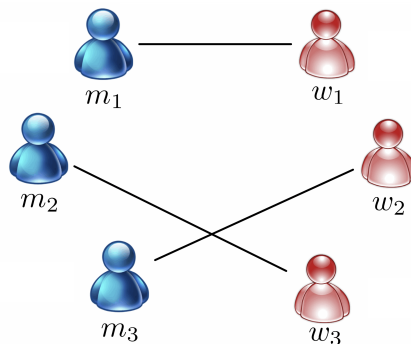


## الگوریتمی برای ازدواج پایدار

### ۱ توصیف مسئله

فرض کنید  $M = \{m_1, \dots, m_n\}$  مجموعه  $n$  مرد و  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$  مجموعه  $n$  زن باشند. یک تطابق میان  $M$  و  $W$  زیرمجموعه‌ای از  $M \times W$  بطوریکه هیچ دو زوج در این زیرمجموعه اشتراک نداشته باشند. به عبارت دیگر، هر مرد تنها با یک زن تشکیل یک زوج دهد و بالعکس آن نیز صادق باشد (هر زن تنها با یک مرد تشکیل یک زوج دهد). شکل زیر یک تطابق میان مجموعه زنان و مردان را نشان می‌دهد.



سوال: چند تطابق مختلف میان زنان و مردان قابل تعریف است؟

حال فرض کنید هر مرد، مجموعه زنان را بر حسب میزان تمایل به ازدواج با آنها مرتب کرده باشد. همین طور هر زن مجموعه مردان را بر حسب میزان تمایل به ازدواج با آنها مرتب کرده است. به عبارت دیگر، هر  $m_i \in M$  مجموعه  $W$  را به دلخواه خود مرتب کرده است. همچنین هر  $w_i \in W$  مجموعه  $M$  را به دلخواه خود مرتب کرده است. برای مثال لیستهای علاقه‌مندی می‌تواند بصورت زیر باشند.

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$
$w_1$	$w_2$	$w_2$	$m_1$	$m_1$	$m_3$
$w_3$	$w_3$	$w_1$	$m_2$	$m_3$	$m_2$
$w_2$	$w_1$	$w_3$	$m_3$	$m_2$	$m_1$

تعریف: یک تطابق پایدار (یا ازدواج پایدار) تطابقی است که در آن هیچ زوج مرد و زنی (هر دو با هم) تمایل نداشته باشند که پیوند کنونی خود را ترک کرده و یک زوج جدید تشکیل دهند.

برای مثال، شکل بالا یک ازدواج پایدار را نشان می‌دهد. اگرچه  $m_2$  تمایل دارد که با  $w_2$  باشد ولی  $w_2$  همسر کنونی خود را به  $m_2$  ترجیح می‌دهد. همین رابطه در مورد  $m_3$  و  $w_3$  هم صادق است.

سوال: آیا همیشه یک ازدواج پایدار وجود دارد؟

**سوال:** در صورت وجود ازدواج پایدار آیا می‌توان آن را با یک الگوریتم سریع پیدا کرد؟

این مسئله تحت عنوان مسئله ازدواج پایدار stable marriage شناخته شده است. در ادامه الگوریتم گیل-شاپلی Gale - Shapley را برای پیدا کردن یک ازدواج پایدار ارائه می‌کنیم. از این الگوریتم نتیجه می‌شود که هر دو سوال بالا جواب مثبت دارند.

## ۲ الگوریتم گیل - شاپلی برای ازدواج پایدار

توصیف سطح بالای الگوریتم گیل - شاپلی بصورت زیر است:

۱. در آغاز همه زنان و مردان مجرد هستند.
۲. تا زمانی که مردی مجرد وجود دارد که به خواستگاری همه زنان نرفته است، اعمال زیر را انجام بده:
  - (آ) فرض کنید  $m$  چنین مردی باشد.
  - (ب) فرض کنید  $w$  بالاترین زنی باشد در لیست  $m$  که هنوز  $m$  به خواستگاری آن نرفته است.
  - (ج) اگر  $w$  مجرد است، زوج  $(m, w)$  ایجاد می‌شود.
  - (د) در غیر این صورت،  $w$  با مردی قبلاً ازدواج کرده است. دو حالت وجود دارد:
    - $w$  همسر کنونی خود را به  $m$  ترجیح می‌دهد. در این حالت  $m$  مجرد می‌ماند.
    - $m, w$  را به همسر کنونی خود ترجیح می‌دهد. در این حالت زوج جدید  $(m, w)$  ایجاد می‌شود و همسر قبلی  $w$  مجرد می‌شود.
۳. فرض کنید  $S$  مجموعه زوجهای موجود در انتهای حلقه بالا باشد.  $S$  را به عنوان جواب گزارش کن.

