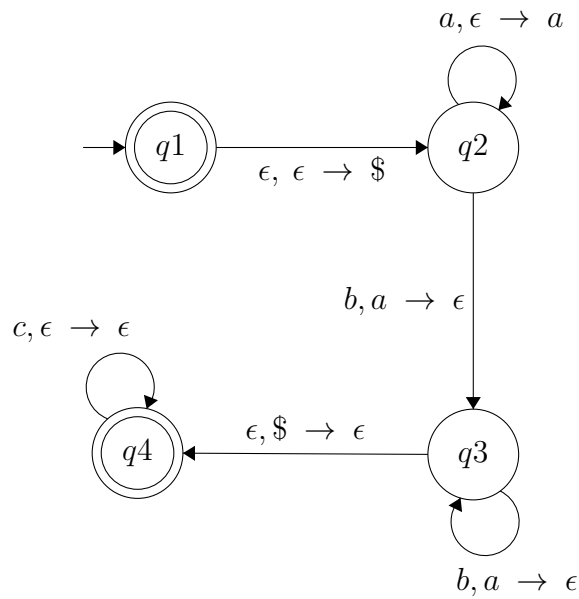


تکلیف سری سوم

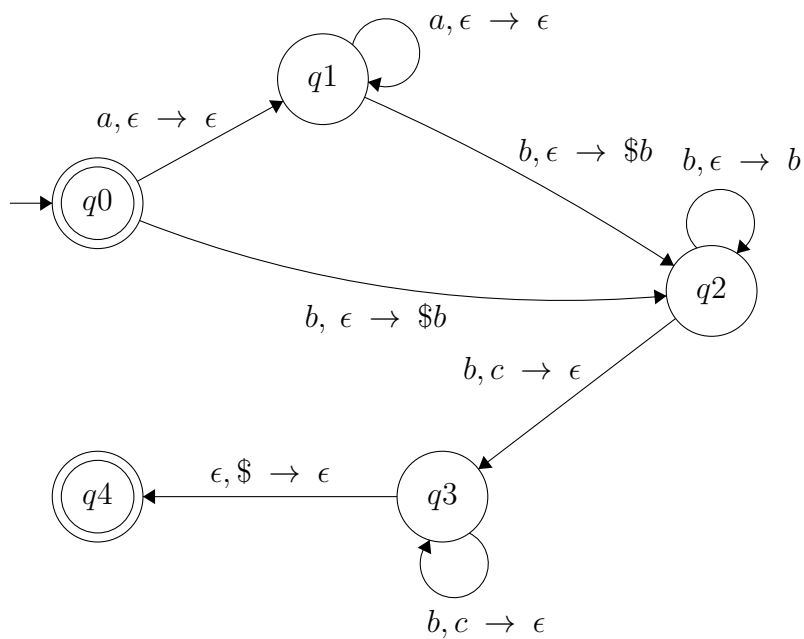
درس مبانی نظریه محاسبه
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. بهار ۱۴۰۱

۱. برای هر کدام از زبانهای زیر یک ماشین پشته‌ای طراحی کنید. نمودار ماشین را رسم کنید.

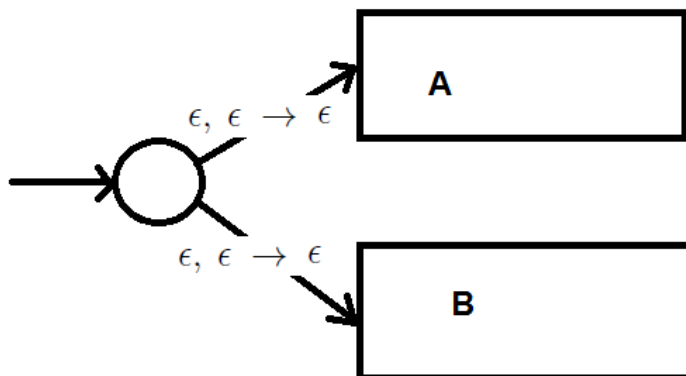
$$A = \{a^n b^n c^* \mid n \geq 0\} \quad (\text{آ})$$



