# فصل ۱

# مجموعه ها

در این فصل و فصل آتی می خواهم آنچه در فصل قبل مورد مطالعه قرار دادیم را درحالت خاص، یعنی نظریه مجموعه ها تعبیر نماییم. قضایایی که در فصل قبل آموختیم راهنمای پاسخ به بسیاری از سوالاتی است که در نظریه مجموعه ها پیش می آید.

گئورک کانتور (یا جرج کانتور)، ۱۹۱۸-۱۸۴۵، ریاضی دان آلمانی و بنیان گذار نظریه مجموعه ها، در تلاش برای تعیین نقایط که در آنها سری های مثلثاتی همگرا می شوند، به این نتیجه رسید که همه این نقاط را می تواند تحت یک نام، یعنی مجموعه، یاد کند و بعد به تبع اعمال جمع و ضربی که روی سری ها انجام می شود، اعمال اشتراک و اجتماع را هم تعریف کرد. این شیوه نظم دادن به اشیایی که ریاضی دانان با آن ها کار می کنند سبب افزایش دقت در بیان مفاهیم ریاضی و دانش ریاضی و همچنین سرعت دربیان مفاهیم گردید. البته بحث های منطقی ای هم به همراه آورد که ریاضی دانان به تدریج به این اشکالات منطقی پاسخ گفتند ولی برخی از آنها ( اصل انتخاب و اصل پیوستار) هنوز پاسخ داده نشده اند.

شکل ۱.۱: گئورگ کانتور (۱۹۱۸-۱۸۴۵)

## ۱.۱ مفهوم مجموعه

در این فصل، می خواهیم مفهوم مجموعه، که یکی از اساسی ترین مفاهیمی را که در ریاضیات نقش پایه ای دارد معرفی و خواص آن را بررسی نمایم. هرچند بنابر ملاحظات منطقی نمی توانیم تعریف دقیقی از مجموعه ارائه دهیم اما سعی می کنیم از طریق مصداق های آن، ویژگی ها کلی آن را ترسیم نماییم.

در واقع، بشر، برای نظم دادن به اشیایی که در اطرافش وجود دارند معمولا آنها را در دسته های مشخصی گرد آوری می کند تا بتواند در موقع نیاز به آنها رجوع کند و یا از آنها استفاده کند. مثلا کتابخانه، برای گردآوری کتاب ها، کیف پول برای قرار دادن پول در یک جای معین، کیف برای جمع آوری ابزار ضروری و دسترسی سریع به آنها، خانواده برای گردهم آمدن افرادی که نسبت خونی دارند و مثال های بی شمار دیگر.

در ریاضیات هم این قاعده به کار گرفته می شود. مثلا اعداد

$$۱, ۲, ۳, \ldots$$

برای شمردن یا بررسی خواص حسابی آن ها مورد بررسی قرار می گیرند و یا اعداد صحیح

$$۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \ldots$$

برای جمع و تفریق یا ضرب مورد استفاده قرار می گیرند. و یا اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ برای اندازه گیری، محاسبات تقریبی توصیف میزان حرکت اشیاء، توصیف کَمی تغییرات اشیاء مورد استفاده قرار می گیرند.

به واقع تمامی این مثال ها در یک خاصیت مشترک هستند:

**گرد آیه ای از اشیا که در یک یا چند ویژگی مشترک هستند و با نام مشخصی نامیده می شوند. به علاوه این ویژگی چنان است که می تواند موجب تشخیص این اشیا از بقیه گردد.**

همین توصیف را به عنوان مبنایی برای توصیف مفهوم یک مجموعه به کار می گیریم:

**یک مجموعه هر توده از اشیاء ، به نام اعضا یا عناصر است به طوری که بتوان آنها را با ویژگی هایی متمایز کننده از یک دیگر تمیز داد.**

مثلا اعداد طبیعی یک مجموعه است و وجه ممیزه آن نیز صحیحی و مثبت بودن آن است. یا اعداد حقیقی یک مجموعه است و وجه ممیزه آن ارقام بعد از اعشار آن است.

این تعریف شهودی از مجموعه را نخستین بار گئورک کانتور، ارائه داد. در واقع او به هنگام مطالعه نقاط همگرایی یا واگرایی سری های مثلثاتی متوجه گردید که نقاط همگرایی یک سری را باید به طور مشخص در یک قالب معرفی نماید.

به عنوان مثال

**مثال ۱.** ۱. مجموعه اعداد زوج

۲. مجموعه اعداد فرد

۳. مجموعه رقم $۰, ۹, ۸, ۷, ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱$ که برای ساختن اعداد در مبنای ده دهی مورداستفاده قرار می گیرند.

۴. مجموعه حروف نقطه دار در مجموعه حروف الفبای فارسی

۵. مجموعه نقاطی که روی یک خط قرار می گیرند

۶. مجموعه رئوس یک مثلث

و مثال های دیگری که دارای این ویژگی هستند که می توان آنها را تشخیص داد و از یکدیگر متمایز کرد.

معمولا از نشان خاصی برای نشان دادن یک مجموعه استفاده می کنیم. یعنی با لیست کردن اشیا و قرار دادن آن بین دو آکولاد یک مجموعه را نشان می دهیم. بنابراین مجموعه اعداد زوج را به صورت $\{۲,۴,۶,۸,\ldots\}$ یا مجموعه اعداد فرد را به صورت $\{۱,۳,۵,۷,\ldots\}$ نشان می دهیم.

معمولا از حروف بزرگ انگلیسی مثل $A,B,C,\ldots$ برای نامیدن محموعه ها استفاده می کنیم. همچنین از حروف کوچک انگلیسی مثل $a,b,c,\ldots$ برای نشان دادن اعضای یک مجموعه استفاده می کنیم.

اگر $a$ یک عضو مجموعه $A$ باشد آن را به صورت $a \in A$ نشان می دهیم. گاه می گوییم $a$ متعلق به مجموعه $A$ است. و اگر $a$ عضوی از مجموعه $A$ نباشد، آن را به صورت $a \notin A$ نشان می دهیم.

مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را با $\varnothing$ نشان می دهیم و آن را مجموعه تهی می نامیم. گاه یک مجموعه تهی را با $\{\ \}$ ( یعنی دو آکولاد که هیچ نشانی بین آن دو نیست) نشان می دهیم.

**مثال ۲.**

$$۱-\{x \in \mathbb{R} \mid x^{۲}+۱=۰\}=\varnothing$$

$$۲-\{x \in \mathbb{N} \mid x<۰\}=\varnothing$$

$$۳-\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x)>۱\}=\varnothing$$

$$۴-\{x \in \mathbb{R} \mid x^{۲}<۰\}=\varnothing$$

$$۵-\{x \in \mathbb{N} \mid x+۱=۰\}=\varnothing$$

$$۶-\{x \in \mathbb{Z} \mid ۲x+۳=۰\}=\varnothing.$$

اگر یک مجموعه تعداد با پایانی عضو داشته باشد، آن را متناهی می گویند. مجموعه ای متناهی نباشد، نامتناهی می نامند.

**مثال ۳.** (۱) مجموعه اداد دو رقمی یک مجموعه متناهی است.

(۲) مجموعه اعداد فرد یک مجموعه متناهی نیست.

(۳) مجموعه اعداد اول زوج یک مجموعه متناهی است.

(۴) مجموعه اعداد اول یک مجموعه نامتناهی است.

در هر عالم سخنی، باید منظور خود از یکی بودن و تساوی را مشخص نماییم. به طور شهودی، اگر اعضای دو مجموعه برابر باشند، آن دو مجموعه را می توان یکی گرفت. همین ایده را مبنای تعریف زیر قرار می دهیم

**تعریف ۴.** دو مجموعه $A$ و $B$ را مساوی می گویند و می نویسند $A = B$، اگر عنصرهایشان یکی باشد. یعنی $A = B$ به معنای

$$(\forall x)[(x \in A) \longleftrightarrow (x \in B)]$$

**تمرین ۵.** نقیض گزاره «مساوی بودن دو مجموعه» را بنویسید

در نوشتن اعضای یک مجموعه عناصر تکراری فقط یک بار به حساب می آیند. همچنین در نوشتن عناصر هیچ ترتیب خاصی رعایت نمی شود. مثلاً $\{a, b, c\}$ با $\{c, a, b\}$ یکی است. یا

$$\{\dots, -۳, -۲-, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \dots\} = \{۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \dots\}$$

چنانچه بخواهیم ترتیب معینی رعایت شود از علامت [ ] استفاده می کنیم. مثال اگر ترتیب ۲, ۱, ۳ برای ما مهم باشد آن را به صورت [۲, ۱, ۳] نمایش می دهیم.

