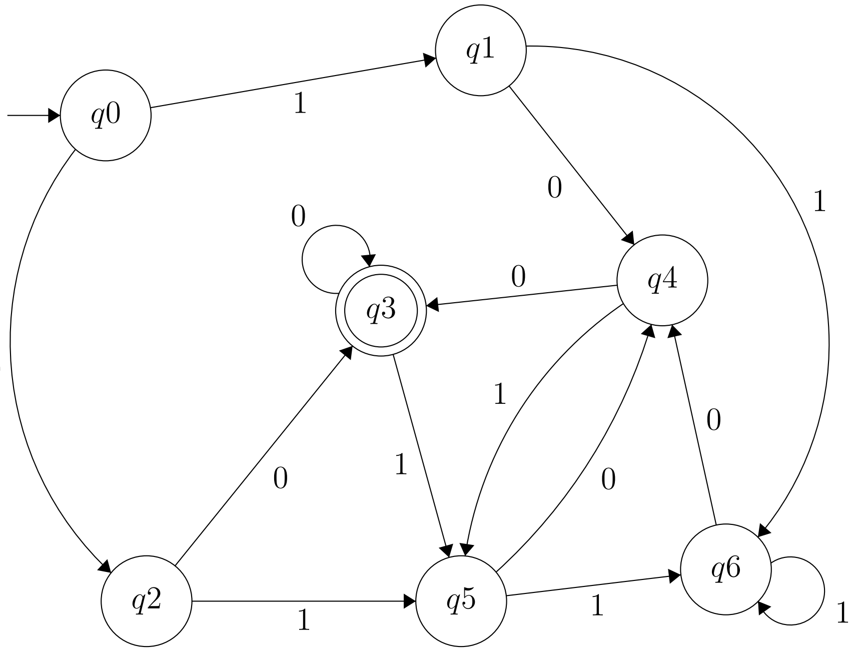
جواب تکلیف سری دوم

مبانی نظریه محاسبه
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. ترم ۱۴۰۲۲

۱. ماشین متناهی زیر را با استفاده از الگوریتم ارائه شده در کلاس به یک ماشین معادل با کمترین تعداد وضعیت تبدیل کنید.



طبق دستور الگوریتم، چون $q3$ وضعیت پذیرش و بقیه وضعیت پذیرش نیستند پس در مرحله اول همه زوجهایی که یک طرف آن $q3$ است علامت می‌خورند. مجموعه زوجهای زیر باقی می‌مانند.

$$(q4, q5), (q2, q0), (q4, q0), (q2, q1), (q4, q6), (q4, q1), (q2, q5), (q2, q6)$$

$$(q0, q1), (q1, q6), (q5, q6), (q0, q6), (q1, q5), (q0, q5), (q2, q4)$$

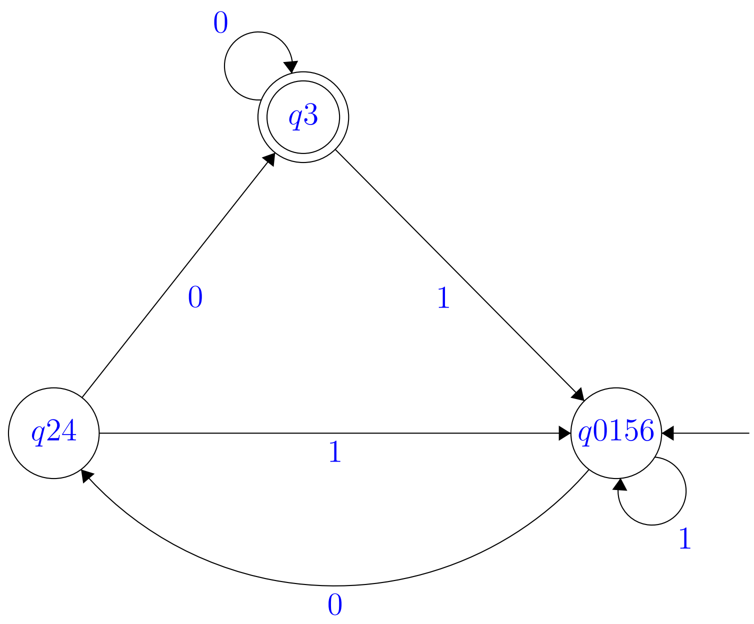
در مرحله دوم، وضعیتهایی 2 و 4 از بقیه تفکیک می‌شوند. لذا مجموعه زوجهای زیر باقی می‌مانند.

$$(q0, q1), (q1, q6), (q5, q6), (q0, q6), (q1, q5), (q0, q5), (q2, q4)$$

در مرحله بعدی هیچ زوجی علامت نمی‌خورد و الگوریتم خاتمه می‌یابد. پس کلاسهای هم ارزی زیر ایجاد می‌شوند.

$$\{q0, q1, q5, q6\}, \{q2, q4\}, \{q3\}$$

در نهایت ماشین متناهی معادل زیر بدست می‌آید که از لحاظ تعداد وضعیت بهینه است.



