انتگرالگیری عددی

محاسبهٔ انتگرالهای معین به شکل

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

که در آن a و b متناهی و f(x) بر [a,b] معین باشد، به روشهای تحلیلی، یعنی با استفاده از تابع اولیه f(x)، غالباً یا مشکل است یا غیر ممکن. بنابراین، حتی در صورت موجود بودن تابع اولیه برای f(x) نیز از انتگرالگیری عددی استفاده می‌شود.

واضح است که انتگرال معین را می‌توان به عنوان مساحت سطح زیر منحنی $y=f(x)$ که محصور به محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ است، تعبیر کرد و با تقسیم بازهٔ [a,b] به زیر بازه‌ها و جمع‌کردن مساحتهای مربوط به این زیربازه‌ها آن را محاسبه کرد. با استفاده از این خاصیت وهمچنین استفاده از چندجمله ای های درونیاب می توانیم مقدار تقریبی انتگرال معین را بدست اوریم.

فرض کنید بازه [a,b] را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، یعنی به زیر بازه‌های $[x_i , x_{i+1}]$ که در آن

$$h = x_{i+1} - x_i \quad , \quad i= 0,1,\dots, n-1$$

و در نتیجه:

$$h= \frac{b-a}{n}$$

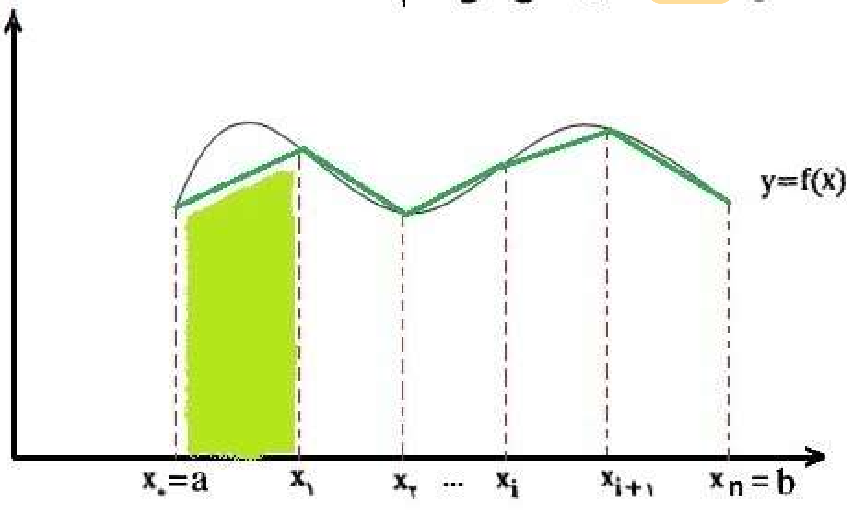
سپس چندجمله‌ای درونیاب $P_m(x)$ در نقاط x_i، x_{i+1}، ...، x_{i+m}، را بدست آورده و در هر زیر بازه f(x) را با چندجمله ای درونیاب تقریب می زنیم.

$$\int_{x_i}^{x_{i+m}} P_m(x)\,dx$$

با جمع کردن این مقادیر، تقریبی برای مقدار انتگرال به صورت زیر حاصل می شود:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx}$$

اکنون حالت های $m=1$ و $m=2$ را بررسی می‌کنیم.



قاعدهٔ ذوزنقه‌ای (حالت $m=1$)

در این قاعده چند جمله‌ای درونیاب **مرتبه یک** تابع f را در نقاط x_i و x_{i+1} به صورت زیر به دست می‌آوریم :

$$P_1(x) = f_i + \theta \Delta f_i$$

با تغییر متغیر $x = x_i + \theta h$ داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\,dx = \int_0^1 (f_i + \theta \Delta f_i) h\, d\theta = h\left[\theta f_i + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_i\right]_0^1 = h\left(f_i + \frac{1}{2}\Delta f_i\right)$$

چون $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ ، در نتیجه:

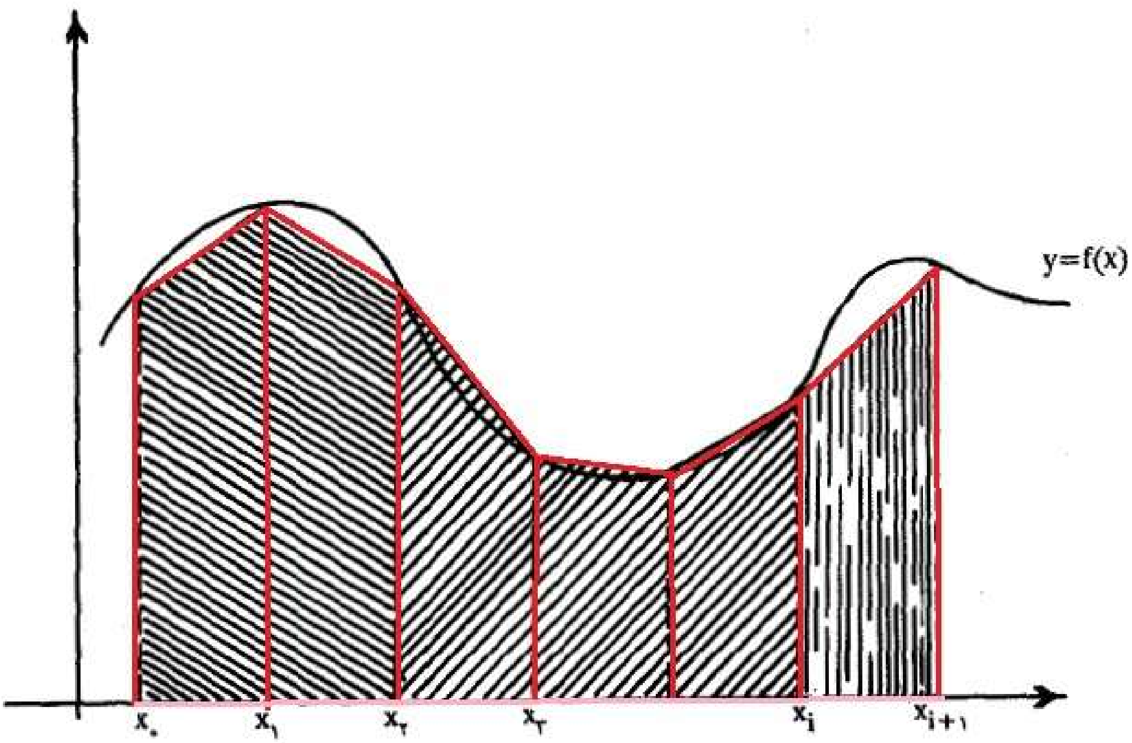
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

بنابراین، قرارمی‌دهیم :

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})}$$

با توجه به شکل، مقدار انتگرال در واقع مقدار تقریبی مساحت ذوزنقه‌ای است که مشخص شده است.

از این رو، این روش، **روش ذوزنقه ای** نامیده می شود.



اکنون برای محاسبه $\int_a^b f(x)\,dx$ داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$\simeq \frac{h}{2}(f_0+f_1) + \frac{h}{2}(f_1+f_2) + \dots + \frac{h}{2}(f_i+f_{i+1}) + \dots + \frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)$$

$$= \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

بنابراین:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\right) = T(h)}$$

با توجه به شکل، هرچه h کوچکتر اختیار شود خطا کمتر است.

مثال تقریبی از $\int_0^1 x^2 dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ محاسبه و خطای آن را نیز بدست آورید.

حل: با توجه به اینکه $b=1$ ، $a=0$ ، $f(x)=x^2$

$$T(1) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{2}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right] = \frac{1}{4}\left[0 + 2\times\frac{1}{4} + 1\right] = \frac{3}{8}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{2}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[0 + 2\times\frac{1}{16} + 2\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{9}{16} + 1\right] = \frac{11}{32}$$

مقدار واقعی چنین حساب می‌شود!

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ملاحظه می‌شود که هرچه h کوچکتر می‌شود $T(h)$ نیز به $\frac{1}{3}$ نزدیکتر می‌شود.

مثال مقدار تقریبی $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ را با استفاده از روش ذوزنقه ای و به ازای $h=\frac{\pi}{8}$ محاسبه کنید.

حل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \simeq T\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{16}\left(\sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}(0 + 2(0{,}38268 + 0{,}70711 + 0{,}92388) + 1)$$

$$= \frac{\pi}{16} \times 5{,}02734 = 0{,}98712$$

از طرفی مقدار واقعی انتگرال عبارتست از:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

خطای قاعده ذوزنقه ای

برای محاسبهٔ خطای $T(h)$، ابتدا قضایای زیر را یادآوری می کنیم:

قضیه

اگر تابع h بر $[c,d]$ پیوسته و تابع g در این بازه انتگرالپذیر باشد و تغییر علامت ندهد (یعنی همواره نامنفی یا همواره نامثبت باشد) در این صورت،

$$\int_{c}^{d} g(x)h(x)\,dx = h(\eta)\int_{c}^{d} g(x)\,dx$$

که $\eta \in [c,d]$.

قضیه

اگر تابع h بر $[c,d]$ پیوسته باشد و $\min\limits_{c \le x \le d} h(x) \le \xi \le \max\limits_{c \le x \le d} h(x)$

آن گاه η ی هست که: $\quad h(\eta) = \xi \quad , \quad c \le \eta \le d$

به عبارت دیگر، هرتابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته و محدود، هر مقدار بین ماکسیمم و مینیمم خود را در نقطه‌ای از حوزهٔ تعریفش اختیار می‌کند.

