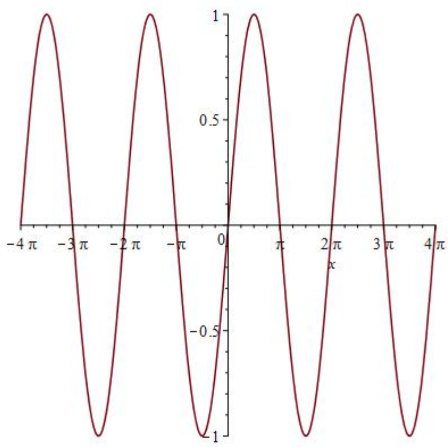
نگاره و نگاره وارون یک مجموعه

وقتی یک معادله را حل می‌کنیم گاه می توان به کمک آن معادله یک تابع تعریف کرد و مجموعه جوابهای معادله را با پیش نگاره این تابع در یک نقطه خاص یا روی یک مجموعه یکی گرفت. به عنوان مثال، مجموعه جواب معادله $\sin x = \circ$ را می توان به عنوان پیش نگاره مجموعه $\{\circ\}$ تحت تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ که با $f(x) = \sin x$ تعریف می شود، در نظر گرفت.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x), f^{-1}(\circ) = \{x \in \mathbb{R} | \sin x = \circ\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$



شکل ۱: نمودار تابع سینوس

طبیعی است که اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و x, y به ترتیب عنصرهایی از Xو Y باشند به قسمی که $y = f(X)$، آنگاه y نگاره x است، و x یک پیش نگاره y است. این مفهوم طبعاً از عنصرها به زیر مجموعه ها، به صورت زیر تعمیم می یابد. در این بخش می خواهیم ضمن تعریف نگاره یک مجموعه تحت یک تابع و تعریف پیش نگاره یک مجموعه تحت یک تابع، نگاره اجتماع یک خانواده از زیر مجموعه ها را برحسب اجتماع نگاره ها بنویسیم. همچنین پیش نگاره یک خانواده تحت یک تا بع را به صورت اجتماع پیش نگاره ها بنویسیم.

تعریف ۱. گیریم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع، و A ، B به ترتیب زیر مجموعه هایی از X و Y باشند.

(الف) نگاره A تحت f، که با $f(A)$ نشان داده می شود، مجموعه تمام نگاره های $f(x)$ است به قسمی که $x \in A$.

(ب) نگاره وارون B تحت f، که با $f^{-1}(B)$ نشان داده می شود، مجموعه تمام پیش نگاره های y های متعلق به B است.

با استفاده از نماد مجموعه ساز، $f(A)$ و $f^{-1}(B)$ با عبارتهای زیر بیان می شود:

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in A | f(x) \in B\}$$

مفاهیم نگاره یک مجموعه $A \subseteq X$ تحت یک تابع f و پیش نگاره یک مجموعه $B \subseteq Y$ تحت f یکی از ابزارهای اساسی در مطالعه یک تابع است. در واقع این دو مفهوم باعث محدودتر کردن دامنه عمل یک تابع و در نتیجه شناخت بهتر آن تابع می شود.

برای تشریح بیشتر این مفهوم به مثال های زیر توجه نمایید.

مثال ۲. ۱. فرض کنیم A و B دو مجموعه ناتهی و $b \in B$ یک عضو ثابت B باشد. آنگاه تابع $C_b : A \longrightarrow B$ به طوری که $C_b(a) = b, \quad \forall a \in A$، آنگاه

$$C_b(A) = \{b\}$$

$$C_b^{-1}(b) = \{a \in A | C_b(a) = b\}$$

$$C_b^{-1}(c) = \varnothing, \quad \forall c \in B - \{b\}$$

۲. تابع علامت یا $Sign$ یا sgn از $\mathbb{R}$ به $\{-1, 0, 1\}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \quad \textbf{اگر} \\ 0 & x = 0 \quad \textbf{اگر} \\ 1 & x > 0 \quad \textbf{اگر} \end{cases}$$

