به یاد بیاورید که برای این که نشان دهیم $P(n)$ برای همه اعداد طبیعی برقرار است این است که نشان دهیم

(۱) $P(1)$ درست است.

(۲) و وقتی $P(n)$ درست است نتیجه بگیریم $P(n+1)$ نیز درست است.

۱-حال چون فرض کرده ایم $P(1)$ درست است پس بنابرقسمت دوم، $P(2)$ نیز درست است.
۲-چون بنابرگام قبل $P(2)$ درست است پس بنابرقسمت دوم $P(3)$ درست است.
۳- چون بنابرگام قبل $P(3)$ درست است پس بنابر قسمت دوم $P(4)$ درست است
و همین طور الی آخر می توانیم نتیجه بگیریم به ازای هر n که $P(n)$ درست است، $P(n+1)$ نیز درست است.

توضیح ۰.۰.۱. لازم به توضیح است که در اصل استقرای ریاضی، این که فرض کنیم $P(1)$ درست است، ضروری نیست بلکه هرعدد صحیح دیگری، حتی یک عدد صحیح منفی، نیز می تواند انتخاب شود(تمرین ۲ مجموعه تمرین های استقرا را ببینید) به شرطی که $P(n_0)$ معنی داشته باشد. به طور دقیق‌تر می توان اصل استقراء را به صورت زیر بیان کرد.

$$[(\exists n_0)P(n_0)] \wedge [(\forall k \geq n_0)[P(k) \Rightarrow P(k+1)]] \Longrightarrow (\forall n > n_0)(P(n)),$$

آنگاه برای هر $n \geq n_0$، گزاره $P(n)$ درست است.

برای این که این حالت را بیشتر تشریح کنیم به مثال های زیر توجه نمایید.
تمرین:

(۸) نشان دهید $2^n \leq n!$.

حل. با آزمایش چند عدد، اولین عدد n ای که به ازای آن $2^n \leq n!$ می شود را پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned}
n = 1 &\Longrightarrow & 2^1 = 2 \geq 1!\\
n = 2 &\Longrightarrow & 2^2 = 4 \geq 2! = 2\\
n = 3 &\Longrightarrow & 2^3 = 8 \geq 3!\\
n = 4 &\Longrightarrow & 2^4 = 16 \leq 4! = 24
\end{aligned}$$

بنابراین اولین عدد ۴ می باشد. حال فرض می کنیم برای $n = k$ داشته باشیم $2^k \leq k!$، نشان می دهیم $2^{k+1} \leq (k+1)!$.
همان طور که گفته شد، سعی می کنیم گام های حل مساله را چنان برداریم که بتوانیم از فرض مساله استفاده کنیم. یعنی از $2^k \leq k!$ و چون $k \geq 4$ پس حتماً $k+1 \geq 4$. درنتیجه

$$2^{k+1} = 2^k \times 2 \leq k! \times 2 \leq k! \times (k+1) = (k+1)!$$

□

(۹) کوچکترین nای که نامساوی $3^n \leq n!$ برقرار است بیابید و بعد نشان دهید این نامساوی برای هر n بزرگتر از این عدد نیز برقرار است.

حل. مشابه آنچه در مساله قبل انجام دادیم، ابتدا با آزمودن چندین عدد کوچکترین nای که $۳^n < n!$ می شود را می یابیم.

$$
\begin{aligned}
n = ۱ &\Longrightarrow & ۳^۱ = ۳ \geq ۱! = ۱ \\
n = ۲ &\Longrightarrow & ۳^۲ = ۹ \geq ۲! = ۲ \\
n = ۳ &\Longrightarrow & ۳^۳ = ۲۷ \geq ۳! = ۶ \\
n = ۴ &\Longrightarrow & ۳^۴ = ۸۱ \geq ۴! = ۲۴ \\
n = ۵ &\Longrightarrow & ۳^۵ = ۲۴۳ \geq ۵! = ۱۲۰ \\
n = ۶ &\Longrightarrow & ۳^۶ = ۷۲۹ \geq ۶! = ۷۲۰ \\
n = ۷ &\Longrightarrow & ۳^۷ = ۲۱۸۷ \leq ۷! = ۵۰۴۰ \\
n = ۸ &\Longrightarrow & ۳^۸ = ۶۵۶۱ \leq ۸! = ۴۰۳۲۰
\end{aligned}
$$

