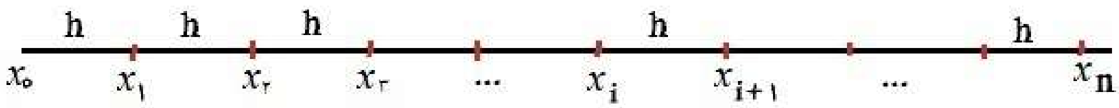
درون یابی در نقاط متساوی الفاصله

روشهای لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن در حالت کلی برای نقاط $x_۰$، $x_۱$، ...، x_n، چه متساوی‌الفاصله باشند چه نباشند، چندجمله‌ای درونیاب را به‌دست می‌دهند. اما، وقتی که x_iها متساوی‌الفاصله باشند فرمولهای ساده‌تری موجودند که در این قسمت سعی می‌کنیم آنها را به‌دست آوریم.

برای این منظور فرض می‌کنیم که $x_{i+۱} - x_i = h \quad , \quad i = ۰, \ldots , n-۱$

که از آن نتیجه می‌شود $\boxed{x_i = x_۰ + ih} \quad , \quad i = ۰, ۱, \ldots, n$



اکنون به تعریف چند عملگر می‌پردازیم که در بیان فرمولها به کار می‌روند.

تعریف عملگر تفاضل پیشرو Δ

عملگر Δ چنین تعریف می‌شود:

$$\boxed{\Delta f_i = f_{i+۱} - f_i}$$

به همین ترتیب،

$$\Delta^۲ f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+۱} - f_i) = \Delta f_{i+۱} - \Delta f_i$$
$$= f_{i+۲} - f_{i+۱} - (f_{i+۱} - f_i)$$
$$= f_{i+۲} - ۲ f_{i+۱} + f_i$$

در صورتی که k عددی طبیعی باشد داریم:

$$\boxed{\Delta^{k+۱} f_i} = \Delta^k (\Delta f_i) = \Delta^k (f_{i+۱} - f_i)$$
$$\boxed{= \Delta^k f_{i+۱} - \Delta^k f_i}$$

که یک فرمول بازگشتی برای محاسبهٔ تفاضلات پیشرو مراتب بالای f_i است.

تعریف عملگر تفاضل پسرو ∇

عملگر ∇ چنین تعریف می‌شود:

$$\boxed{\nabla f_i = f_i - f_{i-۱}}$$

چون در تعیین ∇f_i از مقادیر f در x_i و $x_{i-۱}$ استفاده می‌شود لفظ پسرو برای این تفاضلات به‌کار می‌رود. در ضمن

$$\nabla^{۲} f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-۱}) = \nabla f_i - \nabla f_{i-۱}$$
$$= f_i - f_{i-۱} - (f_{i-۱} - f_{i-۲})$$
$$= f_i - ۲ f_{i-۱} + f_{i-۲}$$

پس،
$$\nabla^{۲} f_i = f_i - ۲ f_{i-۱} + f_{i-۲}$$

و به‌طور کلی، اگر k عددی طبیعی باشد

$$\boxed{\nabla^{k+۱} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-۱}}$$

فرمولهای بالا را طی چند مثال به کار می‌بریم.

مثال

تفاضلات پیشرو مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید

x_i	−۱	۰	۱	۲
f_i	۰	−۱	۲	۹

حل:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^{۲} f_i$	$\Delta^{۳} f_i$
−۱	$\boxed{۰}$			
		$(-۱-۰) = \boxed{-۱}$		
۰	$\boxed{-۱}$		$۳-(-۱) = \boxed{۴}$	
		$۲-(-۱) = \boxed{۳}$		$۴-۴ = \boxed{۰}$
۱	$\boxed{۲}$		$۷-۳ = \boxed{۴}$	
		$۹-۲ = \boxed{۷}$		
۲	$\boxed{۹}$			

مشاهده می‌شود که اعداد به‌سادگی حساب می‌شوند و مشکل تفاضلات تقسیم شده را ندارند.