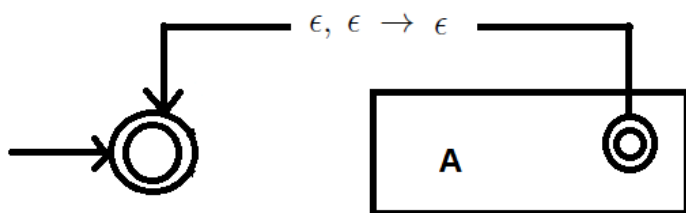
$$B = \{a^* c^n b^n \mid n \geq 0\} \quad (\text{ب})$$



(ج) $A \cup B$



(د) A^*



۲. گرامر زیر را به فرم نرمال چامسکی تبدیل کنید.

$$S \rightarrow BSB \mid B \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow 00 \mid \epsilon$$

ابتدا قانون $S_0 \rightarrow S$ را اضافه می کنیم.

$$\begin{cases} S_0 \rightarrow S \\ S \rightarrow BSB \mid B \mid \epsilon \\ B \rightarrow 00 \mid \epsilon \end{cases}$$

حال قانون $B \rightarrow \epsilon$ را حذف می کنیم.

$$\begin{cases} S_0 \rightarrow S \\ S \rightarrow BSB \mid SB \mid BS \mid B \mid \epsilon \\ B \rightarrow 00 \end{cases}$$

حال قانون $\epsilon \rightarrow S$ را حذف می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 \rightarrow S \mid \epsilon \\ S \rightarrow BSB \mid SB \mid BS \mid B \mid S \mid BB \\ B \rightarrow 00 \end{array} \right.$$

حال قانون $S \rightarrow S$ را حذف می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 \rightarrow S \mid \epsilon \\ S \rightarrow BSB \mid SB \mid BS \mid B \mid BB \\ B \rightarrow 00 \end{array} \right.$$

حال قانون $S \rightarrow B$ را حذف می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 \rightarrow S \mid \epsilon \\ S \rightarrow BSB \mid SB \mid BS \mid 00 \mid BB \\ B \rightarrow 00 \end{array} \right.$$

حال قانون $S_0 \rightarrow S$ را حذف می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 \rightarrow BSB \mid SB \mid BS \mid 00 \mid BB \mid \epsilon \\ S \rightarrow BSB \mid SB \mid BS \mid 00 \mid BB \\ B \rightarrow 00 \end{array} \right.$$

متغیر U را تعریف می‌کنیم و قانون $U \rightarrow 0$ را اضافه می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 \rightarrow BSB \mid SB \mid BS \mid UU \mid BB \mid \epsilon \\ S \rightarrow BSB \mid SB \mid BS \mid UU \mid BB \\ B \rightarrow UU \\ U \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

متغیرهای A_1 را تعریف می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 \rightarrow BA_1 \mid SB \mid BS \mid UU \mid BB \mid \epsilon \\ S \rightarrow BA_1 \mid SB \mid BS \mid UU \mid BB \\ B \rightarrow UU \\ U \rightarrow 0 \\ A_1 \rightarrow SB \end{array} \right.$$

گرامر به فرم نرمال چامسکی در آمده است.

۳. نشان دهید زبانهای زیر مستقل از متن نیستند.

$$E = \{a^n b^j \mid n \geq j^2\}$$

اثبات با برهان خلف. فرض کنید A مستقل از متن باشد. پس شرایط لم تزریق در مورد A صادق است. فرض کنید p انتخاب شده است. باید نشان دهیم یک رشته با طول حداقل p که در زبان A وجود دارد که نمی‌توانیم آن را به پنج قسمت $uvxyz$ تقسیم کنیم بطوریکه شرایط سه گانه لم تزریق برقرار باشند.

رشته $s = a^{p^2}b^p$ را انتخاب می‌کنیم. حالت‌های مختلف را برای مکان vxy در رشته در نظر می‌گیریم.

