حل معادلات غیرخطی

$$f(x)=0$$

منظور از حل معادلهٔ فوق تعیین عدد یا اعدادی است که مقدار تابع به ازای آنها صفر شود. اگر $f(\alpha)=0$ آنگاه α را یک ریشهٔ معادله می‌نامند یا می‌گویند α یک صفر تابع **f** است. این معادله برحسب نوع تابع **f** به چند دسته تقسیم می‌شود:

الف) تابع **f** یک چند جمله‌ای است. $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

معادلهٔ $P(x)=0$ را یک **معادلهٔ چندجمله‌ای** یا **معادلهٔ جبری** می‌نامند.

ب) تابع **f** شامل یک یا چند تابع متعالی است. توابع مثلثاتی، توابع معکوس مثلثاتی، توابع نمایی و معکوس نمایی مانند e^x ، $\log x$ را توابع متعالی می‌نامند. در این فصل به حل عددی معادلات متعالی می‌پردازیم.

هدف اصلی در اینجا تعیین ریشه‌های حقیقی معادله است. به عبارت دیگر تعیین یک جواب تقریبی نظیر x^* به طوریکه تقریباً در معادله صدق کند، یعنی $|f(x^*)|$ به اندازه کافی کوچک باشد و یا نزدیک جواب واقعی معادله یعنی α باشد.

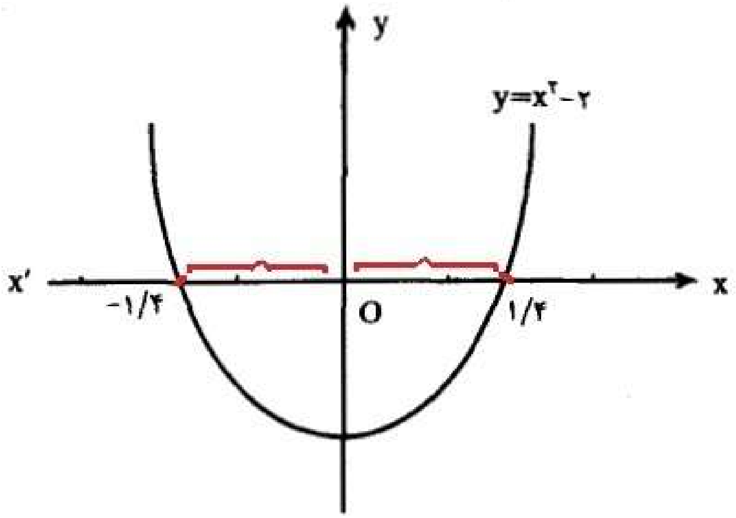
در این فصل **روش های تکراری** را برای حل معادله فوق بررسی خواهیم کرد.

تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه‌ها:

معمولاً برای تعیین ریشه‌ای از یک معادله با دقت مطلوب، لازم است که تقریبی از آن ریشه یا بازهٔ کوچکی که حاوی آن ریشه باشد را معلوم کرد. برای تعیین تعداد و حدود تقریبی ریشه‌های حقیقی یک معادله می توانیم از روش رسم منحنی استفاده کنیم. یعنی منحنی $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. اگر α ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ باشد داریم $f(\alpha)=0$ یعنی، نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\0\end{matrix}\right.$ روی منحنی $y=f(x)$ قرار دارد. اما، نقطهٔ **A** روی محور **x** ها است. پس، باید نقاط تلاقی منحنی بالا را با محور **x** ها تعیین کنیم. طول این نقاط ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند. در حالت کلی رسم منحنی $y=f(x)$ ، به کمک نقطه‌یابی، به سادگی امکان‌پذیر نیست و باید از بسته‌های نرم‌افزاری مناسب نظیر MATLAB یا MATHEMATICA استفاده کرد.

مثال تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $f(x)= x^۲ - ۲ = ۰$ را تعیین کنید.

منحنی $y= x^۲ - ۲$ را رسم می‌کنیم. مشاهده می‌شود که معادله دو ریشه دارد که تقریباً ۱/۴− و ۱/۴ هستند.



تعداد ریشه ها: تعداد نقاط برخورد منحنی تابع با محور طولها.

مقدار ریشه ها: طول نقاط برخورد.

واضح است که رسم منحنی $y= f(x)$ همیشه امکان پذیر نیست. مثلاً، منحنی

$$y= x + \cos x$$

را به این سادگی نمی‌توان رسم کرد.

