نمایش علمی اعداد:

base = 10

هر عدد اعشاری در مبنای b را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\pm f \times b^{\pm e}$$

که در آن f مانتیس عدد، b مبنای عدد و e توان است. اگر در نمایش فوق شرط $\frac{1}{b} \leq f < 1$

$1 \leq f < b$

$1 \leq f < 10$

(در مبنای ۱۰ شرط $0.1 \leq f < 1$) برقرار باشد، عدد را نرمال می گوییم.

فرض کنید y یک عدد حقیقی به فرم زیر باشد:

$$y = \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_n d_{n+1} \ldots \times b^m$$

اگر مانتیس y را به n رقم ختم کنیم، شکل ممیز شناور آن به صورت زیر حاصل می شود:

floating Point

$$fl(y) = \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_n \times b^m$$

که در آن: $1 \leq d_1 \leq b-1$ و $0 \leq d_i \leq b-1$ به ازای $i=2,3, \ldots, n$

(دقت کنید که همواره اولین رقم بعد از ممیز مخالف صفر است. پس ارقام $d_1 d_2 \ldots d_n$ ارقام بامعنی هستند.)

ارقام با معنای یک عدد اعشاری

ارقام بامعنای یک عدداعشاری عبارت‌اند از ارقام مخالف صفرآن، صفرهای بین این ارقام و صفرهایی که جلوی عدد به‌منظور نمایش دقت قرار دارند.

ارقام با معنای یک عدد، همان ارقام بامعنای مانتیس آن تعریف می‌شود.

A = 8.000 واقعی

a = 7.997 تقریب

a' = 8.08 تقریب

|A-a| = 0.003

|A-a'| = 0.08

مثال

نمایش علمی عدد

۲۱۳/۷۶	⟵ ۲/۱۳۷۶ × ۱۰^۲	تعداد ارقام با معنا پنج است
۰/۰۰۷۲۶	⟵ ۷/۲۶ × ۱۰^-۳	۳ رقم با معنا
۲۰۰۰	⟵ ۲/۰۰۰ × ۱۰^۳	۴ رقم با معنا
۷۸۰۰۰	⟵ ۷/۸۰۰۰ × ۱۰^۴	۵ رقم با معنا

ارتباط بین ارقام بامعنی و ارقام شایسته یا تقریب

این مختومیت از دو روش زیر حاصل می شود:

الف) قطع کردن (برش): در این روش از رقم$(n+1)$ام به بعد صرف نظر می کنیم:

Cutting

$$fl(y)= \pm 0.d_1 d_2 \dots d_n \times b^m$$

ب) گرد کردن: برای عدد y اگر $d_{n+1} \geq \frac{b}{2}$ ، آنگاه یک واحد به رقم n ام اضافه می‌کنیم.

Rounding

$$fl(y)= (\pm 0.d_1 d_2 \dots d_n + b^{-n}) \times b^m$$

$b^{-n} = 0.000\dots1$ (یک عدد اعشاری که مکان n ام آن عدد یک است)

$10^{-3} = 0.001$

و اگر $d_{n+1} \leq \frac{b}{2}$ ، قرار می دهیم: $fl(y)= (\pm 0.d_1 d_2 \dots d_n) \times b^m$

$|\text{خطای گرد کردن}| < \frac{1}{2} \times 10^{-m}$

$|\text{عدد تقریبی} - \text{عدد دقیق}| < \frac{1}{2} \times 10^{-m}$

عدد تقریبی دارای حداقل m رقم اعشار با معنی نسبت به عدد دقیق است!

$|\text{خطا}| < \frac{1}{2} \times 10^{-6}$

error

انواع خطاها:

خطای مطلق: اگر a تقریبی از A باشد آن‌گاه $e(a)$ را خطای مطلق a نامند.

$$e(a) = |A - a|$$

خطای نسبی: اگر a تقریبی از عدد مخالف صفر A باشد خطای نسبی a را با $\delta(a)$ نشان می‌دهیم و آن عبارت است از خطا در واحد کمیت، یعنی،

$$\boxed{\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|}}$$

$A=1250$, $a=1250.5$ $\qquad \delta(a) = \frac{0.5}{1250}$

$B=1$, $b=1.5$ $\qquad 1.5\times 10$ $\qquad b=0.998 \rightarrow 9.98\times 10^{-1}$ $\qquad \delta(b) = \frac{0.5}{1}$

خطای مطلق حدی: نوع دیگری از خطاست که اغلب مورد استفاده قرار می گیرد.

