۱

ماشین‌های متناهی حالت

با مثال زیرسعی می شود چارچوب نظری آنچه در این قسمت می خواهیم بیان کنیم را روشن تر نماییم.
مثال ۱.۰.۰.۰. در اداره مرکزی شرکتی، یک ماشین فروش خودکار دو نوع نوشابه که به صورت قوطی عرضه می شود، وجود دارد. یکی کولا C و دیگری فانتا F.
قیمت یک قوطی از هرکدام ۲۰ سنت است.

ماشین سکه های ۵ سنتی، ۱۰ سنتی و ۲۵ سنتی را قبول می کند و باقی مانده ۲۵ سنت را برمی گرداند.
یک روز محمد تصمیم می گیرد یک قوطی فانتا بخرد. کنار ماشین می رود و دو سکه ۵ سنتی و یک سکه ۱۰ سنتی به ترتیب وارد ماشین می کند و دکمه سفید را که با W نشان می دهیم، فضار می دهدو قوطی بیرون می افتد (برای دریافت قوطی کولا باید دکمه سیاه را که با B نشان می دهیم، فشار داد).

کاری که محمد برای خریدش انجام داده است را می توان به صورت جدول زیر نمایش داد که در آن t_0 زمان اولیه، یعنی وقتی که محمد اولین ۵ سنتی را وارد دستگاه می کند و t_1، t_2، t_3 و t_4 لحظه های بعدی هستند، با این قید که $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
حالت	(۱) s_0	(۴) s_1 (۵ سنت)	(۷) s_2 (۱۰ سنت)	(۱۰) s_3 (۲۰ سنت)	(۱۳) s_0
ورودی	(۲) ۵ سنت	(۵) ۵سنت	(۸) ۱۰ سنت	(۱۲)W	
خروجی	(۳) هیچ	(۶) هیچ	(۹) هیچ	(۱۲)F	

در این جدول شماره های (۱۳), (۱۲), (۱۱), (۱۰), (۹), (۸), (۷), (۶), (۵), (۴), (۳), (۲), (۱) به ترتیب پیشامدها را در جریان خرید فانتا به وسیله محمد نشان می دهد. برا یه ورودی در زمان t_i، $0 \leq i \leq 3$، یک خروجی تناظر در آن زمان و پس یک تغیر حالت وجود دارد. حالت جدید در زمان t_{i+1} بستگی به ورودی و حالت (موجود) در زمان t_i دارد.

ماشین در حالت s_0 در یک حالت آمادگی است. ماشین در انتظار یک مشتری برای شروع به انداختن سکه در آن است که مبلغ کل آن به ۲۰ سنت یا بیشتر برسد و آنگاه برای دریافت نوشابه، دکمه‌ای فشرده شود. اگر در زمانی کل مبلغ سکه ورودی بیشتر از ۲۰ سنت شود، ماشین پل خورد لازم را (قبل از فشار مشتری بر دکمه برای دریافت نوشابه) فراهم می کند.

محمد در زمان t_0، ماشین را با انداختن سکه ۵ سنتی آماده می کند. او در این لحظه چیزی دریافت نمی کند، اما در لحظه زمانی بعدی، یعنی t_1، ماشین در حالت s_1 است، که در آن حالت کل مبلغ ۵ سنت او را در حافظه دارد و منتظر ورود دومین سکه (۵ سنتی در لحظه t_1) اوست.
ماشین باز (در لحظه t_1) خروجی را آماده نمی کند اما در لحظه زمانی بعد، t_2، در حالت s_2 است.
مبلغ کل ۱۰ سنت= ۵ سنت (که در زمان t_1 وارد شده)+۵ سنت (که در حالت s_1 در حافظه داشت).
محمد با انداختن سکه ۱۰ سنتی (در زمان t_2) به عنوان ورودی بعدی، هنوز نوشابه ای دریافت نکرده است. زیرا ماشین نمی داند که محمد چه نوشابه ای را ترجیح می دهد، اما اسنک (در زمان t_3) می داند که محمد مبلغ کل لازم، یعنی
۲۰ سنت= ۱۰ سنت (که در حالت s_2 در حافظه داشت) + ۱۰ سنت (که در زمان t_2 وارد شد) را وارد ماشین کرده است.
بالاخره، محمد دکمه سفید را فشار می دهد در زمان t_3 ماشین (خروجی فانتا) را عرضه می کند و سپس در لحظه t_4 به حالت شروع s_0 باز می گردد.

دقیقاً در همان زمانی که دوست محمد یک سکه ۲۵ سنتی به ماشین می دهد و سکه ای ۵ سنتی دریافت می کند، دکمه سیاه را می فشارد و قوطی نوشابه کولا را که خواسته بود، به دست می آورد. در جدول زیر، خرید محمد تحلیل

شده است.

	t_0	t_1	t_2
حالت	(۱)s_0	(۴)s_3 (۲۰ سنت)	(۷)s_0
ورودی	(۲) ۲۵ سنت	(۵) B	
خروجی	(۳) ۵ سنت پول خرد	(۶) C	

آنچه در مورد ماشین فروش اتفاق افتاده است می تواند به طور مجرد، برای کمک به تحلیل جنبه هایی در کامپیوترهای دیجیتال و سیستم های ارتباطی تلفنی به کار گرفته شود.

