# جواب تکلیف سری اول

**درس نظریه محاسبه**
**دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. بهار ۱۴۰۲**

۱. نشان دهید مسائل داخل کلاس $NP$ یک الگوریتم با زمان $2^{\text{poly}(n)}$ دارند. به عبارت دیگر $NP \subseteq TIME(2^{\text{poly}(n)})$.

از وجود اعتبارسنج verifier چندجمله‌ای برای مسائل کلاس NP استفاده می‌کنیم. می‌دانیم اگر $A$ عضو NP باشد آنگاه یک ماشین تورینگ قطعی تصمیم گیرنده با زمان چندجمله‌ای (اعتبارسنج) داریم که برای هر $x \in A$ رشته $y$ وجود دارد بطوریکه ماشین اعتبارسنج با دریافت $x$ و $y$ به وضعیت پذیرش می‌رود. البته اگر رشته ورودی جزو مجموعه $A$ نباشد، آنگاه هیچ رشته $y$ای وجود ندارد که ماشین اعتبارسنج را به وضعیت پذیرش ببرد.

حال فرض کنید $t(n)$ زمان ماشین اعتبارسنج باشد. چون $t(n) \in \text{poly}(n)$ لذا طول $y$ هم $\text{poly}(n)$ است. از این نکته می‌توانیم استفاده کنیم و ماشین تورینگ قطعی تصمیم گیرنده $T$ برای مسئله $A$ ارائه کنیم. ماشین $T$ با دریافت ورودی $x$ به طول $n$ همه رشته‌های به طول $t(n)$ را امتحان می‌کند و به ماشین اعتبارسنج می‌دهد. اگر یکی از آنها ماشین اعتبارسنج را به وضعیت پذیرش ببرد، یعنی $x \in A$ و در غیر اینصورت $x \notin A$.

حال ببینیم پیچیدگی زمانی ماشین $T$ چقدر است. فرض اینکه الفبای ورودی ماشین اعتبارسنج $\Sigma$ باشد، همه رشته‌های به طول $t(n)$ حداکثر $|\Sigma|^{t(n)}$ تعداد خواهد بود. برای هر رشته، زمان $t(n)$ صرف می‌شود (توسط ماشین اعتبارسنج). لذا کل زمان اجرا $t(n)|\Sigma|^{t(n)}$ خواهد بود. چون $|\Sigma|$ یک عدد ثابت است، لذا $|\Sigma| = q = O(1)$ و پیچیدگی زمانی ماشین $T$ برابر با

$$t(n)q^{t(n)} = t(n)2^{t(n)\log q} = 2^{\log t(n) + t(n)\log q} = 2^{\text{poly}(n)}$$

خواهد بود.

۲. فرض کنید Interval Scheduling نسخه بله–خیر مسئله زمانبندی بازه‌ها باشد. در این مسئله، با داشتن مجموعه‌ای از $n$ بازه، می‌پرسیم آیا $k$ بازه وجود دارد که همپوشانی نداشته باشند؟

به سوالات زیر جواب بله، خیر، و یا معلوم نیست چون باعث حل مسئله NP=P می‌شود بدهید.

(آ) Interval Scheduling $\leq_p$ Vertex Cover ؟

(ب) Vertex Cover $\leq_p$ Interval Scheduling ؟

از آنجا که $\text{Interval Scheduling} \in P$ پس (آ) بله. (ب) معلوم نیست چون باعث حل مسئله NP=P می‌شود.

۳. یک کمپ تابستانی برنامه‌ای شامل $n$ ورزش و سرگرمی ارائه می‌کند. این کمپ می‌خواهد مربیانی را برای این برنامه استخدام کند. تعداد $m$ متقاضی برای این منظور ثبت نام کرده‌اند. هر متقاضی فرمی پر کرده است که در آن ورزشهای تخصصی خود را تیک زده است. کمپ می‌خواهد حداقل تعداد مربی را استخدام کند بطوریکه برای هر ورزش حداقل یک مربی داشته باشد. نشان دهید این پرسش که آیا $k$ مربی در میان متقاضیان وجود دارد که همه ورزشها را پوشش دهند NP-Complete است.

اگر اسم مسئله را Summer-Camp بگذاریم نشان می‌دهیم

$$\text{Cover Vertex} \leq_p \text{Summer-Camp}$$

گراف غیر جهت دار $G = (V, E)$ داده شده است. نشان می‌دهیم با استفاده از الگوریتمی برای Summer-Camp می‌توانیم مسئله Vertex-Cover را حل کنیم. رئوس گراف $G$ متناظر با متقاضیان استخدام است و هر یال گراف متناظر با یک ورزش است. این حالتی است که هر ورزش را فقط دو متقاضی بلد است. روشن است یک مجموعه پوششی Vertex Cover در $G$ متناظر با مجموعه‌ای از متقاضیان $S \subseteq V$ است که همه ورزشها $E$ را پوشش می‌دهند. همچنین روشن است که Summer-Camp $\in NP$. پس مسئله Summer-Camp یک مسئله NP-Complete است.

۴. در مسئله Almost-SAT می‌خواهیم بدانیم آیا یک مقداردهی به متغیرهای یک فرمول منطقی به فرم CNF با $m$ عبارت (کلاز) وجود دارد که دقیقا $m - 1$ عبارت را ارضا کند. نشان دهید مسئله Almost-SAT یک مسئله NP-Complete است.