هر عدد ناکمتر از $e(a)$ را یک خطای مطلق حدی a نامیم و با e_a نمایش می‌دهیم. بنابراین، همواره $\boxed{e(a) \le e_a}$ و e_a (برخلاف $e(a)$) منحصر به‌فرد نیست.

$e(a) \le e_a$

اکنون فرض کنید

$$e(a) = |A - a| \le e_a$$

با استفاده از خواص قدرمطلق داریم:

$$-e_a \le A - a \le e_a$$

$$a - e_a \le A \le a + e_a \longrightarrow A \in [a-e_a , a+e_a]$$

این نامساویها نشان می‌دهند که A در بازهٔ $[a-e_a$ و $a + e_a]$ قرار دارد.

یعنی با داشتن تقریبی از A و خطای مطلق حدی از آن می توانیم فاصله ای را که A در آن وجود دارد، بدست آوریم.

همان‌طور که دیده می‌شود، A، که معمولاً مقدار آن معلوم نیست، هم در صورت و هم در مخرج کسر موجود است؛ می‌توان یک کران بالا برای $\delta(a)$ به دست آورد که A در آن نباشد.

قضیه: اگر a تقریبی از A و e_a یک خطای مطلق حدی a باشد داریم

کران بالای خطای نسبی

$$\delta(a) \le \frac{e_a}{|a| - e_a}$$

برهان بنا بفرض، داریم

$$\underbrace{|A - a|}_{e(a)} \le e_a$$

$-|a-b| \le |a|-|b| \le |a-b| \to ||a|-|b|| \le |a-b|$

$|a-b| \ge |b|-|a|$

و بنابرخواص قدر مطلق، $|a| - |A| \le |A-a|$

در نتیجه،

$$|A| \ge |a| - e_a$$

خطای مطلق

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} \le \frac{e_a}{|a| - e_a}$$

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد می‌توان از آن صرفنظر کرد و نوشت:

$$|a| - e_a \simeq |a|$$

0.00004

صورت بسیار کوچک

نتیجه

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد $\qquad \delta(a) \le \frac{e_a}{|a|}$

با توجه به اینکه در عمل a محاسبه و e_a برآورد می‌شود کسر $\frac{e_a}{|a|}$ همیشه قابل محاسبه است و به همین دلیل بعضی کتابها $\frac{e_a}{|a|}$ را تقریباً مساوی $\delta(a)$ می‌گیرند.

$\delta(a) \simeq \frac{e_a}{|a|} \simeq \frac{e(a)}{|a|}$

مثال

فرض کنید $a = ۱/۴۱$ و $A = \sqrt{۲}$. خطای نسبی a را حساب کنید.

$$\delta(a) = \frac{\sqrt{۲} - ۱/۴۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۰/۰۰۴۲۱۳۵۶۲}{۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲} = ۰/۰۰۲۹۷۹۴۳۸$$

خطای نسبی را تقریب

اما اگر، قرار دهیم $e_a = ۰/۰۰۵$ خواهیم داشت

$$\delta(a) \simeq \frac{e_a}{a} = \frac{۰/۰۰۵}{۱/۴۱} = ۰/۰۰۳۵۴۶۰۹۹۲۹۱$$

کران بالای خطای نسبی

که تفاوت چندانی با $\delta(a)$ ندارد (اختلاف حدود ۰/۰۰۰۶ است.

اگر قرار می‌دادیم $e_a = ۰/۰۰۴۳$ مقدار $\frac{e_a}{a}$ چقدر با $\delta(a)$ اختلاف داشت؟