مثال

x_i	۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳
f_i	۲	۲/۳۳۱	۲/۷۲۸	۳/۱۹۷

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۱	۲			
		۰/۳۳۱		
			۰/۰۶۶	
۱/۱	۲/۳۳۱			
				۰/۰۰۶
		۰/۳۹۷		
	۲/۷۲۸		۰/۰۷۲	
۱/۲				
		۰/۴۶۹		
۱/۳	۳/۱۹۷			

جدول زیر نشان می‌دهد که تفاضلات پیشرو در ابتدای جدول و تفاضلات پسرو در انتهای جدول کاربرد دارند.

x_i	f_i	Δf_i (∇f_i)	$\Delta^2 f_i$ $(\nabla^2 f_i)$	$\Delta^3 f_i$ $(\nabla^3 f_i)$
x_0	f_0			
		$f_1 - f_0 = \boxed{\Delta f_0}$		
x_1	f_1		$\Delta f_1 - \Delta f_0 = \boxed{\Delta^2 f_0}$	
		$f_2 - f_1 = \boxed{\Delta f_1}$		$\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = \boxed{\Delta^3 f_0}$
x_2	f_2		$\Delta f_2 - \Delta f_1 = \boxed{\Delta^2 f_1}$	
		$f_3 - f_2 = \boxed{\Delta f_2}$		
x_3	f_3			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-3}	f_{n-3}			
		$f_{n-2} - f_{n-3} = \boxed{\nabla f_{n-2}}$		
x_{n-2}	f_{n-2}		$\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2} = \boxed{\nabla^2 f_{n-1}}$	
		$f_{n-1} - f_{n-2} = \boxed{\nabla f_{n-1}}$		$\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1} = \boxed{\nabla^3 f_n}$
x_{n-1}	f_{n-1}		$\nabla f_n - \nabla f_{n-1} = \boxed{\nabla^2 f_n}$	
		$f_n - f_{n-1} = \boxed{\nabla f_n}$		
x_n	f_n			

$\Delta^m f_k = \nabla^m f_{k+m},$

$\Delta^m f_{k-m} = \nabla^m f_k,$

فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات پیشرو

فرمول چندجمله‌ای درونیاب را بر حسب تفاضلات تقسیم شده قبلاً به‌دست آوردیم. وقتی نقاط متساوی‌الفاصله باشند می‌توان چندجمله‌ای درونیاب را ساده‌تر به‌دست آورد.

برای این منظور ابتدا به مثال زیر توجه کنید:

مثال نشان دهید که:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}$$

حل: می‌دانیم که، $x_2-x_0=2h$ ، $x_2-x_1=h$ ، $x_1-x_0=h$

بنابراین

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta f_0}{h}$$

و

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta f_1}{h}$$

با توجه به روابط بالا، داریم:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}=\frac{\frac{\Delta f_0}{h}-\frac{\Delta f_1}{h}}{-2h}$$

$$=\frac{\Delta f_1-\Delta f_0}{2h^2}=\frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

اکنون به‌طور کلی لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم اگر k عددی طبیعی باشد آنگاه به ازای هر $i\geq 0$ ،

$$\boxed{f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k}]=\frac{\Delta^k f_i}{k!h^k}}$$

برهان

به کمک استقرا روی k، حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $k=1$ داریم

$$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f(x_i)-f(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}=\frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}=\frac{\Delta f_i}{h}$$

که همان رابطه حکم به‌ازای $k=1$ است. حال فرض کنید حکم به ازای هر $i\geq 0$ برقرار باشد.

ثابت می‌کنیم به ازای هر $i\geq 0$:

$$f\left[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k},x_{i+k+1}\right]=\frac{\Delta^{k+1}f_i}{(k+1)!h^{h+1}}$$

برای این منظور از تعریف تفاضلات تقسیم شده استفاده می‌کنیم:

$$f\left[x_i,\dots,x_{i+k+1}\right]=\frac{f\left[x_i,\dots,x_{i+k}\right]-f\left[x_{i+1},\dots,x_{(i+1)+k}\right]}{x_i-x_{i+k+1}}$$

$$=\frac{\frac{\Delta^k f_i}{k!h^k}-\frac{\Delta^k f_{i+1}}{k!h^k}}{x_i-x_{i+k+1}}$$