جنبه های عمده چنین ماشینی به شرح زیرند:

۱. – ماشین در یک زمان مفروض، می تواند تنها یکی از چند حالت متناهی را دارا باشد. این حالت ها را حالت های داخلی ماشین می نامند و در زمانی مفروض، کل موجودی حافظه ماشین، آگاهی از حالت داخلی آن در آن زمان است.

۲. – ماشین به عنوان ورودی، تنها تعدادی متناهی از نمادها را قبول خواهد کرد و جمعاً اینها را الفبای ورودی $\mathscr{I}$ می نامند. در مثال ماشین فروش، الفبای ورودی عبارت است از B، W، سکه ۲۵ سنتی، سکه ۱۰ سنتی، سکه ۵ سنتی، که هر قلم آن به وسیله یک حالت داخلی تشخصی داده می شود.

۳. – خروجی و حالت بعدی به وسیله ترکیبی از ورودی ها و حالت های داخلی تعیین می شود. مجموعه همه خروجی های ممکن، الفبای حروجی $\mathscr{O}$ را برای ماشین تشکیل می دهد.

۴. – می پذیریم که پردازش های پشت سرهم ماشین، به وسیله ضربان های متمایز و جدا از هم ساعت به هنگام می شوند و ماشین به روشی قطعی عمل می کند که در آن خروجی به وسیله یک ورودی فراهم شده و حالت شروع ماشین کاملاً معین می شود.

این مشاهدات ما را به تعریف زیر هدایت می کند.

تعریف ۱.۰.۰. یک ماشین متناهی حالت یک پنجگانه $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, v, w)$ است که در آن

$S = M$	مجموعه حالت های داخلی برای
$\mathscr{I} = M$	الفبای ورودی برای
$\mathscr{O} = M$	الفبای خروجی برای
$v : S \times \mathscr{I} \longrightarrow S$	تابع حالت بعدی
$w : S \times \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{O}$	تابع حالت بعدی

با استفاده از نمادگذاری این تعریف، اگر ماشین در زمان t_i در حالت s باشد و x را در این زمان به ماشین وارد کنیم، آنگاه خروجی در زمان t عبارت است از $w(s,x)$. این خروجی بر اثر تغیر حالت ماشین در زمان t_{i+1} به حالت داخلی بعدی که با $v(s,x)$ نشان داده می شود، دنبال شده است.

یک ماشین متناهی حالت، همان طور که از نامش پیداست، دارای تعداد متناهی از حالت های درونی است که اطلاعات معینی را وقتی در حالت متناهی است، به یاد می آورد.

اما قبل از طرح این مفهوم، برای گفتگو درباره آنچه ورودی معتبری را برای چنین ماشینی تشکیل می دهد، به بعضی مطالب نظریه مجموعه ها نیاز داریم.

زبان: نظریه مجموعه ای رشته ها

دنباله های نمادها[۱] یا نویسه ها [۲] نقشی کلیدی در پردازش اطلاعات به وسیله کامپیوتر دارند. چون برنامه های کامپیوتری بر حسب دنباله های متناهی نویسه ها قابل بیان هستند، برای گرداندن چنین دنباله های متناهی یا رشته ها، به راهی جبری نیاز داریم.

[۱] symbols
[۲] characters

در سراسر این بخش فرض می کنیم Σ را برای نشان دادن مجموعه متناهی و ناتهی نمادها به کار می بریم که جمعاً یک **الفبا** خوانده می شوند.
مثلاً ممکن است $\Sigma = \{۰, ۱\}$ یا $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.
در هر الفبای Σ، عنصرهایی را که می توانند از پهلوی هم قرار دادن عنصرهای دیگر Σ تشکیل شوند ثبت نمی کنیم (یعنی اگر $a, b \in \Sigma$ آنگاه رشته ab که از پهلوی هم قرار دادن a و b به دست می آید را در نظر نمی گیریم). به عنوان نتیجه این قرار داد الفباهایی نظیر $\Sigma = \{۰, ۱, ۲, ۱۱, ۱۲\}$ و $\Sigma = \{a, b, c, ab, ba\}$ در نظر گرفته نمی شوند.
با استفا ه از یک الفبای Σ، به عنوان آغاز کار، می توانیم با بهره گیری از اصطلاحات زیر و با روشی نظام مند، رشته هایی از نمادهای Σ بسازیم.

تعریف ۲.۰.۰. اگر Σ یک الفبا باشد و $b \in \mathbb{Z}_{>۰}$، توان های Σ را به طور بازگشتی، به صورت زیر تعریف می کنیم.

(۱) $\Sigma^۱ = \Sigma$ و

(۲) $\Sigma^{n+۱} = \{xy \mid x \in \Sigma, y \in \Sigma^n\}$ که در آن xy از پهلوی هم قرار دادن x و y به دست آمده است.

مثال ۲.۰.۰. فرض کنید Σ یک الفبا باشد.
اگر $n = ۲$ آنگاه $\Sigma^۲ = \{xy \mid x, y \in \Sigma\}$.
مثلاً اگر $\Sigma = \{۰, ۱\}$، آنگاه $\Sigma^۲ = \{۰۰۰۱, ۱۰, ۱۱\}$.