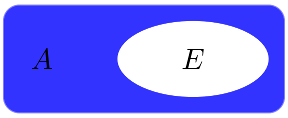
**تعریف ۶.** اگر یک مجموعه داده شده باشد و مجموعه دیگر نیز داده شده باشد که هر عنصر آن یک عنصر مجموعه اولیه باشد، در این صورت مجموعه دوم را با نام خاصی می نامیم.

فرض کنیم $A$ و $B$ دو مجموعه باشند. اگر هر عنصر $A$، عنصر $B$ نیز باشد، می گوییم $A$ زیر مجموعه $B$ است و می نویسیم $B \subseteq A$ یا $A \subset B$. اگر $A$ یک زیر مجموعه $B$ باشد، در این صورت $B$ را یک ابر مجموعه $A$ می نامیم.

به زبان حساب گزاره ها

$$A \subset B \equiv (\forall x)[(x \in A) \longrightarrow (x \in B)] \quad (۱)$$

به صورت تصویری می توان گفت نقاط درون بیضی سفید زیر مجموعه نقاط درون چهار ضلعی آبی است. $(E \subset A)$




**مثال ۷.** (۱) مجموعه اعداد طبیعی زیر مجموعه سره اعداد صحیح است.

$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$$

زیرا همان طور که ملاحظه می شود، هر عضو $\mathbb{N}$ در $\mathbb{Z}$ است.

(۲) مجموعه اعداد صحیح زیر مجموعه سره اعداد گویاست

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -۵, -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$

زیرا هر عدد صحیح $n$ را می توان به صورت $\frac{n}{۱}$ نوشت. ولی اعداد گویا زیر مجموعه اعداد صحیح نیست. زیرا $\frac{۱}{۲} \in \mathbb{Q}$ ولی $\frac{۱}{۲} \notin \mathbb{Z}$.

(۳) اعداد گویا زیر مجموعه سره اعداد حقیقی است $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

اما اعداد حقیقی زیر مجموعه اعداد گویا نیست. زیرا $\sqrt{۲} \in \mathbb{R}$ ولی $\sqrt{۲} \notin \mathbb{Q}$.

(۴) اگر $T$ مجموعه مثلث های واقع در صفحه باشد و $P$ مجموعه تمام چند ضلعی های بسته در صفحه باشد آنگاه $P \subset T$. اما چون یک چهار ضلعی در $P$ است ولی در $T$ نیست، مجموعه $T$ زیر مجموعه سره $P$ است.

این زیر مجموعه سره است. در واقع در

**تمرین ۸.** عکس نقیض تعریف زیر مجموعه بودن (۱) را بنویسید

روشن است که هر مجموعه ریر مجموعه خودش می باشد. هر گاه $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$ در این صورت می نویسیم $A \subset B$ یا $B \supset A$ و می خوانیم $A$ زیر مجموعه سَره $B$ یا $B$ یک ابر مجموعه سره $A$ است. به عبارت دیگر $A$ زیر مجموعه سره $B$ است، به معنای این است که ر عنصر $A$ یک عنصر $B$ است و عنصری در $A$ وجود داد که در $B$ نیست. اگر $A$ زیر مجموعه $B$ نباشد، می نویسم $A \nsubseteq B$.

**قضیه ۹.** مجموعه تهی ، زیر مجموعه هر مجموعه است.

اثبات. فرض کنیم $A$ یک مجموعه باشد. باید ثابت کنیم که گزاره شرطی

$$(x \in \emptyset) \longrightarrow (x \in A)$$

برای هر $x$ درست است. چون مجموعه تهی عنصری ندارد، گزاره $x \in \emptyset$ نادرست است. بنابراین گزاره $x \in A$ چه راست باشد چه ناراست، گزاره شرطی

$$(x \in \emptyset) \longrightarrow (x \in A)$$

بنابر جدول ارزش گزاره شرطی، راست است. پس به ازای هرمجموعه $A$، $\emptyset \subset A$. □

**قضیه ۱۰.** اگر $A \subset B$ و $B \subset C$، آنگاه $A \subset C$.

اثبات. باید نشان دهیم که $(x \in A) \Longrightarrow (x \in C)$:

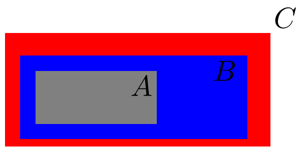
**چون** $A \subset B$ $\qquad (x \in A) \Longrightarrow (x \in B)$

**چون** $B \subset C$ $\qquad (x \in B) \Longrightarrow (x \in C)$

از این رو بنابر قانون تعدی داریم

$$(x \in A) \Longrightarrow (x \in C)$$

پس ثابت کردیم $A \subseteq C$. □




$A \subseteq B \subseteq C$

## ۲.۱ اصل موضوع تصریح

در قسمت قبل، بیان کردیم دو مجموعه $A$ و $B$ یکی هستند اگر و فقط اگر هر عضو $A$ یک عضو $B$ باشد و برعکس هر عضو $B$ یک عضو $A$ باشد. به عبارت دیگر

$$A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$$
$$\iff (\forall x)(x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \longrightarrow x \in A).$$

به عبارت دیگر این اعضای مجموعه ها هستند که اهمیت دارند نه نامی که برای آنها انتخاب می شود. همچنین یک مجموعه $B$ که هر عضوش یک عضو یک مجموعه دیگر مانند $A$ است، را به صورت $B \subset A$ نمایش می دهیم.

$$B \subset A \iff (\forall x)(x \in B \longrightarrow x \in A)$$

در این جلسه اصلی را معرفی می کنیم که در ریاضیات کاربردهای اساسی و فراوانی دارد. در واقع این اصل برای ساختن یک مجموعه جدیدتر از یک مجموعه داده شده به کار می رود. به طور خلاصه این اصل می گوید «هر حکم معقولی درباره عناصر یک مجموعه، زیر مجموعه ای از آن را مشخص می کند، یعنی زیر مجموعه متشکل از عناصری که آن حکم درباره آنها صادق است».

۱-فرض کنیم $\mathbb{N}$، مجموعه اعداد طبیعی باشد. آنگاه گزاره « $x$ یک عدد اول است» یک حکم درباره آن اعضایی $\mathbb{N}$ است که اول هستند. این گزاره یک زیر مجموعه $\mathbb{N}$ را می سازد. این عبارت را به صورت زیر نشان می دهیم

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \text{یک عدد اول است} \quad x\}$$

همچنین

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \text{یک عدد اول نیست} \quad x\}$$

نمایش دهنده مجموعه تمام اعداد مرکب است.

۲- به عنوان مثالی دیگر اگر بخواهیم ریشه های یک معادله در $\mathbb{R}$ را به طور مشخص نشان دهیم می توانیم آن را به صورت زیر نشان دهیم

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^{۳} + x + ۱ = ۰\}$$

همان طور که ملاحظه می شود شرط بالا یک زیر مجموعه $\mathbb{R}$ را مشخص می کند.

۳- فرض کنید $X$ مجموعه دانشجویان ورودی سال ۱۴۰۰ دانشگاه خواجه نصیر باشد. آنگاه

$$\{x \in X \mid \text{دانشجوی دانشکده ریاضی است} \quad x\}$$

این که وجود یک مجموعه را از روی یک مجموعه مفروض بسازیم را تحت عنوان حکمی بدیهی می پذیریم و با آن «اصل موضوع تصریح» [۱] می گویند.

**اصل موضوع تصریح:** متناظر با هر مجموعه $A$ و هر شرط $p(x)$، مجموعه ای چون $B$ وجود دارد که اعضای آن دقیقاً آن عناصری از $A$ هستند که شرط $p(x)$ برای آن ها صادق است.

$$B = \{x \in A \mid \text{گزاره ای راست است} \quad p(x)\}$$

یعنی مجموعه $B$ آن دسته از عناصر $A$ را دربر دارد که به ازای آنها، گزاره $p(x)$ راست است.

**مثال ۱۱.** ۱. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^{۲} + ۱ > ۰\}$

۲. $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{زوج است} \quad x\}$

[۱] Axiom of Specification

۳.