چون $x_j=x_0+jh$ داریم:

$$x_i-x_{i+k+1}=\left(x_0+ih\right)-\left(x_0+(i+k+1)h\right)=-(k+1)h$$

از این‌رو،

$$f\left[x_i,\dots,x_{i+k+1}\right]=\frac{\Delta^k f_{i+1}-\Delta^k f_i}{(k+1)\times k!h^{k+1}}$$

$$=\frac{\Delta^{k+1}f_i}{(k+1)!h^{k+1}}$$

نتیجه اگر k عددی طبیعی باشد آن‌گاه:

$$f\left[x_0,x_1,\dots,x_k\right]=\frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$$

لم

اگر $x=x_i+\theta h$ و k عددی طبیعی باشد آن‌گاه:

$$(x-x_i)\dots(x-x_{k+i})=h^{k+1}\theta(\theta-1)\dots(\theta-k)$$

قضیه (فرمول تفاضلات پیشرو برای چندجمله‌ای درونیاب):

اگر نقاط x_i متساوی‌الفاصله باشند و $x = x_۰ + \theta h$ در این صورت:

$$P(x) = f_۰ + \theta \Delta f_۰ + \frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۰ + \dots + \frac{\theta(\theta-۱)\dots(\theta-n+۱)}{n!}\Delta^n f_۰$$

برهان

چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شده عبارت است از:

$$P(x) = f_۰ + (x-x_۰)f[x_۰, x_۱] + \dots + (x-x_۰)\dots(x-x_{k-۱})f[x_۰, \dots, x_k] + \dots + (x-x_۰)\dots(x-x_{n-۱})f[x_۰, \dots, x_n]$$

با توجه به مطالب قبلی:

$$\begin{cases} (x-x_۰)\dots(x-x_{k-۱}) = h^k \theta(\theta-۱)\dots(\theta-k+۱) \\ f[x_۰, \dots, x_k] = \dfrac{\Delta^k f_۰}{k!\,h^k} \quad , \qquad k = ۱, ۲, \dots, n \end{cases}$$

در نتیجه، به ازای $k = ۱, ۲, \dots, n$

$$(x-x_۰)\dots(x-x_{k-۱})f[x_۰, \dots, x_k] = \frac{\theta(\theta-۱)\dots(\theta-k+۱)}{k!}\Delta^k f_۰$$

مثال فرمول چندجمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را به‌دست آورید.

x_i	۱	۲	۳	۴
f_i	۲	۵	۱۰	۱۷

حل:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^۲ f_i$	$\Delta^۳ f_i$
۱	$\boxed{۲}$			
		$\boxed{۳}$		
۲	۵		$\boxed{۲}$	
		۵		$\boxed{۰}$
۳	۱۰		۲	
		۷		
۴	۱۷			

جدول نشان می‌دهد، گرچه چهار نقطه داریم، چون $\Delta^3 f_0$ برابر صفر است چندجمله‌ای درونیاب از درجهٔ دو است. چندجمله‌ای درونیاب، بر حسب θ، عبارت است از:

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0$$

با توجه به این‌که $h = 1 \quad , \quad x_0 = 1$

$$x = x_0 + \theta h \longrightarrow x = 1 + \theta \longrightarrow \theta = x - 1$$

چندجمله‌ای درونیاب بر حسب x:

$$P(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1$$

در حالت کلی می‌توان فرمول چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_i، x_{i+1}،...، x_{i+k} را به‌طریقی مشابه به‌دست آورد.

قضیه

چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط متساوی‌الفاصلهٔ x_i،...، x_{i+k} عبارت است از:

$$P(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-k+1)}{k!} \Delta^k f_i$$

که در آن $x = x_i + \theta h$

در صورتی که تفاضلات از مرتبهٔ خاصی برابر باشد چندجمله‌ای درونیاب را می‌توان برای i های متفاوت به دست آورد. به مثال زیر توجه کنید.

چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی مثال قبل را بر اساس نقطهٔ x_1 به دست آورید.