۲. نشان دهید زبان های زیر منظم نیستند.

$$A = \{w \in (a+b)^* \mid n_a(w) \neq n_b(w)\}$$

متمم زبان A یک زبان نامنظم است. پس A نمی‌تواند منظم باشد چون متمم هر زبان منظم خود منظم است.

$$B = \{a^n b^m \mid m = kn,\ k \in \{0, 1, 2, \ldots,\}\}$$

از لم تزریق برای زبانهای منظم استفاده می‌کنیم. اینجا رشته $w = a^p b^p$ تناقض مورد نظر را ایجاد می‌کند. این رشته عضو زبان B است. چون طول xy باید حداکثر p باشد، لذا می‌توانیم y را فقط از قسمت a^p انتخاب کنیم. دقت کنید تزریق y باعث ایجاد رشته‌هایی خارج از زبان می‌شود. لذا B نمی‌تواند منظم باشد.

$$C = \{a^n b^m \mid n = km,\ k \in \{0, 1, 2, \ldots,\}\}$$

از لم تزریق برای زبانهای منظم استفاده می‌کنیم. رشته $w = a^{p+1} b^{p+1}$ تناقض مورد نظر را ایجاد می‌کند. این رشته عضو زبان B است. چون طول xy باید حداکثر p باشد، لذا می‌توانیم y را فقط از قسمت a^p انتخاب کنیم. حذف y باعث ایجاد رشته‌ای خارج از زبان می‌شود. لذا B نمی‌تواند منظم باشد.

۳. آیا زبان زیر منظم است؟ چرا؟

$$D = \{1^k y \mid k \geq 1 \text{ وقتی } y \text{ رشته‌ای از الفبای } \{0,1\} \text{ باشد و حداقل } k \text{ تا } 1 \text{ داشته باشد}\}$$

منظم است. چون

$$D = 10^*10^* + 11\Sigma^*$$

۴. به الفبای زیر توجه کنید.

$$\Sigma = \{ \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \}$$

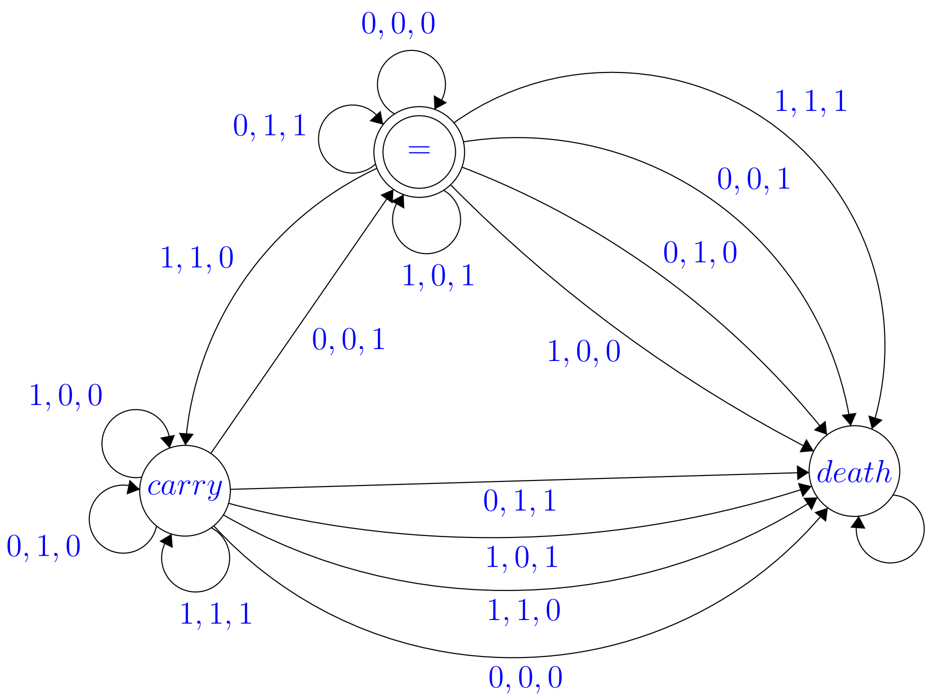
پس اینجا یک حرف الفبا سه رقم باینری است. به عبارت دیگر، ماشین هر بار به عنوان ورودی سه رقم باینری دریافت می‌کند (رقم بالایی، رقم وسطی و رقم پایینی). دنباله رقم هایی بالایی که ماشین دریافت می‌کند را مانند یک عدد باینری فرض می‌کنیم. به همین ترتیب دنباله رقمهای وسطی و دنباله رقم هایی پایینی که ماشین دریافت می‌کند را مانند یک عدد باینری فرض می‌کنیم. فرض کنید عدد بالایی x، عدد وسطی y و عدد پایینی z باشد. می‌خواهیم یک ماشین متناهی داشته باشیم که وقتی $x + y = z$ باشد در حالت پذیرش باشد در غیر اینصورت در حالت غیر پذیرش باشد.