روشن است که

$$A=(0,+\infty), \implies \mathrm{sgn}(A)=\{1\}$$

$$A_1=\{0\}, \implies \mathrm{sgn}(A_1)=\{0\}$$

$$A_2=(-\infty,0), \implies \mathrm{sgn}(A_2)=\{-1\}.$$

$$A_3=[0,+\infty), \implies \mathrm{sgn}(A_3)=\{0,1\},$$

$$A_4=\{-1\}\cup[0,+\infty), \implies \mathrm{sgn}(A_4)=\{-1,0,1\}$$

$$A_5=[-1,1], \implies \mathrm{sgn}(A_5)=\{-1,0,1\}.$$

$$\mathrm{sgn}^{-1}(\{1\})=(0,+\infty)$$

$$\mathrm{sgn}^{-1}(\{1,0\})=[0,+\infty)$$

$$\mathrm{sgn}^{-1}(\{1,0,1\})=\mathbb{R}.$$

لازم به توضیح است که در این جا $\mathrm{Dom(Sgn)}=\mathbb{R}$ است. ولی اگر Dom را به زیر مجموعه هایی از $\mathbb{R}$ محدود کنیم باز هم همین تابع را خواهیم داشت. مثلاً $\mathrm{sgn}:\mathbb{Z}\longrightarrow\{-1,0,1\}$ به صورت

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} -1 & x<0 \quad \textbf{اگر} \\ 0 & x=0 \quad \textbf{اگر} \\ 1 & x>0 \quad \textbf{اگر} \end{cases}$$

تعریف می شود. و

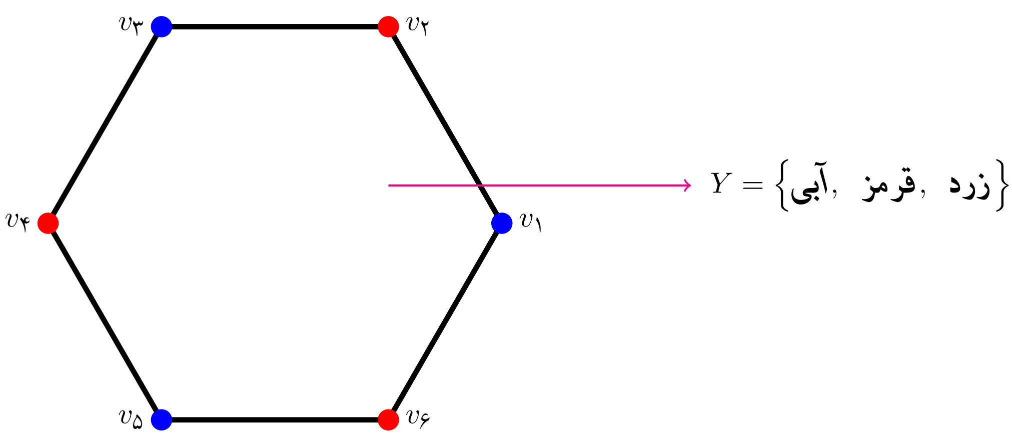
$$\mathrm{sgn}(\{2,4,6,8\})=\mathrm{sgn}(\{1,2,3,\dots\})=\{1\}\mathrm{sgn}^{-1}(\{1\}) \qquad =\{1,2,3,\dots\}$$

$$\mathrm{sgn}^{-1}(\{1,0\})=\{0,1,2,3,\dots\}$$

$$\mathrm{sgn}^{-1}(\{1,0,1\})=\mathbb{Z}.$$

۳. حال دوباره از تابع آشنای زیر برا تشریح نگاره و پیش نگاره یک تابع استفاده می کنیم.

