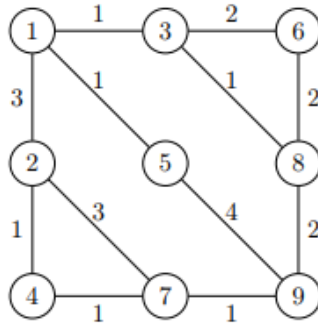


تکلیف سری دوم

طراحی الگوریتم

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، پاییز ۱۴۰۲

۱. گراف زیر داده شده است. به سوالات زیر پاسخ دهید.



- الگوریتم دایکسترا را روی گراف بالا اجرا می‌کنیم. از راس شماره 1 شروع می‌کنیم. ترتیبی که راسهای گراف در آن ملاقات می‌شوند را بیان کنید (در حالت تساوی، راسی که شماره کمتری دارد اول ملاقات می‌شود)
 - موقعی که راس شماره ۷ ملاقات می‌شود، مقدار $d(u)$ برای راسهای گراف چند است؟
 - درخت کوتاهترین مسیر بدست آمده را رسم کنید.
 - الگوریتمهای کروسکال و پریم را روی گراف داده شده اجرا کنید. درخت فراگیر کمینه را رسم کنید.
۲. نشان دهید اگر در گراف وزندار G همه وزنهای متمایز باشند، آنگاه درخت فراگیر کمینه G منحصر بفرد است.
۳. گراف $G = (V, E)$ و راس $s \in V$ را مثال بزنید که درخت فراگیر کمینه آن و درخت کوتاهترین مسیر با مبدا s یکسان باشند. مثالی بزنید که خلاف این باشد. آیا امکان دارد که دو درخت هیچ اشتراک یالی نداشته باشند؟
۴. گراف ساده G و یک درخت فراگیر آن T داده شده است. الگوریتمی طراحی کنید که تشخیص دهد آیا T میتواند یک درخت DFS معتبر برای G باشد. زمان اجرای الگوریتم شما چقدر است؟
۵. برای یک ترم تحصیلی مجموعه‌ای از دروس ارائه شده است. هر درس را مانند یک بازه فرض کنید که زمان شروع خاتمه‌اش مشخص است. فرض کنید به اندازه کافی کلاس درس وجود داشته باشد. می‌خواهیم با استفاده از کمترین تعداد کلاس درس همه درسها را ارائه کنیم. یک الگوریتم حریصانه را ارائه کنید که جواب بهینه را پیدا کند.
۶. کدهای بهینه هافمن برای مثال زیر را بدست آورید.

$$a : 1, b : 1, c : 2, d : 3, e : 5, f : 8, g : 13, h : 21$$

- اگر دقت کرده باشید، تعداد رخدادها اعداد فیبوناچی هستند. آیا می‌توانید جواب خود را تعمیم دهید بطوریکه که رخدادها n عدد اول سری فیبوناچی باشند؟
۷. یک مسیر ساده را همیلتونی گویند اگر شامل همه رئوس گراف باشد. گراف جهت دار بدون دور G داده شده است، یک الگوریتم در زمان $O(m + n)$ ارائه دهید که تشخیص دهد G یک مسیر همیلتونی دارد یا نه.
۸. فرض کنید n روستا روی یک جاده مستقیم در فواصل نامنظم قرار گرفته اند. دولت میخواهد یک سری دکل مخابراتی را برای وصل کردن این روستاها به شبکه موبایل نصب کند. برای سادگی فرض کنید جاده یک خط راست است و محل احتمالی دکلها و روستاها نقاطی روی این خط هستند. میخواهیم فاصله هر روستا از نزدیکترین دکل حداقل ۴ کیلومتر باشد. یک الگوریتم سریع ارائه دهید که حداقل تعداد دکل را نصب کند و همه روستاها پوشش داده شوند.