت  $a = 0$  یا  $b = 0$

۲. فرض کنید ۲ عدد  $ab$  را بخش می کند. در این صورت ۲ عدد  $a$  را بخش می کند یا ۲ عدد  $b$  را بخش می کند.

نماد  $p \vee q$  را « $p$  یا  $q$ » بخوانید و آن را ترکیب فصلی دو گزاره  $p$  و  $q$  می نامند. در قیاس با ترکیب عطفی، توجه داشته باشید ترکیب عطفی دو گزاره راست است اگر و فقط اگر هر دو مولفه راست باشند در حالی که ترکیب فصلی دو گزاره ناراست است اگر و فقط اگر هر گزاره ناراست باشند. ( به عبارت معادل ترکیب فصلی راست است اگر و فقط اگر لااقل یک از مولفه ها راست باشند).

حالت دیگری از ترکیب فصلی وجود دارد که گزاره های سازنده مؤلفه های این گزاره به طور همزمان نمی توانند درست باشند. به عنوان مثال

علی در خانه است یا علی در حال رانندگی است.

اکنون روز است یا اکنون شب است.

یک گزاره یا راست است یا یک گزاره ناراست است.

همان طور که از تعریف بالا بر می آید چنین ترکیبی را «یا مانعة الجمع» یا «یا نفی جمع»<sup>۱</sup> می نامند.

جدول ارزش آن به صورت زیر است

<sup>۱</sup>Exclusive Or



جدول Xor

p	q	p Xor q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

حال جدول ۴ را با جدول زیر مقایسه کنید

جدول ۵

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim (\sim p \wedge \sim q)$	$p \vee q$
T	T	F	F	F	T	T
T	T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	F	F

با مقایسه ارزش های دو ستون آخر این جدول ملاحظه می شود ارزش گزاره های  $(\sim p \wedge \sim q)$  و  $p \vee q$  به ازای همه حالت هایی که  $p$  و  $q$  ارزش می گیرند، یکی است (یعنی  $TTTT$ ).

به عبارت دیگر ارزش راستی این دو گزاره در هریک از چهار امکان منطقی، یکی است.

تعیین این که برخی گزاره ها در هر حالت یک ارزش راستی دارند، یکی از بخش های مهم منطق است. در واقع، این نوع گزاره ها را صورت های مختلف یک گزاره به حساب می آورند.

**تعریف ۷.** هرگاه دو گزاره  $P$  و  $Q$ ، ساده یا مرکب، برای تمام حالت های منطقی دارای یک ارزش باشند، گزاره  $P$  را هم ارز منطقی یا به طور ساده هم ارز  $Q$  می نامند. و می نویسند  $P \equiv Q$ .

به طور خلاصه، دو گزاره منطقاً هم ارز هستند هرگاه دارای یک جدول ارزش باشند. بنابراین داریم

$$p \vee q \equiv \sim (\sim p \wedge \sim q)$$

اگرچه تا جایی که به منطق مربوط می شود، دو گزاره منطقاً هم ارز یکی در نظر گرفته می شوند، اما گزاره ساده تر « $p$  یا  $q$ » را بر گزاره هم ارز پیچیده ترش، یعنی «چنین نیست که نه  $p$  و نه  $q$ » ترجیح می دهیم.

**تعریف ۸.** رابط  $\rightarrow$  را که مابین دو گزاره  $p$  و  $q$  است و برای تشکیل گزاره مرکب  $p \rightarrow q$  به کار برده می شود را رابط شرطی می گویند (بخوانید: «اگر  $p$  آنگاه  $q$ ). بنابراین تعریف، گزاره  $p \rightarrow q$  هم ارز گزاره  $\sim (p \wedge \sim q)$  است. ارزش های راستی  $p \rightarrow q$  در ستون آخر جدول ۶ نمایش داده شده است.

جدول ۶

حالت	$p$	$q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q \equiv [\sim (p \wedge \sim q)]$
۱	T	T	F	F	T
۲	T	F	T	T	F
۳	F	T	F	F	T
۴	F	F	T	F	T.