$$f:V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}\longrightarrow\Big\{\textbf{آبی},\ \textbf{قرمز},\ \textbf{زرد}\Big\}$$



$$f(V) = \{f(x) | x \in V\} = \left\{\text{قرمز},\ \text{آبی}\right\}$$

$$f^{-1}(\{\text{زرد}\}) = \{x \in V | f(x) = \text{زرد}\} = \varnothing$$

$$f^{-1}(\{\text{قرمز}\}) = \{x \in V | f(x) = \text{قرمز}\} = \{v_2, v_4, v_6\}$$

$$f^{-1}(\{\text{آبی}\}) = \{x \in V | f(x) = \text{آبی}\} = \{v_1, v_3, v_5\}$$

$$f^{-1}(\{\text{زرد},\ \text{قرمز}\}) = \{x \in V | f(x) = \text{قرمز} \vee f(x) = \text{زرد}\} = \{v_2, v_4, v_6\}$$

$$f^{-1}(\left\{\text{زرد},\ \text{آبی}\right\}) = \{x \in V | f(x) = \text{آبی} \vee f(x) = \text{زرد}\} = \{v_1, v_3, v_5\}$$

توجه کنید که در دوسطر آخر چون هیچ راسی رنگ زرد ندارد پس $\{x | f(x) = \text{زرد}\} = \varnothing$.

قضیه ۳. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع است. آنگاه

الف) $f(\varnothing) = \varnothing$.

ب) $\forall x \in X, \quad f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

پ) اگر $A \subseteq B \subseteq X$، آنگاه $f(A) \subset f(B)$.

ت) اگر $C \subseteq D \subseteq Y$، آنگاه $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

اثبات. چون قضیه (۳) از تعریف (۱) نتیجه می شود، اثبات آن به آسانی انجام می گیرد و به عنوان تمرین واگذار می گردد. □

قضیه ۴. تابع $f: X \longrightarrow Y$ و $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده از زیر مجموعه های X مفروض اند. آنگاه

(الف) $f(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

(ب) $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

اثبات. (الف) تعریف (۱) و تعریف اجتماع خانواده را به طور مکرر به کار می بریم، نتیجه میشود

$$
\begin{aligned}
y \in f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) &\iff y = f(x) && \text{با ازای یک } x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \\
&\iff y = f(x) && \text{به ازای یک } \gamma \in \Gamma\text{، } x \in A_\gamma \\
&\iff y \in f(A_\gamma) && \text{به ازای یک } \gamma \in \Gamma \\
&\iff y \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)
\end{aligned}
$$

بنابراین $f(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

(ب) چون بنابر قضیه (۳) (ج)، برای هر $\gamma \in \Gamma$ داریم $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subseteq A_\gamma$، پس برای هر $\gamma \in \Gamma$، $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) =\subseteq f(A_\gamma)$. از تعریف اشتراک خانواده مجموعه ها نتیجه می شود که

$$f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

□

توجه کنید در بند (ب) قضیه (۴) نمی توان به جای نماد شمول $\subseteq$، نماد تساوی گذاشت به علاه قسمت اول قضیه بیان می کند که می توانیم نگاره اجتماع عناصر یک خانواده را به صورتی ساده تر، به کمک اجتماع نگاره های تک تک اعضای خانواده محاسبه نماییم.

مثال ۵. رابطه *(ب)* می تواند اکید باشد. فرض کنید $A=[\circ,۱]\cup[۲,۳]\subset\mathbb{R}$ و تابع ثابت C_b از A در $\mathbb{R}$ که $b\in\mathbb{R}$، را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$C_b(x)=b,\quad \forall x\in A$$

$$C_b([\circ,۱])=\{b\},$$

$$C_b([۲,۳])=\{b\}$$

در حالی که $[\circ,۱]\cap[۲,۳]=\varnothing$.

بنابراین $C_b([\circ,۱])=\{b\}$، $C_b([۲,۳])=\{b\}$ و درنتیجه $C_b([\circ۱,])\cap C_b([۲,۳])=\{b\}$

در حالیکه $C_b([\circ,۱]\cap[۲,۳])=C_b(\varnothing)=\varnothing$.

