

חקירת בעירת להבות תרסיס רב-גדלי דיפוזיביות וכיבוי בזרימות מקבילות

מאת: יצחק שטאובר

חקירת בעירת להבות תרסיס רב-גדלי דיפוזיביות וכיבוי בזרימות מקבילות

חיבור על עבודת גמר

לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת התואר
מגיסטר למדעים בהנדסת אווירונאוטיקה וחלל (עם תזה)

יצחק שטאובר

הוגש לסנט הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
ניסן, תש"ע חיפה מרץ, 2010

הבעות תודה

עבודת הגמר נעשתה בהנחיית פרופסור ג'.ב. גרינברג
בפקולטה להנדסת אווירונאוטיקה וחלל. אני מודה לפרופסור
גרינברג על הנחייתו המקצועית, על תמיכתו האקדמית ועל
יחסו האדיב.

אני מודה לטכניון על התמיכה הכספית הנדיבה
בהשתלמותי.

אני מודה לנאוות ביתי על תמיכתה ועידודה.

אני מודה להורי על עזרתם.

אני מודה לקב"ה, סיבת כל הסיבות.

תוכן עניינים

1	תקציר
3	רשימת סמלים וקיצורים
8	פרק 1 – מבוא ורקע ספרות
8	מבוא
10	סקר ספרות - כללי
11	היווצרות התרסיס וסיווג אזורי קיומו
16	תנועת התרסיס והאינטראקציה עם הסביבה הגזית
18	תהליך האידוי של טיפות התרסיס
22	זרימת המרכיבים הכימיים והמנגנונים השולטים באופי הבעירה
25	תהליכי שריפה בפאזה הגזית
27	פתרון מבנה האזור הפנימי של הלהבה הדיפוזיבית
28	העבודה הנוכחית- מטרתה וחשיבותה
30	פרק 2 - המשוואות השולטות
30	הקדמה כללית
35	משוואות התרסיס
41	משוואות הפאזה הגזית
47	משוואת הטמפרטורה
54	פרק 3 - פתרון אנליטי עבור משוואות השולטות ותוצאות טיפוסיות
54	פתרון משוואת התרסיס
57	פתרון משוואת הפאזה הגזית
69	פתרון משוואת הטמפרטורה
75	תוצאות טיפוסיות
90	פרק 4 – כיבוי שיא הלהבה
92	הקדמה
93	הפתרון החיצוני
98	פתרון המבנה הפנימי של הלהבה
109	תנאי הכיבוי של Liñan
111	תוצאות טיפוסיות
121	פרק 5 – סיכום והצעות להמשך המחקר
121	סיכום
122	הצעות להמשך המחקר
123	מקורות
126	נספח א'- תוכנית המחשב לפתרון שדה הזרימה ותנאי הכיבוי

רשימת טבלאות וציורים

רשימת איורים

- איור 1-1: הדגמה של מזרק לחץ ומזרק "2 זורמים" 11
איור 1-2: המחשת היווצרות אזור האטומיזציה ו"השדה הקרוב" 13
איור 1-3: תיאור סכמטי של אזור האטומיזציה ואזור "השדה הקרוב" 14
איור 1-4: תיאור סכמטי של אזורי "השדה הקרוב" ו"השדה הרחוק" 15
איור 1-5: דוגמא נומרית ללהבת תרסיס דיפוזיבית בזרימה נגדית. קוטר טיפות ממוצע: $74.2 \mu\text{m}$ 21
איור 1-6: תיאור סכמטי של להבה למינרית ולהבה טורבולנטית 23
איור 1-2: תיאור סכמטי של להבת תרסיס למינרית דיפוזיבית בזרימה מקבילית 31

רשימת טבלאות

- טבלה 1-3: חלוקת החתכים ע"פ קוטר מרבי ומזערי 75
טבלה 2-3: שלושה פילוגי טיפות התחלתיים בעלי $\text{SMD}=44.8$ 81

רשימת גרפים

- גרף 1-3: היסטוגרמה של פילוג טיפות התחלתי 76
גרף 2-3: השברים המסיים המנומלים של החתכים במורד הזרימה 76
גרף 3-3: חזית הלהבה ושדה הטמפרטורה – השוואה בין מודל חד-חתכי ומודל רב-חתכי 77
גרף 4-3: גובה הלהבה כנגד מקדם האידי המנומל לכמות דלק נוזלי משתנה – מודל רב-חתכי 78
גרף 5-3: גובה הלהבה כנגד מקדם האידי המנומל לכמות דלק נוזלי משתנה – מודל חד-חתכי 80
גרף 6-3: שלושה פילוגי טיפות התחלתיים בעלי $\text{SMD}=44.8$ 82
גרף 7-3: גובה הלהבה כנגד מקדם האידי המנומל וכמות דלק נוזלי - פילוג טיפות משתנה 83-84
גרף 8-3: גובה הלהבה כנגד מקדם האידי המנומל לגודל טיפות משתנה 85
גרף 9-3: טמפרטורת שיא הלהבה כנגד מקדם האידי המנומל לגודל טיפות משתנה 86
גרף 10-3: טמפרטורת שיא הלהבה כנגד מקדם האידי המנומל לכמות דלק נוזלי משתנה 87
גרף 11-3: טמפרטורת מרכז הלהבה במורד הזרימה למקדם אידי מנומל משתנה 88
גרף 1-4: מפת כיבוי עבור תרסיס חד-חתכי 111
גרף 2-4: רגישות מפת הכיבוי לגודל טיפות התרסיס 113
גרף 3-4: שלושה פילוגי טיפות התחלתיים בעלי $\text{SMD}=44.8$ 114
גרף 4-4: מפת כיבוי עבור תרסיסים רב-חתכיים שונים, $\text{Pe}=10$ 115
גרף 5-4: מפת כיבוי עבור תרסיסים רב-חתכיים שונים, $\text{Pe}=100$ 117
גרף 6-4: מפת כיבוי עבור טמפרטורות שפעול משתנה, $\text{Pe}=10$ 119
גרף 7-4: מפת כיבוי עבור מקדם ריאקציה משתנה, $\text{Pe}=10$ 119

תקציר

הבנת התנהגותן של להבות הינו נושא מרכזי בתכנון ושיפור תהליכי שריפה באפליקציות בעירה רבות וביניהן במנועי סילון. בדרך כלל הבעירה היא טורבולנטית. שיטה נפוצה למידול מבנה להבה טורבולנטית מבוססת על הצגתה כאוסף של 'להבונות' למינריות (Laminar flamelets). ביישומים רבים בהנדסת בעירה הדלק (ולעתים המחמצן) מוזרק בצורה של תרסיס עדין ורב-גדלי ולכן בהתאם לכך מודל של הבעירה הטורבולנטית צריך להתבסס על מודל 'להבונות' למינריות מוזרקות תרסיס דלק. בהקשר זה חשוב מאד לבחון את תנאי כיבוי/קיום השיא של 'להבונות' אלה שכן לכיבוי שיא הלהבה ישנן השלכות של פגיעה ביעילות הבעירה, ייצור תוצרים הגורמים לפיוח המנוע ולזיהום הסביבה.

בסימפוזיון בנושא "שריפה" שנערך לפני כ- 80 שנה פורסם מאמר בשם "Diffusion Flames" ע"י המחברים: S.P. Burke & T.E.W. Schumann. המאמר דן בהתנהגות הלהבה דיפוזיבית במקרה של שני צינורות קונצנטריים אשר בפנימי זורם גז בערה הנפלט לצינור החיצוני בו זורם אוויר. המחברים, תחת הנחות מסוימות, מציעים פתרון אנליטי למשטח פני הלהבה. תוצאות הפתרונות האנליטיים הושוו לתוצאות ניסויי מעבדה והתקבלה התאמה טובה.

ב-1989 הוצגה עבודה על בסיס המחקר הנ"ל אלא שבמקום גז בערה המוזרם בצינור הפנימי מוזרק תרסיס דלק, בהתאם לאופי הפעולה של מנועי סילון למיניהם. לשם הפישוט המתמטי, העבודה האחרונה מניחה פילוג אחיד של גודל טיפות הדלק למרות שתרסיס טיפות מציאותי הינו רב-גדלי.

בעבודה הנוכחית מוצג מודל חדש של להבת תרסיס רב-גדלי למינרית ודיפוזיבית בזרימה מקבילית. מטרת העבודה הינה להבין כיצד רב-גדליות התרסיס משפיעה על הבעירה בתצורה קלאסית זו. לצורך כך פותחו פתרונות אנליטיים עבור השבר המסי של טיפות התרסיס, השבר המסי של המגיבים בפאזה הגזית וטמפרטורת השדה. כמו-כן בוצעה אנליזה למבנה הפנימי של הלהבה לבחינת הכיבוי באזור שיא הלהבה. תוצאות מחושבות מצביעות על

רגישות תכונות הלהבות וכיבוי לפרמטרים המאפיינים את תרסיס הדלק הרב-גדלי, בדגש על פילוג גודל טיפות התרסיס גם כאשר נשמר גודל ממוצע של הטיפות. המסקנה המתבקשת היא ששימוש במודל רב גדלי המאפשר תיאור קרוב יותר למציאות של התרסיס הינו הכרחי בחקירת להבות תרסיס דיפוזיביות.

רשימת סמלים וקיצורים

אותיות לטיניות

$[-]$	B – מקדם איבר הריאקציה הבלתי ממדי
$[mol/sec]$	\tilde{B} – הגורם הקדם מעריכי (חוק ארניוס)
$[1/sec]$	$B_{i,i+1}$ – מקדם אינטגרלי של חתך i
$[1/sec]$	C_i – מקדם אינטגרלי של חתך i
$[J/(Kg \cdot K)]$	C_p – מקדם קיבול החום הסגולי בלחץ קבוע
$[-]$	c – חצי רוחב תעלה פנימית
$[m^2/sec]$	D – מקדם דיפוסיה מסי
$[m]$	d – קוטר טיפה
$[m^2/sec]$	E – מקדם האידוי לטיפה בודדת
$[m^2]$	\bar{E} – מקדם האידוי המנורמל לטיפה בודדת
$[J]$	E_a – אנרגיית השפעול ("אקטיביזציה") של הדלק
$[m/sec^2]$	F – תאוצת הגרר הפועלת על הטיפות
$[m^2/sec]$	K – מקדם דיפוסיה תרמי
$[mol/sec]$	k – מקדם קצב התגובה הכימית (משוואת ארניוס)
$[m]$	L – חצי רוחב התעלה הפנימית
$[m]$	\tilde{L} – אורך אופייני
$[-]$	m – שבר מסי (ללא מציין- משתנה Schwab-Zeldovich)
$[Kg/(m^2 \cdot sec)]$	\dot{m}_A – שטף מסי של רכיב A
$[-]$	N – מספר החתכים בתרסיס
$[Droplets]$	n – פונקציית הסתברות של התפלגות טיפות התרסיס
$[תלוי בהגדרה]$	Q – תכונה אינטגרלית של חתך
$[J/(m^2 \cdot sec)]$	q – שטף חום (ספיקה ליחידת שטח)

$[J]$	\tilde{q}_{reac} - חום הנובע מהריאקציה
$[J/Kg]$	\bar{q} - חום ליחידת מסה
$[m]$	R - חצי רוחב התעלה החיצונית
$[J/(K \cdot mol)]$	\dot{R} - קבוע הגזים האוניברסאלי
$[m^3/sec]$	\tilde{R} - קצב שינוי נפח טיפה כתוצאה מאידוי
$[1/sec]$	S - איבר מקור / בור של מסה
$[K/sec]$	\tilde{S} - איבר מקור / בור חום
$[1/sec]$	S_d - קצב אידוי הטיפות / קצב היווצרות אדי הדלק
$[-]$	\bar{S}_d - קצב אידוי הטיפות / קצב היווצרות אדי הדלק - בלתי ממדי
$[-]$	S_F - זליגת דלק גזי מאזור הריאקציה אל אזור המחמצן
$[-]$	S_O - זליגת מחמצן מאזור הריאקציה אל אזור הדלק
$[-]$	T - טמפרטורה בלתי ממדית
$[K]$	\dot{T} - טמפרטורה
$[K]$	\dot{T}_{ref} - טמפרטורת ייחוס
$[sec]$	$t - t_{זמן}$
$[m/sec]$	U - מהירות
$[-]$	V - שבר מסי התחלתי מנורמל של המחמצן
$[m^3]$	v - נפח טיפות התרסיס
$[m]$	x - קואורדינאטה קרטזית בכיוון ניצב לזרימה
$[m]$	y - קואורדינאטה קרטזית בכיוון הזרימה
$[-]$	Z - משתנה משוואת Liñan

אותיות יווניות

α	– מקדם בהגדרת התכונה האינטגרלית	[–]
Γ	– קצב היווצרות טיפות עקב התנגשות בין הטיפות	[Droplets/sec]
γ	– שבר מסי מנורמל (ללא מציין- משתנה Schwab-Zeldovich מנורמל)	[–]
$\hat{\gamma}$	– מעריך בהגדרת התכונה האינטגרלית	[–]
$\bar{\gamma}$	– משתנה במשוואת Liñan	[–]
γ_d	– שבר מסי מנורמל של טיפות הדלק	[–]
γ_F	– שבר מסי מנורמל של אדי הדלק	[–]
γ_0	– שבר מסי מנורמל של המחמצן	[–]
γ_T	– משתנה של Schwab-Zeldovich של משוואת הטמפרטורה	[–]
Δ	– מספר Damköhler לאידוי	[–]
Δ_i	– מקדם אינטגרלי של חתך i	[–]
δ	– שבר מסי התחלתי מנורמל של הדלק הנוזלי	[–]
$\tilde{\delta}$	– משתנה במשוואת Liñan	[–]
δ_E	– משתנה תנאי הכיבוי של Liñan	[–]
ε	– הפרמטר הקטן בפיתוח האסימפטוטי	[–]
ζ	– קואורדינאטה באזור הפנימי של הלהבה מקבילה לכיוון הזרימה	[–]
η	– קואורדינאטה קרטזית מנורמלת בכיוון הזרימה	[–]
θ	– מספר Zeldovich	[–]
Λ	– חום כמוס מנורמל בחום מהריאקציה	[–]
λ	– מקדם מוליכות תרמית	[W/(m · K)]
ν	– מקדם סטוכיומטרי	[–]
ξ	– קואורדינאטה קרטזית מנורמלת בכיוון ניצב לזרימה	[–]
ρ	– צפיפות	[Kg/m ³]

$[N/m]$	σ – מקדם מתח פנים של נוזל
$[-]$	τ - טמפרטורה מסדר $O(\varepsilon)$ במבנה הפנימי של הלהבה
$[-]$	Ψ – משתנה משוואת Liñan
$[-]$	ψ - מקדם אינטגרלי של חתך i
$[-]$	Ω_{ij} - מקדם השפעת אידוי של חתך i על חתך j

אופרטורים מתמטיים

$H()$ - פונקציית הביסייד

Δ - הפרש

∇ - גרדיאנט

$\nabla \cdot$ - דיברגנס (ללא מציין- דיברגנס מרחבי)

$[\]$ - אופרטור קפיצה (בין שני צידי הלהבה)

מציינים תחתיים

A – מציין סתמי לרכיב A

α - שפעול (אקטיביזציה)

d - טיפות תרסיס (droplets)

E – כיבוי (Extinction)

f – להבה (flame).

$F, fuel$ - של הדלק

g - הגז הנושא

H - גבול עליון של החתך

h - פתרון הומוגני

i - אינדקס של החתך

in – פתרון פנימי בתוך הלהבה

L - גבול תחתון של החתך

O, O_2 - מולקולה דו-חמצנית (מציין את הגז המחמצן)

out – פתרון חיצוני ללהבה

p – פתרון פרטי

0 – התחלתי

מציינים עיליים

(n) – פתרון מסדר n ($n = 0,1,2$) עבור אזור החיצוני ללהבה.

$+(\eta_f^+)$ - שואף ל η_f מכיוון $\eta_f > \eta$.

$-(\eta_f^-)$ - שואף ל η_f מכוון $\eta_f < \eta$.

קיצורים

burning – b

vaporization – v

$[-]$ *Da* – מספר Damköhler לריאקציה

$[-]$ *Le* – מספר Lewis

Left Hand Side – *LHS*

$[-]$ *Pe* – מספר Peclet

$[m]$ *Sauter Mean Diameter* – *SMD*

Right Hand Side – *RHS*

$[-]$ *We* – מספר Weber

Total – *Tot*

Reaction – *Reac*

פרק 1 – מבוא ורקע ספרות

מבוא

מנועי הבעירה הפנימית, השורפים דלק והופכים את אנרגיית החום הנוצרת מהבעירה לאנרגיית לחץ המנוצלת לביצוע עבודה מכנית, החלו את דרכם כנראה בסין סביב המאה השלישית לפסה"נ בזיקוקי דינור תוך שימוש באבק שריפה. אולם רק בשלהי המאה ה-19 הומצא מנוע הבוכנה בו הוצת גז פחמי בשני צידי צילינדר לסירוגין ושימש לדחיפת הבוכנה מצד אל צד, הפעולה המכאנית תורגמה לסיבוב גלגלי רכבים ורכבות, לסיבוב מדחף סירה או לסיבוב פרופלור מטוס ליצירת דחף. בשנות ה-40 של המאה ה-20 הומצא ושימש לטיסה לראשונה מנוע הסילון בו ניצול גזי-השריפה אינו משמש לדחיפת בוכנה אלא ישירות ליצירת דחף ע"י פליטת הגזים לסביבה. יתרונו של מנוע הסילון בא לידי ביטוי בעיקר ביכולת עבודה בנצילות גבוהה במהירויות גבוהות ובגבהים רמים. למעשה, יחס **המשקל-הספק/דחף** הנמוך שמספקים מנועי בעירה פנימית הוא המאפשר לכלי-טיס להתרומם מעל הארץ ו**שיפור יחס** זה הינו משמעותי ביותר לביצועי כלי-טיס כגון משקל המראה, טווח ושהות טיסה. תהליך הבעירה, אם-כן, הינו תהליך משמעותי בעולם ההנעה בכלל והתעופה בפרט.

אחת מהשיטות היותר מקובלות לשריפת דלק לצורך הפקת אנרגיה היא ע"י **ריסוס הדלק הנוזלי לתא השריפה**. שמירת הדלק **במצב נוזלי** חוסכת מקום אחסון ו**ריסוסו מגדיל את שטח הפנים** של הנוזל ומאפשר **זירוז לתהליך האידוי** ומעבר **למצב הגזי בו תתרחש הבעירה**. שיטה זו הינה המובילה כיום בתאי שריפה של מנועים רקטיים גדולים (האופייניים למשגרי חלל) ושל מנועי סילון (הן בתא שריפה ראשי והן במבער אחורי). השימוש בתרסיס דלק ומחמצן מספק תקיפה סגולית גבוהה של המנוע תוך ניצול נפחי מיטבי של המערכת. מערכות שריפה מסוג זה הן מערכות דו-פאזיות הכוללות חילופי מסה, אנרגיה ותנע בין הנוזל והגז, שינויי צפיפות (שמקורם בחום המיוצר בתגובות כימיות אקסו-תרמיות), דיפוסיה של המרכיבים וקצבי תגובה כימית לא ליניאריים. **עבור המקרה הכללי** ניתן לפתח את המשוואות השולטות בבעיה אך ניתקל במורכבות גדולה בפתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות חלקיות לא ליניאריות

צמודות המשתנות בזמן. ומלבד זאת, אפילו אם ניתן לקבל פתרון נומרי ע"י הרצות מחשב ממושכות, **נתקשה להסיק קשר מהותי** בין המשתנים לבין מאפייני הבעירה. לאור מורכבות הבעיה הפיסיקלית **קיים צורך** במודלים **מתמטיים פשוטים** בתחילה שיתחשבו בתופעות ובקשרים המרכזיים. אף אם אלו יוגבלו למקרים מסוימים מפאת ההנחות המפשטות, דרכם ניתן יהיה להבין טוב יותר את התהליכים המרכזיים וההשפעות ההדדיות של המשתנים זה על זה. על-גביהם יוכלו להיבנות מודלים מורכבים ומדויקים יותר.

כך, פותחה שיטה לתיאור הבעירה **הטורבולנטית המסובכת** בתא שריפה בהתבסס על פתרונות פשוטים של "**להבוניות**" (Flamelets) למינריות שפותחו לפני-כן (Peters [2000]). לפיכך, חקירת מאפייני הלהבה הלמינרית, התופעות הפיסיקליות והכימיקליות העיקריות השולטות בה, היחס ביניהם וכו'..., תוכל להיות לתועלת רבה גם עבור בעירות מצויות יותר בעולם המנועים. וכדוגמא פרטנית, חקירת התנאים **לקיום-כיבוי** להבה למינרית חשובה לניתוח של הלהבה הטורבולנטית בתאי שריפה שכן כיבוי "להבוניות" בתא שריפה של מנוע פוגע בנצילות המנוע עקב ירידה בכמות האנרגיה לצריכת דלק שמספק ובנוסף, עלול הכיבוי לגרום **לפגיעה מבנית** עקב פליטת תוצרי לוואי של פיח שנדבק בדפנות נחיר הפליטה ולפגיעה באיכות הסביבה מפליטת תוצרים אלו. אם נבין את הגורמים המשפיעים על כיבוי נוכל לנסות למנוע תופעות אלו.

התופעות הפיסיקליות והכימיקליות המרכזיות המתרחשות בלהבת תרסיס למינרית דיפוזיבית הינן **הסעת הדלק הגזי והמחמצן**, הסעת טיפות הדלק, אידוי הטיפות, דיפוזיית הדלק הגזי והמחמצן והריאקציה הכימית של הבעירה. כמובן שתופעות אלו משפיעות זו על זו. לדוגמא, תהליך הדיפוזיה הוא זה שמספק את המגיבים לריאקציה הכימית, הריאקציה הכימית מספקת חום לשדה הזרימה, משפיעה על טמפרטורה השדה ועל-ידי כך על קצב אידוי הטיפות. אידוי הטיפות מספק אדי דלק לסביבה, משנה את פילוג הצפיפות בשדה הזרימה ועל-ידי כך משפיע על קצב הדיפוזיה, וכן הלאה. תלות זו תבוא לידי ביטוי **בצימוד המשוואות**. בסופו של דבר, מאפייני הלהבה ייקבעו ע"פ היחסים בין התופעות השונות. גם תנאי לקיום-כיבוי הלהבה מושפע מהיחסים בין

התופעות הללו. ואכן, אחד הפרמטרים החשובים ביותר בהגדרת מצבי קיום הלהבה הינו מספר **Damköhler** המוגדר ע"י היחס בין זמנים אופייניים של תהליך הדיפוסיה ושל הריאקציה הכימית.

אם-כן, ראינו שישנה חשיבות רבה לבניית **מודלים פשוטים** המתייחסים לתופעות המרכזיות בבעיה ולקשר ביניהן ושיש לכך גם השלכות מעשיות. כמו-כן ראינו שישנה חשיבות לחקירת מצבי קיום-כיבוי הלהבה הלמינרית הדיפוסית.

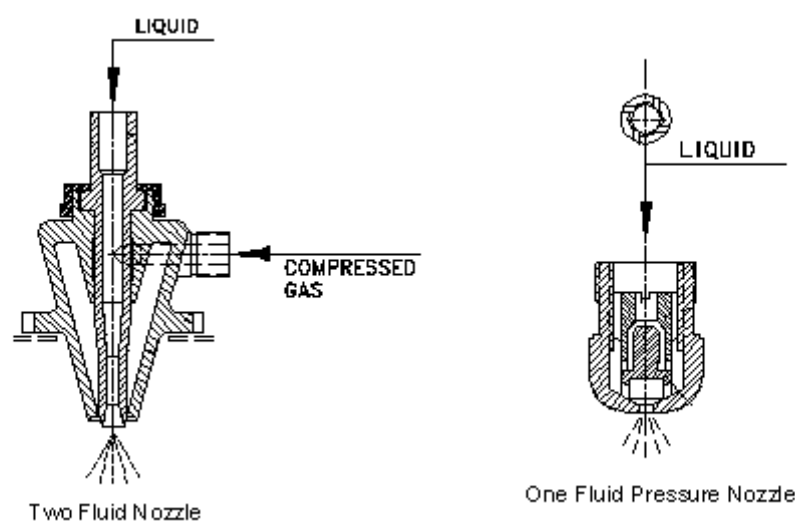
בעבודה זו נתמקד בחקירת להבות למינריות דיפוסיות משולבות תרסיס ובתנאים לקיומן-כיבוי.

סקר ספרות - כללי

לאחר תיאור הרקע לעבודה תיסקרנה ההתפתחויות השונות בהבנת התופעות הקשורות ללהבות תרסיס. נסקור את התופעות ע"פ סדר התרחשותן בתהליך הבעירה: נתחיל באופן היווצרות התרסיס וסיווג אזורי קיומו, נעבור ל**תנועת התרסיס הנוזלי והאינטראקציה עם הסביבה הגזית הנושאת אותו**, נמשיך בתיאור תהליך האידוי של טיפות התרסיס, זרימת המרכיבים הכימיים והמנגנונים השולטים באופי הבעירה, אחרי אלו, נעסוק במודלים לתיאור תהליך השריפה בפאזה הגזית ואופן הטיפול במבנה הפנימי של הלהבה כולל כיבויה. ולבסוף ניתן סקירה על כיוון העבודה הנוכחית, על השיטה ועל חשיבות העבודה.

היווצרות התרסיס וסיווג אזורי קיומו

קיימות שיטות רבות להזרקת תרסיס אולם ניתן לחלקם לשתי קבוצות עיקריות: **ריסוס על בסיס לחץ ("Pressure Atomizing")** בו היווצרות התרסיס הינה תוצאה של מעבר הנוזל דרך פיה צרה בלחץ גדול. גודל הטיפות ופילוגן תלויים בלחץ הנוזל. **וריסוס על בסיס ערבוב שני זורמים ("Twin Fluid Injection")** בו היווצרות התרסיס הינה תוצאה של ערבוב אינטנסיבי של הנוזל עם גז כגון אוויר דחוס. באיור 1-1 ניתן לראות את 2 סוגי המזרקים.



איור 1-1: הדגמה של מזרק לחץ ומזרק "2 זורמים"

Chart 1-1: Demonstration of Pressure Atomizer and Twin Fluid Injection Atomizer

השיטה המקובלת לייצור תרסיס היא הזרקת נוזל באמצעות מזרק עדין לתוך זרם של גז הנע במהירות מספקת כך שהפרשי התנע ביניהם גורמים להיווצרות התרסיס. ע"פ ספרו של Chigier [1981] וע"פ Greenberg and Tambour [1986] מקובל לסווג את אזורי קיום התרסיס לשלושה: אזור האטומיזציה, "השדה הקרוב" ו"השדה הרחוק".

א) אזור האטומיזציה ("Atomization Zone" / "Primary Breakup Region"): אזור זה מוגדר כמקום התפרדות הנוזל לטיפות קטנות. אורכו משתרע על-פני מרחק של כ-50 קטרים של פיית המזרק והוא מאופיין בזרימות טורבולנטיות ובפילוג מהירות וגודל טיפות שאינו אחיד. גודל הטיפות ומהירותן מושפעים מחד גיסא

מהפרשי התנע בין הנוזל המוזרק ובין הגז הנושא השואפים לשבור את הנוזל לטיפות קטנות ומאידך גיסא מושפעים ממתח הפנים של הנוזל השואף לשמור על הנוזל מאוחד. היחס בין הפרשי התנע בין הפאזות ובין מתח הפנים מוגדר כמספר Weber הבלתי ממדי:

(1.1)

$$We = \frac{\rho \cdot \Delta U^2 \cdot \tilde{L}}{\sigma}$$

כאשר:

$\rho [Kg/m^3]$ - צפיפות הנוזל.

$\Delta U [m/sec]$ – מהירות יחסית בין הנוזל המרוסס והגז הנושא.

$\tilde{L} [m]$ - אורך אופייני לזרימה.

$\sigma [N/m]$ - מקדם מתח הפנים של הנוזל.

קיים מספר Weber קריטי כלשהו שמתחתיו מתח הפנים יהיה חזק דיו כדי שהפרשי התנע לא יצליחו לפרק את הנוזל.