لازم است به یک انگیزه تعریف ۸ اشاره نماییم. فرض کنیم  $p$  گزاره «هوا بارانی است» و  $q$  گزاره «من به شما دوچرخه سواری یاد خواهم داد» باشد. حال گزاره مرکب  $p \rightarrow q$ ، «اگر هوا بارانی باشد آنگاه من به شما دوچرخه سواری یاد خواهم داد» است. از نظر ما قرار (گزاره) آموزش دوچرخه سواری چه موقع نقض خواهد شد؟ بدیهی است که این قرار فقط در حالتی که هوا بارانی باشد ( $p$  راست باشد) و من به شما دوچرخه سواری یاد ندهم ( $q$  ناراست باشد) نقض شده است. یعنی ستون نهایی جدول ارزش  $p \rightarrow q$ ، به جز در حالت ۲، باید در هر حالتی ارزش  $T$  داشته باشد.

بر طبق تعریف ۸ معنی گزاره شرطی  $p \rightarrow q$  اساساً به طرزی که گزاره «اگر  $p$  آنگاه  $q$ » را در زبان گفتگوی عمومی به کار می بریم اختلاف دارد. در زبان عادی جمله ای به صورت «اگر  $p$  آنگاه  $q$ » به این مفهوم است که هروقت راست باشد،  $q$  راست است. بنابراین در زبان محاوره معمولی حالت هایی که  $p$  ناراست باشد مطرح نمی شود.

به عنوان مثال، گزاره «اگر لینکلن، گرانت را می کشت، آنگاه جفرسون اولین رئیس جمهور بود» بی معنی تلقی مشد، زیرا هر دو مؤلفه ناراست هستند. در نتیجه در گفتگوی عادی ارزش راستی چنین گزاره ای بررسی

نمی شود. اما برای ایجاد یک زبان صوری، منطقین خواستار تعیین ارزش های راستی گزاره  $p \rightarrow q$  در هر چهار حالت منطقی هستند، هرچند که در زبان عادی دو حالت از چهار حالت فوق بی معنی به نظر برسد. اکنون آخرین رابط از این پنج رابط را که برای قضیه های ریاضی به کار می رود، معرفی می کنیم.

**تعریف ۹.** رابط  $\leftrightarrow$  را رابط دوشروطی<sup>۱</sup> می گویند. ترکیب دوشروطی دو گزاره  $p$  و  $q$  را به صورت  $p \leftrightarrow q$  می نویسند ( بخوانید  $p$  اگر و فقط اگر  $q$ ، یا بخوانید  $p$  اگر و تنها اگر  $q$ ). گزاره  $p \leftrightarrow q$  هم ارز گزاره مرکب  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  تعریف می شود. ارزشهای راستی  $p \leftrightarrow q$  در جدول ۷ آمده است.

**مثال ۱۰.** جدول ارزش  $p \leftrightarrow q$  را بیابید.

**حل.** با روشی که پیش از این شرح دادیم جدول ۷ را تشکیل می دهیم

جدول ۷

حالت	$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
۱	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
۲	$T$	$F$	$F$	$T$	$F$
۳	$F$	$T$	$T$	$F$	$F$
۴	$F$	$F$	$T$	$T$	$T$

از جدول ارزش بالا در می یابیم که  $p \leftrightarrow q$  وقتی راست است که هر دو مولفه راست یا هر دو مولفه نارااست باشند. در حالت های ۲، ۳ گزاره  $p \leftrightarrow q$  نارااست است.  $\square$

در ریاضیات، از گزاره های دوشروطی و گزاره های هم ارز، بیشتر برای نشان دادن درستی یک عبارت، از طریق جایگزین کردن آن عبارت با عبارت های هم ارز، ولی ساده تر، استفاده می شود.

### شکل های دیگر نوشتن گزاره های شرطی و دوشروطی به زبان نوشتاری

گزاره های شرطی در ریاضیات بسیار مهم هستند زیرا قضیه های ریاضی به صورت گزاره های شرطی و به صورت زیر بیان می شوند.

