فصل ۲

امید ریاضی

در این فصل امیدریاضی یک متغیر تصادفی و توابعی از متغیرهای تصادفی را بررسی می‌کنیم. برای پی بردن به مفهوم امید ریاضی به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲-۱. فرض کنید جریمه توقف اتومبیل در محل پارک ممنوع، یک هزار تومان باشد و در یک شهر ۴۰ درصد افراد هیچگاه، ۳۰ درصد افراد یکبار، ۲۰ درصد افراد دوبار و ۱۰ درصد افراد سه بار در ماه به جهت پارک در محل پارک ممنوع جریمه شوند. به طور متوسط انتظار دارید که هر نفر در این شهر چه مبلغی را در ماه برای جریمه توقف اتومبیل در محل پارک ممنوع پرداخت نماید.

برای حل، فرض کنید ۵۰۰ نفر از افراد این شهر مورد مطالعه باشند. براساس درصدهای داده شده در صورت سوال انتظار داریم:

- ۲۰۰ نفر از ۵۰۰ نفر هیچ مبلغی جریمه نشوند: $۵۰۰ \times ۰/۴ = ۲۰۰$
- ۱۵۰ نفر از ۵۰۰ نفر یک هزار تومان جریمه شوند: $۵۰۰ \times ۰/۳ = ۱۵۰$
- ۱۰۰ نفر از ۵۰۰ نفردو هزار تومان جریمه شوند: $۵۰۰ \times ۰/۲ = ۱۰۰$
- ۵۰ نفر از ۵۰۰ نفر سه هزار تومان جریمه شوند: $۵۰۰ \times ۰/۱ = ۵۰$.

بنابراین انتظار داریم که ۵۰۰ نفر مبلغی برابر با رابطه زیر جریمه پرداخت کنند

$$(۵۰۰ \times ۰/۴ \times ۰) + (۵۰۰ \times ۰/۳ \times ۱) + (۵۰۰ \times ۰/۲ \times ۲) + (۵۰۰ \times ۰/۱ \times ۳) = ۵۰۰$$

بنابراین بطور متوسط انتظار داریم که هر نفر ($\frac{۵۰۰}{۵۰۰} = ۱$) یک هزار تومان در ماه جریمه پرداخت نمایند. به عبارت دیگر اگر در این مثال، متغیر تصادفی X را مبلغ جریمه شخص در یک ماه برحسب هزار تومان تعریف کنیم، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

x	۰	۱	۲	۳
$f_X(x)$	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱

امید ریاضی X ، یا **میانگین وزنی** X یا **مقدار مورد انتظار** X، در حقیقت میانگین وزنی مبلغ جریمه است و آن را با نمادهای $\mathrm{E}(X)$ یا μ یا μ_X نمایش می دهند و داریم

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{x=۰}^{۳} x f_X(x) = (۰ \times ۰/۴) + (۱ \times ۰/۳) + (۲ \times ۰/۲) + (۳ \times ۰/۱) = ۱$$

تعریف ۲-۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی X یا میانگین وزنی X یا مقدار مورد انتظار X به صورت زیر تعریف می شود:

- اگر X گسسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x} x f_X(x)$$

- اگر X پیوسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{dx}$$

در صورتی که $\mathrm{E}(X) = \pm\infty$ **، گوییم امید ریاضی** X **وجود ندارد.**

مثال ۲-۳. فرض کنید می خواهیم ۳ نفر را از بین ۵ مهندس و ۳ تکنسین انتخاب کنیم. امید ریاضی تعداد مهندسین انتخابی در بین این ۳ نفر را بدست آورید.

حل: اگر متغیر تصادفی X به صورت تعداد مهندسین انتخاب شده در بین ۳ نفر تعریف شود آن گاه $S_X = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ و تابع چگالی احتمال X به صورت زیر بدست می آید:

$$f_X(x) = \mathrm{P}(X = x) = \frac{\binom{۵}{x}\binom{۳}{۳ - x}}{\binom{۸}{۳}} = \begin{cases} \frac{۱}{۵۶} & \text{if} \quad x = ۰ \\ \frac{۱۵}{۵۶} & \text{if} \quad x = ۱ \\ \frac{۳۰}{۵۶} & \text{if} \quad x = ۲ \\ \frac{۱۰}{۵۶} & \text{if} \quad x = ۳ \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mu = \mathrm{E}(X) &= \sum_{x=۰}^{۳} x f_X(x) \\ &= (۰ \times \frac{۱}{۵۶}) + (۱ \times \frac{۱۵}{۵۶}) + (۲ \times \frac{۳۰}{۵۶}) + (۳ \times \frac{۱۰}{۵۶}) \\ &= \frac{۱۰۵}{۵۶} = ۱/۹ \end{aligned}$$

یعنی اگر بخواهیم ۳ نفر را از این گروه انتخاب کنیم بطور متوسط انتظار داریم که تقریبا ۲ نفر از آن ها مهندس باشند.