ב) אזור "השדה הקרוב" ("Near Field" / "Secondary Breakup Region"). התחלתו של אזור זה מוגדרת מייד עם השלמת שלב האטומיזציה. הנוזל בצורת תרסיס

אך פילוג גודל הטיפות ואף מהירותן ניכר בחוסר אחידותו. גם בין הפאזה

הנוזלית והפאזה הגזית קיימים הבדלים גדולים במהירויות הזרימה

ובטמפרטורה ולכן גם יתרחשו מעברי תנע ואנרגיה בין הנוזל המרוסס והגז

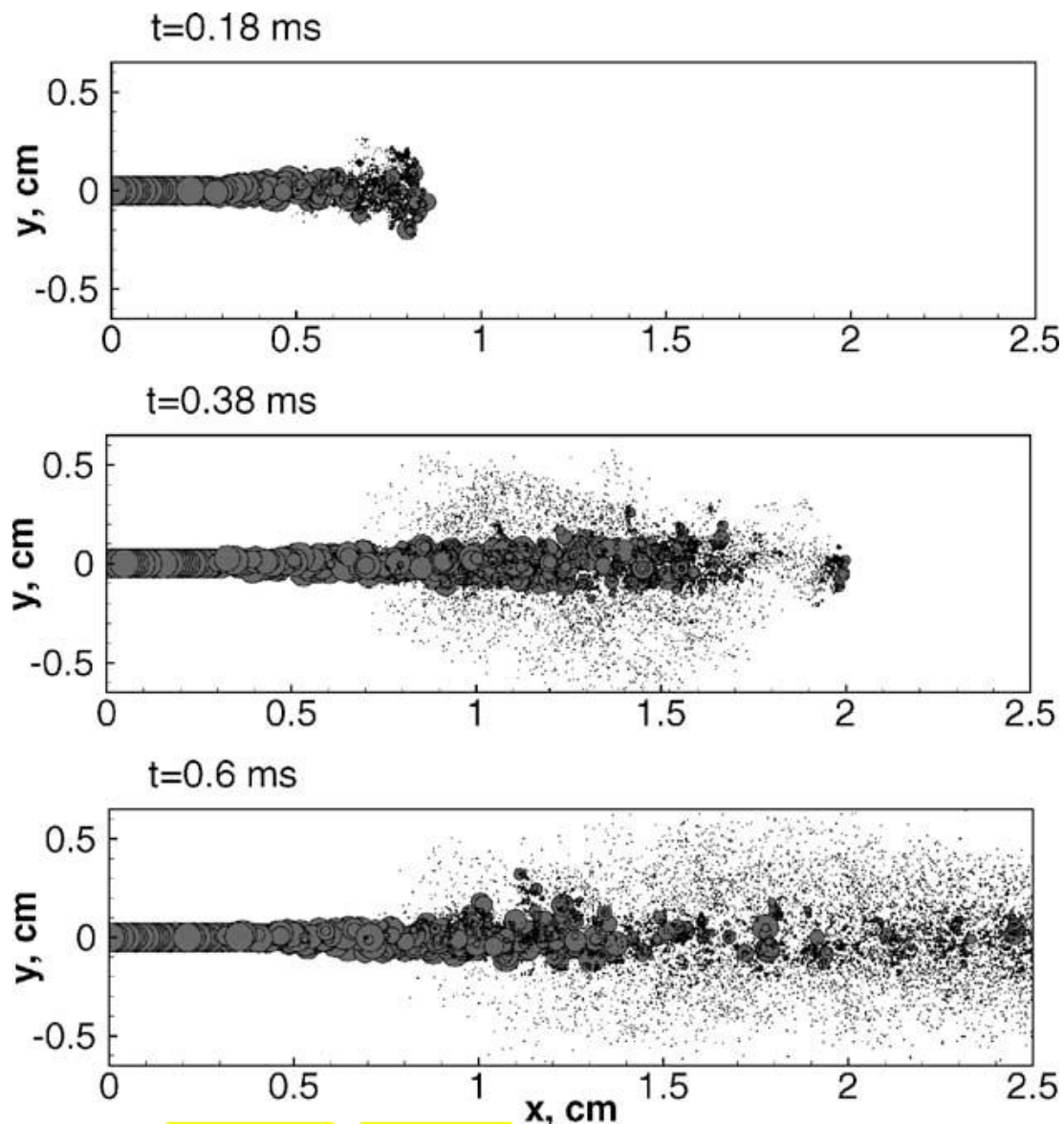
הנושא. כמו-כן, באזור זה התרסיס צפוף למדי וקיימות בו התנגשויות בין

הטיפות שיוצרות עקב התאחדותן טיפות הגדולות לעתים מהטיפות שנוצרו

בשלב האטומיזציה. עם זאת, הצפיפות הגדולה בין הטיפות גורמת לכך

שתופעת האידוי באזור זה נמוכה.

באיור 2-1 ניתן לראות תמונות מתוך עבודתם הנומרית של Apte et al. [2003] אשר הציגו סימולציה בזמן של התפרקות הנוזל לתרסיס.

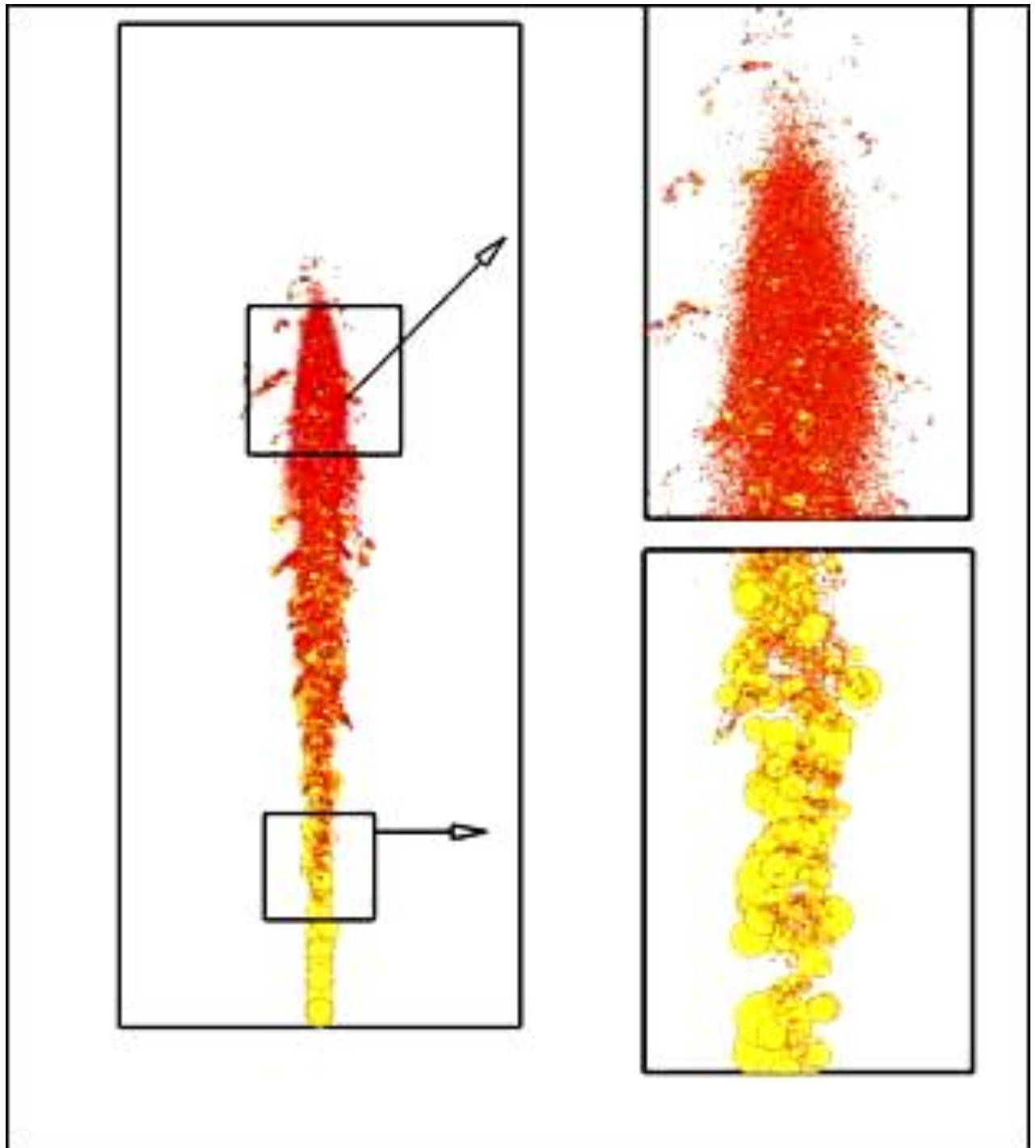


איור 2-1: המחשת היווצרות אזור האטומיזציה ו"השדה הקרוב"

Chart 1-2: Demonstration of Creation of Atomization Zone and "Near Field" Region

בשני השלבים הראשונים ניתן לראות את היווצרות אזור האטומיזציה. ניתן לראות את תחילת היווצרות התרסיס ואת הטיפות הגדולות שמתחילות להיפרד זו מזו. בשלב השלישי ניתן לראות את אזור האטומיזציה עד $x \cong 1.5 \div 2 [cm]$ (שהם כ-50 קטרים של המזרק- $d = 300 [\mu m]$) ולאחריו את אזור השדה הקרוב. אשר בו ניתן להבחין בחוסר האחידות בגודל הטיפות ובצפיפות הגדולה שמעכבת את תהליך האידיוי כמוסבר לעיל.

באיור 3-1 ניתן לראות תמונת סימולציה נוספת מעבודת Apte et al. [2003]. בתמונה המוגדלת התחתונה נראה אזור האטומיזציה שעיקרו התפרדות הנוזל לטיפות ובתמונה המוגדלת העליונה נראה אזור ה"שדה הקרוב" שעיקרו פילוג טיפות שאינו אחיד.

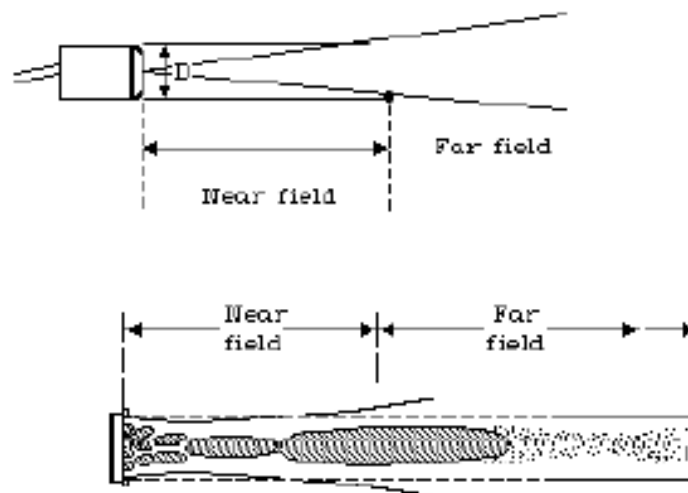


איור 3-1: תיאור סכמטי של אזור האטומיזציה ואזור ה"שדה הקרוב"

Chart 1-3: A Schematic Description of Atomization Zone and "Near Field" Region

ג) אזור "השדה הרחוק" ("Far Field"). באזור זה השדה מיוצב, מעברי התנע והאנרגיה הגיעו לשיווי משקל. התרסיס נע במהירות שווה למהירות זרימת הגז הנושא ואף בטמפרטורה שווה. באזור זה ניתן להניח כי כל טיפה נעה על קו זרם ולכן מעברי התנע זניחים. באזור זה צפיפות הטיפות קטנה וזה מאפשר אידיאלי של הטיפות.

באיור 4-1 ניתן לראות באופן סכמטי את אזור "השדה הקרוב" לעומת אזור "השדה הרחוק". ניתן לשים לב להבדל העיקרי בין האזורים והוא התפזרות של צבר הטיפות שאפיין את "השדה הקרוב" לתרסיס עדין המפוזר הומוגנית בגז הנושא ב"שדה הרחוק".



איור 4-1: תיאור סכמטי של אזורי "השדה הקרוב" ו"השדה הרחוק"

Chart 1-4: A Schematic Description of "Near Field" Region and "Far Field" Region

חשוב להדגיש שחלוקה זו מתייחס לתכונות הממוצעות של התרסיס בזמן ובמרחב. לכן ייתכנו טיפות מעטות שטרם התפרדו באזור "השדה הקרוב", צבירי טיפות גדולים באזור "השדה הרחוק" וכן על זה הדרך.

תנועת התרסיס והאינטראקציה עם הסביבה הגזית

הדרך הישירה לאפיין את הזרימה המשולבת של התרסיס הנוזלי עם הגז הנושא היא לרשום את משוואות השימור לכל פאזה בנפרד ולנסח תנאי התאמה בין הפאזות לכל משוואה. פתרון השדה במקרה זה דורש חישובים נומריים כבדים. 2 גישות פשוטות יותר מוצגות להלן:

(א) גישת הזרימה ההומוגנית (Local Homogeneous Flow): גישה זו הוצגה ע"י

[Faeth 1977]. תיאור זה מניח 2 הנחות יסוד בסיסיות: האחת, ערבוב הומוגני

של שתי הפאזות בכל שדה הפתרון והשנייה שקצבי מעבר תנע ואנרגיה בין שתי הפאזות גדולים מאד ביחס לקצב שינוי הזרימה ולכן ניתן להניח שיווי-משקל תרמודינמי במערכת ולהתייחס אל הטיפות כאחד ממרכיבי הגז הנושא, כלומר מהירויות זרימה שוות וטמפרטורות שוות. למעשה כאילו התאדו הטיפות באופן מיידי וניתן להתייחס אליהם כגז אקוויוולנטי לתרסיס בעל תנע והרכב

סטוכיומטרי זהה. כמובן שיש להגדיר נפח בקרה מתאים ע"פ תורת הרצף כיוון שהטיפות מיסודן אינן רציפות. [Burgoyne and Cohen 1954] ערכו ניסוי והראו שעבור טיפות הקטנות מ 10μ הטיפות נעות בקצב שהיה נע הגז ללא תרסיס.

תיאור תכונות התרסיס לפיכך, בדומה לגז הנושא, מתבסס על מודל אוילרי. Faeth מציג דוגמאות ספציפיות בהן ניתן לקבל התאמה בין שיטה זו לבין תוצאות ניסוי אך לעומתן מקרים אחרים שלא תאמו לניסוי ושיטה זו אינה מתאימה כאשר מדובר על טיפות הגדולות מ- $45[\mu m]$. ע"פ Faeth המודלים הבנויים ע"פ שיטה זו אינם טובים מספיק כדי לתאר היטב זרימת תרסיס. למרות מגבלות השיטה, היא נפוצה בחקירת להבות חד-ממדיות הודות לפשטותה וכפי שראינו מתאימה לניתוח אזור "השדה הרחוק".

(ב) גישת הזרימה הנפרדת ("Separated Flow"): גישה זו מורכבת יותר וכוללת

רישום נפרד של משוואות השימור לכל פאזה תוך התחשבות במעברים בין הפאזות דרך אברי מקור / בור. בשיטה זו ניתן להתייחס לפאזה הגזית ע"פ הגישה האוילרית (מרחבית) ולפאזה הנוזלית ע"פ הגישה הלגראנז'ית (חומרית). כמודגם בעבודותיהם של [Greenberg et al. 1994] ו-[Igra 1997].

ההבדל בין השיטות השונות בגישת הזרימה הנפרדת הוא היחס לתרסיס. יש שהתייחסו אל התרסיס כבעל פילוג רציף (Continuous Droplet Model) ותארו את פילוג גודל הטיפות בעזרת פונקצית צפיפות כלשהי כגון [Williams 1985], ויש שהתייחסו אל התרסיס כבעל תכונות דיסקרטיות (Discrete Droplet Model) – ראה עבודתו של [Sirignano 1986] והתייחסו אל טיפות המייצגות את הזרימה באופן סטטיסטי.

השיטה שהציע [Tambour 1985] במסגרת הגישה הנפרדת מתבססת על ההנחה שפילוג הטיפות הינו בדיד (דיסקרטי) וקיים גודל בסיסי שכל הטיפות הן מכפלה שלו הנקרא בשם "מונומר". גודל המונומר ניתן לבחירה ע"פ רמת הדיוק אותה רוצים להשיג בפתרון השדה. הרעיון המרכזי מאחורי השיטה הוא להתייחס אל פילוג הטיפות בכל נקודה ונקודה בשדה כאל חתכים ("Sections") המוגדרים ע"פ גבול עליון ותחתון של גודל הטיפה כאשר תכונות כל חתך נקבעות ע"פ מיצוע תכונות הטיפות השייכות לו. תכונת חתך תוגדר באופן הבא:

(2.1)

$$Q_i(t, x, y) \triangleq \int_{v_{L_i}}^{v_{H_i}} \alpha v^{\hat{\gamma}} n(t, x, y, v) dv$$

כאשר n הינו פונקצית ההסתברות של התפלגות הטיפות, v הינו נפח הטיפה, $\alpha, \hat{\gamma}$ הינם מקדמים לקביעת תכונת הטיפה ו- $\{v_{H_i}, v_{L_i}\}$ הינם גבולות החתך. יש לשים לב שמבחינה מתמטית תכונת החתך רציפה במרחב, וכמו-כן יכולה להיות תלויה בזמן.

הרעיון של חלוקה לחתכים יושם עוד קודם לכן ע"י [Sala and Spalding 1973] וכן ע"י [Harsha and Edelman 1984] אך עבודות אלו לא התחשבו במעבר תנע בין הפאזות וכן במעבר מסה בין החתכים. יתרון בולט של שיטת החתכים הוא הכתיבה החסכונית של המשוואות ולפיכך השגת פתרון אנליטי למשוואות התרסיס כאשר מספר המשוואות מצטמצם למספר החתכים שנבחר כפול מספר התכונות הנבחרות. יתרון נוסף הוא יכולת התיאור הפשוטה של תהליכים

בין החתכים השונים. חסרון השיטה הוא **איבוד המידע עקב המיצוע ביצירת החתכים** אך כפי שצוין לעיל ניתן לקבוע את גודל המונומר ואת מספר החתכים לקבלת דיוק רצוי בפתרון. ניסויים נומריים הראו ש- 10 חתכים נותנים פתרון מספק באופן כללי, ראה [Khosid and Tambour 1995]. זהו חסכון משמעותי בכוח חישוב ביחס לשיטות הדיסקרטיות-סטטיסטיות.

[Tambour 1985] (3 מקורות) הראה התאמה טובה של שיטת החתכים לתוצאות ניסוייות ע"פ עבודתם של [Yule et al. 1982, 1983].

יש לציין ש [Greenberg et al. 1993] הראו שניתן להגיע למשוואות השימור של שיטת החתכים היישר ממשוואות התרסיס הכלליות שניסח [Williams 1985] ע"י פונקציות צפיפות לפילוג הטיפות.

ניתן להשתמש בשיטת החתכים בגישת הזרימה ההומוגנית כדי לקבל משוואת שימור מסה עבור התרסיס בלבד ([Greenberg 1989]) או בגישת הזרימה הנפרדת ולנסח גם את משוואות שימור התנע ו/או האנרגיה ([Greenberg 1994], [Greenberg et al. 1991]) התחשבו במשוואות שימור המסה והתנע, ו- [Greenberg and Grodek 2003] התחשבו במשוואות שימור המסה והאנרגיה ולקבל את השינויים במהירות ובטמפרטורה בהתאם.

תהליך האידוי של טיפות התרסיס

תהליך אידוי טיפות הדלק הינו **תהליך מרכזי** בלהבות תרסיס ומאפייניו משפיעים ישירות על אופייה של הלהבה. ראשית, בעצם הספקת אדי הדלק לשדה הזרימה וממילא הספקת המגיבים לריאקציה הכימית אך אידוי הטיפות מתבטא במשוואות בהקשר נוסף עבור אנרגיה דרך החום הדרוש לאידוי הטיפות. תהליך התפתחות חקירת אידוי טיפות נסקר ע"י [Law 1982] וכן בספרו של [Sirignano 1999]. תהליך זה מתחיל באידוי טיפה בודדת ומגיע עד אידוי תרסיס רב גדלי בזרימה טורבולנטית.

המודל הפשטני והנפוץ ביותר הינו מודל הקוטר בריבוע ($d^2 \text{ law}$). מודל זה פותח בשנות ה-50 ע"י [Godsave 1953], [Spalding 1953], [Goldsmith and

[1954] and Wise et al. [1953] Penner אשר ניסחו לראשונה את משוואות טיפה בודדת בוערת בסביבה מחומצנת. המודל מתבסס על מספר הנחות כגון שהטיפה כדורית במשך כל האידוי, הומוגנית, איזותרופית, לא דחיסה ובמצב מתמיד וקובע כי קצב איבוד המסה של הטיפה פרופורציונאל ל d ולפיכך אורך חייה פרופורציונאל ל d^2 לריבוע קוטרה. עם התפתחות חקירת אידוי טיפות חוק זה נשאר לשמש כיסוד מרכזי בשיטות השונות.

ניתן לנסח את d^2 law באופן הבא:

(3.1)

$$\frac{d}{dt}(d^2) = -E$$

כאשר d מבטא את קוטר טיפה בודדת בזמן כלשהו בתהליך האידוי ומקדם האידוי המיוצג ע"י E מבטא את תדירות אידוי המולקולות מהטיפה והינו הגורם הפרופורציונאלי בין קוטר הטיפה בריבוע ובין משך חייה. למעשה, מקדם האידוי של הטיפה תלוי בהפרש הטמפרטורות בין הטיפה וסביבתה. Polymeropoulos [1973] חקר תלות זו והציגה ע"י המשוואה:

(4.1)

$$\frac{E(T)}{E(300K)} = 1 + 7.4233 \cdot 10^{-7} \cdot (T_{\infty} - 300)^{2.7548}$$

בתיאור אידוי טיפות בשדה זרימה התלוי בטמפרטורה תלות זו של מקדם האידוי בטמפרטורה מצמדת את המשוואות ולעתים מניחים שאינה קיימת.

גם בתיאור אידוי של תרסיס נעשה שימוש ב- d^2 law לתיאור קצב האידוי של התרסיס. אולם מקובל להניח שבאזור "השדה הקרוב" מתרחש אידוי זניח בגלל צפיפות הטיפות הגדולה ותופעה זו מתחילה להיות משמעותית רק באזור "השדה הרחוק".

ניתן להגדיר משתנה שיבטא את מידת הדומיננטיות של האידוי בזרימה: "מספר Damköhler לאידוי" ("Vaporization Damköhler Number") יוגדר כיחס בין זמן אופייני לדיפוסיה / לזרימה וזמן אופייני לאידוי ויסומן ב- Δ .

(5.1)

$$\Delta = \frac{t_{diffusion / flow}}{t_{vapor}}$$

כאשר זמן אופייני לאידוי ייגזר מ- $d^2 law$:

(6.1)

$$t_{vapor} = \frac{d^2}{E(T)}$$

זמן אופייני לדיפוסיה / לזרימה:

(7.1)

$$t_{diffusion} = \frac{\lambda}{\rho C_p U_g^2}, \quad t_{flow} = \frac{\tilde{L}}{U_g}$$

כאשר $\lambda \left[\frac{J}{m \cdot K \cdot sec} \right]$ הינו מקדם המוליכות התרמית של הזורם, $\rho \left[\frac{Kg}{m^3} \right]$ הינו

צפיפות הזורם, $C_p \left[\frac{J}{Kg \cdot K} \right]$ הינו מקדם קיבול החום הסגולי בלחץ קבוע, $U_g \left[\frac{m}{sec} \right]$

הינה מהירות אופיינית של הזורם ו- $\tilde{L} [m]$ הינו אורך אופייני של הבעיה.

ככל שמספר Damköhler לאידוי גדול יותר כך קטן אזור האידוי. במקרים

מסוימים ניתן להניח שמספר Damköhler לאידוי שואף לאינסוף ולכן מבחינה

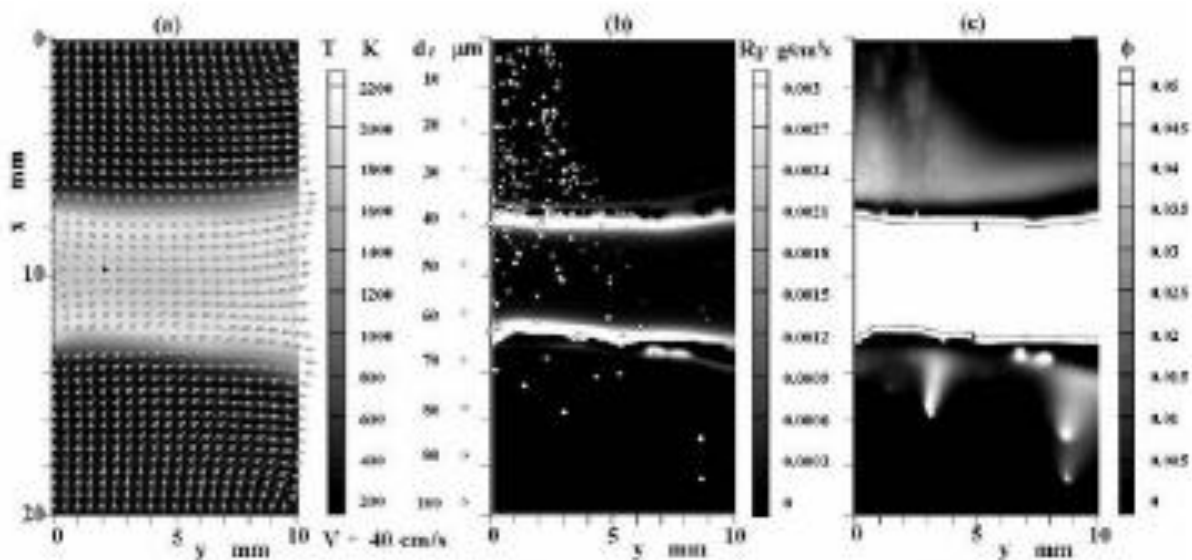
מתמטית קיים משטח אידוי שהינו אוסף הנקודות במרחב אשר הטמפרטורה

שלהן שווה לטמפרטורת האידוי וכל טיפה המגיעה אליו מתאדה מיידית (בקצב

אינסופי).

לעומת זאת, עבור מספר Damköhler לאידוי סופי ייתכן כי תתרחש תופעה בה הטיפות לא מספיקות להתאדות לגמרי עד הגיען אל הלהבה והן חודרות דרכה, מוצתות וממשיכות להתאדות תוך כדי שריפתן. במקרה כזה אידוי של טיפה יהפוך מבור אנרגיה ששימשה לאידוי הטיפה למקור של אנרגיה הנובעת משריפתה.

להלן דוגמא נומרית מעבודתם של Akamatsu and Katsuki [2004] לבעירת תרסיס טיפות. הדלק הגזי עם טיפות הדלק מגיע מחלקה העליון של המערכת ומחלקה התחתון מגיע המחמצן. טווח הקטרים של הטיפות נע בין $10[\mu m]$ ÷ $100[\mu m]$ כאשר הקוטר הממוצע הינו $74.2[\mu m]$.



איור 1-5: דוגמא נומרית ללהבת תרסיס דיפוזיבית בזרימה נגדית. קוטר טיפות ממוצע: $74.2[\mu m]$.

Chart 1-5: Numerical Example for Spray Diffusive Flame in Counter-Flow.
Mean Droplets Diameter: $74.2[\mu m]$

באיור (a) מוצג שדה הטמפרטורה ווקטורי המהירות, באיור (b) מוצגים גדלי טיפות הדלק וקצב התגובה הכימית ובאיור (c) מוצג יחס בין יחס דלק-מחמצן המקומי ליחס הסטוכיומטרי.

ניתן לראות באיור (b) שטיפות רבות עוברות את הלהבה ולכן ההנחה שקיימת חזית אידוי אינה הנחה מספקת. אמנם שרידות הטיפות תלויה בגודלן אך

בעבודה הנוכחית נבחן את השפעת מקדם האידוי ללא הגבלת גודל הטיפות, ולכן לא נוכל להניח שקיימת חזית אידוי אלא נתחשב באידוי טיפות הדלק בכל נקודה בשדה.

