روش تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن

می‌دانیم که یک چندجمله‌ای را بـه طـرق مـختلف مـی‌توان نمایش داد:

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n} L_j(x) f_j = L_0(x)\, f_0 + L_1(x)\, f_1 + \cdots + L_j(x)\, f_j + \ldots + L_n(x) f_n$$

(ترکیب خطی از چندجمله ای های لاگرانژ)

در حالت کلی می‌توان n چندجمله‌ای مستقل خطی دلخواه به صورت : $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$

در نظر گرفت و $P(x)$ را بر حسب ترکیبی خطی از آنها نوشت.

$$P(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

اکنون چندجمله‌ایهای زیر را در نظر بگیرید:

$$1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

می‌توان نشان داد که این چندجمله‌ایها مستقل خطی هستند. فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط x_0، x_1، ...، x_n باشد و

$$P(x)= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

با توجه به اینکه باید داشته باشیم: $i= 0, 1, \ldots, n.$ ، $P(x_i)=f_i$

لذا می توانیم ضرایب a_i را به‌دست آوریم.

مثلاً با قرار دادن $x= x_0$ داریم: $P(x_0)= a_0$

و چون باید $p(x_0)= f_0$ پس، $\boxed{a_0= f_0}$

با قرار دادن $x= x_1$ به‌دست می‌آوریم: $P(x_1)= a_0 + a_1 (x_1 - x_0)$

که با توجه به مقدار $a_0= f_0$ و اینکه $P(x_1)= f_1$ نتیجه می‌شود:

$$\boxed{a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}$$

و به همین ترتیب بقیه a_i ها بر حسب نقاط و f_i ها به‌دست می‌آیند.

با توجه به مقادیری که برای ضرایب به صورت تقسیم و تفریق به‌دست می‌آیند تفاضلات تقسیم شده نیوتن را معرفی و یک فرمول بازگشتی برای محاسبه آنها به صورت زیر حاصل می شود:

تفاضلات تقسیم شده

فرض کنید x_0، x_1، ...، x_n نقاط دوبه‌دو متمایز و f_0، f_1، ...، f_n مقادیر تابع f در این نقاط باشد.

تفاضلات تقسیم شدهٔ اول بین دو نقطه x_i و x_{i+1} چنین تعریف می‌شود:

$$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f(x_i)-f(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}=\frac{f_i-f_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}$$

بنابراین،

$$f[x_0,x_1]=\frac{f_0-f_1}{x_0-x_1}\quad,\quad f[x_1,x_2]=\frac{f_1-f_2}{x_1-x_2}$$

تفاضلات تقسیم شدهٔ دوم بین سه نقطه x_i، x_{i+1} و x_{i+2} چنین تعریف می‌شود:

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i+1},x_{i+2}]}{x_i-x_{i+2}}$$

به عنوان مثال:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}$$

تفاضلات تقسیم شدهٔ nام بین نقاط x_0، x_1، ...، x_n عبارت است از:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]-f[x_1,x_2,\dots,x_n]}{x_0-x_n}$$

مثال با استفاده از جدول ذیل تفاضلات تقسیم شدهٔ مربوط به تابع f را حساب کنید.

x_i	-۱	۰	۱	۲	۳
f_i	-۱	۱	۱	۵	۱۹

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(-1)-f(0)}{-1-0}=\frac{-1-1}{-1-0}=2$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(0)-f(1)}{0-1}=\frac{1-1}{0-1}=0$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{2-0}{-1-1}=-1$$

در ادامه بقیه تفاضلات مرتبه های مختلف را از طریق جدول زیر محاسبه می کنیم:

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	تفاضلات مرتبه سوم	تفاضلات مرتبه چهارم
-1	-1				
		$\frac{-1-1}{-1-0}=\boxed{2}$			
			$\frac{2-0}{-1-1}=\boxed{-1}$		
0	1				
				$\frac{-1-2}{-1-2}=\boxed{1}$	
		$\frac{1-1}{0-1}=\boxed{0}$			
			$\frac{0-4}{0-2}=\boxed{2}$		$\frac{1-1}{-1-3}=\boxed{0}$
1	1				
		$\frac{1-5}{1-2}=\boxed{4}$			
				$\frac{2-5}{0-3}=\boxed{1}$	
2	5				
			$\frac{4-14}{1-3}=\boxed{5}$		
		$\frac{5-19}{2-3}=\boxed{14}$			
3	19				