مثال ۲-۴. فرض کنید متغیر تصادفی X نشانگر طول عمر نوعی لاستیک بر حسب سال باشد که دارای تابع چگالی احتمال زیر است.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} e^{\frac{-x}{۲}} & \text{if} \quad x > ۰ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

متوسط طول عمر این لاستیک را بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} \mu_X = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{dx} &= \int_{۰}^{\infty} x \frac{۱}{۲} e^{\frac{-x}{۲}} \mathrm{dx} \\ &= -x e^{\frac{-x}{۲}} |_{۰}^{\infty} - \int_{۰}^{\infty} -e^{\frac{-x}{۲}} \mathrm{dx} \\ &= -۲ e^{\frac{-x}{۲}} |_{۰}^{\infty} = ۲ \end{aligned}$$

پس انتظار داریم که این نوع لاستیک بطور متوسط ۲ سال کار کند.

تمرین ۲-۵. ظرفی دارای ۳ گوی با شماره های و ۱و۲و۳ است. ابتدا یک گوی از ظرف خارج کرده و سپس یک سکه سالم به تعداد دفعات شماره گوی خارج شده پرتاب می شود.

i. امیدریاضی تعداد شیرهای مشاهده شده را بدست آورید.

ii. اگر بدانیم حداقل یک شیر مشاهده شده، احتمال اینکه حداکثر ۲ شیر مشاهده شود چقدر است؟

تمرین ۲-۶. تابع چگالی متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است.

$$f_X(x) = \begin{cases} k_1 x & \text{if} \quad 0 < x < 1 \\ k_2(2-x) & \text{if} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

i. اگر $\mathrm{E}(X) = 1$، مقدار k_1 و k_2 را محاسبه کنید.

ii. اگر $X > 0/5$، احتمال آنکه X از ۱/۵ کمتر باشد را بیابید.

تمرین ۲-۷. در مثال ها و تمرین های ۱-۱۴، ۱-۱۵، ۱-۱۶، ۱-۱۹ و ۱-۲۰ مقدار امید ریاضی متغیرهای موجود را بدست آورید.

۱.۲ امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی

متغیر تصادفی X را درنظر بگیرید. با توجه به این نکته که تابعی از هر متغیر تصادفی، یک متغیر تصادفی است پس $Y = g(X)$ یک متغیر تصادفی خواهد بود. برای محاسبه امید ریاضی متغیر تصادفی $Y = g(X)$ می توان به دو روش زیر عمل کرد:

- **روش اول:** تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = g(X)$، یعنی $f_Y(y)$، را بدست آورده و بنابراین
  - اگر $Y = g(X)$ یک متغیر تصادفی گسسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(g(X)) = \mathrm{E}(Y) = \sum_y y f_Y(y)$$

  - اگر $Y = g(X)$ یک متغیر تصادفی پیوسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(g(X)) = \mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) \mathrm{dy}$$

- **روش دوم:** برای محاسبه امید ریاضی $Y = g(X)$، می توان از قضیه زیر استفاده کرد.

قضیه ۲-۸. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی تابع $g(X)$ به صورت زیر بدست می آید:

- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(g(X)) = \sum_{x} g(x) f_X(x)$$

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد آن گاه

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{dx}$$

بدست آوردن امید ریاضی $Y = g(X)$، از دو روش مطرح شده منجر به یک جواب می گردد.

مثال ۲-۹. فرض کنید متغیر تصادفی X، دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. امید ریاضی $g(X) = (X - ۱)^۲$ را به دست آورید.

x	-۱	۰	۱	۲
$f_X(x)$	۰/۱	۰/۱	۰/۵	۰/۳

حل: واضح است که X یک متغیر تصادفی گسسته است. از روش دوم استفاده می کنیم و داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((X-۱)^۲) &= \sum_{x=-۱}^{۲} (x-۱)^۲ f_X(x) \\ &= (-۱-۱)^۲(۰/۱) + (۰-۱)^۲(۰/۱) + (۱-۱)^۲(۰/۵) + (۲-۱)^۲(۰/۳) \\ &= ۰/۸\end{aligned}$$

