سری دوم تمرینات
استدلال قیاسی
تاریخ تحویل، ۱۰ روز بعد از تاریخ تعیین شده در زیر

توضیح و مثال: در اغلب مسایل ریاضی عمدتاً از سه قاعده استنتاج

قیاس استثنایی	$[(p \Longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$
قیاس دفع	$[(p \Longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$
رابطه تعدی	$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$

استفاده می کنیم. البته قواعد استنتاج دیگر هم هستند ولی این سه مهمترین آنها هستند. بنابراین، راهنمای ما برای نوشتن استدلال به این صورت است که باید ترتیب گزاره ها را طوری قرار دهیم تا بتوانیم از این قواعد استفاده کنیم.

در این تمرین ها باید بررسی کنید آیا هر یک از گام های استدلال گزاره ای راست است و یا این که گزاره سوم، طبق قاعده قیاس استثنایی از مقایسه دو گام اول به دست آمده است.

مثال:

(الف) فرض کنید x, y اعدادی حقیقی هستند. در استدلال زیر، جمله های (۱) و (۲) صحیح هستند. می خواهیم ببینیم نتیجه (۳) به درستی از دوجمله (۱) و (۲) نتیجه شده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

(۱) اگر $x > ۵$ آنگاه $y < \frac{۱}{۵}$.
(۲) می دانیم $y = ۱$.
(۳) آنگاه $x \leq ۵$.

پاسخ: نتیجه گیری (۳) درست است زیرا

$$x > ۵ \longrightarrow y < \frac{۱}{۵} \equiv \sim (y < \frac{۱}{۵}) \longrightarrow \sim (x > ۵)$$
$$\equiv \quad (y \geq \frac{۱}{۵}) \longrightarrow (x \leq ۵)$$

اما در (۲) فرض شده $y = ۱$ که بزرگتر از یک است. پس بنابرقیاس استثنایی $x \leq ۵$.

(ب) فرض کنید M, n اعدادی حقیقی هستند. در استدلال زیر، جمله های (۱) و (۲) صحیح هستند. می خواهیم ببینیم نتیجه (۳) به درستی از دوجمله (۱) و (۲) نتیجه شده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

(۱) اگر $n > M$ آنگاه $n^۲ > M^۲$.
(۲) می دانیم $n < M$.
(۳) بنابراین $n^۲ \leq M^۲$.

نتیجه گیری (۳) براساس دو نتیجه (۱) و (۲) درست نیست. زیرا هیچ ارتباط مقایسه ای بین (۱) و (۲) وجود ندارد. به عنوان مثال $n = -۵ < M = -۱$ ولی $n^۲ = ۲۵ > M^۲ = ۱$.

با توجه به مثال های بالا تعیین کنید کدامیک از مثال های زیر، سطر (۳) نتیجه منطقی دو سطر (۱) و (۲) است.

(a) فرض کنید x, y, z اعدادی حقیقی اند.

(۱) اگر $x>y$ و $y>\circ$ آنگاه $z>y$.
(۲) می دانیم $z\leq y$.
(۳) آنگاه $x\leq y$ یا $y\leq \circ$.

پاسخ: بله. در اینجا گام سوم استدلال نتیجه عکس نقیض بند ۱ (که فرض شده گزاره ای درست است) و مقایسه عکس نقیض با بند دوم است که بنابر قاعده قیاس استثنایی، نتیجه گیری ای درست است.

(b) فرض کنید n عددی طبیعی است.

(۱) اگر n بر ۵ بخش پذیر نباشد، آنگاه مانده تقسیم n بر ۵ برابر یکی از اعداد ۱، یا ۲ یا ۳ یا ۴ است.
(۲) می دانیم مانده تقسیم n بر ۱۵ برابر ۳ است و n بر ۳ بخش پذیر نیست.
(۳) مانده تقسیم n بر ۵ برابر ۳ است.

پاسخ: چون $n=۱۵k+۳$ و ۳، سمت راست را عاد می کند پس سمت چپ، یعنی n را نیز باید عاد کند.
اما این غیر ممکن است زیرا بنابرفرض (۱) n بر ۳ بخش پذیر نیست.
بنابراین شرط (۲) نادرست است و نمی تواند برای استنتاج (۳) مورد استفاده قرار بگیرد.

