مثال

تقریبی از $\int_{0}^{1} x \sin x\, dx$ را با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای، چنان محاسبه کنید که خطای آن کمتر از 10^{-2} باشد.

حل: ابتدا لازم است با استفاده از کران بالای خطا مقدار h را محاسبه کنیم. برای این منظور داریم:

$$f(x) = x \sin x \quad , \quad f'(x) = \sin x + x \cos x \quad , \quad f''(x) = 2\cos x - x \sin x$$

با توجه به این‌که $0 \le x \le 1$،

$$= |2\cos x - x \sin x| \le 2\,|\cos x| + |x|\,|\sin x| \le 2+1=3$$

بنابراین h را از نامساوی زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{b-a}{12} h^2 \, |f''(x)| = \frac{h^2}{12} \times 3 = \frac{h^2}{4} \le 10^{-2}$$

که از آن نتیجه می‌شود: $h \le 0/2$

قرارمی‌دهیم $h = 0/2$ و $T(h)$ را حساب می‌کنیم:

$$T(0/2) = \frac{0/2}{2}(0+2(0/2 \sin 0/2 + 0/4 \sin 0/4 + 0/6 \sin 0/6 + 0/8 \sin 0/8) + \sin 1)$$

$$= 0/1(0+2\,(0/03973 + 0/15577 + 0/33879 + 0/57388) + 0/84147)$$

$$= 0/30578$$

با محاسبهٔ جواب واقعی ، خطای محاسبه انتگرال با استفاده از قاعده ذوزنقه ای به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\int_{0}^{1} x \sin x\, dx = (\sin x - x \cos x)\Big|_{0}^{1} = \sin 1 - \cos 1 = 0/30117$$

بنابراین

$$|ET(h)| = |0/30117 - 0/30578| = 0/00461 < 10^{-2}$$

قاعده سیمسون

مشاهده کردیم که قاعده ذوزنقه‌ای بسیار کند است. به عبارت دیگر، برای به دست آوردن تقریبی نه چندان دقیق باید تابع را در نقاط بسیاری محاسبه کرد. روش سیمسون براساس جایگزین کردن یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم، به جای تابع f در $[x_i , x_{i+2}]$ به دست می‌آید.

فرمول قاعده سیمسون

ابتدا چند جمله‌ای درونیاب f را در نقاط x_i، x_{i+1}، x_{i+2} می نویسیم:

$$P(x)=f_i+\theta\Delta f_i+\frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i$$

بنابراین، قرارمی‌دهیم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)\,dx$$

و انتگرال سمت راست را حساب می‌کنیم. با تغییر متغیر $x=x_i+\theta h$ داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)\,dx=\int_0^2\left(f_i+\theta\Delta f_i+\frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i\right)h\,d\theta=h\left[\theta f_i+\frac{\theta^2}{2}\Delta f_i+\left(\frac{\theta^3}{6}-\frac{\theta^2}{4}\right)\Delta^2 f_i\right]_0^2$$

بنابراین،

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx=h\left(2f_i+2\Delta f_i+\frac{1}{3}\Delta^2 f_i\right)$$

با توجه به آنکه:

$$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i \quad , \quad \Delta^2 f_i=f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i$$

لذا

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx=\frac{h}{3}\left(f_i+4f_{i+1}+f_{i+2}\right)}$$

اکنون برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمسون در کل بازهٔ $[x_0,x_n]$، از آنجا که تعداد زیر بازه های $[x_i,x_{i+2}]$ زوج است، لذا باید n زوج باشد. با این فرض داریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx+\dots+\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\simeq\frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)+\frac{h}{3}(f_2+4f_3+f_4)+\dots+\frac{h}{3}(f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n)$$

فرمول قاعده سیمسون

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx\simeq S(h)=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\dots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n)}$$

مثال تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ را با استفاده از قاعده سیمسون، به ازای $\frac{\pi}{8}$ و $h=\frac{\pi}{4}$ محاسبه کنید.