## ۳ تحلیل الگوریتم گیل - شاپلی

در زیر حرف  $w$  را برای زن و  $m$  را برای مرد بکار می‌بریم.

**نکته ۱:**  $w$  از زمانی که برای اولین بار ازدواج می‌کند تا انتهای الگوریتم در حالت ازدواج باقی می‌ماند (هیچگاه به وضعیت مجرد باز نمی‌گردد).

**نکته ۲:** دنباله نامزدهای  $w$  در طول الگوریتم بهتر و بهتر می‌شوند.

**نکته ۳:** دنباله زنانی که  $m$  به خواستگاری آنها می‌رود در طول الگوریتم بدتر و بدتر می‌شوند.

**لم ۱:** حلقه اصلی الگوریتم (اعمال دستور ۲) حداکثر  $n^2$  بار اجرا می‌شود.  
**اثبات:**  $n$  مرد داریم و هر مرد حداکثر به خواستگاری  $n$  زن می‌رود. پس حلقه اصلی حداکثر  $n^2$  بار اجرا می‌شود.

**لم ۲:** اگر  $m$  در مرحله‌ای از الگوریتم مجرد باشد، آنگاه حتماً زنی وجود دارد که به خواستگاری‌اش نرفته است.

اثبات: فرض کنید که مردی مجرد وجود دارد که به خواستگاری همه زن‌ها رفته باشد. بنا به نکته ۱ در این نقطه همه زنان باید متاهل باشند. اما چون حداقل یک مرد مجرد داریم این امکان پذیر نیست. □

نتیجه: الگوریتم گیل - شاپلی یک تطابق میان مردان و زنان را برمی‌گرداند. به عبارت دیگر خروجی الگوریتم  $S$  یک تطابق است.

قضیه: جواب الگوریتم گیل شاپلی یک تطابق پایدار است.

اثبات: فرض کنید که خروجی الگوریتم یک تطابق پایدار نباشد. یعنی زوج‌های  $(m, w)$  و  $(m', w')$  در  $S$  هستند بطوریکه

•  $m, w'$  را به  $w$  ترجیح می‌دهد.

•  $m, w'$  را به  $m'$  ترجیح می‌دهد.

براحتی می‌توان دید که آخرین پیشنهاد ازدواج  $m$  به  $w$  بوده است. حال می‌پرسیم آیا قبل از تشکیل زوج  $(m, w)$  آیا  $m$  به خواستگاری  $w'$  رفته است؟ اگر نرفته باشد تناقض پیش می‌آید. چون طبق الگوریتم هر مرد به ترتیب لیست خود به خواستگاری زنان می‌رود. چون  $m, w'$  را به  $w$  ترجیح می‌دهد پس باید قبل از خواستگاری از  $w$  به خواستگاری  $w'$  رفته باشد. حال بیایید فرض کنیم  $m$  به خواستگاری  $w'$  رفته باشد. حتما خواستگاری  $m$  رد شده است. لابد  $w'$  در ازدواج با مردی بوده که او را به  $m$  ترجیح داده است. بنا به نکته ۱ همسر زنان بهتر و بهتر می‌شوند. پس همسر نهایی  $w'$  یعنی  $m'$  باید از دید  $w'$  بهتر از  $m$  باشد. اما این با فرض ما مبنی بر ناپایدار بودن ازدواج در تناقض است. پس در هر صورت تناقض پیش می‌آید. در نتیجه  $S$  پایدار است. □

### ۱.۳ کیفیت جواب الگوریتم گیل - شاپلی

سوال: آیا امکان دارد چند تطابق پایدار داشته باشیم؟  
جواب: بله. برای مثال سه تطابق پایدار برای مثال زیر وجود دارد.

