تکلیف سری چهارم

درس مبانی نظریه محاسبه
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. بهار ۱۴۰۲

۱. برای زبان A یک ماشین تورینگ ارائه کنید.

$$A = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$$

بطور خلاصه ایده کار مانند راه حل ماشین تورینگ برای زبان $\{a^n b^m c^z \mid n \times m = z\}$ است. اگر a^m رشته ورودی باشد، هر بار یک i جدید را امتحان می‌کنیم و چک می‌کنیم آیا $m = i \times i$ ؟ اگر درست بود، رشته ورودی را می‌پذیریم و در غیر اینصورت $i + 1$ را امتحان می‌کنیم. می‌توانیم تا $i = m$ جلو برویم. پس مانند این است که زبان $\{a^m b^i c^i \mid i \times i = m\}$ را برای $i = 1$ تا $i = m$ تشخیص می‌دهیم.

۲. جدول زیر تابع انتقال وضعیت δ یک ماشین تورینگ را توصیف می‌کند. ستون اول جدول، اندیس وضعیتها را نشان می‌دهد. ماشین ابتدا در وضعیت 0 قرار دارد. مطابق معمول، R نشان دهنده حرکت نوک خواندن/نوشتن به سمت راست و L نشان دهنده حرکت به سمت چپ است. حرف N در اینجا نشان دهنده ماندن نوک در جای خود است. عبارت stop هم به معنی توقف ماشین است. اگر در لحظه توقف ماشین در وضعیت 0 باشد رشته ورودی را پذیرفته است در غیر این صورت رشته پذیرفته شده نیست.

δ	a	b	c	$\sqcup$
0	$(1, \sqcup, R)$	$(5, b, N)$	$(10, c, N)$	stop
1	$(2, a, R)$	$(5, \sqcup, R)$	stop	$(1, \sqcup, R)$
2	$(2, a, R)$	$(3, \sqcup, L)$	stop	$(2, \sqcup, R)$
3	$(4, a, L)$	stop	stop	$(3, \sqcup, L)$
4	$(4, a, L)$	stop	stop	$(0, \sqcup, R)$
5	stop	$(6, \sqcup, R)$	stop	$(0, \sqcup, N)$
6	stop	$(7, b, R)$	$(10, \sqcup, R)$	$(7, \sqcup, R)$
7	stop	$(7, b, R)$	$(8, \sqcup, L)$	$(7, \sqcup, R)$
8	stop	$(9, b, L)$	stop	stop
9	stop	$(9, b, L)$	stop	$(5, \sqcup, R)$
10	stop	stop	stop	$(0, \sqcup, N)$

الف) دنباله پیکربندی های ماشین موقع پردازش رشته abbc را بنویسید.

$$0\, abbc \rightarrow \sqcup\, 1\, bbc \rightarrow \sqcup\sqcup\ 5\, bc \rightarrow \sqcup\sqcup\sqcup\, 6\, c \rightarrow \sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\ 10 \rightarrow \sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\ 0$$

