

تکلیف سری اول

طراحی الگوریتم

دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. پاییز ۱۴۰۳

۱. در مسئله ازدواج پایدار، اگر m نفر اول در لیست w باشد و w نفر اول در لیست m باشد در هر ازدواج پایدار زوج (m, w) وجود دارد. چرا؟

۲. فرض کنید در مسئله ازدواج پایدار مقداری آزادی به افراد بدهیم و به افراد این امکان را بدهیم که از طرف مقابل تعدادی را به عنوان غیر قابل قبول اعلام کنند. مثلاً w_1 به هیچ وجه حاضر نیست با m_3 یا m_7 ازدواج کند. یا مثلاً m_2 اصلاً زیر بار ازدواج با w_6 نمی‌رود. در این حالت شرایطی را بررسی کنید که یک تطابق پایدار می‌تواند وجود داشته باشد. در صورت وجود، آیا می‌توان یک تطابق پایدار را سریع پیدا کرد؟

۳. نشان دهید اگر $f(n) = O(d(n))$ و $g(n) = O(t(n))$ آنگاه $f(n)g(n) = O(d(n)t(n))$

۴. توابع زیر را بر اساس تحلیل مجانبی مرتب کنید.

| | | | | |
|-------------|--------------------------|-------------------------------|--------------|-----------------|
| $6n \log n$ | 2^{100} | $\log \log n$ | $\log^2 n$ | $2^{\log n}$ |
| 2^{2^n} | $\lceil \sqrt{n} \rceil$ | $n^{0.01}$ | $1/n$ | $4n^{3/2}$ |
| $3n^{0.5}$ | $5n$ | $\lfloor 2n \log^2 n \rfloor$ | 2^n | $n \log_4 n$ |
| 4^n | n^3 | $n^2 \log n$ | $4^{\log n}$ | $\sqrt{\log n}$ |

۵. گراف G شامل n راس و m یال است. چگونه در زمان $O(n)$ می‌توان تشخیص داد که G دور دارد یا ندارد؟ (راهنمایی: از DFS استفاده کنید.)

۶. در مسائل زیر G گرافی ساده است که شامل n راس و m یال است. برای هر کدام از موارد زیر یک الگوریتم با زمان $O(n + m)$ ارائه کنید.

(آ) دو یال e_1 و e_2 در گراف G داده شده. الگوریتمی ارائه کنید که تشخیص دهد آیا e_1 و e_2 در یک دور قرار گرفته‌اند یا نه.

(ب) الگوریتمی ارائه کنید که تشخیص دهد G حداقل ۲ دور دارد.

(ج) الگوریتمی ارائه کنید که تشخیص دهد G دقیقاً ۲ دور دارد که یال مشترک هم ندارند.

۷. فرض کنید G یک گراف ۳-رنگ پذیر باشد (یعنی می‌توان رئوسش را با استفاده از ۳ رنگ آمیزی کرد بطوریکه هیچ یالی دو سرش هم‌رنگ نباشد). نشان دهید برای هر راس v در گراف G ، همسایه‌های v و یالهایی که بینشان وجود دارد تشکیل یک گراف دوبخشی را می‌دهند.

۸. از تمرین قبل استفاده کنید و الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای ارائه دهید که یک گراف ۳-رنگ پذیر را با استفاده از $O(\sqrt{n})$ رنگ آمیزی کند. راهنمایی: یک گراف با ماکزیمم درجه Δ را می‌توان با $\Delta + 1$ رنگ آمیزی کرد.