درونیابی

مقدمه

یکی از مفاهیم بنیادی در آنالیز عددی و نظریه تقریب توابع است. در عمل معمولاً با توابعی سروکار داریم که مقدارشان به ازای بعضی از مقادیر متغیر و آن هم از طریق آزمایش و یا اندازه‌گیری قابل تعیین است. به بیان دقیق مقادیر تابع f به ازای نقاط دو به‌دو متمایز

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

به ترتیب عبارت‌اند از:

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$$

چنین تابعی را **تابع جدولی** نامیم. مانند توابع مثلثاتی، یا تابع لگاریتم و یا تابع تخمین جمعیت در یک جامعه که مقدار آنها به ازای بعضی از مقادیر متغیر در جدولهایی درج شده است.

درونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x_0 < x < x_n$ و

$$x \neq x_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

به عبارت دیگر مقدار تابع $f(x)$ را به ازای x هایی می خواهیم که در جدول نیست ولی بین نقاط جدول موجود است!

به طور مشابه برونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x \notin [x_0, x_n]$.

برای تخمین $f(x)$ وقتی f با جدول زیر داده شده است روش های متفاوتی وجود دارد.

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	...	f_n

یکی از روش ها این است که یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدار آن در x_i به ازای $i = 0, 1, \ldots, n$ ، همان f_i باشد. یعنی داشته باشیم:

$$P(x_i) = f_i \ , \ i = 0, 1, \ldots, n \qquad (1)$$

و بعد به‌جای $f(x)$ ، در بازهٔ $[x_0 , x_n]$ ، با $P(x)$ کار کنیم.

اکنون سؤالاتی به صورت زیر مطرح می‌شود:

الف) چرا یک چندجمله‌ای پیدا می‌کنیم؟ مگر چندجمله‌ای چه خصوصیتی دارد که دیگر توابع ندارند؟

ب) آیا یک چندجمله‌ای که در (۱) صدق کند همیشه وجود دارد؟ و در صورت وجود منحصر به‌فرد است؟

ج) آیا تعیین این چندجمله‌ای برای n های بزرگ عملی است؟

در پاسخ به سؤال (الف)، می‌دانیم که محاسبهٔ یک چندجمله‌ای به ازای مقداری از x با استفاده از روش های معمول و یا روش هورنر کار عملی است. همچنین توابع چندجمله‌ای جزو ساده ترین نوع توابع هستند به طوریکه محاسبهٔ مشتق و انتگرال آنها به سهولت انجام می گیرد.

محاسبه مقدار چندجمله ای $P(z)$ به ازای $z=x$

$$P(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

اگر منظور محاسبهٔ $P(z)$ به ازای $z=x$ باشد از طریق معمولی، یعنی محاسبهٔ تک تک جملات موجود در $P(z)$ و بعد جمع کردن آنها، باید $\frac{n(n+1)}{2}$ ضرب و n جمع انجام دهیم (مثلاً برای محاسبهٔ $a_n \times z^n$ باید n ضرب انجام داد)

$$z^n = z \times z \times \dots \times z \qquad (\text{n-1 ضرب})$$

$$a_n z^n = a_n \times z^n = a_n \times z \times z \times \dots \times z \qquad (\text{n ضرب})$$

$$P(x) = (a_n \times x^n) + (a_{n-1} \times x^{n-1}) + \dots + (a_1 \times x) + a_0$$

روش هورنر با استفاده از روش ضرب تو در تو فقط به n ضرب و n جمع نیازمند است.

$$P(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$ روش مستقیم: ۶ ضرب و ۳ جمع

$$P(x) = ((a_3 \times x + a_2) \times x + a_1) \times x + a_0$$ روش هورنر: ۳ ضرب و ۳ جمع

اگر عملیات را از داخلیترین پرانتز شروع کنید مشاهده می‌شود که به ۳ ضرب و ۳ جمع نیاز داریم. در صورتی که برای محاسبهٔ مستقیم $a_3 \times x^3 + a_2 \times x^2 + a_1 x + a_0$ ۶ ضرب و ۳ جمع باید انجام داد.

در صورت متمایز بودن نقاط، جواب سؤال (ب) مثبت است و همیشه یک چندجمله‌ای منحصر به‌فرد وجود دارد.

چندجمله‌ایهای لاگرانژ

یکی از روشهای تعیین یک چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ n که در (۱) صدق کند، روش لاگرانژ است. در این روش فرض می‌کنیم $L_0(x)$، $L_1(x)$، ... ، $L_n(x)$ هریک، یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشند و داشته باشیم:

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n} L_j(x) f_j = L_0(x)\, f_0 + L_1(x)\, f_1 + \dots + L_j(x)\, f_j + \dots + L_n(x) f_n$$

هدف آن استکه $L_j(x)$ ها را چنان تعیین کنیم که:

$$P(x_i)=f_i \quad , \quad i=0,1,\dots,n$$

برای این منظور به ازای $i=0,1,\dots,n$ باید داشته باشیم:

$$P(x_i)=L_0(x_i) f_0+\dots+L_j(x_i) f_j+\dots+L_n(x_i) f_n$$

لذا، کافی است داشته باشیم:

$$\begin{cases} L_j(x_i)=0 & , i\neq j \\ L_j(x_j)=1 & , i=j \end{cases}$$

اگر تعریف کنیم:

$$L_j(x)=\prod_{i=0,i\neq j}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

در این صورت:

$$L_j(x_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

چندجمله‌ایهای درجهٔ n بالا به چندجمله‌ایهای لاگرانژ معروف‌اند.