قضیه ۶. تابع $f:X\longrightarrow Y$ و $\{B_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ خانواده ای از زیر مجموعه های Y مفروض اند. آنگاه

(الف) $f^{-۱}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f^{-۱}(B_\gamma)$

(ب) $f^{-۱}(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}f^{-۱}(B_\gamma)$

اثبات. (الف) تعریف (۳) و تعریف اجتماع خانواده مجموعه ها را به کار می بریم.

$$\begin{aligned}
x\in f^{-۱}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\right) &\iff f(x)\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma \\
&\iff f(x)\in B_\gamma && \text{به ازای یک } \gamma \\
&\iff x\in f^{-۱}(B_\gamma) && \text{بنابر تعریف پیش نگاره} \\
&\iff x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f^{-۱}(B_\gamma) && \text{بنابرتعریف اجتماع.}
\end{aligned}$$

بنابراین ثابت شد که $f^{-۱}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f^{-۱}(B_\gamma)$.

با گذاشتن $\bigcap$ به جای $\bigcup$ و عبارت « به ازای هر» به جای «به ازای یک یا چند» در برهاین قسمت (الف)، یک برهان برای قسمت (ب) به دست می آید. □

قضیه ۷. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و B و C زیرمجموعه هایی از Y هستند. آنگاه

$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

اثبات. به هم ارزی های زیر توجه می کنیم

$x \in f^{-1}(B - C) \iff f(x) \in B - C$	**تعریف (۳)**
$\iff f(x) \in B \wedge f(x) \notin C$	**تعریف تفاضل دو مجموعه**
$\iff x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C)$	**تعریف (۱)**
$\iff x \in [f^{-1}(B) - f^{-1}(C)]$	**تعریف تفاضل دو مجموعه**

این ترتیب ثابت می شود که

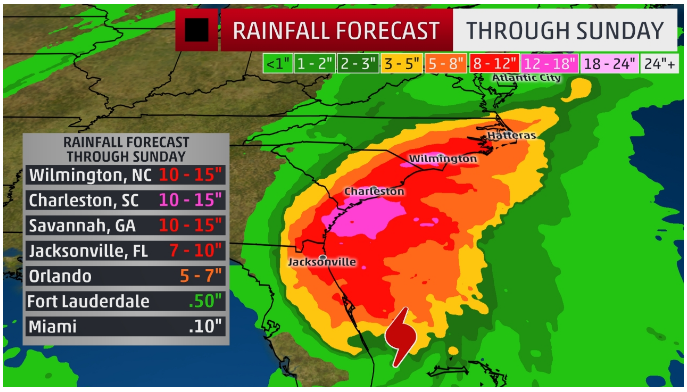
$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

□

تمرین ۸. تمرین های شماره ۴، ۵، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ صفحه های ۸۷ و ۸۸.

مجموعه وارون یک مجموعه تحت یک تابع کار بردهای زیادی می تواند داشته باشد. از جمله در هوا شناسی برای تعیین مناطق پرخطر برای طوفان یا بارندگی

شکل ۲: تصویر توده ابری متاثر از طوفان



شکل ۳: میزان بارش باران در نقاط مختلف ساحلی که توسط توده ابر پوشانده شده با تعیین نگاره های تابع

تابع یک به یک، پوششی، و دوسویی

بنابرتعریف تابع، روشن است که اگر $x_1 = x_2$ آنگاه $f(x_1) = f(x_2)$ است. اما عکس این تساوی ممکن است برقرار نباشد. یعنی از $f(x_1) = f(x_2)$ نمی توان نتیجه گرفت $x_1 = x_2$. اما برای برخی توابع این کار امکان پذیر است.

در مطالعه توابع، سه نوع تابع هستند که اهمیت زیادی دارند.

تعریف ۹. تابع $f: X \longrightarrow Y$ را **یک به یک**[1] یا **انژکتیو**[2] می گویند هر گاه $x_1, x_2 \in X$ و $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه $x_1 = x_2$. تابع انژکتیو را **انژکسیون**[3] نیز می نامند.

یادآوری ۱۰. بنابرتعریف بالا، f یک به یک است اگر و فقط اگر

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

پس بنابر هم ارزی $p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$، تعریف فوق را می توان به صورت زیر نوشت.

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

تمرین ۱۱. نقیض گزاره« $f: X \longrightarrow Y$ یک به یک است اگر وفقط اگر $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ » را بنویسید.

مثال ۱۲.