چون $x_1 = 2$ داریم:

$$P(x) = f_1 + \theta \Delta f_1 + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \Delta^2 f_1$$

مقادیر f_1، Δf_1 و $\Delta^2 f_1$ در زیر خط موربی که در جدول کشیده شده است قراردارند و از آنجا

$$P(x) = 5 + 5\theta + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \times 2 = \theta^2 + 4\theta + 5$$

که در آن $x = x_1 + \theta h = 2 + \theta$. لذا اگر قراردهیم $\theta = x - 2$

خواهیم داشت:

$$P(x)=(x-۲)^۲+۴(x-۲)+۵=x^۲+۱$$

که همان $p(x)$ قبلی است.

سؤالی که در اینجا مطرح است این است که وقتی $P(x)$ به چند طریق قابل بیان است کدام صورت عملاً مفیدتر است؟

داریم

$$x=x_i+\theta h \longrightarrow \theta=\frac{x-x_i}{h}$$

لذا x_i را چنان اختیار می‌کنیم که θ از نظر قدرمطلق کمترین مقدار را داشته باشد، به عبارت دیگر x_i را آن نقطهٔ جدول ل اختیار می‌کنیم که کمترین فاصله را تا x داده شده داشته باشد.

مثال زیر مطلب را روشن می‌کند.

مثال

جدول زیر مربوط به $f(x)=\sin x$ برای $x=۰°,۱۰°,...,۵۰°$ است. مطلوب است برآورد $\sin ۵°$ با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب.

x_i	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°
$\sin x_i$	۰	۰/۱۷۳۶	۰/۳۴۲۰	۰/۵	۰/۶۴۲۸	۰/۷۶۶۰

حل:

x_i	$\sin x_i$	Δf_i	$\Delta^۲ f_i$	$\Delta^۳ f_i$	$\Delta^۴ f_i$	$\Delta^۵ f_i$
۰°	۰					
		۰/۱۷۳۶				
۱۰°	۰/۱۷۳۶		−۰/۰۰۵۲			
		۰/۱۶۸۴		−۰/۰۰۵۲		
۲۰°	۰/۳۴۲۰		−۰/۰۱۰۴		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۵۸۰		−۰/۰۰۴۸		۰
۳۰°	۰/۵		−۰/۰۱۵۲		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۴۲۸		−۰/۰۰۴۴		
۴۰°	۰/۶۴۲۸		−۰/۰۱۹۶			
		۰/۱۲۳۲				
۵۰°	۰/۷۶۶۰					

چون $x=5^\circ$ می‌توان از $x=0^\circ$ یا $x_1=10^\circ$ استفاده کرد. قرارمی‌دهیم:

$$x_0=0^\circ \longrightarrow \theta=\frac{x-x_0}{h}=\frac{5-0}{10}=\frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$\sin 5^\circ \simeq \boxed{0}+\frac{1}{2}\times\boxed{0/1736}+\frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\times\boxed{(-0/0052)}+\frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}\times\boxed{(-0/0052)}$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)}{24}\times\boxed{(0/0004)}=0/0871$$

مقدار واقعی $\sin 5^\circ$ برابر $0/0872$ است (تا چهار رقم اعشار).

فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات پسرو

برای تخمین مقدار f(x)، وقتی x نزدیک به انتهای جدول تفاضلات است، لازم است که از تفاضلات پسرو، که برحسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می‌شوند، استفاده کنیم.

قضیه چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ عبارت است از:

$$P(x)=f_n+\theta\nabla f_n+\frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\ldots+\frac{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

$$P(x)=f_i+\theta\nabla f_i+\frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_i+\ldots+\frac{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+k-1)}{k!}\nabla^k f_i$$

مثال

با استفاده از جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی مثال قبل تخمینی از $\sin 45^\circ$ حساب کنید.

حل: قرار می‌دهیم $x_i=40=x_4$ در نتیجه

$$\theta=\frac{x-x_i}{h}=\frac{45-40}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ\simeq\boxed{0/6428}+\frac{1}{2}\times(0/1428)+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{2}\times\boxed{(-0/0152)}+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}}{6}\times\boxed{(-0/0048)}$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}}{24}\times\boxed{(0/0004)}=0/7071$$

که این عدد همان $\frac{\sqrt{2}}{2}$ یعنی $\sin 45^\circ$، تا ۴ رقم اعشار است.