مثال چندجمله‌ای $P(x)$ را که مربوط به تابع جدولی زیر است حساب کنید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

حل: در این مثال $n=۲$ و در نتیجه چندجمله‌ایهای لاگرانژ از درجهٔ دو بوده و عبارتند از:

$$L_۰(x)=\prod_{i=0,i\neq 0}^{2}\left(\frac{x-x_i}{x_0-x_i}\right)=\frac{(x-x_۱)(x-x_۲)}{(x_۰-x_۱)(x_۰-x_۲)}=\frac{(x-۰)(x-۱)}{(-۱-۰)(-۱-۱)}=\frac{x^۲-x}{۲}$$

$$L_۱(x)=\frac{(x-x_۰)(x-x_۲)}{(x_۱-x_۰)(x_۱-x_۲)}=\frac{(x+۱)(x-۱)}{(۰+۱)(۰-۱)}=\frac{x^۲-۱}{-۱}$$

$$L_۲(x)=\frac{(x-x_۰)(x-x_۱)}{(x_۲-x_۰)(x_۲-x_۱)}=\frac{(x+۱)(x-۰)}{(۱+۱)(۱-۰)}=\frac{x^۲+x}{۲}$$

از این رو،

$$P(x)=\sum_{i=0}^{2}L_i(x)f(x_i)=۱\times L_۰(x)+۱\times L_۱(x)+۳\times L_۲(x)$$

$$=\frac{x^۲-x}{۲}-(x^۲-۱)+\frac{۳(x^۲+x)}{۲}$$

$$=x^۲+x+۱$$

همچنین چندجمله‌ای $P(x)$ را می‌توان به روش ضرایب مجهول نیز به‌دست آورد. فرض می‌کنیم

$$P(x)=ax^۲+bx+c$$

قرار می‌دهیم: $P(-۱)=۱\ ,\ P(۰)=۱\ ,\ P(۱)=۳$

که درنتیجه یک‌دستگاه سه‌معادله، سه مجهول حاصل‌می‌شود که جواب آن عبارتست از:

$$a=b=c=۱$$

اما در عمل n می‌تواند بزرگ باشد که در نتیجه حل یک دستگاه شامل $(n+۱)$ معادله و $(n+۱)$ مجهول را با اشکالاتی مواجه می‌کند.

مثال با اضافه کردن نقطهٔ $(۲,۷)$ به تابع جدولی مثال قبل مجدداً چندجمله‌ای $P(x)$ را حساب کنید.

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	۱	۱	۳	۷

حل: در این مثال $n=3$ و چندجمله‌ایهای لاگرانژ همه از درجهٔ ۳ هستند. به ترتیبی که:

$$L_0(x) = \prod_{i=0, i\neq 0}^{3} \left(\frac{x-x_i}{x_0-x_i}\right) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x^3-x}{6}$$

در نتیجه چندجمله‌ای $P(x)$ عبارت است از:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f(x_i) = 1\times L_0(x) + 1\times L_1(x) + 3\times L_2(x) + 7\times L_3(x)$$

$$= \frac{x^3-3x^2+2x}{-6} + \frac{x^3-2x^2-x+2}{2} + \frac{3(x^3-x^2-2x)}{-2} + \frac{7(x^3-x)}{6}$$

که پس از ساده کردن نتیجه می‌شود:

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

مشاهده می‌شود که $P(x)$ از درجهٔ ۲ است ولی $L_i(x)$ ها از درجهٔ ۳ هستند.
ضمناً از محاسبات مربوط به مثال قبلی کمتر استفاده شد. یعنی، با اضافه کردن یک نقطه به جدول باید تقریباً تمام محاسبات را مجدداً انجام دهیم. حجم عملیات نیز با افزایش n افزایش می یابد. در ضمن درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب قبل از تعیین کامل آن معلوم نمی‌شود.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که چندجمله‌ای $P(x)$ که در رابطه درونیابی صدق می‌کند منحصر به‌فرد است.

قضیه

فقط یک چندجمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجهٔ n، وجود دارد که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$P(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

برهان

اولاً این چندجمله ای وجود دارد و لااقل با استفاده از روش لاگرانژ می توان آن را ساخت.
کافی است ثابت کنیم $P(x)$ منحصر به‌فرد است. این مطلب را با برهان خلف ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $Q(x)$ چندجمله‌ای دیگری حداکثر از درجهٔ n باشد به قسمی که

$$Q(x_i)= f_i \quad , \quad i= 0, 1, \ldots, n.$$

در این صورت اگر قرار دهیم:

$$R(x) := P(x) - Q(x)$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$R(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = f_i - f_i = 0 \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

یعنی، معادلهٔ $R(x) = 0$، که حداکثر از درجهٔ n است، دارای $n+1$ ریشهٔ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ است. از طرفی با استفاده از قضیه اساسی جبر یک چندجمله‌ای درجهٔ n حداکثر n ریشه دارد، لذا نتیجه می‌گیریم که:

$$R(x) \equiv 0$$

یعنی، $Q(x) \equiv P(x)$ که خلاف متمایز بودن $P(x)$ و $Q(x)$ است. بنابراین، فقط یک چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ n وجود دارد که در نقاط x_i مقادیر f_i را اختیار می‌کند.

تعریف چندجمله‌ای منحصر به‌فرد $P(x)$ که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$P(x_i)= f_i \quad , \quad i= 0, 1, \ldots, n$$

چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط x_0، x_1، ...، x_n نامیده می‌شود.

روش لاگرانژ برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب تنها از لحاظ نظری مورد توجه است و همان‌گونه که نشان داده شد از لحاظ عددی دارای اشکالاتی است.

۱ـ محاسبات این روش، وقتی n خیلی هم بزرگ نباشد، زیاد است.

۲ـ درجهٔ چندجمله‌ای درونیاب بعد از انجام تمام محاسبات تعیین می‌شود و با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط جدولی باید تقریباً تمام عملیات را از سر گرفت.