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ عددی حقیقی است}\},$$
$$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \text{ عددی حقیقی و مثبت است}\} = \{x \mid x > 0\},$$
$$\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ عدد گویا ست}\},$$
$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ عدد صحیح است}\},$$
$$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ عدد طبیعی است}\},$$
$$\mathbf{I} = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

روشن است که $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. و یا $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$.

۴. $\{x \mid x \neq x\}$

ممکن است که هر عنصر یک مجموعه خود یک مجموعه باشد. مثلاً

۱. فرض کنیم $A$ یک مجموعه باشد در این صورت $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ یک مجموعه است که اعضای آن مجموعه است. اتفاقاً این مجموعه چون همه زیر مجموعه های $A$ را در بر دارد می تواند اطلاعات مفیدی درباره $A$ به دست بدهد. حال می توانیم با استفاده از اصل تصریح مجموعه زیر را درنظر بگیریم.

$$X = \{B \in P(X) \mid B \text{یک مجموعه دو عضوی است}\}$$

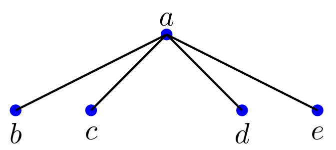
یا

$$Y = \{B \in P(X) \mid B \text{یک مجموعه سه عضوی است}\}$$

۲. گاه برخی اشیاء ریاضی را به صورت مجموعه ای از مجموعه ها نشان می دهیم. مثلا فرض کنیم $A = \{a, b, c, d, e\}$ و

$$G = \{A, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}\}$$

یک گراف با ۵ راس و چهار یال است.




سوالی که پیش می آید این است که اگر $A$ یک مجموعه متناهی باشد، مجموعه توانی آن $P(A)$ چند عضو دارد؟

**قضیه ۱۲.** اگر $A$ از $n$ عنصر نشکیل شده باشد، آنگاه مجموعه توانی $P(A)$ دقیقاً از $۲^n$ عنصر تشکیل شده است.

اثبات. به استقرا درستی حکم بالا را نشان می دهیم.

بدیهی است که اگر $A = \phi$ آنگاه تعداد عناصر برابر $۱ = ۲^۰$ است.

پس فرض می کنیم $A$ تهی نباشد. اعضای آن را می توانیم به صورت $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ بنویسیم. یک عنصر $A$ مانند $a_k$ را درنظر می گیریم. هر زیر مجموعه $A$ یا این را دارد یا به آن تعلق ندارد. بنابراین، مساله یافتن تعداد زیر مجموعه های $A$ برمی گردد به این که $n$ مربع خالی که از ۱ تا $n$ شماره گذاری شده داریم. بسته به اینکه آیا عضو $a_k$ در زیر مجموعه $B$ هست یانه؟ در مربع $k$ ام عدد ۱ را قرار می دهیم هرگاه $a_k \in B$ و صفر قرار می دهیم هرگاه $a_k \notin B$. به عبارت دیگر

$$\textbf{مقدار خانه } k \textbf{ ام} = \begin{cases} ۱ & \textbf{اگر } a_k \in B \\ ۰ & \textbf{اگر } a_k \notin B \end{cases}$$

| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | | $n-۱$ | $n-۴$ | $n-۳$ | $n-۲$ | $n-۱$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | $\cdots$ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ |

**توزیع عناصر B در جدول بالا**

به این ترتیب چون تعداد دنباله های اعدادی متشکل از صفر و یک ها برابر $۲^n$ است، پس تعداد زیر مجموعه های $A$ حداقل برابر $۲^n$ است. از طرف دیگر هر دنباله از صفر و یک ها به طول $n$، یک و فقط یک زیر مجموعه

از $A$ را تعیین می کند بنابراین تعداد این چنین دنباله هایی ، که برابر $۲^n$ است،حداقل برابر تعداد زیر مجموعه های $A$ است. به این ترتیب $P(A)$ دارای $۲^n$ عضو است.

**برهان دوم:** اولاً مجموعه $\phi$ در $P(A)$ است. ثانیاً متناظر با هر $x \in A$، مجموعه $\{x\}$ متعلق به $P(A)$ است. توجه دارید که تعداد زیر مجموعه های تک عضوی $A$ برابر $C(n,۱)$ است. به همین ترتیب تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی $A$ برابر $C(n,۲)$ است. و به همین ترتیب تعداد زیر مجموعه های $k$ عضوی $A$ برابر $C(n,k)$ خواهد بود و در نهایت تعداد زیر مجموعه های $n$ عضوی $A$ برابر $C(n,n) = ۱$. با درنظر گفتن مجموعه تهی تعداد کل زیر مجموعه های $A$ برابر است با

$$C(n,\circ) + C(n,۱) + \cdots + C(n,n)$$

حال بسط دو جمله ای $(a+b)^n$ را می نویسیم

$$(a+b)^n = C(n,\circ)a^n + C(n,۱)a^{n-۱}b + C(n,۲)a^{n-۲}b^۲ + \cdots + C(n,k)a^{n-k}b^k + \cdots + C(n,n)b^n$$

اگر در عبارت فوق قرار دهیم $a = b = ۱$ آنکاه

$$(۱+۱)^n = C(n,\circ)۱^n + C(n,۱)۱^{n-۱}۱ + C(n,۲)۱^{n-۲}۱^۲ + \cdots + C(n,k)۱^{n-k}۱^k + \cdots + C(n,n)۱^n$$

$$= C(n,\circ) + C(n,۱) + C(n,۲) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,k)$$

□

## ۳.۱ اجتماع و اشتراک

همان طور که با کمک اصل تصریح توانستیم از یک مجموعه مفروض یک مجموعه جدید بسازیم، با کمک اعمال «اجتماع» دو یا چند مجموعه، یا « اشتراک» دو یا چند مجموعه و یا «مکمل» یک مجموعه، می توانیم مجموعه جدیدی بسازیم.

این اعمال نه تنها در توصیف ساده تر برخی اشیا ریاضی می توانند مفید واقع شوند، بلکه به طور مکرر در جریان مطالعه اشیا ریاضی ظاهر می شوند. به عنوان مثال:

۱- وقتی می خواهید دامنه دو تابع را بیابید.

۲- اعضایی از $\mathbb{R}$، که بزرگتر است ۱ یا کوچکتر از صفرند،

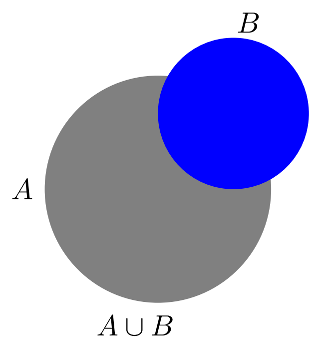
۳- مضارب اعداد اول ، یعنی مجموعه هایی به صورت $\{pk \mid k \in \mathbb{N}\}$.

۴- اعداد گنگ یا اعدادی که گویا نیستند.

۵- اعداد مرکب، یعنی اعدادی که اول نیستند و مثال های بیشمار و جالب دیگر که اگر به زبان اجتماع یا اشتراک بیان شوند حقایق بیشتری را نشان می دهند.

**تعریف ۱۳.** اجتماع دو مجموعه $A$ و $B$، که با $A \cup B$ نشان داده می شود، مجموعه تمام عنصرهایی است که حداقل به یکی از دو مجموعه $A$ و $B$ تعلق دارند. یعنی $x \in A \cup B$ اگر وفقط اگر $x \in A \vee x \in B$.

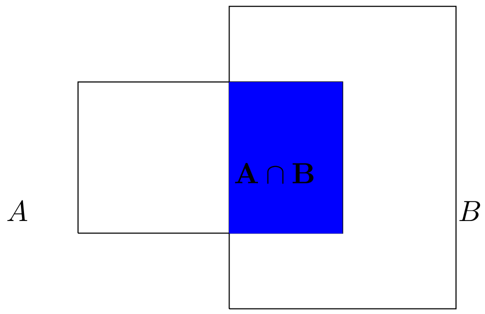
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{یا} \quad x \in B\}.$$




**مثال ۱۴.** هر عدد طبیعی، یا فرد است یا زوج. بنابراین اگر مجموعه همه اعداد فرد را با $O$ و مجموعه همه اعداد زوج را با $E$ نشان دهیم این حقیقت می گوید $\mathbb{N} = E \cup O$.

