درس مبانی نظریه محاسبه

جلسه چهارم

ماشینهای متناهی و زبانهای منظم

Finite Machines and Regular Languages

زبانهای منظم: از دیدگاه محاسباتی

تعریف: هر عضو یک زبان را یک رشته می‌گوییم.

تعریف: اگر a یک حرف باشد، عبارت a^k به معنی $\overbrace{a \quad \ldots \quad a}^{k}$ می‌باشد.

تعریف: زبان (مجموعه) A منظم است اگر و فقط اگر توسط یک ماشین متناهی (معین) پذیرفته شود.

چند نمونه از زبانهای منظم:

- مجموعه همه رشته‌هایی با الفبای $\Sigma = \{a\}$ است که طول فرد دارند.
- مجموعه همه رشته‌هایی با الفبای $\Sigma = \{0, 1\}$ است که شامل زیررشته 001 هستند.
- مجموعه اعداد طبیعی
- مجموعه اعداد گویا

 آیا زبان زیر منظم است؟

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

معرفی چند عملگر برای زبانها

- اجتماع زبانهای A و B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$

- اشتراک زبانهای A و B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$$

- اتصال

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ and } y \in B\}$$

$$A = \{ab, ac\}, B = \{d, ba\} \Rightarrow AB = \{abd, acd, abba, acba\}$$

- ستاره

$$A^* = \{x_1 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ and } x_k \in A\}$$

به عبارت دیگر، هر رشته در A^* از چسپاندن کپی هایی از رشته‌های داخل A بدست آمده است. توجه کنید این کپی ها می‌توانند یکسان باشند.

$$A^* = \{\epsilon,\ A,\ AA,\ AAA,\ AAAA, \ldots\}$$

$$A = \{\mathrm{good}, \mathrm{bad}\} \qquad B = \{\mathtt{boy}, \mathtt{girl}\} \qquad \Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots, \mathrm{z}\}$$

$$A \cup B = \{\mathrm{good}, \mathrm{bad}, \mathtt{boy}, \mathtt{girl}\}$$

$$A \circ B = \{\mathrm{goodboy}, \mathrm{goodgirl}, \mathrm{badboy}, \mathrm{badgirl}\}$$

$$A^* = \{\varepsilon, \text{good, bad, goodgood, goodbad, badgood, badbad,} \\ \text{goodgoodgood, goodgoodbad, goodbadgood, goodbadbad, } \ldots\}$$

چند مثال با عملگرها

$\Sigma = \{a, b\}$

- همه رشته‌هایی که با الفبای Σ می‌توان ساخت = Σ^*

  دقت کنید Σ^* شامل رشته تهی ϵ نیز هست.
- $\Sigma\Sigma = \{aa, bb, ab, ba\}$
- $(\Sigma\Sigma)^* = ?$
- $\Sigma\Sigma^* = ?$
- $\Sigma^+ = \Sigma^*/\{\epsilon\}$

چند مثال با عملگرها

$$\Sigma = \{a, b\}$$

A همه رشته‌هایی از الفبای Σ است که تعداد رخداد a در آنها فرد است.

B همه رشته‌هایی از الفبای Σ است که کاراکتر اول و آخر رشته مثل هم باشد.

آیا می‌توانید توصیفی مختصر برای زبانهای زیر ارائه کنید؟

$$AA,\ BB,\ A^*,\ B^*,\ (A \cup \Sigma)^*$$

چند مثال با عملگرها

- $AA =$ همه رشته‌هایی از الفبای Σ که تعداد رخداد a در آنها زوج و غیر صفر است.

اثبات:

$$w \in AA \quad \Rightarrow \quad w = xy, \quad x \in A \text{ and } y \in A$$

پس بنا به تعریف A، تعداد رخداد a در w باید زوج و بیشتر از صفر باشد.

حال فرض کنید تعداد a در w زوج و بیشتر از صفر باشد. نشان می‌دهیم w عضوی از AA است.
می‌توان رشته w را به دو قسمت x و y تقسیم کرد بطوریکه

$$w = xy$$

و تعداد a در x و y فرد باشد. پس $w \in AA$

چند مثال با عملگرها

- $BB = \Sigma^*$ اثبات: دقت کنید که B شامل رشته ϵ است. اول نشان می‌دهیم $BB \subseteq \Sigma^*$. این قسمت بدیهی است.

$$w \in BB \;\Rightarrow\; w \in \Sigma^*$$

حال باید نشان دهیم $\Sigma^* \subseteq BB$. برای این منظور، باید نشان دهیم:

$$w \in \Sigma^* \;\Rightarrow\; w \in BB \;\Rightarrow\; w = xy,\; x \in B, y \in B$$

می‌توان حالات مختلف را بررسی کرد:

- اگر حرف اول و آخر w یکی باشد، آنگاه $w = w\epsilon,\; x = w, y = \epsilon$
- اگر حرف اول و آخر یکی نباشد. $w = a \;\ldots\; b$
  اولین b در رشته (از سمت چپ) را در نظر بگیرید.

$$w = \underbrace{a \;\ldots\; a}_{x}\; \underbrace{\color{red}{b} \;\ldots\; b}_{y}$$

بسته بودن زبانهای منظم تحت اجتماع

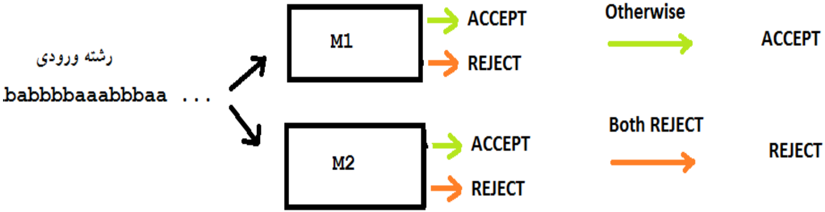
قضیه: اگر A و B دو زبان منظم باشند آنگاه $A \cup B$ یک زبان منظم است.