בבואנו ליישם את שיטת החתכים ניווכח כי האידוי הינו גורם ישיר לקביעת קצב השינוי של תכונה אינטגרלית כלשהי. **שינוי נפח הטיפות המתאדות יבוא לידי ביטוי דרך 3 כיוונים: א) שינוי פילוג גודל הטיפות בתוך החתך, ב) מעבר טיפות לחתך נמוך, ג) הצטרפות של טיפות מחתך גבוה.** כפי שהראה Tambour [1985] ניתן לתאר את קצב השינוי של תכונה אינטגרלית ע"י הנוסחה הבאה:

(8.1)

$$\frac{dQ_i}{dt} = -C_i Q_i + B_{i,i+1} Q_{i+1}$$

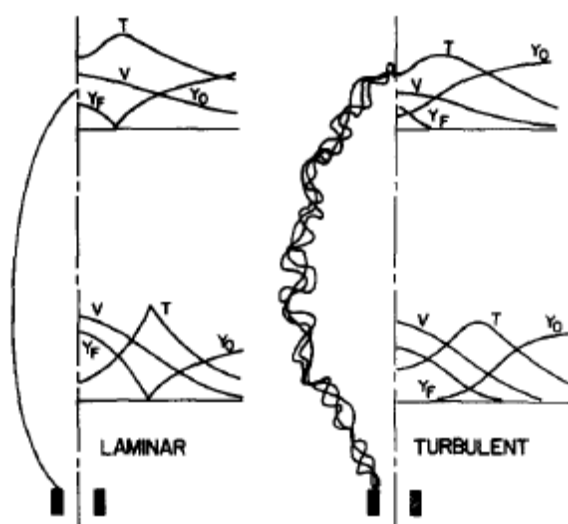
כאשר $Q_{i,i+1}$ מציין את התכונות האינטגרליות של חתכים $(i), (i + 1)$ כפי שהוגדר לעיל, והמקדמים $C_i, B_{i,i+1}$ כוללים בתוכם את השפעת קצב האידוי של הטיפות בחתכים הללו. קצב אידוי טיפה בודדת בתוך החתך ניתן לשערך ע"פ תוצאות ניסוייות של אידוי טיפה בתוך צבר טיפות או ע"פ $d^2 \text{ law}$.

זרימת המרכיבים הכימיים והמנגנונים השולטים באופי הבעירה
ניתן לסווג סיווג ראשוני של הלהבות הנחקרות ע"פ 3 קריטריונים:

גיאומטריית הסעת המרכיבים: זרימה מקבילית זה לצד זה ("Co Flow") לעומת זרימה נגדית זה אל זה ("Counter Flow"). הדוגמא המפורסמת ביותר לזרימה מקבילה הינה עבודתם של Burke and Schumann [1928]. במאמר הקלאסי של להבות דיפוזיביות הציגו פתרון אנליטי, עם השוואה לניסויים, לצורת הלהבה הנוצרת מזרימה קו-צנטרית של דלק גזי בצינור הפנימי וזרימת אוויר בצינור החיצוני. מחקר זה הווה בסיס למחקרים רבים בתחום הלהבות הדיפוזיביות כגון עבודתו של Greenberg [1989] ששילב טיפות דלק עם הדלק הגזי ולאחרונה עבודתם של Kunin et al. [2005, 2006] אשר שלבו טיפות הודף ג'ל. בלהבה הנוצרת מזרימה נגדית קיים אזור סטגנציה אולם הלהבה לאו

בהכרח תמוקם שם. סקירה מפורטת של להבות למינריות דיפוזיביות בתחום הזרימה הנגדית מוצגת בעבודתו של Tsuji [1982]. סוג נוסף של מפגש בין המרכיבים הוא זרימת גזירה שהינה זרימה מקבילית אך בכיוונים נגדיים. פתרון אנליטי לתרסיס דלק ובהמשך גם לתרסיס מחמצן הוצג ע"י Katoshevski and Tambour [1993, 2000]. שימוש בזרמי גזירה בתאי שריפה מבוססי מימן נוזלי וחמצן מיושם ברכבי חלל גדולים (כגון משגר הלוויינים אריאן 5). העבודה הנוכחית דנה בזרימה מקבילית.

אופי הזרימה: חלוקה נוספת שניתן לבצע בלהות גזיות היא בין להבה למינרית בה אין קווי הזרם חותכים זה את זה והלהבה מאופיינת ע"י משטח קבוע במרחב ובין להבה טורבולנטית בה קווי הזרם חותכים זה את זה. להבה זו אינה להבה קבועה במרחב והיא בעלת רוחב סופי בו המרכיבים מתערבבים ברמה המולקולארית זה עם זה. להלן דיאגרמה סכמטית מתוך מאמרו של Faeth [1977] של להבה למינרית לעומת להבה טורבולנטית (שתיהן מזרימה מקבילית).



איור 1-6: תיאור סכמטי של להבה למינרית ולהבה טורבולנטית

Chart 1-6: A Schematic Description of a Laminar Flame and a Turbulent Flame

אמנם, הזרימה המאפיינת תאי בעירה הינה **זרימה טורבולנטית**, אולם, שיטה מקובלת לחקירת מבנה להבות טורבולנטיות נעשית בעזרת שימוש בלהבות למינריות קטנות מקומיות ("Flamelets") כנזכר לעיל וכגון עבודתם

הנומריה של Hollmann and Gutheil [1998] שהתבססה על מודל להבת תרסיס דיפוזיבית למינרית למידול להבת תרסיס דיפוזיבית טורבולנטית. ומכאן החשיבות הגדולה בחקר הלהבות הלימנריות. העבודה הנוכחית דנה בזרימה למינרית ובה נדון מכאן והלאה.

אופי המפגש בין המרכיבים : סיווג נוסף הינו בין להבה מעורבת מראש ("Premixed Flame") בה הדלק הגזי והאוויר מעורבים עוד מלפני ההצתה ובין להבה דיפוזיבית בה הדלק הגזי והאוויר נפגשים בלהבה עצמה ("Diffusion Flame"). (קיימות גם להבות טורבולנטיות באופן דומה אך אינן מעניינינו במקום זה).

שני מנגנונים חשובים משפיעים על הבעירה: האחד הינו קצב הגעת המגיבים אל מקום התרחשות התגובה הכימית (הריאקציה) והשני הוא קצב התגובה הכימית עצמה. בלהבה דיפוזיבית הגעת המגיבים אל אזור הריאקציה מתבצעת בתהליך הדיפוזיה ובלהבה מעורבת מראש המגיבים זמינים אך נדרש היחס הסטוכיומטרי ביניהם ואנרגיה מספקת לשם יצירת הריאקציה. בהתאם לסוג הלהבה (דיפוזיבית / מעורבת מראש) מוגדר מספר Damköhler לריאקציה (להבדיל ממספר Damköhler לאידוי שהוגדר לעיל) המוגדר כיחס בין זמן אופייני לדיפוזיה / לזרימה (בהתאם) ובין זמן אופייני לריאקציה: (9.1)

$$Da \triangleq \frac{t_{diffusion / flow}}{t_{chemistry reaction}}$$

קצב התגובה הכימית יכול להיות סופי ביחס לקצב הדיפוזיה או למהירות הזרימה ואז נקבל Da סופי (ראה Clarke [1968]) או אינסופי לעומתם ואז זמן הריאקציה שואף לאפס ו- $Da \rightarrow \infty$. זו הנחה מקובלת ומפשטת, שכן מלבד משוואות הריאקציה שמתנוונות ניתן להניח עבור $Da \rightarrow \infty$ שעובי הלהבה שואף לאפס.

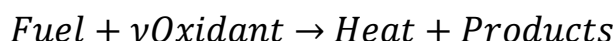
העבודה הנוכחית דנה בלהבה דיפוזיבית. כפי שצוין לעיל, עבודה קלאסית ששימשה פריצת דרך בהבנת הלהבות הדיפוזיביות היא להבת Burke and Schumann [1928]. התפתחות משמעותית בהקשר לתיאור הדיפוזיה היא

עבודתם של Chung and Law [1984] שהכניסו למודל הקלאסי של Burke and Schumann איבר דיפוסיה בכיוון הזרימה. בעבודתו של Greenberg [1989] בה הוסיף למודל הקלאסי תרסיס דלק נתווסף איבר דיפוסיה בכיוון מעלה הזרם בתנאי השפה. איבר זה נובע מעליית ריכוז הדלק הגזי בעקבות אידוי הטיפות. כפי שצוין במהלך פרק זה, עבודה זו דנה בלהבה למינרית דיפוסית בזרימה מקבילית.

תהליכי שריפה בפאזה הגזית

השריפה הינה תגובה כימית אקסותרמית הפולטת אנרגיה לסביבה. למרות שבמאזן הכללי אנרגיה נפלטת לסביבה נדרש להשקיע אנרגיה ראשונית, היא אנרגיית ה"שפעול (האקטיביזציה)" בכדי לעורר את התגובה. מעצם ההגדרה, תהליך זה מזין את עצמו שכן האנרגיה ששחררה גדולה מזו הדרושה כדי לחולל את התגובה הבאה ובתנאי שיסופקו המגיבים. תהליך השריפה מתבסס על שרשרת תגובות כימיות בין הדלק והמחמצן בפאזה הגזית בלבד. מידול שרשרת התגובות הכימיות משמש לחישוב ביצועי מנועים רקטיים אך לדיוננו ניתן לכלול את כולן ולייצג את התהליך ע"י תגובה חד שלבית גלובלית מהצורה:

(01.1)



תגובה מתרחשת בעת מפגש אנרגטי בין המגיבים כאמור. מהירות התגובה הכימית נקבעת ע"פ חוק ארניוס המגדיר מקדם קצב בתור:

(11.1)

$$k = \tilde{B} \cdot e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

כאשר:

\tilde{B} – קבוע המכונה "הגורם הקדם מעריכי".

E_a – אנרגיית השפעול ("אקטיביזציה") של הדלק.

\dot{R} – קבוע הגזים האוניברסאלי.

T – טמפרטורת התגובה.

כפי שניתן לראות מהנוסחא העלאת הטמפרטורה וכן הורדת אנרגיית השפעול גורמים להגדלת קצב התגובה. הסיבה לכך היא שהעלאת הטמפרטורה מגדילה את האנרגיה הקינטית של המולקולות ומעלה את הסיכוי למפגש בין מולקולות המגיבים. הקטנת אנרגיית השפעול (ע"י זרזים למשל) מנמיכה את הרף האנרגטי לתגובה בעת מפגש בין המגיבים ובכך מגדילה את קצב התגובה. בלהבות דיפוזיביות בזרימות למינריות, בהן אנו עוסקים, מוגדר מספר Damköhler לריאקציה (Da) כיחס בין זמן אופייני לדיפוסיה ובין זמן אופייני לריאקציה, כנזכר לעיל. כאשר זמן אופייני לדיפוסיה הוצג לעיל וזמן אופייני לריאקציה ייגזר מתוך מקדם קצב הריאקציה.

זמן אופייני לריאקציה:

$$t_{reaction} \propto \frac{1}{k} = \frac{1}{\bar{B}} \cdot e^{\frac{E_a}{\bar{R}T}}$$

במקרים רבים בלהבות אלו קצב הריאקציה הינו אינסופי ביחס למהירות הדיפוסיה ולפיכך נהוג להניח $Da \rightarrow \infty$. כלומר זמן הפיכת המגיבים הנפגשים לחום ולתוצרים שואף לאפס ביחס לזמן האופייני לדיפוסיה, ואז ניתן להניח שאזור הריאקציה מצטמצם למשטח ללא עובי הממוקם בלהבה. עבור מספרי Damköhler לריאקציה גדולים, תחום התרחשות הריאקציה מצטמצם לאזור הנקרא משטח הלהבה ($Flame Sheet$) שעוביו נשלט ע"י מספר בלתי מימדי המכונה פרמטר האקטיביזציה או בשם מספר Zeldovich. מספר Zeldovich מבטא את היחס בין אנרגיית האקטיביזציה של הריאקציה ובין האנרגיה התרמית האופיינית של הזורם בקרבת הלהבה. ומוגדר:

(31.1)

$$\theta = \frac{(E_a / \bar{R} \cdot T_a)}{(C_p \cdot T_a / \bar{q})}$$

כאשר:

\bar{q} - החום הנפלט ליחידת מסת דלק. ככל שמספר Zeldovich יגדל עובי משטח הלהבה יקטן.

עם זאת, $Da \rightarrow \infty$ הינה הנחה מקובלת ולכן ניתן להניח בעקבות כך שאזור הריאקציה ממוקם בלהבה בעובי אפס. כך הונח בלהבת Burke&Schumann ובפיתוחים שלה בהקשר להבות תרסיס ע"י Greenberg [1989, 1991] וכן בעבודות רבות נוספות.

פתרון מבנה האזור הפנימי של הלהבה הדיפוזיבית

פתרון המבנה הפנימי של הלהבה מסייע להבנה מעמיקה יותר של תהליך השריפה ומתבצע ע"י מתיחת הקואורדינאטה הניצבת למשטח הלהבה באמצעות נרמולה ע"י הפרמטר הקטן המשמש לפיתוח האסימפטוטי. מהלך זה מסייע לניתוח בעיית הכיבוי.

העבודה החלוצית בתחום הכיבוי הינה עבודתו של Liñan [1974] אשר בחן את השפעת מספר Damköhler לריאקציה על התנהגות הלהבה הדיפוזיבית באופן אנליטי. עבור ערכים גדולים מאד של מספר Damköhler לריאקציה מתרחשת שריפה מלאה של המגיבים ואזור הריאקציה מצטמצם אל משטח הלהבה בעובי שואף לאפס. עבור ערכים נמוכים יותר שריפת המגיבים אינה מלאה ונוצרת דליפה מאזור הריאקציה. כיבוי יתרחש עבור זליגה מוגזמת של אחד המגיבים. ע"פ זה יקבע ערך קריטי המהווה חסם תחתון לקיום הלהבה. עבודתו של Liñan בוצעה עבור $Lewis=1$ כלומר, מקרה בו מקדמי דיפוזיית החום ודיפוזיית המסה שווים זה לזה והמשמעות היא שדיפוזיית החום ודיפוזיית המסה הינם תהליכים בעלי זמנים אופייניים השווים אחד לשני. בעקבותיו Cheatham and Matalon [2000] ביצעו אנליזות למציאת תנאי הכיבוי של הלהבה עבור מספרי Lewis שונים מ-1 ושונים עבור כל אחד מהמגיבים וכן בחנו את יציבות הלהבה התלויה אף היא במספר Damköhler לריאקציה. תנאי הכיבוי של Liñan משמש מחקרים רבים. אחד השימושים החשובים הינו בבחינת התנאים לכיבוי של שיא להבה דיפוזיבית (ראה עבודתם של Im et al. [1991])

שכן קיימות ראיות ניסוייות לכיבוי שיא של להבות דיפוזיביות (ראה Chen [1995], [Golovanevsky et al. 1999]). השלכה של כיבוי באופן כללי היא פגיעה ביעילות השריפה ופליטה של תוצרי לוואי הגורמים נזק באיכות הסביבה. באופן פרטני, **כיבוי שיא הלהבה** (הנקודה הגבוהה ביותר בלהבה) גורם גם **לפיוח** שהשלכותיו במנועים הן פגיעות מבניות. כמו-כן **כיבוי שיא הלהבה** משמש בחקירת יציבות הלהבה (ראה עבודתם של Ghosal and Vervisch [2001]). Greenberg and Grodek [2003] עשו שימוש במסקנותיו של Liñan לגבי תנאי קיום-כיבוי להבה דיפוזיבית ובחנו באילו תנאים תכבה שיא הלהבה בקונפיגורציה של להבת Burke & Schumann עם תרסיס הדלק (Greenberg [1989]). הם גילו שקיימת תלות משמעותית של מצבי קיום-כיבוי הלהבה במקדם האידיי ובכמות הטיפות ההתחלתית והסבירו אותה. כמו-כן הציגו את הקשר בין רדיוס העקמומיות של הלהבה ובין כיבויה והראו שעבור רדיוס עקמומיות קטן נדחה הכיבוי.

העבודה הנוכחית- מטרתה וחשיבותה

הבנת התנהגותן של להבות תרסיס דיפוזיביות בזרימה מקבילית מהותית בהקשר לתאי שריפה של מנועי סילון. שיטה נפוצה לתיאור הלהבה הטורבולנטית המתקיימת בתאי שריפה אלו מתבססת על להבות למינריות. אחד הפרמטרים החשובים ביותר של הלהבה בהקשר זה הינו **רגישותה לכיבוי**. תוצאות ניסוייות מראות שבתנאים מסוימים מתרחש כיבוי בשיא הלהבה. כיבוי שיא הלהבה גורם לפגיעה ביעילות השריפה, לפיוח המנוע שפוגע בחוזק המבנה ולפליטת תוצרי לוואי המזהמים את הסביבה.

בעבודתם של Greenberg and Grodek [2003] הוצגה אנליזה למבנה הפנימי של להבת תרסיס ופותח תנאי לכיבוי באזור השיא של להבת תרסיס דיפוזיבית. כאשר הפתרון החיצוני עבור להבת התרסיס מתבסס על עבודתו של Greenberg [1989] ואנליזת הכיבוי בשיא הלהבה מתבססת על עבודתו של Liñan [1974] לכיבוי להבות דיפוזיביות. בעבודתם השתמשו בתיאור חד-חתי עובר תרסיס הדלק שאינו נותן ביטוי לפילוג גודל טיפות התרסיס למרות

שתרסיס מציאותי מכיל תמיד טיפות בגדלים שונים. אמנם, בעבודתו של Anidjar et al. [1989] אכן מוצעת דרך לפתרון אנליטי לבעיות עם תרסיס רב-גדלי ואף מומחשת ב- 3 דוגמאות: בעירת להבת תרסיס רב-גדלי דיפוזיבית (מהירות טיפות זהה ושונה ממהירות הגז הנושא) והתנגשויות והתמזגות טיפות תרסיס רב-גדלי. אך אין חקירה מעמיקה של השפעת פילוג גודל הטיפות על מאפייני הלהבה, אין התייחסות לטמפרטורת הלהבה ולא לתנאי כיבויה. באופן כללי, בחישובי זרימה הכוללים תרסיס נהוג לתאר את גודל הטיפות ע"י קוטר ממוצע במקום בפילוג השלם. אופן המיצוע המומלץ תלוי במנגנונים הפיסיקליים והכימיקליים המרכזיים בבעיה. [Lefebvre 1989] מציע בספרו מספר שיטות לחישוב קוטר ממוצע בהתאם לסוג הבעיה. במקרה של ריאקציה כימית ומעברי מסה בין הפאזה הגזית והנוזלית מוצע הקוטר הממוצע הבא:

(41.1)

$$\text{Sauter Mean Diameter (SMD)} = \frac{\sum n_i d_i^3}{\sum n_i d_i^2}$$

$$SMD \triangleq \frac{\sum n_i d_i^3}{\sum n_i d_i^2}$$

בעבודה זו תיבחן חשיבות פילוג הטיפות ההתחלתי ונראה ש SMD לבדו אינו קובע באופן יחידני את מפת הכיבוי ולכן יש לתאר מדויק יותר את פילוג הטיפות.

לסיכום, מטרת עבודת המחקר הנוכחית הינה בחינת השפעה של פילוג לא אחיד בגודל טיפות התרסיס על מאפייני הלהבה דיפוזיבית וביניהם רגישות לכיבוי שיא הלהבה. זאת כדי להבין בצורה טובה יותר וקרובה למציאות את תלות תכונות הלהבה בפרמטרי התרסיס השונים תוך ניסיון להעניק כלים לשליטה על יעילות השריפה לטובת חסכון בדלק וכן מזעור תופעות של פיח במנועים (הגורם להחלשות החומר ומקטין את אמינות המנוע ובנוסף מזהם את הסביבה).

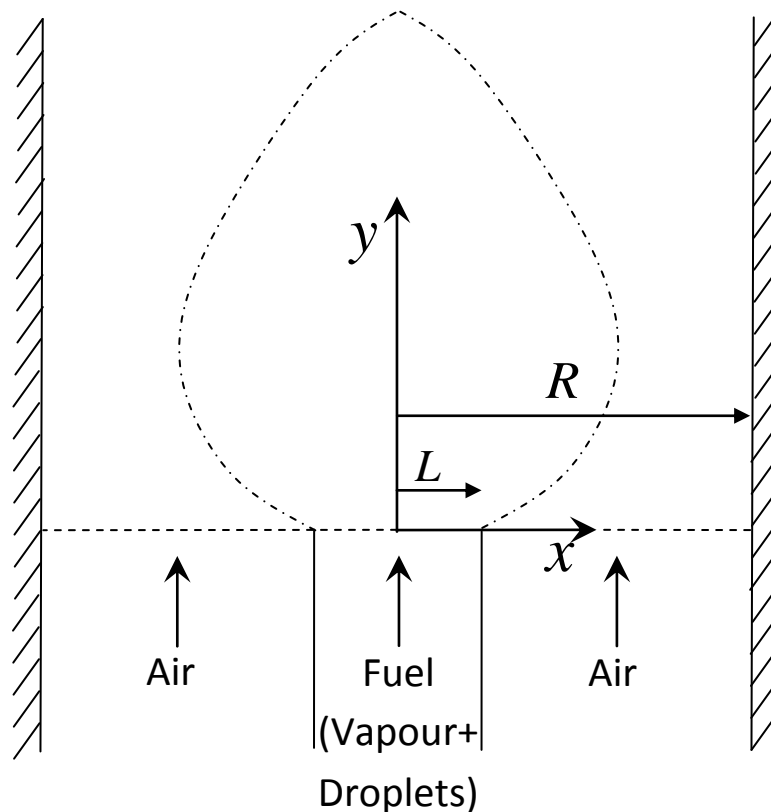
לצורך כך פותח מודל לתיאור להבת תרסיס רב-גדלי, בעזרתו חושבו פתרונות חדשים עבור התרסיס והפאזה הגזית ובוצעה אנליזה למבנה הפנימי של הלהבה לבחינת הכיבוי באזור שיא הלהבה.

פרק 2 - המשוואות השולטות

פרק זה יכלול הקדמה כללית בה תתואר הבעיה הנדונה, יוצבו ההנחות המרכזיות של העבודה וביסוסן. לאחר מכן יוצג תהליך פיתוח המשוואות ע"פ הסדר הבא: משוואות התרסיס ומשוואות הפאזה הגזית. תוך מהלך פיתוח המשוואות יוזכרו בקצרה ההנחות המתאימות במקומן, ולבסוף יוצגו המשוואות השולטות ויוגדרו תנאי השפה.

הקדמה כללית

המודל הקלאסי של להבת [Burke-Schumann 1928] דן בלהבה דיפוזיבית הנוצרת במפגש הסטוכיומטרי בין הדלק הגזי והאוויר הזורמים זה לצד זה בזרימה מקבילית (כמתואר ב איור 1-2). מודל זה הורחב ע"י Greenberg [1989] לתיאור להבת תרסיס בה הדלק הגזי מעורבב עם טיפות דלק (Monodisperse) הזורמות עמו ומתאדות במהלך זרימתן. למעשה, תוצאות ניסוייות (כגון עבודתם של Chigier and McGreath [1974] וכן של Styles and Chigier [1977]) ותוצאות אנליטיות (כגון עבודתם של Labowsky and Rosner [1976] וכן של Chiu, Kim and Croke [1982]) מראות שייתכן ותרסיס דלק קרוב יותר למצב של "ענן טיפות" בגדלים שונים. בעבודה הנוכחית נעשה שימוש בשיטת החתכים של Tambour [1985] כדי לתאר את הפילוג הרב-גדלי של טיפות התרסיס תוך התחשבות בתהליך אידוי במטרה לבחון את השפעת הפילוג על מאפייני הלהבה. שיטת החתכים תוארה בקצרה בפרק המבוא. המוטיבציה לתיאור יותר מציאותי של פילוג הטיפות נובעת מההבנה שתכונות המשמעותיות לתהליכים הפיסיקליים הנדונים בלהבות תרסיס תלויות בגודל הטיפות כגון קצב האידוי (כידוע מ- $d^2 \text{ law}$) והחום הדרוש לאידוי, ולכן קיים צורך במודל המתייחס לגדלים שונים של הטיפות הן כתוצאה מפילוגן ההתחלתי והן כתוצאה מאידוי. מודל כזה יתאר בצורה מדויקת יותר תרסיס כלשהו כפי שיוצג להלן בפרק התוצאות וגם יאפשר בחינה של השפעת פילוג רב-גדלי על מאפייני הלהבה.



איור 2-1: תיאור סכמטי של להבת תרסיס למינרית דיפוזיבית בזרימה מקבילית

Chart 2-1: A Schematic Description of a Diffusion Laminar Spray Flame in Co-Flow

כפי שהוזכר לעיל, לפני פיתוח המשוואות השולטות יוצבו מספר הנחות לגבי המודל הנדון ויוצדק שימושן במקרה דנן, כך שבמהלך הפיתוח יוזכרו ההנחות הרלוונטיות בקצרה וכך יישמר רצף הקריאה.

כיוון שעבודה זו עוסקת בקונפיגורציה דומה לזו שעסקו בה Burke & Schumann [1928] ובעבודתם הושאו תוצאות אנליטיות עם תוצאות ניסוייות וכך אוששו הנחותיהם, נעשה בעבודה זו שימוש בהנחותיהם.

במודל הקלאסי של להבת Burke & Schumann הניחו שהלהבה הדיפוזיבית נמצאת במצב מתמיד (הנחה קיום מצב מתמיד אוששה ע"י ניסויים). כמו-כן הניחו החוקרים שמהירויות הזרימה של הדלק הגזי ושל האוויר למינריות ושוות זו לזו, חד-כיווניות וקבועות בשדה הזרימה. לשם כך יש להזניח את השפעת הצמיגות בין כל אחד מהזורמים והתעלה (השפעת פרופיל זרימה הנובע משכבת גבול בין הזורמים והתעלה על מאפייני הלהבה נחקרה בעבודתם של

[Khosid and Greenberg 1999] וכן להזניח השפעה של שינויי תנע בטיפות כתוצאה מאידי ומגרר (ראה עבודתו של [Greenberg 1991] בנושא). וכן הניחו צפיפות קבועה. עבודתו של [Greenberg 1989] המתארת מודל ללהבת תרסיס התבססה על הנחותיהם של Burke & Schumann ולגבי התרסיס הוסיף והגדיר שטיפות הדלק מעורבבות הומוגנית בזרם והוזרקו במעלה הזרם במרחק מספיק גדול לפני הפיה ($y = 0$) כך שביציאה מן התעלה תרסיס הטיפות כבר בשיווי משקל דינמי ומצוי ב"אזור הרחוק" ("Far Field") שלו (הגדרתו ומאפייניו של אזור השדה הרחוק נזכרו לעיל בפרק המבוא). בעקבות כך ניתן להניח שהטיפות נעות עם הגז הנושא באותה המהירות והתחילו כבר תהליך של אידי. הנחות אלו נפוצות באנליזות לזרימת תרסיס ואוששו בניסוי ע"י Yule et al. [1982, 1983] ובהתאמה לתיאוריה כפי שהראה Tambour [1985]. בהתאם להנחות אלו ניתן לתאר את הטיפות כנעות על קווי הזרם של הגז הנושא ולכן מעבר תנע בין הפאזות זניח, כמאפיין אזור זרימה זה.

כמו-כן, תופעת התנגשויות בין הטיפות זניחה בשדה הרחוק כפי שצוין בפרק המבוא, ובייחוד תחת הנחה של מהירות קבועה בשדה הזרימה. (ניתן לראות התייחסות להתנגשויות בין טיפות ע"פ שיטת החתכים בעבודתם של [Greenberg and Tambour 1986] שהניחו התנגשויות בשדה הרחוק בעקבות הפרשי תנע בין טיפות בגדלים שונים).

כהשלמה לתיאור תנועתן של הטיפות נתייחס לתופעה של דיפוסיה בטיפות. השפעת דיפוסיה בטיפות על מאפייני הלהבה נחקרה בעבודתו של Greenberg [1989] אך למעשה, תוצאות ניסוייות מראות שדיפוסיה בטיפות הינה תופעה משמעותית רק עבור טיפות הקטנות מ- $1[\mu]$ (Davies [1976]). כיוון שעבודה זו דנה בטיפות בטווח גודל של $\{1 \div 110\}[\mu]$, נזניח את השפעת הדיפוסיה בטיפות בעבודה זו.

כדי לעמוד על המנגנונים הפיסיקליים המרכזיים המשפיעים על מאפייני הלהבה ועל הקשר ביניהם נשאף לבנות מודל פשוט ככל האפשר מחד ומאידך מודל שיתאר נאמנה את התופעות הפיסיקליות המרכזיות.

מתוך כך, המודל הנוכחי מתחשב במעבר מסה ואנרגיה בין הפאזות אך מזניח השפעות הנובעות ממעבר תנע בין הפאזות. הנחה זו מקובלת עבור השדה הרחוק כמתואר במבוא, ולמרות שהוזכר במבוא שגם מעבר אנרגיה בין הפאזות זניח בשדה הרחוק, במקרה של להבת תרסיס אידוי הטיפות הופך למשמעותי יותר מאשר ללא להבה ולכן המודל הנוכחי כן מתחשב במעבר אנרגיה בין הפאזות. בתוך הפאזה הנוזלית עצמה, זניח שינויי תנע ואנרגיה של הטיפות כתוצאה מהאידוי ונתחשב בשינויי מסתן בלבד. אלו הנחות טובות בהסתמך על כך שאין התנגשויות ושהטיפות נעות בממוצע במהירות הגז הנושא ובטמפרטורה שלו (עד לטמפרטורת הרתיחה שלהן).