**تعریف ۱۵.** اشتراک دو مجموعه $A$ و $B$، که با $A \cap B$ نمایش داده می شود، مجموعه تمام عنصرهایی است که هم متعلق به $A$ هستند و هم متعلق به $B$. یعنی:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$




**مثال ۱۶.** فرض کنید $A=\{۳k \mid k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{۵m \mid m\in\mathbb{N}\}$ آنگاه

$$\begin{aligned} A\cap B &= \{n\in\mathbb{N} \mid (n\in A)\wedge(n\in B)\} \\ &= \{n\in\mathbb{N} \mid (\text{مضرب ۳ است } n)\wedge(\text{مضرب ۵ است } n)\} \\ &= \{n\in\mathbb{N} \mid \text{بر ۱۵ بخشپذیر است } n\} \end{aligned}$$

اگر $A\cap B=\varnothing$ آنگاه می‌گویند $A$ و $B$ «جدا ازهم»[1] هستند و اگر $A\neq B$ آنگاه می گویند $A$ و $B$ «متمایز»[2] اند. به عنوان مثال مجموعه اعداد زوج و اعداد فرد از هم «جدایند» در حالی که مجموعه اعداد فرد و مجموعه مضارب ۳ از یکدیگر متمایز هستند.

آیا شما می توانید مثال های دیگری از مجموعه های مجزا بزنید؟ از مجموعه های متمایز چطور؟

**مثال ۱۷.** *(۱)* فرض کنید $\mathbb{Z}_{\geq ۰}=\{۰,۱,۲,۳,۴,\dots\}$ و $\mathbb{Z}_{\leq ۰}=\{۰,-۱,-۲,-۳,-۴,\dots\}$ آنگاه

$$\mathbb{Z}_{\geq ۰}\cap\mathbb{Z}_{\leq ۰}=\{۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳,\dots\} \qquad \mathbb{Z}_{\geq ۰}\cap\mathbb{Z}_{\leq ۰}=\{۰\}$$

*(۲)* فرض کنید $A=[۰,۱]$ و $B=[۱,۲]$، آنگاه $A\cap B=\{۱\}$ و $A\cup B=[۰,۲]$.

*(۳)* فرض کنید $A$ یک مجموعه باشد. آنگاه $A\cup A=A$ و $A\cap A=A$. ( این مثال شما را یاد چه قانونی می اندازد؟).

---
[1] Disjoint
[2] Distinct

(۴) فرض کنید $\mathbb{Q}$ محموعه «اعداد گویا» و $Irr$ مجموعه «اعداد گنگ» [۱] باشند. آنگاه $\mathbb{Q} \cap Irr = \phi$ و $\mathbb{Q} \cup Irr = \mathbb{R}$.

**قضیه ۱۸.** فرض کنیم $X$ یک مجموعه و $A$، $B$، و $C$ زیرمجموعه هایی از $X$ هستند. آنگاه داریم:

(الف) یکه ها

$$A \cup \phi = A$$

$$A \cap X = A$$

(ب) قانون خودتوانی

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

(پ) قانون جابه جایی

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(ت) قانون شرکت پذیری

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(ث) قانون پخش پذیری

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

[۱] *Irrational*

**سوال ۱۹.** آیا موارد *(ب)* تا *(ث)* برای شما آشنا نیستند؟

اثبات. برای اثبات این عبارات، چون مربوط به تساوی مجموعه هاست، باید از تعریف تساوی مجموعه ها استفاده کنیم. موارد (الف) تا (پ) به سادگی از تعریف نتیجه می شود.

(د): بنابرتعریف اجتماع

$$x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in A \vee (x \in B \cup C)$$

و

$$x \in B \cup C \iff x \in B \vee x \in C$$

پس

$$x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

بنابر قانون شرکت پذیری در ترکیب فصلی، $(x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C)$ با $(x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C)$ هم ارز است. بنابر تعریف (۱۳)، گزاره اخیر با $(x \in A \cup B) \vee (x \in C)$ هم ارز است. بنابراین $x \in (A \cup B) \cup C$.
پس داریم

$$x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cup C$$

پس بنابر تعریف تساوی دو مجموعه، $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

برهان بالا را می توان به صورتی روشن در قالبی منظم از مرحله های منطقی اساسی خلاصه کرد و برای سهولت ارجاع، دلیل درستی هر مرحله را در سمت چپ آن نوشت.

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cup C) &\iff (x \in A) \vee (x \in B \cup C) && \text{بنابرتعریف} \cup \\
&\iff (x \in A) \vee [(x \in B) \vee (x \in C)] && \text{بنابرتعریف} \cup \\
&\iff [(x \in A) \vee (x \in B)] \vee (x \in C) && \text{شرکت پذیری} \vee \\
&\iff (x \in A \cup B) \vee (x \in C) && \text{بنابرتعریف} \cup \\
&\iff x \in (A \cup B) \cup C && \text{بنابرتعریف} \cup
\end{aligned}$$

برهان $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ به روشی مشابه انجام می گیرد.

برای اثبات (ث) نیز به روشی مشابه عمل می کنیم.

$$
\begin{aligned}
x \in [A \cap (B \cup C)] &\iff [(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)] && \text{بنابرتعریف}\cap \\
&\iff (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)] && \text{بنابرتعریف}\cup \\
&\iff [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)] && \text{قانون پخشپذیری منطق} \\
&\iff [(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)] && \text{بنابرتعریف}\cap \\
&\iff x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)] && \text{بنابرتعریف}\cup
\end{aligned}
$$

به این ترتیب، بنابر تعریف تساوی دو مجموعه $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $\square$

## ۴.۱ مجموعه های متمم

در در دو جلسه قبل آموختیم که چگونه از دو مجموعه مفروض، یک مجموعه جدید بسازیم و با این مجموعه های جدید که ساخته می شوند بتوانیم خواص بیشتری از اشیایی که مطالعه می کنیم را توصیف کنیم. مثلا دیدید که با کمک اجتماع توانستیم مضارب مشترک دو عدد را توصیف کنیم یا با کمک اشتراک دومجموعه نقاطی که جمع یا ضرب دو تابع در آن نقاط تعریف می شوند را توصیف کنیم.

امروز می خواهیم عمل دیگری تعریف کنیم که حاصل آن یک مجموعه جدید است که این مجموعه هم کمک زیادی در توصیف اشیایی که می خواهیم مطالعه کنیم به ما می دهد. مثلا می دانیم که تابع $f(x) = \sin x$ روی تمام $\mathbb{R}$ تعریف می شود ولی تابع $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ روی تمام $\mathbb{R}$ تعریف نمی شود. بلکه باید نقاطی که در آنها مخرج صفر می شود را باید خارج کنیم.

یا به عنوان مثال دیگر می توانیم مجموعه مقسوم علیه های یک عدد طبیعی بزرگتر از یک، تعدادی متناهی است و اگر بخواهیم بدانیم چه اعداد طبیعی ای هستند که نسبت به $n$ اولند کافی است اعداد طبیعی ای که « جزو مضارب مقسوم علیه های $n$» نباشند.

**تعریف ۲۰.** اگر $A$ و $B$ دو مجموعه باشند، **متمم**[۱] $B$ **نسبت به مجموعه** $A$ مجموعه ای است که آن را با $A-B$ یا $A \setminus B$ و یا $C_B^A$ نشان می دهند به صورت زیر تعریف می شود.

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\} \tag{۲}$$

توجه داشته باشید در این تعریف فرض نکرده ایم $B \subseteq A$.

**مثال ۲۱.** گیریم $B = \{c, d, e, f\}$ و $A = \{a, b, c, d\}$. مجموعه های $A - B$ ، $A - (A \cap B)$ به صورت زیرند.

$$A - B = \{a, b, c, d\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$$

و

$$A - (A \cap B) = \{a, b, c, d\} - \{c, d\} = \{a, b\}$$

هرسه عمل اجتماع، اشتراک و متمم با فرض این بوده که مجموعه هایی که این عمل ها را روی آنها انجام می دهیم زیر مجموعه یک مجموعه هستند.

