فصل دوم: احتمال

وقوع احتمال: مربوط به زمانی است که

- از نتیجه یک اتفاق بی اطلاعی وجود داشته باشد
- موضوع یا نتیجه رخداد برای فرد مهم باشد یا شخص درگیر موضوع باشد

تعاریف اولیه:

آزمایش تصادفی[1]: هر عمل یا رخداد که از نتیجه آن بی اطلاع باشیم را یک آزمایش تصادفی گویند.

مثال:

پرتاب سکه

دو مرتبه پرتاب تاس

تعداد پرتاب سکه تا مشاهده اولین شیر

زمان خراب شدن یک وسیله برقی سالم

انتخاب یک عدد تصادفی از بازه $(0,5)$

رشته قبولی فرزند در کنکور سراسری

[1] Random Experiment

فضای نمونه:[2] مجموعه‌ای است شامل تمام حالات ممکن یک آزمایش تصادفی. فضای نمونه را بطور معمول با حرف بزرگ S نمایش می دهند.

- پرتاب سکه $S = \{H, T\}$
- دو مرتبه پرتاب تاس

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (2,6), \dots, (6,6)\},$$

- تعداد پرتاب سکه تا مشاهده اولین شیر $S = \{H, TH, TTH, TTTH, \dots\}$
- زمان خراب شدن یک وسیله برقی سالم $S = (0, \infty)$
- انتخاب یک عدد تصادفی از بازه $(0,5)$ $S = (0, 5)$
- رشته قبولی کنکور فرزند با رشته ریاضی

$$S = \{Math, Agric, C.S., Geo, \dots\}.$$

فضای نمونه‌ای همگن: هر فضای نمونه‌ای با احتمال رخداد یکسان برای هر عضو آنرا فضای نمونه همگن گویند. به بیان ساده‌تر هر فضای نمونه‌ای که امکان رخ دادن حالت-های آن با شانس برابر باشد را همگن گویند. در غیر اینصور فضای نمونه ناهمگن می باشد.

[2] Sample Space

پیشامد:[3] هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر یا دارای احتمال از فضای نمونه‌ای را پیشامد گویند.... $A, B, C,$

روابط بین پیشامدها

اگر A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای باشند، آنگاه

- ✓ پیشامد A رخ ندهد: A' یا $A' = S - A$
- ✓ پیشامدهای A و B رخ دهند: $A \cap B$
- ✓ پیشامدهای A یا B رخ دهند: $A \cup B$
- ✓ پیشامد A رخ دهد و B رخ ندهند: $A - B = A \cap B'$
- ✓ پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی هر دو رخ ندهند (تفاضل متقارن)

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A).$$

انواع احتمال

1- **فراوانی**: این نوع احتمال حاصل تکرار زیاد یک آزمایش تصادفی است بطوریکه احتمال یک پیشامد همانند A بصورت زیر محاسبه می شود

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(Experiment)}.$$

[3] Event

2- **تجربی**: حاصل تجربه‌ی شخص که از راه یادگیری یا برخورد مکرر با آن آزمایش تصادفی بدست می آید. همانند نظر دادن یک مکانیک درباره ایراد خودرو، یک تعمیرکار درباره وسایل منزل و ...

3- **نظری**: این نوع احتمال لزوما برگرفته از تجربه نیست بلکه حاصل دانش و خرد و تخصص شخص می باشد. همانند مشاوره از افراد متخصص، گرفتن تاییدیه پرسشنامه از خبرگان و ...

ویژگی‌های تابع احتمال: تابع احتمال بر پیشامدها تعریف می شود و دارای ۳ ویژگی زیر می باشد.

- $\forall A \subset S, 0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- $\forall A, B \subset S,\ \ that\ A \cap B = \phi\ \ then\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

نکته: دامنه تابع احتمال مجموعه‌ای است که شامل پیشامدهای ممکن از فضای نمونه‌ای است. به این مجموعه σ-میدان[4]گویند و آنرا بفرم $\mathcal{F}$ نمایش می دهند.

تعریف σ –میدان: به هر مجموعه همانند $\mathcal{F}$ که شامل زیر مجموعه‌های یک مجموعه مرجع همانند M باشد σـمیدان گویند اگر در ۳ شرط زیر صدق نمایند

الف) $\phi \epsilon \mathcal{F}$

ب) برای هر عضو $\mathcal{F}$ همانند A داشته باشیم $A' \epsilon \mathcal{F}$

[4] σ-field

ج) برای هر دنباله از اعضای $\mathcal{F}$ همانند $A_1, A_2, \dots$ داشته باشیم $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

مثال: فرض کنید موضوع مورد نظر آزمایشات تصادفی مثال اول همین بخش باشد. σ-میدان هر فضای نمونه ای را مشخص نمایید.

پرتاب سکه $S = \{H, T\}$

$$\mathcal{F} = \left\{\phi, S, \{H\}, \{T\}\right\}$$

دو مرتبه پرتاب تاس

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (2,6), \dots, (6,6)\},$$

$$\mathcal{F} = \left\{\begin{matrix} \phi, S, \{(1,1)\}, \{(1,2)\}, \dots, \{(6,6)\}, \{(1,1), (1,2)\}, \\ \{(1,1), (1,3)\}, \dots, , \{(5,6), (6,6)\}, \dots, \{(6,2), \dots, (6,6)\}, \dots \end{matrix}\right\}.$$

تعداد پرتاب سکه تا مشاهده اولین شیر $S = \{H, TH, TTH, TTTH, \dots\}$

$$\mathcal{F} = \left\{\begin{matrix} \phi, S, \{H\}, \{TH\}, \{TTH\}, \dots, \{H, TH\}, \{H, TTH\}, \dots, \{H, TH, TTH\}, \\ \{H, TH, TTH\}, \{H, TH, TTTH\}, \dots \end{matrix}\right\}.$$

زمان خراب شدن یک وسیله برقی سالم $S = (0, \infty)$

$$\mathcal{F} = \left\{\phi, S, (0, 1), (0, 1], [1, 1000], (0, 0.9) \cup (2, 114], \left\{1014.2 + \sqrt{2}\right\}, \dots\right\}.$$

انتخاب یک عدد تصادفی از بازه $(0,5)$ $S = (0, 5)$

$$\mathcal{F} = \left\{\phi, S, (0,1), (0,1], [1, 4], (0,0.9) \cup (2,3.06], \left\{3.2 + \sqrt{2}\right\}, \dots\right\}.$$

نکته: بمنظور مدل کردن یک مبحث احتمال می بایست فضای احتمالی بفرم $(S, \mathcal{F}, P)$ زیر خواهد بود. در این فضای احتمال S فضای نمونه یک آزمایش تصادفی، $\mathcal{F}$ نیز σ- میدان حاصل از فضای نمونه و P تابع احتمال می باشند.

محاسبه احتمال برای رخدادن همزمان پیشامدها

$i)\ P(A') = 1 - P(A).$

$ii)\ P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$

$iii)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

$iv)\ P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$

اثبات:

i) $A \cup A' = S$ and $A \cap A' = \phi$ also

$$P(S) = 1 \Leftrightarrow P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1$$

ii) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, and we know $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$.
Based on third properties of distribution function

$$P(A) = P\big((A - B) \cup (A \cap B)\big) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

اصول شمارش

بسیاری از مقادیر احتمال را می توان بر اساس تقسیم تعداد حالت مدنظر به تعداد حالت ممکن بدست آورد. بدین منظور نیازمند اطلاع از اصول و قواعد شمارش می باشیم. در ادامه به این مهم خواهیم پرداخت.

اصل جمع: هرگاه انجام عملی مشروط به طی یکی از k مرحله ممکن باشد و مرحله iام به r_i طریق قابل انجام باشد، آنگاه این عمل به $r_1 + \cdots + r_k$ طریق قابل انجام است.

مثال: پرداخت قبض تلفن همراه

۹=۲+٤+۳

اصل ضرب: هرگاه انجام عملی مشروط به طی تمامی k مرحله ممکن باشد. حال اگر مرحله iام به r_i طریق قابل انجام باشد، آنگاه این عمل به $r_1 \times \ldots \times r_k$ طریق قابل انجام است.

مثال: رفتن از شهر A به شهر C $\qquad$ $۳ * ۲ = ۶$

قواعد شمارش

۱- **جایگشت:** مرتب کردن یا چیدمان n شی مختلف

این عمل به $n!$ طریق قابل انجام است. زیرا در مکان شماره ۱ می توان n انتخاب داشت و برای مکان شماره ۲ تعداد انتخاب برابر است با $n-1$ و ... و در مکان شماره n تنها یک حق انتخاب داریم. بنابراین تعداد طرق ممکن برای مرتب کردن این n شی برابر است با

$$n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 1 = n!.$$

۲- **ترتیب[5]:** مرتب کردن یا چیدمان k شی از n شی مختلف: این عمل به

$$P_k^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n\times(n-1)\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)\times(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \Longrightarrow P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

قابل انجام است.

مثال: با ارقام عدد ۳۰۲۷۸۴۳ چند عدد ۷ رقمی می توان ساخت؟

$$\frac{6\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2!} = 3 \times 6! = 2160.$$

روش دوم: ابتدا جایگاه صفر و سپس دو رقم ۳ و مابقی مقادیر را مشخص می نماییم

$$\binom{6}{1}\binom{6}{2} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2160.$$

روش سوم: ابتدا سایر ارقام غیر صفر را جایگذاری می نماییم و سپس صفر.

$$\frac{6!}{2!} \times \binom{6}{1} = 2160.$$

ب) چند عدد ٤ رقمی می توان ساخت؟

روش اول: ابتدا حالت حداکثر یک رقم ۳ و سپس حالت دو رقم ۳ یک هزارگان و غیر هزارگان در نظر گرفته شده است.

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 + \left(1 \times \binom{3}{1} \times 5 \times 4 + 4 \times \binom{3}{2} \times 4\right)$$

عدد ٤ رقمی با حضور حداکثر یک رقم ۳: $5 \times 5 \times 4 \times 3$

[5] Permutation

عدد ٤ رقمی با حضور هر دو رقم ۳ و هزارگان ۳: $1 \times \binom{3}{1} \times 5 \times 4$

عدد ٤ رقمی با حضور هر دو رقم ۳ و هزارگان غیر ۳: $4 \times \binom{3}{2} \times 4$

روش دوم: حالت بندی بدون رقم ۳، با یک رقم ۳ و با دو رقم ۳ در نظر گرفته شده است

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 + \left(1 \times 5 \times 4 \times 3 + 4 \times \binom{3}{1} \times 4 \times 3\right) + \left(\binom{4}{2} \times 5 \times 4 - 1 \times \binom{3}{2} \times 4\right) = 408$$

عدد ٤ رقمی بدون حضور ۳: $4 \times 4 \times 3 \times 2$

عدد ٤ رقمی با حضور یک ۳ بعنوان هزارگان: $1 \times 5 \times 4 \times 3$

عدد ٤ رقمی با حضور یک ۳ غیر هزارگان: $4 \times \binom{3}{1} \times 4 \times 3$

عدد ٤ رقمی با حضور هر دو رقم ۳: $\binom{4}{2} \times 5 \times 4 - 1 \times \binom{3}{2} \times 4$

روش سوم: ابتدا حالت حداکثر یک عدد ۳ و سپس حالت دو رقم ۳ با صفر و بدون صفر در نظر گرفته شده است.

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 + \binom{4}{2} \times 4 \times 3 + \binom{3}{1} \times \binom{3}{2} \times 4$$

عدد ٤ رقمی با حضور حداکثر یک رقم ۳: $5 \times 5 \times 4 \times 3$

عدد ٤ رقمی با حضور هر دو رقم ۳ و بدون صفر: $\binom{4}{2} \times 4 \times 3$

عدد ٤ رقمی با حضور هر دو رقم ۳ و با صفر: $\quad 4 \times \binom{3}{2} \times \binom{3}{1}$

۳- **ترکیب:**[۶] انتخاب یک گروه k شی از n شی مختلف: این عمل به

$$P_k^n = C_k^n \times k! \Leftrightarrow C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{P_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

نکته: باید یادآور شد که رابطه $P_k^n = C_k^n \times k!$ بسیار مهم و کاربردی در شمارش می باشد.

خواص ترکیب:

- ✓ $\binom{n}{0} = 1$ or $\binom{n}{n} = 1$
- ✓ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- ✓ $\binom{n}{k} = \binom{1}{0}\binom{n-1}{k} + \binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1} = \binom{2}{0}\binom{n-2}{k} + \binom{2}{1}\binom{n-2}{k-1} + \binom{2}{2}\binom{n-2}{k-2} = \binom{3}{0}\binom{n-3}{k} + \binom{3}{2}\binom{n-3}{k-2} + \binom{3}{1}\binom{n-3}{k-1} + \binom{3}{3}\binom{n-3}{k-3}$.
- ✓ $\binom{n}{k} = \sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\binom{n-r}{k-s}$.

مثال: میخواهیم از ۹ نفر حاضر، یک تیم ۵نفره بسازیم،

الف) چند تیم مختلف امکان پذیر است؟ $\quad \binom{9}{5} = 126$

---

[6] Combination

ب) در چند تیم شخص خاصی حتما انتخاب شده است. یا به بیان دیگر چند تیم مختلف با توجه به اصرار وجود یک شخص خاص در تیم می توان ایجاد نمود؟ $\binom{8}{4} = 70$

ج) دو نفر خاص هرگز انتخاب نشوند. $\binom{7}{5} = 21$

د) یکی از دو نفر خاص حتما انتخاب شوند. $\binom{2}{1}\binom{7}{4} = 70$

٤– تشکیل یک حلقه: مرتب کردن n شی مختلف اطراف یک دایره یا یک حلقه بسته. این تعداد برابر خواهد بود با $(n-1)!$

- ❖ برای تشکیل چیدمان‌های متفاوت لازم است، یکی از اشیاءِ ثابت فرض شود و مابقی نسبت به آن تغییر وضعیت دهند. بنابراین $(n-1)$ جایگشت فراهم است.
- ❖ در هر چیدمان، n جابجایی داریم که تغییر وضعیت یا چیدمان نخواهیم داشت. بنابراین می توان نوشت

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

مثال: اطراف یک سینی غذاخوری امکان چیدمان ۵ ظرف وجود دارد.

