

۱. انتگرالهای دوگانه زیر را محاسبه کنید:

$$۱) \int_0^1 \int_0^x (xy + y^2) dy dx \quad ۲) \int_0^1 \int_0^y (xy + y^2) dx dy \quad ۳) \int_0^\pi \int_{-x}^x \cos y dy dx \quad ۴) \int_0^2 \int_0^y y^2 e^{xy} dx dy$$

۲. در تمرینات زیر پس از توصیف ناحیه انتگرال گیری، انتگرال دوگانه را محاسبه کنید:

الف)  $\int_S (x^2 + y^2) dA$ ، که در آن  $S$  مستطیل  $0 \leq x \leq a$  و  $0 \leq y \leq b$  می باشد.

ب)  $\int_S x^2 y^2 dA$ ، که در آن  $S$  مستطیل  $0 \leq x \leq 3$  و  $0 \leq y \leq 2$  می باشد.

ج)  $\int_S (\sin x + \cos y) dA$ ، که در آن  $S$  مستطیل  $0 \leq x \leq \pi/2$  و  $0 \leq y \leq \pi/2$  می باشد.

د)  $\int_S (x - 3y) dA$ ، که در آن  $S$  مثلثی است به رئوس  $(0, 0)$ ،  $(a, 0)$  و  $(0, b)$ .

ه)  $\int_S \frac{x}{y} e^y dA$ ، که در آن  $S$  ناحیه ای است محدود به  $0 \leq x \leq 1$  و  $x^2 \leq y \leq x$ .

ز)  $\int_S xy(x^2 + y^2)^{n/2} dx dy$ ، که در آن  $S$  ربع دایره  $x^2 + y^2 = a^2$  در ناحیه اول دستگاه مختصات

دکارتی می باشد و  $n + 3 > 0$ .

۳. (یک انتگرال بسیار مهم!) نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

۴. حجم محدود به استوانه  $x^2 + y^2 = a^2$  و پایین صفحه  $z = y$  را در یک هشتم اول فضا محاسبه کنید.

۵. حجم محدود بین کره به معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  و استوانه  $x^2 + y^2 = 2ay$  را بیابید.

۶. نشان دهید میدان نیروی زیر یک میدان پایستار است و تابع اسکالر (پتانسیل) آن را بیابید:

$$\vec{F} = (xy - \sin z)\vec{i} + \left(\frac{1}{y}x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\vec{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x \cos z\right)\vec{k}.$$

بعضی جوابها. ۴.  $\frac{1}{3}a^3$ . ۵.  $\frac{1}{4}(3\pi - 4)a^3$ . ۶.  $\phi(x, y, z) = \frac{1}{y}x^2y - x \sin z - \frac{e^y}{z} + C$ .