תהליך האידוי במודל יתואר ע"פ $d^2 \text{ law}$ הקובע כי קצב האידוי של טיפה משתנה ליניארית עם קוטרה. למרות שחוק זה פותח עבור טיפה בודדת ולא עבור אידוי צבר של טיפות אשר קצב אידוין מושפע מצפיפותן, תיאור זה מקובל עבור אידוי צבר של טיפות ונמצא תואם לניסויים ולכן נשתמש בו במודל הנוכחי. עם זאת, מקדם האידוי של טיפה בודדת הינו פונקציה של הפרש הטמפרטורות בין הטיפה וסביבתה ועונה לקשר שחקר Polymeropoulos [1973] בעבודתו:

(1.2)

$$\frac{E(T)}{E(300K)} = 1 + 7.4233 \cdot 10^{-7} \cdot (T_{\infty} - 300)^{2.7548}$$

אולם, התחשבות בתלות זאת מונעת מאתנו הצגה של הפתרון האנליטי הפשוט. ע"י ההפשטה המתמטית הנובעת מההנחה שמקדם האידוי לטיפה בודדת אינו תלוי בטמפרטורה נוכל לעמוד על המנגנונים הפיסיקליים והכימיקליים העיקריים של הבעיה כמוסבר לעיל. לפיכך, קצב האידוי במודל זה יקבע אך ורק ע"פ $d^2 \text{ law}$ ללא תלות בטמפרטורה.

הנחה נוספת בהקשר הזה היא שאידוי הטיפות מתחיל עם יציאת הטיפות מתעלת הדלק. הנחה זו מבוססת על כך שטמפרטורת הגז הנושא באזור זה תשתווה לטמפרטורת האידוי של הטיפות (תנאי זה ייקבע בתנאי השפה של

משוואת הטמפרטורה). כיוון טמפרטורת השדה במורד הזרימה גבוהה מזו, אידוי הטיפות מתרחש בכל השדה.

בהקשר למנגנון הריאקציה הכימית, במודל הנוכחי נלקח מספר *Damköhler* של הריאקציה (המציין את היחס בין הזמנים האופייניים של הדיפוסיה ושל הריאקציה, להרחבה ראה פרק המבוא) כאינסופי. מתוך כך מוגדר מיקום הלהבה כמשטח ללא עובי בו מתקיים היחס הסטוכיומטרי בין המגיבים והריאקציה בו מתבצעת במשך זמן זניח. משטח הלהבה זה ייקרא הלהבה ההומוגנית (ראה באיור 1-2).

למרות הנחה זו, מכיוון שהמגיבים של הריאקציה הכימית הינם בפאזה הגזית בלבד, תתכן תופעה של שרידות טיפות המגיעות לאזור הריאקציה. ואכן, קיימות ראיות מתוצאות ניסוייות, הן עבור להבת תרסיס דיפוזיבית והן עבור להבת תרסיס מעורבת מראש (ראה *Briffa and Chen et al. [1988]*, *Dombrowski [1970]*) המראות שטיפות דלק יכולות לשרוד את אזור הריאקציה ולהמשיך ולזרום אחרי הלהבה כשהן בוערות אינדיווידואלית או במקבץ. תופעה זו עשויה להתרחש רק בלהבה סגורה ("Overventilated") בה אנו עוסקים. בעבודה זו נניח שטיפות שלא התאדו לגמרי עד הגיעם אל הלהבה ההומוגנית מוצתות וממשיכות בזרימתן כשהן בוערות בהתאם לקצב האידוי שלהן.

ניסוח המשוואות מתבצע במערכת צירים קרטזית דו-ממדית ולכן התוצאות תקיפות למקרה של תא שריפה בגיאומטריה של תיבה עבור חתך שרחוק "אינסופית" מהדפנות המקבילות אליו, כלומר אינו מושפע בדרך כלשהי מתופעות קצה הנובעות מהדפנות. באותו האופן, ניתן היה לנסח את המשוואות במערכת צירים גלילית ותוקף התוצאות היה מתאים לצינורות קונצנטריים. מערכת הצירים הקרטזית עבור החתך מתוארת באיור 1-2.

הנחות נוספות יוצגו בסמוך למשוואות בהן הן באות לידי ביטוי.

משוואות התרסיס

ניסוח משוואות התרסיס:

בכדי לתאר את התנהגות טיפות התרסיס נשתמש בשיטת החתכים של [1985] Tambour. תיאור התרסיס מבוטא ע"י פונקציה ההסתברות של התפלגות הטיפות:

(2.2)

$$n = n(t, x, y, v)$$

כאשר הביטוי למספר הטיפות הנמצאות ביחידת נפח בזורם (שתקבע ע"פ תורת הרצף) בזמן t ,

$$\left\{ \left(x - \frac{dx}{2}, y - \frac{dy}{2} \right) < (x, y) < \left(x + \frac{dx}{2}, y + \frac{dy}{2} \right) \right\} \text{ במקום} \\ \left\{ v - \frac{dv}{2} < v < v + \frac{dv}{2} \right\} \text{ בעלות נפח בתחום}$$

הינו:

(3.2)

$$n(t, x, y, v) \cdot dx \cdot dy \cdot dv$$

ע"פ שיטת החתכים כל טיפה בתרסיס מתוארת ע"י מספר טבעי j המציין את מספר המונומרים (monomers) המוכלים בטיפה כאשר מונומר הינו יחידה בסיסית של החומר כגון מולקולה. משוואת השימור לטיפה בגודל j הינה:

(4.2)

$$\frac{dn_j}{dt} = -E_j n_j + E_{j+1} n_{j+1} \quad , \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

כאשר E_j מציין את תדירות אידוי המולקולות מטיפה j . על-סמך הנחותינו לעיל מקדם זה אינו תלוי בטמפרטורת הסביבה אך ע"פ $d^2 \text{ law}$ הינו תלוי בגודל הטיפה.

ע"פ שיטת החתכים נחלק את התרסיס ל- N חתכים ונגדיר תכונה אינטגרלית לחתך i באופן הבא:

(5.2)

$$Q_i(t, x, y) \triangleq \int_{v_{L_i}}^{v_{H_i}} \alpha v^{\hat{\gamma}} n(t, x, y, v) dv$$

כך שחתך i מוגדר באופן הבא:

(6.2)

$$Section\ i = \{v | v_{L_i} \leq v < v_{H_i}\}$$

והמקדמים $\hat{\gamma}$ ו- α יקבעו את התכונה כאשר $\hat{\gamma} = 0 / 1 / \frac{2}{3}$ ע"פ תלות התכונה במספר הטיפות, בנפח הטיפות או בשטח הפנים של הטיפות, ו- α נקבע בהתאם לתכונה. לדוגמא, עבור $\alpha = \rho$ ו- $\hat{\gamma} = 1$, Q_i יבטא את מסת חתך i וכן הלאה.

על בסיס הצגה זו פיתח *Tambour [1985]* את המשוואות לתיאור אידוי התרסיס במונחים של חתכים:

(7.2)

$$\frac{dQ_i}{dt} = -C_i Q_i + B_{i,i+1} Q_{i+1} \quad , \quad i = 1..N$$

כאשר הביטוי הכללי למקדמים האינטגרליים הינו:

(8.2)

$$B_{i,i+1} = \left(\frac{v_{H_i}}{v_{L_{i+1}}} \right)^{\hat{\gamma}} \frac{E(v_{H_i})}{v_{H_{i+1}} - v_{L_{i+1}}} \quad , \quad B_{N,N+1} = 0$$

$$C_i = \left(\frac{v_{H_{i-1}}}{v_{L_i}} \right)^{\hat{\gamma}} \frac{E(v_{L_i})}{v_{H_i} - v_{L_i}} + \frac{1}{v_{H_i} - v_{L_i}} \int_{v_{L_i}}^{v_{H_i}} \frac{1}{v^{\hat{\gamma}}} E(v) dv^{\hat{\gamma}}$$

ביטוי זה לקצב שינוי התכונה האינטגרלית של חתך מכיל 3 גורמים אשר ניתן לשים לב למשמעותם דרך מקדמי החתך: שניים דרך איבר C_i ואחד נוסף דרך איבר $B_{i,i+1}$:

- (א) הגורם הראשון המופיע בביטוי עבור C_i מבטא את ההתמעטות בתכונה Q_i עקב עזיבת טיפות מחתך i לחתך נמוך ממנו.
- (ב) הגורם השני המופיע בביטוי עבור C_i מבטא את ההתמעטות בתכונה Q_i כתוצאה מאידוי טיפות שנשארו בתוך חתך i .
- (ג) הגורם המופיע בביטוי עבור $B_{i,i+1}$ מבטא את התוספת בתכונה Q_i כתוצאה מהצטרפות טיפות מחתך $i + 1$ לחתך i (עבור $i = N$ איבר זה יתאפס).

משוואת השימור הכללית בצורתה הדיפרנציאלית (ע"פ ניסוחו של Williams [1985]) הינה:

(9.2)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} (\tilde{R}n) + \nabla \cdot (U_d n) + \nabla_{U_d} \cdot (Fn) = \Gamma$$

כאשר:

$$\tilde{R} = \frac{\partial v}{\partial t} - \text{קצב שינוי נפח טיפה,}$$

$$F - \text{תאוצת הגרר הפועל על הטיפות,}$$

$$\Gamma - \text{מקור של טיפות כתוצאה מהתנגשות (במונחי קצב).}$$

נזכיר להלן חלק מההנחות שהוצבו לעיל והשפעתן על משוואת השימור:

- הטיפות נעות על קווי זרם במהירות קבועה השווה למהירות הגז הנושא:

(01.2)

$$\nabla_{U_d} \cdot (Fn) = 0$$

- מצב מתמיד:

$$(11.2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

- תופעת התנגשויות בין טיפות זניחה:

$$(21.2)$$

$$\Gamma = 0$$

- תופעת הדיפוסיה בטיפות זניחה:

$$(31.2)$$

$$U_d = U_{0_g}$$

בהסתמך על הנחות אלו תוך שימוש בשיטת החתכים, כאשר הביטוי (2.7) מייצג את איבר שינוי נפח הטיפות כתוצאה מאידוי, נקבל את המשוואה:

$$(41.2)$$

$$\nabla \cdot (U_{0_g} Q_i) = -C_i Q_i + B_{i,i+1} Q_{i+1}, \quad i = 1..N$$

עבור $Q_i = m_{d_i}$ (ע"י הצבת $\hat{\gamma} = 1, \alpha = \rho_d / \rho_{Tot}$) נקבל משוואה לשבר המסי של הטיפות:

$$(51.2)$$

$$U_{0_g} \frac{\partial m_{d_i}}{\partial y} = -C_i m_{d_i} + B_{i,i+1} m_{d_{i+1}}, \quad i = 1..N$$

כאשר C_i ו- $B_{i,i+1}$ נגזרים מהביטוי הכללי (2.8) ועבור חלוקה רציפה של החתכים $(d_{H_{i-1}} \rightarrow d_{L_i}, d_{H_i} \rightarrow d_{L_{i+1}})$ נקבל את הביטויים:

$$(61.2)$$

$$C_i = \frac{3}{2} E \left[\frac{3d_{H_i} - 2d_{L_i}}{d_{H_i}^3 - d_{L_i}^3} \right], \quad i = 1..N$$

$$B_{i,i+1} = \frac{3}{2} E \left[\frac{d_{L_{i+1}}}{d_{H_{i+1}}^3 - d_{L_{i+1}}^3} \right], \quad i = 1..N$$

$$B_{N,N+1} = 0$$

גרדיאנט לשבר המסי של הטיפות נכתב בצורה זו כיוון שאינו מכיל רכיב רדיאלי. ההצדקות לכך הן:

(א) כיוון שהטיפות נעות על גבי קווי זרם של הגז הנושא במהירות קבועה במורד הזרימה וללא דיפוסיה כיוון תנועתן הינו הכיוון הצירי (y) ולכן תהליך האידיוי שלהן אינו מתרחש בכיוון הרדיאלי אלא בכוון הצירי בלבד. (ב) בנוסף, הנחנו לעיל שמקדם האידיוי אינו תלוי בטמפרטורה ולפיכך למרות שינויי הטמפרטורה בכיוון הרדיאלי קצב אידיוי הטיפות קבוע בכיוון זה. כיוון שכך, מסת הטיפות של כל חתך משתנה רק בכוון הצירי.

משוואות התרסיס- תנאי שפה:

משוואת הטיפות הינה משוואה מסדר ראשון בכיוון הצירי ולפיכך יוגדר תנאי שפה אחד והוא פילוג הטיפות ביציאתן מתעלת הדלק. כזכור, בשלב זה נמצאות הטיפות באזור "השדה הרחוק". ולכן אנו נשענים על ההנחה שהטיפות מפוזרות הומוגנית בשדה הזרימה ולפיכך, בכל נקודה ונקודה ביציאה מתעלת הדלק מצוי פילוג טיפות זהה:

$$(71.2)$$

$$: y = 0$$

$$m_{d_i} = m_{Tot_{Fuel}} \cdot \begin{cases} \delta_i, & 0 \leq x \leq L \\ 0, & L \leq x \leq R \end{cases}$$

$$i = 1..N$$

משוואות התרסיס- נרמול:

הגדרת הנרמול:

$$(81.2)$$

$$(\xi, \eta, c) \triangleq \left(\frac{x}{R}, \frac{y D_g}{U_{0g} R^2}, \frac{L}{R} \right)$$

$$(\gamma_{d_i}) \triangleq (m_{d_i} / m_{Tot_{Fuel}})$$

$$(\psi_i, \Delta_i) = \frac{R^2}{D_g} (B_i, C_i)$$

משוואת התרסיס הבלתי ממדית:

(91.2)

$$\frac{\partial \gamma_{d_i}}{\partial \eta} = -\Delta_i \gamma_{d_i} + \psi_i \gamma_{d_{i+1}} \quad i = 1..N$$

כאשר המקדמים האינטגרליים הבלתי ממדיים מוגדרים באופן הבא:

(02.2)

$$\Delta_i \triangleq \frac{3\bar{E}}{2} \left(\frac{3d_{H_i} - 2d_{L_i}}{d_{H_i}^3 - d_{L_i}^3} \right) \quad i = 1..N$$

$$\psi_i \triangleq \frac{3\bar{E}}{2} \left(\frac{d_{L_{i+1}}}{d_{H_{i+1}}^3 - d_{L_{i+1}}^3} \right) \quad i = 1..(N-1)$$

$$\psi_N = 0$$

וביטוי למקדם האידוי המנורמל הינו: (12.2)

$$\bar{E} = E \left(\frac{R^2}{D_g} \right)$$

משוואת התרסיס- תנאי השפה הבלתי ממדיים:

(22.2)

: $\eta = 0$

$$\gamma_{d_i} = \begin{cases} \delta_i & 0 \leq \xi \leq c \\ 0 & c \leq \xi \leq 1 \end{cases}, \quad i = 1..N$$

משוואות הפאזה הגזית

ניסוח משוואות הפאזה הגזית:

ע"פ החוק הראשון של פיק לדיפוסיה שטף החומר ליניארי עם הנגזרת המרחבית של ריכוזו:

(32.2)

$$\dot{m}_A = -D_A \nabla \rho_A$$

שילוב של החוק הראשון של פיק לדיפוסיה עם משוואת הרציפות נותן את החוק השני של פיק המוגדר גם כ"משוואת הדיפוסיה" ומתייחס לריכוז חומר המשתנה בזמן. תחת ההנחות שהצבנו לעיל משוואת הפאזה הגזית במונחים של שבר מסי תנוסח בצורה הבאה:

(42.2)

$$U_{0g} \frac{\partial m_A}{\partial y} = D_A \left(\frac{\partial^2 m_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_A}{\partial y^2} \right) + S_A$$

כאשר S_A הינו איבר מקור / בור של רכיב A במונחים של קצב.

משוואה זו תקיפה הן עבור הדלק הגזי והן עבור המחמצן אלא שעבור הדלק הגזי קיים איבר מקור הנובע מאידוי טיפות הדלק שאינו קיים עבור המחמצן בבעיה הנדונה (Katoshevski and Tambour [2000] חקרו בעבודתם להבה דיפוזיבית בזרימה מקבילית כאשר גם הדלק וגם המחמצן מעורבבים עם תרסיס).

נניחה שמקדמי הדיפוסיה של הדלק הגזי ושל המחמצן שווים וכן שמהירויות הזרימה המציפה שוות לשני הגזים. משוואות הפאזה הגזית הינן:

(52.2)

$$U_{0g} \frac{\partial m_{g,fuel}}{\partial y} = D_g \left(\frac{\partial^2 m_{g,fuel}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{g,fuel}}{\partial y^2} \right) + S_{g,fuel_{reac}} + S_{d,fuel}$$

(62.2)

$$U_{0g} \frac{\partial m_{O_2}}{\partial y} = D_g \left(\frac{\partial^2 m_{O_2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{O_2}}{\partial y^2} \right) + S_{O_{2reac}}$$

כאשר $S_{O_{2reac}}$, $S_{g,fuel_{reac}}$ הינם איברי "בור" הנובעים מהריאקציה ו- $S_{d,fuel}$ הינו איבר מקור הנובע מאידוי טיפות הדלק.

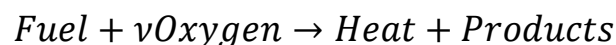
ניתן להגדיר משתנה חדש ע"פ טרנספורמציה Schwab-Zeldovich אשר בעזרתו ניתן לאחד את המשוואות ולהיפטר מאיברי הריאקציה:

(72.2)

$$m \triangleq m_{g,fuel} - m_{O_2}/\nu$$

כאשר ν הינו היחס הסטוכיומטרי בין המרכיבים מתוך משוואת הריאקציה:

(82.2)



איברי הריאקציה פעילים רק באזור הריאקציה עצמו (במקרה הנדון בחזית הלהבה) ואז היחס ביניהם תואם ליחס הסטוכיומטרי כלומר מתקיים:

(92.2)

$$S_{g,fuel_{reac}} = S_{O_{2reac}}/\nu$$

ע"י חילוק משוואה (2.26) ביחס הסטוכיומטרי וחיסור בין המשוואות יתבטלו איברי הריאקציה. ותתקבל משוואה אחת עבור הפאזה הגזית המתאימה לכל השדה ומנוסחת ע"י המשתנה החדש:

(03.2)

$$U_{0g} \frac{\partial m}{\partial y} = D_g \left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right) + S_d$$

כאשר S_d הינו איבר המקור המבטא את קצב אידוי הטיפות והצטרפותן לפאזה הגזית. פתרון משוואה זו יספק את מיקום חזית הלהבה (שבה מתקיים היחס

הסטוכיומטרי בין המגיבים ומתרחשת הריאקציה) ע"י אוסף כל הנקודות בהן $m = 0$.

משוואות הפאזה הגזית- תנאי שפה:

משוואות הפאזה הגזית הינם משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני לכן נדרוש מהפתרון לקיים 2 תנאי שפה בכל כיוון.

תנאי השפה ביציאה מן התעלות כוללים איברים של שטף דיפוזיבי הנובע כתוצאה מגרדיאנט של השבר המסי (באזור הדלק קיימת אפשרות של שטף דיפוזיבי במעלה הזרימה כתוצאה מגרדיאנט חיובי של השבר המסי הנובע מאידוי הטיפות). כפי שהוזכר בהנחות לעיל פרופילי הזרימה של הדלק הגזי ושל המחמצן אחידים. בהתאם להנ"ל תנאי השפה ביציאה מהתעלות הינם:

(13.2)

$y = 0$:

$$m_{g,fuel} - \frac{D_g}{U_{0,g,fuel}} \frac{\partial m_{g,fuel}}{\partial y} = \begin{cases} m_{Tot\ Fuel} \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i \right) , & 0 \leq x \leq L \\ 0 , & L \leq x \leq R \end{cases}$$

עבור הדלק הגזי. ובאופן דומה, תנאי השפה עבור המחמצן הינו:

(23.2)

$y = 0$:

$$m_{O_2} - \frac{D_g}{U_{0,g,fuel}} \frac{\partial m_{O_2}}{\partial y} = \begin{cases} 0 , & 0 \leq x \leq L \\ m_{O_2}(y = 0) , & L \leq x \leq R \end{cases}$$

וע"י שימוש בטרנספורמצית Schwab-Zeldovich יתקבל תנאי השפה:

(33.2)

$$m - \frac{D_g}{U_{0g, fuel}} \frac{\partial m}{\partial y} = \begin{cases} m_{Tot_{Fuel}} \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i \right) , & 0 \leq x \leq L \\ -m_{O_2}(y=0)/\nu & , \quad L \leq x \leq R \end{cases}$$

מטעמי סימטריה:

(43.2)

$$: x = 0 , \quad y \geq 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = 0$$

מטעמי אי-חדירה לדופן התעלה החיצונית:

(53.2)

$$: x = R , \quad y \geq 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = 0$$

מטעמי שיווי משקל תרמודינמי של הזרימה הרחק במורד הזרם:

(63.2)

$$: 0 \leq x \leq R , \quad y \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 0$$

משוואות הפאזה הגזית- נרמול:

הגדרת הנרמול:

(73.2)

$$(\xi, \eta, c) \triangleq \left(\frac{x}{R}, \frac{y D_g}{U_{0g} R^2}, \frac{L}{R} \right)$$

$$(\gamma, V) \triangleq (m, m_{O_2}(y=0)/v)/m_{Tot\ Fuel}$$

משוואת הפאזה הגזית הבלתי ממדית:

(83.2)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \eta^2} + \bar{S}_d$$

כאשר נעשה שימוש במספר Peclet המציין את היחס בין הזמן האופייני לדיפוסיה ובין הזמן האופייני של הזרימה ומוגדר ע"י:

(93.2)

$$Pe = \frac{U_{0g} R}{D_g}$$

הגדרת איבר המקור המנורמל הינה:

(04.2)

$$\bar{S}_d = \frac{S_d R^2}{D_g m_{Tot\ Fuel}}$$

ביטוי לאיבר המקור ייגזר מתוך משוואת הטיפות הבלתי-ממדית (2.19):

ראינו בבניית משוואת הטיפות שהאיבר הראשון מבטא את מסת הטיפות שעוזבות את חתך i והאיבר השני מבטא את מסת הטיפות המצטרפות לחתך i .

מסת הטיפות שעזבה את חתך i ועברה לפאזה הגזית שווה למסת הטיפות שהתאדו מחתך i פחות מסת הטיפות שהגיעה אל חתך i מחתך $i+1$.
במונחים המנורמלים ניתן להציג כמות זו ע"י הביטוי: $\Delta_i \gamma_{d_i} - \psi_i \gamma_{d_{i+1}}$.

איבר המקור במשוואת הדלק הגזי שווה לקצב אידוי הטיפות ונובע מסך קצבי האידוי מכל N החתכים ביחד. הביטוי במונחים המנורמלים לאיבר זה:

(14.2)

$$\bar{S}_d \triangleq \sum_{j=1}^N \Delta_i \gamma_{d_i} - \psi_i \gamma_{d_{i+1}}$$

משוואת הפאזה הגזית- תנאי השפה הבלתי ממדיים:

(24.2)

$$\eta = 0$$

$$\gamma - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^N \delta_i & , \quad 0 \leq \xi \leq c \\ -V & , \quad c \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

(34.2)

$$\xi = 0, 1, \quad \eta \geq 0$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} = 0$$

(44.2)

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \eta \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = 0$$

משוואת הטמפרטורה

ניסוח משוואת הטמפרטורה:

באופן דומה לפיתוח משוואות הפאזה הגזית מתוך חוק שימור המסה ניתן לרשום את משוואת הטמפרטורה מתוך חוק שימור האנרגיה.

על-פי חוק פורי'ה להולכה תרמית ("Fourier Law of thermal conduction") שטף החום ליניארי עם הנגזרת המרחבית של הטמפרטורה (המקביל לחוק פיק עבור המסה):

$$(54.2)$$

$$q = -\lambda \nabla T$$

כאשר λ הינו מקדם המוליכות התרמית ו- T מייצג את הטמפרטורה הממדית של הזורם.

מתוך משוואת הרציפות עבור האנרגיה תתקבל משוואת החום:

$$(64.2)$$

$$U_{0_g} \frac{\partial T}{\partial y} = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \tilde{S}_{reaction} + \tilde{S}_{d_{vaporization}} + \tilde{S}_{d_{burning}}$$

כאשר K הינו מקדם הדיפוסיה התרמי ומוגדר ע"י:

$$(74.2)$$

$$K \triangleq \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

$\tilde{S}_{reaction}$ – הינו איבר מקור אנרגיה במונחי קצב כתוצאה מהריאקציה הכימית.

$\tilde{S}_{d_{vaporization}}$ – הינו איבר "בור" אנרגיה המבטא את קצב החום הנבלע

בתהליך אידוי הטיפות.

$\tilde{S}_{d_{burning}}$ – איבר מקור אנרגיה המבטא את קצב החום המשוחררת לסביבה

כתוצאה מבעירה של טיפות ששרדו את הלהבה (כמוזכר לעיל בהקדמה).

בנוסף, הנחה מקובלת היא שזמן אופייני להתחממות הטיפות קטן משמעותית מזמן אופייני של זרימתן וכן שמעברי האנרגיה כתוצאה מהפרשי הטמפרטורה בין הטיפות וסביבתן זניחים. לפיכך לא קיים איבר של מעבר אנרגיה בין הפאזות כתוצאה מהפרשי טמפרטורות בין הטיפות והגז הנושא.

לאחר הצבת תנאי השפה, נבצע נרמול למשוואה ולאחר מכן נקשור את איברי האידוי והבעירה עם ביטויים שקבלנו לעיל ממשוואת הטיפות.

משוואת הטמפרטורה- תנאי שפה

באופן דומה למשוואת הפאזה הגזית נדרוש שני 2 תנאי שפה בכל כיוון. תנאי השפה ביציאה מן התעלה כולל איבר שטף דיפוזיבי תרמי. הטמפרטורה \dot{T}_0 היא טמפרטורה המוכתבת עבור הדלק הגזי והמחמצן כאחד וכפי שהוזכר לעיל טמפרטורה זו שווה לטמפרטורת האידוי של הטיפות או גבוהה ממנה.

(84.2)

$y = 0$:

$$\dot{T} - \frac{K}{U_{0,g,fuel}} \frac{\partial \dot{T}}{\partial y} = \dot{T}_0$$

משיקולי סימטריה נדרוש:

(94.2)

$x = 0$, $y \geq 0$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial x} = 0$$

מטעמי אי-מעבר חום דרך הדופן החיצונית (בידוד):

(05.2)

$x = R$, $y \geq 0$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial x} = 0$$

מטעמי שיווי משקל תרמודינמי במורד הזרימה הרחק מעבר ללהבה:

(15.2)

$$: 0 \leq x \leq R, \quad y \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial y} = 0$$

משוואת הטמפרטורה- נרמול:

הגדרת הנרמול:

(25.2)

$$(\xi, \eta) \triangleq \left(\frac{x}{R}, \frac{y D_g}{U_{0g} R^2} \right)$$

$$(T) \triangleq \left(\frac{\dot{T} - \dot{T}_0}{\dot{T}_{ref}} \right)$$

$$(\bar{S}_{reac}, \bar{S}_{dv}, \bar{S}_{db}) = \frac{R^2}{D_g \dot{T}_{ref}} (\tilde{S}_{reaction}, \tilde{S}_{d_{vaporization}}, \tilde{S}_{d_{burning}})$$

\dot{T}_0 – טמפרטורת הזרם (גז וטיפות) ביציאתו מהתעלות.

$$\dot{T}_{ref} = \tilde{q}_{reac} / (m_{Tot_{Fuel}} C_P) - \text{טמפרטורת ייחוס (חום הנובע מהריאקציה)}$$

מנורמל בסך הדלק ובמקדם קיבול החום - שקול לטמפרטורה שתתווסף

ליחידת דלק כתוצאה מחום מהריאקציה).

משוואת הטמפרטורה הבלתי-ממדית:

(35.2)

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = Le \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) + \bar{S}_{reac} + \bar{S}_{dv} + \bar{S}_{db}$$

כאשר מספר Lewis מוגדר כיחס בין מקדם הדיפוסיה התרמית ובין מקדם הדיפוסיה המסית ומבטא את יחס השטפים בתאמה (או את היחס ההפוך בין הזמנים האופייניים בהתאמה).

