

قواعد استنتاج^۱

در جلسات گذشته آموختیم در منطق یا ریاضیات، «قضایا» به معنی گزاره های همواره راست هستند، و «برهان» (قضیه) اثبات درستی آن است. برهان درستی یک قضیه ارائه یک دنباله متناهی $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ از تعاریف یا گزاره هایی که درستی آن ها بدیهی است و یا گزاره هایی که درستی آن قبل از گزاره مورد نظر نشان داده شده است و یا این گزاره از گزاره های قبلی با استفاده از قواعد استنتاج نتیجه شده است می باشد.

$$\left\{ \begin{array}{ll} Q_1 & \text{دلیل درستی} \\ Q_2 & \text{دلیل درستی} \\ Q_3 & \text{دلیل درستی} \\ \vdots & \vdots \\ Q_n & \text{دلیل درستی} \end{array} \right.$$

گزاره Q_n را نتیجه و چندگزاره اول را فرض ها یا مقدمات می نامند.

به طور خلاصه Q_n درست تلقی می شود هرگاه ترکیب عطفی $Q_1 \wedge Q_2 \wedge Q_3 \wedge Q_4 \wedge \dots \wedge Q_{n-1}$ گزاره Q_n را نتیجه دهد. یعنی

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge Q_3 \wedge \dots \wedge Q_{n-1} \implies Q_n.$$

رفتن از گزاره Q_i به Q_{i+1} معمولاً توسط قاعده هایی موسوم به «قاعده های استنتاج» صورت می گیرد.

قضایای ۲ تا ۸ که در جلسه قبل آموختیم برای بررسی هم ارزیها و استلزام ها منطقی ابزارهای مفیدی هستند که در ارائه استدلال به کار می روند و به آنها قاعده های استنتاج می گویند.

^۱Deduction Rules

برای ارجاع سریعتر به این قاعده ها آنها را در این قسمت گردآوری می کنیم.

قضیه ۲. فرض کنیم p و q دو گزاره هستند. آنگاه قوانین زیر برقرارند:

(الف) قانون جمع: $p \implies p \vee q$.

(ب) قانون اختصار: $p \wedge q \implies p$, $p \wedge q \implies q$.

(پ) قانون رفع مولفه $(p \vee q) \wedge \sim p \implies q$.

قضیه ۳. فرض کنیم p و q دو گزاره هستند. آنگاه

(الف) قانون نفی مضاعف^۱: $\sim(\sim p) \equiv p$.

(ب) قانون جابه جایی $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$.

(پ) قانون خودتوانی^۲: $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$.

(ت) قانون عکس نقیض^۳: $(p \longrightarrow q) \equiv (\sim q \longrightarrow \sim p)$.

قضیه ۴. (قانون دمورگان). فرض کنیم p و q دو گزاره هستند. آنگاه

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

^۱ Double Negation

^۲ Idempotency

^۳ ContraPositive

قضیه ۵. فرض می کنیم p ، q و r گزاره هستند. آنگاه

(الف) قانون شرکت پذیری

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

(ب) قانون پخش پذیری^۱

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

(پ) قانون تعدی^۲

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \Longrightarrow (p \longrightarrow r).$$

قضیه ۶. گیریم p ، q ، r و s گزاره هستند. آنگاه

(الف) قیاس ذوالوجهین موجب Constructive dilemma

$$(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \Longrightarrow (p \vee r \longrightarrow q \vee s)$$

$$(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \Longrightarrow (p \wedge r \longrightarrow q \wedge s)$$

(ب) قیاس ذوالوجهین منفی Destructive dilemma

$$(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \Longrightarrow (\sim q \vee \sim s \longrightarrow \sim p \vee \sim r)$$

$$(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \Longrightarrow (\sim q \wedge \sim s \longrightarrow \sim p \wedge \sim r)$$

^۱ Distributive

^۲ Transitive

قضیه ۷. فرض کنید p و q گزاره هستند. آنگاه

(الف) قیاس استثنایی $^1 (p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

(ب) قیاس دفع $^2 (p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

(پ) برهان خلف $^3 (p \rightarrow q) \iff (p \wedge \sim q \rightarrow q \wedge \sim p)$

قضیه ۸. فرض کنیم t, c و p ، به ترتیب یک راستگو، یک تناقض و یک گزاره دلخواه باشند. آنگاه

(الف) $p \wedge t \iff p$

$p \vee t \iff t$,

(ب) $p \vee c \iff p$,

$p \wedge c \iff c$

(پ) $p \Rightarrow t$ و $c \Rightarrow p$

برخی گزاره‌ها شباهت زیادی به یکدیگر دارند. این سبب می‌شود فقط یکی از آنها را یاد بگیریم و بقیه را از روی شباهتشان باز سازی کنیم. یکی از این انواع شباهت ها، دوگان 4 یا همزاد یک گزاره است.

تعریف ۹. هرگاه گزاره P فقط شامل رابط های منطقی \vee, \wedge, \sim باشد، دوگان P گزاره جدیدی است مانند Q که به شکل زیر ساخته می شود. در P به جای \vee نشان \wedge ، به جای \wedge در P ، نشان \vee ، به جای T ، نشان F و به جای F نشان T قرار می دهیم. همچنین T رت به F و F را به T تبدیل می کنیم تا گزاره Q به دست آید.

1 Modus Ponens

2 Modus Tollens

3 By Contradiction

4 Dual