ب) کدامیک از این رشته‌ها توسط این ماشین پذیرفته می‌شود؟

ab, bc, abc, abbc, aabbbc, aabbbcc

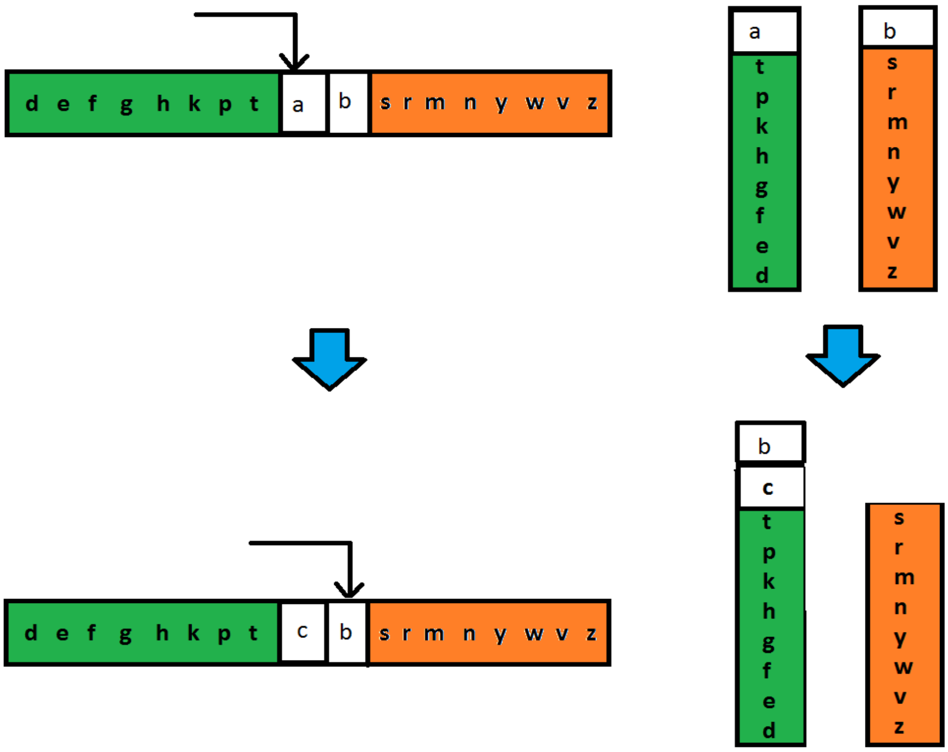
ab, bc, abbc, aabbbc

ج) حدس می زنید این ماشین چه زبانی را می پذیرد؟

۳. نشان دهید ماشین پشته‌ای با ۲ پشته می‌تواند ماشین تورینگ را شبیه‌سازی کند.

یک پیکربندی ماشین تورینگ را در نظر بگیرید. فرض کنید نوک خواندن نوشتن روی حرف a قرار دارد. به شکل زیر دقت کنید. قسمت سمت چپ نوک، با رنگ سبز نشان داده شده است و قسمت سمت راست نوک با رنگ نارنجی. این وضعیت را می‌توان با دو پشته مدل کرد. سمت چپ شکل زیر را ببینید. پشته اول محتوای سمت چپ نوار را ذخیره کرده و پشته نارنجی محتوای سمت راست نوک خواندن و نوشتن را ذخیره کرده است.

فرض کنید نوک به سمت راست حرکت می‌کند و محتوای خانه قبلی را از a به c تغییر می‌دهد. مانند این است که حرف بالای پشته سبز رنگ را به c تغییر دهیم و حرف b را بالای آن درج کنیم. علاوه بر این حرف b را از بالای پشته نارنجی برمی‌داریم.



۴. ثابت کنید که زبان $\{\langle N\rangle \mid L(N) = \Sigma^*$ توصیف یک ماشین متناهی نامعین است و $N\}$ تصمیم پذیر است.

ماشین نامعین N را به ماشین معین M تبدیل می‌کنیم. سپس ماشین متمم $\overline{M}$ را می‌سازیم. اگر زبان $\overline{M}$ تهی بود یعنی $L(N) = \Sigma^*$ در غیر اینصورت رشته‌ای هست که N نمی‌پذیرد. چک کردن تهی بودن زبان یک ماشین متناهی را قبلا در کلاس توضیح داده‌ایم.

۵. نشان دهید زبان زیر تصمیم پذیر نیست.

$$B = \{\langle M\rangle \mid L(M) = (010)^* \text{ یک ماشین تورینگ است و } M\}$$

زبان $HALT$ را به B تقلیل می‌دهیم. فرض کنید الگوریتم R را داریم که مسئله B را حل می‌کند. الگوریتم R به ما می‌گوید ماشین تورینگ M زبانش برابر با $(010)^*$ هست یا نه. با استفاده از الگوریتم R می‌خواهیم مسئله $HALT$ را حل کنیم. در مسئله $HALT$ ماشین تورینگ M و رشته w را به ما داده‌اند و سوال این است که آیا M روی w متوقف می‌شود یا نه.

با استفاده از M و w ماشین تورینگ M' را می‌سازیم. ماشین تورینگ M' ابتدا M را روی w اجرا می‌کند و سپس اگر رشته ورودی به فرم $(010)^*$ باشد به حالت $accept$ می‌رود، در غیر این صورت به حالت $reject$ می‌رود. واضح است اگر M روی w متوقف شود، زبان M' برابر با $(010)^*$ خواهد بود. اگر M روی w متوقف نشود، زبان M' تهی خواهد بود. این برای اثبات کافی است.

۶. نشان دهید زبان زیر تصمیم پذیر نیست.

$$C = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid L(M_1) \subseteq L(M_2), \quad \text{ماشینهای تورینگ هستند } M_2 \text{ و } M_1\}$$

زبان E_{TM} را به C تقلیل می‌دهیم. ماشین M_2 را جوری طراحی می‌کنیم که زبان آن تهی باشد. حال $L(M_1) \subseteq L(M_2)$ اگر و فقط اگر $L(M_1) = \emptyset$. این برای اثبات کافی است.