سلام

سوالی که پیش می آید این است که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، مجموعه توانی آن $P(A)$ چند عضو دارد؟

در پایین یک رابطه بین مجموعه زیر مجموعه های A و مجموعه دنباله های صفر و یک برقرار می کنیم به طوری که این رابطه به هر زیر مجموعه A یک و فقط یک دنباله n تایی از صفر و یک ها نظیر می کند و به هر دنباله به طول n از صفر و یک ها یک و فقط یک زیر مجموعه از A نظیر می کند و به این ترتیب تعداد عناصر $P(A)$ پیدا می کنیم.

به عبارت دیگر از طریق یک رابطه بین محموعه $\{a_1a_2\ldots a_n \mid a_i = 0$ یا $1\}$ و $P(A)$ تعداد عناصر $P(A)$ را می شماریم.

قضیه ۰.۱ اگر A از n عنصر نشکیل شده باشد، آنگاه مجموعه توانی $P(A)$ دقیقاً از 2^n عنصر تشکیل شده است.

اثبات. به استقرا درستی حکم بالا را نشان می دهیم.

بدیهی است که اگر $A = \phi$ آنگاه تعداد عناصر برابر $1 = 2^0$ است.

پس فرض می کنیم A تهی نباشد. اعضای آن را می توانیم به صورت $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ بنویسیم. یک عنصر A مانند a_k را درنظر می گیریم. هر زیر مجموعه A یا این را دارد یا به آن تعلق ندارد. بنابراین، مساله یافتن تعداد زیر مجموعه های A برمی گردد به این که n مربع خالی که از ۱ تا n شماره گذاری شده داریم. بسته به اینکه آیا عضو a_k در زیر مجموعه B هست یانه؟ در مربع k ام عدد ۱ را قرار می دهیم هرگاه $a_k \in B$ و صفر قرار می دهیم هرگاه $a_k \notin B$. به عبارت دیگر

$$\textbf{مقدار خانه } k \textbf{ ام} = \begin{cases} 1 & a_k \in B \ \textbf{اگر} \\ 0 & a_k \notin B \ \textbf{اگر} \end{cases}$$

۱	۲	۳	۴	۵	۶		$n-1$	$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
۱ یا ۰	۱ یا ۰	۱ یا ۰	۱ یا ۰	۱ یا ۰	۱ یا ۰	$\cdots$	۱ یا ۰	۱ یا ۰	۱ یا ۰	۱ یا ۰	۱ یا ۰	۱ یا ۰

توزیع عناصر B در جدول بالا

به این ترتیب چون تعداد دنباله های اعدادی متشکل از صفر و یک ها برابر ۲^n است، پس تعداد زیر مجموعه های A حداقل برابر ۲^n است. از طرف دیگر هر دنباله از صفر و یک ها به طول n، یک و فقط یک زیر مجموعه از A را تعیین می کند بنابراین تعداد این چنین دنباله هایی ، که برابر ۲^n است،حداقل برابر تعداد زیر مجموعه های A است. به این ترتیب $P(A)$ دارای ۲^n عضو است. $\square$