۱. تابع همانی $id_X : X \longrightarrow X$ که به صورت $id_X(x) = x$ تعریف می شود یک تابع یک به یک است.

۲. فرض کنیم X,Y دو مجموعه ناتهی باشند. برای $b \in Y$، تابع ثابت $C_b : X \longrightarrow Y$، که به صورت $C_b(x) = b$ تعریف می شود، آشکار را درتعریف تابع یک به یک صدق نمی کند.

۳. تابع $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که به صورت $f(n) = 2n + 1$ تعریف می شود، یک تابع یک به یک است. همچنین تابع $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که به صورت $f(n) = 2n$ تعریف می شود نیز یک تابع یک به یک است.

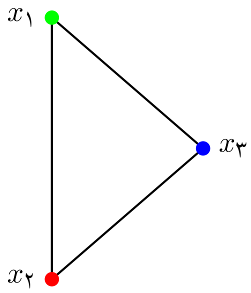
۴. عدد ۵ را درنظر بگیرید. می دانیم تقسیم هر عدد صحیح بر ۵ دارای باقی مانده ای یکتاست. یعنی $n = 5q + r$ که $0 \leq r < 5$. تابع $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ که به هر $n \in \mathbb{Z}$، ماتده تقسیم بر ۵، یعنی r را نظیر می کند یک تابع یک به یک نیست. زیر مثلاً مانده تقسیم ۱۷ بر ۵ که ۲ است با مانده تقسیم ۳۲ بر ۵ که همان ۲ برابر است درحالی که $32 \neq 17$.

[1] *One to one*
[2] *Injective*
[3] *Injection*

به طور کلی هر گاه m یک عدد صحیح غیر صفر باشد، تابعی که مانده تقسیم n بر m را به دست می دهد یک تابع یک به یک نیست. مثلا مانده تقسیم n بر m با مانده تقسیم $n+m$ بر m برابر است ولی $n \neq n+m$.

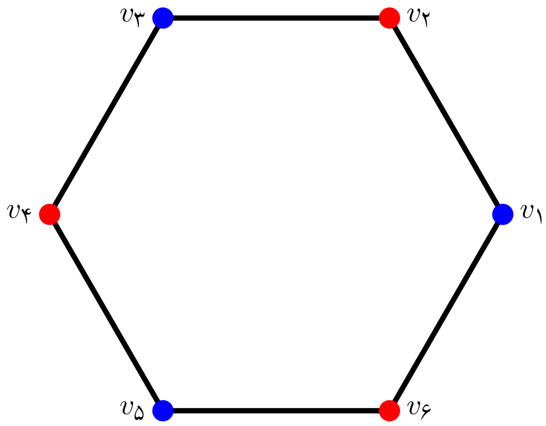
مثال ۱۳. تابع رنگ آمیزی گرافها را در نظر می گیریم

فرض کنید G گراف زیر باشد. آنگاه تابع $f : V = \{v_۱, v_۲, v_۳\} \longrightarrow \{$**قرمز**, **آبی** , **سبز**$\}$ تابعی یک به یک است



اما تابعی که راس های گراف زیر را رنگ می کند یک تابع یک به یک نیست. زیرا برخی راس ها بیش از یک بار توسط رنگ های آبی یا قرمز رنگ می شوند.

$V = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵, v_۶\} \longrightarrow \{$**قرمز**, **آبی**$\}$



تعریف ۱۴. تابع $f : X \longrightarrow Y$ **سورژکتیو** [۱] یا **پوشا** هر گاه برای هر $y \in Y$، یک $x \in X$ وجود داشته

[۱] *Surjective / Onto*

باشد به قسمی که $f(x)=y$. تابع سورژکتیو **سورژکسیون** هم نامیده می شود. به عبارت دیگر، $f:X\longrightarrow Y$ سورژکسیون است اگر وفقط اگر $f(X)=Y$.

یادآوری ۱۵. تابع $f:X\longrightarrow Y$ پوشاست اگر وفقط اگر $\forall y\in Y,\quad \exists x\in X, f(x)=y$. یعنی بتوان معادله $f(x)=y$ را برحسب y حل کرد.