الف) اگر همه ظروف مختلف باشند، تعداد کل چیدمان‌های داخل ظرف برابر است با $4! = 24$

ب) دو ظرف حتما در کنار یکدیگر قرار گیرند. $3!\,2! = 12$

ج) دو ظرف خاص کنار یکدیگر قرار نگیرند. $12 = 12 - !4$ یا $12 = 2!\binom{3}{2}2!$

د) اگر دو عدد از ظروف ۵گانه مشابه باشند، آنگاه تعداد کل چیدمان برابر است با

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

ه) دو ظرف غیر مشابه مدنظر کنار یکدیگر نباشند؟

$$\frac{2!}{2!}\binom{3}{2}2! = 6$$

و) تعداد حالتی را شمارش نمایید که دو ظرف مشابه کنار یکدیگر قرار نگیرند.

$$\frac{4!}{2!} - 3! \ \ and \quad 2!\binom{3}{2}1! = 6$$

۵- ترکیب تعمیم یافته: هرگاه بخواهیم n شی را در k مکان به ظرفیت‌های $r_1, r_2, \dots, r_k$ مستقر نماییم بطوریکه $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$ باشد، آنگاه این عمل به

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\dots 1 = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!} = \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}.$$

نکته: برای نمایش ترکیب تعمیم یافته داریم

$$\binom{10}{5,3,2} = \binom{10}{5,3} = \binom{10}{5,2} = \binom{10}{3,2} = \frac{10!}{5!\,3!\,2!}.$$

مثال: میخواهیم ۱۸ نفر شرکت کننده در یک اردوی تفریحی را در ٤ اتاق به ظرفیت-های ۵، ۶، ۳ و ٤ نفر مستقر نماییم. الف) این عمل به چند طریق قابل انجام است؟

$$\binom{18}{5}\binom{13}{6}\binom{7}{3}\binom{4}{4}=\frac{18!}{5!\times 13!}\times\frac{13!}{6!\times 7!}\times\frac{7!}{3!\times 4!}\times 1=\frac{18!}{5!\,6!\,3!\,4!}=\binom{18}{5,6,3,4}.$$

ب) دو نفر خاص در اتاق ۶نفره مستقر شوند.

$$\binom{16}{5}\binom{11}{4}\binom{7}{3}\binom{4}{4}=\frac{16!}{5!11!}\frac{11!}{6!7!}\frac{7!}{3!4!}1=\frac{16!}{5!\,4!\,3!\,4!}=\binom{16}{5,4,3,4}.$$

ج) دو نفر خاص با هم باشند.

$$\binom{16}{3,6,3,4}+\binom{16}{5,4,3,4}+\binom{16}{5,6,1,4}+\binom{16}{5,6,3,2}.$$

د) ۳نفر خاص در اتاق‌های مجزا باشند

این ۳نفر در اتاق‌هایی به ظرفیت‌های ۵، ۶ و ۳نفر قرار گیرند. $\binom{15}{4,5,2,4}3!$

این ۳نفر در اتاق‌هایی به ظرفیت‌های ۵، ۶ و ٤نفر قرار گیرند. $\binom{15}{4,5,3,3}3!$

این ۳نفر در اتاق‌هایی به ظرفیت‌های ۵، ۳ و ٤نفر قرار گیرند. $\binom{15}{6,4,2,3}3!$

این ۳نفر در اتاق‌هایی به ظرفیت‌های ۶، ۳ و ٤نفر قرار گیرند. $\binom{15}{5,5,2,3}3!$

بنابراین تعداد حالت ممکن برابر خواهد بود با

$$\left(\binom{15}{4,5,2,4}+\binom{15}{4,5,3,3}+\binom{15}{6,4,2,3}+\binom{15}{5,5,2,3}\right)3!.$$

ه) دو نفر از جمع جدا شده و به منزلشان برگشتند. یعنی ۱۶نفر داریم با مجموع ظرفیت بیشتر. بر اساس وضعیت فعلی گزینه‌های الف و ب این مثال را مجدد پاسخ دهید.

الف)

$$\left\{\binom{16}{3,6,3,4}+\binom{16}{5,4,3,4}+\binom{16}{5,6,1,4}+\binom{16}{5,6,3,2}\right\}$$
$$+\left\{\binom{16}{4,5,3,4}+\binom{16}{4,6,2,4}+\binom{16}{4,6,3,3}+\binom{16}{5,5,2,4}\right.$$
$$\left.+\binom{16}{5,5,3,3}+\binom{16}{5,6,2,3}\right\}\neq\binom{18}{5,6,3,4}$$

نتیجه: اگر مجموع ظرفیت مکان‌ها بیشتر یا مساوی تعداد اشیاءِ باشد، یعنی $n \leq r_1 + r_2 + \cdots + r_k$، آنگاه تعداد حالت ممکن استقرار اشیاءِ در این مکان‌ها برابر خواهد بود با

$$\binom{r_1+\cdots+r_k}{r_1,\ldots,r_k}.$$

تکلیف: اگر تعداد اشیاءِ بیشتر از مجموع ظرفیت مکانی باشد، $n > r_1 + r_2 + \cdots + r_k$، تعداد کل جانهی را محاسبه کنید؟

۶- ترتیب تعمیم یافته: اگر بخواهیم r_1 شی مشابه از نوع ۱، r_2 شی مشابه از نوع ۲، ...، r_k شی مشابه از نوع k را مرتب نماییم این عمل به

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}=\binom{n}{r_1,r_2,\ldots,r_k}.$$

که در آن $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$.

مثال: فرض کنید می خواهیم ۸ گوی سفید، ۵ گوی آبی و ۷ گوی قرمز را در یک ردیف مرتب نماییم. این عمل به چند طریق قابل انجام است؟ (تعداد چیدمان ممکن این گوی‌ها را مشخص نمایید)

$$\frac{20!}{8!\,5!\,7!} = \binom{20}{8,5,7}.$$

ب) تعداد حالتی که سفیدها کنار یکدیگر قرار می گیرند.

$$\frac{13!}{5!\,7!\,1!} = \binom{13}{1,5,7} = \binom{13}{5,7} = \binom{13}{1,5} = \binom{13}{1,7}.$$

ج) تعداد حالتی که سفیدها در ابتدا و انتهای چیدمان باشند (به بیان دیگر هیچ گوی سفیدی در وسط چیدمان قرار نگیرد).

$$\binom{12}{5,7} \times 7 = 1 \times \binom{7}{1}\binom{12}{5,7}.$$

د) هیچ دو گوی قرمزی کنار یکدیگر نباشند.

$$\binom{13}{5,8}\binom{14}{7}.$$

۷- چیدمان n گل یکسان درون R گلدان مشابه (یا به بیان دیگر معادل تعداد جواب صحیح و نامنفی معادله $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_R = n$).

این عمل مشابه مرتب کردن n گوی مشابه و $R-۱$ خط یکسان می باشد. بنابراین معادل‌سازی و با بهره از قاعده شمارش ۶، این عمل به

$$\frac{(n+R-۱)!}{(R-۱)!n!} = \binom{n+R-۱}{R-۱} = \binom{n+R-۱}{n}.$$

طریق قابل انجام است.

مثال: میخواهیم ۵ گل رز سرخ را درون ۳ گلدان مشابه قرار دهیم

الف) این عمل به چند طریق قابل انجام است؟

$$\frac{۷!}{۲!\,۵!} = \binom{۵+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۵+۳-۱}{۵} = ۲۱.$$

ب) حداقل یک گل درون هر گلدان باشد. $\binom{۲+۳-۱}{۳-۱} = ۶$

ج) در گلدان شماره ۲ (گلدان وسط) دقیقا ۲گل قرار بگیرد.

$$\binom{۳+۲-۱}{۲-۱} = ٤.$$

د) یکی از گلدان‌ها دقیقا ۲گل داشته باشد. $\binom{۳}{۱}۲ = ۶$

ه) اگر ۵ گل رز دارای رنگ‌های مختلف بودند، الف تا د را مجدد حل کنید

تعداد کل چیدمان: $۵!\binom{۷}{۲} = \frac{۷!}{۲!}$

حداقل یک گل درون هر گلدان: $\binom{۵}{۳}۳! \times \binom{۴}{۲}۲! = \binom{۴}{۲}۵!$

گلدان شماره ۲ دقیقا ۲گل: $\binom{۴}{۱}۵!$

مثال: فرض کنیم بخواهیم از بین ۲۰ عدد (۱ تا ۲۰) ۵ عدد را بتصادف انتخاب کنیم. در هر یک از حالات زیر تعداد ممکن را شمارش نمایید

الف) تعداد کل انتخاب‌ها

با جایگذاری $۲۰^۵$ بدون جایگذاری $\binom{۲۰}{۵}$

ب) میانه اعداد برابر ۱۵ شود

باجایگذاری $۱ \times ۱۵^۲ \times ۶^۲$ بدون جایگذاری $۱ \times \binom{۱۴}{۲}\binom{۵}{۲}$

ج) دو تا از اعداد انتخابی از قبل مشخص باشند

باجایگذاری $۲۰^۳$ بدون جایگذاری $\binom{۱۸}{۳}$

د) هیچکدام از اعداد اول نباید انتخاب شوند.

باجایگذاری $۱۲^۵$ بدون جایگذاری $\binom{۱۲}{۵}$

ه) حداقل یک عدد اول انتخاب شود

باجایگذاری $۲۰^۵ - ۱۲^۵$ بدون جایگذاری $\binom{۲۰}{۵} - \binom{۱۲}{۵}$

و) دقیقا دو عدد اول انتخاب شود

باجایگذاری $۸^۲ ۱۲^۳$ بدون جایگذاری $\binom{۸}{۲}\binom{۱۲}{۳}$

ز) اگر موضوع انتخاب دو عدد بود تعداد حالاتی را محاسبه نمایید که میانگین دو عدد انتخابی برابر ۱۱ شود

باجایگذاری ۱۰ بدون جایگذاری ۹

مثال: در نظر داریم در طول دیوار بلند یک باغ ۳۰ اصله درخت را قرص نماییم. بدین منظور ۱۰ درخت سپیدار و ۸ درخت چنار و ۷ درخت انگور و مابقی را درخت صنوبر خریداری نموده‌ایم. در هریک از حالات زیر تعداد مدنظر را بدست آورید.

الف) تعداد کل چیدمان‌های ممکن این ۳۰ درخت

$$\frac{۳۰!}{۱۰!\,۸!\,۷!\,۵!} = ۱\binom{۲۵+۶-۱}{۶-۱}\frac{۲۵!}{۱۰!\,۸!\,۷!} = ۱\binom{۲۰+۱۱-۱}{۱۱-۱}\frac{۲۰!}{۸!\,۷!\,۵!}.$$

ب) درخت‌های صنوبر کنار یکدیگر قرار نگیرند.

$$\frac{۲۵!}{۱۰!\,۸!\,۷!}\binom{۲۶}{۵} = ۱\binom{۲۱+۶-۱}{۶-۱}\frac{۲۵!}{۱۰!\,۸!\,۷!}$$

ج) درخت‌های ثمری خریداری شده در ابتدا یا انتهای دیوار باغ قرص شوند.

$$\frac{۲۳!}{۱۰!\,۸!\,۵!}\binom{۷+۲-۱}{۲-۱} = ۱\binom{۸}{۱}\frac{۲۳!}{۱۰!\,۸!\,۵!}.$$

د) بعد از هر درخت انگور یک چنار کاشته شود (از ابتدای دیوار به انتها).

$$۱\binom{۱۶+۸-۱}{۸-۱}\frac{۱۶!}{۱!\,۱۰!\,۵!} = \frac{۲۳!}{۷!\,۱!\,۱۰!\,۵!}$$

ه) بین هر دو درخت انگور حتما یک درخت چنار قرار بگیرد.

$$1 \times \binom{۲ + ۸ - ۱}{۸ - ۱} \times \binom{۱۶ + ۱۵ - ۱}{۱۶ - ۱} \frac{۱۵!}{۱۰!\,۵!}.$$

مثال: ظرفی داریم که ۱۲گوی در آن می باشد که تنها ۳عدد از آنها سفید است. اگر دو نفر A و B به نوبت با شروع از نفر A اقدام به برداشتن گوی از ظرف می نمایند، احتمال آنرا بدست آورید که

الف) شخص A اولین گوی سفید را در برداشت دوم بدست آورد

C: شخص A اولین گوی سفید را در برداشت دوم بدست آورد

$$P(C) = \frac{۹}{۱۲} \times \frac{۸}{۱۱} \times \frac{۳}{۱۰}.$$

ب) نفر A اولین گوی سفید را مشاهده نماید

D: شخص A اولین گوی سفید را مشاهده نماید

$$\begin{aligned} P(D) = \frac{۳}{۱۲} + \left(\frac{۹}{۱۲} \times \frac{۸}{۱۱} \times \frac{۳}{۱۰}\right) + \left(\frac{۹}{۱۲} \times \frac{۸}{۱۱} \times \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۹} \times \frac{۳}{۸}\right) \\ + \left(\frac{۹}{۱۲} \times \frac{۸}{۱۱} \times \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۹} \times \frac{۵}{۸} \times \frac{٤}{۷} \times \frac{۳}{۶}\right) \\ + \left(\frac{۹}{۱۲} \times \frac{۸}{۱۱} \times \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۹} \times \frac{۵}{۸} \times \frac{٤}{۷} \times \frac{۳}{۶} \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{٤}\right). \end{aligned}$$

ج) دومین گوی سفید توسط شخص B و در برداشت دوم بدست آید :E

E: چهارمین گوی متوالی برداشته شده، دومین گوی سفید باشد

$$P(E)=\left(\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۱}\times\frac{۸}{۱۰}\times\frac{۲}{۹}\right)+\left(\frac{۹}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۱}\times\frac{۸}{۱۰}\times\frac{۲}{۹}\right)+\left(\frac{۹}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۱}\times\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۲}{۹}\right)=۳\,\frac{۹\times۸\times۳\times۲}{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹}=\binom{۳}{۱}\frac{۹\times۸\times۳\times۲}{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹}.$$

د) اگر بدانیم نفر A اولین برداشتش سفید بوده است احتمال آنرا بیابید که شخص B سفید بعدی را انتخاب نماید.

ه) آخرین گوی سفید آخرین انتخاب شخص A باشد :H

H: در برداشت یازدهم آخرین گوی سفید انتخاب شود

$$P(H)=\binom{۱۰}{۲}\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۳\times۲\times۱\times۱}{۱۲!}=\binom{۱۰}{۲}\frac{۹!\times۳!}{۱۲!}.$$

و) حداقل یک گوی سفید توسط شخص A انتخاب شود.I

$$P(I)=۱-P(I')=۱-\binom{۶}{۳}\frac{۳!\times۹!}{۱۲!}.$$

ز) شخص A گوی سفید بیشتری انتخاب نماید. S

$$P(S)=\binom{۶}{۲}\binom{۶}{۱}\frac{۳!\,۹!}{۱۲!}+\binom{۶}{۳}\binom{۶}{۰}\frac{۳!\,۹!}{۱۲!}$$

ح) تا ۵امین برداشت فقط یک گوی سفید انتخاب شود.

ت) نفر B هیچ گوی سفیدی انتخاب ننماید.

ی) با توجه به آنکه می دانیم دومین گوی سفید انتخاب شده توسط نفر A در سومین برداشت بدست آمده است، احتمال آنرا بیابید که گوی سفید اول توسط شخص B مشاهده شود

خ) اولین گوی سفید در برداشت دوم باشد

ث) دو گوی سفید متوالی توسط شخص A انتخاب شود بطوریکه گوی سوم توسط شخص B و در توالی شخص A نباشد (W).

$$P(W) = ۱۶ \frac{۹!\,۳!}{۱۲!}$$

ص) دو گوی سفید متوالی توسط شخص A انتخاب شود.

ض) دو گوی سفید متوالی توسط شخص B انتخاب شود، بشرط اینکه اولین گوی سفید را شخص A مشاهده کرده باشد. (K)

$$P(K) = ۱۵ \frac{۹!\,۳!}{۱۲!}.$$

مثال: دو نفر (شخص A و B) به تصادف سکه‌هایشان را به ترتیب با شروع از نفر A پرتاب می نمایند. احتمال شیر آمدن سکه شخص A برابر $p_۱$ و شخص B برابر $p_۲$ می باشند. در هر یک از موارد زیر احتمال خواسته شده را محاسبه نمایید

الف) احتمال آنکه تا پرتاب ۵ام شخص A، ایشان ۳شیر مشاهده نماید.

A: تا پرتاب ۵ام، شخص A ۳شیرمشاهده نماید.

$$P(A) = \binom{۵}{۳} p_۱^۳ (۱ - p_۱)^۲.$$

ب) تا پرتاب ۵ام شخص A، ۳ شیر مشاهده شود.

B: تا پرتاب ۵ام شخص A، ۳ شیرمشاهده شده باشد

$$\begin{aligned} P(B) = \binom{۵}{۰} p_۱^۰ (۱ - p_۱)^۵ \binom{۴}{۳} p_۲^۳ (۱ - p_۲)^۱ + \binom{۵}{۱} p_۱^۱ (۱ - p_۱)^۴ \binom{۴}{۲} p_۲^۲ (۱ - p_۲)^۲ \\ + \binom{۵}{۲} p_۱^۲ (۱ - p_۱)^۳ \binom{۴}{۱} p_۲^۱ (۱ - p_۲)^۳ \\ + \binom{۵}{۳} p_۱^۳ (۱ - p_۱)^۲ \binom{۴}{۰} p_۲^۰ (۱ - p_۲)^۴. \end{aligned}$$

ج) تا پرتاب ۸ام بازی، هر دو نفر دقیقا ۲ شیر مشاهده نمایند (C).

$$P(C) = \binom{۴}{۲} \binom{۴}{۲} p_۱^۲ p_۲^۲ (۱ - p_۱)^۲ (۱ - p_۲)^۲.$$

د) شخص A قبل از شخص B شیر مشاهده نماید. یا به بیان دیگر، اولین شیر توسط شخص A مشاهده شود.