<sup>۱</sup>biconditional

اگر « شرایط معینی برقرار باشند » آنگاه « نتایجی به دست خواهد آمد ».

به غیر از آنچه در سطر بالا بیان شد، راه های دیگری برای بیان گزاره  $P \rightarrow Q$  به زبان نوشتاری وجود دارد. در زیر برخی از این شیوه ها را آورده شده است.

(۱) اگر  $P$  آنگاه  $Q$ ،

(۲)  $Q$  اگر  $P$ ،

(۳)  $P$  ایجاب می کند  $Q$

(۴) هنگامی که  $P$  درست است،  $Q$  درست است

(۵)  $P$  فقط اگر  $Q$ ،

(۶)  $Q$  درست است هرگاه  $P$  درست باشد.

(۷)  $Q$  شرط لازم برای  $P$  است. ( یعنی اگر  $P$  راست باشد، آنگاه  $Q$  لزوماً درست است ).

(۸)  $P$  شرط کافی برای  $Q$  است. ( یعنی اگر بخواهید  $Q$  راست باشد، کافی است نشان دهیم که  $P$  راست است ).

در تمامی حالات های بالا،  $P$  فرض گزاره شرطی و  $Q$  نتیجه گزاره شرطی است.

تمرین ۱۱. عبارت « فقط اگر » فرض کنید  $S$  گزاره شرطی زیر است

اگر یک متوازی الاضلاع یک مربع باشد، آنگاه یک مستطیل است

این گزاره را به صورت های زیر بنویسید:

(۱) با استفاده از کلمه « هرگاه » ( هرگاه یک متوازی الاضلاع مربع باشد، آنگاه یک مستطیل است ).

(۲) با استفاده از « فقط اگر »،

(۳) با استفاده از عبارت «شرط لازم است برای»

(۴) با استفاده از عبارت «کافی است برای»

### بیان های دیگر گزاره دوشرطی

مشابه گزاره شرطی، شیوه های دیگری برای بیان گزاره دوشرطی  $P \longleftrightarrow Q \equiv (P \longrightarrow Q \wedge Q \longrightarrow P)$  وجود دارد. برای مثال

(الف)  $P$  اگر و فقط اگر  $Q$ ،

(ب)  $P$  یک شرط لازم و کافی برای  $Q$  است،

(پ)  $P$  ایجاب می کند  $Q$  را و  $Q$  ایجاب می کند  $P$  را

تمرین ۱۲.  $a$  فرض کنید  $P$  نشان دهنده گزاره « $x$  یک عدد زوج است» و  $Q$  نشان دهنده  $x^2$  یک عدد زوج است. گزاره شرطی  $P \longrightarrow Q$  را به صورت های یک گزاره شرطی که در زیر آورده شده بنویسید:

(۱) شکل «اگر آنگاه» گزاره شرطی

(۲) عبارت «ایجاب» می کند

زوج بودن  $x$  ایجاب می کند  $x^2$  زوج باشد.

(۳) به صورت «فقط اگر»

(۴) به صورت «شرط لازم است برای»

(۵) به صورت «شرط کافی است برای»

$b$  (تمرین  $a$ ) را برای گزاره  $P \longrightarrow Q$  انجام دهید.

$c$  جدول زیر را کامل نمایید

جدول ۸

شکل نوشتاری	فرض	نتیجه	صورت نمادین
اگر $P$ آنگاه $Q$	$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
$Q$ فقط اگر $P$	$Q$	$P$	$Q \rightarrow P$
$P$ شرط لازم است برای $Q$			
$P$ شرط کافی است برای $Q$			
$Q$ شرط لازم است برای $P$			
$P$ ایجاب می کند $Q$			
$P$ فقط اگر $Q$			
$P$ اگر $Q$			
اگر $Q$ آنگاه $P$			
اگر $Q$ آنگاه $\sim P$			
اگر $P$ آنگاه $Q \wedge R$			
اگر $P \vee Q$ آنگاه $R$			

حال دو گزاره شرطی که متناظر می شوند به یک گزاره شرطی داده شده را معرفی می کنیم.

