روش انتگرال‌گیری نیوتن ـ کوتز

در قاعده انتگرال گیری ذوزنقه ای داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}f_i + \frac{h}{2}f_{i+1} = \sum_{k=i}^{i+1} w_k f_k + E \quad , \quad w_i = w_{i+1} = \frac{h}{2}$$

که خطای آن نیز $-\frac{h^3}{12}f''(\eta)$ است.

و همچنین از فرمول قاعده سیمسون نتیجه می‌شود که:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}f_i + \frac{4h}{3}f_{i+1} + \frac{h}{3}f_{i+2} = \sum_{k=i}^{i+2} w_k f_k + E$$

$$w_i = w_{i+2} = \frac{h}{3} \quad , \quad w_{i+1} = \frac{4h}{3}$$

و خطای آن $-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)$ است.

بنابراین در حالت کلی فرم یک قاعده انتگرال گیری را چنین فرض می کنیم:

$$\boxed{\int_{x}^{x_m} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} w_k f_k + E}$$

در اینجا آنچه می‌تواند مجهول باشد نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_m$ و ضرایب $w_0, w_1, \ldots, w_m$ است که در اینجا دو روش برای محاسبهٔ آنها ارائه می‌کنیم.

در روش های انتگرال گیری نیوتن- کوتز نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_m$ معلوم فرض می‌شوند، مثلاً متساوی الفاصله و به صورت

$$x_{i+1} - x_i = h \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

بنابراین باید $(m+1)$ مجهول $w_0, \ldots, w_m$ را بدست آوریم.

بـرای ایـن منظور w_i ها را چنان پیدا می‌کنیم که خطای قاعده انتگرال گیری برای چندجمله‌ایهای تـا درجـهٔ m صفر باشد. یعنی:

$$\boxed{E = 0}$$

وقتی که

$$\boxed{f(x) = 1, x, \ldots, x^m}$$

در زیر فرمول قاعدهٔ چهارنقطه‌ای به ازای $m=3$ یا قاعده $\frac{3}{8}$ را به دست می‌آوریم.

برای این منظور، بدون این که به کلیت خللی وارد شود قرار می‌دهیم $x_0 = 0$ ، بنابراین

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{3} w_k f_k + E$$

که در آن $x_i = ih$، یعنی:

$$x_0 = 0 \;,\; x_1 = h \;,\; x_2 = 2h \;,\; x_3 = 3h$$

حال برای به دست آوردن w_0 تا w_3 قرار می‌دهیم $E = 0$ وقتی که

$$f(x) = 1 \;,\; x \;,\; x^2 \;,\; x^3$$

به این ترتیب چهار معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$f(x) = 1 \;\Rightarrow\; \int_0^{3h} 1\,dx = 3h = w_0 + w_1 + w_2 + w_3$$

$$f(x) = x \;\Rightarrow\; \int_0^{3h} x\,dx = \frac{9h^2}{2} = h w_1 + 2h w_2 + 3h w_3$$

$$f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; \int_0^{3h} x^2 dx = 9h^3 = h^2 w_1 + 4h^2 w_2 + 9h^2 w_3$$

$$f(x) = x^3 \;\Rightarrow\; \int_0^{3h} x^3 dx = \frac{81h^4}{4} = h^3 w_1 + 8h^3 w_2 + 27h^3 w_3$$

که پس از خلاصه کردن دستگاه معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 3h \\ w_1 + 2w_2 + 3w_3 = \dfrac{9h}{2} \\ w_1 + 4w_2 + 9w_3 = 9h \\ w_1 + 8w_2 + 27w_3 = \dfrac{81h}{4} \end{cases}$$

پس از حذف w_1 به کمک معادلهٔ دوم، معادلات سوم و چهارم به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{cases} 2w_2 + 6w_3 = \dfrac{9}{2}h \\ 6w_2 + 24w_3 = \dfrac{63h}{4} \end{cases}$$

و با حذف w_2 داریم: $\quad 6w_3 = \frac{9h}{4} \quad$ بنابراین، $\quad w_3 = \frac{3h}{8}$

از معادله اول به دست می‌آید: $\quad w_2 = \frac{9h}{8}$

از معادله دوم حاصل می‌شود: $\quad w_1 = \frac{9h}{8}$

و بالاخره $\quad w_0 = \frac{3h}{8}$

بنابراین فرمول چهار نقطه‌ای عبارت است از:

$$\boxed{\int_0^{3h} f(x)\,dx \simeq \frac{3h}{8}\left(f(0)+3f(h)+3f(2h)+f(3h)\right)}$$

ویا

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \simeq \frac{3h}{8}\left(f_0+3f_1+3f_2+f_3\right)}$$

که در آن، $\quad f_i=f(x_i) \quad$ و $\quad x_i=x_0+ih$.

روش فوق به روش ضرایب مجهول نیز معروف است. فرمولهای نیوتن ـ کوتز پنج نقطه‌ای و ... نیز به همین ترتیب به دست می‌آیند. در زیر جدول مربوط به این فرمولها، ضرایب و خطای آنها آمده است:

m	A_0	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	A_1
۱	$\frac{1}{2}$	۱	۱				$-\frac{1}{12}$
۲	$\frac{1}{3}$	۱	۴	۱			$-\frac{1}{90}$
۳	$\frac{3}{8}$	۱	۳	۳	۱		$-\frac{3}{80}$
۴	$\frac{2}{45}$	۷	۳۲	۱۲	۳۲	۷	$-\frac{8}{945}$
۵	$\frac{5}{288}$	۱۹	۷۵	۵۰	۵۰	۷۵	$-\frac{275}{12096}$
۶	$\frac{1}{140}$	۴۱	۲۱۶	۲۷	۲۷۲	۲۷	$-\frac{9}{1400}$
۷	$\frac{7}{17280}$	۷۵۱	۳۵۷۷	۱۳۲۳	۲۹۸۹	۲۹۸۹	$-\frac{8183}{518400}$
۸	$\frac{4}{14175}$	۹۸۹	۵۸۸۸	-۹۲۸	۱۰۹۴۸	-۴۵۴۰	$-\frac{2368}{467775}$

درحالت کلی داریم:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx = A_0 \sum_{k=0}^{m} w_k f_k + A_1 h^{l+1} f^{(l)}(\eta)$$

که در آن $\eta \in [x_0, x_m]$ و

$$l = \begin{cases} m+1 & \text{،} \quad \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \\ m+2 & \text{،} \quad \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

درعمل بهتر است از فرمولهایی استفاده کنیم که در آنها m زوج است.

در جدول مشاهده می شود:

- ضرایب جملات متساوی الفاصله از طرفین برابرند.
- تا $m=7$ ضرایب همگی مثبت ولی برای $m=8$ بعضی از ضرایب منفی هستند.

در عمل توصیه می‌شود با توجه به این که محاسبهٔ f_iها توأم با خطاست و برای m های بزرگ ضرایب w_i ممکن است منفی باشند، فرمولهای نیوتن ـ کوتز را برای m های کوچک به کارببریم. بخصوص m های زوج را اختیار کنید.

مثلاً، فرمولهای ۳ نقطه‌ای (یعنی قاعدهٔ سیمسون) و ۴ نقطه‌ای (یعنی قاعدهٔ $\frac{3}{8}$) هر دو برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ سوم دقیق هستند. اماروش سیمسون از یک نقطه کمتر استفاده می‌کند.