روشن است که Almost-SAT $\in NP$. نشان می‌دهیم

$$\text{SAT} \leq_p \text{Almost-SAT}$$

ورودی مسئله SAT را در نظر بگیرید. با فرض اینکه $x$ یک متغیر جدید است به فرمول $\phi$ دو عبارت $(x)$ و $(\overline{x})$ را اضافه می‌کنیم. اسم فرمول حاصل را $\phi'$ میگذاریم. فرمول $\phi'$ به تعداد $m' = m + 2$ عبارت دارد. روشن است که در $\phi'$ فقط یکی از این عبارات اضافه شده ارضاشدنی است. پس $\phi$ ارضاشدنی است اگر و فقط اگر برای $\phi'$ یک مقداردهی وجود داشته باشد که به تعداد $m' - 1$ عبارت را ارضا کند.

۵. در مسئله HALF-SAT یک فرمول منطقی $\phi$ با فرمت CNF با $n$ متغیر داده شده است. می‌خواهیم بدانیم آیا تعداد مقداردهی‌هایی که فرمول $\phi$ را ارضا می‌کنند از $2^{n-1}$ بیشتر است یا نه. به عبارت دیگر آیا بیشتر از نصف مقدارهی ها فرمول داده شده را ارضا می‌کنند یا نه.

نشان دهید مسئله HALF-SAT یک مسئله NP-Hard است.

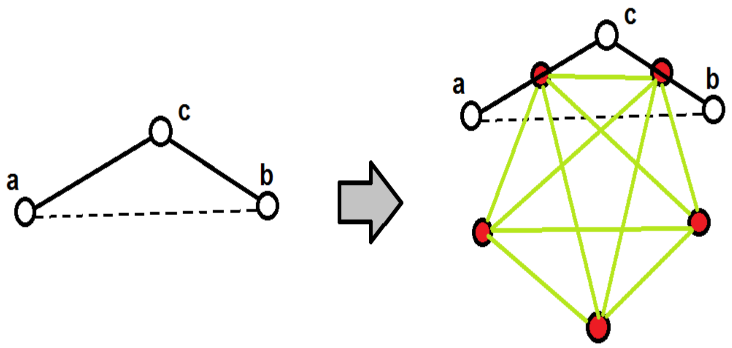
نشان می‌دهیم HALF-SAT $\leq_p$ SAT. فرض کنید $\phi$ فرمول ورودی مسئله SAT باشد. به همه عبارات داخل $\phi$ متغیر جدید $x$ را اضافه می‌کنیم. فرض کنید $\phi'$ فرمول حاصل باشد. دقت کنید $\phi'$ به تعداد $n + 1$ متغیر دارد. روشن است با مقداردهی $x = True$ فرمول $\phi'$ ارضا می‌شود. مقدار متغیرهای دیگر می‌تواند دلخواه باشد. پس به تعداد $2^n$ مقداردهی وجود دارد که $\phi'$ را ارضا می‌کند. از طرف دیگر اگر $\phi$ ارضاشدنی باشد، می‌توانیم قرار دهیم $x = False$ و یک مقداردهی دیگر برای $\phi'$ پیدا کنیم که آن را ارضا کند. پس در این حالت تعداد مقداردهی هایی که فرمول $\phi'$ را ارضا می‌کنند بیشتر از $2^n$ خواهد بود.

۶. گراف غیر جهتدار $G = (V, E)$ داده شده است. یک مجموعه مستقل قوی strongly independent set در $G$ زیرمجموعه‌ای مانند $S$ از رئوس گراف است بطوریکه هیچ دو عضو $S$ مسیری بطول 2 و یا کمتر از آن بینشان نباشد. مسئله Strongly Independent Set می‌پرسد آیا یک مجموعه مستقل قوی در گراف $G$ با حداقل $k$ راس وجود دارد یا نه. نشان دهید این مسئله NP-Complete است.

روشن است که Strongly Independent Set $\in NP$. نشان می‌دهیم

$$\text{Independent Set} \leq_p \text{Strongly Independent Set}$$

ورودی مسئله Independent Set را در نظر بگیرید. گراف غیر جهتدار $G$ و عدد $k$. از روی گراف $G=(V,E)$ گراف $G'$ را می‌سازیم بطوریکه گراف $G$ یک مجموعه مستقل با اندازه حداقل $k$ دارد اگر و فقط اگر $G'$ یک مجموعه مستقل قوی با اندازه $k$ داشته باشد. روی هر یال $G$ یک راس اضافه می‌کنیم. مانند شکل، راس قرمز به یک یال اضافه شده و آن را به دو بخش تقسیم کرده است. حال همه رئوس قرمز را دو به دو به هم وصل می‌کنیم. حاصل را گراف $G'$ می‌نامیم.




یک مجموعه مستقل $I$ در گراف $G$ را در نظر بگیرید. هر دو راس $x \in I$ و $y \in I$ در گراف $G'$ حضور دارند. فاصله $x$ و $y$ حداقل 3 است. پس $I$ یک مجموعه مستقل قوی در $G'$ است. حال یک مجموعه مستقل قوی $S$ در $G'$ را در نظر بگیرید. دو حالت وجود دارد. $S$ شامل یک راس قرمز است. در این حالت باید داشته باشیم $|S|=1$ چون هیچ راس دیگری نمی‌تواند در $S$ باشد. حالت دیگر این است که $S$ شامل هیچ راس قرمزی نیست و $S \subseteq V$. در این حالت $S$ یک مجموعه مستقل در $G$ نیز می‌باشد چون هر دو راس در $S$ در گراف $G'$ فاصله حداقل 3 دارند و پس نمی‌توانند در گراف $G$ همسایه باشند.