D: شخص A اولین شیر را مشاهده نماید.

$$P(D) = p_۱ + (۱ - p_۱)(۱ - p_۲)p_۱ + (۱ - p_۱)^۲(۱ - p_۲)^۲p_۱ + \cdots$$
$$= \sum_{i=۰}^{\infty}(۱ - p_۱)^i(۱ - p_۲)^i p_۱ = \frac{p_۱}{۱ - (۱ - p_۱)(۱ - p_۲)}.$$

ه) شخص B در پرتاب ۶ام دو شیر متوالی مشاهده نموده باشد.

E: در پرتاب‌های ۵ام و ۶ام، شخص B برای اولین مرتبه دو شیر متوالی مشاهده نموده باشد.

$$P(E) = \left((۱ - p_۲)^۳ + \binom{۳}{۱} p_۲(۱ - p_۲)^۲ + p_۲^۲(۱ - p_۲)\right)(۱ - p_۲)p_۲^۲.$$

و) اولین شیر در پرتاب دوم افراد مشاهده شود (F)

$$,P(F) = (۱ - p_۱)(۱ - p_۲)p_۱ + (۱ - p_۱)^۲(۱ - p_۲)p_۲$$

ز) پیشامد E_i را تعریف می نماییم، شخص B در پرتاب iام برای اولین مرتبه دو شیر متوالی مشاهده نموده باشد. احتمال هر یک از E_i را بدست آورید.($i = ۲,۳,٤, \ldots$)

$$P(E_۲) = p_۲^۲$$

$$P(E_۳) = (۱ - p_۲)p_۲^۲$$

$$P(E_٤) = \big(p_۲ + (۱ - p_۲)\big)(۱ - p_۲)p_۲^۲ = (۱ - p_۲)p_۲^۲$$

$$P(E_۵) = (۱ - p_۲^۲)(۱ - p_۲)p_۲^۲ = \left(\binom{۲}{۱} p_۲(۱ - p_۲) + (۱ - p_۲)^۲\right)(۱ - p_۲)p_۲^۲$$

$$P(E_۶) = (۳p_۲(۱ - p_۲)^۲ + p_۲^۲(۱ - p_۲) + (۱ - p_۲)^۳)(۱ - p_۲)p_۲^۲$$

$$P(E_۷) = ??$$

$$\vdots$$

ح) اگر بدانیم اولین شیر در سومین پرتاب مشاهده (G) شده، احتمال آنرا بیابید که توسط شخص A انجام شده باشد (Z).

$$,P(Z|G) = \frac{(۱-p_۱)^۲(۱-p_۲)^۲p_۱}{(۱-p_۱)^۲(۱-p_۲)^۲p_۱+(۱-p_۱)^۳(۱-p_۲)^۲p_۲} = \frac{p_۱}{p_۱+(۱-p_۱)p_۲}$$

ت) هرگاه هریک از افراد موفقیت (شیر) مشاهده نمایند یک امتیاز کسب می کنند در غیر اینصورت امتیاز به طرف مقابل داده می شود. احتمال آنرا بیابید که در ۵ پرتاب اول (هر دو نفر) شخص B، ۳ امتیاز کسب کرده باشد.

I: در ۵ پرتاب اول (هر دو نفر) شخص B، ۳ امتیاز کسب کرده باشد.

$$P(I) = \binom{۲}{۲}p_۲^۲\binom{۳}{۱}p_۱^۲(۱-p_۱) + \binom{۲}{۱}p_۲(۱-p_۲)\binom{۳}{۲}p_۱(۱-p_۱)^۲ + \binom{۲}{۰}(۱-p_۲)^۲\binom{۳}{۳}(۱-p_۱)^۳.$$

ی) احتمال آنرا بیابید که در ۱۰ پرتاب اولیه بازی (در مجموع) ۳ شیر مشاهده شده باشد بطوریکه ۲عدد از آنها توسط شخص A و متوالی و ۱شیر توسط شخص B در توالی دو شیر A نباشد (H).

$$P(H) = ۹p_۱^۲(۱-p_۱)^۳p_۲(۱-p_۲)^٤.$$

ک) تا پرتاب ٤ام هر شخص، A حداکثر ۲شیر و B دقیقا ۲شیر مشاهده نماید (J).

$$P(J) = \binom{٤}{۲}p_۲^۲(۱-p_۲)^۲\left(\binom{٤}{۲}p_۱^۲(۱-p_۱)^۲ + \binom{٤}{۱}p_۱^۱(۱-p_۱)^۳ + \binom{٤}{۰}(۱-p_۱)^٤\right),$$

ل) احتمال آنکه در مجموع ۶پرتاب سکه هر دو نفر به تعداد یکسان شیر مشاهده نمایند (K).

$$,P(K) = \sum_{r=۰}^{۳}\binom{۳}{r}\binom{۳}{r}p_۱^rp_۲^r(۱-p_۲)^{۳-r}(۱-p_۱)^{۳-r}$$

م) تا پرتاب ٤ام شخص A هر یک از افراد یک در میان شیر یا خط بیاورند (L).

$$P(L) =$$

ص) احتمال آنکه تا پرتاب ۶ام شخص A، اولین دو شیر متوالی بعد از پرتاب سوم مشاهده شده باشد (M).

$$P(M) =$$

د) تا پرتاب سوم، هر دو نفر حالتهای مشابه مشاهده نمایند (N).

ض) در ۵ پرتاب اولیه هر شخص در مجموع حداقل ۳ شیر مشاهده شود (O)

ن) ۵امین شیر توسط شخص B مشاهده شود $\sum_{i=3}^{\infty} P(W_i)$

W_i: مشاهده ۵امین شیر توسط شخص B در iامین پرتاب وی

$$P(W_1) = P(W_2) = 0$$

$$,P(W_3) = p_2\left(\binom{3}{0}\binom{2}{1}p_1^3 p_2(1-p_2) + \binom{3}{1}\binom{2}{0}p_1^2 p_2^2(1-p_1)\right)$$

$$P(W_4) = p_2\left(\sum_{i=0}^{3}\binom{4}{3-i}\binom{3}{i}p_1^{4-(3-i)}(1-p_1)^{(3-i)}p_2^{3-i}(1-p_2)^i\right) = \\ ,p_2\left(\sum_{i=0}^{3}\binom{4}{3-i}\binom{3}{i}p_1^{1+i}(1-p_1)^{3-i}p_2^{3-i}(1-p_2)^i\right)$$

$$,P(W_5) = p_2\left(\sum_{i=0}^{4}\binom{5}{4-i}\binom{4}{i}p_1^{4-i}(1-p_1)^{1+i}p_2^{i}(1-p_2)^{4-i}\right)$$

$$\vdots$$

$$,P(W_n) = p_2\left(\sum_{i=0}^{4}\binom{n}{4-i}\binom{n-1}{i}p_1^{4-i}(1-p_1)^{n-(4-i)}p_2^{i}(1-p_2)^{n-1-i}\right)$$

$$\vdots$$

مثال: فرض کنید ۵ نفر کلاه خود را درون یک ظرف قرار می دهند، هر کدام به تصادف از داخل ظرف کلاهی را انتخاب می نماید. احتمال آنرا بیابید که

الف) شخص خاصی کلاه خود را انتخاب نماید (A).

اگر شخص خاص، اولین نفری باشد که کلاهی را از داخل ظرف انتخاب می نماید، آنگاه داریم

$$P(A) = \frac{۱}{۵}.$$

اگر شخص خاص، دومین نفری باشد که کلاهی را از داخل ظرف انتخاب می نماید، آنگاه داریم

$$P(A) = \frac{٤}{۵} \times \frac{۱}{٤} = \frac{۱}{۵}.$$

$$\vdots$$

اگر شخص خاص، آخرین نفری باشد که از داخل ظرف کلاه بر می دارد، آنگاه داریم

$$P(A) = \frac{٤}{۵} \times \frac{۳}{٤} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times ۱ = \frac{۱}{۵}.$$

نتیجه: احتمال برداشتن صحیح کلاه توسط یک شخص، وابسته به اینکه نفر چندم انتخاب کننده می باشد، نیست.

ب) نفر سوم کلاه خود را بدرستی از ظرف خارج نماید (B).

$$P(B) = \frac{٤}{۵} \times \frac{۳}{٤} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۵}$$

ج) دو شخص خاص کلاه خود را بدرستی انتخاب نمایند (C).

$$P(C) = \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{٤}$$

د) اولین نفر فقط کلاه خود را بدرستی انتخاب نماید (D).

$$P(D) = \frac{۱}{۵} \times \left(\frac{۹}{۲٤}\right)$$

ه) احتمال اینکه تنها یک نفر، کلاه خود را بدرستی انتخاب نماید. (این نوع مسائل تحت عنوان جورکردن شناخته می شود که در ادامه به آن خواهیم پرداخت)

احتمال شرطی: اگر بدانیم پیشامد B رخ داده است (به شرط اینکه $P(B) \neq ۰$) و بخواهیم تحت این رخداد احتمال وقوع پیشامد A را بدست بیاوریم، می نویسیم

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

نکته: تحت شرط یا اطلاع از نتیجه آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای تحدید می شود و می بایست تحت این فضای نمونه‌ای جدید محاسبه احتمال نمود.

مثال: در پرتاب دو تاس احتمال آنرا بیابید که پرتاب اول حداقل ٤ باشد، بشرط آنکه مجموع دو تاس برابر ۷ مشاهده شده است (H).

روش اول: اینکه کل مسئله را بعنوان یک پیشامده همانند H در نظر بگیریم.

$$P(H) = \frac{۳}{۶}.$$

نکته: این روش در مسائل شرطی همیشه قابل استفاده نیست.

روش دوم: استفاده از احتمال شرطی (مسیر اصلی)

A: پرتاب اول حداقل ٤ باشد.

B: مجموع دو تاس برابر ۷ مشاهده شود.

$$P(A) = \frac{۳ * ۶}{۳۶} = \frac{۱}{۲}, \qquad P(B) = \frac{۶}{۳۶}, \qquad P(A \cap B) = \frac{۳}{۳۶}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{۳}{۳۶}}{\frac{۶}{۳۶}} = \frac{۳}{۶}.$$

نکته: در مبحث احتمال شرطی با بیان شرط، فضای نمونه‌ای اصلی تحدید می گردد (در مثال قبل فضای اصلی ۳۶ حالت دارد در حالیکه فضای تحدید شده تنها ۶ حالته است) و باید بر حسب فضای تحدید شده، احتمال خواسته شده را بدست آورد. به بیان دیگر با وجود شرط فضای احتمال نیز تغییر می نماید (یعنی فضای نمونه‌ای جدیدی بدست می آید) و احتمال شرطی یک تابع احتمال جدید بر حست تابع احتمال قبل می باشد.

توجه: برای درک بیشتر تفاوت بین تابع احتمال ایجاد شده در مبحث احتمال شرطی در بعضی کتاب ها، احتمال شرطی را بفرم زیر نیز نمایش می دهند.

$$P(A|B) = P_B(A).$$

در ادامه نشان می دهیم، تابع فوق، P_B، در اصول ۳گانه تابع احتمال صدق می نماید.

۱- می دانیم $A \cap B \subset B$، بنابراین داریم $P(A \cap B) \leq P(B)$، یعنی

$$۰ \leq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq ۱ \Longrightarrow ۰ \leq P(A|B) \leq ۱.$$

این بدان معنا است که در شرط یک تابع احتمال صدق می نماید.

۲- $$P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = ۱$$

درشرط دوم تابع احتمال نیز صدق می نماید.

۳- فرض می کنیم دو پیشامد A و C مجزا باشند، یعنی $A \cap C = \phi$. بنابراین خواهیم داشت

$$P(A\cup C|B)=\frac{P\big((A\cup C)\cap B\big)}{P(B)}=\frac{P\big((A\cap B)\cup(C\cap B)\big)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)+P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=P(A|B)+P(C|B).$$

بدین صورت نشان دادیم احتمال شرطی در ۳گانه شرایط تابع احتمال می گنجد، بنابراین خود نیز یک تابع احتمال می باشد.

اصل ضرب احتمال: با توجه به تعریف احتمال شرطی‌های زیر، یعنی

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\qquad P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)},$$

داریم

$$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A).$$

مثال: فرض کنید ۳جعبه داریم که درون جعبه اول ٤ سکه طلا و ۲ نقره، جعبه دوم ۳ طلا و ۳ نقره و جعبه سوم ۱ طلا و ۵ نقره را شامل می شود. فردی به تصادف یکی از جعبه ها را انتخاب می نماید. احتمال آنرا بیابیدکه

الف) سکه انتخابی از جعبه، طلا باشد.

A: انتخاب سکه طلا از جعبه انتخاب شده

E_i: انتخاب جعبه iام برای $i=۱,۲,۳$

$$P(E_۱)=P(E_۲)=P(E_۳)=\frac{۱}{۳},$$

$$P(A|E_{۱}) = \frac{۴}{۶}, \qquad P(A|E_{۲}) = \frac{۳}{۶}, \quad P(A|E_{۳}) = \frac{۱}{۶}.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap E_{۱}) + P(A \cap E_{۲}) + P(A \cap E_{۳}) \\ &= P(E_{۱})P(A|E_{۱}) + P(E_{۲})P(A|E_{۲}) + P(E_{۳})P(A|E_{۳}) \\ &= \frac{۱}{۳} \times \frac{۴}{۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۸}{۱۸}. \end{aligned}$$

ب) اگر از جعبه انتخابی دو سکه بردارد، احتمال آنرا بیابید که یکی طلا و دیگری نقره باشد.

B: دو سکه انتخابی از جعبه شامل ۱ طلا و ۱ نقره باشد

$$P(B|E_{۱}) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}}, \qquad P(B|E_{۲}) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۲}}, \quad P(B|E_{۳}) = \frac{\binom{۱}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۶}{۲}}.$$

$$P(B) = P(B \cap E_{۱}) + P(B \cap E_{۲}) + P(B \cap E_{۳}) = P(E_{۱})P(B|E_{۱}) + P(E_{۲})P(B|E_{۲}) + P(E_{۳})P(B|E_{۳}) = \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۲}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۱}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۲۲}{۴۵}.$$

تفسیر: از هر ۴۵ دفعه انتخاب تصادفی شخص از بین جعبه‌ها با برداشت دو سکه، بطور متوسط ۲۲ مرتبه شاهد ۱سکه طلا و یک سکه نقره خواهد بود.

ج) از دو مهره انتخابی حداقل یکی نقره باشد.

C: حداقل یکی نقره باشد

$$P(C)=P(C\cap E_۱)+P(C\cap E_۲)+P(C\cap E_۳)=P(E_۱)P(C|E_۱)+P(E_۲)P(C|E_۲)+P(E_۳)P(C|E_۳)=\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}+\binom{۲}{۲}}{\binom{۶}{۲}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۲}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۳۶}{۴۵}.$$

تفسیر: از هر ۴۵ انتخاب تصادفی جعبه با برداشت ۲ سکه، بطور متوسط ۳۶ مرتبه آن شامل حداقل یکی نقره می باشد.

