

تکلیف سری اول

درس نظریه محاسبه
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. بهار ۱۴۰۲

۱. نشان دهید مسائل داخل کلاس NP یک الگوریتم با زمان $2^{\text{poly}(n)}$ دارند. به عبارت دیگر $NP \subseteq TIME(2^{\text{poly}(n)})$.
۲. فرض کنید Interval Scheduling نسخه بله-خیر مسئله زمانبندی بازه‌ها باشد. در این مسئله، با داشتن مجموعه‌ای از n بازه، می‌پرسیم آیا k بازه وجود دارد که همپوشانی نداشته باشند؟
به سوالات زیر جواب بله، خیر، و یا معلوم نیست چون باعث حل مسئله $NP=P$ می‌شود بدهید.
(آ) $\text{Interval Scheduling} \leq_p \text{Vertex Cover}$ ؟
(ب) $\text{Vertex Cover} \leq_p \text{Interval Scheduling}$ ؟
۳. یک کمپ تابستانی برنامه‌ای شامل n ورزش و سرگرمی ارائه می‌کند. این کمپ می‌خواهد مربیانی را برای این برنامه استخدام کند. تعداد m متقاضی برای این منظور ثبت نام کرده‌اند. هر متقاضی فرمی پر کرده است که در آن ورزشهای تخصصی خود را تیک زده است. کمپ می‌خواهد حداقل تعداد مربی را استخدام کند بطوریکه برای هر ورزش حداقل یک مربی داشته باشد. نشان دهید این پرسش که آیا k مربی در میان متقاضیان وجود دارد که همه ورزشها را پوشش دهند NP -Complete است.
۴. در مسئله Almost-SAT می‌خواهیم بدانیم آیا یک مقداردهی به متغیرهای یک فرمول منطقی به فرم CNF با m عبارت (کلاز) وجود دارد که دقیقاً $m - 1$ عبارت را ارضا کند. نشان دهید مسئله Almost-SAT یک مسئله NP -Complete است.
۵. در مسئله HALF-SAT یک فرمول منطقی ϕ با فرمت CNF با n متغیر داده شده است. می‌خواهیم بدانیم آیا تعداد مقداردهی‌هایی که فرمول ϕ را ارضا می‌کنند از 2^{n-1} بیشتر است یا نه. به عبارت دیگر آیا بیشتر از نصف مقدارهی ها فرمول داده شده را ارضا می‌کنند یا نه.
نشان دهید مسئله HALF-SAT یک مسئله NP -Hard است.
۶. گراف غیر جهتدار $G = (V, E)$ داده شده است. یک مجموعه مستقل قوی strongly independent set در G زیرمجموعه‌ای مانند S از رئوس گراف است بطوریکه هیچ دو عضو S مسیری بطول 2 و یا کمتر از آن بینشان نباشد. مسئله Strongly Independent Set می‌پرسد آیا یک مجموعه مستقل قوی در گراف G با حداقل k راس وجود دارد یا نه. نشان دهید این مسئله NP -Complete است.