وقتی $n = ۳$، عنصرهای $\Sigma^۳$ را به صورت uv که $u \in \Sigma$ $v \in \Sigma^۲$ است، می نویسیم. اما چون عنصرهای $\Sigma^۲$ را می شناسیم، ممکن است رشته های موجود در $\Sigma^۳$ را به شکل دنباله هایی به صورت uxy در نظر بگیریم که در آن $x, y, z \in \Sigma$.
به عنوان مثال، اگر $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$، آنگاه $\Sigma^۳$ شامل $۱۲۵ = ۵^۳$ رشته سه نمادی است. از جمله aaa و abc.
به طور کلی برای هر $n \in \mathbb{Z}_{>۰}$، نتیجه می شود تعداد عناصر Σ^n برابر تعداد عناصر Σ به توان n. اگر تعداد عناصر A را با نشان $|A|$ نمایش دهیم، آنگاه

$$|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$$

زیرا با آرایش هایی به اندازه n سروکار داریم که در آن تکرار مجاز است.

تعریف ۳.۰.۰. به ازای هر الفبای Σ، تعریف می کنیم $\Sigma^۰ = \{\lambda\}$، که در آن λ معرف رشته تهی است. یعنی رشته ای متشکل از نمادهایی که هیچ یک از Σ گرفته نشده اند.
نماد λ، هرگز عنصری در الفبای Σ نیست و شاید آن را (فضای) خالی که در بسیاری از الفباها یافت می شود اشتباه گرفته شود.
اگرچه $\lambda \notin \Sigma$ ولی داریم $\varnothing \subseteq \Sigma$. پس لازم است که در این جا مواظب باشیم. ملاحظه می کنیم که

(a) $\{\lambda\} \not\subseteq \Sigma$، زیرا $\lambda \notin \Sigma$ و

(b) $\{\lambda\} \neq \varnothing$ زیرا $|\{\lambda\}| = ۱ \neq ۰ = |\varnothing|$.

برای این که یکجا درباره مجموعه های $\Sigma^۰$، Σ، $\Sigma^۲$، ...، صحبت کنبم، اجتماع های زیر را معرفی می کنیم.

تعریف ۴.۰.۰. اگر Σ یک الفبا باشد آنگاه

(الف) $\Sigma^+ = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \Sigma^n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>۰}} \Sigma^n$

(ب) $\Sigma^* = \bigcup_{n=۰}^{\infty} \Sigma^n$.

ملاحظه می شود که تنها تفاوت بین مجموعه های Σ^+ و Σ^* عنصر λ است، زیرا تنها وقتی $\lambda \in \Sigma^n$ است که n برابر صفر باشد. همچنین $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \Sigma^\circ$.

علاوه بر استفاده از اصطلاح «رشته »[1] عنصرهای Σ^+ یا Σ° را واژه و گاهی جمله نیز می نامند.

نمایش جبری:

تعریف ۵.۰.۰. اگر $w_۱, w_۲ \in \Sigma^+$ آنگاه می توانیم به ازای $m, n \in \mathbb{Z}_{>\circ}$ و

$$x_۱, x_۲, \ldots, x_n, y_۱, y_۲, \ldots, y_m \in \Sigma$$

بنویسیم $w_۱ = x_۱x_۲\ldots x_m$ و $w_۲y_۱y_۲\ldots y_n$. می گوییم رشته های $w_۱, w_۲$ برابرند و می نویسیم $w_۱ = w_۲$ اگر $m = n$ و برای هر $۱ \leq i \leq n$ برابری $x_i = y_i$ برقرار باشد.

از این تعریف نتیجه می شود که دو رشته Σ^+، تنها وقتی برابرند که هردو از یک تعداد نمادهای Σ تشکیل شده باشند و نمادهای متناظر در دورشته، به صورتی همانند جور باشند.

تعریف ۶.۰.۰ (تعریف طول یک رشته). اگر $w \in \Sigma*$ آنگاه $w = x_۱x_۲\ldots x_n$، که در آن $x_i \in \Sigma$ برای هر $۱ \leq i \leq n$، طول رشته w را برابر مقدار n تعریف می کنیم و آن را با $||w||$ نمایش می دهیم. برای λ قرار می دهیم $||\lambda|| = \circ$.

تعریف ۷.۰.۰. اگر $x, y \in \Sigma^*$ آنگاه $x = x_۱x_۲\ldots x_m$ و $y = y_۱y_۲\ldots y_n$ به طوری که برای همه $۱ \leq i \leq m$، x_i و برای همه $۱ \leq j \leq n$، y_j در Σ اند، الحاق x, y را با xy نشان می دهیم و به صورت $xy = x_۱x_۲\ldots x_my_۱y_۲\ldots y_m$ نمایش می دهیم.

در اینجا، بنابرتعریف، عمل دوتایی کنار هم گذاشتن روی Σ^* (و Σ^+) را داریم که این عمل شرکت پذیر است ولی طبق تعریف جابه جایی نیست.

