

۱. انتگرالهای دوگانه زیر را محاسبه کنید:

$$۱) \int_1^2 \int_0^{2x} xy^2 dy dx \quad ۲) \int_0^4 \int_0^y \sqrt{9+y^2} dx dy,$$

$$۳) \int_1^4 \int_y^y \sqrt{\frac{y}{x}} dx dy \quad ۴) \int_0^1 \int_0^1 |x-y| dy dx.$$

۲. در تمرینات زیر با تعویض ترتیب انتگرال گیری محاسبه را انجام دهید:

$$۱) \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \pi y^2 dy dx \quad ۲) \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy.$$

۳. در تمرینات زیر شکل ناحیه انتگرال گیری را رسم نموده و انتگرال دو گانه را محاسبه کنید:

(الف) $\int_S \int x \cos(x+y) dx dy$ ، S ناحیه مثلثی با رئوس $(\pi, \pi), (\pi, 0), (0, 0)$ است.

(ب) $\int_S \int (1+x) \sin y dx dy$ ، S دوزنقه‌ای با رئوس $(0, 0), (1, 0), (1, 2), (0, 1)$ است.

(ج) $\int_S \int e^{x+y} dx dy$ ، $S = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$.

۴. در تمرینات زیر شکل ناحیه را رسم نموده و ترتیب انتگرالگیری را عوض نمایید:

$$۱) \int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad ۲) \int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad ۳) \int_0^\pi \int_{-\sin(x/2)}^{\sin x} f(x, y) dy dx.$$

۵. حجم زیر رویه f محدود به ناحیه S را با انتگرال دوگانه محاسبه کنید:

(الف) $f(x, y) = y + 2x + 20$ و $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 16\}$.

(ب) $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، $S = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

۶. انتگرال دوگانه زیر را در مختصات قطبی حل کنید:

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx.$$

۷. نشان دهید تابع $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ در معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ صدق می‌کند.

۸. مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه

$$\int \int_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy,$$

که در آن R ناحیه بین خطوط $x+y=1$ و $x+y=2$ در ربع اول دستگاه مختصات دکارتی است.

موفق و سربلند باشید