۱

قواعد تَسویر

تا اینجا، گزاره ها را به تنهایی مورد بررسی قراردادیم. آنها جملات خبری ای بودند که ارزش راست یا ارزش ناراست داشتند. مثلاً

(۱) ۳ یک عدد زوج است یا ۳ یک عدد فرد است

(۲) ۶ بر ۲ بخش پذیر است.

(۳) مثلث $\triangle$ABC قائم الزاویه است.

اما مایلیم دسته های بزرگتری از به اصطلاح «گزاره ها» را به طور یکجا مورد مطالعه قرار دهیم و به جای بیان خواص تک تک اعضای این دسته ها، خواص موجود در آنها را در یک جمله و به طور یکجا معرفی کنیم. مثلاً

(الف) هر عدد صحیح یا زوج است یا فرد است.

(ب) هر عدد زوج بر ۲ بخش پذیر است.

(پ) مثلث هایی وجود دارند که قائمه نیستند.

درواقع در اینجا یکی از ویژگی های زبان ریاضی را می خواهیم بیاموزیم. این ویژگی یک خاصیت برای یک دسته وسیع از اشیا را در یک جمله بیان می کند.

این کار از طریق عبارت هایی موسوم به «سُور وجودی» یا سُور عمومی» انجام می گیرد. با این عبارت ها دسته وسیعی از اشیا که خاصیت مورد نظر را دارند معرفی و شناسانده می شوند.

در فرهنگ فارسی، «سُور» به معنای «دیوار گرداگرد شهر» است. یک از معانی «سُور» [۱] در لغت عبارت است از «برج»، «بارو». اما در منطق ریاضی نام عمل‌گرهای منطقی که با عبارت هایی مانند

- « به ازای هر x ...»

[۱] quantifier

- «به ازای جمیع مقادیر x ...»
- « هر x مفروض ...»
- «x هرچه باشد ...»

موسوم به «سور عمومی» و یا

- «به ازای بعضی مقادی x ... »
- « x ای وجود دارد چنان که ... »
- « xی هست که ... »
- x هایی هستند که ... »

موسوم به «سور وجودی» بیان می شود، است. به این ترتیب با محصور کردن اشیایی که خاصیت مورد نظر را دارند، دیگر نیازی به بررسی خاصیت مورد نظر برای تک تک اعضای این دسته وجود ندارد و می توان خاصیت مورد نظر را برای اشیاء محصور شده صادق دانست.

پس از این که سور متغیر x تعیین شد، حکمی درباره x بیان می شود که می توانیم آن را به صورت $p(x)$ بنویسیم و می خوانیم «حکم p در باره x»

برای بیان دقیق تر جمله اخیر مفهوم «عالم سخن» را معرفی می کنیم. در هر بحثی، دسته ای از اشیا که خواصشان مورد نظر است را **عالم سخن** یا **حوزه سخن** می نامیم.

مثلا در گزاره « تمام اعداد طبیعی که در رابطه $x^۲ - x + ۱ = ۰$ صدق می کنند، عالم سخن اعداد طبیعی است. مسلماً هیچ عدد طبیعی x ای وجود ندارد که $x^۲ - x + ۱ = ۰$. اما اگر به جای اعداد طبیعی، اعداد مختلط را به عنوان عالم سخن اختیار نماییم، آنگاه لااقل یک x وجود دارد که در رابطه $x^۲ - x + ۱ = ۰$ صدق نماید. بنابراین ملاحظه می شود با تغییر عالم سخن، ممکن است یک گزاره ارزش راست پیدا کند یا برعکس ارزش ناراست پیدا کند.

مثلا اگر عالم سخن مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد آنگاه هر عضو x از $\mathbb{R}$ را که انتخاب کنیم، خواهیم داشت $x^۲ + ۱ > ۰$.

ولی اگر عالم سخن را $\mathbb{C}$، میدان اعداد مختلط، را انتخاب کنیم آنگاه برای همه اعضای $\mathbb{C}$ نامساوی $x^۲ + ۱ > ۰$ دیگر برقرار نیست.

این دو عبارت را به صورت خلاصه تر زیر بیان کرد

برای تمام x های در $\mathbb{R}$، $x^۲ + ۱ > ۰$.

و یا

برای برخی $x \in \mathbb{C}$، $x^۲ + ۱ > ۰$.

یعنی عبارت $x^۲ + ۱ > ۰$ برای برخی اعضای $\mathbb{C}$ درست نیست و برای برخی درست است.

عبارت « برای تمام x های در عالم سخن» را **سُور عمومی** می گویند و با $\forall(x)$ نشان می دهند.

اگر جمله $x^۲ + ۱ > ۰$ را با $p(x)$ نشان دهیم، آنگاه با کمک علامت بالا، جمله اخیر به صورت

$$(\forall x)(p(x))$$

در می آید.

حال اگر $x^۲ - ۱ = ۰$ را با $q(x)$ نشان دهیم آنگاه عبارت « وجود دارد عناصری از $\mathbb{R}$ به طوری که $x^۲ - ۱ = ۰$ را به صورت

$$(\exists x)(q(x))$$

عبارت «وجود دارد یک x به طوری که » را یک **سُور وجودی** می نامند و آن را با $(\exists)$ نشان می دهند.

اگر بخواهیم بگوییم که «یک و فقط یک» شی x وجود دارد که خاصیت $p(x)$ را دارد از نشان $(\exists! x)(p(x)$ استفاده می کنیم.