برای مثال ماشین رشته w زیر را می‌پذیرد چون دنباله بالایی $x = 2$ و دنباله وسطی $y = 8$ و دنباله پایینی $z = 10$.

$$w = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

یک ماشین متناهی برای این مسئله طراحی کنید. برای سادگی می‌توانید فرض کنید رشته را از انتها به اول می‌خوانید (یعنی جهت خواندن از رقم کم ارزش به پرارزش است.) سپس از این خاصیت استفاده کنید که L^R منظم است اگر L منظم باشد.

کافی است رقم نقلی را رصد کنیم. سه وضعیت داریم. وضعیت تساوی = ، وضعیت رقم نقلی carry و وضعیت اشتباه death . ورودی بصورت سه بیت x, y, z فرض شده است. دقت کنید که ماشین زیر برای حالتی است که جهت خواندن از رقم کم ارزش به پرارزش است.



۵. فرض کنید A یک زبان منظم و نامتناهی باشد. نشان دهید که A را می‌توان به دو زبان نامتناهی و منظم A_1 و A_2 افراز کرد.

چون A منظم و نامتناهی است پس بنا به لم تزریق رشته $w = xyz$ وجود دارد بطوریکه y ناتهی است و رشته w داخل زبان است. علاوه بر این همه رشته‌های xy^iz هم داخل زبان هستند. مجموعه A_1 را بصورت زیر می‌سازیم.

$$A_1 = \{w \mid w = xy^iz,\ i = 2k+1,\ k \geq 0\}$$

قرار می‌دهیم،

$$A_2 = A/A_1$$

روشن است که A_1 و A_2 هر دو نامتناهی هستند و اجتماعشان A است. از طرف دیگر روشن است که A_1 منظم است چون بصورت یک عبارت منظم قابل بیان است.

$$A_1 = x(yy)^*yz$$

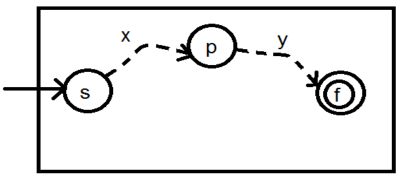
زبان A_2 هم باید منظم باشد. با برهان خلف، فرض کنید منظم نباشد. پس متمم A_2 هم منظم نیست. اما متمم A_2 برابر است با

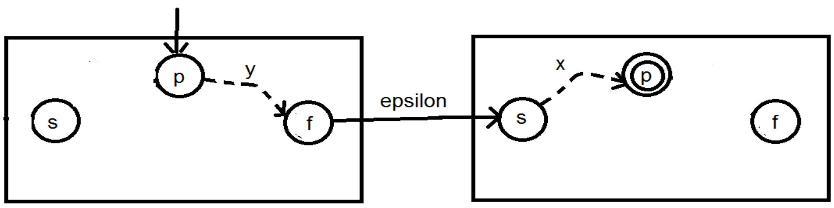
$$\overline{A_2} = A_1 \cup (\Sigma^*/A)$$

هر دو زبان A_1 و Σ^*/A منظم هستند. پس متمم A_2 هم باید منظم باشد چون اجتماع دو زبان منظم، خود منظم است. این با فرض نامنظم بودن A_2 متناقض است. لذا A_2 هم منظم است.

۶. بستار چرخشی زبان A را با $RC(A)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $RC(A) = \{yx \mid xy \in A\}$. نشان دهید زبانهای منظم تحت عملگر بستار چرخشی یک مجموعه بسته است. یعنی اگر A منظم باشد آنگاه $RC(A)$ هم منظم است.

فرض کنید A منظم باشد. پس ماشین متناهی M برای زبان A وجود دارد. وضعیت p در ماشین M را در نظر بگیرید. اگر p در مسیری از وضعیت شروع s به یک وضعیت پذیرش قرار نداشته باشد می‌توان آن را حذف کرد. پس فرض می‌کنیم p در مسیری s به یک وضعیت پذیرش مانند f قرار گرفته است. فرض کنید رشته xy از وضعیت p می‌گذرد. مانند شکل زیر.





وضعیت p را وضعیت شروع می‌کنیم و حالت پذیرش وضعیت f را برمی‌داریم. یک کپی دیگر از ماشین M می‌سازیم از وضعیت f یک فلش ϵ به وضعیت شروع آن قرار می‌دهیم. در کپی ایجاد شده، وضعیت p را وضعیت پذیرش می‌کنیم و وضعیتهای پذیرش دیگر را غیر پذیرش می‌کنیم. مانند قسمت پایین شکل بالا.

این کار را برای همه وضعیتهای ماشین M انجام می‌دهیم. ماشینهای ایجاد شده را کنار هم بصورت موازی قرار می‌دهیم. یک وضعیت شروع جدید اضافه می‌کنیم و با فلش ϵ آن را به همه وضعیتهای شروع ماشینهای ایجاد شده وصل می‌کنیم. مانند شکل زیر. ماشین نهایی یک ماشین برای $RC(A)$ است. پس $RC(A)$ منظم است.