قضیه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای در یک زیر بازه از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i)$$

که در آن η_i بین x_i و x_{i+1} است، به شرط آن که $f''(x)$ پیوسته باشد.

برهان

با استفاده از فرمول خطای درونیابی برای چند جمله ای درونیاب مرتبه یک داریم:

$$f(x)-P_1(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2!}f''(\eta_x) \qquad , \qquad \eta_x\in[x_i,x_{i+1}]$$

که در آن $P_1(x)=f_i+\theta\Delta f_i$ ، با انتگرال گیری از رابطه بالا داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx-\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)\,dx=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2!}f''(\eta_x)\,dx$$

با توجه به این که بر $[x_i,x_{i+1}]$ داریم: $x-x_{i+1}\leq 0$ و $x-x_i\geq 0$

نتیجه می‌گیریم که همواره $g(x)=(x-x_i)(x-x_{i+1})\leq 0$

یعنی، $g(x)$ بر $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$ تغییر علامت نمی‌دهد و چون $h(x)=f''(\eta_x)$ نیز پیوسته فرض شده است، بنابر قضیه می‌توان نوشت:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx-\frac{h}{2}(f_{i+1}-f_i)=\frac{f''(\eta_i)}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx$$

که در آن η_i عددی‌بین x_i و x_{i+1} است. انتگرال‌سمت‌راست این تساوی، با تغییر متغیر $x=x_i+\theta h$، چنین حساب می‌شود:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx=\int_0^1 h\,\theta\times h\,(\theta-1)\times h\,d\theta$$

$$=h^3\int_0^1(\theta^2-\theta)\,d\theta=h^3\left[\frac{\theta^3}{3}-\frac{\theta^2}{2}\right]_0^1=-\frac{h^3}{6}$$

لذا، $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx-\frac{h}{2}(f_{i+1}-f_i)=-\frac{h^3}{12}f''(\eta_i)$$

اکنون برای محاسبه مقدار خطای قاعده ذوزنقه ای در کل بازه چنین عمل می کنیم:

قضیه

$$ET(h)=\int_a^b f(x)\,dx-T(h)=-\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta), \qquad a\leq\eta\leq b$$

برهان

خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای بر کل بازهٔ $[a,b]$ برابر است با مجموع خطاهای این قاعده بر تک‌تک زیر بازه‌های $[x_i, x_{i+۱}]$. در نتیجه،

$$ET(h) = \int_a^b f(x)\,dx - T(h) =$$

$$\left[\int_{x_۰}^{x_۱} f(x)\,dx - \frac{h}{۲}(f_۰ + f_۱)\right] + \left[\int_{x_۱}^{x_۲} f(x)\,dx - \frac{h}{۲}(f_۱ + f_۲)\right] + \ldots + \left[\int_{x_{n-۱}}^{x_n} f(x)\,dx - \frac{h}{۲}(f_{n-۱} + f_n)\right] =$$

$$-\frac{h^۳}{۱۲} f''(\eta_۰) - \frac{h^۳}{۱۲} f''(\eta_۱) - \ldots - \frac{h^۳}{۱۲} f''(\eta_{n-۱})$$

بنابراین،

$$ET(h) = -\frac{h^۳}{۱۲}\left(f''(\eta_۰) + f''(\eta_۱) + \ldots + f''(\eta_{n-۱})\right)$$

فرض کنید

$$m = \min_{a \le x \le b} f''(x) \quad , \quad M = \max_{a \le x \le b} f''(x)$$

$$f''(\eta) = \frac{f''(\eta_۰) + \ldots + f''(\eta_{n-۱})}{n}$$

لذا:

$$f''(\eta_۰) + f''(\eta_۱) + \ldots + f''(\eta_{n-۱}) = n\, f''(\eta)$$

در نتیجه:

$$ET(h) = -\frac{n h^۳}{۱۲} f''(\eta) = -\frac{(b-a) h^۲}{۱۲} f''(\eta)$$

نتیجه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای متناسب با $h^۲$ است و این قاعده برای توابع چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ اول دقیق است.

برهان

اولاً چون $f''(\eta)$ و $\frac{(b-a)}{۱۲}$ اعداد ثابتی هستند $ET(h)$ متناسب با $h^۲$ است. ثانیاً $f''(x)$ وقتی همواره صفر است که تابع f یک چندجمله‌ای حداکثر درجه اول باشد، که در این صورت، $ET(h) = ۰$ یعنی، مقدار $T(h)$ دقیقاً مساوی **مقدار واقعی انتگرال** است که اصطلاحاً گفته می‌شود قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، در این حالت، دقیق است.