چون برای هر $x \in \Sigma^*$، $x\lambda = \lambda x = x$، عنصر $\lambda \in \Sigma^*$ عنصر همانی برای عمل الحاق است.

نتیجه ای که از تعریف فوق به دست می آید

$$||xy|| = ||x|| + ||y||$$

حال عمل دوتایی الحاق ما را به تعریف بازگشتی دیگری هدایت می کند. قبلاً به توان های یک الفبا پرداخته بودیم. حال توان های رشته ها را می خواهیم بسازیم.

تعریف ۸.۰.۰. برای هر $x \in \Sigma^+$، توانهای x را به وسیله $x^\circ = \lambda$، $x^۱ = x$ و $x^۲ = xx, \ldots, x^{n+۱} = xx^n$ تعریف می کنیم که در آن $n \in \mathbb{Z}_{>\circ}$.

در این تعریف، مثال دیگری از چگونگی معرفی یک موجود ریاضی به روش استقرایی یا بازگشتی ارائه می شود.

موجودی که هم اکنون به دنبال آن هستیم، از موجودات (همانند) نتیجه شده قبلی حاصل شده است و به علاوه این تعریف، راهی برای پرداختن به یک الحاق n تایی (یک توان $(n+۱)$ام) یک رشته با خودش پیش روی ما می گذارد.

مثال ۳.۰.۰. فرض کنیم $\Sigma = \{\circ, ۱\}$ و $x = \circ۱$. آنگاه طبق تعریف بالا

(۱) $x^\circ = \lambda$،

(۲) $x = \circ۱$،

(۳) $x^۲ = \circ۱\circ۱$،

[1] string

(۴) $x^{۳} = ۰۱۰۱۰۱$،
و

$$||x|| = ۲, ||x^{۲}|| = ۲||x|| = ۴, \ldots, ||x^{n}|| = n||x||.$$

حال می خواهیم موضوعی که به خاطر آن مقدمات فوق را معرفی کردیم، یعنی مفهوم «زبان» را ارائه نمائیم.

تعریف ۹.۰.۰. اگر $x, y \in \Sigma^{*}$ و $w = xy$ آنگاه x را «پیشوند» w می نامند و اگر $x, y \neq \lambda$ ، x را پیشوند سره w می گویند. همچنین رشته y را پسوند w می نامند و وقتی $\neq \lambda$ ، آن را پسوند سره w می گویند.

مثال ۴.۰.۰. فرض کنید $\Sigma = \{a, b, c\}$ و $w = abbccc$. آنگاه طبق تعریف، a پیشوند سره w است، ab پیشوند سره w است و c پسوند سره w است. همچنین ccc پسوند سره w است.

تعریف ۱۰.۰.۰. اگر $x, y, z \in \Sigma*$ و $w = xyz$، آنگاه y را زیر رشته w می نامندو اگر حداقل یکی از x و z ها با λ متفا ت باشد، آنگاه y را زیر رشته سره می نامند.

مثال ۵.۰.۰. برای $\Sigma = \{۰, ۱\}$، رشته $w = ۰۰۱۰۱۱۱۰$، زیر رشته های زیر را دارد

۱. $x = ۰۰$

۲. $y = ۱۰۱۱$

۳. $z = ۱۰$ و $w = xyz$.

تعریف ۱۱.۰.۰. برای الفبای Σ، به هر زیر مجموعه Σ^{*} یک زبان می گویند. این تعریف زیر مجموعه $\varnothing$ را، که زبان تهی نامیده می شود، در بر می گیرد.

مثال ۶.۰.۰. اگر Σ، الفبایی متشکل از ۲۶ حرف انگلیسی، ۱۰ رقم ۹...$۰, ۱, ۲,$ که در پیاده سازی معمولی زبان C^{++} به کار می روند، باشد، گردایه‌های برنامه‌های قابل اجرا برای آن، پیاده سازی، تشکیل یک زبان می دهند. در همین وضعیت، هر برنامه قابل اجرا را می توان یک زبان در نظر گرفت. همچنان که می توان هر مجموعه متناهی خاص از چنین برنامه هایی را یک زبان دانست.

چون زبان ها خود مجموعه اند، می توانیم اجتماع، اشتراک و تفاضل متقارن دو زبان را تشکیل دهیم، اما در این جا، برای این کار، یک توسیع عمل دوتایی برای رشته ها، که قبلاً تعریف شده، مفیدتر است.

تعریف ۱۲.۰.۰. برای هر الفبای Σ، و زبان های $A, B \subseteq \Sigma$، الحاق A و B را که با AB نشان داده می شود، عبارت است از

$$\{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

الحاق را می توان به عنوان حاصل ضرب برداری دو بردار تعبیر کرد در آن، ویرگول و پرانتز را در هر زوج مرتب حذف می کنیم، به قسمی که (a, b) به صورت ab درآید.

خواهیم دید که درست مثل $A \times B \neq B \times A$، برای الحاق نیز در حالت کلی داریم $AB \neq BA$. گرچه برای A و B متناهی داریم $|A \times B| = |B \times A|$ اما در این جا، برای زبان های متناهی، حالت $|AB| \neq |BA|$ امکان پذیر است.

