درونیابی معکوس

تا کنون با معلوم بودن x مقدار $f(x)$ را برآورد کردیم. اگر منظور تخمین مقداری از x باشد به طوری که $f(x)$ مقدار معلومی داشته باشد این کار درونیابی معکوس نامیده می‌شود.

به عنوان کاربرد می‌توان ریشه‌های $f(x)=0$ را به وسیلهٔ درونیابی معکوس تخمین زد، به این ترتیب که x ی را به دست می‌آوریم که $f(x)$ برابر صفر باشد.

همچنین اگر جمعیت را در فاصله زمانهای معینی داشته باشیم و بخواهیم حدود سالی را تعیین کنیم که جمعیت تعداد مشخصی باشد از درونیابی معکوس استفاده می‌شود.

در اینجا صرفاً یک روش برای تخمین x، به کمک داشتن $f(x)$، با استفاده از روش تفاضلات تقسیم شده ارائه می‌کنیم:

تبدیل درونیابی معکوس به درونیابی مستقیم

اگر $y=f(x)$ و f تابع معکوس داشته باشد داریم: $x=f^{-1}(y)$

لذا، به جای جدول

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

می‌توان جدول زیر را در نظر گرفت:

f_i	f_0	f_1	f_2	...	f_n
x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n

با توجه به این که معمولاً فاصلهٔ f_i ها یکسان نیست و انتخاب آنها نیز در اختیار ما نیست نمی‌توان از فرمولهای پیشرو و پسرو نیوتن استفاده کرد. از این‌رو، تنها روش مؤثر که همواره قابل استفاده است جدول تفاضلات تقسیم شده است که در آن نقش x_i ها و f_i ها عوض شده است.

مثال

جدول زیر در مورد تابع $f(x) = \sin x$ در دست است. x ی را تعیین کنید که به ازای آن $f(x) =$ ۰/۲.

x_i	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°
f_i	۰	۰/۱۷۳۶	۰/۳۴۲۰	۰/۵	۰/۶۴۲۸	۰/۷۶۶۰

حل: جدول تفاضلات تقسیم شدهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم، توجه کنید که $f(x)$ها طوری قرارگرفته‌اند که $|f(x) -$ ۰/۲$|$ صعودی باشد، این عمل برای کم کردن خطای گرد کردن لازم است و باید همیشه صورت گیرد.

f_i	x_i	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
۰/۱۷۳۶	۱۰					
		۵۹/۳۸				
۰/۳۴۲۰	۲۰		۵/۱۸			
		۵۸/۴۸		۱۳/۶۰		
۰	۰		۹/۶۲		۱۳/۳۸	
		۶۰/۰۰		۱۹/۸۸		۳۴/۸۶
۰/۵	۳۰		۱۵/۶۰		۳۴/۰۳	
		۷۰/۰۳		۳۴/۳۱		
۰/۶۴۲۸	۴۰		۴۱/۸۸			
		۸۱/۱۷				
۰/۷۶۶	۵۰					

با استفاده از قضیه درونیابی داریم:

$$
\begin{aligned}
x \simeq\ & ۱۰ + (۰/۲-۰/۱۷۳۶) \times ۵۹/۳۸ + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰) \times ۵/۱۸ \\
& + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰)(۰/۲-۰) \times ۱۳/۶۰ \\
& + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰)(۰/۲-۰)(۰/۲-۰/۵) \times ۱۳/۳۸ \\
& + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰)(۰/۲-۰)(۰/۲-۰/۵)(۰/۲-۰/۶۴۲۸) \times ۳۴/۸۶ \\
=\ & ۱۰ + ۱/۵۶۷۶ - ۰/۰۱۹۴ - ۰/۰۱۰۲ + ۰/۰۰۳۰ - ۰/۰۰۳۵ \\
=\ & ۱۱/۵۳۷۵
\end{aligned}
$$

بنابراین، جواب تقریباً ۱۱/۵۳۷۵ درجه است. برای تست جواب فوق می توانیم به وسیلهٔ درونیابی مستقیم مقدار $f(۱۱/۵۳۷۵)$ را برآوردکنیم.

مثال

جدول زیر مفروض است. تخمینی از ریشه این تابع را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۱/۵	−۱	۲/۵	۱۵

حل: جدول تفاضلات زیر را با توجه به فاصلهٔ f_i ها تا صفر تشکیل می‌دهیم.

f_i	x_i	اول	دوم	سوم
−۱	۱			
		۲		
−۱/۵	۰		−۰/۴۲۸۶	
		۰/۵		۰/۰۲۵۲
۲/۵	۲		−۰/۰۲۵۵	
		۰/۰۸		
۱۵	۳			

بنابراین،

$$\begin{aligned} x &\simeq ۱ + (۰+۱)\times ۲ + (۰+۱)(۰+۱/۵)\times(-۰/۴۲۸۶) \\ &+ (۰+۱)(۰+۱/۵)(۰-۲/۵)\times ۰/۰۲۵۲ \\ &= ۱+۲ - ۰/۶۴۲۹ - ۰/۰۹۴۵ \\ &= ۲/۲۶۲۶ \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که جواب به دست آمده بسیار نادقیق است، زیرا ۱−=(۱)f و ۲/۵=(۲)f و ریشه باید بین ۱ و ۲ باشد نه بیش از ۲.

علت این امر آن است که فاصلهٔ بین xهای جدول زیاد است. در صورتی که فاصله بین xها را کمتر بگیریم دقت جواب زیاد خواهد شد.