برای روش اول داریم، $Y = (X - ۱)^۲$ و $S_Y = \{۰, ۱, ۴\}$. بنابراین

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(Y = ۰) = \mathrm{P}(X = ۱) = ۰/۵ \\ &\mathrm{P}(Y = ۱) = \mathrm{P}(X = ۰) + \mathrm{P}(X = ۲) = ۰/۱ + ۰/۳ = ۰/۴ \\ &\mathrm{P}(Y = ۴) = \mathrm{P}(X = -۱) = ۰/۱ \\ &\Longrightarrow \mathrm{E}(Y) = ۰ \times ۰/۵ + ۱ \times ۰/۴ + ۴ \times ۰/۱ = ۰/۸\end{aligned}$$

مثال ۲-۱۰. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. امید ریاضی $g(X) = ۵X - ۴$ را به دو روش بدست آورید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۱۶}\sqrt{x} & \text{if} \quad ۰ < x < ۴ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

حل: واضح است که X یک متغیر تصادفی پیوسته بوده و بنابراین $Y = g(X)$ نیز یک متغیر تصادفی پیوسته است. از روش اول داریم:

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(۵X - ۴ \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \frac{y+۴}{۵}) = F_X(\frac{y+۴}{۵})$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = F'_X(\frac{y+۴}{۵}) = \frac{۱}{۵} f_X(\frac{y+۴}{۵}) = \frac{۳}{۸۰}\sqrt{\frac{y+۴}{۵}}$$

$$۰ < \frac{y+۴}{۵} < ۴ \Longrightarrow -۴ < y < ۱۶$$

or

$$۰ < x < ۴ \Longrightarrow -۴ < ۵x - ۴ < ۱۶ \Longrightarrow -۴ < y < ۱۶$$

$$\Longrightarrow \mathrm{E}(Y) = \int_{-۴}^{۱۶} \frac{۳}{۸۰} y \sqrt{\frac{y+۴}{۵}} \mathrm{dy} = (\frac{۱}{۱۰۰۰}(y+۴)(-۸+۳y)\sqrt{۵y+۲۰})|_{-۴}^{۱۶} = ۸$$

از روش دوم نیز داریم:

$$\mathrm{E}(۵X - ۴) = \int_{۰}^{۴} (۵x - ۴)\frac{۳}{۱۶}\sqrt{x}\mathrm{dx} = (\frac{۱}{۸}(-۴+۳x)x^{\frac{۳}{۲}})|_{۰}^{۴} = ۸$$

۲.۲ خواص امید ریاضی

۱. اگر c یک عدد ثابت باشد، آن‌گاه $\mathrm{E}(c) = c$.

اثبات. فرض کنید c مقدار یک متغیر تصادفی دلخواه باشد که آن را با X نشان می دهیم. داریم:

- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد آن‌گاه

$$\mathrm{E}(c) = \sum_x c f_X(x) = c \sum_x f_X(x) = c \times ۱ = c$$

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد آن‌گاه

$$\mathrm{E}(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c f_X(x)\mathrm{dx} = c \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = c \times ۱ = c$$

□

۲. اگر $g(X)$ و $h(X)$ توابعی از متغیر تصادفی X بوده و a و b دو مقدار ثابت باشند آن‌گاه

$$\mathrm{E}(ag(X) + bh(X)) = a\mathrm{E}(g(X)) + b\mathrm{E}(h(X))$$

اثبات. طبق تعریف امید ریاضی داریم:

- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(ag(X) + bh(X)) &= \sum_x (ag(x) + bh(x)) f_X(x) \\ &= \sum_x ag(x) f_X(x) + \sum_x bh(x) f_X(x) \\ &= a \sum_x g(x) f_X(x) + b \sum_x h(x) f_X(x) \\ &= a\mathrm{E}(g(X)) + b\mathrm{E}(h(X))\end{aligned}$$

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(ag(X) + bh(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ag(x) + bh(x)) f_X(x)\mathrm{dx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ag(x) f_X(x)\mathrm{dx} + \int_{-\infty}^{\infty} bh(x) f_X(x)\mathrm{dx} \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\mathrm{dx} + b \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\mathrm{dx} \\ &= a\mathrm{E}(g(X)) + b\mathrm{E}(h(X))\end{aligned}$$

□

۳. اگر X یک متغیر تصادفی و a و b اعداد ثابت باشند آن‌گاه $\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X) + b$.