به عنوان مثال

$$(\exists! x)(x + ۱ = ۰)$$

در حالت کلی فرض کنید یک حوزه سخن U و یک گزاره کلی $p(x)$ داریم، که آن را **گزاره نما** می نامیم و در آن، متغیر x در عالم سخن U تغییر می کند.

حال $(\forall x)(p(x))$ بیان می کند که برای هر x در U، گزاره $p(x)$ درباره x راست است و $(\exists x)(p(x))$ به این معناست که حداقل یک x وجود دارد که برای آن $p(x)$ راست است.

در ریاضیات مقدماتی، معمولاً برای اختصار، از سُورها صرفنظر می شود. مثلاً در جبر دبیرستانی عبارت $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ به این معناست که «به ازای هر عدد حقیقی x، $(x+1)(x-1) = (x^2 - 1)$». در ریاضیات، «برای هر» و «برای تمام» به یک معناهستند و هردو را با $\exists$ نشان می دهند؛ و «برای بعضی» عمان معنی «وجود دارد» را می دهد که با $\exists$ نمایش داده می شود.

در عبارت هایی که کمتر رسمی هستند، گاه سُورها را بعد از گزاره می آوریم. مثلاً مثلاً گزاره « $f(x) = 0$ برای تمام x ها» دقیقاً به معنی $(\forall x)(f(x) = 0)$ است.

در منطق و در ریاضیات، نقیض گزاره « $p(x)$ برای هر x (در U) راست است»، یعنی

$$\sim [(\forall x)(p(x))]$$

به مفهوم « حداقل یک x (در U) وجود دارد که برای آن $p(x)$ ناراست است» به صورت

$$(\exists x)(\sim p(x))$$

درنظر گرفته می شود.

همچنین

$$\sim [(\exists x)(p(x))]$$

به معنای «هیچ x ای (در U) وجودندارد که برای آن $p(x)$ راست باشد» یا به عبارت دیگر « $p(x)$ برای تمام x ها (در U) ناراست است» یا

$$(\forall x)(\sim p(x))$$

در نظر گرفته می شود.

بحث فوق را در زیر خلاصه می کنیم.

قاعده نقیض سُور.

اگر فرض کنیم $p(x)$ یک گزاره نما، یعنی یک گزاره درباره یک شیء نامشخص x در یک عالم مفروض باشد، آنگاه

$$\sim [(\forall x)(p(x))] \equiv (\exists x)(\sim p(x)))$$

و

$$\sim [(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

نماد $\equiv$ را برای نشان دادن این که دوگزاره مُسّوَر دوطرف $\equiv$ از نظر منطق یک گزاره به حساب می آیند به کار برده ایم. در بخش بعد خواهیم دید که این نماد را برای هم ارزی های منطقی نیز به کار می بریم و این دو تعبیر نماد $\equiv$ با هم سازگار هستند.

برای درک بهتر گزاره های مُسّوَر $(\forall x)(p(x))$ و $(\exists x)(p(x)$، حالتی را که در آن حوزه سخن از تعدادی متناهی متغیر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ تشکیل شده است، درنظر می گیریم. آنگاه چون $(\forall x)(p(x))$ به این معناست که $p(x)$ برای هر متغیر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ راست است.

گزاره $(\forall x)(p(x))$ راست است اگر و تنها اگر

$$p(a_1), p(a_2), p(a_3), \ldots, p(a_n)$$

راست باشد. بنابراین

$(\forall x)(p(x))$ به معنای همواره »راست بودن» ترکیب فصلی: $p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$ است.

همچنین

$(\exists x)(p(x))$ به معنای همواره «راست بودن» ترکیب عطفی: $p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)$ است.

بنابراین، قاعده نقیض سُور را می توان به عنوان یک تعمیم قانون دمورگان در نظر گرفت. به طور دقیق‌تر

$$\sim [p(a_۱) \wedge p(a_۲) \wedge \cdots \wedge p(a_n)] \equiv \sim p(a_۱) \vee \sim p(a_۲) \vee \cdots \vee \sim p(a_n)$$
$$\equiv (\exists i)(\sim p(a_i))$$

و

$$\sim [p(a_۱) \vee p(a_۲) \vee \cdots \vee p(a_n)] \equiv \sim p(a_۱) \wedge \sim p(a_۲) \wedge \cdots \wedge \sim p(a_n)$$
$$\equiv (\forall i)(\sim p(a_i))$$

لازم به توضیح است که بحث سورها محدود به گزاره نماهایی که فقط یک متغییر دارند نیست و می تواند هرتعداد متناهی متغییر داشته باشد. به عنوان مثال

$$(\forall x)(\exists y)p(x, y)$$
$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(p(x, y, z)$$

مثلا اگر عالم سخن $\mathbb{Z}$ باشد با عبارت های زیر به خوبی آشنا هستیم.

$$(\forall x)(\exists y)(۲x + y = -۵)$$

بیان خلاصه ای برای بیان مجموعه جواب های معادله $۲x + y = -۵$ یعنی

$$\{(۰, -۵), (۱, -۷), (-۱, -۳), (۲, -۹), (-۲, -۱), \dots\}$$

می باشد. و یا

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)(x + ۲y + ۳z = ۰)$$

که بیان خلاصه‌ای برای مجموعه جواب معادله $x + ۲y + ۳z = ۰$، یعنی مجموعه

$$\{(۰, ۰, ۰), (۱, ۱, -۱), (-۱, -۱, ۱), \dots\}.$$

در $\mathbb{Z}$ است.