مثال ۱۶. ۱. تابع همانی $id_X:X\longrightarrow X$ که با $id_X(x)=x$ تعریف می شود تابعی پوشا است.

۲. تابع $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ که با $f(n=2n)$ تعریف می شود یک تابع پوشا نیست زیرا هیچ عدد فردی مانند $2k+1$ نمی تواند نگاره یک عنصر $\mathbb{N}$ تحت نگاشت فوق باشد. در واقع اگر چنین باشد، آنگاه $f(x)=2x=2k+1$. در نتیجه $x=\frac{2k+1}{2}=k+\frac{1}{2}$ که می دانیم $k+\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$.

به عبارت دیگر معادله $f(x)=2x=b$، که b یک عدد فرد است، در $\mathbb{N}$ جوابی ندارد.

۳. تابع علامت $\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\longrightarrow\{-1,0,1\}$ یک تابع پوشاست. زیرا هر عضو $\{-1,0,1\}$ نگاره یک عدد منفی یا صفر یا مثبت است.

۴. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ که با $f(x)=x^2$ تعریف می شود یک تابع پوشا نیست زیرا برای هر عدد منفی b از $\mathbb{R}$، هیچ عضو x در $\mathbb{R}$ نمی توان پیدا کرد به طوری که $f(x)=x^2=b<0$. در واقع ریشه دوم یک عدد منفی $x=\sqrt{b}$ در $\mathbb{R}$ تعریف نشده است.

به عبارت دیگر معادله $f(x)=x^2=b$ جواب ندارد زیر b منفی است.

۵. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow[-1,1]$ که با $f(x)=\sin x$ تعریف می شود یک تابع پوشاست ولی اگر به جای $[-1,1]$ مجموعه یY که $Y\supsetneq[-1,1]$ است را قرار دهیم، آنگاه f پوشا نیست.

تمرین ۱۷. نقیض گزاره « $f:X\longrightarrow Y$ پوشاست اگر و فقط اگر $(\forall y\in Y)(\quad \exists x\in X)(f(x)=y)$ را بنویسید.

تابعی که هم یک به یک باشد و هم پوشا برای مقایسه مجموعه های مختلف به کار می رود . به یک معنا «یکی» بودن را می رساند.

تعریف ۱۸. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را **دوسویی** [۱] می نامیم هرگاه هم یک به یک باشد و هم پوشا.
به تابع دوسویی «تناظر یک به یک» هم می گویند.

مثال ۱۹. ۱. تابع $f(x) = x^3$ که از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ تعریف می شود تابعی دوسویی است.

۲. تابع $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ که با $f(x) = \ln x$ تعریف می شود تابعی دوسویی است.

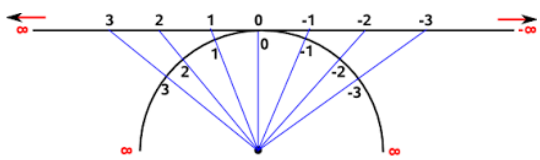
۳. تابع $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که با $f(n) = 2n$ تابعی دوسویی نیست زیرا پوشا نیست.

۴. تابع $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ که به صورت زیر تعریف می شود

$$f(x) = \begin{cases} -k & x = 2k \quad \text{اگر} \\ \left[\frac{2k-1}{2}\right] & x = 2k-1 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

تابعی یک به یک و پوشاست.

۵. می توان نشان داد یک تناظر یک به یک بین نقاط یک نیم دایره و خط $\mathbb{R}$ وجود دارد. فعلاً به صورت تصویری این تناظر را می توانید مجسم کنید. امتداد هر شعاع مرسوم از هر نقطه محیط نیم دایره خط $\mathbb{R}$ را در یک و فقط یک نقطه قطع می کند. برعکس نیم خط واصل بین هر نقطه از $\mathbb{R}$ و مرکز نیم دایره قطع می کند. به این ترتیب نقاط $\mathbb{R}$ با نقاط نیم دایره درتناظر یک به یک قرار می گیرند.