بنابراین اولین عدد $n = ۷$ می باشد. برای اعداد بعدی ملاحظه می شود که نامساوی مورد نظر برقرار است. حال فرض کنیم برای $k > ۷$ داشته باشیم $۳^k \leq k!$. اگر بتوانیم از این فرض نتیجه بگیریم $۳^{k+۱} \leq (k+۱)!$ است آنگاه می توانیم ادعا کنیم برای هر $n \geq ۷$ می توان نوشت $۳^n \leq n!$. باز مراحل حل مساله را چنان به پیش می بریم که بتوان از فرض استقرا، یعنی $۳^k \leq k!$ استفاده نماییم. همچنین $۳ < ۷ < k$. بنابراین $۳ < k + ۱$ است.

$$۳^{k+۱} = ۳^k \times ۳ \leq k! \times ۳ \leq k! \times (k+۱) = (k+۱)!.$$

$\square$ برای دومساله ۱۰ و ۱۲ نیز مشابه آنچه در دومساله قبل انجام دادیم به نتیجه می رسد.

(۱۰) کوچکترین nای که به ازای آن نامساوی $۵^n \leq n!$ برقرار است را بیابید و بعد نشان دهید این نامساوی به ازای هر n بزرگتر از این عدد نیز برقرار است.

(۱۱) کوچکترین nای که به ازای آن نامساوی $۷^n \leq n!$ برقرار است را بیابید و بعد نشان دهید این نامساوی به ازای هر n بزرگتر از این عدد نیز برقرار است.

مساله بعدی برخلاف مساله های قبلی پایه توان طرف اول نامساوی هم تغییر می کند.

(۱۲) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، نامساوی $n! \leq n^n$ برقرار است.

حل. به طور مشابه برای اعداد ۱ به بعد حکم استقرا را می آزماییم.

$$
\begin{aligned}
n = ۱ &\Longrightarrow & ۱! = ۱ \leq ۱^۱ = ۱ \\
n = ۲ &\Longrightarrow & ۲! = ۲ \leq ۲^۲ = ۴ \\
n = ۳ &\Longrightarrow & ۳! = ۳ \leq ۳^۳ = ۸۱
\end{aligned}
$$

پس فرض کنیم برای k، داشته باشیم $k! \leq k^k$. مجدداً برای نشان دادن $(k+۱)! \leq (k+۱)^{k+۱}$ گام های حل مساله را چنان بر می داریم تا بتوانیم از فرض استقرا استفاده کنیم. یعنی از فرض $k! \leq k^k$ استفاده می کنیم.

$$(k+۱)! = k! \times (k+۱) \leq k^k \times (k+۱) \leq (k+۱)^k \times (k+۱) = (k+۱)^{k+۱}$$

بنابراین توانستیم از درستی $k! \leq k^k$ درستی $(k+۱)! \leq (k+۱)^{k+۱}$.

روش دیگر برای به دست آوردن آخرین گام، طرفین $k! \leq k^k$ را در $k+۱$ ضرب می کنیم. یعنی

$$k! \leq k^k \Longrightarrow \qquad k! \times (k+۱) = (k+۱)! \leq k^k \times (k+۱)$$

اما چون $k < k+۱$ پس $k^k \leq (k+۱)^k$. بنابراین

$$(k+۱)! \leq k^k \times (k+۱) \Longrightarrow \qquad (k+۱)! \leq (k+۱)^k \times (k+۱) = (k+۱)^{k+۱}$$

□