خلاصه، جدول بالا چنین است:

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	سوم	چهارم
-1	-1				
		2			
0	1		-1		
				1	
		0			
1	1		2		0
				1	
		4			
2	5		5		
		14			
3	19				

مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به‌دست آورید. سپس با اضافه کردن نقطهٔ (۲,۷) مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

x_i	−۱	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	سوم
−۱	۱			
		۰		
۰	۱		۱	
		۲		۰
۱	۳		۱	
		۴		
۲	۷			

جدول های مثال های قبل نشان می‌دهد که چندجمله‌ای درونیاب f از درجهٔ ۳ است و یا جدول بالا نشان می‌دهد که با اضافه کردن نقطهٔ (۲,۷) درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب تغییر نمی‌کند و برابر ۲ است.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که از جدول تفاضلات می‌توان درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب را، قبل از به‌دست آوردن آن، معین کرد.

قضیه (فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن)

چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_0 ، x_1 ،...، x_n عبارتست از:

$$P(x)= f_0 + (x - x_0)\, f[x_0,x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) f\,[x_0, x_1,\dots,x_n]$$

مثال چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را با استفاده از تفاضلات تقسیم شده به‌دست آورید و $f(\frac{1}{2})$ را برآورد کنید.

x_i	−۱	۱	۲	۳
f_i	−۲	۰	۷	۲۶

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده را تشکیل می‌دهیم.

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	سوم
۱-	$\boxed{-۲}$			
		$\boxed{۱}$		
۱	۰		$\boxed{۲}$	
		۷		$\boxed{۱}$
۲	۷		۶	
		۱۹		
۳	۲۶			

$$P(x)=\boxed{-۲}+(x+۱)\times\boxed{۱}+(x+۱)(x-۱)\times\boxed{۲}+(x+۱)(x-۱)(x-۲)\times\boxed{۱}$$

$$=-۲+x+۱+۲x^{۲}-۲+x^{۳}-۲x^{۲}-x+۲=x^{۳}-۱$$

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right)\simeq P\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{-۷}{۸}$$

مثال

چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به‌دست آورید. سپس با اضافه کردن نقطهٔ (۴,۱۱) به آن مجدداً چندجمله‌ای درونیاب راحساب کنید.

x_i	۱	۲	۳
f_i	۲	۵	۱۰

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	سوم
۱	۲			
		۳		
۲	۵		۱	
		۵		$\boxed{-۱}$
۳	۱۰		$\boxed{-۲}$	
		$\boxed{۱}$		
$\boxed{۴}$	$\boxed{۱۱}$			

چندجمله‌ای درونیاب مربوط به نقاط ۱، ۲ و ۳ عبارت است از :

$$P(x) = ۲ + (x - ۱) \times ۳ + (x - ۱)(x - ۲) \times ۱ = x^{۲} + ۱$$

برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای درونیاب مربوط به نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ کافی است که جملهٔ زیر را به P(x) قبلی اضافه کنیم :

$$(x - ۱)(x - ۲)(x - ۳) \times (-۱)$$

از این‌رو، چندجمله‌ای مطلوب عبارت است از:

$$P(x) = -x^{۳} + ۷x^{۲} - ۱۱x + ۷$$

مشاهده می‌شود که برخلاف روش چندجمله ایهای لاگرانژ، یکی از محاسن روش تفاضلات تقسیم شده برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب آن است که چندجمله‌ای را به‌تدریج محاسبه می‌کند و با اضافه کردن نقطه یا نقاطی به جدول، محاسبات قبلی تماماً به‌کار می‌روند. ضمناً درجهٔ چندجمله‌ای نیز از روی جدول تفاضلات قابل پیش‌بینی است.