اگرچه مجموعه تمام مجموعه ها، موسوم به مجموعه جهانی، به مفهوم مطلق آن وجو ندارد ( در واقع اگر بپذیریم که وجود دارد به تناقض می رسیم)، اما می توان فرض کرد که تمام **مجموعه هایی که از این به بعد درنظر می گیریم زیر مجموعه هایی از یک مجموعه ثابت $U$ هستند.** برای ارائه قواعد اساسی مربوط به متمم گیری با ساده ترین صورت ممکن، تمام متمم ها نسبت به مجموعه $U$ محاسبه می شوند، مگر این که خلاف آن قید شده باشد. در این حالت $U - A$ را با $A'$ نشان می دهیم.

( مشاهده می شود متمم گیری به مفهومی که در بالا بیان شده تعبیر نقیض یک گزاره در نظریه مجموعه هاست).

**مثال ۲۲.** نشان دهید $A - B = A \cap B'$.

[۱] *Complement*

حل.

| | |
|---|---|
| $x \in A \cap B' \equiv (x \in A) \wedge (x \in U - B)$ | **تعریف** $\cap$، **تعریف** $'$ |
| $\equiv (x \in A) \wedge [(x \in U) \wedge (x \notin B)]$ | **تعریف ۵** |
| $\equiv [(x \in A) \wedge (x \in U)] \wedge (x \notin B)$ | **شرکت پذیری** |
| $\equiv (x \in A \cap U) \wedge (x \notin B)$ | **تعریف** $\cap$ |
| $\equiv (x \in A) \wedge (x \notin B)$ | $A \cap U = A$ |
| $\equiv (x \in A - B)$ | **تعریف (۲)** |

پس بنابرتعریف تساوی دو مجموعه، $A \cap B' = A - B$. □

**قضیه ۲۳.** فرض کنیم $A$ و $B$ دو مجموعه هستند. آنگاه

(الف) $(A')' = A$.

(ب) $U' = \varnothing$ و $\varnothing' = U$.

(پ) $A \cup A' = U$ و $A \cap A' = \varnothing$.

(ت) $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $A' \supseteq B'$.

اثبات. قسمت های (الف)، (ب)، و (پ) با آسانی از تعریف ها نتیجه می شوند و آوردن برهان های آنها را به عنوان تمرین به شما واگذار می کنیم. حال برهان قسمت (ت) را ارائه می دهیم.

| | |
|---|---|
| $A \subseteq B \equiv [(x \in A) \longrightarrow (x \in B)]$ | **تعریف** $\subseteq$ |
| $\equiv [(x \notin B) \longrightarrow (x \notin A)]$ | **قانون عکس نقیض** |
| $\equiv [(x \in B') \longrightarrow (x \in A')]$ | **تعریف** $'$ |
| $\equiv B' \subseteq A'$ | **تعریف** $\subseteq$ |

به این ترتیب ثابت کردیم که $A \subseteq B \equiv (B' \subseteq A')$. □

مفید ترین ویژگی متمها، قضیه دمورگان است که در زیر می آید. می توانید رابطه این قضیه با قضیه دمورگان برای گزاره ها را مقایسه نمایید؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

**قضیه ۲۴** ((قضیه دمورگان)). اگر $A$ و $B$ دو مجموعه دلخواه باشند، آنگاه

(الف) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

(ب) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

اثبات. (الف)

| | |
|---|---|
| $x \in (A \cup B)' \equiv \sim [x \in (A \cup B)]$ | **تعریف** $'$ |
| $\equiv \sim [(x \in A) \vee (x \in B)]$ | **تعریف** $\cup$ |
| $\equiv \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B)]$ | **قانون دمورگان در منطق** |
| $\equiv (x \notin A) \wedge (x \notin B)$ | **تعریف** $'$ |
| $\equiv x \in (A' \cap B')$ | **تعریف** $\cap$ |

پس بنابرتعریف تساوی دومجموعه $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

اثبات (ب) به روشی مشابه انجام می شود. □

**مثال ۲۵.** سه مجموعه دلخواه $A$، $B$، و $C$ مفروض اند. تعیین کنید آیا مجموعه $A \cap (B - C)$ با مجموعه $(A \cap B) - (A \cap C)$ مساوی است؟

حل.

$$
\begin{aligned}
(A\cap B)-(A\cap C) &= (A\cap B)\cap(A\cap C)' && \textbf{(۲۲)}\\
&= (A\cap B)\cap(A'\cup C') && \textbf{قضیه دمورگان}\\
&= (A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap C') && \textbf{پخشپذیری}\\
&= (A\cap A'\cap B)\cup(A\cap B\cap C') && \textbf{جابه جایی}\\
&= \varnothing\cup[A\cap(B\cap C')] && \textbf{قضیه (۲۳) و } A\cap A'=\varnothing\\
&= [A\cap(B-C)] && \textbf{قضیه و (۲۲)}
\end{aligned}
$$

بنابراین ثابت کردیم که $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$. □

تمرینات ۹ تا ۱۷ صفحه های ۵۰ و ۵۱ کتاب را به عنوان تکلیف حل نمایید. این تمرینها را در زیر نیز نوشته ام.

**تمرین ۲۶.** ۱. فرض کنید $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و $C$ مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A_1-C)\cup(A_2-C)\cup\cdots\cup(A_n-C)=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)-C$$

۲. فرض کنید $B_1, B_2, \ldots, B_n$ و $C$ مجموعه هستند. نشان دهید

$$(B_1-C)\cap(B_2-C)\cap\cdots\cap(B_n-C)=(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n)-C$$

۳. فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه هستند. ثابت کنید $A$ و $B-A$ از هم جداین.و نیز $A\cup=A\cup(B-A)$.

۴. نشان دهید $A\cup B=(A'\cap B')'$ و $A\cap B=(A'\cup B')'$.

۵. مجموعه های $A$ و $B$ چه شرط هایی باید داشته باشند تا $A-B=B-A$ برقرار باشد.

۶. فرض کنیم $A$، $B$، و $C$ سه مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$$

۷. فرض کنیم $A$، $B$، و $C$ سه مجموعه هستند. نشان دهید

$$(A-B)-C=A-(B\cap C)$$

۸. فرض کنیم $A$ و $B$ دو مجموعه هستند. ثابت کنید $A\cap B'=\varnothing=A'\cap B$ اگر و تنها اگر $A=B$.

۹. فرض کنیم $A$ و $B$ زیر مجموعه هایی از مجموعه $X$ هستند. درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید

$$(X-A)\cap(X-B)=X-(A\cap B).$$

## ۵.۱ خانواده های مجموعه های اندیس دار

**مشاهده:** ۱- فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی است و $n$ یک عضو دلخواه $\mathbb{N}$. در این صورت مجموعه

$$\{n, ۲n, ۳n, ۴n, ۵n, \dots\} = \{nk | k\in\mathbb{N}\}$$

را مجموعه مضارب $n$ می نامیم. با تغییر $n$ زیر مجموعه های متمایزی از $\mathbb{N}$ تشکیل می شود. مثلاً

$$\{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, \dots\} = \{۲k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

$$\{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, \dots\} = \{۳k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

$$\{۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰, \dots\} = \{۴k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

$$\{۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, \dots\} = \{۵k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

$$\dots$$

همان طور که از نحوه ساختن مجموعه مشاهد می شود تعداد این مجموعه ها با تعداد عناصر $\mathbb{N}$ یکی است. به علاوه این مجموعه ها به صورتی طبیعی ظاهر می شوند و برای بررسی مساله بخش پذیری اعداد مورد مطالعه قرار می گیرند.

حال سوالی که پیش می آید این است که این مجموعه ها را چگونه نام گذاری کنیم تا بتوانیم آنها را از یک دیگر تمیز دهیم؟

**مشاهده دیگر:** فرض کنیم $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی است که در نقطه $c$ پیوسته است. در این صورت بنابرتعریف

$$(\forall\varepsilon>\circ)(\exists\delta>\circ)(\forall x)(|x-c|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(c)|<\varepsilon)$$

اما عبارت $(\forall x)(|x-c|<\delta)$ به معنای مجموعه $\{x\in\mathbb{R}\mid c-\delta<x<c+\delta\}$ یا همان بازه $(c-\delta,c+\delta)$ است. چون $\delta$ به $\varepsilon$ وابسته است بنابراین ملاحظه می شود با تغییر $\varepsilon$، $\delta$ و در نتیجه مجموعه های $(c-\delta,c+\delta)$ نیز تغییر می کنند و چنین مجموعه هایی تعداد شان بیشمار است ( برخلاف مثال قبل که تعداد این مجموعه های شمارا بود). در این صورت سوال مشابه سوال قبل یش می آید مبنی براینکه

چگونه مجموعه های $(c-\delta,c+\delta)$ را نام گذاری کنیم تا بتوانیم آنها را از یکدیگر تمیز دهیم. در این جا حتی ممکن است $\varepsilon$ های مختلف، یک $\delta$ و در نتیجه یک مجموعه $(c-\delta,c+\delta)$ تولید کند.