(c) فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد.

(۱) می دانیم اگر f پیوسته باشد آنگاه f کراندار است (یعنی یک $M\in\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که برای هر $x\in[a,b]$، $|f(x)|<M$.
(۲) f روی این بازه کراندار نیست.
(۳) f در یک نقطه از این بازه پیوسته نیست.

به یاد بیاورید تابع f را روی $[a,b]$ پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.
عکس نقیض (۱) عبارت است از:
اگر f کراندار نباشد آنگاه تابع f در یک نقطه از بازه $[a,b]$ پیوسته نیست.
چون در (۲) فرض شده f کران دار نیست، پس بنابر قاعده قیاس استثنایی یک نقطه $c\in[a,b]$ وجود دارد که f در این نقطه پیوسته نیست.

(d) فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد.

(۱) فرض کنید تابع f در نقطه $c\in[a,b]$ و $d\in[a,b]$ مقدارهای ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می کند.
(۲) f تابعی پیوسته است ولی لزوماً مشتق پذیر نیست.
(۳) $f'(c)=\circ$ و $f'(d)=\circ$.

می دانیم اگر $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد و در نقطه c دارای ماکسیمم یا مینیمم باشد آنگاه $f'(c)=\circ$. اما عکس این نتیجه درست نیست. همان طورکه در زیر این را می توان ملاحظه کرد.

بند (۳) اساساً نادرست است زیرا وقتی در (۲) فرض می کنیم تابع در c یا d مشتق پذیر نیست، پس $f'(c)$ یا $f'(d)$ را هم نمی توانید محاسبه کنید چه برسد به این که بگوییم مقدارش صفر است.

(e) می دانیم برای هر عدد صحیح t، اعداد $a=t^۲-۱$، $b=۲t$ و $c=t^۲+۱$ در تساوی $a^۲+b^۲=c^۲$ صدق می کنند. این اعداد را سه تایی های فیثاغورثی می نامند.

(۱) می دانیم a بر ۵ بخش پذیر نیست.

(۲) می دانیم b نیز بر ۵ بخش پذیر نیست.

(۳) آنگاه c بر ۵ بخش پذیر است.

پاسخ این سوال این است که بند سوم نتیجه دو بند دیگر است. برای این که این را ببینیم، می دانیم مانده تقسیم یک عدد صحیح بر ۵ یا صفر است یا یک است یا ۲ یا ۳ و یا ۴ است. وقتی این عدد به توان ۲ می رسد، مانده تقسیم بر ۵ حاصل یا صفر است یا $+۱$ یا $-۱ \equiv ۴ \mod ۵$.
چون a بر ۵ بخش پذیر نیست

(الف) $a = t^۲ - ۱ \equiv ۱(\mod ۵) \Longrightarrow t^۲ \equiv ۲(\mod ۵)$
که این غیر ممکن است زیرا $t^۲ \equiv \pm ۱(\mod ۵)$.

(ب) $a = t^۲ - ۱ \equiv ۲(\mod ۵) \Longrightarrow t^۲ \equiv ۳(\mod ۵)$
این نیز غیر ممکن است زیرا $t^۲ \equiv \pm ۱(\mod ۵)$.

(پ)

$$\begin{aligned} a =& t^۲ - ۱ \equiv ۳(\mod ۵) && \Longrightarrow \\ & t^۲ \equiv ۴(\mod ۵) && \Longrightarrow \\ & t^۲ + ۱ \equiv ۵(\mod ۵) && \Longrightarrow \\ & t^۲ + ۱ \equiv ۰(\mod ۵) && \Longrightarrow \\ & ۵ \mid a = t^۲ + ۱. \end{aligned}$$

(ت) $a = t^۲ - ۱ \equiv ۴(\mod ۵) \Longrightarrow t^۲ \equiv ۵(\mod ۵) \equiv ۰(\mod ۵)$
که این یعنی $۵ \mid t^۲$ و یا $۵ \mid t$.
که این نیز غیر ممکن است زیرا بنابر (۲) $۵ \nmid ۲t$ و چون ۵ یک عدد اول است پس $۵ \nmid t$.

تاریخ تهیه این پاسخ ها: ۲۶ آبان ۱۴۰۲