برهان به‌روش عکس نقیض

گاه برای این‌که نشان دهیم گزاره q از گزاره p نتیجه می شود (یعنی $p \longrightarrow q$) می توانیم این نتیجه گیری را به صورتی ساده تر انجام دهیم. یعنی از هم ارز منطقی آن، $\sim q \longrightarrow \sim p$ استفاده کنیم و $\sim p$ را از $\sim q$ نتیجه بگیریم.
برای تشریح این روش به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱.۰.۰. فرض کنید n عددی صحیح و بزرگتر از یک باشد به طوری که به صورت مربع کامل نباشد. نشان دهید $\sqrt{n}$ عددی گویا نیست.
منظور از این که n مربع کامل نیست این است که هیچ عدد طبیعی‌ای مانند k وجود ندارد به‌طوری که $n = k^۲$.
همچنین یک عدد n را گویا می نامند هرگاه بتوان آن‌را به صورت $n = \frac{p}{q}$ که p, q اعدادی صحیح‌اند نوشت. می توان p و q را چنان انتخاب کرد که نسبت به هم اول باشند.
حل : روایت عکس نقیض گزاره بالا به صورت زیر است:
اگر $\sqrt{n}$ عددی گویا باشد آنگاه n به صورت مربع کامل است.
فرض کنیم $\sqrt{n}$ عددی گویا است.
پس اعداد صحیح p و q، که $q \neq ۰$ وجود دارند به طوری که $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$.
آنگاه $n = \frac{p^۲}{q^۲}$ و یا $p^۲ = nq^۲$.
بنابراین $q^۲$ عدد $p^۲$ را بخش می‌کند.
اما از اینجانتیجه می شود q عدد p را بخش می کند. یعنی یک عدد صحیح b وجود دارد به طوری که $p = bq$.
بنابراین $p^۲ = b^۲q^۲$.
درنتیجه $n = b^۲$. این ناقض فرض «مربع کامل نبودن» است.

مثال ۲.۰.۰. فرض کنید a و b اعدادی صحیح با $a \neq ۰$ هستند. اگر a عدد b را بخش نکند، آنگاه معادله $ax^۲ + bx + b - a = ۰$ هیچ جواب صحیح مثبتی ندارد.
حل: فرض کنید x عددی صحیح و مثبت است که $ax^۲ + bx + b - a = ۰$.
آنگاه $x = \frac{-b \pm (b-۲a)}{۲a}$.
چون $x > ۰$ پس جواب $\frac{-b+b-۲a}{۲a} = -۱$ قابل قبول نیست ولی $x = \frac{-b-(b-۲a)}{۲a} = ۱ - \frac{b}{a}$ قابل قبول است.
به این ترتیب $b = (۱ - x)a$ و درنتیجه a عدد b را بخش می کند.

مثال ۳.۰.۰. فرض کنید عدد x چنان باشد که برای هر $\varepsilon > ۰$، نتیجه شود $x \geq -\varepsilon$. نشان دهید $x \geq ۰$.
حل: اگر بخواهیم عکس نقیض گزاره بالا را بنویسیم به صورت زیر خواهد بود:

$$x < ۰ \Longrightarrow \exists \varepsilon > ۰ \quad \text{s.t.} \quad x < -\varepsilon.$$

فرض کنیم $x < ۰$. چون $\frac{۱}{۲} < ۱$ از ضرب طرفین این نامساوی در x نتیجه می شود $x < \frac{۱}{۲}x = -(\frac{-x}{۲})$. چون $x < ۰$ پس $-\frac{x}{۲} > ۰$ و کافی است قرار دهیم $\varepsilon = -\frac{x}{۲}$.

مثال ۴.۰.۰. می دانیم تابع $f : A \longrightarrow B$ تابعی یک‌به‌یک است هرگاه از $f(x) = f(y)$ نتیجه شود $x = y$.
اما گاه حل کردن معادله $f(x) = f(y)$ و به دست آوردن جواب $x = y$ از آن، دشوارتر است. اما از $x \neq y$ ساده‌تر می توان نتیجه گرفت $f(x) \neq f(y)$.
مثلاً فرض کنید بخواهیم نشان دهیج تابع $f(x) = ۱۰^x$ تابعی یک به یک است. طبق تعریف باید از $۱۰^x = ۱۰^y$ نتیجه بگیریم $x = y$. ولی روشن است که اگر $x \neq y$ آنگاه $۱۰^x \neq ۱۰^y$.

توضیح دهید چرا نتایج زیر درست‌اند؟

(۱) فرض کنید p, q دو گزاره باشند. طبق قانون جمع می دانیم $p \Longrightarrow p \vee q$. همچنین $q \Longrightarrow p \vee q$. عکس نقیض هریک از این دو گزاره را بنویسید. این دو نتیجه یادآور چه نتیجه‌ای هستند؟

(۲) می دانیم اگر p یک عدد اول باشد و a, b دوعدد صحیح باشند آنگاه از $p \mid ab$ نتیجه می شود $p \mid a$ یا $p \mid b$. از طرف دیگر اگر p هیچ کدام از دو عدد a, b را بخش نکند آنکاه حاصل‌ضرب آنها را نیز بخش نخواهد کرد.

(۳) می دانیم اگر تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطه a مشتق‌پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته است. نشان دهید تابع جزء صحیح $f(x) = [x]$ در هر نقطه از $\mathbb{Z}$ مشتق‌پذیر نیست.

(۴) به جای گزاره $p \Leftrightarrow q$ می توان گزاره $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ را به اثبات رساند.

(۵) برای این که نشان دهیم A زیر مجموعه B است نشان می دهیم هر عضو که در b نیست در A هم نیست. آیا از این شیوه استدلال می توانید نتیجه بگیرید مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای است؟

(۶) برای هر دوعدد a, b داریم

$$(ab = \circ \Longrightarrow a = \circ \vee b = \circ) \Leftrightarrow (a \neq \circ \wedge b \neq \circ \Longrightarrow ab \neq \circ)$$

(۷) برای یافتن جواب یک معادله به صورت $(x-a)(x-b) = \circ$ می دانیم

$$(x-a)(x-b) = \circ \Longrightarrow x = a \vee x = b \Leftrightarrow x \neq a \wedge x \neq b \Longrightarrow (x-a)(x-b) \neq \circ.$$