د) مهره انتخابی شخص نقره می باشد. احتمال آنرا بیابید که ظرف ۳ انتخاب شده باشد؟

D: مهره انتخابی نقره باشد.

$$P(E_۳|D)=\frac{P(E_۳\cap D)}{P(D)}=\frac{P(E_۳)P(D|E_۳)}{\frac{۱۰}{۱۸}}=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۶}}{\frac{۱۰}{۱۸}}=\frac{۵}{۱۰}.$$

تفسیر: انتظار داریم که به طور متوسط از هر ۱۰ نقره مشاهده شده، ۵ مرتبه آن ظرف انتخابی، ظرف شماره ۳ باشد.

$$P(D)=P(D\cap E_۱)+P(D\cap E_۲)+P(D\cap E_۳)=P(E_۱)P(D|E_۱)+P(E_۲)P(D|E_۲)+P(E_۳)P(D|E_۳)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۶}=\frac{۱۰}{۱۸}.$$

$$P(D)=۱-P(A).$$

ه) اگر بدانیم یکی از دو مهره انتخابی طلا است، احتمال انتخاب کدام جعبه محتملتر است؟

F: یکی از دو مهره انتخابی طلا است. (پیشامد F و B معادل هستند)

$$P(E_۱|F)=\frac{P(E_۱\cap F)}{P(F)}=\frac{P(E_۱)P(B|E_۱)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{٤}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}}}{\frac{۲۲}{٤۵}}=\frac{۸}{۲۲}.$$

$$P(E_۲|F)=\frac{P(E_۲\cap F)}{P(F)}=\frac{P(E_۲)P(B|E_۲)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۲}}}{\frac{۲۲}{٤۵}}=\frac{۹}{۲۲}.$$

$$P(E_۳|F)=\frac{P(E_۳\cap F)}{P(F)}=\frac{P(E_۳)P(B|E_۳)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۶}{۲}}}{\frac{۲۲}{٤۵}}=\frac{۵}{۲۲}.$$

بدلیل آنکه احتمال انتخاب شدن ظرف دوم بیشتر شد، پاسخ ظرف شماره ۲ خواهد بود.

مثال: شخص حسابداری با ٤ شرکت همکاری می نماید. بطور متوسط در در ابتدای هر ١٤ روز کاری ۵مرتبه به شرکت *A*، ٤ مرتبه به شرکت *B*، ۳ مرتبه به شرکت *C* و ۲ مرتبه نیز به شرکت *D* سر میزنند.

E_i: سر زدن اول روز شخص به شرکت *i*ام (شرکت اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب *A*، *B*، *C* و *D* تعریف می شوند)

$$P(E_۱)=\frac{۵}{۱٤},\qquad P(E_۲)=\frac{٤}{۱٤},\qquad P(E_۲)=\frac{۳}{۱٤},\quad P(E_٤)=\frac{۲}{۱٤}.$$

شخص بطور عادت نصف روز در یک شرکت است و نیم دیگر روز را به یکی دیگر از شرکت‌ها سر می زند. اگر در شرکت اول باشد احتمال سرزدن به سایر شرکت‌ها به ترتیب برابر ۰.۳، ۰.٤، ۰.۳ می باشد. اگر در شرکت دوم باشد، این احتمال‌ها به ترتیب برابر ۰.۲، ۰.۳ و ۰.۵ است، اگر در شرکت سوم باشد این احتمال‌ها به ترتیب ۰.٤، ۰.۵، ۰.۱ و همچنین اگر به شرکت چهارم سرزده باشد، احتمال رفتن در نصف روز بعد به سایر شرکت‌ها به ترتیب برابر است با ۰.۲۵، ۰.٤۵، ۰.۳.

الف) احتمال آنرا بیابید که شخص آخر وقت از شرکت دوم به منزل برگردد.

F: در نیمه دوم روز در شرکت B باشد.

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap E_۱) + P(F \cap E_۳) + P(F \cap E_٤) \\ &= P(E_۱)P(F|E_۱) + P(E_۳)P(F|E_۳) + P(E_٤)P(F|E_٤) \\ &= \frac{۵}{۱٤}\,۰.۳ + \frac{۳}{۱٤}\,۰.۵ + \frac{۲}{۱٤}\,۰.٤۵ = \frac{۳.۹}{۱٤} = \frac{۳۹}{۱٤۰}. \end{aligned}$$

تفسیر: از هر ۱٤۰ روز کاری، شخص بطور متوسط ۳۹ روز از شرکت B به منزل بر می‌گردد.

ب) احتمال آنرا بیابید که شخص در دو روز متوالی به شرکت اول سرنزند.

E: شخص در دو روز کاری به شرکت A سر نزند.

$$P(E) = ۱ - P(E') = ۱ -$$

$$P(E') =$$

روش دوم: $H_۱$: در یک روز کاری به شرکت A سرنزند

$H_۲$: در روز کاری دوم به شرکت A سرنزند

$$
\begin{aligned}
P(H_۱) &= P(H_۱ \cap E_۲) + P(H_۱ \cap E_۳) + P(H_۱ \cap E_٤) \\
&= P(E_۲)P(H_۱|E_۲) + P(E_۳)P(H_۱|E_۳) + P(E_٤)P(H_۱|E_٤) \\
&= \frac{٤}{١٤}\,۰.۸ + \frac{۳}{١٤}\,۰.۶ + \frac{۲}{١٤}\,۰.۷۵ = ۰.٤۶
\end{aligned}
$$

$$P(H_۱) = P(H_۲) = ۰.٤۶$$

$$P(E) = P(H_۱ \cap H_۲) = P(H_۱)P(H_۲|H_۱) = ۰.٤۶ \times ۰.٤۶ = ۰.۲۱۱۶.$$

تفسیر: این بدان معنا است که از هر ۱۰۰۰۰ دو روز کاری متوالی این حسابدار، انتظار داریم بطور متوسط در ۲۱۱۶ دو روز متوالی به شرکت اول سر نزند.

ج) اگر بدانیم امروز از شرکت C به منزل بر می گردد، احتمال آنرا بیابید که صبح به شرکت B سرزده باشد؟

J: از شرکت C به منزل بر می گردد.

$$P(E_۲|J) = \frac{P(J\cap E_۲)}{P(J)} = \frac{P(E_۲)P(J|E_۲)}{P(J)} = \frac{\frac{٤}{١٤}\times ۰.۳}{۰.۲٤} = \frac{۱۲}{۳۸}$$

$$
\begin{aligned}
P(J) &= P(E_۱ \cap J) + P(E_۲ \cap J) + P(E_٤ \cap J) \\
&= P(E_۱)P(J|E_۱) + P(E_۲)P(J|E_۲) + P(E_٤)P(J|E_٤) \\
&= \frac{۵}{١٤}\,۰.٤ + \frac{٤}{١٤}\,۰.۳ + \frac{۲}{١٤}\,۰.۳ = ۰.۲٤.
\end{aligned}
$$

د) در ۱۰ روز مشخص کاری احتمال آنرا بیابید که شخص ۵ مرتبه به شرکت D سر زده باشد.

F: در یک روز کاری، به شرکت D سربزند.

$$P(F) = P(E_{٤}) + P(F \cap E_{١}) + P(F \cap E_{٢}) + P(F \cap E_{٣})$$
$$= \frac{٢}{١٤} + \frac{٥}{١٤}\,٠.٣ + \frac{٤}{١٤}\,٠.٥ + \frac{٣}{١٤}\,٠.١ = \frac{٥٨}{١٤٠}.$$

H: در ۱۰ روز مشخص کاری، شخص ۵ مرتبه به شرکت D سر زده باشد

$$P(H) = \binom{١٠}{٥}\left(\frac{٥٨}{١٤٠}\right)^{٥}\left(١ - \frac{٥٨}{١٤٠}\right)^{٥}.$$

ه) در دو روز کاری به همه شرکت‌ها سر بزنند.

تکلیف: برای این مثال ۳ گزینه طراحی و با پاسخ آنرا بارگزاری نمایید

استقلال[۱]**:** هرگاه رخ دادن یا رخ ندادن یک پیشامد همانند A تاثیری بر رخ دادن یا رخ ندادن یک پیشامد دیگر B نداشته باشد، گوییم این دو پیشامد مستقلند. به بیان دیگر

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{یا} \quad P(B|A) = P(B). \qquad (۱)$$

نکته: اگر از اصل ضرب احتمال بهره ببریم روابط بالا نتیجه ادامه را برای دو پیشامد مستقل A و B نتیجه می دهند.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \qquad (۲)$$

توجه: رابطه (۱) را مفهومی‌ترین تعریف از استقلال گویند و رابطه (۲) را ابزار چک کردن استقلال بین دو پیشامد در نظر می گیریم.

نکته ۱: دو پیشامد A و B باید اشتراک داشته باشند تا به بررسی استقلال بین آنها بپردازیم.

نکته ۲: هرگاه برای دو پیشامد A و B داشته باشیم که $A \subset B$، آنگاه

$$P(A \cap B) = P(A).$$

این بدان معنا است که دو پیشامد A و B مستقل نیستند.

نکته ۳: هر پیشامدی از فضای نمونه‌ای مستقل است، زیرا

$$P(A \cap S) = P(A) = P(A)P(S).$$

---

۱ Independency

نکته ٤: برای دو پیشامد مجزای غیر تهی، بکاربردن مفهوم استقلال برای آنها بی معنا است، زیرا

$$P(A \cap B) = ۰ \neq P(A)P(B).$$

این بدان معنا است که مفهوم استقلال از مجزا بودن کامل متمایز است.

نکته ۵: هیچ دو پیشامد مجزایی، مستقل نیستند مگر آنکه یکی از آنها تهی باشد. به بیان دیگر، هر پیشامدی از مجموعه تهی نیز مستقل می باشد.

مثال: فرض دو پیشامد A و B مستقل باشند. نشان دهید پیشامد A از B' نیز مستقل می باشد.

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)\big(۱ - P(B)\big) = P(A)P(B'). \end{aligned}$$

ب) A' از B' نیز مستقل می باشد.

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P((A \cup B)') = ۱ - P(A \cup B) \\ &= ۱ - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) \\ &= ۱ - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = P(A') - P(B)P(A') \\ &= P(A')P(B'). \end{aligned}$$

مثال: اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی $S = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_٤\}$ باشد و پیشامدهای مدنظر بفرم

$$A = \{a_۱, a_۲\}, \quad B = \{a_۱, a_٤\}, \quad C = \{a_۳, a_٤\}, \quad D = \{a_۲, a_۳, a_٤\}.$$

با فرض آنکه تابع احتمال مدنظر برای این فضای نمونه‌ای بصورت

$$p_{۱}(a_i) = \frac{۱}{٤}; \quad i = ۱, ۲, ۳, ٤.$$

باشد، خواهیم داشت.

$$P_{۱}(A) = P_{۱}(B) = P_{۱}(C) = \frac{۱}{۲}, \qquad P(D) = \frac{۳}{٤}.$$

$$P_{۱}(A \cap B) = \frac{۱}{٤} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = P_{۱}(A)P_{۱}(B) \Leftrightarrow A \text{ and } B \text{ are } \underline{\text{independent}}.$$

$$A \cap C = \phi \Leftrightarrow \mathrm{A} \text{ and } \mathrm{C} \text{ are } \underline{\text{separate}} \text{ sets}.$$

$$P_{۱}(A \cap D) = \frac{۱}{٤} \neq \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{٤} = P_{۱}(A)P_{۱}(D) \Leftrightarrow A \text{ and } D \text{ are dependent}.$$

$$P_{۱}(B \cap C) = \frac{۱}{٤} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = P_{۱}(B)P_{۱}(C) \Leftrightarrow B \text{ and } C \text{ are independent}.$$

$$P_{۱}(B \cap D) = \frac{۱}{٤} \neq \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{٤} = P_{۱}(B)P_{۱}(D) \Leftrightarrow B \text{ and } D \text{ are dependent}.$$

$$C \subset D \Leftrightarrow C \text{ and } D \text{ are dpendent}.$$

نکته: مستقل بودن دارای خاصیت تعدی نیست.

نکته: دو پیشامد نسبت به همدیگر می توانند مستقل، مجزا یا وابسته باشند.

ب) تابع احتمال جدیدی بر فضای نمونه S بفرم زیر تعریف می نماییم

$$p_{۲}(a_i) = \frac{i}{۱۰}; \qquad i = ۱, \dots, ٤.$$

$$A = \{a_{۱}, a_{۲}\}, \quad B = \{a_{۱}, a_{٤}\}, \quad C = \{a_{۳}, a_{٤}\}, \quad D = \{a_{۲}, a_{۳}, a_{٤}\}.$$

$$P_{۲}(A) = \frac{۳}{۱۰}, \qquad P_{۲}(B) = \frac{۱}{۲}, \qquad P_{۲}(C) = \frac{۷}{۱۰}, \qquad P(D) = \frac{۹}{۱۰}.$$

آنگاه

$$P_۲(A \cap B) = \frac{۱}{۱۰} \neq \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۱}{۲} = P_۲(A)P_۲(B) \Leftrightarrow A \text{ and } B \text{ are dependent}.$$

$$A \cap C = \phi \Leftrightarrow A \text{ and } C \text{ are separate sets}.$$

$$P_۲(A \cap D) = \frac{۲}{۱۰} \neq \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۹}{۱۰} = P_۲(A)P_۲(D) \Leftrightarrow A \text{ and } D \text{ are dependent}.$$

$$P_۲(B \cap C) = \frac{٤}{۱۰} \neq \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۱۰} = P_۲(B)P_۲(C) \Leftrightarrow B \text{ and } C \text{ are dependent}.$$

$$P_۲(B \cap D) = \frac{٤}{۱۰} \neq \frac{۱}{۲} \times \frac{۹}{۱۰} = P_۲(B)P_۲(D) \Leftrightarrow B \text{ and } D \text{ are dependent}.$$

$$C \subset D \Leftrightarrow C \text{ and } D \text{ are dependent}.$$

نکات بدست آمده از مثال را می توان بشرح زیر نوشت:

۱) مستقل بودن به تابع احتمال تعریف شده بر فضای نمونه وابسته می باشد. به بیان دیگر با تغییر تابع احتمال دو پیشامد می توانند مستقل یا وابسته شوند.

۲) مفهوم مستقل بودن با مجزا بودن کاملا متفاوت می باشد، بدین صورت که مجزا بودن یک مفهوم جبری است در حالیکه مستقل بودن به تابع احتمال تعریف شده وابسته می باشد. به بیان دیگر مستقل بودن یک مفهوم وابسته به تابع احتمال است.

۳) اگر مجموعه‌ای زیر مجموعه دیگری باشد، همیشه وابسته است، مگر اینکه مجموعه بزرگتر مجموعه مرجع باشد.

٤) دو پیشامد نسبت به یکدیگر ۳ حالت می توانند داشته باشند: مجزا (یعنی وجه مشترک ندارند)، مستقل یا وابسته.

مثال مهم: اگر پیشامد A مستقل از پیشامد B با احتمال ۰.۵ رخ دهد و احتمال اجتماع این دو پیشامد ۰.۷۳ باشد، احتمال رخ دادن B را مشخص نمایید.

$$
\begin{aligned}
۰.۷۳ = P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= P(A) + P(B) - P(B)P(A) = P(A) + P(B)\big(1 - P(A)\big) \\
&= ۰.۵ + P(B)۰.۵ \Leftrightarrow P(B) = ۰.۴۶
\end{aligned}
$$

مثال: احتمال رخ دادن دو پیشامد A و B به ترتیب برابر ۰.۷۰ و ۰.٤۵ می باشد.

الف) مینیمم و ماکزیمم مقدار احتمال اشتراک این دو پیشامد را بدست آورید.

$$\max(۰, P(A) + P(B) - ۱) \leq P(A \cap B) \leq \min\big(P(A), P(B)\big)$$

$$۰.۱۵ \leq P(A \cap B) \leq ۰.٤۵$$

ب) مینیمم و ماکزیمم مقدار احتمال اجتماع این دو پیشامد را بدست آورید.

$$\max\big(P(A), P(B)\big) \leq P(A \cup B) \leq \min(P(A) + P(B), ۱)$$

$$۰.۷ \leq P(A \cup B) \leq ۱$$

ج) اگر این دو پیشامد مستقل باشند، احتمال اجتماع و اشتراک آنها را بدست آورید

$$P(A \cap B) = ۰.۷ \times ۰.٤۵ = ۰.۳۱۵$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B)P(A) = ۰.۷ + ۰.٤۵ - ۰.۳۱۵ = ۰.۸۳۵$$

نتیجه: وجود استقلال بین دو پیشامد هیچ ارتباطی با مینیمم یا ماکزیمم سازی اشتراک یا اجتماع دو پیشامد ندارد. دلیل آنرا می توان اینگونه بیان کرد که مینیمم یا ماکزیمم

سازی اشتراک یا اجتماع دو پیشامد یک موضوع جبری است در حالیکه استقلال دو پیشامد به تابع احتمال تعریف شده مربوط می باشد.