مثال ۷.۰.۰. فرض کنید $\Sigma = \{x, y, z\}$، A و B زبانهای متناهی $A = \{x, xy, z\}$ و $B\{\lambda, y\}$ باشند. در این صورت

$$AB = \{x, xy, z, xyy, zy\}$$
$$BA = \{x, xy, z, yx, yxy, yz\}$$
$$|AB| = ۵ \neq ۶ = |BA|, \qquad (۱)$$
$$|AB| = ۵ \neq ۶ = ۳ \cdot ۲ = |A|\ |B|. \qquad (۲)$$

تفاوت ها به این دلیل روی می دهد که دو را برای نمایش xy وجود دارد.

(a) xy، $x \in A$ و $y \in B$و

(b) $xy\lambda$ که در آن $xy \in A$ و $\lambda \in B$.

مفهوم یکتایی نمایش چیزی است که نمی توانیم آن را مسلم فرض کنیم. اگرچه در این جا برقرار نیست، اما کلید دستیابی به بسیاری از مفاهیم ریاضی است.

مثال بالا نشان می دهد که برای زبان های متناهی A و B، $|AB| \leq |A|\,|B|$. درستی این مطلب را می توان در حالت کلی نشان داد. قضیه زیر مربوط به برخی ویژگی هایی هست که در الحاق زبان ها صدق می کنند.

قضیه ۱.۰.۰. برای یک الفبای Σ، فرض کنیم $A, B \subseteq \Sigma^*$. در این صورت

(الف) $A\{\lambda\} = \{\lambda\}A = A$.

(ب) $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

(ت) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$.

(ث) $A(BC) = (AB)C$.

(ج) $(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$.

اثبات. قسمت های (ث) و (ج) را ثابت می کنیم و اثبات بقیه بر عهده خواننده خواهد بود.

(ث)- فرض کنیم $x \in \Sigma^*$ و $x \in (B \cup C)A$. آنگاه، بنابر تعریف $(B \cup C)A$، داریم $x = yz$، که در آن $y \in B \cup C$ و $z \in A$. بنابراین $z \in A$ و $y \in B$ یا $y \in C$. پس

$$x = yz, y \in B, z \in A \Longrightarrow x = yz \in BA$$

یا

$$x = yz, y \in C, z \in A \Longrightarrow x = yz \in CA$$

بنابراین $(B \cup C)A \subseteq BA \cup CA$ (۱).
به عکس

$$x \in BA \cup CA \Longrightarrow x \in BA \quad \text{یا} \quad x \in CA$$

اگر $x \in BA$، آنگاه برای یک $b \in B$ و یک $a_1 \in A$، $x = ba_1$ یا اگر $x \in CA$، آنگاه برای یک $c \in C$ و برای یک $a_2 \in A$، $x = ca_2$.

فرض کنید $x = ba_1$، برای یک $b \in B$ و یک $a_1 \in A$. چون $B \subseteq B \cup C$، داریم $x = ba_1$ که در آن $b \in B \cup C$ و $a \in A$. در این صورت $x \in (B \cup C)A$.

اگر $x = ca_2 \in CA$ با استدلالی مشابه نتیجه می شود $x \in (B \cup C)A$.

لذا در هر دو صورت $BA \cup CA \subseteq (B \cup C)A$ (۲).

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می شود

$$(B \cup C)A = BA \cup CA.$$

(ج)- برای $x \in \Sigma^+$، و $x \in (B \cap C)A$ نتیجه می شود $x = yz$ که $y \in B \cap C$ و $z \in A$. از $y \in B \cap C$ نتیجه می شود $y \in B$ در نتیجه $yz \in BC$، همچنین $y \in C$ نتیجه می شود $x = yz \in CA$. بنابراین $x = yz \in BA \cap CA$ و یا $(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$. □

رابطه شمول در قسمت (ج) قضیه فوق می تواند اکید باشد. به عنوان مثال نقض مثال زیر می تواند این رابطه شمول اکید را نشان دهد.

مثال ۸.۰.۰. فرض کنید $\Sigma = \{x, y, z\}$ و $B = \{x, xx, y\}$ و $B = \{y, xy\}$ و $A = \{y, yy\}$.
در این صورت داریم $xyy \in BA \cap CA$ ولی $xyy \notin (B \cap C)A$. در نتیجه $(B \cap C)A \subsetneq BA \cap CA$.

در مقایسه با مفاهیم Σ^n، Σ^*، و Σ^+، تعریف زیر برای یک زبان دلخواه $A \subseteq \Sigma^*$ داده می شود.

تعریف ۱۳.۰.۰. برای هر زبان $A \subseteq \Sigma^*$، می توانیم زبان های دیگری به ترتیب زیر بسازیم.

(الف) $A^0 = \{\lambda\}$ و $A^1 = A$ و برای هر $n \in \mathbb{Z}_{>0}$،

$$A^{n+1} = \{ab \mid a \in A, b \in A^n\}$$

(ب) $A^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} A^n$ ، که بستار مثبت A نامیده می شود.

(پ) $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$، را بستار کلین [۱] A می نامند.