- vxy کاملاً در قسمت a هاست. اینجا حذف تناقض ایجاد می‌کند.
- vxy کاملاً در قسمت b هاست. اینجا تزریق تناقض ایجاد می‌کند.
- زیر رشته vxy با هر دو قسمت a و b همپوشانی دارد. در این حالت فرض کنید z طول بخشی از vy باشد که در ناحیه a ها قرار گرفته است. همچنین فرض کنید z' طول قسمتی از vy باشد که در ناحیه b ها قرار گرفته است. برای حالت حذف باید داشته باشیم:

$$p^2 - z \geq (p - z')^2$$

برای یک بار تزریق هم باید داشته باشیم

$$p^2 + z \geq (p + z')^2$$

از جمع این دو نامساوی نتیجه می‌شود که

$$z' = 0$$

پس کل vxy باید در قسمت a ها باشد یا اینکه y تهی باشد. در هر صورت مانند دو حالت اول تناقض پیش می‌آید.

$$F = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) < n_b(w) < n_c(w)\}$$

اثبات مانند اثبات مستقل از متن بودن $a^n b^n c^n$ است. از رشته $a^p b^p c^p$ برای ایجاد تناقض استفاده می‌کنیم.

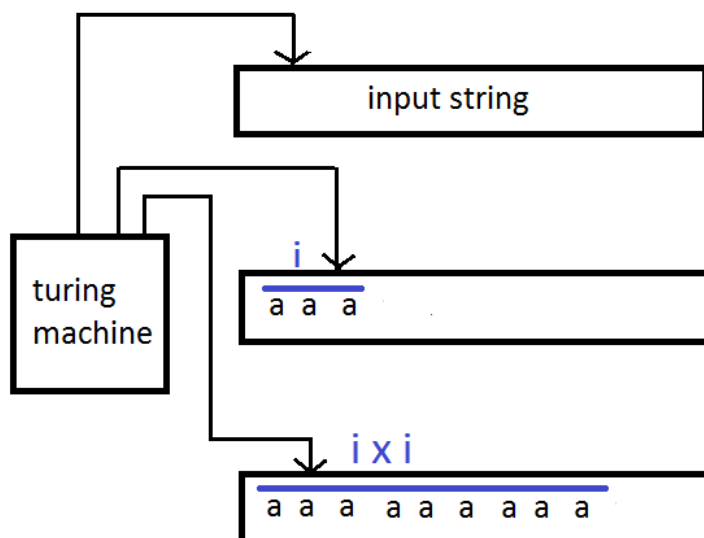
۴. برای زبان A یک ماشین تورینگ ارائه کنید.

$$A = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$$

ایده کلی: برای سادگی از یک ماشین سه‌نواره استفاده می‌کنیم. روی نوار اول رشته ورودی قرار گرفته است. از $i = 1$ شروع کرده و هر بار چک می‌کنیم ببینیم آیا رشته مورد نظر a^{i^2} است یا نه. در مرحله بعدی یک واحد به i اضافه می‌کنیم و همین تست را تکرار می‌کنیم. (می‌توانیم این کار را تا زمانی که i برابر با طول رشته است انجام دهیم.)

در مرحله i ام، می‌توانیم فرض کنیم روی نوار دوم به تعداد i تا a نوشته شده است. (در هر مرحله یک a به نوار دوم اضافه می‌کنیم.) حال باید به تعداد $i \times i$ تا a روی نوار سوم بنویسیم. این کار را با کپی کردن محتوای نوار دوم روی نوار سوم انجام می‌دهیم. به تعداد i بار یک کپی از نوار دوم به نوار سوم منتقل می‌کنیم.