شکل ۴: تناظر یک به یک بین نقاط نیم دایره و خط $\mathbb{R}$

---
[۱] Bijection

در جلسه پیش ملاحظه کردیم که اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد و $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده از زیر مجموعه های X باشد، آنگاه لزوماً تساوی زیر برقرار نیست

$$f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

و بلکه ممکن رابطه شمول اکید برقرا باشد.

$$f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \subsetneq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

اما اگر تابع f یک به یک باشد با یقین می توان گفت که تساوی برقرار است.

قضیه ۲۰. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک است و $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده ای از زیر مجموعه های X هستند. آنگاه

$$f : \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

اثبات. بنابرتعریف نگاره یک تابع و همچنین تعریف اشتراک خانواده مجموعه ها می توان نوشت:

$$y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma) \iff y \in f(A_\gamma) \;\; \forall\gamma\in\Gamma$$

$$\iff (\exists x_\gamma \in A_\gamma . y = f(x_\gamma) \text{ به قسمی که }) \;\; \forall\gamma\in\Gamma$$

چون $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک است، همه این x_γ ها یکی هستند؛ این عنصر را با $x_\circ$ نشان می دهیم. پس داریم

$$y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma) \iff \exists x_\circ \in A_\gamma \qquad \forall\gamma\in\Gamma, y = f(x_\circ)\text{ به قسمی که}$$

$$\iff \exists x_\circ \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \qquad y = f(x_\circ)\text{ به قسمی که}$$

$$\iff y \in f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)$$

بنابراین $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

یاداوری می شود که اگر R یک رابطه از X به Y باشد، آنگاه رابطه وارون آن

$$R^{-1} = \{(y,x)|(x,y) \in R\}$$

□

یک رابطه از Y به X است. چون تابع $f : X \longrightarrow Y$ (نوع به خصوصی از) یک رابطه از X به Y است، f^{-1}، حداقل یک رابطه از Y به X است. طبیعی است سوال شود که چه وقت f^{-1} یک تابع است. جواب این سوال در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۲۱. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ دوسویی است، آنگاه $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ دوسویی است.

اثبات. نخست نشان می دهیم که رابطه f^{-1} از Y به X یک تابع است.

چون $f : X \longrightarrow Y$ پوشاست، پس $f(X) = Y$. بنابراین

$$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) = Y$$

درنتیجه شرط (الف) تعربف تابع برقرار است. برای این که نشان دهیم که f^{-1} در شرط (ب) تعریف یک تابع نیز صدق می کند، فرض کنیم که $(y,x_1) \in f^{-1}$ و $(y,x_2) \in f^{-1}$. آنگاه داریم $(x_1,y) \in f$ و $(x_2,y) \in f$. در نتیجه $f(x_1) = f(x_2)$. اما تابع $f : X \longrightarrow Y$ تابعی یک به یک است. پس از تساوی اخیر نتیجه می شود $x_1 = x_2$. بنابراین ثابت کرده ایم که $f^{-1} Y \longrightarrow X$ یک تابع است.

برای این که نشان دهیم $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ یک به یک است، فرض کنیم $y_1, y_2 \in Y$ و $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$. پس داریم $f(x) = y_1$ و $f(x) = y_2$ و از این رو $y_1 = y_2$. این ثابت می کند که f^{-1} تابعی یک به یک است.

بالاخره باید نشان دهیم که $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ تابعی پوشا است.

اما می دانیم $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f) = X$، که نشان می دهد f^{-1} پوشا است. با این ترتیب اثبات کامل می شود. □

اگر $f : X \longrightarrow Y$ دوسویی باشد، تابع $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ را **تابع وارون** می گویند.

بنابر (۲۱) اگر $f : X \longrightarrow Y$ دوسویی باشد (تناظر یک به یک)، می توانیم بگوییم f یک تناظر یک به یک بین مجموعه های X و Y است.

تمرین ۲۲. تمرین های صفحه ۹۱، شماره ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۱۰ را حل کنید. حل تمرین ۹ به عنوان مثال در درس نامه آمده است.

مساله ۱۰ باید برای شما خیلی آشنا باشد. می توانید آن را به یاد آورید؟