מספר Lewis:

(45.2)

$$Le \triangleq \frac{K}{D_g} = \frac{\lambda}{\rho C_p D_g}$$

בעבודה זו נניח: $Le = 1$. כלומר הדיפוסיה המסית של המגיבים אל אזור הריאקציה (כתוצאה מירידה בריכוזיות המגיבים במקום התגובה הכימית) והדיפוסיה התרמית של החום מאזור הריאקציה (כתוצאה מטמפרטורה מרבית במקום התגובה הכימית) מתרחשים בקצבים זהים. חקירת השפעות של $Le \neq 1$ בלהבות תרסיס דיפוזיביות ניתן לראות למשל בעבודתם של Dvorjetski and Greenberg [2000].

כעת נציג ביטויים עבור איברי המקור הבלתי ממדיים:

\bar{S}_{d_v} : איבר זה מבטא את קצב בליעת החום כתוצאה מאידוי הטיפות והוא שווה לקצב אידוי הטיפות כשהוא מוכפל בחום הכמוס כשהחום הכמוס מתאר את החום הדרוש כדי להפוך יחידת דלק נוזלי לדלק גזי. הביטוי הבלתי ממדי עבור חום אידוי הטיפות מוגדר ע"י:

(55.2)

$$\bar{S}_{d_v} = -\Lambda \bar{S}_d H(c - \xi)$$

כאשר Λ הינו פרמטר הנובע מהנרמול ומוגדר כיחס בין החום הכמוס של הטיפות לחום הנובע מהריאקציה. פונקציית הביסייד $H(\xi)$ שווה ל-1 עבור ξ חיובי ושווה ל-0 עבור ערכים שליליים של ξ .

פונקציית הביסייד בביטוי זה מבטאת את העובדה שהטיפות מתקדמות במורד הזרימה אך ורק מול התעלה הפנימית, כלומר בתחום בו $(\xi < c)$. וזאת ע"פ ההנחות לעיל של מהירות חד-כיוונית ושאינן דיפוסיה בטיפות.

\bar{S}_{d_b} : כפי שהזכרנו, טיפות השורדות את הלהבה ההומוגנית מוצתות וממשיכות בזרימתן כשהן בוערות ומשחררות חום לסביבה. החום הנפלט מהטיפות

הבוערות שווה לחום הנובע מריאקציה של אדי הדלק המתאדים מטיפות אלו. לאור ההנחות לעיל קצב אידוי הטיפות הבוערות שווה לקצב אידוי הטיפות לפני שהוצתו. הביטוי הבלתי ממדי עבור חום הנובע מבעירת הטיפות מוגדר ע"י:

(65.2)

$$\bar{S}_{d_b} = \bar{S}_d H(c - \xi) H(\eta - \eta_f)$$

כאשר η_f מבטא את גובה הלהבה כתלות ב- ξ ופונקציות הביסייד מבטאות את העובדה שחום מתקבל מבעירת הטיפות במורד הזרימה רק מול התעלה הפנימית ורק מעבר ללהבה ההומוגנית.

מעניין לשים לב שהטיפות הבוערות מוגדרות גם כחלק מקבוצת הטיפות המתאדות ואכן גם כשהן בוערות ומשחררות אנרגיה לסביבתן אנרגיה מסוימת בכל-זאת נבלעת כתוצאה מאידוין.

שוב, ע"פ טרנספורמציית Schwab-Zeldovich נגדיר:

(75.2)

$$\gamma_T \triangleq T + \gamma_F$$

ע"י חיבור משוואת הדלק הגזי (משוואה 2.25) בצורתה המנורמלת עם משוואת הטמפרטורה המנורמלת (משוואה 2.53) יתבטלו איברי הריאקציה ותתקבל המשוואה הבאה:

(85.2)

$$\frac{\partial \gamma_T}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \gamma_T}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma_T}{\partial \eta^2} + (1 - \Lambda) \bar{S}_d H(c - \xi)$$

משוואת הטמפרטורה- תנאי השפה הבלתי ממדיים:

תנאי השפה הבלתי ממדיים עבור הטמפרטורה הינם:

$$(95.2)$$

$$: \eta = 0$$

$$T = T_0 + \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\rho C_P D_g} \right)}_{Le=1} \left(\frac{D_g^2}{U_{0g}^2 R^2} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$T - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial T}{\partial \eta} = T_0$$

$$(06.2)$$

$$: \xi = 0, 1, \quad \eta \geq 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0$$

$$(16.2)$$

$$: 0 \leq \xi \leq 1, \quad \eta \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0$$

תנאי השפה הבלתי ממדיים עבור הדלק הגזי (נגזר מ-2.31) הינם:

$$(26.2)$$

$$\gamma_F - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial \gamma_F}{\partial \eta} = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^n \delta_i & , \quad 0 \leq \xi \leq c \\ 0 & , \quad c \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

$$(36.2)$$

$$: \xi = 0, 1, \quad \eta \geq 0$$

$$\frac{\partial \gamma_F}{\partial \xi} = 0$$

(46.2)

$$: 0 \leq \xi \leq 1, \eta \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial \gamma_F}{\partial \eta} = 0$$

לפיכך, תנאי השפה הבלתי ממדיים עבור γ_T הינם:

(56.2)

$$:\eta = 0$$

$$\gamma_T - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial \gamma_T}{\partial \eta} = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^N \delta_i + T_0 & , 0 \leq \xi \leq c \\ T_0 & , c \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

(66.2)

$$:\xi = 0,1, \eta \geq 0$$

$$\frac{\partial \gamma_T}{\partial \xi} = 0$$

(76.2)

$$: 0 \leq \xi \leq 1, \eta \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial \gamma_T}{\partial \eta} = 0$$

לסיכום, בפרק זה הוצגה בניית משוואות השולטות עבור הבעיה הנתונה:
משוואות התרסיס, משוואות הפאזה הגזית ומשוואות הטמפרטורה ונוסחו תנאי
השפה לכל המשוואות כאשר ההנחות שהובילו לניסוחים של המשוואות ותנאי
השפה הוצגו ואוששו.

פרק 3 - פתרון אנליטי עבור משוואות השולטות ותוצאות טיפוסיות

לאחר שבפרק הקודם הוצג פיתוח של משוואות התרסיס, משוואות הפאזה הגזית ומשוואת הטמפרטורה והוגדרו תנאי השפה עבור המשוואות, בפרק זה נציג את פתרון האנליטי ע"פ אותו הסדר ולאחר מכן נציג תוצאות טיפוסיות של הפתרונות.

פתרון משוואת התרסיס

משוואת התרסיס עבור השבר המסי המנורמל של טיפות מחתך i המבוטא ע"י

$$\gamma_{d_i}$$

(1.3)

$$\frac{\partial \gamma_{d_i}}{\partial \eta} = -\Delta_i \gamma_{d_i} + \psi_i \gamma_{d_{i+1}} \quad i = 1..N$$

כאשר הביטויים עבור המקדמים האינטגרליים Δ_i ו- ψ_i הם של חתך i הינם (לפיתוח הביטויים ראה בפרק 2):

(2.3)

$$\Delta_i \triangleq \frac{3\bar{E}}{2} \left(\frac{3d_{H_i} - 2d_{L_i}}{d_{H_i}^3 - d_{L_i}^3} \right) \quad i = 1..N$$

$$\psi_i \triangleq \frac{3\bar{E}}{2} \left(\frac{d_{L_{i+1}}}{d_{H_{i+1}}^3 - d_{L_{i+1}}^3} \right) \quad i = 1..(N-1)$$

$$\psi_N = 0$$

תנאי השפה עבור משוואת התרסיס הינם:

(3.3)

$$\eta = 0$$

$$\gamma_{d_i} = \begin{cases} \delta_i & 0 \leq \xi \leq c \\ 0 & c \leq \xi \leq 1 \end{cases}, \quad i = 1..N$$

כיוון שהמשוואות עבור החתכים השונים צמודות באופן שפתרון עבור חתך i תלוי בפתרון עבור חתך $i + 1$ ופתרון המשוואה עבור חתך N הוא פתרון מערכי, נניח פתרון מהצורה:

(4.3)

$$\gamma_{d_j} = \sum_{i=j}^N \Omega_{ij} e^{-\Delta_i \eta}$$

נציב את הפתרון במשוואת הטיפות:

(5.3)

$$-\sum_{i=j}^N \Delta_i \Omega_{ij} e^{-\Delta_i \eta} = -\Delta_j \sum_{i=j}^N \Omega_{ij} e^{-\Delta_i \eta} + \psi_j \sum_{i=j+1}^N \Omega_{i,j+1} e^{-\Delta_i \eta}$$

הפתרון למקדמי ההשפעה Ω_{ij} הוא:

(6.3)

$$\therefore \Omega_{ij} = \frac{\psi_j}{\Delta_j - \Delta_i} \Omega_{i,j+1} \quad (i > j)$$

ע"י הצבת הפתרון בתנאי השפה מתקבל:

(7.3)

$$\gamma_{d_j}(0) = \sum_{i=j}^N \Omega_{ij} = \sum_{i=j}^N \delta_i$$

$$\therefore \Omega_{jj} = \sum_{i=j}^N \delta_i - \sum_{i=j+1}^N \Omega_{ij} = \gamma_{d_j}(0) - \sum_{i=j+1}^N \Omega_{ij} \quad , \quad (j < N)$$

$$\therefore \Omega_{NN} = \sum_{i=j}^N \delta_i = \gamma_{d_N}(0)$$

יש לציין כאן שפתרון זה הוא פתרון רציף ולכן הינו פתרון מקורב כיוון שהשבר המסי המנורמל, למרות היותו גודל רציף, מתנהג למעשה בצורה שאינה רציפה. הדבר נובע מהשימוש בשיטת החתכים שבעזרתה נוסחו המשוואות ושמגדירה

את חתך i כמכיל טיפות בגודל המוגדר על-ידי הטווח $\{v | v_{L_i} \leq v < v_{H_i}\}$. קצב שינוי כמות התרסיס (להסבר מפורט של גודל זה ראה פרק 2) נובע, בין השאר, מטיפות שמצטרפות לחתך i (בגודל v_{H_i} בלבד) ומטיפות שעוזבות את חתך i (בגודל v_{L_i} בלבד) וזו תופעה בדידה (דיסקרטית). בנוסף, בגלל אותה הסיבה לא ייתכן שהפתרון עבור השבר המסי המנורמל של חתך i יהיה שווה לערכים הנמוכים מהשבר המסי המנורמל של טיפה בודדת בגודל v_{L_i} . אף-על-פי-כן קירוב זה מאפשר את הפתרון האנליטי הפשוט והוא קירוב טוב מאד כיוון שתרסיס ממוצע מכיל עשרות עד מאות אלפי טיפות והקפיצה הגדולה ביותר היא מעבר של טיפה בודדת מהחתך הגבוה ביותר לחתך שתחתיו, כלומר תופעה הקטנה במספר סדרי גודל מהגדלים האופייניים של הבעיה. ולכן ניתן להניח שהשינוי הדיסקרטי זניח. מכאן והלאה נתייחס אל פתרון משוואת התרסיס כפתרון רציף.

לסיכום, פתרון משוואת הטיפות הינו:

(8.3)

$$\gamma_{d_j} = \sum_{i=j}^N \Omega_{ij} e^{-\Delta_i \eta}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{\psi_j}{\Delta_j - \Delta_i} \Omega_{i,j+1} \quad (i > j)$$

$$\Omega_{jj} = \gamma_{d_j}(0) - \sum_{i=j+1}^N \Omega_{ij} = \delta_j - \sum_{i=j+1}^{N_s} \Omega_{ij}$$

פתרון משוואת הפאזה הגזית

משוואת הפאזה הגזית:

(9.3)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \eta^2} + \bar{S}_d$$

כאשר γ מוגדר ע"י:

(01.3)

$$\gamma \triangleq \gamma_F - \gamma_O$$

כאשר S_d מבטא את קצב היווצרות אדי הדלק כתוצאה מאידוי הטיפות ומבוטא ע"י:

(11.3)

$$\bar{S}_d \triangleq \sum_{j=1}^N \Delta_j \gamma_{d_j} - \psi_j \gamma_{d_{j+1}}$$

ותנאי השפה הינם:

(21.3)

$$\eta = 0$$

$$\gamma - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^N \delta_i & , \quad 0 \leq \xi \leq c \\ -V & , \quad c \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

(31.3)

$$\xi = 0, 1 \quad , \quad \eta \geq 0$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} = 0$$

(41.3)

$$: 0 \leq \xi \leq 1, \eta \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = 0$$

(51.3)

נציג את הפתרון כסכום של פתרון הומוגני ופתרון פרטי:

(61.3)

$$\gamma = \gamma_h + \gamma_p$$

הפותרים בהתאמה את המשוואה הומוגנית:

(71.3)

$$\frac{\partial \gamma_h}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \gamma_h}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \gamma_h}{\partial \eta^2}$$

והמשוואה פרטית:

(81.3)

$$\frac{\partial \gamma_p}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \gamma_p}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \gamma_p}{\partial \eta^2} + \bar{S}_d$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

נניח פתרון מהצורה:

(91.3)

$$\gamma_h = f_h(\eta) \cdot g_h(\xi)$$

ע"י הצבת הפתרון במשוואת הגזים ההומוגנית (3.17) נקבל:

(02.3)

$$\frac{df_h}{d\eta} \cdot g_h = f_h \cdot \frac{d^2 g_h}{d\xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{d^2 f_h}{d\eta^2} \cdot g_h$$

(12.3)

$$\left(\frac{df_h}{d\eta} - \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{d^2 f_h}{d\eta^2}\right) / f_h = \frac{d^2 g_h}{d\xi^2} / g_h = Const \triangleq -\alpha$$

המשוואה עבור פונקציה $g_h(\xi)$:

(22.3)

$$\frac{d^2 g_h}{d\xi^2} + \alpha g_h = 0$$

ופתרונה:

(32.3)

$$g_h = C_1 \sin \sqrt{\alpha} \xi + C_2 \cos \sqrt{\alpha} \xi$$

המשוואה עבור פונקציה $f_h(\xi)$:

(42.3)

$$\frac{d^2 f_h}{d\eta^2} - Pe^2 \frac{df_h}{d\eta} - \alpha (Pe)^2 f_h = 0$$

ננחש פתרון מעריכי מהצורה:

(52.3)

$$f_h = C_3 e^{C_4 \eta}$$

על-ידי הצבת הפתרון במשוואה נקבל:

(62.3)

$$C_4^2 - (Pe)^2 C_4 - (Pe)^2 \alpha = 0$$

פתרון המשוואה הריבועית הינו:

(72.3)

$$C_4 = \frac{1}{2} \left[(Pe)^2 \pm \sqrt{(Pe)^4 + 4\alpha (Pe)^2} \right]$$

נדרוש $C_4 < 0$ כדי לקיים את תנאי שפה (3.14) ולכן:

(82.3)

$$\therefore C_4 = \frac{(Pe)^2}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{(Pe)^2}} \right] \triangleq q_n$$

פתרון המשוואה ההומוגנית (C_1, C_2 מוגדרים מחדש):

(92.3)

$$\gamma_h = f_h \cdot g_h = e^{q_n \eta} (C_1 \sin \sqrt{\alpha} \xi + C_2 \cos \sqrt{\alpha} \xi)$$

$$q_n \triangleq \frac{(Pe)^2}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{(Pe)^2}} \right]$$

פתרון המשוואה הפרטית:

נניח שוב פתרון של הפרדת משתנים:

(03.3)

$$\gamma_p = f_p(\eta) \cdot g_p(\xi)$$

ע"י הצבת הפתרון במשוואה הפרטית (3.18) נקבל:

(13.3)

$$\left(\frac{df_p}{d\eta} - \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{d^2 f_p}{d\eta^2} \right) \cdot g_p - f_p \cdot \frac{d^2 g_p}{d\xi^2} = \bar{S}_d$$

כאשר ע"פ הגדרת \bar{S}_d (3.11) ומתוך משוואת הטיפות (3.1) נובע:

(23.3)

$$\bar{S}_d = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \gamma_{d_j}}{\partial \eta}$$

כאשר נציב את הביטוי עבור γ_{d_j} נקבל:

(33.3)

$$\begin{aligned}\bar{S}_d &= - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=j}^N \Omega_{ij} e^{-\Delta_i \eta} \\ &= - \sum_{j=1}^N \sum_{i=j}^N -\Delta_i \Omega_{ij} e^{-\Delta_i \eta}\end{aligned}$$

נזכיר ש Ω_{ij} תלוי ב ξ (ראה 3.8), ולכן $\bar{S}_d = \bar{S}_d(\xi, \eta)$.

ניתן להסתכל על Ω_{ij} כמקדם השפעה של אידוי חתך i על חתך j כאשר i - חתך הטיפות המשפיעות ו- j - חתך הטיפות המושפעות. לפיכך, הביטוי האחרון עבור \bar{S}_d הינו סכימת החתכים המושפעים כך שלכל חתך j נסכם את השפעת החתכים המשפיעים עליו i ($j \leq i$). צורת סכימה נוספת אפשרית הינה סכימת החתכים המשפיעים כך שלכל חתך i נסכם את השפעתו על כל החתכים המושפעים ממנו j ($i \geq j$). הביטוי עבור הסבר זה:

(43.3)

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=j}^N \Delta_i \Omega_{ij} e^{-\Delta_i \eta} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \Delta_i \Omega_{ij} e^{-\Delta_i \eta}$$

כעת ניתן להציג את \bar{S}_d כמכפלה של פונקציות שאינן רבות משתנים:

(53.3)

$$\bar{S}_d = \underbrace{\sum_{i=1}^N \Delta_i e^{-\Delta_i \eta}}_{f(\eta)} \underbrace{\sum_{j=1}^i \Omega_{ij}}_{g(\xi)}$$

נגדיר

(63.3)

$$\sum_{j=1}^i \Omega_{ij} \triangleq H_i(\xi)$$

הביטוי עבור $H_i(\xi)$ תלוי בפילוג הטיפות ההתחלתי ומתאפס עבור $c > \xi$. נציגו ע"י טור פורייה:

(73.3)

$$H_i(\xi) = \frac{1}{2}k_{0_i} + \sum_{m=1}^{\infty} k_{m_i} \cos m\pi\xi$$

בהתאם לצורה הפונקציונאלית של \bar{S}_d נציג את הפתרון הפרטי ע"י:

(83.3)

$$\gamma_p = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2}b_{0_i} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_i} \cos n\pi\xi \right) e^{-\Delta_i\eta}$$

ע"י הצבת γ_p במשוואת הגזים (3.31) נקבל:

(93.3)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[\left(-\Delta_i - \frac{\Delta_i^2}{Pe^2} \right) \left(\frac{1}{2}b_{0_i} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_i} \cos n\pi\xi \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 b_{n_i} \cos n\pi\xi \right] \cdot e^{-\Delta_i\eta} \\ & = \sum_{i=1}^N \Delta_i \cdot e^{-\Delta_i\eta} \left(\frac{1}{2}k_{0_i} + \sum_{m=1}^{\infty} k_{m_i} \cos m\pi\xi \right) \end{aligned}$$

ע"י השוואת איברים נמצא את הביטויים למקדמים b_{0_i}, b_{n_i} :

(04.3)

$$\sum_{i=1}^N \left(-\Delta_i - \frac{\Delta_i^2}{Pe^2} \right) \frac{1}{2}b_{0_i} \cdot e^{-\Delta_i\eta} = \sum_{i=1}^N \Delta_i \cdot e^{-\Delta_i\eta} \frac{1}{2}k_{0_i}$$

$$\therefore b_{0_i} = \frac{-\Delta_i}{\Delta_i + \left(\frac{\Delta_i}{Pe} \right)^2} \cdot k_{0_i}$$

(14.3)

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\Delta_i - \frac{\Delta_i^2}{Pe^2} + (n\pi)^2 \right) b_{n_i} \cos n\pi\xi \right) \cdot e^{-\Delta_i\eta}$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{m=1}^{\infty} \Delta_i k_{m_i} \cos m\pi\xi \right) \cdot e^{-\Delta_i\eta}$$

$$\therefore b_{n_i} = \frac{-\Delta_i}{\Delta_i + \left(\frac{\Delta_i}{Pe}\right)^2 - (n\pi)^2} \cdot k_{n_i}$$

נזכיר שהפתרון הינו:

(24.3)

$$\gamma = \gamma_h + \gamma_p$$

כאשר:

(34.3)

$$\gamma_h = e^{q_n\eta} (C_1 \sin \sqrt{\alpha}\xi + C_2 \cos \sqrt{\alpha}\xi)$$

$$\gamma_p = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} b_{0_i} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_i} \cos n\pi\xi \right) e^{-\Delta_i\eta}$$

והביטויים עבור q_n, b_{0_i}, b_{n_i} מוגדרים לעיל.מציאת המקדמים C_1, C_2, α תבוצע ע"י התאמת הפתרון לתנאי השפה.קיום תנאי השפה עבור $\xi = 0$ (3.13):

(44.3)

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \sqrt{\alpha} e^{q_n\eta} C_1 = 0$$

$$\therefore C_1 = 0$$

קיום תנאי השפה עבור $\xi = 1$ (3.13):

(54.3)

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = -\sqrt{\alpha} e^{q_n \eta} C_2 \sin \sqrt{\alpha} = 0$$

כדי לא לקבל את הפתרון הטריטוריאלי עבור החלק ההומוגני:

(64.3)

$$C_{2_n} \neq 0, \quad \alpha = (n\pi)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

הפתרון ההומוגני לפיכך הינו:

(74.3)

$$\gamma_h = \sum_{n=0}^{\infty} e^{q_n \eta} C_{2_n} \cos n\pi \xi$$

כאשר:

(84.3)

$$q_n \triangleq \frac{Pe^2}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4n^2\pi^2}{Pe^2}} \right]$$

קיום תנאי השפה עבור $\eta = 0$:

נזכיר את התנאי לשפה זו (משוואה 3.12):

$$\left(\gamma - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^N \delta_i & , 0 \leq \xi \leq c \\ -V & , c \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

נפתח את RHS לטור פורי'ה:

(94.3)

$$RHS \triangleq \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{n_i} \cos(n\pi\xi)$$

$$d_0 = 2 \int_0^c \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i\right) d\xi + 2 \int_c^1 (-V) d\xi = 2c \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i\right) + 2V(c-1)$$

$$d_0 = 2c \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i + V\right) - 2V$$

$$d_n = 2 \int_0^c \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i\right) \cos(n\pi\xi) d\xi - 2 \int_c^1 V \cos(n\pi\xi) d\xi =$$

$$d_n = \frac{2(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i)}{n\pi} \sin(n\pi c) + \frac{2V}{n\pi} \sin(n\pi c)$$

הביטוי עבור RHS של תנאי השפה עבור $\eta = 0$:

(05.3)

$$RHS = c \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i + V\right) - V + \frac{2}{\pi} \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i + V\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi c)}{n} \cos(n\pi\xi)$$

פיתוח הביטוי עבור LHS:

(15.3)

$$\gamma - \frac{1}{(Pe)^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} =$$

$$C_{2_0} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{q_n \eta} C_{2_n} \cos n \pi \xi \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right) + \sum_{i=1}^N e^{-\Delta_i \eta} \left(\frac{1}{2} b_{0_i} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_i} \cos n \pi \xi \right) \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right)$$

נציב בביטוי $\eta = 0$ ונשווה לביטוי עבור RHS של תנאי השפה (3.50):

(25.3)

$$\left(\gamma - \frac{1}{(Pe)^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} =$$

$$C_{2_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} b_{0_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{2_n} \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right) + \sum_{i=1}^N b_{n_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right) \right] \cos n \pi \xi =$$

$$c \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i + V\right) - V + \frac{2}{\pi} \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i + V\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \pi c)}{n} \cos(n \pi \xi)$$

ע"י השוואת איברים נמצא את הביטויים למקדמים C_{2_0}, C_{2_n} :

(35.3)

$$C_{2_0} = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} b_{0_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right) + c \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i + V\right) - V$$

$$C_{2_0} = c(1 + V) - V - \sum_{i=1}^N c\delta_i + \frac{1}{2}b_{0_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right) \quad (45.3)$$

$$C_{2_n} = \frac{2}{\pi} \left(1 - \sum_{j=1}^N \delta_j + V\right) \frac{\sin(n\pi c)}{n \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right)} - \sum_{i=1}^N b_{n_i} \frac{\left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right)}{\left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right)}$$

$$C_{2_n} = 2(1 + V) \frac{\sin(n\pi c)}{n\pi \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right)} - \sum_{i=1}^N \frac{b_{n_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right) n\pi + 2\delta_i \sin(n\pi c)}{\left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right) n\pi}$$

לאחר סידור האיברים הפתרון עבור γ הינו:

(55.3)

$$\gamma = \gamma_h + \gamma_p$$

$$\begin{aligned} \gamma = & c(1 + V) - V + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_{0_i} - 2c\delta_i + b_{0_i} e^{-\Delta_i \eta}) \\ & + \frac{2}{\pi} (1 + V) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi c)}{n \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right)} e^{q_n \eta} \cos(n\pi \xi) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \left(b_{n_i} e^{-\Delta_i \eta} \right. \\ & \left. - \frac{b_{n_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right) n\pi + 2\delta_i \sin(n\pi c)}{\left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right) n\pi} e^{q_n \eta} \right) \cos(n\pi \xi) \end{aligned}$$

כאשר ביטויים עבור $k_{0_i}, k_{n_i}, b_{0_i}, b_{n_i}, q_n$ מופיעים

במשוואות (3.36), (3.37), (3.40), (3.41), (3.48) בהתאמה.

חזית הלהבה ממוקמת באוסף הנקודות בהן $\gamma = 0$ - שם מתקיים היחס הסטוכיומטרי בין מגיבים (ראה משוואה 3.10).

פתרון משוואת הטמפרטורה

משוואת הטמפרטורה:

(65.3)

$$\frac{\partial \gamma_T}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \gamma_T}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma_T}{\partial \eta^2} + (1 - \Lambda) \bar{S}_d H(c - \xi)$$

כאשר γ_T מוגדר ע"י:

(75.3)

$$\gamma_T \triangleq T + \gamma_F$$

(באיבר המקור מופיעה פונקציית הביסייד המבטאת את העובדה שאיבר זה התלוי באידיי הטיפות תקף במורד הזרימה מול התעלה הפנימית בלבד. עובדה זו כבר באה לידי ביטוי בביטוי עבור \bar{S}_d שנשמך על פתרון משוואת התרסיס ומופיע במשוואות 3.35, 3.36). לכן אין יותר צורך בכתיבת פונקציית הביסייד באיבר זה).

ותנאי השפה הינם:

(85.3)

$$\eta = 0$$

$$\gamma_T - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial \gamma_T}{\partial \eta} = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^N \delta_i + T_0 & , 0 \leq \xi \leq c \\ T_0 & , c \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

(95.3)

$$\xi = 0, 1, \quad \eta \geq 0$$

$$\frac{\partial \gamma_T}{\partial \xi} = 0$$

(06.3)

$$: 0 \leq \xi \leq 1, \eta \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial \gamma_T}{\partial \eta} = 0$$

(16.3)

נציג את הפתרון כסכום של פתרון הומוגני ופתרון פרטי:

(26.3)

$$\gamma_T = \gamma_{T_h} + \gamma_{T_p}$$

הפתורים בהתאמה את המשוואה הומוגנית:

(36.3)

$$\frac{\partial \gamma_{T_h}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \gamma_{T_h}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \gamma_{T_h}}{\partial \eta^2}$$

והמשוואה פרטית:

(46.3)

$$\frac{\partial \gamma_{T_p}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \gamma_{T_p}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \gamma_{T_p}}{\partial \eta^2} + (1 - \Lambda) \bar{S}_d$$

כיוון שמשוואת הטמפרטורה ההומוגנית זזה למשוואת הפאזה הגזית

ההומוגנית (3.17) פתרון המשוואה זזה () מקדמים C_1, C_2, α יקבלו ערכים

שונים מערכם במשוואת הפאזה הגזית):

(56.3)

$$\gamma_{T_h} = e^{q_n \eta} (C_1 \sin \sqrt{\alpha} \xi + C_2 \cos \sqrt{\alpha} \xi)$$

כאשר q_n מוגדר במשוואה (3.29).

עבור משוואת הטמפרטורה הפרטית נגדיר:

(66.3)

$$\begin{aligned}\bar{S}'_d &= (1 - \Lambda)\bar{S}_d \\ &= (1 - \Lambda) \underbrace{\sum_{i=1}^N \Delta_i e^{-\Delta_i \eta}}_{f(\eta)} \underbrace{\sum_{j=1}^i \Omega_{ij}}_{g(\xi)}\end{aligned}$$

וכשם שהוגדר עבור פתרון משוואת הפאזה הגזית הפרטית (3.36) נגדיר:

(76.3)

$$H'_i(\xi) \triangleq (1 - \Lambda)H_i(\xi) = (1 - \Lambda) \sum_{j=1}^i \Omega_{ij}$$

נציג את $H'_i(\xi)$ ע"י טור פורי'ה:

(86.3)

$$H'_i(\xi) = \frac{1}{2}k'_{0_i} + \sum_{m=1}^{\infty} k'_{m_i} \cos m\pi\xi$$

מקדמי הטור תלויים במקדמי הטור עבור $H_i(\xi)$ (ראה משוואה 3.36, 3.37)

ע"י היחס הבא:

(96.3)

$$(k'_{0_i}, k'_{n_i}) = (1 - \Lambda)(k_{0_i}, k_{n_i})$$

על-ידי ההגדרות הנ"ל משוואת הטמפרטורה דומה למשוואת הפאזה הגזית ותהליך פתרון מכאן ועד ליישום תנאי השפה עבור $\eta = 0$ (זהה 3.38-3.48).