حل:

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{12}(0+2\sqrt{2}+1) = 1/00228$$

$$S\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\frac{\pi}{8}}{3}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{24}(0 + 1/53073 + 1/41421 + 3/69552 + 1) = 1/00013$$

ملاحظه می‌شود که چون

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

مثال

تقریبی از $\int_0^1 x^3 dx$ را با قاعده سیمسون و به ازای $h=\frac{1}{2}$ حساب کنید.

حل:

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{3}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right) = \frac{1}{6}\left(0 + 4\times\frac{1}{8} + 1\right) = \frac{1}{4}$$

از طرفی:

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

البته این اتفاقی نیست و در ادامه ثابت خواهیم کرد که قاعده سیمسون برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ سوم دقیق است.

خطای قاعده سیمسون

$$E\ S(h) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx - S(h) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) \quad , \quad x_0 < \eta < x_n$$

این رابطه نشان می‌دهد که خطای $S(h)$ متناسب با h^4 است، یعنی خطا برای چند جمله‌ایهای تا درجه سوم صفر است، به عبارت دیگر روش سیمسون برای چندجمله‌ایهای تا درجه ۳ دقیق است.

مثال

تقریبی از $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ را به روش سیمسون حساب کنید که خطای آن کمتر از 10^{-5} باشد.

حل:

$$f(x) = x\cos x$$

$$f'(x) = \cos x - x\sin x \quad , \quad f''(x) = -2\sin x - x\cos x$$

$$f'''(x) = -3\cos x + x\sin x \quad , \quad f^{(4)}(x) = 4\sin x + x\cos x$$

با توجه به این که $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$،

$$\left| f^{(4)}(x) \right| = \left| 4\sin x + x\cos x \right| \le 4\left|\sin x\right| + \left|x\right| \left|\cos x\right| \le 4 + \frac{\pi}{2} < 6$$

$$\frac{b-a}{180} h^4 \left| f^{(4)}(x) \right| = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{180} h^4 \times 6 = \frac{\pi h^4}{60} \le 10^{-5}$$

در نتیجه:

$$h \le 0/1176$$

چون $nh = b-a = \frac{\pi}{2}$، پس $n = \frac{\pi}{2h} \ge 13/357$

چون در روش سیمسون n باید زوج باشد قرار می‌دهیم $n = 14$ که در نتیجه h مربوط به آن عبارتست از:

$$h = \frac{\frac{\pi}{2}}{n} = \frac{\pi}{28} \simeq 0/1122$$

قاعدهٔ نقطه میانی

روشهای انتگرالگیری ذوزنقه‌ای و سیمسون که تا کنون شرح داده‌ایم از نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ انتگرالگیری استفاده می‌کنند. بنابراین، محاسبهٔ تقریبهایی از انتگرالهای نظیر

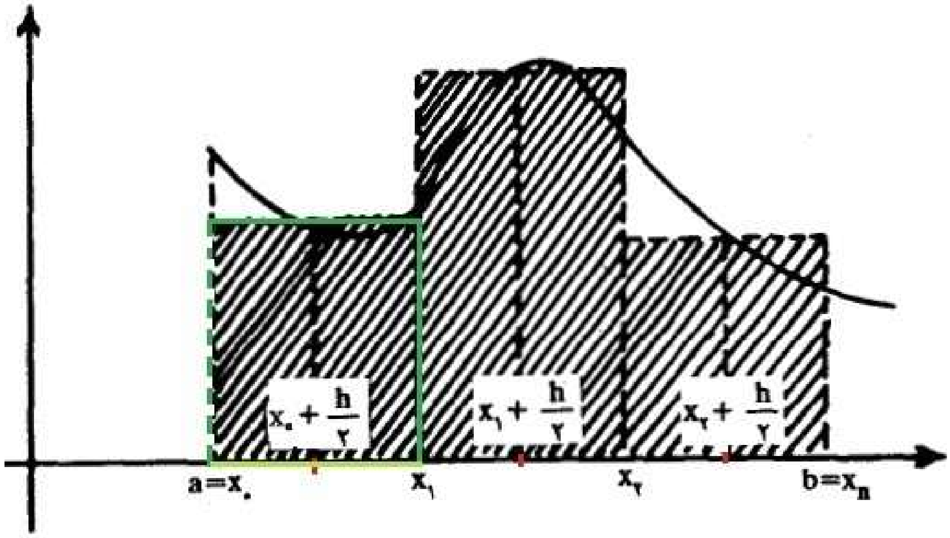
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

به این روشها میسر نیست. در این قسمت روشی را شرح می‌دهیم که می‌توان تقریبهایی از $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ را وقتی f(a) یا f(b) نامعین هستند محاسبه کرد.