مثال ۹.۰.۰. اگر $\Sigma = \{x, y, z\}$ و $A = \{x\}$، آنگاه

(a) $A^* = \{\lambda\}$،

(b) $A^n = \{a^n\}$،

(c) $A^+ = \{x^n \mid n \geq 1\}$

(d) $A^* = \{x^n \mid n \geq 0\}$.

مثال ۱۰.۰.۰. فرض کنید $\Sigma = \{x, y\}$.

(الف) اگر $A = \{xx, xy, yx, yy\} = \Sigma^2$، آنگاه A^* زبان همه رشته های w در Σ^* است که برای آنها طول w زوج است.

(ب) وقتی A مثل قسمت (الف) است، و $B = \{x, y\}$، زبان BA^* شامل همه رشته هایی در Σ^* است که طول آنها فرد است و در این حالت در می یابیم که $BA^* = A^*B$ و $\Sigma^* = A^* \cup BA^*$.

(پ) زبان $\{x\} \cdot \{x, y\}^*$ (یعنی الحاق زبان های $\{x\}$ و $\{x, y\}^*$) شامل هر رشته ای در Σ^* است که برای آن، x پیشوند است.

زبان شامل همه رشته های Σ^* را که برای آن yy پسوند است، می توان به وسیله $\{x, y\}^*\{yy\}$ تعریف کرد.
هر رشته در زبان $\{x, y\}^*\{x\ xy\}\{x, y\}^*$ دارای زیر رشته xxy است.

(ت) هر رشته در زبان $\{x\}^*\{y\}^+$ متشکل از تعدادی متناهی (احتمالاً صفر) x و به دنبال آن تعدادی متناهی (همچنان احتمالاً صفر) y است.

گرچه $\{x\}^*\{y\}^* \subseteq \{x, y\}^*$ ولی رشته $w = xyz$ در $\{x, y\}^*$ هست اما در $\{x\}^*\{y\}^*$ نیست. بنابراین $\{x\}^*\{y\}^* \subsetneq \{x, y\}^*$.

---

[۱] کول کلین Cole Kleene منطق‌دان آمریکایی

در $\mathbb{R}$، با قانون ضرب، اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a, b > ۰$، آنگاه از $a^۲ = b^۲$ نتیجه می شود $a = b$ ولی در مورد زبان ها چنین نتیجه ای ممکن است درست نباشد. به عنوان مثال اگر $\Sigma = \{x, y\}$ و

$$A = \{\lambda, x, x^۳, x^۴, \dots\} = \{x^n \mid n \geq ۰\} - \{x^۲\}, \;\; B = \{x^n \mid n \geq ۰\}$$

آنگاه $A^۲ = B^۲ (= B)$ اما $A \neq B$.

توجه: طبق قرارداد هرگز نداریم که $\lambda \in \Sigma$ اما ممکن است داشته باشیم $\lambda \in A$.

این بخش را با لم و قضیه دیگری که از ویژگی های زبان ها بحث می کند خاتمه می دهیم. این لم، نمونه ای دیگر را در اختیار ما قرار می دهد که در آن از استقرای ریاضی استفاده می کنیم.

لم ۱.۰.۰. فرض کنید Σ یک الفبا، با زبان های $A, B \subseteq \Sigma$ باشد. اگر $A \subseteq B$، آنگاه به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$، $A^n \subseteq B^n$.

اثبات. در این جا $S(۱)$ ، گام پایه استقرا به راحتی نتیجه می شود زیرا $A^۱ = A \subseteq B = B^۱$. با پذیرفتن درستی $S(k)$ به عنوان فرض داریم $A^k \subseteq B^k$ به ازای هر $k \in \mathbb{Z}^+$. اینک رشته $x \in A^{n+۱}$ را در نظر می گیریم. بنابرتعریف، $x = x_۱ x_۲$ که در آن، $x_۱ \in A$ و $x_۲ \in A^k$.

چون $A \subseteq B$ و $A^k \subseteq B^k$ (بنا بر فرض استقرا) داریم $x_۱ \in B$ و $x_۲ \in k$. در نتیجه $x = x_۱ x_۲ \in BB^k = B^{k+۱}$.

بنابراین $S(k + ۱)$ درست است.

پس بنابر اصل استقرای متناهی نتیجه می شود که اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A^n \subseteq B^n$ برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$. □

قضیه ۲.۰.۰. برای یک الفبای Σ و ربان های $A, B \subseteq \Sigma^*$،

(الف) $A \subseteq AB^*$.

(ب) $A \subseteq B^* A$.

(پ) $A \subseteq B \Longrightarrow A^+ \subseteq B^+$.

(ت) $A \subseteq B \Longrightarrow A^* \subseteq B^*$.

(ث) $AA^* = A^* A = A^+$.

(ج) $A^* A^* = A^* = (A^*)^* = (A^*)^+ = (A^+)^*$.

(چ) $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^* = (A^* B^*)^*$.

اثبات. برهان قسمت های (ب) و (چ) را ارائه می دهیم و بقیه به عنوان تمرین واگذار می شود.

(ب) فرض کنیم $A \subseteq B$. می خواهیم نشان دهیم $A^+ \subseteq B^+$.