פתרון משוואת הטמפרטורה לפיכך הינו:

(07.3)

$$\gamma_T = \gamma_{T_h} + \gamma_{T_p}$$

הפתרון ההומוגני הינו:

(17.3)

$$\gamma_{T_h} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{q_n \eta} C'_{2n} \cos n \pi \xi$$

כאשר:

(27.3)

$$q_n \triangleq \frac{Pe^2}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4n^2 \pi^2}{Pe^2}} \right]$$

והפתרון הפרטי הינו:

(37.3)

$$\gamma_{T_p} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} b'_{0_i} + \sum_{n=1}^{\infty} b'_{n_i} \cos n \pi \xi \right) e^{-\Delta_i \eta}$$

כאשר

(47.3)

$$b'_{0_i} = \frac{-\Delta_i}{\Delta_i + \left(\frac{\Delta_i}{Pe}\right)^2} \cdot k'_{0_i}$$

$$b'_{n_i} = \frac{-\Delta_i}{\Delta_i + \left(\frac{\Delta_i}{Pe}\right)^2 - (n\pi)^2} \cdot k'_{n_i}$$

נדרוש קיום לתנאי השפה עבור $\eta = 0$ (3.58).

בפיתוח RHS של תנאי השפה נוכל להיעזר במשוואה (3.50), להציב $V = 0$ ולהוסיף T_0 :

(57.3)

$$RHS = c \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i + T_0 \right) + \frac{2}{\pi} \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi c)}{n} \cos(n\pi \xi)$$

בפיתוח LHS של תנאי השפה נוכל להיעזר במשוואה (3.52):

(67.3)

$$\left(\gamma - \frac{1}{(Pe)^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0} =$$

$$C'_{2_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} b'_{0_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C'_{2_n} \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2} \right) + \sum_{i=1}^N b'_{n_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2} \right) \right] \cos n\pi \xi$$

ע"י השוואת איברים נמצא את המקדמים C'_{2_0}, C'_{2_n} :

(77.3)

$$C'_{2_0} = c + T_0 - \sum_{i=1}^N c \delta_i + \frac{1}{2} b'_{0_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2} \right)$$

$$C'_{2_n} = \frac{2 \sin(n\pi c)}{n\pi \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2} \right)} - \sum_{i=1}^N \frac{b'_{n_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2} \right) n\pi + 2 \delta_i \sin(n\pi c)}{\left(1 - \frac{q_n}{Pe^2} \right) n\pi}$$

לאחר סידור האיברים הפתרון עבור γ_T הינו:

(87.3)

$$\gamma_T = \gamma_{T_h} + \gamma_{T_p}$$

$$\begin{aligned} \gamma_T = c + T_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k'_{0_i} - 2c\delta_i + b'_{0_i} e^{-\Delta_i \eta}) \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi c)}{n \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right)} e^{q_n \eta} \cos(n\pi \xi) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \left(b'_{n_i} e^{-\Delta_i \eta} \right. \\ \left. - \frac{b'_{n_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right) n\pi + 2\delta_i \sin(n\pi c)}{\left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right) n\pi} e^{q_n \eta} \right) \cos(n\pi \xi) \end{aligned}$$

כאשר ביטויים עבור $k'_{0_i}, k'_{n_i}, b'_{0_i}, b'_{n_i}, q_n$ מופיעים

במשוואות (3.68), (3.69), (3.72), (3.74) בהתאמה.

למציאת שדה הטמפרטורה יש לפתור את γ_T, γ בכל השדה.

באזור הדלק הגזי: $T = \gamma_T - \gamma$ כיוון ש $\gamma = \gamma_F$,

ובאזור המחמצן: $T = \gamma_T$ כיוון ש $\gamma_F = 0$.

בהמשך הפרק נציג תוצאות טיפוסיות עבור הפתרונות האנליטיים.

תוצאות טיפוסיות

ראשית נציג את הערכים בהם נעשה שימוש עבור הפרמטרים המאפיינים את הבעיה. לאחר מכן נציג תוצאות טיפוסיות של הפתרונות האנליטיים שהוצגו לעיל עבור משוואת התרסיס, משוואת הפאזה הגזית ומשוואת הטמפרטורה. כמו-כן יוצגו תוצאות אופייניות עבור להבות תרסיס המסתמכות על הפתרונות הללו.

$N = 9$ (מספר החתכים).

טבלה 3-1: חלוקת החתכים ע"פ קוטר מרבי ומזערי

Table 3-1: Sections' Division by Maximum and Minimum Diameter

חתך	$d_{L_i} \div d_{H_i} [\mu m]$
1	1-5
2	5-10
3	10-20
4	20-30
5	30-40
6	40-50
7	50-70
8	70-90
9	90-110

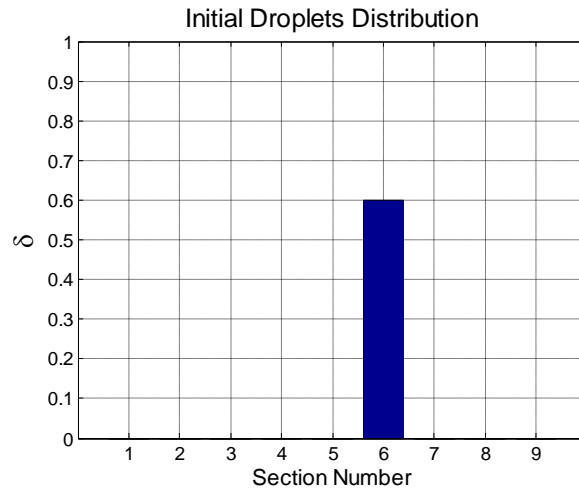
$c = 0.166$ (חצי רוחב תעלה פנימית-מנורמל)

$V = 0.3$ (שבר מסי מנורמל התחלתי של המחמצן)

תוצאות טיפוסיות

ראשית נציג תוצאה טיפוסית עבור השבר המסי המנורמל של טיפות התרסיס

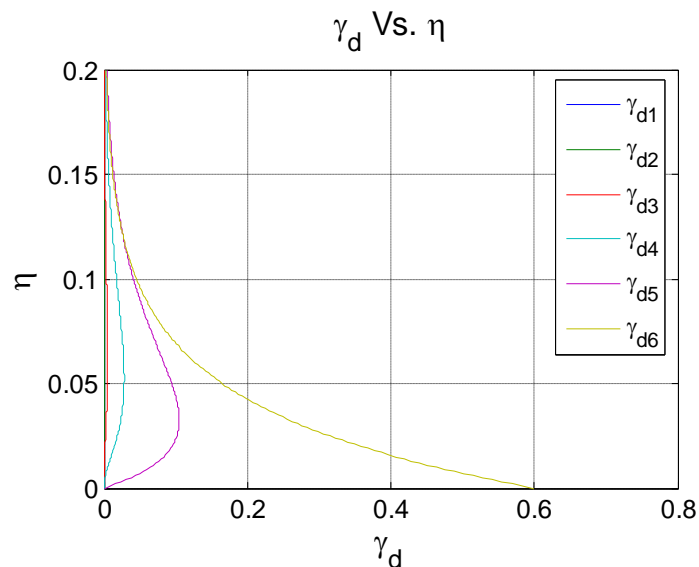
(3.8). בתור פילוג טיפות התחלתי נניח **פילוג חד-חלקי**: $\delta_i = \begin{cases} 0.6, & i = 6 \\ 0, & i \neq 6 \end{cases}$



גרף 3-1: היסטוגרמה של פילוג טיפות התחלתי

Graph 3-1: Initial Droplets Distribution Histogram

עבור: $Pe = 10$, $\bar{E} = 15,000$ מתקבל:

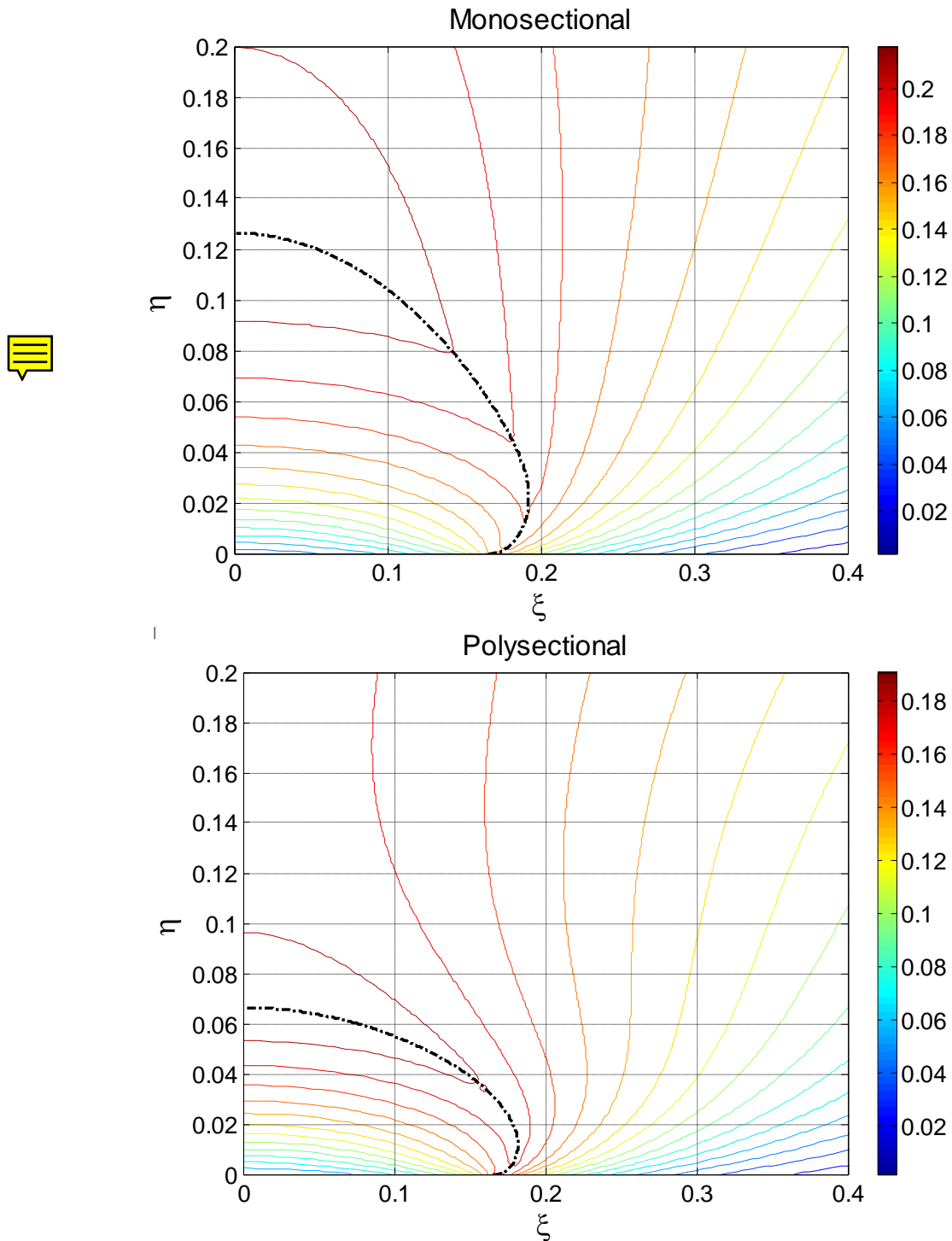


גרף 3-2: השברים המסיים המנורמלים של החתכים במורד הזרימה

Graph 3-2: Downstream Sections Normalized Mass Fractions

ניתן לראות פתרונות דועכים מעריכית כאשר עבור חתכים נמוכים מחתך 6 קיימת עלייה לפני הדעיכה הנובעת מהצטרפות טיפות מחתכים יותר גבוהים.

עבור פילוג הטיפות ההתחלתי הנ"ל בו כל הטיפות מחתך 6, נציג השוואה בין חזית הלהבה ושדה הטמפרטורה המתקבלים ממודל חד חתכי ואלו המתקבלים מהמודל הרב-חתכי ($Pe = 10, \bar{E} = 3,000$).



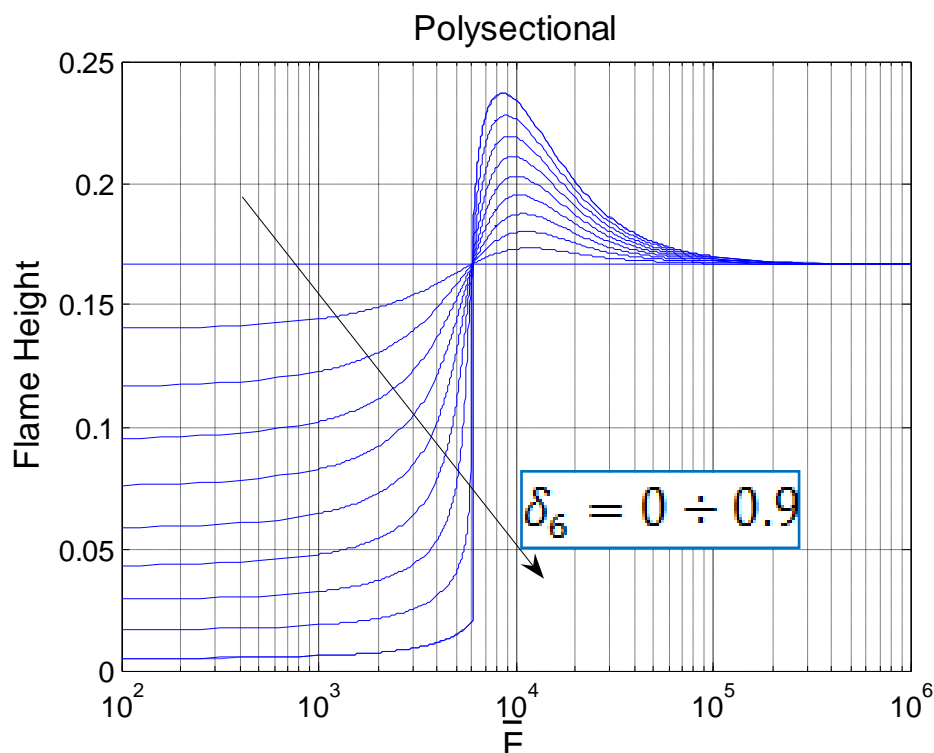
גרף 3-3: חזית הלהבה ושדה הטמפרטורה – השוואה בין מודל חד-חתכי ומודל רב-חתכי

Graph 3-3: Flame Contour and Temperature Field – Comparison Between Monosectional and Polysectional Models

ניתן לראות שקיימים הבדלים משמעותיים בין הפתרונות: גובה הלהבה ע"פ המודל החדש (הרב-חתכי) קטן בערך פי שניים וגם הטמפרטורה הגבוהה בשדה נמוכה יותר. שני אלו גורמים לקונטורים להראות מעט שונה.

תוצאה זו ממחישה שהמודל החד חתכי אינו מדויק די הצורך אפילו עבור תרסיס חד-חתכי (שכל הטיפות בו נמצאות בתווך הגדלים של חתך בודד). וזאת מכיוון שטיפות התרסיס מתאדות וקטנות כפי שראינו בגרף 2-3 ועוברות לחתכים נמוכים יותר, המאופיינים רק במודל הרב-חתכי.

הגרפים הבאים מציגים את גובה השיא של להבת התרסיס כתלות במקדם האידי המנורמל של טיפות הדלק וכתלות בכמות התרסיס היחסית מסך הדלק (גזי+טיפות). פילוג הטיפות ההתחלתי עבור כל הגרפים הינו פילוג של תרסיס חד-חתכי שכל טיפותיו מצויות בטווח הגדלים של חתך 6. למשל $\delta_6 = 0.4$ מציין ש-40% מהדלק בכניסה לתא השריפה הוא בצורת תרסיס שטיפותיו מצויות בטווח הגדלים של חתך 6 ושאר הדלק גזי. ($Pe = 10$).



גרף 3-4: גובה הלהבה כנגד מקדם האידי המנורמל לכמות דלק נוזלי משתנה – מודל רב-חתכי

Graph 3-4: Flame Height Vs. Normalized Vaporization Coefficient for Various Liquid fuel Load – Polysectional Model

הסבר קצר על התוצאות:

הגרף הישר: $\gamma_f \cong 0.17$ מציין את גובה הלהבה הגזית (להבת Burke & Schumann הקלאסית). כמובן שאינו תלוי במקדם האידוי.

שאר הגרפים מתחלקים ל-3 אזורים:

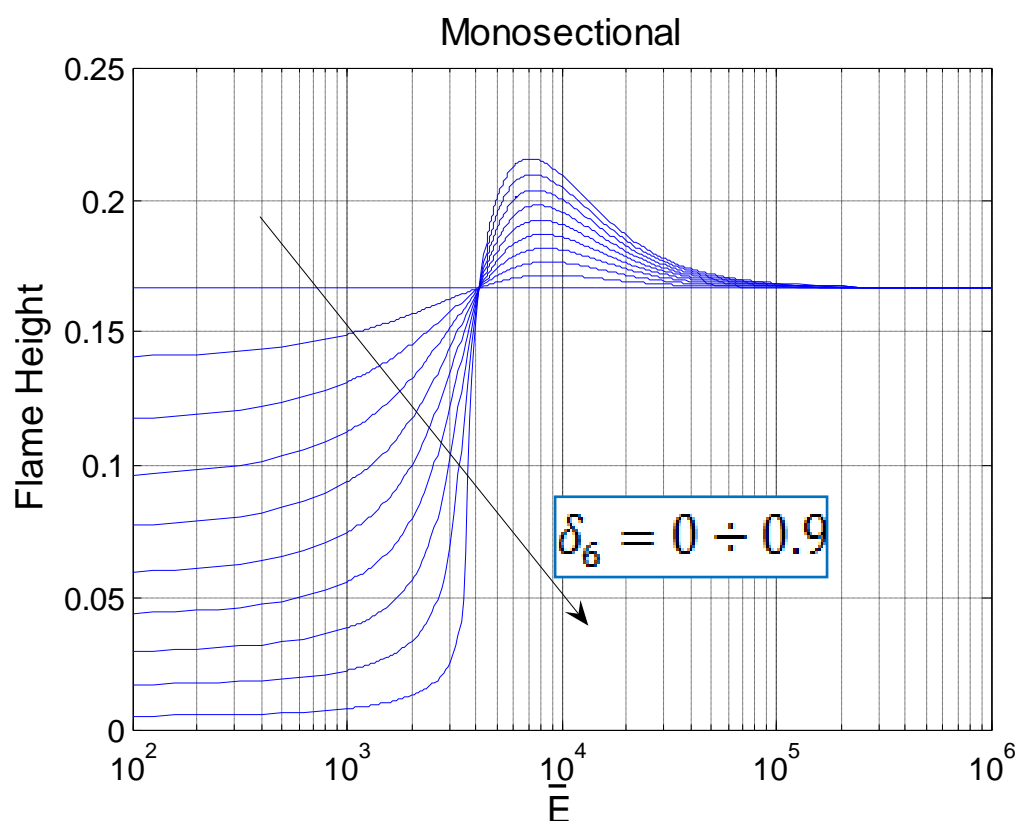
(א) עבור מקדמי אידוי נמוכים (עד $\bar{E} \cong 2,000$) גובה הלהבה נקבע בעיקר ע"פ כמות התרסיס ההתחלתית. ההסבר לכך הוא שהטיפות כמעט ולא מתאדות וכל השפעתן היא שככל שיש יותר דלק בצורת תרסיס כך יש פחות דלק גזי. והלהבה נמוכה יותר.

(ב) עבור מקדמי אידוי גבוהים יותר (עד $\bar{E} \cong 50,000$) גובה הלהבה תלוי משמעותית במקדם האידוי. גובה הלהבה עולה עם מקדם האידוי עד לנקודת שיא הגבוהה מגובה הלהבה הגזית ואז יורד בשאיפה לגובה הלהבה הגזית. תופעה זו הוצגה לראשונה ב עבודתו של Greenberg [1989] (בהתבסס על מודל חד-חתי) ומשמעותה היא שתחת כמות דלק נתונה, ע"י הזרקתה בצורת תרסיס טיפות כך שאדי הדלק מצטרפים לשדה הזרימה בהדרגתיות, ניתן להגיע ללהבות הגבוהות מהלהבה הגזית. התופעה בולטת יותר ככל שכמות גדולה יותר של דלק מוזרקת כתרסיס.

(ג) עבור מקדמי אידוי גבוהים מאד (למעלה מ- $\bar{E} \cong 50,000$) גובה להבת התרסיס שואף אסימפטוטית לגובה הלהבה הגזית. באזור זה רוב רובו של התרסיס מתאדה מיד עם כניסתו לתא השריפה וכל הדלק מצוי בצורתו הגזית.

הגרפים הבאים מבטאים את אותם המקרים שהוצגו זה עתה אך כפי שהתקבלו מהמודל החד-חתי (Greenberg [1989]).

ניתן להבחין שהתנהגות הגרפים אינה שונה באופן איכותי. כמו-כן, הגרף הישר המתאים ללהבה הגזית כמובן שלא השתנה. לעומת זאת גובה השיא של הלהבות שונה (למשל עבור $\delta_6 = 0.9$ גובה השיא במודל החד-חתי הוא $\gamma_f \cong 0.21$ לעומת גובה שיא של $\gamma_f \cong 0.24$ במודל הרב-חתי) וחלוקת תחומי ההשפעה של מקדם האידוי שונים משמעותית (למשל עבור $\delta_6 = 0.9$ שיא הלהבה במודל החד-חתי מתקבל כאשר $\bar{E} = 7,000$ לעומת $\bar{E} = 8,500$ במודל הרב-חתי). יש לשים לב שהגרפים חצי לוגריתמיים, כלומר ההבדלים הופכים למשמעותיים עוד יותר ככל ש \bar{E} גדל.



גרף 3-5: גובה הלהבה כנגד מקדם האידוי המנורמל לכמות דלק נזלי משתנה – מודל חד-חתי

Graph 3-5: Flame Height Vs. Normalized Vaporization Coefficient for Various Liquid fuel Load – Monosectional Model

כעת נבחן את **רגישות מאפייני הלהבה** לפילוג הטיפות ההתחלתי.
 בבעיות של ריאקציה כימית ומעברי מסה כגון הבעיה הנדונה, ממליץ Lefebvre [1989] לתאר תרסיס רב-גדלי (Polydisperse) בעזרת תרסיס חד-גדלי (Monodisperse) אקוויולנטי אשר קוטר טיפותיו מוגדר על-ידי SMD (Sauter Mean Diameter, ראה פרק 1):

(97.3)

כאשר n_i מציין את מספר הטיפות בעלות קוטר d_i בתרסיס הרב-גדלי. כפי שניתן לראות המונה פרופורציונאלי למסת התרסיס והמכנה פרופורציונאלי לשטח הפנים של סך הטיפות. כך באים לידי ביטוי הגדלים המשמעותיים בתופעות הנדונות. פיתוח הביטוי ע"פ שיטת החתכים נותן:

(08.3)

$$SMD = \left(\sum_{i=1}^N \frac{f_i}{d_{i_H} - d_{i_L}} \ln \left(\frac{d_{i_H}}{d_{i_L}} \right) \right)^{-1}$$

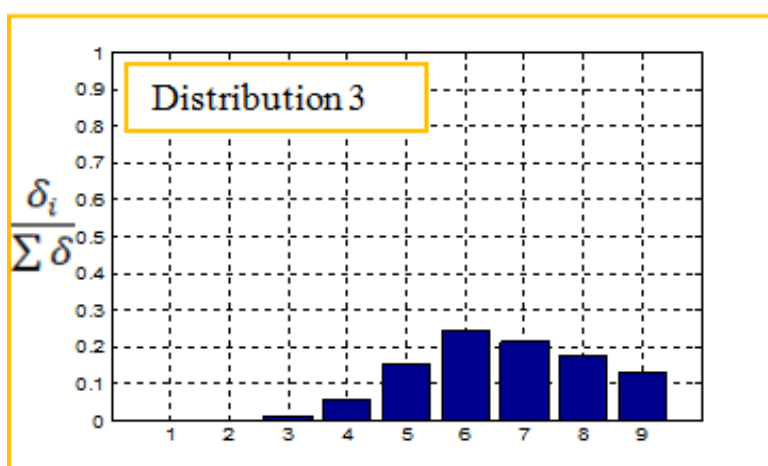
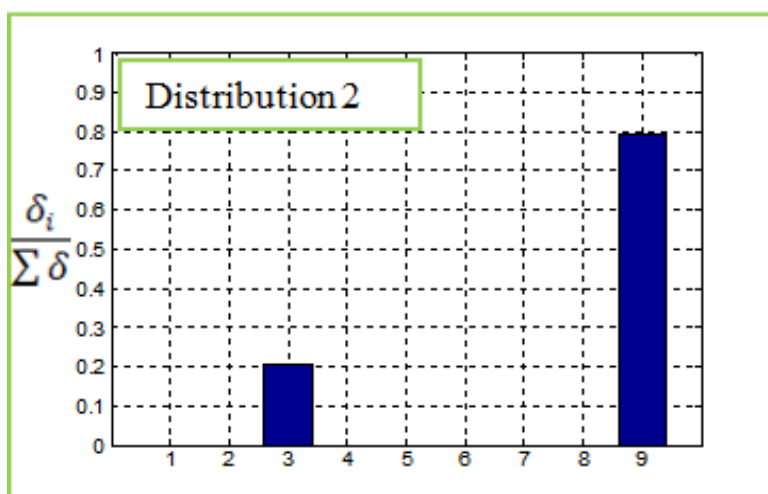
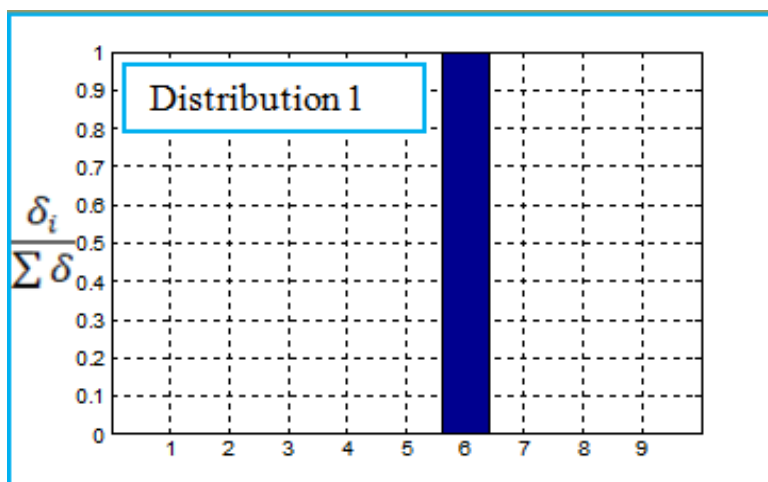
נציג שוב את גובה להבת התרסיס כתלות במקדם האידוי המנורמל עבור יחס משתנה בין כמות תרסיס התחלתית לסך הדלק ($\sum \delta$). כאשר עבור פילוג הטיפות ההתחלתי נציע **3 פילוגים שונים** שווי SMD:

טבלה 2-3: שלושה פילוגי טיפות התחלתיים בעלי SMD=44.8

Three Initial Droplets Distributions with SMD=44.8

Section	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SMD
Distribution 1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	44.8
Distribution 2	0	0	0.207	0	0	0	0	0	0.793	44.8
Distribution 3 [10-4]	6	6	139	593	1562	2464	2149	1747	1334	44.8

היסטוגרמות של שלושת הפילוגים:

