حل دستگاه معادلات غیرخطی با استفاده از تعمیم روش نیوتن

فرض کنید هدف حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی غیر خطی زیر باشد:

$$\boxed{\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}}$$

که در آن f و g دوتابع غیرخطی بر حسب x و y هستند.

اگر (α,β) جواب واقعی دستگاه و (x_0,y_0) مقادیر تقریبی اولیه ای از آن باشد می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \alpha = x_0 + h_0 \\ \beta = y_0 + k_0 \end{cases}$$

اگر بتوان h_0 و k_0 را محاسبه کرد با اضافه کردن آنها به ترتیب به x_0 و y_0 به جواب مطلوب می‌رسیم. لذا در ادامه سعی می‌کنیم تقریبهایی از h_0 و k_0 را محاسبه کنیم.

برای این منظور از بسط تیلر یک تابع دو متغیره استفاده می‌کنیم.

$$0 = f(\alpha,\beta) = f\left(x_0+h_0, y_0+k_0\right) = f(x_0,y_0) + h_0\frac{\partial f}{\partial x} + k_0\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h_0^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{k_0^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots$$

اگر x_0 و y_0 تقریبهای خوبی از α و β باشند، h_0 و k_0 کوچک خواهند بود و لذا می‌توان از جملاتی که توان h_0 و k_0 در آنها بیش از یک است، صرفنظر کرد و نوشت:

$$0 \simeq f(x_0,y_0) + h_0\frac{\partial f}{\partial x} + k_0\frac{\partial f}{\partial y}$$

و به همین ترتیب برای تابع g

$$0 \simeq g(x_0,y_0) + h_0\frac{\partial g}{\partial x} + k_0\frac{\partial g}{\partial y}$$

بنابراین برای پیدا کردن تقریبهایی از h_0 و k_0 دستگاه زیر را از دو رابطهٔ بالا تشکیل می‌هیم:

$$\begin{cases} h_0\dfrac{\partial f}{\partial x} + k_0\dfrac{\partial f}{\partial y} = -f(x_0,y_0) \\[2ex] h_0\dfrac{\partial g}{\partial x} + k_0\dfrac{\partial g}{\partial y} = -g(x_0,y_0) \end{cases}$$

توجه کنید که دستگاه بالا وقتی برای مجهولات h_0 و k_0 جواب دارد که

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

چون جواب دستگاه تقریبی از h_0 و k_0 را بدست می دهد، $x_0 + h_0$ تقریبی بهتر از x_0 بـرای α و y_0+k_0 تقریب بهتری برای β خواهد بود. در نتیجه قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h_0 \\ y_1 = y_0 + k_0 \end{cases}$$

به همین ترتیب در حالت کلی اگر x_n و y_n حساب شده باشند با حل دستگاه

$$\boxed{\begin{cases} h_n \dfrac{\partial f}{\partial x} + k_n \dfrac{\partial f}{\partial y} = -f(x_n, y_n) \\ h_n \dfrac{\partial g}{\partial x} + k_n \dfrac{\partial g}{\partial y} = -g(x_n, y_n) \end{cases}}$$

و به دست آوردن h_n و k_n قرار می‌دهیم:

$$\boxed{\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + k_n \end{cases}}$$

شرط توقف در اینجا می تواند یکی از دو شرط زیر باشد:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon_1 \quad , \quad |y_{n+1} - y_n| < \varepsilon_2$$

$$|f(x_n, y_n)| < \varepsilon_3 \quad , \quad |g(x_n, y_n)| < \varepsilon_4$$

مثال

تقریبی از جوابهای دستگاه زیر را چنان محاسبه کنید که

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-2} \quad , \quad |y_{n+1} - y_n| < 10^{-3}$$

واضح است که می‌توان x^2 را از یک معادله به‌دست آورد و در دیگری گذاشت و y را به‌دست آورد، ولی هدف از این مسئله نشان دادن کارایی روش ارائه شده است.

فرض کنید $x_0 = 4$, $y_0 = 3$ تقریبهای اولیهٔ مناسبی از α و β باشند.

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 - y^2 - 5 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 \end{cases}$$

برای محاسبهٔ h_n و k_n ابتدا مشتقات جزیی f و g را نسبت به x و y حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad , \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x \quad , \quad \dfrac{\partial g}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

که از آنها نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 8xy > 0$$

با توجه به اینکه $x_0 = 4$ و $y_0 = 3$ داریم،

$$\begin{cases} 2x_n h_n - 2y_n k_n = -(x_n^2 - y_n^2 - 5) \\ 2x_n h_n + 2y_n k_n = -(x_n^2 + y_n^2 - 25) \end{cases}$$

از حل این دستگاه به ازای مقادیر مختلف n، مقدار h_n و k_n را محاسبه و نتیجه می گیریم:

$$\begin{cases} x_1 = 3/8750 \\ y_1 = 3/1667 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x_2 = 3/8730 \\ y_2 = 3/1623 \end{cases}}$$

و اگر x_3 و y_3 را حساب کنید تا ۵ رقم با معنا همان x_2 و y_2 به‌دست می‌آیند.