فرض کنیم $x \in A^+$. آنگاه برای یک $n \in \mathbb{Z}^+$، $x \in A^n$. چون $A^n \subseteq B^n$، پس $x \in B^n$ و چون $B^n \subset B^*$ پس $x \in B^*$.

(ج)- می خواهیم نشان دهیم

$$(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^* = (A^* B^*)^*$$

ابتدا نشان می دهیم $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*$.

بنا بر قسمت (ت)، بنابر تعریف $A \subseteq A^*$ و $B \subseteq B^*$. پس $A \cup B \subset A^* \cup B^*$. پس بنا بر قسمت (پ)، $(A \cup B)^* \subseteq (A^* \cup B^*)^*$ (۱).

به عکس. چون $A, B \subset A \cup B$، پس $A^*, B^* \subset A^* \cup B^*$. بنابراین $A^* \cup B^* \subset (A \cup B)^*$ (۲).

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*$.

برای اثبات

$$(A^* \cup B^*)^* = (A^*B^*)^*$$

می دانیم بنا بر قسمت های (الف) و (ب) می توانیم بنویسیم $A^* \subset A^*B^*$ و $B^* \subset A^*B^*$. بنابراین

$$(A^* \cup B^*) \subset A^*B^* \Longrightarrow (A^* \cup B^*)^* \subset (A^*B^*)^* \qquad (۳)$$

بر عکس اگر $xy \in A^*B^*$ و $x \in A^*$ و $Y \in B^*$، آنگاه $x \in A^* \cup B^*$. لذا $xy \in (A^* \cup B^*)^*$. در نتیجه $A^*B^* \subseteq (A^* \cup B^*)^*$. با استفاده از (ت) نتیجه می شود

$$(A^*B^*) \subseteq (A^* \cup B^*)^* \qquad (۴)$$

از مقایسه (۳) و (۴) تساوی مورد نظر به دست می آید.

□

قضیه زیر کاربردهای مهمی در مطالعه نظریه ماشین های متناهی حالت و زبان های صوری دارد.

قضیه ۳.۰.۰. فرض کنید A و B زیر مجموعه های دلخواه Σ^* هستند به طوری که $\lambda \notin A$. آنگاه معادله $X = AX \cup B$ دارای جواب یکتایی به صورت $X = A^*B$ است.

اگرچه در نگاه اول این قضیه دشوار می نماید اما دقت در صورت آن نشان می دهد نتیجه مورد نظر بدیهی است.
زبان X داده شده به طوری که $X \supset B$ و $X \supset AX$ است. X از چه رشته هایی می تواند تشکیل شده باشد؟
چون X شامل B است ($X \supset B$) می توانیم در سمت راست $X \supset AX$ به جای X ، B را قرار دهیم و نتیجه بگیریم $X \supset AB$.
اگر این جایگزاری را تکرار کنیم نتیجه می شود

$$\begin{aligned}
&X \supset AAB \\
&X \supset AAAB \\
&\vdots \\
&X \supset A^nB \qquad \text{و به طور کلی}
\end{aligned}$$

حال رشته $x \in X$ را درنظر بگیرید. چون $X = AX \cup B$ و همه رشته های در A ناتهی هستند، نتیجه می شود یا $x \in B$ یا x دارای یک پیشوند ناتهی است به طوری که با برداشتن این پیشوند، یک رشته با طول کوتاه تر در X به دست می آید.
با استدلالی مشابه، این رشته کوتاه تر خاصیتی مشابه دارد: یا در B است یا یک پیشوند ناتهی در A است که با برداشتن آن، رشته ای دیگر در X به دست می آوریم.
چون رشته اولیه ای که انتخاب کردیم از طول متناهی است، بعد از برداشتن تعداد متناهی و کافی پیشوند ناتهی، به رشته ای در B می رسیم.

نتیجه می شود که رشته اولیه x باید به عنوان دنباله ای از پیشوندها (احتمالاً تهی) در نظر گرفته شود که هریک در A هستند که به دنبال آن یک پسوند از B می آید. این روند را می توان به صورت رسمی در اثبات زیر بیان کرد.

اثبات. فرض کنیم X یک جواب دلخواه معادله $X = AX \cup B$ باشد. نشان می دهیم $X = A^*B$. (در واقع این جواب را می سازیم که این تضمین کننده یکتایی آن نیز می باشد).

a) با نشان دادن این که اگر X یک جواب باشد، آنگاه برای همه $n \in \mathbb{Z}^+$، $X \supset A^nB$ و در نتیجه $X \supset A^*B$ است.

۱)(پایه استقرا) برای $n = ۰$، $A^\circ = \{\lambda\}$ و $A^\circ B = B$. چون $X \supset B$ نتیجه می شود $X \supset A^\circ B$.

۲) (فرض استقرا) فرض کنیم $X \supset A^nB$. چون $X \supset AX$ نتیجه می شود

$$X \supset A(A^nB) = A^{n+1}B$$

این گام استقرایی را کامل می کند و نتیجه می شود $X \supset A^nB$ برای همه $n \in \mathbb{Z}^+$. در این صورت می دانیم $A^*B = \bigcup_{i=0}^{n} A^iB$ و در نتیجه $X \supset A^*B$.

b) حال با استفاده از استقرا روی طول رشته های Σ، نشان می دهیم $X \subset A^*B$.