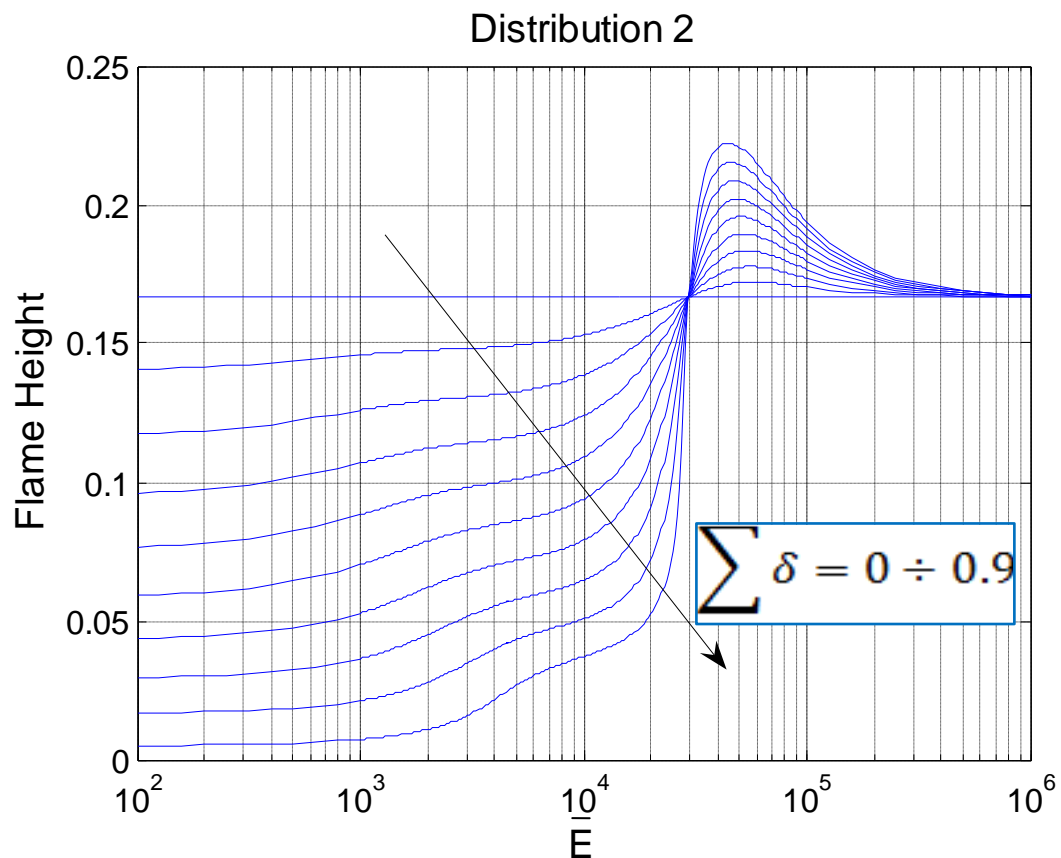
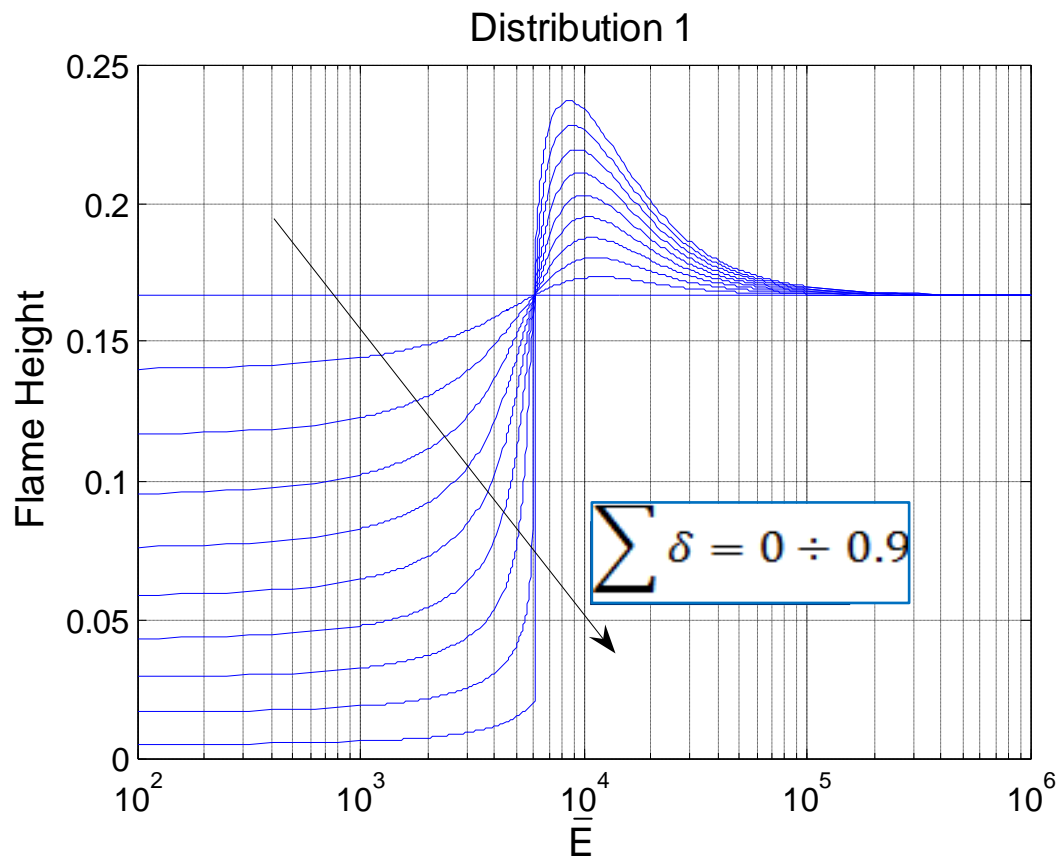


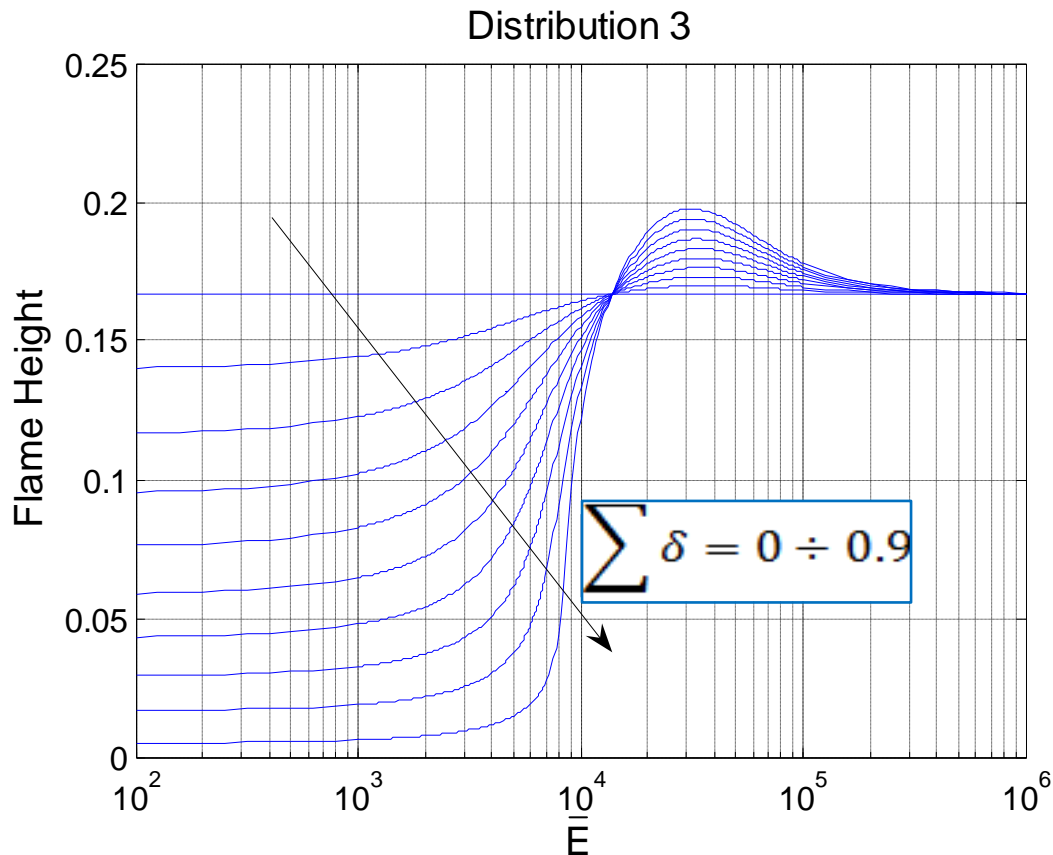
Section No.

גרף 3-6: שלושה פילוגי טיפות התחלתיים בעלי SMD=44.8

Graph 3-6: Three Initial Droplets Distributions with SMD=44.8

גובה הלהבה כנגד מקדם האידוי המנורמל עבור 3 הפילוגים:





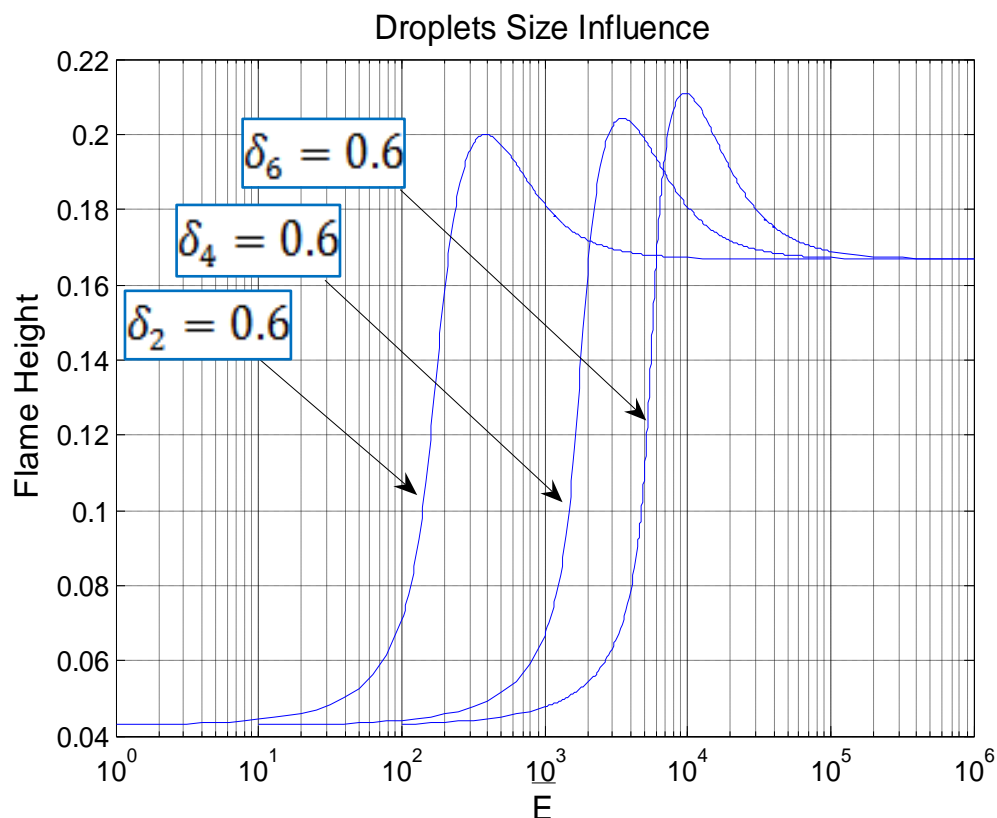
גרף 3-7: גובה הלהבה כנגד מקדם האידוי המנורמל וכמות דלק נוזלי - פילוג טיפות משתנה

Graph 3-7: Flame Height Vs. Normalized Vaporization Coefficient and Liquid Fuel Load - Various Droplets Distribution

ניתן לראות שקיימת רגישות של גובה הלהבה כנגד מקדם האידוי לפילוג הטיפות ההתחלתי למרות ש SMD של הפילוג נשמר קבוע: בפילוג 2 ניתן לראות שהאזור הראשון (מקדמי אידוי נמוכים) מתנהג שונה משאר הפילוגים בכך שגובה הלהבה עולה באופן מתון עם מקדמי האידוי, גובה השיא של הלהבות שונה (למשל עבור $\sum \delta = 0.9$ גובה השיא בפילוג 1 חתכי הוא $\gamma_f \approx 0.24$ לעומת גובה שיא של $\gamma_f \approx 0.2$ בפילוג 3) וההבדל שנראה המשמעותי ביותר הוא שחלוקת תחומי ההשפעה של מקדם האידוי שונה משמעותית בין הפילוגים השונים (למשל עבור $\sum \delta = 0.9$ שיא הלהבה בפילוג 1 מתקבל כאשר $\bar{E} = 8,500$ לעומת שיא המתקבל כאשר $\bar{E} = 45,000$ בפילוג 2). שוב יש לשים לב שהגרפים חצי לוגריתמיים, כלומר ההבדלים הופכים למשמעותיים עוד יותר ככל ש \bar{E} גדל.

התוצאות ממחישות שפילוג הטיפות ההתחלתי הינו גורם משמעותי בקביעת גובה שיא הלהבה ובאופן חלוקת אזורי ההשפעה של מקדם האידוי המנורמל על גובה הלהבה.

נתבונן על השפעת גודל הטיפות. הגרפים הבאים מראים שוב את גובה הלהבה כנגד מקדם האידוי המנורמל כאשר כמות התרסיס ההתחלתית זהה עבור שלושת הגרפים (60% מסך הדלק) אך כל אחד מהגרפים מציין תרסיס המכיל טיפות מחתך אחר. ככל שהחתך גבוה יותר קיימות בתרסיס פחות טיפות אך יותר גדולות.



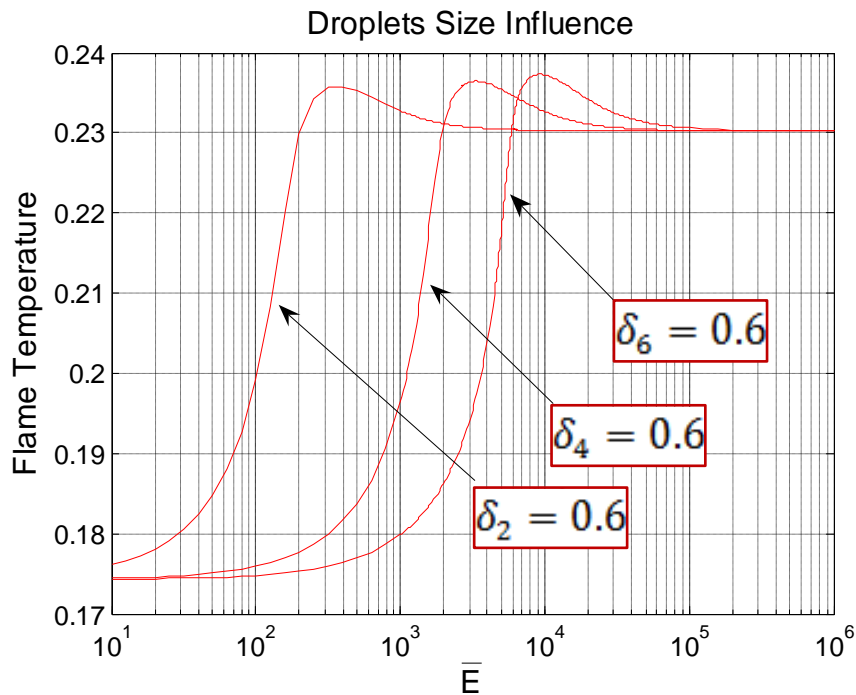
גרף 3-8: גובה הלהבה כנגד מקדם האידוי המנורמל לגודל טיפות משתנה

Graph 3-8: Flame Height Vs. Normalized Vaporization Coefficient for Various Droplets Size

אנו רואים שעיקר השינוי עם הגדלת הטיפות (תוך שמירה על כמות התרסיס הכוללת) הוא שאותן התופעות מתקבלות עבור מקדם אידוי גדול יותר (הגרף "נע" ימינה). כמו-כן קיים שינוי קל נוסף והוא עליה של הגובה המרבי שאליו

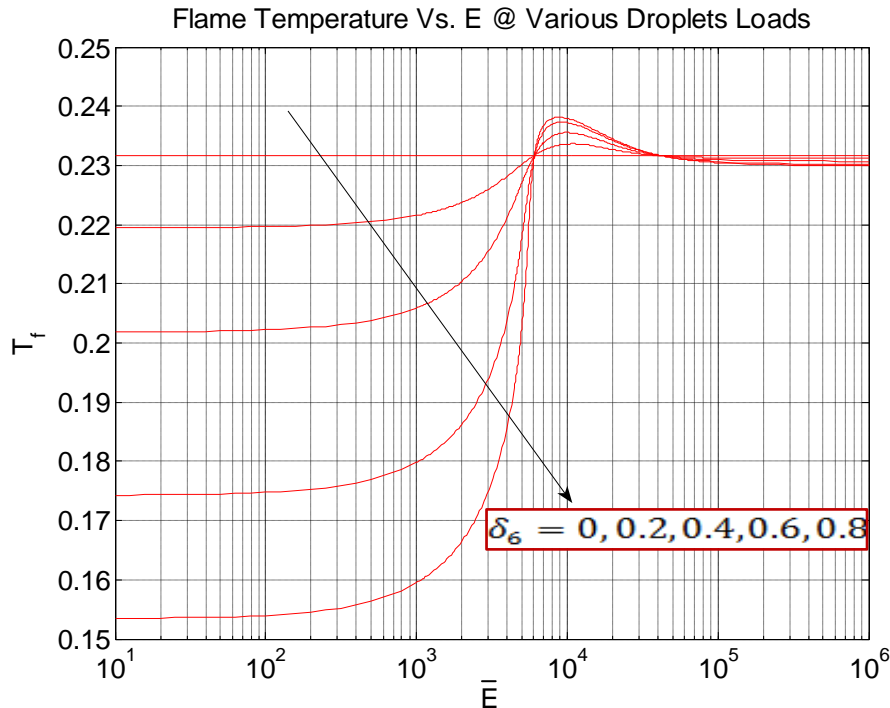
יכולה להתנשא להבת התרסיס. לעומת זאת, גובה הלהבה אינו משתנה עבור מקדמי אידוי נמוכים מאד ומקדמי אידוי גבוהים מאד.

נתבונן על התנהגות הטמפרטורה כתלות במקדם האידוי עבור גודל טיפות התחלתי משתנה ועבור כמות תרסיס התחלתית משתנה:



גרף 3-9: טמפרטורת שיא הלהבה כנגד מקדם האידוי המנורמל לגודל טיפות משתנה

Graph 3-9: Tip Temperature Vs. Normalized Vaporization Coefficient for Various Droplets Size



גרף 3-10: טמפרטורת שיא הלהבה כנגד מקדם האידוי המנורמל לכמות דלק נוזלי משתנה

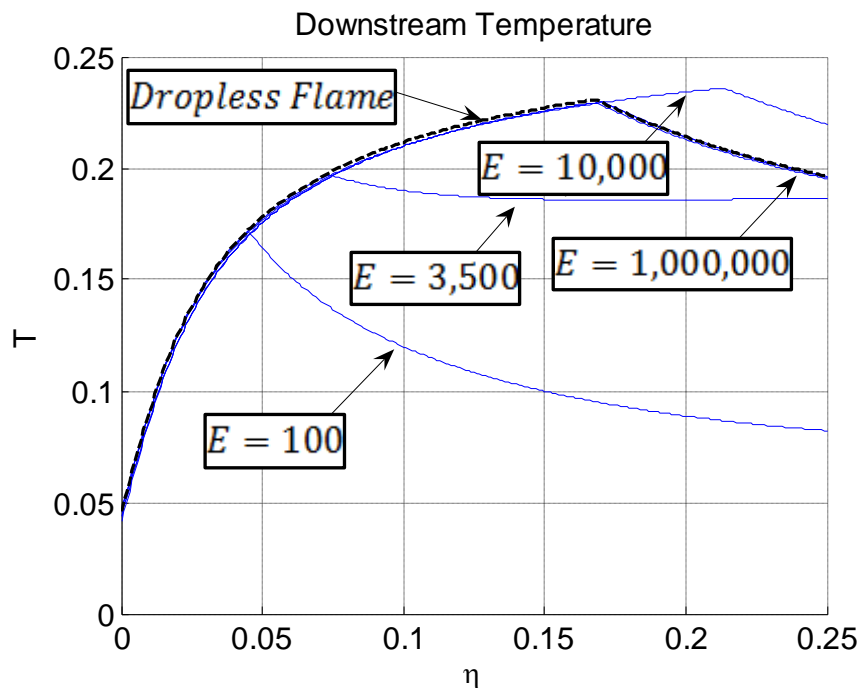
Graph 3-10: Tip Temperature Vs. Normalized Vaporization Coefficient for Various Liquid Fuel Load

ניתן לראות קורלציה ברורה בין גובה שיא הלהבה ובין טמפרטורת שיא הלהבה (ראה גרף 4-3 וגרף 8-3 להשוואה).

יחד עם זאת ניתן להבחין בהבדל בין התנהגות גובה הלהבה והתנהגות טמפרטורת שיא הלהבה במקדמי האידוי הגבוהים. בתחום הזה, גובה שיא הלהבה שואף אסימפטוטית לגובה הלהבה הגזית וקרוב אליה יותר ככל שכמות הדלק הנוזלי מועטה. לעומת זאת, טמפרטורת שיא הלהבה אינה שואפת לטמפרטורת שיא הלהבה הגזית ועבור מקדמי האידוי הגבוהים ככל שכמות הדלק הנוזלי גדלה כך טמפרטורת שיא הלהבה נמוכה יותר ורחוקה מטמפרטורת שיא הלהבה הגזית. ניתן לומר שעבור מקדמי אידוי גבוהים מאד כל התרסיס מתאדה בשלב מוקדם של הזרימה אך ככל שכמות התרסיס גדלה כך נבלע חום רב יותר בתהליך האידוי ולכן טמפרטורת שיא הלהבה קטנה. תופעה זו תהיה משמעותית יותר ככל החום הכמוס הדרוש לאידוי הטיפות יותר גדול (בא לידי ביטוי במשוואות ע"י מקדם איבר חום אידוי הטיפות Λ).

נתבונן על התנהגות הטמפרטורה במורד הזרימה. לצורך הדוגמה פילוג

הטיפות ההתחלתי הינו: $\delta_i = \begin{cases} 0.6, & i = 6 \\ 0, & i \neq 6 \end{cases}$, $Pe = 10$, $\xi = 0$.



גרף 3-11: טמפרטורת מרכז הלהבה במורד הזרימה למקדם אידי מנורמל משתנה

Graph 3-11: Downstream Center of Flame Temperature for Various Normalized Vaporization Coefficient

ניתן לראות שהטמפרטורה עולה עד לנקודת שיא- היא שיא הלהבה ודועכת לאחריה. תחת ההנחה ש $Da \rightarrow \infty$ עובי אזור הריאקציה הוא "אפס" ולכן הטמפרטורה אינה חלקה בנקודה זו בגרף. ניתן לראות, בהתאמה לגרף 3-8 ולגרף 3-9 ששיא הלהבה הגבוה ביותר הוא $\eta_f \approx 0.21$, הטמפרטורה המנורמלת בו היא $T_f \approx 0.24$ והוא מתקבל עבור $E = 10,000$. כמו-כן, עבור מקדמי אידי גבוהים מאד טמפרטורת שיא הלהבה קטנה והיא נמוכה במעט מטמפרטורת שיא הלהבה הגזית. תובנה נוספת מהגרף האחרון היא שהתפתחות הטמפרטורה במורד הזרימה קבועה (בקירוב טוב מאד) עד לשיא הלהבה ואינה תלויה במקדם האידי של הטיפות. תובנה זו מחזקת את הטענה לעיל שקיימת קורלציה ברורה בין גובה שיא הלהבה וטמפרטורת שיא הלהבה. דבר נוסף שניתן לשים לב אליו הוא שכל הגרפים חסומים ע"י הגרף של הלהבה הגזית במובן שעד לגובה שיא הלהבה הגזית שדה הזרימה בעל הטמפרטורות

הגבוהות ביותר הוא שדה הזרימה המתקבל אצל הלהבה הגזית. וההסבר לכך הוא שהחום הנבלע מאידוי הטיפות מקרר את שדה הזרימה.

לסיכום פרק זה, הוצג פתרון אנליטי של משוואת התרסיס, משוואות הפאזה הגזית ומשוואת הטמפרטורה. לאחר מכן הוצגו תוצאות טיפוסיות עבור הפתרונות הממחישות את הצורך במודל רב-חתכי, כיוון שמראות כי קיימת רגישות של מאפייני הלהבה לפילוג טיפות התרסיס. בין התוצאות הוצגו קצב דעיכת טיפות התרסיס, צורת הלהבה, שדה הטמפרטורה וכן תלות גובה הלהבה וטמפרטורת שיא הלהבה במקדם האידוי של הדלק, בכמות טיפות התרסיס, בגודלן ובפילוגן.

פרק 4 – כיבוי שיא הלהבה

פרק זה, כהמשך ישיר של הפרקים הקודמים, מבוסס על מודל של להבת Burke & Schumann עם תרסיס רב-גדלי כמתואר באיור 1-2. לאחר שבפרק הקודם הוצגו הפתרונות של משוואות התרסיס, משוואות הפאזה הגזית ומשוואת הטמפרטורה והוצגו תוצאות טיפוסיות של פתרונות אלו, ישמשו פתרונות אלו בפרק זה בפתרון המבנה הפנימי של אזור שיא הלהבה ובבחינת תנאי קיום / כיבוי הלהבה באזור זה (ראה בפרק 1 חשיבות בחינת קיום / כיבוי באזור שיא הלהבה). הפתרון עבור האזור הפנימי מבוסס על פיתוח אסימפטוטי של משתני הבעיה, פתרון המשוואות ע"פ הפרדה לסדרי גודל והתאמת הפתרונות עם פתרון השדה החיצוני (כמוצג בפרק 3) ע"י תנאי שפה אסימפטוטים. אנליזת הכיבוי מתבססת על הפתרון האזור הפנימי. ראשית, יוצג הפיתוח המתמטי ולאחר מכן יוצגו תוצאות טיפוסיות בצורה של מפות כיבוי אשר מתארות את רגישות כיבוי שיא הלהבה למאפייני התרסיס.

נזכיר את הפתרונות מהפרק הקודם שישמשו אותנו בפרק זה:

משוואת הדלק הגזי:

(1.4)

$$\frac{\partial \gamma_F}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \gamma_F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{(Pe)^2} \frac{\partial^2 \gamma_F}{\partial \eta^2} - B \gamma_F \gamma_0 e^{-T_a/T} + S_d H(c - \xi)$$

משוואת המחמצן:

(2.4)

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{(Pe)^2} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial \eta^2} - B \gamma_F \gamma_0 e^{-T_a/T}$$

כאשר:

$B \gamma_F \gamma_0 e^{-T_a/T}$ – מבטא את קצב איבוד הדלק הגזי / המחמצן (בהתאמה) בעקבות הריאקציה.

$S_d H(c - \xi)$ – מבטא את קצב היווצרות הדלק הגזי כתוצאה מאידוי הטיפות.

פתרון המשוואה:

(3.4)

באזור הדלק הגזי: $\gamma_F = \gamma$, $\gamma_O = 0$

ובאזור המחמצן: $\gamma_O = -\gamma$, $\gamma_F = 0$

כאשר:

$$\begin{aligned} \gamma = & c(1 + V) - V + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_{0i} - 2c\delta_i + b_{0i} e^{-\Delta_i \eta}) \\ & + \frac{2}{\pi} (1 + V) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi c)}{n \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right)} e^{q_n \eta} \cos(n\pi \xi) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \left(b_{n_i} e^{-\Delta_i \eta} \right. \\ & \left. - \frac{b_{n_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right) n\pi + 2\delta_i \sin(n\pi c)}{\left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right) n\pi} e^{q_n \eta} \right) \cos(n\pi \xi) \end{aligned}$$

משוואת הטמפרטורה:

(4.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \eta} = & \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{1}{(Pe)^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + B\gamma_F \gamma_O e^{-T_a/T} - \Lambda S_d H(c - \xi) \\ & + S_d H(c - \xi) H(\eta - \eta_f) \end{aligned}$$

כאשר:

$B\gamma_F \gamma_O e^{-T_a/T}$ – מבטא את קצב היווצרות החום בעקבות הריאקציה.

$- \Lambda S_d H(c - \xi)$ – מבטא את קצב בליעת החום בעקבות אידוי הטיפות.

$- S_d H(c - \xi) H(\eta - \eta_f)$ - מבטא את קצב היווצרות החום בעקבות בעירת הטיפות שעברו את הלהבה ההומוגנית.

