



K. N. Toosi University of Technology

Faculty of Mathematics

Mid-Term

Discrete And Combinatorial Mathematics

19 November 2024, 09:00–10:30

1. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۸ چند عدد صحیح چهار رقمی می توان ساخت؟
2. چند مثلث با رأسهای یک n -ضلعی منتظم می توان رسم کرد؟ اگر بخواهیم هیچ یک از اضلاع آن n -ضلعی منتظم، ضلعی از هیچ مثلثی نباشد، آنگاه چند مثلث می توان رسم کرد؟
3. حاصل عبارت زیر را به ازای عدد حقیقی x و عدد صحیح مثبت به دست آورید:

$$(2+x)^n - \binom{n}{1}x^1(2+x)^{n-1} + \binom{n}{2}x^2(2+x)^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}x^n$$
4. به چند طریق می توان n شیء را از گردایه ای $2n$ تایی، مرکب از n شیء متمایز و n شیء یکسان، انتخاب کرد؟
5. تعداد جواب های صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 40$ را تعیین کنید در صورتی که به ازای $1 \leq i \leq 5$ ، داشته باشیم $x_i \geq -3$.
6. به چند طریق می توان n شیء متمایز را در r ظرف مختلف گذاشت، به شرط آن که ترتیب اشیای هر ظرف مدنظر C_1, C_2, \dots, C_r باشد.
7. مطلوب است تعیین تعداد جواب های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ در صورتی که به ازای $1 \leq i \leq 4$ ، داشته باشیم $-5 \leq x_i \leq 10$.
8. مجموعه ای مانند S به طوری که $|S| = N$ و شرایط c_i ، $1 \leq i \leq t$ ، را که برخی از اعضای در آنها صدق می کنند، در نظر می گیریم. نشان دهید به ازای هر $1 \leq m \leq t$ ، تعداد اعضای S که دقیقاً در m شرط از شرایط C_1, C_2, \dots, C_t صدق می کنند برابر است با

$$E_m = S_m - \binom{m+1}{1}S_{m+1} + \binom{m+2}{2}S_{m+2} - \dots + (-1)^{t-m} \binom{t}{t-m}S_t.$$
9. فرض می کنیم $A = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$. می گوئیم تابع $f: A \rightarrow A$ نقطه ثابت دارد هرگاه به ازای عضوی مانند $x \in A$ داشته باشیم $f(x) = x$. چند تابع یک به یک $f: A \rightarrow A$ حداقل یک نقطه ثابت دارد.
10. صفحه شطرنجی C دارای m سطر و n ستون، $m \leq n$ ، را در نظر بگیرید. به ازای $0 \leq k \leq m$ به چند طریق می توانیم k رخ را روی C قرار دهیم به طوری که هیچ یک نتواند رخ دیگری را بگیرد؟