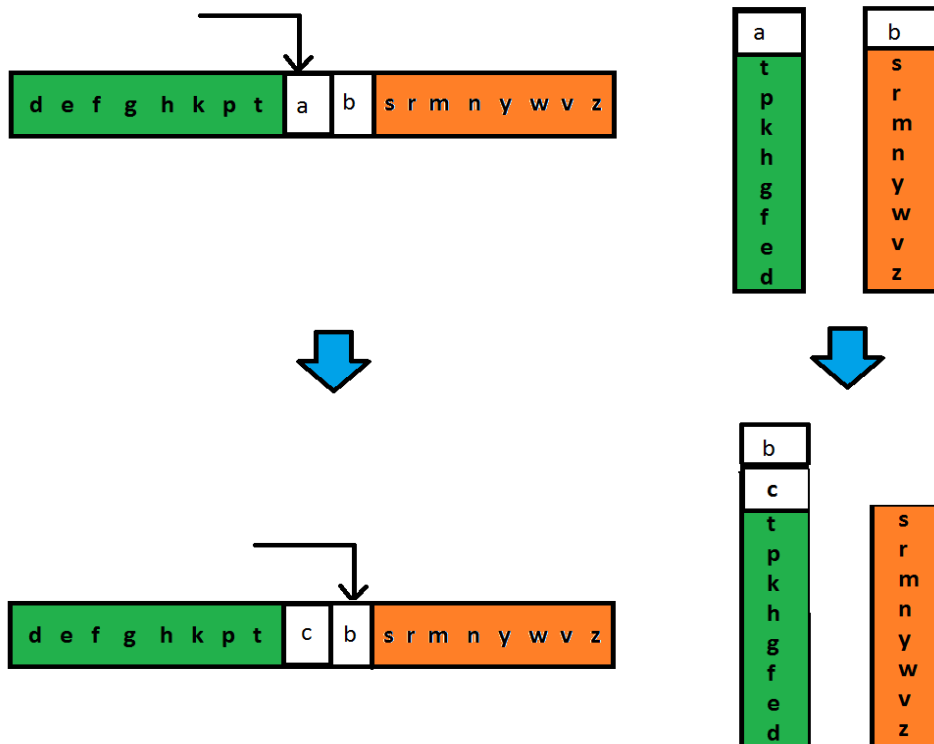
حال که به تعداد $i \times i$ تا a روی نوار سوم نوشته شده، محتوای نوار سوم و نوار اول را مقایسه می‌کنیم. اگر برابر بودند رشته ورودی جزو زبان A است در غیر اینصورت به مرحله بعدی می‌رویم (محتوای نوار سوم را هم پاک می‌کنیم).



۵. نشان دهید ماشین پشته‌ای با ۲ پشته می‌تواند ماشین تورینگ را شبیه‌سازی کند.

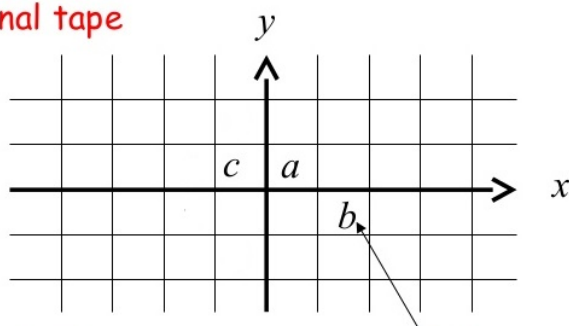
یک پیکربندی ماشین تورینگ را در نظر بگیرید. فرض کنید نوک خواندن نوشتن روی حرف a قرار دارد. به شکل زیر دقت کنید. قسمت سمت چپ نوک، با رنگ سبز نشان داده شده است و قسمت سمت راست نوک با رنگ نارنجی. این وضعیت را می‌توان با دو پشته مدل کرد. سمت چپ شکل زیر را ببینید. پشته اول محتوای سمت چپ نوک را ذخیره کرده و پشته نارنجی محتوای سمت راست نوک خواندن و نوشتن را ذخیره کرده است.

فرض کنید نوک به سمت راست حرکت می‌کند و محتوای خانه قبلی را از به c تغییر می‌دهد. مانند این است که حرف بالای پشته سبز رنگ را به c تغییر دهیم و حرف b را بالای آن درج کنیم. علاوه بر این حرف b را از بالای پشته نارنجی برمی‌داریم.



۶. ماشین تورینگ دو بعدی همانند ماشین تورینگ استاندارد است با این تفاوت که نوار آن یک جدول دو بعدی نامتناهی است و نوک خواندن و نوشتن می‌تواند در جهت‌های راست، چپ، بالا و پایین حرکت کند. توضیح دهید ماشین تورینگ استاندارد چگونه می‌تواند ماشین تورینگ دو بعدی را شبیه‌سازی کند.

2-dimensional tape



MOVES: L,R,U,D

U: up D: down

HEAD

Position: +2, -1

می‌توان این کار را با دو نوار نامتناهی از هر دو طرف شبیه‌سازی کرد. یک نوار مانند محور x هاست و نوار دیگر مانند محور y ها. نوار متناهی از هر دو طرف را هم قبلاً در کلاس توضیح داده‌ایم که چگونه با یک نوار نامتناهی یکطرفه شبیه‌سازی کرد.