مثال: دو پیشامد داریم که احتمال رخ دادن هر دو آنها برابر ۱ می باشد، نشان دهید احتمال اشتراک این دو پیشامد نیز برابر ۱ است.

$$\max(۰, P(A)+P(B)-۱) = ۱ \leq P(A\cap B) \leq \min\big(P(A), P(B)\big) = ۱.$$

بنابر قضیه فشردگی داریم $P(A\cap B) = ۱$.

همچنین بدلیل اینکه $P(A\cap B) = ۱ = ۱\times ۱ = P(A)P(B)$، می توان گفت این دو مجموعه از یکدیگر مستقلند.

مثال: فرض کنید تابع احتمال مربوط به فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی که در آن $S=[۰,۱۰]$، برابر باشد با طول پیشامد تقسیم بر ده، به بیان دیگر اگر A یک پیشامد از این فضای نمونه‌ای باشد، داریم

$$P(A) = \frac{length(A)}{۱۰}.$$

الف) احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید

$$A = (۰, ٤] \Longrightarrow P(A) = ۰.٤$$

$$B = \{۰,۱,۲,\dots,۱۰\} = \bigcup_{i=۰}^{۱۰} [i, i] \Longrightarrow P(B) = ۰.$$

$$F = S - B \Longrightarrow P(F) = ۱$$

$$C = (۰, ۱۰] \Longrightarrow P(C) = ۱$$

$$D = Q \cap S \Longrightarrow P(D) = ۰$$

$$E = C - D \Longrightarrow P(C \cap D') = ۱.$$

نتیجه: پیشامد C مستقل از E، پیشامد C مستقل از F و همچنین دو پیشامد E و F مستقل می باشند.

مثال: ۸۹ درصد مردم یک شهر مبتلا به دیابت نیستند. دستگاه تشخیص دیابت، در ۹۷ درصد مواقع بدرستی تشخیص بیماری دیابت را می دهد و در ١٤ درصد مواقع به اشتباه تشخیص دیابت می دهد.

E: پیشامد تشخیص دیابت (توسط دستگاه)

A: پیشامد ابتلا به دیابت

$$P(A) = ۰.۱۱, \quad P(E|A) = ۰.۹۷, \quad P(E|A') = ۰.١٤.$$

الف) احتمال تشخیص دیابت توسط دستگاه (در این شهر) را مشخص کنید.

$$P(E) = P(E\cap A) + P(E \cap A') = P(A)P(E|A) + P(A')P(E|A') = ۰.۱۱ \times ۰.۹۷ + ۰.۸۹ \times ۰.١٤ = ۰.۲۳۱۳.$$

تفسیر: از بین ۱۰هزار نفر مراجعه کننده به این دستگاه (بمنظور تشخیص دیابت) بطور متوسط برای ۲۳۱۳ نفر آنها تشخیص دیابت می دهد.

ب) در بین افراد تشخیص داده نشده بعنوان فرد دیابتی، چقدر احتمال اشتباه دستگاه وجود دارد؟ (به بیان دیگر احتمال به اشتباه تشخیص عدم دیابتی بودن را می خواهد)

$$P(A|E') = \frac{P(A\cap E')}{P(E')} = \frac{P(A)P(E'|A)}{۱-P(E)} = \frac{۰.۱۱ * ۰.۰۳}{۱-۰.۲۳۱۳} = ۰.۰۰٤۳.$$

تفسیر: یعنی از هر ۱۰هزار نفر که با بهره از دستگاه تشخیص دیابت برای آن‌ها داده نشده است، بطور متوسط ٤۳ نفر از آنها مبتلا به دیابت هستند.

مثال: در نظر بگیرید از بین ۵۲ کارت بازی به تصادف و با جایگذاری بطور متوالی کارت انتخاب می نماییم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

$a_{i.j}$ مشاهده شماره jام از کارت بازی نوع i. $i=1,2,3,4$ و $j=1,2,\ldots,13$

$$S=\{(b_۱,b_۲,b_۳,\ldots),\qquad b_k\in\{a_{i.۱},\ldots,a_{i.۱۳}\}\ i=۱,\ldots,٤\}$$

b_k: نتیجه بدست آمده در برداشت kام

الف) احتمال آنرا بیابید که اولین تک در برداشت ۷ام رخ دهد.

A: اولین تک در برداشت ۷ام

$$P(A)=\frac{٤٨^۶\times ٤}{۵۲^۷}.$$

ب) احتمال آنرا بیابید که تک قبل از صورت مشاهده شود

B: پیشامده مشاهده تک قبل از صورت به بیان دیگر کارت تک را قبل از شماره‌های ۱۱، ۱۲ و ۱۳ مشاهده نماید

$$P(B)=\frac{٤}{۵۲}+\frac{۳٦}{۵۲}\frac{٤}{۵۲}+\left(\frac{۳٦}{۵۲}\right)^۲\frac{٤}{۵۲}+\cdots=\frac{\frac{٤}{۵۲}}{۱-\frac{۳٦}{۵۲}}=\frac{٤}{۱٦}=\frac{۱}{٤}$$

ج) در ۱۲ برداشت اولیه دقیقا ٤ صورت مشاهده شده باشد. (C)

$$P(C)=\binom{۱۲}{٤}\left(\frac{۱۲}{۵۲}\right)^٤\left(\frac{٤۰}{۵۲}\right)^۸$$

د) اگر بدانیم در ۱۵ برداشت اولیه هیچ صورتی مشاهده نشده، احتمال آنرابیابید که ۸ مرتبه حداکثر ۳ را مشاهده نماییم.

D: در ۱۵ برداشت اولیه هیچ صورتی مشاهده نشده

E: ۸ مرتبه حداکثر ۳ را مشاهده نماییم

$$P(E|D)=\frac{P(D\cap E)}{P(D)}=\frac{\binom{۱۵}{۸}\left(\frac{۱۲}{٤۰}\right)^{۸}\left(\frac{۲۸}{٤۰}\right)^{۷}}{\left(\frac{٤۰}{۵۲}\right)^{۱۵}}$$

ه) احتمال آنرا بیابید که شخص در پرتابهای متوالی، ۲صورت پشت سر هم را مشاهده نماید (F).

F_i: پیشامد مشاهده دو صورت توام در پرتابهای i و $i+۱$

$$P(F)=P(F_{۱})+P(F_{۲})+\cdots=\left(\frac{۳}{۱۳}\right)^{۲}+\frac{۱۰}{۱۳}\left(\frac{۳}{۱۳}\right)^{۲}+\frac{۱۰}{۱۳}\left(\frac{۳}{۱۳}\right)^{۲}+\cdots$$

$$P(F_i)=aP(F_{i-۱})+bP(F_{i-۲});\qquad i=۳,٤,۵,\ldots$$

و) اگر شماره‌های کارت‌ها را از ۱ تا ۱۳ فرض کنیم، احتمال آنرا بیابید که میانه ۷ برداشت اول برابر ۵ شود

H: میانه ۷ برداشت اول برابر ۵

$$P(H)=\frac{۱}{۱۳}\left(\frac{۵}{۱۳}\right)^{۳}\left(\frac{۸}{۱۳}\right)^{۳}.$$

مثال: فرض کنید ۱۰ نفر حاضر در یک مهمانی کلاه خود را درون یک اتاق قرار می دهند. قبل از پایان مهمانی به ناگهان برق قطع می شود و هر شخص به تصادف یک کلاه را بر می دارد.

الف) احتمال آنرا بیابید که اولین نفر بدرستی کلاه خود را انتخاب نماید.

A_i: پیشامد آنکه شخص iام بدرستی کلاه خود را انتخاب نماید.

$$P(A_۱) = \frac{۹!}{۱۰!} = \frac{۱}{۱۰} \Longrightarrow P(A_i) = \frac{۹!}{۱۰!}; m \quad i = ۱, \dots ,۱۰.$$

ب) نفر اول و آخر به درستی کلاه خود را انتخاب نمایند.

$$P(A_۱ \cap A_{۱۰}) = \frac{۸!}{۱۰!}.$$

ج) ۳ نفر خاص به درستی کلاه خود را انتخاب نمایند.

$$P\left(A_{i_۱} \cap A_{i_۲} \cap A_{i_۳}\right) = \frac{۷!}{۱۰!}.$$

د) r نفر مشخص (خاص) به درستی کلاه خود را انتخاب نمایند.

$$P\left(A_{i_۱} \cap \dots \cap A_{i_r}\right) = \frac{(۱۰ - r)!}{۱۰!}.$$

فرمول احتمال اجتماع n پیشامد

اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو پیشامد باشند احتمال اجتماع آنها از رابطه زیر بدست می آید

$$P(A_۱ \cup A_۲) = P(A_۱) + P(A_۲) - P(A_۱ \cap A_۲).$$

اگر $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ سه پیشامد باشند احتمال اجتماع آنها از رابطه زیر بدست می آید

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_۱) + P(A_۲) + P(A_۳) - P(A_۱ \cap A_۲) - P(A_۱ \cap A_۳) - P(A_۲ \cap A_۳) + P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳).$$

همینطور برای پیشامدهای $A_۱, \dots, A_n$، احتمال اجتماع آنها برابر است با

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_۱) + \cdots + P(A_n) - P(A_۱ \cap A_۲) - \cdots - P(A_{n-۱} \cap A_n) + P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) + \cdots + P(A_{n-۲} \cap A_{n-۱} \cap A_n) + \cdots + (-۱)^{n-۱} P(A_۱ \cap \dots \cap A_n).$$

حال اگر تعریف کنیم

$$S_۱ = P(A_۱) + \cdots + P(A_n) = \sum_{i=۱}^{n} P(A_i),$$

$$S_۲ = P(A_۱ \cap A_۲) + \cdots + P(A_{n-۱} \cap A_n) = \sum_{i=۱}^{n-۱} \sum_{j=i+۱}^{n} P\left(A_i \cap A_j\right),$$

$$\vdots$$

$$S_n = P(A_۱ \cap \dots \cap A_n),$$

خواهیم داشت

$$P(A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n) = S_۱ - S_۲ + S_۳ - S_٤ + \cdots + (-۱)^{n-۱} S_n = \sum_{i=۱}^{n} (-۱)^{i-۱} S_i.$$

نکته: باید توجه داشت که عبارت S_r حاصل جمع $\binom{n}{r}$ جمله مجزا می باشد.

مسئله جورسازی:

در اینجا در نظر داریم تا احتمال آنرا بیابیم که در یک چیدمان nتایی (همانند مثال قبل) هیچ جوری رخ ندهد. بدین منظور تعریف می کنیم p_n را بعنوان رخ دادن این پیشامد تعریف می کنیم. برای محاسبات آن می توان از مثال زیر کمک گرفت. همچنین از مطالب جذاب در جورسازی بدست آوردن احتمال این مطلب است که دقیقا r جور رخ دهد.

مثال: در نظر داریم n مهره که روی آنها اعداد ۱ تا n نوشته شده است را به تصادف درون n جعبه با شماره‌های ۱ الی n (در هر جعبه ۱مهره) قراردهیم. در چنین چیدمانی گوییم در مکان iام یک جور رخ داده اگر شماره جعبه i و مهره درون آن یکسان باشد.

الف) احتمال آنرا بیابید که یک جور در جعبه شماره ۱ رخ دهد.

A_i: پیشامد آنکه در جعبه شماره i یک جور رخ دهد. برای $i = ۱, \dots, n$

$$P(A_۱) = \frac{(n-۱)!}{n!} = \frac{۱}{n}.$$

ب) احتمال آنکه r جور در جعبه‌های شماره ۱ الی r رخ دهد.

$$P(A_۱ \cap \dots \cap A_r) = \frac{(n-r)!}{n!}.$$

ج) احتمال آنکه در جعبه‌ها با شماره‌های $i_۱, \dots, i_r$، جور رخ دهد.

A_{i_j}: پیشامد آنکه در جعبه شماره i_j یک جور رخ دهد.

$$P\left(A_{i_۱} \cap \ldots \cap A_{i_r}\right) = \frac{(n-r)!}{n!}.$$

نکته: احتمال آنکه در r جعبه مشخص جور رخ دهد، برابر است با $\frac{(n-r)!}{n!}$

د) احتمال آنکه حداقل یک جور رخ دهد.

$$\begin{aligned} P(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n) &= S_۱ - S_۲ + S_۳ + \cdots + (-۱)^{n-۱} S_n \\ &= \binom{n}{۱}\frac{(n-۱)!}{n!} - \binom{n}{۲}\frac{(n-۲)!}{n!} + \binom{n}{۳}\frac{(n-۳)!}{n!} + \cdots \\ &+ (-۱)^{n-۱}\binom{n}{n}\frac{۱}{n!} = ۱ - \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + (-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n!}. \end{aligned}$$

یادآوری: بسط مک لورن e^a برابر است با

$$e^a = ۱ + a + \frac{a^۲}{۲!} + \frac{a^۳}{۳!} + \frac{a^٤}{٤!} + \cdots = \sum_{r=۰}^{\infty} \frac{a^r}{r!}.$$

بنابراین برای عبارت $e^{-۱}$ داریم

$$e^{-۱} = ۱ - ۱ + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{٤!} - \cdots$$

از این می توان نتیجه گرفت که $P(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n)$ مشابه $(n+۱)$ جمله ابتدایی بسط مک-لورن $۱ - e^{-۱}$ می باشد.

نکته: همانطور که می دانیم مقدار $۱ - e^{-۱} = ۱ - ۰.۳۶۷۸ = ۰.۶۳۲۱$ و داریم

$$n = ۳ \Longrightarrow ۱ - \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} = ۰.۶۶۶۶,$$

$$n = ٤ \Longrightarrow ۱ - \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} - \frac{۱}{٤!} = ۰.۶۲۵,$$

$$n = ۵ \Longrightarrow ۱ - \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} - \frac{۱}{٤!} + \frac{۱}{۵!} = ۰.۶۳۳۳,$$

$$n = ۶ \Longrightarrow ۱ - \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} - \frac{۱}{٤!} + \frac{۱}{۵!} - \frac{۱}{۶!} = ۰.۶۳۱۹.$$

نتیجه: احتمال اینکه حداقل یک جور ایجاد شود، تقریبا برابر ۰.۶۳۲۱ است و مستقل از مقدار n (برای $n \geq ٤$) می باشد.

نتیجه: اگر تعریف کنیم p_n را بعنوان احتمال آنکه هیچ جوری در این n مکان رخ ندهد، آنگاه

$$p_n = ۱ - P(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n) = ۱ - \left(۱ - \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + (-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n!}\right)$$
$$= \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + (-۱)^n\frac{۱}{n!}.$$

نکته: یک تقریب مناسب برای p_n برابر است با $e^{-۱}$.

۱ه) احتمال آنکه فقط در جعبه‌های شماره ۱، ۲ و ۳ جور رخ دهد؟ (B)

$$P(B) = \frac{۱ \times (n-۳)!\, p_{n-۳}}{n!}\left(= \frac{\#(B)}{\#(S)}\right) = \frac{(n-۳)!}{n!}p_{n-۳}$$

۲ه) احتمال آن را بیابید که فقط در مکان‌های $i_۱, \ldots, i_r$، جور رخ دهد.

p_k: در k مکان جور رخ ندهد.

A: پیشامد اینکه فقط در مکان‌های $i_۱, \ldots, i_r$، جور رخ دهد.

