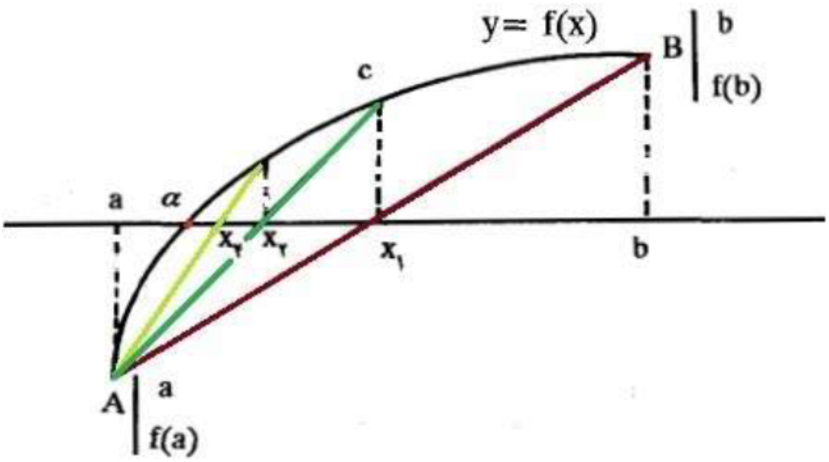
روش نابه‌جایی

در این روش فرض می کنیم f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)\ f(b)<0$ و معادلهٔ $f(x)=0$ تنها یک ریشه در (a,b) داشته باشد برای تعیین تقریبی ازاین ریشه، که آن را α می‌نامیم، چنین عمل می‌کنیم:

گرچه منحنی نمایش $y= f(x)$ بین دو نقطه A و B یک خط مستقیم نیست، اما اگر A و B را با یک خط مستقیم به هم وصل کنیم، محل تلاقی آن با محور x ها، نقطه‌ای به طول x_1 را می‌دهد که تقریبی از α است. سپس x_2 ، x_3 و... را به همین ترتیب، مطابق شکل، به‌دست می‌آوریم.



برای تعیین مقدار x_1 بر حسب مختصات A و B معادلهٔ خط AB را می‌نویسیم و آن رابا محور x ها قطع می‌دهیم:

معادلهٔ خط AB:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نقطهٔ تلاقی این خط با محور x ها نقطه‌ای به مختصات $(x_1, 0)$ است، در نتیجه:

$$\frac{0 - f(a)}{x_1 - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

که پس از ساده کردن، فرمول روش نابه‌جایی به‌دست می‌آید:

$$x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

اکنون برای تعیین x_2 ، مشابه روش دوبخشی، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

I. اگر $f(a)f(x_1)<0$ آن‌گاه ریشه در (a,x_1) است. لذا، در فرمول به‌جای b قرار می‌دهیم x_1 (از سه نقطهٔ a و b و x_1، نقطهٔ b نابه‌جاست) و x_2 را حساب می‌کنیم. به عبارت دیگر:

$$x_2 = \frac{a f(x_1) - x_1 f(a)}{f(x_1) - f(a)}$$

II. اگر $f(a)f(x_1) > 0$ ریشه در (x_1,b) است لذا، در فرمول به‌جای a قرار می‌دهیم x_1 و و x_2 از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

III. اگر $f(a)\ f(x_1) = 0$ آنگاه x_1 ریشه معادله است.

به این ترتیب دنباله‌ای از اعداد حاصل می‌شود که چون در بازه‌هایی قرار دارند که طول آنها مرتباً کوچک می‌شود همیشه همگراست.

روش نابجایی شبیه روش دوبخشی است، تنها تفاوت مربوط به محاسبهٔ x است:

$$\boxed{x \leftarrow \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}}$$

مثال

تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $3xe^x = 1$ را که در $(0/25 , 0/27)$ قرار دارد، به روش نابه‌جایی، تا سه رقم اعشار درست حساب کنید.

$$f(x) = 3x - e^{-x} = 0$$

$$x_1 = \frac{0/25 \times 0/0466 - 0/27 \times (-0/0288)}{0/0466 - (-0/0288)} = 0/2577$$

چون، $f(x_1) = 0/0003$ ریشه در $(0/25 , 0/2577)$ است و

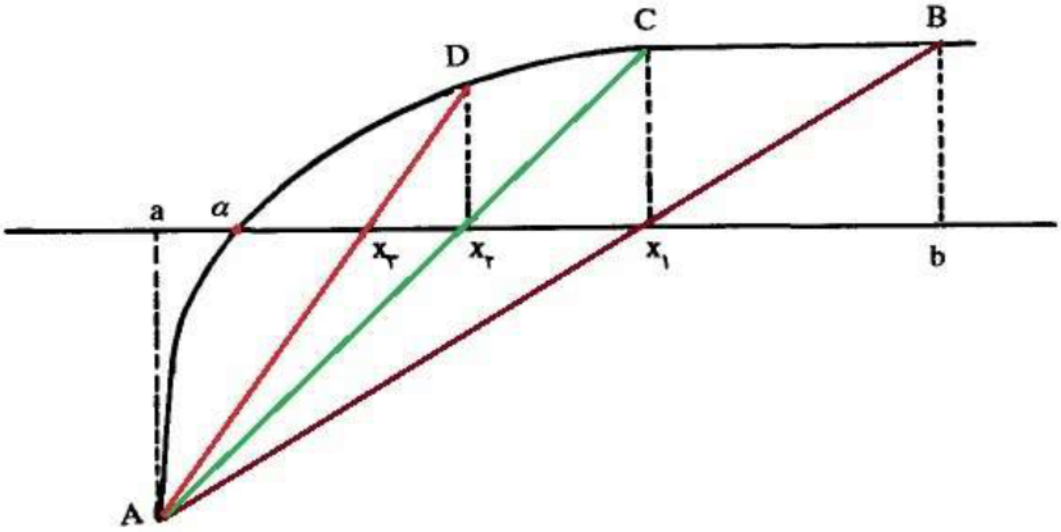
$$x_2 = \frac{0/25 \times 0/0003 - 0/2577 \times (0/0288)}{0/0003 - (0/0288)} = 0/2576$$

بنابراین، ریشه تا سه رقم اعشار درست برابر $0/258$ است.

خصوصیات روش نابه‌جایی

روش نابه‌جایی، همانند روش دوبخشی، همگراییِ تضیمن شده دارد و عموماً سریعتر از روش دوبخشی است. البته، عملیات این روش بیش از روش دوبخشی است (دو برابر و نیم).

اما، اگر x_i ها همگی در یک طرف ریشه باشند همگرایی می‌تواند کندتر از روش دوبخشی باشد.



برای رفع این اشکال تغییراتی در این روش داده می‌شود تا همگرایی سرعت پیدا کند.

وقتی در دو تکرار متوالی یک نقطه ثابت بماند (در اینجا نقطهٔ A) برای تکرار بعدی به جای اینکه نقطهٔ D به A وصل شود تا x_3 حاصل شود، نقطهٔ D به نقطهٔ E، که عرض آن نصف عرض نقطهٔ A است، وصل می‌شود تا x'_3 به‌دست آید. واضح است که x'_3 به α نزدیکتر است تا x_3.

سپس مجدداً F را به G، وسط Ea، وصل می‌کنیم تا نقطهٔ بعدی حاصل شود.