تعریف ۱۳. فرض کنیم  $P$  و  $Q$  دو گزاره باشند، آنگاه

(۱) عکس گزاره  $P \rightarrow Q$  گزاره شرطی  $Q \rightarrow P$  است.

(۲) عکس نقیض گزاره شرطی  $P \rightarrow Q$  گزاره شرطی  $\sim Q \rightarrow \sim P$  است.

تمرین ۱۴. در مسایل زیر، جدول ارزش هریک از گزاره های داده شده را تشکیل دهید.

$$\sim (p \vee \sim p) \quad (۲)$$

$$p \vee \sim p \quad (۱)$$

$$\sim p \vee q \quad (۴)$$

$$\sim (\sim p \vee \sim p) \quad (۳)$$

$$p \longleftrightarrow q \quad (۶)$$

$$(\sim q) \rightarrow (\sim p) \quad (۵)$$

تمرین ۱۵. دو گزاره زیر کاربردهای زیادی برای معادل ساختن گزاره ها یا ساده تر کردن گزاره ها دارند.

۱. آیا گزاره  $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$  هم ارز منطقی گزاره  $p \rightarrow q$  است؟

۲. آیا گزاره  $\sim p \vee q$  هم ارز منطقی گزاره  $p \rightarrow q$  است؟

تمرین ۱۶. آیا  $(p \leftrightarrow q) \sim$  هم ارز منطقی  $\sim p \leftrightarrow q$  است؟ نتیجه گیری خود را با تشکیل جدول ارزش بیازمایید.

تمرین ۱۷. آیا  $p \leftrightarrow \sim q$  هم ارز منطقی  $\sim p \leftrightarrow q$  است؟

تمرین ۱۸. در هریک از حالت‌های زیر گزاره‌های مرکب داده شده را با استفاده از نمادهای پیشنهادی به صورت نمادی برگردانید.

(الف) چنین نیست که من درس خوان نیستم  $(M)$ .

(ب) اگر او فرشته است، آنگاه او دوبال دارد  $(F, B)$ .

(پ) قیمت گوشت افزایش می‌یابد اگر و تنها اگر عرضه از تقاضای گوشت کمتر باشد  $(G, A)$ .

(ت) یا کشاورزان قیمت‌ها را پایین خواهند آورد یا دولت دخالت خواهد کرد  $(K, D)$ .

(ث) اگر صادرات گوشت افزایش یابد یا پرورش دام زیاد شود، آنگاه قیمت‌ها افزایش می‌یابد  $(S, P, G)$ .

تمرین ۱۹. گاهی اوقات  $p \rightarrow q$  را « $p$  فقط اگر  $q$ » می‌خوانند. هریک از گزاره‌های زیرین را با استفاده از نمادهای پیشنهادی به صورت نمادی برگردانید.

(الف) در این درس موفق خواهم شد فقط اگر مجدانه تلاش کنم  $(D, T)$ .

(ب) تابع مشتق دارد فقط اگر پیوسته باشد  $(M, P)$ .

(پ) ماتریس  $M$  وارون دارد فقط اگر دترمینانش صفر نباشد  $(V, D)$ .

(ت) ماتریس دترمینان ناصفر دارد فقط اگر وارون داشته باشد  $(D, V)$ .

تمرین ۲۰. در گزاره  $p, p \rightarrow q$  را شرط کافی برای  $p$  و  $q$  را شرط لازم برای  $p$  می گویند. گزاره های مساله ۶ را نخست با بیان «شرط کافی» و سپس با بیان «شرط لازم» بنویسید.

۱- تمرین های ۱۰ تا ۱۶ را به عنوان تکلیف حل نمایید. ( زمان تحویل حداکثر تا ۵-۸-۱۴۰۲ ).  
 با استفاده از مطالب درسی ( ریاضی عمومی یا هندسه ) صورت ۵ گزاره شرطی را هم به صورت نمادین و هم نوشتاری بنویسید.