بعضی اوقات می‌توان $f(x)$ را به صورت تفاضل دو تابع، که رسم آنها ساده است، نوشت.

فرض کنید داریم: $f(x)= f_۱(x) - f_۲(x)$

منحنیهای زیر را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_۱=f_۱(x) \\ y_۲=f_۲(x) \end{cases}$$

حال می‌گوییم اگر $f(\alpha)= ۰$ آنگاه: $f_۱(\alpha) - f_۲(\alpha) = ۰$

که از آن نتیجه می‌شود: $f_۱(\alpha)=f_۲(\alpha)=\beta$

یعنی نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ روی هر دو منحنی $y_۱$ و $y_۲$ قرار دارد. به عبارت دیگر، α طول نقطهٔ برخورد منحنیهای $y_۱$ و $y_۲$ است. از این‌رو، منحنیها را رسم می‌کنیم و طول نقاط برخورد آنها را به‌دست می‌آوریم.

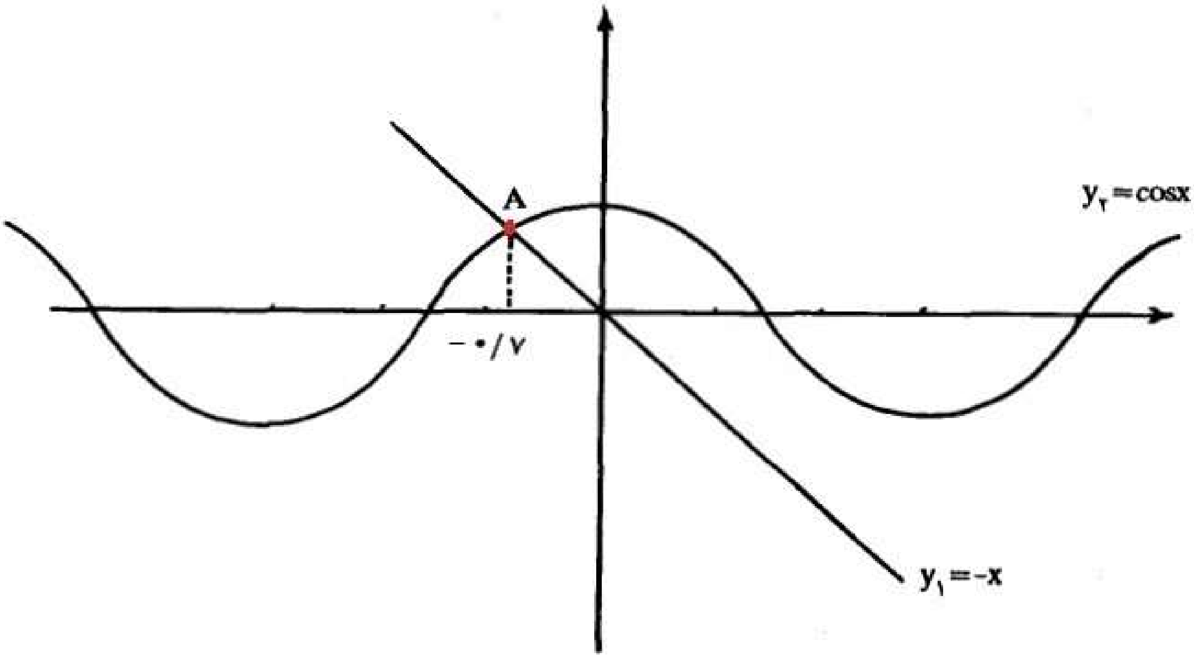
مثال حدود و تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f(x)= x + \cos x= ۰$ را تعیین کنید.

تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم،

$$f(x)= \cos x - (-x)$$

حال توابع زیر را رسم می‌کنیم

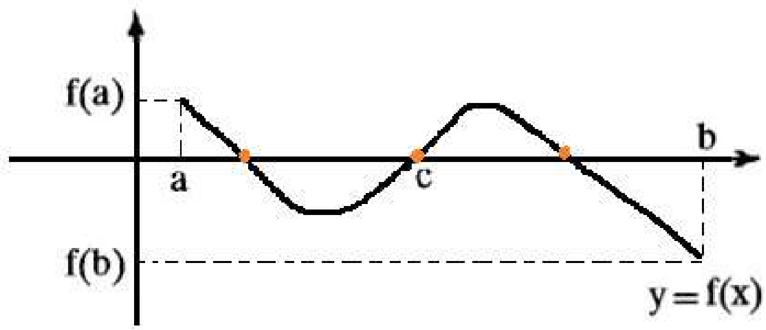
$$\begin{cases} y_۱= -x \\ y_۲= \cos x \end{cases}$$



معادلهٔ مورد نظر فقط یک ریشه دارد که مقدار آن تقریباً $-۰/۷$ است.