$A$	$B$	$C$	1	2	3
2	3	1	$B$	$C$	$A$
1	2	3	$A$	$B$	$C$
3	1	2	$C$	$A$	$B$

یک تطابق پایدار:  $(A, 2), (B, 3), (C, 1)$

یک تطابق پایدار دیگر:  $(A, 1), (B, 2), (C, 3)$

یک تطابق پایدار دیگر:  $(A, 3), (B, 1), (C, 2)$

تطابق پایدار اول به سود  $A$  و  $B$  و  $C$  است در حالیکه تطابق پایدار سوم به سود 1 و 2 و 3 است.

سوال: آیا جواب الگوریتم گیل - شاپلی به نفع یکی از طرفین است؟

جواب: بله. الگوریتم گیل - شاپلی کاملاً به نفع مردان عمل می‌کند. در زیر به تحلیل این مسئله می‌پردازیم.

تعریف: اگر زوج  $(m, w)$  در یک تطابق پایدار باشد، آنگاه می‌گوییم که  $w$  یک شریک معتبر برای  $m$  است. به همین طریق،  $m$  یک شریک معتبر برای  $w$  است.

در مثال بالا، هر سه 1 و 2 و 3 شرکای معتبر  $A$  هستند چون برای هر کدام یک تطابق پایدار وجود دارد که  $A$  در آن با آنها تشکیل زوج داده است.

تعریف:  $best(m)$  را بهترین شریک معتبر  $m$  تعریف می‌کنیم. (از دیدگاه  $m$ )

**قضیه:** در انتهای الگوریتم گیل - شاپلی هر مرد با بهترین شریک معتبر خود ازدواج کرده است. به عبارت دیگر هر  $m$  با  $best(m)$  ازدواج کرده است.

**اثبات:** فرض کنید این اتفاق رخ نداده و یک  $m$  وجود دارد که در انتهای الگوریتم با  $best(m)$  ازدواج نکرده است. فرض کنید  $w = best(m)$  باشد. چون مردان به ترتیب علاقه از خوب به بد پیشنهاد ازدواج می‌دهند، پس حتما زمانی  $m$  توسط  $w$  رد شده یا ترک شده است. می‌توانیم فرض کنیم که این اولین باری است که یک شریک معتبر جواب رد می‌دهد. پس  $m$  اولین مردی است که توسط یک شریک معتبر خود در اجرای الگوریتم رد شده (یا ترک شده) است. در هر صورت پای یک مرد دیگر ( $m'$  مثلا) در میان است. پس نقطه‌ای از الگوریتم وجود دارد که  $w$ ،  $m'$  را به  $m$  ترجیح داده است. به عبارت دیگر

$$m' >_w m \quad (1)$$

از طرف دیگر چون  $w$  یک شریک معتبر برای  $m$  است پس یک ازدواج پایدار وجود دارد که شامل  $(m, w)$  است. اسم این ازدواج پایدار را  $S'$  می‌گذاریم. در این ازدواج پایدار فرض می‌کنیم  $m'$  با  $w'$  ازدواج کرده است. پس  $S'$  شامل دو زوج زیر است.

$$(m, w), (m', w')$$

چون  $S'$  پایدار است، بایستی  $w'$  یک شریک معتبر برای  $m'$  باشد. از این نتیجه می‌شود که  $m'$ ،  $w$  را به  $w'$  ترجیح داده است. چرا؟ فرض کنید خلاف این باشد و  $m'$  شخص  $w'$  را به  $w$  ترجیح بدهد. لذا طبق منطق الگوریتم اول سراغ  $w'$  می‌رود. اما در نهایت می‌بینیم که بعدا با  $w$  ازدواج کرده است. پس حتما قبلش توسط  $w'$  ترک شده یا پیشنهادش رد شده است. اما ما فرض کردیم که  $m$  اولین مردی است توسط یک شریک معتبر رد می‌شود یا ترک می‌شود. نتیجه اینکه  $m'$  حتما  $w$  را به  $w'$  ترجیح داده است. به عبارت دیگر

$$w >_{m'} w' \quad (2)$$

(1) و (2) را که کنار هم بگذاریم، نتیجه می‌شود که  $S'$  ناپایدار است. این در تناقض با فرض پایدار بودن  $S'$  است. پس حکم قضیه درست است.  $\square$

به همین طریق می‌توان نشان داد که در پایان الگوریتم هر زن با بدترین شریک معتبر خود ازدواج کرده است.