فرمول قاعدهٔ نقطهٔ میانی

در این قاعده با استفاده از شکل زیر قرارمی‌دهیم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq h\ f\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)$$



با استفاده مکرر از این فرمول خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq hf\left[x_۰+\frac{h}{۲}\right]+hf\left[x_۱+\frac{h}{۲}\right]+\ldots+hf\left[x_{n-۱}+\frac{h}{۲}\right]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq M(h)=h\left(f\left(x_۰+\frac{h}{۲}\right)+f\left(x_۱+\frac{h}{۲}\right)+\ldots+f\left(x_{n-۱}+\frac{h}{۲}\right)\right)}$$

مثال تقریبی از $\int_۰^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با استفاده از قاعده نقطه میانی محاسبه کنید.

حل: اولاً مقدار واقعی انتگرال چنین به دست می‌آید:

$$\int_۰^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[۲\sqrt{x}\right]_۰^{۰/۰۹}=۰/۶$$

با استفاده از قاعده نقطه میانی و با انتخاب $h=۰/۰۳$ به دست می‌آوریم :

$$\int_۰^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}\simeq ۰/۰۳(f(۰/۰۱۵)+f(۰/۰۴۵)+f(۰/۰۷۵))$$

$$= ۰/۰۳(۸/۱۶۵۰ + ۴/۷۱۴۰ + ۳/۶۵۱۵)$$

بنابراین،

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰/۰۳ \times ۱۶/۵۳۰۵ = ۰/۴۹۵۹۱۵$$

مشاهده می‌شود که این مقدار تقریبی حدود ۰/۱۰۴ خطا دارد که قابل توجه است. از این‌رو، توصیه می‌شود که در نزدیکی نقاطی که f(a) یا f(b) بینهایت هستند مقدار h بسیار کوچک اختیار شود.

با انتخاب $h = ۰/۰۱$ به دست می‌آوریم:

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰/۰۱ \left(\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۱۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۲۵}} + \ldots + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۸۵}} \right) = ۰/۵۳۹۵۸۷$$

خطای این مقدار تقریبی حدود ۰/۰۷ است. به طور کلی در چنین انتگرالهایی باید برای قسمتی که نزدیک نقطهٔ منفرد تابع است h را بسیار کوچک اختیار کرد و برای بقیه بازهٔ h را خیلی کوچک نگرفت. مثلاً، قرار دهید

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} f(x)\,dx = \int_{۰}^{۰/۰۱} f(x)dx + \int_{۰/۰۱}^{۰/۰۹} f(x)\,dx$$

$$(h = ۰/۰۰۲) \qquad (h = ۰/۰۲)$$

$$\int_{۰}^{۰/۰۱} f(x)\,dx \simeq ۰/۰۰۲ \left(\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۱}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۷}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۹}} \right) = ۰/۱۷۳۰۳۱$$

همچنین داریم:

$$\int_{۰/۰۱}^{۰/۰۹} f(x)\,dx \simeq ۰/۰۲ \left(\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۴}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۶}} + \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۸}} \right) = ۰/۳۹۳۷۸۲$$

پس

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰/۱۷۳۰۳۱ + ۰/۳۹۳۷۸۲ = ۰/۵۶۶۸۱۳$$

اختلاف این مقدار، با مقدار واقعی ۰/۶ ، برابر است با ۰/۰۳۳۱۸۷ .

خطای قاعدهٔ نقطهٔ میانی

خطای قاعده نقطه میانی نصف خطای قاعده ذوزنقه‌ای است.

$$E_M(h) \simeq \frac{(b-a)h^{۲}}{۲۴} f''(\eta) \quad ، \quad (a \leq \eta \leq b)$$