اثبات: برای اثبات منظم بودن A باید نشان دهیم یک ماشین متناهی وجود دارد که A را می‌پذیرد.

چون A و B منظم هستند پس ماشین متناهی M_1 وجود دارد که A را می‌پذیرد و ماشین متناهی M_2 وجود دارد که B را می‌پذیرد.

ایده: با استفاده از ماشینهای M_1 و M_2 ماشین M را برای زبان $A \cup B$ می‌سازیم.

بسته بودن زبانهای منظم تحت اجتماع



نمی‌توانیم اول رشته ورودی را به M_1 بدهیم و سپس رشته را به M_2 بدهیم چون زمانیکه پردازش M_1 تمام شده است رشته ورودی مصرف شده و از بین رفته است.

باید M را طوری طراحی کنیم انگار M همزمان اجرای M_1 و M_2 را روی رشته ورودی شبیه‌سازی می کند.

بسته بودن زبانهای منظم تحت اجتماع

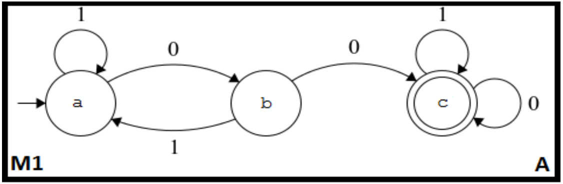
$$M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1), \quad M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$$

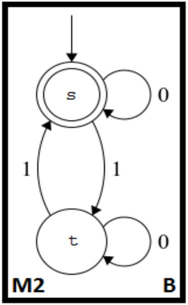
ماشین $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

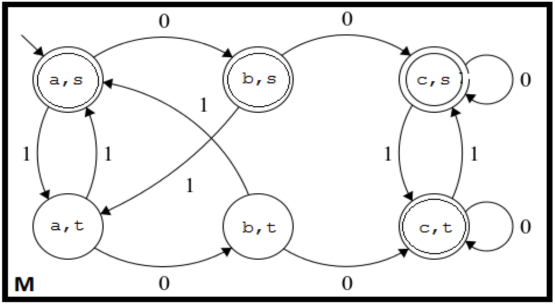
- مجموعه $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1,\ r_2 \in Q_2\}$
  وضعیتهای Q ضرب کارتزین دو مجموعه Q_1 و Q_2 است.
- $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \text{ or } r_2 \in F_2\}$

بسته بودن زبانهای منظم تحت اجتماع

یک مثال:







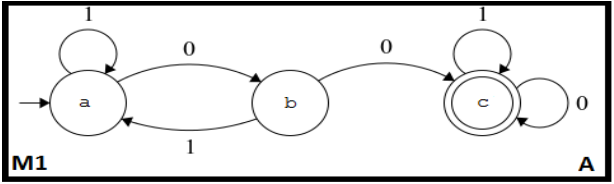
ماشین برای اجتماع $A \cup B$

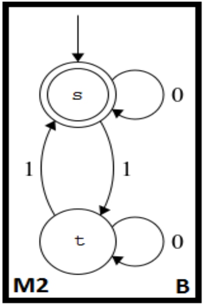
بسته بودن زبانهای منظم تحت اشتراک

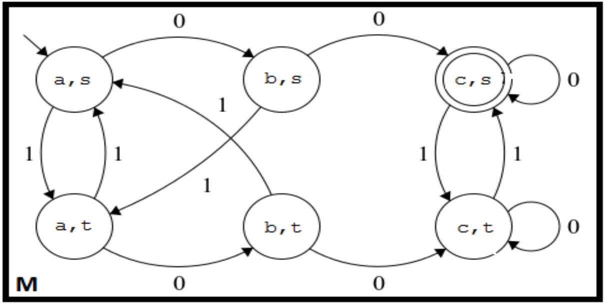
قضیه: اگر A و B دو زبان منظم باشند آنگاه $A \cap B$ یک زبان منظم است.

اثبات: مانند حالت اجتماع است با این تفاوت که $F = F_1 \times F_2$

بسته بودن زبانهای منظم تحت اشتراک







ماشین برای

اشتراک $A \cap B$

بسته بودن زبانهای منظم تحت اتصال

قضیه: اگر A و B دو زبان منظم باشند آنگاه AB یک زبان منظم است.

این قضیه را در جلسه آینده با استفاده از ایده ماشینهای متناهی نامعین اثبات می‌کنیم.

نمایی کلی از مفاهیم فصل اول