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{۱ \times (n-r)!\, p_{n-r}}{n!} = \frac{(n-r)!}{n!}p_{n-r}.$$

برای مثال فرض کنید $n=۸$ و می خواهیم در جعبه‌های شماره ٤، ۵ و ۸ فقط جور رخ دهد (یعنی $r=۳$). بدین منظور می بایست تعداد حالتی که در سایر مکان‌ها (یعنی جعبه‌های ۱، ۲، ۳، ۶ و ۷) جور رخ ندهد را بدست آوریم. این تعداد برابر است با

$$۵!\,p_۵=۵!\left(۱-۱+\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{٤!}-\frac{۱}{۵!}\right)=۶۰-۲۰+۵-۱=٤٤.$$

تفسیر: در قرار دادن تصادفی ۸ شماره درون جعبه‌های شماره‌گذاری شده، تعداد حالتی که تنها در ۳ جعبه خاص جور رخ می دهد برابر است با ٤٤ حالت.

و) احتمال آنکه دقیقا در r مکان جور رخ دهد.

B_r: دقیقا r جور رخ دهد

$$\begin{aligned}B_n(r)=P(B_r)&=\frac{\#(B_r)}{n!}=\binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!}p_{n-r}\\&=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\frac{(n-r)!}{n!}p_{n-r}=\frac{p_{n-r}}{r!}.\end{aligned}$$

ز) احتمال آنرا بیابید که در مکان jام جور رخ داده باشد، در حالیکه تنها در r مکان جور رخ داده است.

$$P(A_j|B_r)=\frac{P(A_j\cap B_r)}{P(B_r)}=\frac{\frac{p_{n-r}}{n(r-۱)!}}{\frac{p_{n-r}}{r!}}=\frac{r}{n}.$$

زیرا

$$P\left(A_j \cap B_r\right) = \frac{\#\left(A_j \cap B_r\right)}{n!} = \frac{۱ \times \#(B_{r-۱})}{n!} = \frac{(n-۱)!\, B_{n-۱}(r-۱)}{n!}$$
$$= \frac{(n-۱)!\, \frac{p_{n-r}}{(r-۱)!}}{n!} = \frac{p_{n-r}}{n(r-۱)!}.$$

نکته: تعداد حالتی که r جور رخ داده باشد و همچنین یک جور آن در مکان j باشد، برابر است با $(n-۱)!\frac{p_{n-r}}{(r-۱)!}$.

نکته: تعداد حالتی که r جور رخ داده باشد و همچنین k جور آن در مکان‌های $i_۱, \dots, i_k$ $(k < r)$ باشد، برابر است با $(n-k)!\frac{p_{n-r}}{(r-k)!}$.

ح) احتمال آنرا بیابید که در جایگاه ۳ و ۷ جور رخ داده باشد، درحالیکه می دانیم در بین ۸ جعبه ٤ جور رخ داده است.

$B_٤$: دقیقا ٤ جور در بین ۸ جعبه حاضر رخ دهد

$A = A_۳ \cap A_۷$: در مکان‌های ۳ و ۷ جور رخ دهد

$$P(A|B_٤) = \frac{P(A \cap B_٤)}{P(B_٤)} = \frac{\frac{(۸-۲)!\frac{p_٤}{۲!}}{۸!}}{\frac{p_٤}{٤!}} = \frac{٦! \times ٤!}{۸! \times ۲!} = \frac{۱۲}{٥٦}.$$

$$P(A \cap B_٤) = \frac{\#(A \cap B_٤)}{۸!} = \frac{۱ \times \#(B_۲)}{۸!} = \frac{(۸-۲)! \times B_٦(۲)}{۸!}.$$

مثال: یک کارگر مبتدی در بخش بسته‌بندی بکار گرفته شده است. از وی خواسته می شود که ۸ قطعه مختلف داخل انبار را درون قوطی مخصوص خود قرار دهد. با توجه

به عدم آشنایی وی با قطعات و همچنین کارتن بسته‌بندی مخصوص به آنها، عمل بسته‌بندی کردن وی مشابه یک مسئله انتخاب تصادفی است.

الف) احتمال آنرا بیابید که شخص هیچ قطعه‌ای را بدرستی درون کارتن مخصوص خود قرار ندهد.

$B_۸$: هیچیک از اقلام بدرستی درون جعبه مرتبط با خودش بسته‌بندی نشود

$$p_۸ = P(B_۸) = ۱ - \left(۱ - \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} - \frac{۱}{٤!} \dots - \frac{۱}{۸!}\right) = \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{۸!} \cong ۰.۳۵.$$

تفسیر: بطور متوسط از هر ۱۰۰ بسته‌بندی ۸تایی توسط این شخص مبتدی، ۳۵ عدد آنها کاملا نامرتبط بسته‌بندی می شوند.

ب) وی تنها بتواند دو قطعه را بدرستی در بسته‌بندی مناسب خود قرار دهد (D).

$$B_۸(۲) = P(D) = \frac{p_۶}{۲!}.$$

ج) همه قطعات بدرستی توسط وی بسته‌بندی شوند (A).

$$P(A) = \frac{۱}{۸!}.$$

د) وی توانسته ٤ بسته‌بندی درست انجام دهد (B)، احتمال آنرا بیابید که قطعه شماره ۷ در این بسته‌بندی‌ها بدرستی قرار داشته شده باشند (C).

$$P(C|B) = \frac{٤}{۸}.$$

ه) وی توانسته ٤ بسته‌بندی درست انجام دهد (B)، احتمال آنرا بیابید که قطعات شماره ۷ و ۸ در این بسته‌بندی‌ها درست قرار داشته باشند (D).

$$P(D|B)=\frac{P(D\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{p_{٤}}{۲!\,(۸\times۷)}}{B_{۸}(٤)}=\frac{\frac{p_{٤}}{۲!\,(۸\times۷)}}{\frac{p_{٤}}{٤!}}=\frac{۳}{۱٤}.$$

$$P(D\cap B)=\frac{\#(D\cap B)}{۸!}=\frac{۶!\,\frac{p_{٤}}{۲!}}{۸!}=\frac{p_{٤}}{۲!\,(۸\times۷)}.$$

و) وی توانسته ٤ بسته‌بندی درست انجام دهد (B)، احتمال آنرا بیابید که قطعات شماره ۷ و ۸ در این بسته‌بندی‌ها درست قرار نداشته باشند (E).

$$P(E|B)=\frac{P(E\cap B)}{P(B)}=?.$$

اِشغال جعبه‌های تهی

در نظر داریم n گوی متمایز را در r جعبه مختلف قرار دهیم. در این جانهی هیچ محدودیتی در حجم جعبه‌ها نداریم. این عمل به r^n تعداد طریق قابل انجام است، زیرا هر گوی می تواند در r جعبه دلخواه قرار گیرد به بیان دیگر

$$\underbrace{r \times \ldots \times r}_{n\ \text{مرتبه}} = r^n.$$

تعداد حالتی را محاسبه کنید که یک گوی خاص در یک جعبه از قبل مشخص شده قرار می گیرد (A). این عمل به $r^{n-۱}$ طریق قابل انجام است، بنابراین احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{r^{n-۱}}{r^n} = \frac{۱}{r}$.

احتمال آنرا مشخص کنید که یک گوی خاص در یکی از k جعبه از قبل مشخص شده قرار گیرد (B).

$$P(B) = \frac{\binom{k}{۱} \times r^{n-۱}}{r^n} = \frac{k}{r}.$$

اگر پیشامد C را قرار گرفتن تمام گوی‌ها در k جعبه اول (یعنی جعبه شماره ۱ الی k) تعریف کنیم، خواهیم داشت

$$P(C) = \frac{k^n}{r^n} = \left(\frac{k}{r}\right)^n.$$

اگر بخواهیم همه گوی‌ها تنها در k جعبه قرار گیرند، آنگاه این پیشامد (D) با احتمال زیر رخ می دهد

$$P(D) = \binom{r}{k}\left(\frac{k}{r}\right)^{n}.$$

احتمال آنرا مشخص کنید که s گوی مشخص در k جعبه معین قرار گیرند (E).

$$P(E) = \frac{k^{s}\, r^{n-s}}{r^{n}} = \left(\frac{k}{r}\right)^{s}.$$

مدنظر قرار گرفتن تنها s گوی در k جعبه معین باشند (F)، این عمل با چه احتمالی امکانپذیر است.

$$P(F) = \frac{\binom{n}{s} k^{s}(r-k)^{n-s}}{r^{n}} = \binom{n}{s}\left(\frac{k}{r}\right)^{s}\left(۱-\frac{k}{r}\right)^{n-s}.$$

تعریف می کنیم $A_j(i)$ را بعنوان پیشامد قرار گرفتن گوی شماره j در جعبه شماره i، آنگاه داریم

$$P\left(A_j(i)\right) = \frac{۱}{r}.$$

حال برای $j_۱, \dots, j_s$ مختلف داریم $A_{j_۱}(i_۱) \cap \dots \cap A_{j_s}(i_s)$ معادل است با قرار گرفتن گویهای $j_۱, \dots, j_s$ در جعبه‌های $i_۱, \dots, i_s$ و برای آن داریم

$$P\left(A_{j_۱}(i_۱) \cap \dots \cap A_{j_s}(i_s)\right) = \frac{۱ \times r^{n-s}}{r^{n}} = \frac{۱}{r^{s}} = \underbrace{\frac{۱}{r} \times \dots \times \frac{۱}{r}}_{s \text{ مرتبه}}$$

$$= P\left(A_{j_۱}(i_۱)\right) \times \dots \times P\left(A_{j_s}(i_s)\right).$$

بدلیل آنکه رابطه فوق برای هر مقدار $۲ \le s \le n$ برقرار می باشد، می توان گفت پیشامدهای $A_{j_۱}(i_۱)$ الی $A_{j_s}(i_s)$ مستقل از یکدیگرند.

احتمال آنرا بیابید که حداقل یکی از $A_{j_1}(i_1)$ الی $A_{j_s}(i_s)$ رخ دهد.

$$P\left(A_{j_1}(i_1) \cup \ldots \cup A_{j_s}(i_s)\right) = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{s-1} S_s$$
$$= \frac{s}{r} - \binom{s}{2}\frac{1}{r^2} + \cdots + (-1)^{s-1}\frac{1}{r^s}$$

$$S_1 = P\left(A_{j_1}(i_1)\right) + \cdots + P\left(A_{j_s}(i_s)\right) = \binom{s}{1}\frac{1}{r} = \frac{s}{r},$$

$$S_2 = P\left(A_{j_1}(i_1) \cap A_{j_2}(i_2)\right) + \cdots + P\left(A_{j_{s-1}}(i_{s-1}) \cap A_{j_s}(i_s)\right) = \binom{s}{2}\frac{1}{r^2},$$

$$S_k = \binom{s}{k}\frac{1}{r^k}$$

تکلیف: در این مثال، احتمالات داده شده در زیر را بدست آورید

۱- با فرض آنکه تعداد گوی‌ها کمتر یا مساوی تعداد جعبه‌ها باشد ($n \le r$)، احتمال آنرا بیابید که هیچ دو گویی در یک جعبه قرار نگیرند (G).

$$P(G) = \frac{\binom{r}{n} n!}{r^n}.$$

۲- با فرض آنکه تعداد گوی‌ها بیشتر از تعداد جعبه‌ها باشد ($n > r$)، احتمال آنرا بیابید که حداقل یک گوی درون هر جعبه قرار گیرد (I).

راه حل خانم سید امیر حسینی و مائده عباسی (ورودی ۱٤۰۰)

A_i: پیشامد خالی بودن جعبه iام

$$P(I) = 1 - P(A_1 \cup \ldots \cup A_r)$$

$$P(A_۱ \cup \ldots \cup A_r) = S_۱ - S_۲ + \cdots + (-۱)^r S_{r-۱} + (-۱)^{r+۱} S_r$$
$$= \binom{r}{۱}\frac{(r-۱)^n}{r^n} - \binom{r}{۲}\frac{(r-۲)^n}{r^n} + \cdots + (-۱)^r \binom{r}{r-۱}\frac{۱^n}{r^n} + ۰.$$

$$S_i = \binom{r}{i}\frac{(r-i)^n}{r^n}$$

راه حل اشتباه

$$P(I) = \frac{\binom{n}{r} r!\, r^{n-r}}{r^n} = \frac{\binom{n}{r} r!}{r^r}.$$

مثال: کشور به سه منطقه زلزله خیز البرز، زاگرس و فلات مرکزی تقیسم‌بندی شده است. تجربه نشان داده در هر لحظه احتمال وقوع زلزله در این مناطق به ترتیب ۰.٤، ۰.٤۵ و ۰.۱۵ می باشد. همچنین درجه‌بندی زلزله بصورت (زلزله خفیف، متوسط، شدید، ویرانگر) می باشد. اگر احتمال وقوع هریک از این زلزله ها در منطقه البرز (۰.۳، ۰.۵، ۰.۱۳، ۰.۰۷) و در منطقه زاگرس (۰.۳۵، ۰.۵۵، ۰.۰۷، ۰.۰۳) و در منطقه مرکزی کشور (۰.٤، ۰.٤۵، ۰.۱، ۰.۰۵) باشد. به سوالات زیر پاسخ دهید.

A: پیشامد وقوع زلزله خفیف

B: پیشامد وقوع زلزله متوسط

C: پیشامد وقوع زلزله شدید

D: پیشامد وقوع زلزله ویرانگر

$E_۱$: زلزله در البرز $E_۲$: زلزله در زاگرس $E_۳$: زلزله در فلات مرکزی

$$P(E_۱) = ۰.٤۰, \quad P(E_۲) = ۰.٤۵, \quad P(E_۳) = ۰.۱۵.$$

الف) احتمال وقوع زلزله بیش از متوسط در کشور چقدر است؟

$$
\begin{aligned}
P(CUD) = P(C) + P(D) \\
&= [P(C \cap E_1) + P(C \cap E_2) + P(C \cap E_3)] \\
&+ [P(D \cap E_1) + P(D \cap E_2) + P(D \cap E_3)] \\
&= P(E_۱)P(C|E_۱) + P(E_۲)P(C|E_۲) + P(E_۳)P(C|E_۳) \\
&+ P(E_۱)P(D|E_۱) + P(E_۲)P(D|E_۲) + P(E_۳)P(D|E_۳) \\
&= ۰.٤ \times ۰.۱۳ + ۰.٤۵ \times ۰.۰۷ + ۰.۱۵ \times ۰.۱ + ۰.٤ \times ۰.۰۷ \\
&+ ۰.٤۵ \times ۰.۰۳ + ۰.۱۵ \times ۰.۰۵ = ۰.۱٤۷۵.
\end{aligned}
$$

تفسیر: از هر ۱۰۰۰۰ زلزله واقع شده در کشور بطور متوسط ۱٤۷۵ عدد از آنها بیش از متوسط بوده است.

ب) زلزله خفیفی در کشور گزارش شده، احتمال وقوع آن در کدام منطقه کشور بیشتر است؟ (با ذکر دلیل)

$$P(E_۱|A) = \frac{P(A \cap E_۱)}{P(A)} = \frac{P(E_۱)P(A|E_۱)}{۰.۳۳۷۵} = \frac{۰.٤۰ \times ۰.۳۰}{۰.۳۳۷۵} = ۰.۳\bar{۵}.$$

$$P(E_۲|A) = \frac{P(A \cap E_۲)}{P(A)} = \frac{P(E_۲)P(A|E_۲)}{۰.۳۳۷۵} = \frac{۰.٤۵ \times ۰.۳۵}{۰.۳۳۷۵} = ۰.٤\bar{۶}.$$

$$P(E_۳|A) = \frac{P(A \cap E_۳)}{P(A)} = \frac{P(E_۳)P(A|E_۳)}{۰.۳۳۷۵} = \frac{۰.۱۵ \times ۰.٤۰}{۰.۳۳۷۵} = ۰.۱\bar{۷}.$$

این بدان معنا است که هرگاه زلزله خفیفی رخ می دهد، ذهن غالب کارشناسان این حوزه ابتدائا به سمت زاگرس و سپس البرز می رود.