مثال های زیادی می توان ارائه داد که مجموعه هایی که درجریان مطالعه اشیاء ریاضی ظاهر می شوند تعداد شان بسیار زیاد است و باید آنها را به صورتی نام گذاری کرد تا بتوان آنها را از یکدیگر تمیز داد. به علاوه چگونه می توان اعمال اجتماع و اشتراکی را که برای دو مجموعه یا برای تعداد متناهی مجموعه تعریف کردیم برای تعداد دلخواه تعریف کرد.

ما در این قسمت می خواهیم اعمال اجتماع و اشتراک را برای تعداد دلخواه از مجموعه ها تعریف کنیم. منتهی قبل از آن باید آنها را چنا نام گذاری کنیم که هنگام انجام اعمال اشتراک یا اجتماع یا عضو گیری معلوم باشد که از چه مجموعه ای عضو را انتخاب کرده ایم.

یادآوری می شود که یک مجموعه دسته ای از عنصر های متمایز است. به عبارتی ساده ولی نه چندان دقیقی، یک **خانواده** دسته ای از اشیاء متمایز است که ممکن است از یکدیگر متمایز نباشند.

هریک از این اشیا، عضو خانواده نامیده می شوند. مثلاً $\{a,a,a\}$ یک خانواده با سه عضو $a,a,a$ است، اما همین خانواده $\{a,a,a\}$ اگر به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته شود، مجموعه تک عضوی $\{a\}$ است که تنها یک عضو دارد.

فرض کنید $\Gamma$ یک مجموعه است و با هر عنصر $\Gamma$ مانند $\gamma$ یک مجموعه $A_\gamma$ متناظر است. خانواده تمام مجموعه های نظیر $A_\gamma$ را **خانواده مجموعه های اندیسدار** گویند.

همچنین می‌گویند خانواده مجموعه ها با مجموعه $\Gamma$ اندیسدار شده است و آن را با نماد زیر نشان می دهند

$$\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

**مثال ۲۷.** در مثال اول بالا، مجموعه های $\{nk|k \in \mathbb{N}\}$ را با $M_n$ نمایش می دهیم که $n \in \mathbb{N}$. یعنی مجموعه اندیس گذار $\mathbb{N}$ است.

یا در مثلا دوم مجموعه های $(c-\delta, c+\delta)$ را با $V_\delta$ می توان نشان داد و مجموعه اندیس گذار زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}_{>0}$ است.

به عنوان مثالی دیگر خانواده مجموعه های $\{1,2\},\{3,4\},\ldots$ را می توان خانواده مجموعه های اندیس داری درنظر گرفت که با مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ اندیسدار شده اند . درآن به ازای هر $n$، $A_n = \{n, 2n\}$. این خانواده مجموعه ها را می توان با نماد $\{\{n, 2n\}|n \in \mathbb{N}\}$ نشان داد.

یک خانواده دلخواه از مجموعه ها ممکن است اندیسدار نباشد، اما در بسیاری از حالت ها به آسانی می توان یک مجموعه $\Gamma$ برای اندیسدار کردن خانواده مجموعه های داده شده پیدا کرد.

**مثال ۲۸.** خانواده $\mathcal{F}$، متشکل از مجموعه های $\varnothing$، $\mathbb{N}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ را اندیسدار کنید.

حل. چون این خانواده شش عضو دارد که دو عضو آن مجموعه $\mathbb{R}$ است، $\Gamma$ را مجموعه $\{1,2,3,4,5,6\}$ انتخاب می کنیم و می نویسیم $A_1 = \varnothing$ ، $A_2 = \mathbb{N}$، $A_3 = \mathbb{Z}$، $A_4 = \mathbb{Q}$، $A_5 = \mathbb{R}$، و $A_6 = \mathbb{R}$. اکنون این خانواده یای است از مجموعه های اندیس دار. $\square$

تمام نمادهایی را که برای مجموعه ها به کار برده ایم، برای خانواده ها نیز باید به کار می بریم. به عنوان مثال $\varnothing \in \mathcal{F}$ و $\mathbb{R}_+ \notin \mathcal{F}$ با این معناست که $\varnothing$ عضوی از خانواده $\mathcal{F}$ است و $\mathbb{R}_+$ عضوی از $\mathcal{F}$ نیست. همچنین می توانیم بنویسیم $\mathcal{F} = \{\varnothing, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\}$.

اکنون مفاهیم اجتماع $\cup$ و اشتراک $\cap$ را به خانواده مجموعه ها تعمیم می دهیم.

**تعریف ۲۹.** گیریم $\mathcal{F}$ یک خانواده دلخواه از مجموعه ها باشد. اجتماع مجموعه های خانواده $\mathcal{F}$، مجموعه تمام عنصر هایی است که به یکی از زیر مجموعه های خانواده $\mathcal{F}$، مانند $A$ ، متعلق هستند. این اجتماع را با نماد

$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$ یا $\cup\mathcal{F}$ نمایش می دهیم. بنابراین

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A=\{x\in U \mid x\in A,\quad A\in\mathcal{F}\ \ \textbf{به ازای یک}\}$$

اگر خانواده $\mathcal{F}$ با $\Gamma$ اندیسگذاری شده باشد، می توان نماد دیگری که در زیر می آید به کار برد

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma=\{x\in U \mid x\in A_\gamma,\quad \gamma\in\Gamma\ \ \textbf{به ازای یک}\}$$

**یادآوری ۳۰.** با زبان سورها، تعریف فوق را به صورت زیر می توان نوشت

$$x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \iff \exists\gamma_\circ\in\Gamma : x\in A_{\gamma_\circ}$$

نقیض این گزاره عبارت است از

$$\sim(x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \iff \sim((\exists\gamma_\circ\in\Gamma)(x\in A_{\gamma_\circ})) \iff$$

**تمرین ۳۱.** قسمت آخر گزاره اخیر را بنوسید.

اگر $\Gamma$، مجموعه اندیسگذار، متناهی باشد، یعنی به ازای یک عدد طبیعی $n$، $\Gamma=\{۱,۲,۳,\dots,n\}$، آنگاه اغلب به جای $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ از نمادهایی مانند

$$\bigcup_{i=۱}^{n} A_i \quad \textbf{یا} \quad A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_n$$

که به ذهن نزدیکترند، استفاده می کنیم.

**مثال ۳۲.** ۱. فرض کنیم $\Gamma=\{۱,۲,\dots,۱۰۰\}$ و فرض کنیم $A_n=\{n,۲n\}$. مثلاً $A_۱=\{۱,۲\}$، $A_۲=\{۲,۴\}$، $A_۳=\{۳,۶\}$، $A_۴=\{۴,۸\}$ و همین طور تا $A_{۱۰۰}=\{۱۰۰,۲۰۰\}$. در نتیجه

$$\bigcup_{n=۱}^{۱۰۰} A_n=\bigcup_{n=۱}^{۱۰۰}\{n,۲n\}=\{۱,۲,۳,\dots,۲۰۰\}$$

مثلاً ۲۵۵ به هیچیک از مجموعه های $A_n$ تعلق ندارد پس $۲۵۵\notin\bigcup_{i=۱}^{۱۰۰} A_i$.