در مورد تعیین بازه ای که ریشه های یک معادله در آن قرار داشته باشند، از قضیه زیر موسوم به قضیه **بولستانو- وایرشتراس** استفاده می کنیم:

قضیه اگر تابع f بر $[a , b]$ پیوسته باشد و $f(a)\ f(b) < ۰$، آن‌گاه حداقل یک نقطه مانند c وجود دارد که $a<c<b$ و $f(c)=۰$. به‌عبارت دیگر، معادلهٔ $f(x)= ۰$ حداقل یک ریشه در (a,b) دارد. به‌علاوه، اگر f بر $[a,b]$ اکیداً یکنوا (یعنی، صعودی یا نزولی باشد) c منحصر به فرد است.



مثال بدون رسم منحنی ثابت کنید معادلهٔ زیر تنها یک ریشهٔ مثبت دارد.

$$f(x)= x^2 - (1 - x)^5= 0$$

- چون $f(0)= -1$ و $f(1)= 1$ پس حداقل یک ریشه در $(0 , 1)$ موجود است.

اما $f'(x)=2x + 5(1-x)^4$، در صورتی که $x\geq 0$ داریم $f'(x)>0$. یعنی، تابع f در $[0, +\infty]$ اکیداً صعودی است. بنابراین، معادله تنها یک ریشهٔ دارد. اکنون ثابت می‌کنیم که معادله ریشهٔ منفی ندارد. برای این منظور نشان می‌دهیم که اگر $x<0$ آن‌گاه $f(x)<0$ زیرا،

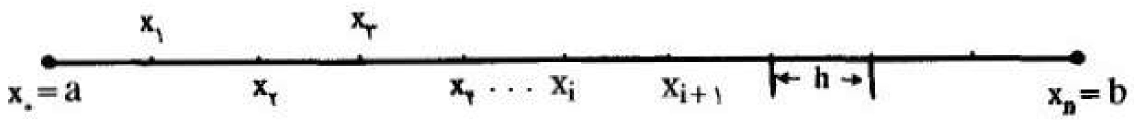
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5) \\ &= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

چون ضریب توانهای فرد x مثبت و ضریب توانهای زوج منفی است نتیجه می‌گیریم که اگر $x<0$ آن‌گاه $f(x)<0$. بنابراین، معادله تنها یک ریشهٔ مثبت دارد.

در عمل وقتی بخواهیم تعداد و محل تقریبی ریشه‌هایی از $f(x)= 0$ را در بازهٔ $[a , b]$ تعیین کنیم این بازه را بـه n قسـمت متساوی تقسیم می‌کنیم و n را آن قدر بزرگ اختیار می‌کنیم که نقاط تقسیم به اندازهٔ کافی به هم نزدیک باشند. در این صورت، فاصلهٔ نقاط متوالی عبارت است از:

$$h= \frac{b - a}{n}$$

و نقاط عبارت‌اند از: $\quad i= 1, 2,..., n \qquad x_i= x_0 + ih, \quad , \quad x_0=a$



قرار می‌دهیم: $\quad \gamma_i= f(x_i)\ f(x_{i+1})$

و سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم :

I. اگر $\gamma_i<0$ آن‌گاه حداقل یک ریشه در (x_i , x_{i+1}) موجود است.

II. اگر $\gamma_i>0$ با مفروضات فوق نمی توان قضاوت نمود.

III. اگر $\gamma_i=0$ آن‌گاه $f(x_i)= 0$ یا $f(x_{i+1}) =0$.

تعیین ریشه‌ها با دقت مطلوب

پس از تعیین حدود یک ریشه لازم است تقریبی از آن را با دقت خواسته شده حساب کنیم. به عبارتی دیگر بازه شامل ریشه را آنقدر فشرده (کوچک و کوچکتر) می کنیم تا به مقدار ریشه دسترسی پیدا کنیم. در واقع با استفاده از یک روش تکراری دنباله‌ای از اعداد مانند $\{x_n\}$ می‌سازیم به طوریکه حد این دنباله ریشهٔ مورد نظر باشد. یعنی: $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \alpha$

روش دوبخشی (روش تنصیف)

در این روش فرض می‌کنیم دو عدد a و b موجودند به قسمی که

الف) تابع f در $[a,b]$ پیوسته است.