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(A \cap E_۱) + P(A \cap E_۲) + P(A \cap E_۳) \\
&= P(E_۱)P(A|E_۱) + P(E_۲)P(A|E_۲) + P(E_۳)P(A|E_۳) \\
&= ۰.٤۰ \times ۰.۳۰ + ۰.٤۵ \times ۰.۳۵ + ۰.۱۵ \times ۰.٤۰ = ۰.۳۳۷۵.
\end{aligned}
$$

ج) پیشامد H را وقوع دو زلزله توام متوسط در دو منطقه مجزای کشور در نظر می گیریم، احتمال وقوع آنرا بدست آورید.

$$
\begin{aligned}
P(H) &= ۲\left(P\big((B\cap E_۱)\cap(B\cap E_۲)\big)+P\big((B\cap E_۱)\cap(B\cap E_۳)\big)\right.\\
&\left.+P\big((B\cap E_۲)\cap(B\cap E_۳)\big)\right)\\
&= ۲\big(P(B\cap E_۱)P(B\cap E_۲)+P(B\cap E_۱)P(B\cap E_۳)\\
&+P(B\cap E_۲)P(B\cap E_۳)\big)\\
&= ۲\big(P(E_۱)P(B|E_۱)P(E_۲)P(B|E_۲)\\
&+P(E_۱)P(B|E_۱)P(E_۳)P(B|E_۳)\\
&+P(E_۲)P(B|E_۲)P(E_۳)P(B|E_۳)\big)\\
&= ۲(۰.٤\times ۰.٥\times ۰.٤٥\times ۰.٥٥+۰.٤\times ۰.٥\times ۰.۱٥\times ۰.٤٥\\
&+۰.٤٥\times ۰.٥٥\times ۰.۱٥\times ۰.٤٥)=۰.۱٥۹٤
\end{aligned}
$$

تفسیر: از هر ۱۰۰۰۰ زلزله توام ثبت شده در دو منطقه مجزا، بطور متوسط ۱٥۹٤ عدد از آنها زلزله از نوع متوسط می باشند.

د) احتمال آنرا بیابید که زلزله واقع شده در منطقه البرز بزرگتر از منطقه زاگرس باشد.

$$
P\Big((E_۱\cap D)\cap\big(E_۲\cap(A\cup B\cup C)\big)\Big)+P\Big((E_۱\cap C)\cap\big(E_۲\cap(A\cup B)\big)\Big)+P\big((E_۱\cap B)\cap(E_۲\cap A)\big)=\Big[\big(P(E_۱)\times P(D|E_۱)\big)\times\big(P(E_۲)\times P(A\cup B\cup C|E_۲)\big)\Big]+\Big[\big(P(E_۱)\times P(C|E_۱)\big)\times\big(P(E_۲)\times P(A\cup B|E_۲)\big)\Big]+\Big[\big(P(E_۱)\times P(B|E_۱)\big)\times\big(P(E_۲)\times P(A|E_۲)\big)\Big]=۰.۰٦۱۳.
$$

تفسیر: بطور متوسط از هر ۱۰۰۰۰ زلزله رخ داده در منطقه البرز، ۶۱۳ عدد آنها شدت بیشتری از زلزله‌های واقع شده در زاگرس دارند.

ه) احتمال آنرا بیابید که زلزله متوسط مشاهده شده، در منطقه زاگرس رخ دهد.

$$P(E_۲|B) = \frac{P(E_۲ \cap B)}{P(B)} = \frac{P(E_۲ \cap B)}{P(E_۱ \cap B) + P(E_۲ \cap B) + P(E_۳ \cap B)}$$
$$= \frac{P(E_2)P(B|E_2)}{P(E_1)P(B|E_1) + P(E_2)P(B|E_2) + P(E_3)P(B|E_3)}$$
$$= \frac{۰.٤۵ \times ۰.۵۵}{۰.٤ \times ۰.۵ + ۰.٤۵ \times ۰.۵۵ + ۰.۱۵ \times ۰.٤۵} = ۰.٤۸۰۵.$$

تفسیر: بطور متوسط از هر ۱۰۰۰۰ زلزله متوسط که در ایران رخ می دهد، ٤۸۰۵ عدد از آنها مربوط به منطقه زاگرس می باشد.

مثال: ٤ درصد افراد یک شهر مجرم هستند، قاضی در تشخیص مجرم بودن سابقه طولانی و توانایی زیادی دارد بطوریکه در ۹۸ درصد مواقع درست تشخیص مجرم را می دهد. وی در ۸ درصد مواقع نیز اشتباه می نماید.

C: پیشامد تشخیص مجرم بودن

B: پیشامد مجرم بودن

$$P(B) = ۰.۰٤, \quad P(C|B) = ۰.۹۸, \quad P(C|B') = ۰.۰۸.$$

الف) احتمال آنرا بیابید که قاضی یک مجرم را نتوانسته بدرستی تشخیص جرم برای وی بدهد؟

$$P(C'|B) = ۱ - P(C|B) = ۱ - ۰.۹۸ = ۰.۰۲.$$

ب) احتمال تشخیص مجرم بودن توسط قاضی را مشخص کنید.

$$P(C) = P(C \cap B) + P(C \cap B') = P(B)P(C|B) + P(B')P(C|B') =$$
$$۰.۰٤ \times ۰.۹۸ + ۰.۹۶ \times ۰.۰۸ = ۰.۱۱۶.$$

تفسیر: قاضی بطور متوسط از هر ۱۰۰۰ نفر ۱۱۶ نفر را مجرم شناسائی می نماید.

ج) چند درصد مجرم تشخیص داده شده‌ها، مجرم نیستند؟ به بیان دیگر مقدار به اشتباه تشخیص جرم دادن از طرف قاضی را بدست آورید.

$$P(B'|C) = \frac{P(B' \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B')P(C|B')}{P(C)} = \frac{۰.۹۶ * ۰.۰۸}{۰.۱۱۶} = ۰.۶۶۲.$$

تفسیر: از هر ۱۰۰۰ نفری که توسط قاضی بعنوان مجرم شناخته می شوند، بطور متوسط ۶۶۲ نفر آنها مجرم نیستند.

مثال: فرض کنید نظرسنجی درباره رضایت از دو فرد A و B باشد. درون جعبه‌ای ۱۰۰ کارت قرار دارد که بر روی ۷۰ عدد از آنها نوشته شده "من از شخص A رضایت دارم" و روی مابقی کارت‌ها نیز نوشته شده است "من از شخص B رضایت دارم". حال اگر هر شخص شرکت کنند در نظرسنجی یک کارت را به تصادف از درون جعبه خارج و سپس تنها از وی بخواهیم با گفتن بله یا خیر نظر خود را مطرح نماید. حال اگر ۱۲۰ نفر شرکت کننده در نظرسنجی ٨٤ خیر گفته باشند، احتمال رضایت از شخص A را مشخص نمایید.

C: بله گفتن

D: رضایت از شخص A

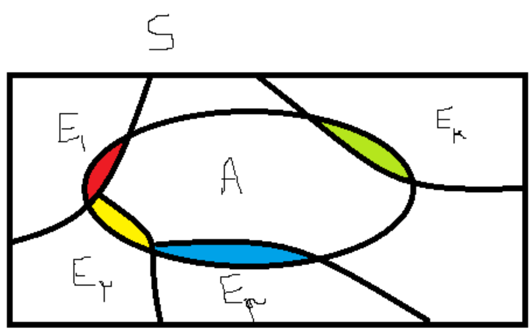
$$P(D') = ۱ - P(D).$$

$$P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap D') = P(D)P(C|D) + P(D')P(C|D')$$
$$\rightarrow \frac{۳۶}{۱۲۰} = P(D) * \frac{۷۰}{۱۰۰} + \left(۱ - P(D)\right) * \frac{۳۰}{۱۰۰} \rightarrow P(D) = ۰.$$

اصل جمع احتمال (قانون احتمال کل):

اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی (S) توسط پیشامدهای $E_1, \dots, E_k$ افراز شده باشد (یعنی $\forall i \neq j,\ E_i \cap E_j = \phi$ و $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = S$). حال اگر بخواهیم احتمال مربوط به پیشامدی همانند A را بدست آوریم می بایست از رابطه زیر استفاده نماییم.

$$P(A) = P(A \cap S) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} (A \cap E_i)\right).$$



حال اگر تعریف کنیم $B_i = A \cap E_i$ برای هر $i \neq j$ خواهیم داشت

$$B_i \cap B_j = (A \cap E_i) \cap (A \cap E_j) = A \cap (E_i \cap E_j) = A \cap \phi = \phi.$$

یعنی B_iها مجزای از یکدیگر هستند یا به بیان دیگر پیشامد A را افراز کرده‌اند. بنابراین خواهیم داشت

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) P(A|E_i).$$

قانون جمع احتمال، بصورت زیر بیان می شود

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) P(A|E_i).$$

قانون بیز:

در ادامه بحث فوق، اگر بدانیم پیشامد A در فضای نمونه‌ای افراز شده توسط پیشامدهای $E_1, \dots, E_k$ رخ داده است، احتمال اینکه رخداد این پیشامد مربوط به افراز iام باشد (E_i)، برابر است با

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)} = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(E_j)P(A|E_j)}.$$

مثال: کارخانه‌ای مواد اولیه خود را از ۳ شرکت A، B و C تهیه می نماید. بطوریکه ۳۵ درصد از مواد اولیه از شرکت A، ٤٠ درصد شرکت B و مابقی را از شرکت C تهیه می نمایند. هر محصول اولیه خریداری شده توسط کارخانه در یکی از ۳ وضعیت (سالم، معیوب قابل چشم‌پوشی، معیوب) قرار دارند. اگر بنا بر تجربه انباردار (تحویلدار) بدانیم درصد وقوع این ۳ وضعیت در محصولات شرکت A به ترتیب (۹۲، ۵، ۳) درصد و در شرکت B (۸۵، ١٤، ۱) درصد و شرکت C (۹۲، ۳، ۵) درصد باشند. موارد خواسته شده ادامه را محاسبه نمایید.

E_1: پیشامد آنکه مواد اولیه از شرکت A،

E_2: پیشامد آنکه مواد اولیه از شرکت B،

E_3: پیشامد آنکه مواد اولیه از شرکت C.

الف) با چه احتمالی اگر قطعه‌ای از انبار کارخانه برداریم، معیوب خواهد بود.

D: پیشامد معیوب بودن مواد اولیه در انبار کارخانه

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(E_i)P(D|E_i) = 0.35 \times 0.08 + 0.40 \times 0.15 + 0.25 \times 0.08 = 0.108.$$

تفسیر: از هر ۱۰۰۰ قطعه موجود در انبار کارخانه، بطور متوسط ۱۰۸ قطعه آن معیوب است. (به بیان دیگر هر قطعه در انبار کارخانه با احتمال ۰,۱۰۸ معیوب است.)

ب) احتمال آنرا بیابید که دو قطعه انتخاب شده از انبار کارخانه، سالم باشند.

F: هر دو قطعه انتخابی سالم باشند

F_1: قطعه اول سالم باشد

F_2: قطعه دوم سالم باشد

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F_1 \cap F_2) \\ &= P(F_1 \cap E_1)P(F_2 \cap E_1) + P(F_1 \cap E_1)P(F_2 \cap E_2) \\ &+ P(F_1 \cap E_1)P(F_2 \cap E_3) + P(F_1 \cap E_2)P(F_2 \cap E_2) \\ &+ P(F_1 \cap E_2)P(F_2 \cap E_1) + P(F_1 \cap E_2)P(F_2 \cap E_3) \\ &+ P(F_1 \cap E_3)P(F_2 \cap E_1) + P(F_1 \cap E_3)P(F_2 \cap E_2) \\ &+ P(F_1 \cap E_3)P(F_2 \cap E_3) \\ &= P(F_1 \cap E_1)\big(P(F_2 \cap E_1) + P(F_2 \cap E_2) + P(F_2 \cap E_3)\big) \\ &+ P(F_1 \cap E_2)\big(P(F_2 \cap E_1) + P(F_2 \cap E_2) + P(F_2 \cap E_3)\big) \\ &+ P(F_1 \cap E_3)\big(P(F_2 \cap E_1) + P(F_2 \cap E_2) + P(F_2 \cap E_3)\big) \\ &= \big(P(F_1 \cap E_1) + P(F_1 \cap E_2) + P(F_1 \cap E_3)\big)\big(P(F_2 \cap E_1) \\ &+ P(F_2 \cap E_2) + P(F_2 \cap E_3)\big) = P(F_1)P(F_2). \end{aligned}$$

نتیجه می گیریم برداشت قطعه اول و نتیجه آن مستقل از قطعه دوم می باشد.

$$P(F) = P(F_1)P(F_2) = (1 - 0.108)^2 = 0.795.$$

تفسیر: از هر ۱۰۰۰ جفت کالای انبار کارخانه، بطور متوسط ۷۹۵ جفت آنها سالم هستند.

ج) احتمال آنرا بیابید که قطعه سالم انتخاب شده از شرکت B باشد.

G: قطعه انتخابی از انبار کارخانه سالم باشد.

$$P(E_2|G) = P(E_2|D') = \frac{P(E_2 \cap D')}{P(D')} = \frac{P(E_2)P(D'|E_2)}{1 - P(D)} = \frac{0.40 \times 0.85}{1 - 0.108} = 0.3811.$$

تفسیر: از هر ۱۰۰۰۰ قطعه سالمی که از انبار خارج می شود، بطور متوسط ۳۸۱۱ عدد از آنها تولید شرکت B می باشد.

د) احتمال آنکه قطعه اول یا دوم انتخابی معیوب (حداقل یکی از دو قطعه انتخابی معیوب) باشد.

$$P(F_1' \cup F_2') = P((F_1 \cap F_2)') = 1 - P(F_1 \cap F_2) = 1 - 0.795.$$

$$\begin{aligned} P(F_1' \cup F_2') &= P(F_1') + P(F_2') - P(F_1' \cap F_2') \\ &= P(F_1') + P(F_2') - P(F_1')P(F_2') = 2 \times 0.108 - 0.108^2 \\ &= 0.205. \end{aligned}$$

ه) از دو قطعه انتخابی حداقل یکی معیوب قابل چشم پوشی (قطعه اول یا قطعه دوم انتخابی معیوب قابل چشم پوشی) باشد.

Z_1: پیشامد معیوب قابل چشم‌پوشی قطعه اول

Z_2: پیشامد معیوب قابل چشم‌پوشی قطعه دوم

$$P(Z_1 \cup Z_2) = P(Z_1) + P(Z_2) - P(Z_1 \cap Z_2) = 2P(Z_1) - P(Z_1)^2$$
$$= P(Z_1)\big(2 - P(Z_1)\big) = 0.081(2 - 0.081) = 0.155.$$

$$P(Z_1) = \sum_{i=1}^{3} P(E_i)P(Z_1|E_i)$$
$$= 0.35 \times 0.05 + 0.40 \times 0.14 + 0.25 \times 0.03 = 0.081.$$

و) احتمال آنرا بیابید که قطعه معیوب غیرقابل چشم‌پوشی مشاهده شده، از شرکت A نباشد.

N: قطعه معیوب غیرقابل چشم‌پوشی باشد

$$P(E_1'|N) = 1 - P(E_1|N) = 1 - \frac{P(E_1 \cap N)}{P(N)} = 1 - \frac{P(E_1)P(N|E_1)}{P(D) - P(Z_1)}$$
$$= 1 - \frac{0.35 \times 0.03}{0.108 - 0.081} = 1 - \frac{0.0105}{0.027} = 1 - 0.389 = 0.611.$$

$$P(N) = \sum_{i=1}^{3} P(E_i)P(N|E_i) = 0.35 \times 0.03 + 0.40 \times 0.01 + 0.25 \times 0.05$$
$$= 0.027.$$

ز) از ۵ قطعه انتخابی در انبار کارخانه دقیقا ۲تای آن معیوب باشد.

M: ۲معیوب در ۵ قطعه انتخابی مشاهده نماییم

$$P(M) = \binom{5}{2} 0.108^2 (1 - 0.108)^3.$$

ح) در ۴۰ قطعه مصرفی امروز کارخانه، حداقل ۳سالم مشاهده شود.