اثبات. برای اثبات کافی است در خاصیت دوم، جایگذاری $g(X) = X$ و $h(X) = ۱$ را انجام دهیم. □

تمرین ۲-۱۱. واریانس متغیرهای موجود در مثال ها و تمرین های ۱-۱۴، ۱-۱۵، ۱-۱۶، ۱-۱۹ و ۱- ۲۰ را بدست آورید.

۳.۲ واریانس و خواص آن

همانطور که در ابتدای فصل نیز توضیح داده شد، اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و تابع توزیع $F_X(x)$ باشد، $\mathrm{E}(X)$ مقدار مورد انتظاری است که قبل از وقوع آزمایش تصادفی مورد توجه قرار می گیرد. اما نتایج یک آزمایش تصادفی می تواند متفاوت با مقدار مورد انتظار (امید ریاضی) $\mathrm{E}(X)$ باشد که این تفاوت را می توان به صورت $|X - \mathrm{E}(X)|$ نمایش داد که **انحراف از میانگین** نامیده می شود.

واضح است که $|X - \mathrm{E}(X)|$ یک متغیر تصادفی است و بنابراین علاقمندیم تا میزان انحراف از میانگین را به طور متوسط بدست آوریم، یعنی

متوسط میزان انحراف متغیر تصادفی X از مقدار مورد انتظار $\mathrm{E}(X)$: $\mathrm{E}(|X - \mathrm{E}(X)|)$

اما از آنجایی که کار کردن با قدر مطلق دشوار است، بجای تابع قدر مطلق از توان دوم استفاده می کنیم. یعنی

$$\mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))^۲$$

که آن را واریانس متغیر تصادفی X می نامند و به صورت زیر نمایش داده می شود

$$\sigma^۲ = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))^۲ = \mathrm{E}(X - \mu_X)^۲ \qquad (۲-۱)$$

برای محاسبه واریانس متغیر تصادفی X، می توان رابطه (۲-۱) را به شکل زیر ساده کرد

$$\begin{aligned}
\sigma^۲ = \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X - \mu_X)^۲ \\
&= \mathrm{E}(X^۲ + \mu_X^۲ - ۲X\mu_X) \\
&= \mathrm{E}(X^۲) + \mathrm{E}(\mu_X^۲) - ۲\mathrm{E}(X\mu_X) \\
&= \mathrm{E}(X^۲) + \mu_X^۲ - ۲\mu_X\mathrm{E}(X) \\
&= \mathrm{E}(X^۲) + \mu_X^۲ - ۲\mu_X^۲ \\
&= \mathrm{E}(X^۲) - \mu_X^۲
\end{aligned}$$

بنابراین $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^۲) - \mu_X^۲ = \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}^۲(X)$.

مثال ۲-۱۲. واریانس متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر را پیدا کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} ۴xe^{-۲x} & \text{if} \quad x > ۰ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

حل:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_۰^\infty x(۴xe^{-۲x})\mathrm{dx} = -(۱ + ۲x + ۲x^۲)e^{-۲x}|_۰^\infty = ۱$$

$$\mathrm{E}(X^۲) = \int_۰^\infty x^۲(۴xe^{-۲x})\mathrm{dx} = -\frac{۱}{۲}(۳ + ۶x + ۶x^۲ + ۴x^۳)e^{-۲x}|_۰^\infty = \frac{۳}{۲}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^۲) - \mu^۲ = \frac{۳}{۲} - ۱^۲ = \frac{۱}{۲}$$

۱.۳.۲ خواص واریانس

فرض کنید a، b و c اعداد ثابت و X متغیر تصادفی باشد. در این صورت داریم:

۱. $\mathrm{Var}(c) = ۰$.

اثبات. طبق خاصیت امید ریاضی داریم:

$$\mathrm{Var}(c) = \mathrm{E}(c - \mathrm{E}(c))^۲ = \mathrm{E}(c - c)^۲ = \mathrm{E}(۰) = ۰$$

□

۲. $\mathrm{Var}(aX + b) = a^۲\mathrm{Var}(X)$.

اثبات. طبق خاصیت امید ریاضی بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX + b) &= \mathrm{E}\left((aX + b) - \mathrm{E}(aX + b)\right)^۲ \\ &= \mathrm{E}\left((aX + b) - (a\mathrm{E}(X) + b)\right)^۲ \\ &= \mathrm{E}\left(aX - a\mathrm{E}(X)\right)^۲ \\ &= \mathrm{E}\left(a^۲(X - \mathrm{E}(X))^۲\right) \\ &= a^۲\mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^۲ \\ &= a^۲\mathrm{Var}(X) \end{aligned}$$

□