

K. N. Toosi University of Technology

Faculty of Mathematics

Exam 2

Discrete And Combinatorial Mathematics

7 December 2020, 13:30–14:45

A. R. Moghaddamfar



1. جمله عمومی رابطه بازگشتی ناهمگن $a_n = 3a_{n-1} + n$ به ازای $n \geq 1$ و $a_0 = 1$ را بیابید.

(جواب: $a_n = (7/4)3^n - (1/2)n - (3/4)$)

2. رابطه بازگشتی ناهمگن $a_n + a_{n-2} = 14n$ را با شرایط اولیه $a_0 = 3$, $a_1 = 5$ حل کنید.

(جواب: $a_{2n} = 4(-1)^{n+1} + 7 + 14n$, $a_{2n+1} = 9(-1)^{n+1} + 14n + 14$ و یا

$a_n = -4 \cos(n\pi/2) - 9 \sin(n\pi/2) + 7n + 7$.)

3. رابطه بازگشتی همگن $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-3} - a_{n-4} = 0$ را با شرایط اولیه

$a_0 = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 15$ حل کنید. (جواب: $a_n = 3 - 2n + 2n^2$.)

4. تمام اعداد صحیح مثبت n را طوری بیابید که داشته باشیم $\varphi(n) = 12$.

(جواب: $n = 13, 21, 26, 28, 36, 42$.)

5. دنباله لوکاس به شکل بازگشتی به صورت زیر تعریف می شود:

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2.$$

حاصلجمع زیر را بیابید

$$\sum_{i=1}^n L_i^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \cdots + L_n^2.$$

(جواب: $L_n L_{n+1} - 2$)