۲. به عنوان مثالی دیگر فرض کنید $A_n = (0, \frac{1}{n})$. به عنوان مثال

$$A_1 = (0,1), A_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right), A_3 = \left(0, \frac{1}{3}\right), \ldots$$

حال

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{100} = (0,1) \cup (0, 1/2) \cup (0, 1/3) \cup \cdots \cup (0, 1/100) = (0,1)$$

۳. اجتماع خانواده مجموعه های زیر را پیدا کنید

$$\{1,\}, \{2,3\}, \{3,4,5\}, \ldots, \{n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1\}$$

**حل.** این خانواده مجموعه ها را می توان با $\Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}$ اندیسگذاری کرد، در این صورت به ازای هر $i \in \Gamma$، $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots, 2i-1\}$. مساله برمی گردد به یافتن مجموعه $\bigcup_{i=1}^{n}\{i, i+1, \ldots, 2i-1\}$. توجه کنید که هر عدد صحیح بین ۱ تا $2n-1$ به بعضی از این $A_i$ های این خانواده متعلق است، و هیچ عنصر دیگری به هیچ یک از این $A_i$ ها متعلق نیست. پس

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{i, i+1, \ldots, 2i-1\} = \{1, 2, 3, \ldots, 2n-1\}$$

**تمرین ۳۳.** مطلوب است $\mathbb{N} - \bigcup_{i=1}^{n}\{i, i+1, \ldots, 2i-1\}$. آیا روشی ساده تر برای تعیین مجموعه متمم $\bigcup_{i=1}^{n}\{i, i+1, i+2, \ldots, 2i-1\}$ ، وجود دارد؟

□

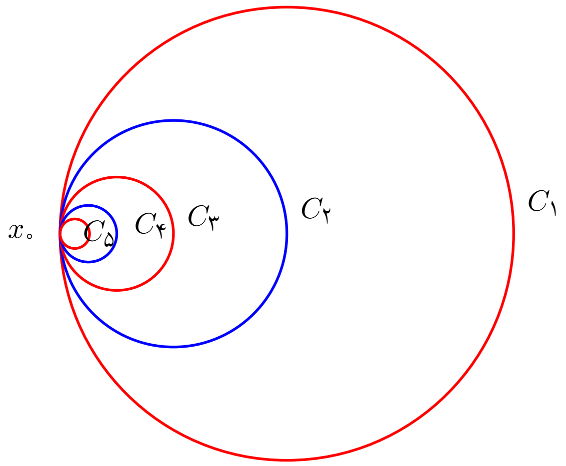
**مثال ۳۴. اجتماع نامتناهی دایره(گوشواره بینهایت)[1]**

فرض کنیم $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n}\}$ دایره هایی به مرکز $(\frac{1}{n}, 0)$ و شعاع $1/n$ هستند. آنگاه اجتماع این مجموعه ها، $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_n$ بنا بر تعریف به صورت مجموعه

$$X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, (x - \frac{1}{n_0})^2 + y^2 = \frac{1}{n_0^2}\right\}$$

نمودار این محموعه را می توان به صورت زیر تصور کرد. دایره هایی که در مبدا بر یکدیگر مماس هستند.

[1] *Infinite Earing*




گوشواره‌بینهایت

**تعریف ۳۵.** فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک خانواده دلخواه از مجموعه ها است. اشتراک مجموعه های $\mathcal{F}$ ، مجموعه تمام عنصرهایی است که به تمام مجموعه های $\mathcal{F}$ تعلق دارند. اشتراک را با نماد $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$ یا $\bigcap\mathcal{F}$ نشان می دهند. بنابراین

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \{x\in U \mid x\in A, A\in\mathcal{F} \quad \text{برای هر}\}$$

گزاره « به ازای هر $A\in\mathcal{F}$، $x\in A$» را که در اینجا آمده است، می توان به صورت «$A\in\mathcal{F} \longrightarrow x\in A$» نیز بیان کرد. طرز بیان اخیر، همان گونه که در قضیه بعد خواهیم دید برای اثبات قضایا مزیت دارد.

اگر خانواده $\mathcal{F}$ با $\Gamma$ اندیس گذاری شده باشد، می توان نماد دیگری را که در زیر می آید به کار برد.

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \{x\in U \mid x\in A_\gamma, \gamma\in\Gamma, \text{برای هر}\}$$

**یادآوری ۳۶.** به زبان سورها، تعریف اشتراک دلخواه مجموعه های خانواده $\{F_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$ را می توان به صورت زیر نوشت.

$$x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \iff (\forall\gamma\in\Gamma)(x\in A_\gamma)$$

حال نقیض گزاره فوق به صورت

$$\sim(x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \iff \sim((\forall\gamma\in\Gamma)(x\in A_\gamma)) \iff \quad (۳)$$

**تمرین ۳۷.** نقیض ذکر شده در (۳) را تکمیل کنید.

اگر $\Gamma$ مجموعه اندیس، متناهی باشد، یعنی به ازای یک عدد صحیح مثبت $n$، $\Gamma = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$، آنگاه همانند حالت اجتماع به جای $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ می نویسیم

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad \textbf{یا} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

فرض کنیم $a$ و $b$ دو عدد حقیقی هستند. منظور از فاصله باز $(a, b)$ مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ است. پس اگر $a > b$ آنگاه $(a, b) = \varnothing$.

**مثال ۳۸.**

$$A_1 = (0, 1), A_2 \left(0, \frac{1}{2}\right), A_3 = \left(0, \frac{1}{3}\right), \ldots, A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

در این صورت

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

زیرا

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n$$

حال اگر خانواده $\mathcal{F}$ به صورت $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ باشد آنگاه

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{\}$$

در واقع اگر $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \varnothing$ آنگاه یک $x$ وجود دارد به طوری که $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$. چون $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$ پس $x > 0$. بنابراین به ازای یک $m$، $mx > 1$. درنتیجه $x > \frac{1}{m}$. پس $x \notin \left(0, \frac{1}{m}\right)$ که این متناقض با $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ است.

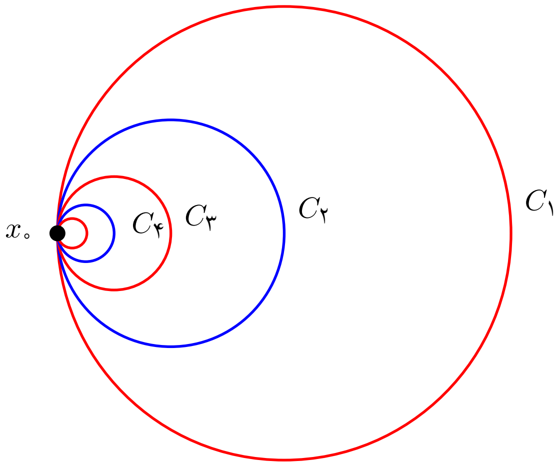
**مثال ۳۹. اشتراک نامتناهی دایره**[1]

[1] *Infinite Earing*

فرض کنیم $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid (x-\frac{۱}{n})^۲ + y^۲ = \frac{۱}{n}\}$ دایره هایی به مرکز $(\frac{۱}{n}, ۰)$ و شعاع $۱/n$ هستند. آنگاه اشتراک این مجموعه ها، $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_n$ بنا بر تعریف به صورت مجموعه

$$X = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid \forall n \in \mathbb{N}, (x-\frac{۱}{n})^۲ + y^۲ = \frac{۱}{n^۲}\right\} = \{(۰,۰)\}$$

نمودار این محموعه را می توان به صورت زیر تصور کرد. دایره هایی که در مبدا بر یکدیگر مماس هستند.




اشتراک نامتناهی از دایره‌های $C_n$

**قضیه ۴۰.** فرض کنیم $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده تهی از مجموعه ها است. یعنی $\Gamma = \varnothing$. آنگاه

(الف) $\bigcup_{\gamma\in\varnothing} A_\gamma = \varnothing$.

(ب) $\bigcap_{\gamma\in\varnothing} A_\gamma = U$

برای این که نشان دهیم این دو نتیجه درست اند، از دو خاصیت استفاده می کنیم یکی نقیض سور وجودی ( یعنی $(x)(\sim p(x)) \equiv (\exists x)(p(x)) \sim$ و دیگری تعریف زیر محموعه. همچنین در آخر از قانون استنتاج $(c \longrightarrow p)$.