می خواهیم نشان دهیم که اگر $x \in X$، آنگاه $x \in A^*B$.

فرض استقرا می گوید هر رشته با طول کوتاه تر از x این خاصیت را دارد. فرض کنیم $||x||$ نشان دهنده طول $x \in \Sigma^*$ است. آنگاه فرض استقرا به صورت زیر بیان می شود

$$(\forall w)\,(||w|| < ||x|| \Longrightarrow [w \in X \Longrightarrow w \in A^*B])$$

از این فرض برای نشان دادن این که اگر $x \in X$، آنگاه $x \in A^*B$ استفاده می کنیم.

چون $X = A \cup B$، اگر $x \in X$ آنگاه یا $x \in AX$ یا $x \in B$.

حالت I. اگر $x \in B$ آنگاه $x \in A^*B$.

حالت II. فرض کنیم $x \in AX$. آنگاه $x = yz$ که $y \in A$ و $z \in X$. اما $\lambda \notin A$، پس $y \neq \lambda$ و بنابراین $||z|| < ||x||$. بنا بر فرض استقرا، نتیجه می گیریم $z \in A^*B$. در نتیجه $x = yz$ عضوی از AA^*B است که این مجموعه خود زیر مجموعه A^*B خواهد بود.

$$x = yz \in AA^*B \subset A^*B$$

این رابطه اثبات استقرایی این که اگر $x \in X$، آنگاه $x \in A^*B$ را کامل می کند و درستی $X \subset A^*B$ را نشان می دهد.

قسمت های $(a,)$ و (b) اثبات بالا، نشان می دهد اگر X جوابی برای معادله $X = AX \cup B$ باشد، آنگاه $X = A^*B$.

اما اثبات قضیه هنوز کامل نشده است، زیرا ما نشان نداده ایم که یک جواب همیشه وجود دارد.

این به عنوان تمرین، بر عهده دانشجو قرار می گیرد. $\square$

به طور مشابه می توان گفت:

قضیه ۴.۰.۰. هرگاه A و B زیر مجموعه های دلخواه Σ^* باشند، به طوری که $\lambda \notin A$ آنگاه معادله $X = XA \cup B$ دارای جواب یکتایی به صورت $X = BA^*$ است.

مثال ۱۱.۰.۰. ۱) اگر $A = \{a\}$ و $B = \varnothing$، آنگاه معادله $X = AX \cup B$ دارای جواب یکتای $X = A^*B = \varnothing$ است.

۲) اگر $A = \{a, ab\}$ و $B = \{cc\}$، آنگاه معادله $X = AX \cup B$ جوابی به صورت $X = \{a, ab\}^*\{cc\}$ است.

نتیجه ۱.۰.۰. فرض کنیم $X = AX \cup B$ و $\lambda \in A$. نشان دهید اگر $C \supset B$ آنگاه $X = A^*C$ نیز یک جواب معادله است (یعنی جواب یکتاست).

تمرین ۱.۰.۰. ۱. فرض کنید $\Sigma = \{x, y, z\}$ الفبای زبان باشد. فرض کنید $A, B \subset \Sigma^*$ که به وسیله $A = \{xy\}$ و $B = \{\lambda, x\}$ تعریف شده باشد. مطلوب است AB، BA، B^3، B^+، A^*. از مقایسه رشته هایی که لیست شده اند چه نتیجه ای می توان گرفت.

۲. فرض کنید $\Sigma = \{x, y, z\}$ یک الفبا باشد. فرض کنید $x_i \in \Sigma$، به ازای $1 \leq i \leq 100$، که در آن $x_i \neq x_j$ برای هر $1 \leq i < j \leq 100$. برای رشته $s = x_1x_2 \ldots x_{100}$، چند رشته به طول یک وجود دارد؟ چند رشته به طول ۲ و جود دارد؟ چند رشته به طول ۳ وجود دارد؟ به طور کلی چند رشته ناتهی وجود دارد. چند رشته ناتهی وجود دارد.

۳. فرض کنید Σ الفبایی با $a \in \Sigma$ باشد. تابع های $p_a, s_a, r : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ و تابع $d : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

(i) تابع پیشوند به وسیله a، $p_a(x) = ax, x \in \Sigma^*$.

(ii) تابع پسوند (به وسیله a، $s_a(x) = xa, x \in \Sigma^*$.

(iii) تابع بازگشتی $r(\lambda) = \lambda$، برای $x \in \Sigma$، اگر $x = x_۱x_۲ \dots x_{n-۱}x_n$ که در آن $x_i \in \Sigma$ برای $۱ \leq i \leq n$، آنگاه $r(x) = x_nx_{n-۱} \dots x_۲x_۱$.

(vi) تابع حذف از ابتدا: برای $x \in \Sigma^+$ اگر $x = x_۱x_۲x_۳ \dots x_n$ آنگاه

$$d(x) = x_۲x_۳ \dots x_n$$

این چهار تابع کدام یک به یک اند.

کدام پوشا هستند

اگر تابعی پوشا نیست بردش را تعیین کنید.