R: در ۴۰ قطعه مصرفی حداقل ۳ عدد از آنها سالم مشاهده شود

$$P(R)=1-P(R')$$
$$=1-\left(0.108^{40}+\binom{40}{1}(1-0.108)0.108^{39}+\binom{40}{2}(1-0.108)^{2}0.108^{38}\right).$$

مثال: از بین اعداد ۱ الی ۴۰ به تصادف ۷ عدد انتخاب می نماییم. احتمال‌های خواسته شده در ادامه را بدست آورید.

الف) میانه اعداد برابر ۲۰ شود.

M_d: میانه این ۷ عدد انتخاب شده برابر ۲۰ باشد

$$P(M_d)=\frac{1\times\binom{19}{3}\binom{20}{3}}{\binom{40}{7}}.$$

الف ۲) میانه اعداد یکی از ارقام ۱۷ یا ۱۸ باشد (T).

T_i: میانه اعداد عدد شماره i باشد.

$$P(T)=P(T_{17}\cup T_{18})=P(T_{17})+P(T_{18})-P(T_{17}\cap T_{18})$$
$$=\frac{1\times\binom{16}{3}\binom{23}{3}}{\binom{40}{7}}+\frac{1\times\binom{17}{3}\binom{22}{3}}{\binom{40}{7}}-0$$

الف ۳) مقادیری که اندیس T_i می تواند بپذیرد را مشخص نمایید.

مقادیر ممکن اندیس از ٤ الی ۳۷ طبیعی می تواند باشند.

ب) چارک اول، عدد ۸ شود (Q_1).

$$P(Q_1) = \frac{\binom{7}{1} \times 1 \times \binom{32}{5}}{\binom{40}{7}}.$$

ج) اگر از بین این اعداد بدانیم سومین عدد مرتب شده برابر ۱۱ است، احتمال آنرا بیابید که فقط دو عدد بزرگ مشاهده شده، بیشتر از ۳۰ باشند.

A: عدد مرتب شده سوم برابر ۱۱ باشد

B: دو عدد بزرگتر، مقداری بیش از ۳۰ بپذیرند.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{\binom{10}{2}\binom{19}{2}\binom{10}{2}}{\binom{40}{7}}}{\frac{\binom{10}{2}\binom{29}{4}}{\binom{40}{7}}} = \frac{\binom{19}{2}\binom{10}{2}}{\binom{29}{4}}.$$

د) از بین این اعداد (یعنی ۱ تا ٤۰) آنقدر عدد انتخاب می نماییم تا برای اولین مرتبه عدد ۱۰ را مشاهده نماییم. احتمال آنرا بیابید که این عمل نیازمند ۸ برداشت باشد. (یا به بیان دیگر، عدد ۱۰ در انتخاب ۸ام مشاهده شود)

S: عدد ۱۰ در انتخاب ۸ام مشاهده شود

$$P(S)=\frac{39}{40}\times\frac{38}{39}\times\frac{37}{38}\times\ldots\times\frac{33}{34}\times\frac{1}{33}=\frac{1}{40}.$$

ه) اگر جمع دو عدد اول انتخابی برابر ۱۵ شده باشد، احتمال آنرا بیابید که تفاضل آنها عددی مثبت باشد.

C: جمع دو عدد اول انتخابی برابر ۱۵

D: تفاضل آنها عددی مثبت

$$P(D|C)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{\frac{7}{\binom{40}{2}}}{\frac{14}{\binom{40}{2}}}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}.$$

تکلیف: با فرض آنکه روش برداشتن اعداد با جایگذاری باشد، احتمال موارد قبل را بدست آورید.

مثال: برای تصدی ۱صندلی بخش حسابداری ٤ نفر متقاضی استخدام می باشند. مدیریت از هر ٤نفر خواسته بمدت یک هفته در آن بخش مشغول فعالیت شوند تا از بین آنها یکی را انتخاب نماید. بدین منظور ٤٠ سند حسابداری آماده کرده که ١٠عدد از آنها ایراد دارند و نمی توانند یک سند واقعی حسابداری محسوب شوند. هر شخص می بایست به تصادف ١٠ سند از بین این اسناد انتخاب و آنها را مطالعه و در انتها صحت و سقم آنها را گزارش نماید. احتمالات ادامه را بدست آورید. (هر شخص به تصادف از بین ٤٠ سند موجود اسناد را به تصادف انتخاب می نماید)

الف) احتمال آنکه نفر اول حداقل ۳ سند ایراددار بدستش برسد، را محاسبه نمایید.

A_{ij}: تعداد سند ایراددار برداشته شده توسط نفر iام، برابر j باشد.

$$\begin{aligned} P(A_{13} \cup A_{14} \cup \dots \cup A_{110}) &= 1 - P(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{12}) \\ &= 1 - \left(P(A_{10}) + P(A_{11}) + P(A_{12})\right) \\ &= 1 - \left(\frac{\binom{30}{10}}{\binom{40}{10}} + \frac{\binom{30}{9}\binom{10}{1}}{\binom{40}{10}} + \frac{\binom{30}{8}\binom{10}{2}}{\binom{40}{10}}\right). \end{aligned}$$

ب) مجموع تعداد اسناد ایراددار دو نفر اول ٤عدد باشد.

B: مجموع اسناد دو نفر برابر ٤ شود

$$\begin{aligned} P(B) = {} & P(A_{10} \cap A_{24}) + P(A_{11} \cap A_{23}) + P(A_{12} \cap A_{22}) \\ & + P(A_{13} \cap A_{21}) + P(A_{14} \cap A_{20}) \\ & = \frac{\binom{30}{10}}{\binom{40}{10}} \frac{\binom{10}{4}\binom{30}{6}}{\binom{40}{10}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{30}{9}}{\binom{40}{10}} \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{7}}{\binom{40}{10}} \\ & + \frac{\binom{10}{2}\binom{30}{8}}{\binom{40}{10}} \frac{\binom{10}{2}\binom{30}{8}}{\binom{40}{10}} + \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{7}}{\binom{40}{10}} \frac{\binom{10}{1}\binom{30}{9}}{\binom{40}{10}} \\ & + \frac{\binom{10}{4}\binom{30}{6}}{\binom{40}{10}} \frac{\binom{10}{0}\binom{30}{10}}{\binom{40}{10}}. \end{aligned}$$

ج) دو نفر اول دقیقا ۳ پرونده مشکل‌دار مشترک بردارند (C).

$$
\begin{aligned}
P(C) = {} & P(C \cap A_{13} \cap A_{23}) + P(C \cap A_{13} \cap A_{24}) + P(C \cap A_{13} \cap A_{25}) \\
& + \cdots + P(C \cap A_{13} \cap A_{210}) + P(C \cap A_{14} \cap A_{23}) \\
& + P(C \cap A_{14} \cap A_{24}) + \cdots + P(C \cap A_{14} \cap A_{29}) \\
& + P(C \cap A_{15} \cap A_{23}) + \cdots + P(C \cap A_{15} \cap A_{28}) + \cdots \\
& + P(C \cap A_{110} \cap A_{23}) \\
& = \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{7}\binom{30}{7}}{\binom{40}{10}^2} + \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{7}\binom{30}{6}\binom{7}{1}}{\binom{40}{10}^2} \\
& + \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{7}\binom{30}{5}\binom{7}{2}}{\binom{40}{10}^2} + \cdots + \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{7}\binom{30}{0}\binom{7}{7}}{\binom{40}{10}^2} \\
& + \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{6}\binom{7}{1}\binom{30}{7}\binom{6}{0}}{\binom{40}{10}^2} + \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{6}\binom{7}{1}\binom{30}{6}\binom{6}{1}}{\binom{40}{10}^2} + \cdots \\
& + \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{6}\binom{7}{1}\binom{30}{1}\binom{6}{6}}{\binom{40}{10}^2} + \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{5}\binom{7}{2}\binom{30}{7}\binom{5}{0}}{\binom{40}{10}^2} + \cdots \\
& + \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{5}\binom{7}{2}\binom{30}{2}\binom{5}{5}}{\binom{40}{10}^2} + \cdots + \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{0}\binom{7}{7}\binom{30}{7}}{\binom{40}{10}^2}
\end{aligned}
$$

د) اگر تمامی پرونده‌های انتخابی نفر دوم غیر از نفر اول باشد، احتمال آنرا بیابید که نفر دوم ۳ پرونده ایراددار انتخاب نماید.

D: نفر اول و دوم هیچ پرونده مشترکی نداشته باشند.

$$P(A_{23}|D)=\frac{P(A_{23}\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{\binom{30}{7}\binom{10}{3}\binom{30}{10}}{\binom{40}{10}^2}}{\frac{\binom{40}{10}\binom{30}{10}}{\binom{40}{10}^2}}=\frac{\binom{30}{7}\binom{10}{3}}{\binom{40}{10}}.$$

ه) احتمال آنرا بیابید که تعداد پرونده ایراد دار نفر سوم و چهارم برابر باشند.

E: دو نفر آخر به یک تعداد پرونده ایراددار داشته باشند

$$P(E)=P(A_{30}\cap A_{40})+P(A_{31}\cap A_{41})+\cdots+P(A_{310}\cap A_{410})$$
$$=\frac{\binom{30}{10}^2}{\binom{40}{10}^2}+\frac{\binom{30}{9}^2\binom{10}{1}^2}{\binom{40}{10}^2}+\cdots+\frac{\binom{10}{10}^2}{\binom{40}{10}^2}.$$

و) مجموع پرونده‌های ایراددار ٤نفر برابر ۵ باشد (F).

$$
\begin{aligned}
P(F) = {} & P(A_{15} \cap A_{20} \cap A_{30} \cap A_{40}) + P(A_{10} \cap A_{25} \cap A_{30} \cap A_{40}) \\
& + P(A_{10} \cap A_{20} \cap A_{35} \cap A_{40}) + P(A_{10} \cap A_{20} \cap A_{30} \cap A_{45}) \\
& + P(A_{14} \cap A_{21} \cap A_{30} \cap A_{40}) + \cdots \\
& + P(A_{10} \cap A_{20} \cap A_{31} \cap A_{44}) + P(A_{13} \cap A_{22} \cap A_{30} \cap A_{40}) \\
& + \cdots + P(A_{13} \cap A_{20} \cap A_{30} \cap A_{42}) \\
& + P(A_{13} \cap A_{21} \cap A_{31} \cap A_{40}) + \cdots \\
& + P(A_{13} \cap A_{20} \cap A_{31} \cap A_{41}) + \cdots \\
& = \binom{4}{1} \frac{\binom{10}{5}\binom{30}{5}\binom{30}{10}^3}{\binom{40}{10}^4} \\
& + \binom{4}{1}\binom{3}{1} \frac{\binom{10}{4}\binom{10}{1}\binom{30}{6}\binom{30}{9}\binom{30}{10}^2}{\binom{40}{10}^4} \\
& + \binom{4}{1}\binom{3}{2} \frac{\binom{10}{3}\binom{10}{1}^2\binom{30}{7}\binom{30}{9}^2\binom{30}{10}}{\binom{40}{10}^4} \\
& + \frac{4!}{3!\,1!} \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{1}^3\binom{30}{8}\binom{30}{9}^3}{\binom{40}{10}^4} \\
& + \frac{4!}{1!\,1!\,2!} \frac{\binom{10}{3}\binom{10}{2}\binom{30}{7}\binom{30}{8}\binom{30}{10}^2}{\binom{40}{10}^4} \\
& + \frac{4!}{2!\,1!\,1!} \frac{\binom{10}{2}^2\binom{10}{1}\binom{30}{8}^2\binom{30}{9}\binom{30}{10}}{\binom{40}{10}^4}
\end{aligned}
$$

تکلیف: برای آخرین گزینه مطرح شده، فرمولهای عددی را بنویسید و تاجای ممکن خلاصه نمایید.

ز) افراد حاضر برای تصدی جایگاه حسابداری به ترتیب احتمال درست تشخیص سند سالم حسابداری آنها ۰,۹، ۰,۷، ۰,۶، ۰,۸۵ می باشد و همچنین در ۱۰، ۵، ۱۵، ۱۲ درصد مواقع به اشتباه یک سند حسابداری ایراد دار را سند صحیح تشخیص می دهند (به بیان دیگر یک سند حسابداری را به اشتباه تشخیص صحت می دهند). حال اگر هر کدام تنها یک سند حسابداری انتخاب نمایند، احتمال آنرا بیابید که همگی سند برداشت شده را یک سند بدون ایراد تشخیص دهند؟

A: سند انتخابی بدون ایراد باشد $\qquad P(A) = \frac{30}{40} = 0.75$

F_i: تشخیص سند بدون ایراد توسط متقاضی شماره i

$$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) = P(F_1) \times \ldots \times P(F_4) = 0.1227$$

$$P(F_i) = P(F_i \cap A) + P(F_i \cap A') = P(A)P(F_i|A) + P(A')P(F_i|A')$$
$$= 0.75 \times P(F_i|A) + 0.25 \times P(F_i|A') = \cdots$$

$$P(F_1) = 0.75 \times 0.9 + 0.25 \times 0.1 = 0.70,$$

$$P(F_2) = 0.5375, \quad P(F_3) = 0.4875, \quad P(F_4) = 0.6675.$$

تفسیر: از هر ۱۰۰۰۰ مرتبه‌ای که این ٤ نفر یک سند بردارند، بطور متوسط در ۱۲۲۷ مورد آن هر ٤ نفر اظهار می کنند که پرونده‌ها ایراد ندارند.

ح) احتمال آنکه اولین متقاضی در همان برداشت اول، بعنوان نیروی حسابداری انتخاب شود.

S_i: نفر i در اولین برداشت بعنوان حسابدار برگزیده شود

Q_i: درست تشخیص ندادن پرونده توسط شخص iام

$$P(Q_1)=P(Q_1\cap A)+P(Q_1\cap A')=P(A)P(Q_1|A)+P(A')P(Q_1|A')$$
$$=0.75\times 0.1+0.25\times 0.1=0.1$$

$$P(Q_2)=P(Q_2\cap A)+P(Q_2\cap A')=P(A)P(Q_2|A)+P(A')P(Q_2|A')$$
$$=0.75\times 0.3+0.25\times 0.05=0.2375$$

$$P(Q_3)=P(Q_3\cap A)+P(Q_3\cap A')=P(A)P(Q_3|A)+P(A')P(Q_3|A')$$
$$=0.75\times 0.4+0.25\times 0.15=0.3375$$

$$P(Q_4)=P(Q_4\cap A)+P(Q_4\cap A')=P(A)P(Q_4|A)+P(A')P(Q_4|A')$$
$$=0.75\times 0.15+0.25\times 0.12=0.1425$$

$$P(S_1)=P(Q_1'\cap Q_2\cap Q_3\cap Q_4)=P(Q_1')P(Q_2)P(Q_3)P(Q_4)$$
$$=0.9\times 0.2375\times 0.3375\times 0.1425=0.01028$$

ت) احتمال آنرا بیابید که در اولین برداشت متقاضیان، شخص کارگزین شرکت بتواند نیروی حسابدار خود از بین این ٤نفر انتخاب نماید.

S: در اولین برداشت متقاضیان، نیروی حسابداری انتخاب شود

$$\begin{aligned}P(S)=P(S_1)+P(S_2)+P(S_3)+P(S_4)&\\ =P(Q_1'\cap Q_2\cap Q_3\cap Q_4)+P(Q_1\cap Q_2'\cap Q_3\cap Q_4)&\\ +P(Q_1\cap Q_2\cap Q_3'\cap Q_4)+P(Q_1\cap Q_2\cap Q_3\cap Q_4')&\\ =0.01028+0.003667+0.002242+0.00687=0.02306&\end{aligned}$$

تفسیر: در هر ۱۰۰۰ مرتبه‌ای که فرد کارگزین تصمیم داشته باشد با یک برداشت توسط این افراد متقاضی موفق به انتخاب شود، این عمل بطور متوسط ۲۳ مرتبه رخ خواهد داد.