اثبات. برای اثبات $\bigcup_{\gamma\in\varnothing} A_\gamma = \varnothing$ کافی است نشان دهیم $\bigcup_{\gamma\in\varnothing} A_\gamma \subseteq \varnothing$. اما برای نشان دادن درستی این رابطه شمول، از عکس نقیض آن استفاده می کنیم. یعنی گزاره « برای $x \notin \varnothing$ آنگاه $x \notin \bigcup_{\gamma\in\varnothing} A_\gamma$» درست

است.

$$x \notin \bigcup_{\gamma\in\varnothing} A_\gamma \equiv\sim (x \in \bigcup_{\gamma\in\varnothing} A_\gamma \qquad \textbf{نماد } \notin$$

$$\equiv\sim (x \in A_\gamma, \quad \gamma \in \varnothing \ \textbf{برای یک}) \qquad \textbf{تعریف (۲۹)}$$

$$\equiv (x \notin A_\gamma, \quad \gamma \in \varnothing \ \textbf{برای هر}) \qquad \textbf{نقیض سازی سور}$$

$$\equiv (\gamma \in \varnothing \longrightarrow x \notin A_\gamma)$$

چون $\gamma \in \varnothing$ یک تناقض است، بنابر قضیه ای از فصل اول، $(c \longrightarrow p)$، گزاره اخیر برای هر $x \in U$ درست است. پس برهان درستی قسمت (الف) کامل است.

(ب) نشان می دهیم که برای هر $x$ در $U$، $x \in \bigcap_{\gamma\in\varnothing} A_\gamma$. اما

$$x \in \bigcap_{\gamma\in\varnothing} A_\gamma \equiv (x \in A_\gamma, \forall\gamma \in \varnothing) \qquad \textbf{تعریف (۳)}$$

$$\equiv (\gamma \in \varnothing \longrightarrow x \in A_\gamma)$$

چنانکه در برهان قسمت (الف) شرح دادیم، گزاره اخیر برای هر $x \in U$ راست است. پس اثبات کامل است.

□

خیلی از قضایای مربوط به اعمال روی تعدادی متناهی مجموعه را می توان به قضایایی که به اعمال روی یک خانواده دلخواه مربوط می شوند تعمیم داد. مثلا، قضیه زیر تعمیم قضیه دمورگان است

**قضیه ۴۱** (تعمیم قضیه دمورگان). فرض کنیم $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده ای دلخواه از مجموعه ها است. آنگاه

(الف) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$

(ب) $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$

اثبات. ما فقط قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم و قسمت (ب) را به دانشجو وامی‌گذاریم.

| | |
|---|---|
| $x \in \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' \equiv \sim \left(x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)$ | **تعریف** $'$ |
| $\equiv \sim (\exists\gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma)$ | **تعریف (۲۹)** |
| $\equiv (\forall\gamma \in \Gamma)(x \notin A_\gamma)$ | **نقیض سازی سور** |
| $\equiv (\forall\gamma \in \Gamma)(x \in A'_\gamma)$ | **تعریف** $'$ |
| $\equiv x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$ | **تعریف (۳)** |

پس بنا بر تعریف تساوی دو مجموعه $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)' = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$. □

قضیه زیر تعمیی قضیه پخش پذیری اشتراک و اجتماع برای دو مجموعه است.

**قضیه ۴۲** (تعمیم قانون های پخشپذیری). فرض کنیم $A$ یک مجموعه و $\mathcal{F} = \{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده دلخواه از مجموعه هستند. آنگاه

(الف) $A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cap B_\gamma)$

(ب) $A \cup \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A \cup B_\gamma)$

اثبات. (الف) عنصر $x$ در مجموعه $A \cap (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma)$ اگر و تنها اگر $x \in A$ و $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$، که مطابق تعریف (۲۹)، هم ارز است با

**به ازای یک** $\gamma \in \Gamma$ $\quad x \in B_\gamma$ **و** $x \in A$

بنابر تعریف شرط اخیر را می توان با عبارت

**به ازای یک** $\gamma \in \Gamma$ $\quad x \in A \cap B_\gamma$

بیان کرد، و این بنابر تعریف (۲۹) به معنای $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cap B_\gamma)$ است. پس بنابر تعریف تساوی دو مجموعه، $A \cap (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cap B_\gamma)$.

□

## ۶.۱ پارادوکس راسل

آموختیم که مجموعه مفهوم مناسی برای گردآوری اشیایی با یک یا چند خاصیت معین است. این سبب می شود اعضای آن به طور کامل مشخص شوند. اما برت راند راسل [۱]، راضی دان و فیلسوف انگلیسی، متوجه نکته ای «دوگانه نما» یا «تناقض آمیز» در طرز تلقی بنیان گذاران نظریه مجموعه ها از مفهوم مجموعه گردید که این نکته به «پارادوکس راسل» یا «دوگانه نمای راسل» معروف گردیده است. به طور مشخص، اگر بپذیریم که یک مجموعه گردآیه ای از مجموعه ها است پس باید بپذیریم که «مجموعه ای مانند $\mathscr{U}$ وجود دارد که شامل تمامی مجموعه ها است». در صورتی این را بپذیریم، باید این $\mathscr{U}$ خودش نیز در $\mathscr{U}$ مجموعه باشد. این کمی غیر منتظره است و چون برتراند راسل آن را متوجه شده بود به دوگانه نمای راسل معروف شده است. که این دوگانه نما به هیچ وجه به معنای آن نیست که خللی منطقی در نظریه مجموعه ها وجود دارد، بلکه این نقیصه، با یک فرض ساده، که در این بخش به آن می پردازیم، برطرف می شود.

این دوگانه نما را به صورت دو لم ظاهراً متناقض بیان می کنیم و از آن یک قضیه نتیجه می گیریم. در واقع برای اثبات این حکم از الگوی $p\wedge \sim q \longrightarrow \mathbf{c} \equiv q$ استفاده می کنیم.

**لم ۴۳.** فرض کنیم که $\mathscr{U}$ مجموعه تمام مجموعه ها وجود دارد. فرض کنیم $R = \{S \in \mathscr{U} \mid S \notin S\}$. آنگاه $R \notin R$.

اثبات. بر خلاف حکم فرض کنیم $R \in R$. آنگاه از شرط تعریف کننده $R$ نتیجه می شود $R \notin R$ که با فرض $R \in R$ متناقض است. با این تناقض $R \notin R$ ثابت می شود. □

حال در لم زیر فرضی خلاف فرض لم بالا را می پذیریم.

**لم ۴۴.** فرض کنیم $\mathscr{U}$ مجموعه تمام مجموعه ها وجود دارد. فرض کنیم $R = \{S \in \mathscr{U} \mid S \notin S\}$. آنگاه $R \in R$.

اثبات. بر خلاف حکم فرض کنید که $R \notin R$. آنگاه چون $R \in \mathscr{U}$، از تعریف $R$ نتیجه می شود $R \in R$. این یک تناقض است. پس $R \in R$. □

[۱] Bertrand Russell

این دو لم به قضیه زیر می انجامد.

**قضیه ۴۵.** مجموعه تمام مجموعه ها وجود ندارد.

اثبات. بنابر لم ها (۴۳) و (۴۴)، مجموعه تمتم مجموعه ها نمی تواند وجود داشته باشد. زیرا، وجود این مجموعه به تناقض $R \in R$ و $R \notin R$ منجر می شود. □

یکی از ریاضی دانان معروف قرن بیستم این قضیه را چنین بیان می کند « هیچ چیزی شامل همه چیز نیست». این را می توان به عنوان مشابهی برای قضیه بالا درنظر گرفت.

**قضیه ۴۶.** هیچ مجموعه ای وجود ندارد که همه مجموعه ها عضو آن باشند.

اثبات. فرض کنیم $\mathscr{A}$ یک مجموعه از همه مجموعه ها باشد. یک مجموعه می سازیم که $\mathscr{A}$ به آن تعلق نداشته باشد.

فرض کنید

$$B = \{x \in \mathscr{A} \mid x \notin x\}$$

ادعا می کنیم $B \notin \mathscr{A}$. برخلاف حکم، فرض کنیم $B \in \mathscr{A}$.

بنابر نحوه ساختن $B$،

$$B \in B \iff B \in \mathscr{A} \wedge B \notin B$$

چون فرض کرده ایم $B \in \mathscr{A}$، پس حکم فوق به صورت زیر در می آید.

$$B \in B \iff B \notin B$$

که غیر ممکن است زیرا اگر یک طرف درست باشد، طرف دیگر درست نیست. پس $B \notin \mathscr{A}$. □

از این دو لم و قضیه بالا می توان دوخبر زیر را اعلام نمود.

**خبر بد:**

هیچ چیز همیشگی نیست (Nothing lasts forever).

**خبر خوب:**

هیچ چیز همیشگی نیست.

آخرین ویرایش درس نامه نظریه مجموعه ها: (۱۶ آذر ۱۴۰۰)

File's Name:Set Theory.tex