ب) $f(a)\,f(b) < ۰$.

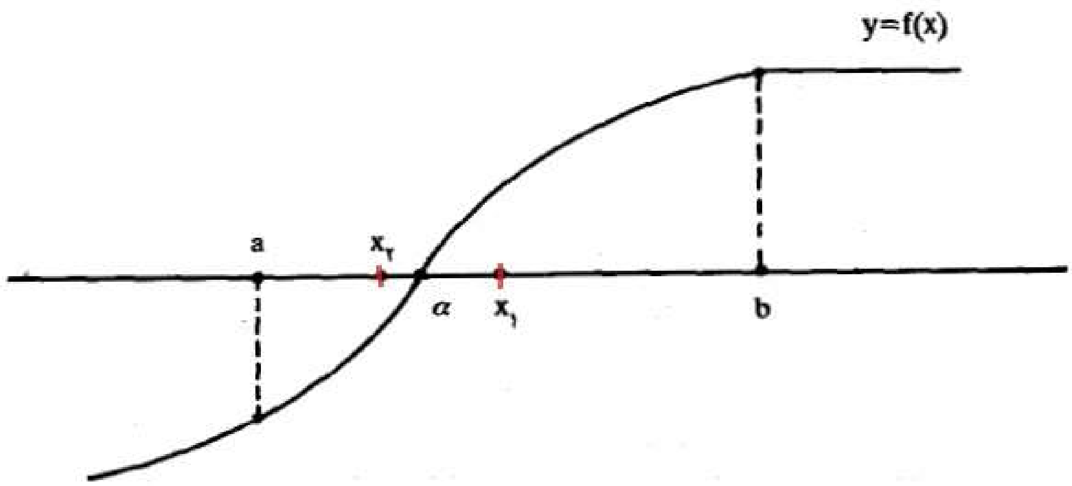
ج) معادلهٔ $f(x)=۰$ تنها یک ریشه در (a,b) دارد (این ریشه را α می‌نامیم).

با مفروضات بالا دنبال $\{x_n\}$ راچنان می‌سازیم که $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \alpha$.

برای این منظور، مطابق شکل، بازهٔ $[a,b]$ را به دو بخش متساوی تقسیم می‌کنیم. یعنی، قرار می‌دهیم:

$$x_۱ = \frac{a+b}{۲}$$

به عبارت دیگر، $x_۱$ را وسط بازهٔ $[a,b]$ می‌گیریم تا $[a,b]$ به دو بخش $[a,x_۱]$ و $[x_۱,b]$ تقسیم شود. با توجه به شرط (ج)، α در یکی از این دو بخش قرار دارد. بخشی که α در آن قرار دارد اختیار و مجدداً آن را به دو بخش متساوی تقسیم و نیمهٔ حاوی α را اختیار می‌کنیم (بازهٔ $[a,x_۱]$ را اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم $x_۲ = \frac{a+x_۱}{۲}$) و این عمل را همین‌طور ادامه می‌دهیم.



اما، در حالت کلی رسم منحنی میسر نیست و می‌توان برای ادامهٔ کار به طریق زیر عمل کرد:

I. اگر $f(a)f(x_1) < 0$ آنگاه ریشه در $[a,x_1]$ است. از این‌رو، می‌توان قرارداد $b= x_1$ و مجدداً عمل را در $[a,b]$ تکرار کرد.

II. اگر $f(a)f(x_1) > 0$ آنگاه ریشه در $[x_1,b]$ است، لذا، می‌توان قرارداد $a=x_1$ و مجدداً عمل را در $[a,b]$ تکرار کرد.

III. اگر $f(a)f(x_1)= 0$ آنگاه ریشه x_1 است و عمل خاتمه پیدا می‌کند.

به این ترتیب دنباله‌ای چون $\{x_n\}$ ساخته می‌شود. البته عملاً نمی‌توان بی‌نهایت جمله از این دنباله را حساب کرد بلکه باید معیارهایی برای توقف عملیات معرفی کنیم.

اینکه جملات دنبالهٔ تا کجا باید حساب شوند و آیا این دنباله همگراست یا خیر در ادامه بررسی می شود.