פתרון המשוואה:

(5.4)

$T = \gamma_T - \gamma$ באזור הדלק הגזי:

$T = \gamma_T$ ובאזור המחמצן:

כאשר:

$$\begin{aligned} \gamma_T = c + T_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k'_{0i} - 2c\delta_i + b'_{0i} e^{-\Delta_i \eta}) \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi c)}{n \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right)} e^{q_n \eta} \cos(n\pi \xi) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \left(b'_{ni} e^{-\Delta_i \eta} \right. \\ \left. - \frac{b'_{ni} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right) n\pi + 2\delta_i \sin(n\pi c)}{\left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right) n\pi} e^{q_n \eta} \right) \cos(n\pi \xi) \end{aligned}$$

הקדמה

כפי שראינו בפרק המבוא קיימת חשיבות מיוחדת לחקירת כיבוי שיא הלהבה על-פני כיבוי באזורים אחרים בלהבה, לפיכך נתמקד בפתרון המבנה הפנימי של שיא הלהבה. תנאי השפה עבור המבנה הפנימי של שיא הלהבה נובעים מהפתרון החיצוני כלומר מהפתרון של השדה (כמתואר בפרק 3). מספר הבדלים מהותיים בין האזור הפנימי והאזור החיצוני. האזורים השונים

משתרעים ע"פ טווחים השונים זה מזה במספר סדרי גודל. באזור הפנימי איבר הריאקציה פעיל הן במשוואת הפאזה הגזית והן במשוואת הטמפרטורה והאיברים התלויים באידוי הטיפות זניחים (עובי האזור הפנימי קטן מכדי שתופעות הקשורות באידוי הטיפות יהיו משמעותיות). לעומת זאת, באזור החיצוני איבר הריאקציה אינו פעיל כתוצאה מריכוז אפסי של אחד המגיבים ומטמפרטורה נמוכה אך איברים התלויים באידוי הטיפות משמעותיים (כפי שבא לידי ביטוי בפרק 3). הפתרון הפנימי מניח שמספר Da סופי ולכן תתכן זליגה של המגיבים מאזור הריאקציה משום שאינה מושלמת ולעומתו הפתרון החיצוני מניח ש $Da \rightarrow \infty$ והריאקציה מתרחשת ע"ג משטח בעובי "אפס" בקצב אינסופי. בהתאם להנ"ל פתרון כל אזור יבוצע בנפרד וההתאמה בין הפתרונות תבוצע ע"י תנאי שפה אסימפטוטים. לטובת אנליזת הכיבוי נניח שעובי שיא הלהבה קטן בהרבה מרדיוס העקמומית בשיא הלהבה ולכן ניתן להתייחס אל הבעיה כבעיה חד-ממדית ולהשתמש בתנאי הכיבוי של Liñan. הפתרון החיצוני יוגדר עבור $(\xi = 0, \eta > 0)$.

הפתרון החיצוני

נגדיר עבור הפתרון החיצוני :

(6.4)

$$T_{out} = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

$$\gamma_{F/O_{out}} = \gamma_{F/O}^{(0)} + \varepsilon \gamma_{F/O}^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

ולפיכך:

$$\therefore \gamma_{T_{out}} = \gamma_T^{(0)} + \varepsilon \gamma_T^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

$$\therefore \gamma_{out} = \gamma^{(0)} + \varepsilon \gamma^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

כאשר ε הינו הפרמטר הקטן לפיתוח האסימפטוטי ומוגדר ע"י:

(7.4)

$$\varepsilon \triangleq \frac{T_f^2}{T_a}$$

כאשר:

T_f - טמפרטורת שיא הלהבה כפי שמתקבלת מהפתרון החיצוני (פרק 3).

$T_a = E_a / \dot{R}$ - טמפרטורת השפעול (אנרגיית השפעול חלקי קבוע הגזים האוניברסאלי).

עבור האזור החיצוני אנו מניחים שהאיברים התלויים באידוי הטיפות, כלומר חום הנבלע כתוצאה מאידוי וחום הנפלט כתוצאה משריפתן, הם מסדר גודל של איבר ההסעה ואיבר הדיפוסיה. לעומת זאת איבר הריאקציה אינו פעיל כלל באזור החיצוני כפי שצוין לעיל.

לפיכך, משוואת הטמפרטורה מסדר $O(1)$ עבור האזור החיצוני נראית כך:

(8.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \eta} = & \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{(Pe)^2} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \eta^2} - \Lambda S_d H(c - \xi) \\ & + S_d H(c - \xi) H(\eta - \eta_f) \end{aligned}$$

פתרון המשוואה (ע"פ 4.5 – 4.6):

באזור המחמצן:

(9.4)

$$T^{(0)} = \gamma_T^{(0)}(\xi = 0, \eta)$$

$$\begin{aligned}
T^{(0)} = & c + T_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k'_{0_i} - 2c\delta_i + b'_{0_i} e^{-\Delta_i \eta}) \\
& + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi c)}{n \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right)} e^{q_n \eta} \cos(n\pi \xi) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \left(b'_{n_i} e^{-\Delta_i \eta} \right. \\
& \left. - \frac{b'_{n_i} \left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right) n\pi + 2\delta_i \sin(n\pi c)}{\left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right) n\pi} e^{q_n \eta} \right)
\end{aligned}$$

באזור הדלק:

(01.4)

$$T^{(0)} = \gamma_T^{(0)}(\xi = 0, \eta) - \gamma^{(0)}(\xi = 0, \eta)$$

$$\begin{aligned}
T^{(0)} = & T_0 + V(1 - c) - \frac{\Lambda}{2} \sum_{i=1}^N (k_{0_i} + b_{0_i} e^{-\Delta_i \eta}) \\
& - \frac{2V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi c)}{n \left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right)} e^{q_n \eta} \\
& - \Lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N b_{n_i} \left(e^{-\Delta_i \eta} - \frac{\left(1 + \frac{\Delta_i}{Pe^2}\right)}{\left(1 - \frac{q_n}{Pe^2}\right)} e^{q_n \eta} \right)
\end{aligned}$$

פתרון חיצוני לסדר $O(\varepsilon)$:

נציב את הביטוי עבור הטמפרטורה באזור החיצוני (משוואה 4.6) במשוואת הטמפרטורה (משוואה 4.4) ונאסוף את הביטויים מסדר $O(\varepsilon)$. כיוון ש איבר אידיוי הטיפות וכן איבר בעירת הטיפות הינם מסדר $O(1)$ בלבד ו איבר הריאקציה פעיל רק ב אזור הפנימי של הלהבה, משוואת הטמפרטורה מסדר $O(\varepsilon)$ באזור החיצוני תראה כך:

(11.4)

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \eta^2}$$

כפי שהוזכר, תחת ההנחה שעובי הלהבה קטן הרבה יותר מרדיוס העקמומיות שלה ניתן לבצע אנליזה חד-ממדית לכיבוי בשיא הלהבה. לפיכך נזניח נגזרות בכיוון ξ .

והפתרון המתקבל למשוואת הטמפרטורה הינו:

(21.4)

$$T^{(1)} = C_1 + C_2 e^{Pe^2 \eta}$$

תנאי שפה לפתרון החיצוני מסדר $O(\varepsilon)$:

עבור $\eta = 0$:

תנאי השפה לפתרון החיצוני מוכתבים עבור $T^{(0)}$ בלבד ולא קיימים בשפה איברים מסדר $O(\varepsilon)$, לפיכך:

(31.4)

עבור $\eta = \eta_f$:

ע"פ תנאי הקפיצה (יפותח בהמשך מתוך הפתרון לאזור הפנימי, ראה משוואות (4.42 - 4.48) ופיתוחם של [Cheatham and Matalon 2000]):

(41.4)

$$\left[T^{(1)} + \gamma_{O/F}^{(1)} \right] = 0$$

כאשר $[f(x)]$ מסמן קפיצה ברציפות של פונקציה $f(x)$ ותנאי קפיצה זה מתבסס על ההנחה של $Le = 1$ (ראה משוואה 2.54 בפרק 2).

מתנאי קפיצה זה נובע (יפותח בהמשך):

(51.4)

$$T^{(1)}|_{\eta_f^-} + \gamma_F^{(1)} = T^{(1)}|_{\eta_f^+} + \gamma_O^{(1)} = 0$$

$$\therefore T^{(1)}|_{\eta_f^-} = -\gamma_F^{(1)}, \quad T^{(1)}|_{\eta_f^+} = -\gamma_O^{(1)}$$

נניח שזליגת ה מחמצן מאזור הריאקציה אל אזור הדלק וזליגת הדלק הגזי מאזור הריאקציה אל אזור המחמצן הן מסדר גודל של $O(\varepsilon)$ ומוגדרות כך:

(61.4)

$$\gamma_O^{(1)}|_{\eta_f^-} = S_O, \quad \gamma_F^{(1)}|_{\eta_f^+} = S_F$$

אזי תנאי השפה לטמפרטורה:

(71.4)

$$\therefore T^{(1)}|_{\eta_f^-} = -S_O, \quad T^{(1)}|_{\eta_f^+} = -S_F$$

לכן פתרון $T^{(1)}$ בשילוב תנאי השפה הינו:

עבור $0 < \eta < \eta_f$:

(81.4)

$$T^{(1)} = \frac{1 - e^{Pe^2 \eta}}{e^{Pe^2 \eta_f} - 1} \cdot S_O$$

עבור $\eta > \eta_f$:

(91.4)

$$T^{(1)} = C_1 + C_2 e^{Pe^2 \eta}$$

מתנאי חסימות: $C_2 = 0$ ולכן:

(02.4)

$$T^{(1)} = C_1 = -S_F$$

ולסיכום:

(12.4)

$$T^{(1)} = \begin{cases} \frac{1 - e^{Pe^2\eta}}{e^{Pe^2\eta_f} - 1} \cdot S_0 & 0 < \eta < \eta_f \\ -S_F & \eta > \eta_f \end{cases}$$

באופן דומה ניתן להגיע לפתרון עבור $\gamma_{F/0}^{(1)}$ אך בשלב זה נסתפק בפתרון חלקי בלבד (משום שחסרים תנאי שפה נוספים עבור זליגת המגיבים):

(22.4)

$$\gamma_0^{(1)} = \frac{e^{Pe^2\eta} - 1}{e^{Pe^2\eta_f} - 1} \cdot S_0, \quad 0 < \eta < \eta_f$$

פתרון המבנה הפנימי של הלהבה

לאחר שהוצג הפתרון החיצוני מסדר $O(\varepsilon)$ ומסדר $O(1)$ יש בידינו תנאי שפה עבור המבנה הפנימי של הלהבה. נזכיר את ההנחה שעובי הלהבה קטן בהרבה מרדיוס העקמומיות בשיא הלהבה ולכן ניתן להזניח שינויים בכיוון ξ .

כנזכר לעיל, איבר הריאקציה פעיל באזור הפנימי אך האיברים התלויים באידוי הטיפות אינם באים לידי ביטוי באזור זה.

מתוך ההנחות הנ"ל נובעת הצורה הבאה למשוואת הטמפרטורה באזור הפנימי המכילה את איבר ההסעה, איבר הדיפוסיה ואיבר הריאקציה:

(32.4)

$$\frac{\partial T_{in}}{\partial \eta} = \frac{1}{(Pe)^2} \frac{\partial^2 T_{in}}{\partial \eta^2} + B\gamma_F \gamma_O e^{-T_a/T_{in}}$$

נגדיר:

(42.4)

$$\zeta \triangleq \frac{\eta - \eta_f}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

נגדיר את הפתרון הפנימי בתוך הלהבה ע"י:

(52.4)

$$T_{in} = T_f + \varepsilon \tau + O(\varepsilon^2)$$

איברי המגיבים מסדר $O(1)$ מתבטלים באזור הריאקציה לכן:

(62.4)

$$\gamma_{F/O_{in}} = \varepsilon \gamma_{F/O}^* + O(\varepsilon^2)$$

(בהתאם להנחה למשוואה 4.16) שקיימת זליגה מסדר $O(\varepsilon)$ בלבד)

נציב את הביטויים במשוואת הטמפרטורה (משוואה 4.23):

(72.4)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (T_f + \varepsilon \tau + \dots) \\ &= \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (T_f + \varepsilon \tau + \dots) + B\varepsilon^2 \gamma_F^* \gamma_O^* e^{-\left(\frac{T_a}{T_f + \varepsilon \tau + \dots}\right)} \\ &+ O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

נפתח את התלות המעריכית לטור:

(82.4)

$$\exp\left\{-\left(\frac{T_a}{T_f + \varepsilon\tau + \dots}\right)\right\} = \exp\left\{\frac{-T_a/T_f}{1 + \frac{\varepsilon\tau}{T_f} + \dots}\right\}$$

$$\cong \exp\left\{-\frac{T_a}{T_f} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon\tau}{T_f} + \dots\right)\right\} \cong e^{-\left(\frac{T_a}{T_f}\right)} e^{-\tau}$$

וכעת הביטוי למשוואת הטמפרטורה הינו:

(92.4)

$$\frac{\partial\tau}{\partial\zeta} = \frac{1}{Pe^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2\tau}{\partial\zeta^2} + B\varepsilon^2\gamma_F^*\gamma_O^* e^{-\left(\frac{T_a}{T_f}\right)} e^{-\tau}$$

נניח שאיבר הריאקציה ו איבר הדיפוסיה הינם איברים מאותו סדר גודל.
לעומתם איבר ההסעה זניח בטווח קטן כמו עובי הלהבה.

(03.4)

$$\therefore \frac{\partial^2\tau}{\partial\zeta^2} = -B\varepsilon^3(Pe)^2\gamma_F^*\gamma_O^* e^{-\left(\frac{T_a}{T_f}\right)} e^{-\tau}$$

באופן דומה נביט במשוואת הדלק הגזי:

(13.4)

$$\frac{\partial\gamma_{F_{in}}}{\partial\eta} = \frac{1}{(Pe)^2} \frac{\partial^2\gamma_{F_{in}}}{\partial\eta^2} - B\gamma_{F_{in}}\gamma_{O_{in}} e^{-T_a/T_{in}} + S_d H(c - \xi)$$

שוב נניח שאיבר הריאקציה ואיבר הדיפוסיה הינם איברים מאותו סדר גודל.
לעומתם איבר הטיפות ואיבר ההסעה קשורים בתופעות המתרחשות על-פני
טווח גדול יותר ובסקלה קטנה כמו עובי הלהבה השפעתם זניחה. נציב את
הביטוי ל $\gamma_{F_{in}}$ (משוואה 4.26) ונקבל את המשוואה:

(23.4)

$$\therefore \frac{\partial^2 \gamma_F^*}{\partial \zeta^2} = B \varepsilon^3 (Pe)^2 \gamma_F^* \gamma_O^* e^{-\left(\frac{T_a}{T_f}\right)} e^\tau$$

ובאופן דומה עבור המחמצן:

(33.4)

$$\therefore \frac{\partial^2 \gamma_O^*}{\partial \zeta^2} = B \varepsilon^3 (Pe)^2 \gamma_F^* \gamma_O^* e^{-\left(\frac{T_a}{T_f}\right)} e^\tau$$

נגדיר:

(43.4)

$$D \triangleq B \varepsilon^3 (Pe)^2 e^{-\left(\frac{T_a}{T_f}\right)}$$

משוואות האזור הפנימי:

(53.4)

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} = -D \gamma_F^* \gamma_O^* e^\tau$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_F^*}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 \gamma_O^*}{\partial \zeta^2} = D \gamma_F^* \gamma_O^* e^\tau$$

ע"י חיבור המשוואות והצגת פרמטר Schwab-Zeldovich נקבל:

(63.4)

$$\frac{\partial^2 (\tau + \gamma_F^*)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 (\tau + \gamma_O^*)}{\partial \zeta^2} = 0$$

ע"י אינטגרציה נקבל:

(73.4)

$$\therefore \tau + \gamma_F^* = a_F + b_F \zeta$$

$$\therefore \tau + \gamma_O^* = a_O + b_O \zeta$$

למציאת מקדמים a_F, b_F, a_O, b_O נשתמש בהתאמת הפתרון הפנימי עם הפתרון החיצוני. כאשר הפתרון החיצוני יפותח לישר בסביבות הלהבה ע"י טור טיילור. לשם הפיתוח נזכיר את ההגדרות עבור הפתרון החיצוני, הפתרון הפנימי והקואורדינאטה למבנה הפנימי של הלהבה (4.6, 4.24, 4.25):

$$T_{out}^\pm = T^{(0)\pm} + \varepsilon T^{(1)\pm} + O(\varepsilon^2)$$

$$T_{in} = T_f + \varepsilon \tau + O(\varepsilon^2)$$

$$\zeta \triangleq \frac{\eta - \eta_f}{\varepsilon}$$

נפתח את הפתרון החיצוני ע"פ טור טיילור סביב $\eta = \eta_f$:

(83.4)

$$\begin{aligned} T_{out}^\pm &= T_f^{(0)\pm} + \varepsilon T_f^{(1)\pm} + (\eta - \eta_f) \frac{\partial T^{(0)\pm}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_f} + O(\varepsilon^2) \\ &= T_f^{(0)\pm} + \varepsilon \left(T_f^{(1)\pm} + \zeta \frac{\partial T^{(0)\pm}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_f} \right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

ע"י השוואת איברים מסדר $O(\varepsilon)$ בין הפתרון הפנימי והחיצוני נקבל:

$$(93.4)$$

עבור $\zeta \rightarrow \pm\infty$:

$$\therefore \tau = T_f^{(1)\pm} + \zeta \left. \frac{\partial T^{(0)\pm}}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_f}$$

ובפיתוח דומה למגיבים מסדר $O(\varepsilon)$ נקבל:

$$(04.4)$$

עבור $\zeta \rightarrow \pm\infty$:

$$\gamma_{F/O}^* = \gamma_{F/O}^{(1)\pm} + \zeta \left. \frac{\partial \gamma_{F/O}^{(0)\pm}}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_f}$$

מתוך תנאי השפה האסימפטוטים נוכל למצוא את הפרמטרים המגדירים את משתנה Schwab-Zeldovich באזור הפנימי (ראה משוואה 4.36):

$$(14.4)$$

$$a_F = T_f^{(1)+} + \gamma_F^{(1)+} = T_f^{(1)-} + \gamma_F^{(1)-}$$

$$a_O = T_f^{(1)+} + \gamma_O^{(1)+} = T_f^{(1)-} + \gamma_O^{(1)-}$$

$$b_F = \left(\frac{\partial T^{(0)+}}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma_F^{(0)+}}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\eta_f} = \left(\frac{\partial T^{(0)-}}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma_F^{(0)-}}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\eta_f}$$

$$b_O = \left(\frac{\partial T^{(0)+}}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma_O^{(0)+}}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\eta_f} = \left(\frac{\partial T^{(0)-}}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma_O^{(0)-}}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\eta_f}$$

אנו רואים שלכל פרמטר קיימות 2 הגדרות מתוך תנאי השפה.

מתוך ההגדרות עבור a_0, a_F נובע תנאי הקפיצה:

(24.4)

$$[T_f^{(1)}] = -[\gamma_F^{(1)}] = -[\gamma_0^{(1)}]$$

או

$$[T_f^{(1)} + \gamma_i^{(1)}] = 0$$

כאשר [] מציין אופרטור קפיצה בין שני צדדי הלהבה. ובאותו האופן מתוך ההגדרות עבור b_0, b_F נובע תנאי הקפיצה:

(34.4)

$$\left[\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma_i^{(0)}}{\partial \eta} \right] = 0$$

בהתחשב בתנאי הקפיצה עדיין חסרים תנאי שפה לפתרון השדה הפנימי. בעבודתם, מציינים Cheatham and Matalon [2000] שעבור $O(1)$ משטח הריאקציה מוגדר היטב כאוסף הנקודות בהן מתקיים היחס הסטוכיומטרי בין המגיבים. במשטח זה הטמפרטורה מרבית ומתקיימת תגובה מלאה. לעומת זאת עבור $O(\varepsilon)$ אין הגדרה ברורה ולכן, תוך שמירה על תנאי הקפיצה, נקבע באופן שרירותי שעבור $\zeta = 0$ מתקיים יחס סטוכיומטרי בין המגיבים מסדר $O(\varepsilon)$. ע"פ ההגדרות המנורמלות:

(44.4)

$$\gamma_F^*(\zeta = 0) = \gamma_0^*(\zeta = 0)$$

מתוך המשוואה עבור משתני Schwab-Zeldovich לאזור הפנימי (משוואה 4.37) נובע:

(54.4)

$$a_F = a_0$$

ומכאן נובע:

$$(64.4)$$

$$\gamma_F^{(1)\pm} = \gamma_O^{(1)\pm}$$

עדיין הטמפרטורה מסדר $O(\varepsilon)$ אינה מוגדרת באופן חד-חד ערכי ולכן נקבע שרירותית שמשותני Schwab-Zeldovich יתאפסו עבור $\zeta = 0$. מכאן נובע:

$$(74.4)$$

$$a_F = a_O = 0$$

מתוך משוואה 4.41 נובע:

$$(84.4)$$

$$T_f^{(1)\pm} = -\gamma_F^{(1)\pm} = -\gamma_O^{(1)\pm}$$

תחת ההנחה שיש זליגה של המגיבים מסדר $O(\varepsilon)$ מאזור הריאקציה:

$$(94.4)$$

$$\gamma_O^{(1)-} = S_O, \quad \gamma_F^{(1)+} = S_F$$

ומתוך משוואות (4.41), (4.47):

$$(05.4)$$

$$\therefore \gamma_F^{(1)-} = S_O, \quad \gamma_O^{(1)+} = S_F$$

ע"פ משוואה (4.48):

$$(15.4)$$

$$\therefore T_f^{(1)-} = -S_O, \quad T_f^{(1)+} = -S_F$$

נחשב כעת מתוך הפתרונות החיצוניים את הביטויים עבור הפרמטרים b_F, b_O :

(25.4)

$$\begin{aligned}
 b_F &= \left(\frac{\partial T^{(0)-}}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma_F^{(0)-}}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\eta_f} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (\gamma_T(\xi=0) - \gamma(\xi=0) + \gamma(\xi=0)) \right) \Big|_{\eta=\eta_f} \\
 &= \frac{\partial \gamma_T}{\partial \eta}(\xi=0) \Big|_{\eta=\eta_f} = \frac{\partial T^{(0)+}}{\partial \eta}(\xi=0) \Big|_{\eta=\eta_f}
 \end{aligned}$$

(35.4)

$$\begin{aligned}
 b_F &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_{0_i}' \Delta_i e^{-\Delta_i \eta_f} \\
 &\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sum_{i=1}^N \delta_i \right) \frac{q_n}{\left(1 - q_n / (Pe)^2 \right)} \cdot \frac{\sin(n\pi c)}{n} e^{q_n \eta_f} \\
 &\quad - \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_i}' \left(\frac{\left(1 + \frac{\Delta_i}{(Pe)^2} \right)}{\left(1 - q_n / (Pe)^2 \right)} q_n e^{q_n \eta_f} + \Delta_i e^{-\Delta_i \eta_f} \right)
 \end{aligned}$$

(45.4)

$$\begin{aligned}
 b_O &= \left(\frac{\partial T^{(0)+}}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma_O^{(0)+}}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\eta_f} = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (\gamma_T(\xi=0) - \gamma(\xi=0)) \right) \Big|_{\eta=\eta_f} \\
 &= \frac{\partial T^{(0)-}}{\partial \eta}(\xi=0) \Big|_{\eta=\eta_f}
 \end{aligned}$$

(55.4)

$$b_0 = \frac{\Lambda}{2} \sum_{i=1}^N b_{0_i} \Delta_i e^{-\Delta_i \eta_f} - \frac{2V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\left(1 - q_n / (Pe)^2\right)} \cdot \frac{\sin(n\pi c)}{n} e^{q_n \eta_f}$$

$$+ \Lambda \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} b_{n_i} \left(\frac{\left(1 + \frac{\Delta_i}{(Pe)^2}\right)}{\left(1 - q_n / (Pe)^2\right)} q_n e^{q_n \eta_f} + \Delta_i e^{-\Delta_i \eta_f} \right)$$

לאחר חישוב המקדמים a_F, a_0, b_F, b_0 מתוך משוואה (4.37) נובע:

(65.4)

$$\gamma_F^* = b_F \zeta - \tau, \quad \gamma_0^* = b_0 \zeta - \tau$$

כעת יש בידינו משוואה עבור $\tau(\zeta)$ (נובע ממשוואה 4.35):

(75.4)

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} = -D(b_F \zeta - \tau)(b_0 \zeta - \tau)e^\tau$$

נבצע המרת משתנים $\{\tau, \zeta\} \rightarrow \{\Phi, \beta\}$ ע"פ הקשרים הבאים:

(85.4)

$$\Phi \triangleq \tau - \zeta \left(\frac{b_F + b_0}{2} \right) \rightarrow \tau = \Phi + \zeta \left(\frac{b_F + b_0}{2} \right)$$

(95.4)

$$\beta \triangleq \zeta \left(\frac{b_F - b_0}{2} \right) \rightarrow \zeta = \left(\frac{2}{b_F - b_0} \right) \beta$$

הגדרת הנגזרות:

(06.4)

$$\frac{d\tau}{d\zeta} = \frac{d\Phi}{d\beta} \frac{d\beta}{d\zeta} + \left(\frac{b_F + b_O}{2} \right) = \frac{d\Phi}{d\beta} \left(\frac{b_F - b_O}{2} \right) + \left(\frac{b_F + b_O}{2} \right)$$

$$\frac{d^2\tau}{d\zeta^2} = \frac{d^2\Phi}{d\beta^2} \left(\frac{b_F - b_O}{2} \right)^2$$

ביטוי עבור המגיבים בקואורדינאטות החדשות:

(16.4)

$$\gamma_F^* = \beta - \Phi \quad (= b_F \zeta - \tau)$$

$$\gamma_O^* = -\beta - \Phi \quad (= b_O \zeta - \tau)$$

משוואת האזור הפנימי (משוואה 4.57) בצורתה החדשה:

(26.4)

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\Phi}{d\beta^2} \left(\frac{b_F - b_O}{2} \right)^2 \\ &= -D(\beta - \Phi)(-\beta - \Phi) \exp \left\{ \Phi + \left(\frac{2}{b_F - b_O} \right) \beta \left(\frac{b_F + b_O}{2} \right) \right\} \\ \therefore \quad & \frac{d^2\Phi}{d\beta^2} = \frac{4D}{(b_F - b_O)^2} (\beta^2 - \Phi^2) \exp \left\{ \Phi + \left(\frac{b_F + b_O}{b_F - b_O} \right) \beta \right\} \end{aligned}$$

תנאי הכיבוי של Liñan

בכדי להגיע לצורה הסטנדרטית אותה פתר *Liñan* נגדיר:

(36.4)

$$\Psi \triangleq -\Phi \tilde{\delta}^{1/3} \rightarrow \Phi = -\Psi \tilde{\delta}^{-1/3}$$

$$Z \triangleq -\beta \tilde{\delta}^{1/3} \rightarrow \beta = -Z \tilde{\delta}^{-1/3}$$

$$\bar{\gamma} \triangleq \left(\frac{b_F + b_0}{b_F - b_0} \right)$$

ונציב את הביטויים במשוואה (4.62):

(46.4)

$$\frac{d^2 \left(-\Psi \tilde{\delta}^{-1/3} \right)}{d \left(-Z \tilde{\delta}^{-1/3} \right)^2} = \frac{4D \tilde{\delta}^{-2/3}}{(b_F - b_0)^2} (Z^2 - \Psi^2) \exp \left\{ -\tilde{\delta}^{-1/3} (\Psi + \bar{\gamma} Z) \right\}$$

$$\therefore \frac{d^2 \Psi}{dZ^2} = \frac{4D}{(b_F - b_0)^2} \frac{1}{\tilde{\delta}} (Z^2 - \Psi^2) \exp \left\{ -\tilde{\delta}^{-1/3} (\Psi + \bar{\gamma} Z) \right\}$$

פתרון משוואה (4.64) מספק את משתני האזור הפנימי $\gamma_F^*, \gamma_0^*, \tau$. משוואה זו

פתר *Liñan* [1974] באופן נומרי ומצא את העקומה התוחמת את האזור בו קיים פתרון למשוואה. האזור בו לא קיים פתרון למבנה הפנימי של הלהבה הוא למעשה האזור בו יתרחש הכיבוי.

התנאי לכיבוי נתון ע"י הפרמטרים $\tilde{\delta}, \bar{\gamma}$ כאשר:

מספר *Damköhler* לריאקציה המנוון הינו:

(56.4)

$$\tilde{\delta} = \frac{4D}{(b_F - b_0)^2}$$

משתנה $\bar{\gamma}$ מציין את היחס בין החום העודף המועבר לצד אחד של הלהבה על-פני החום המועבר לצדה השני ובין סך החום הנוצר מהריאקציה (ראה משוואות 4.52, 4.54) והגדרתו כמצוין במשוואה (4.63):

$$\bar{\gamma} \triangleq \left(\frac{b_F + b_O}{b_F - b_O} \right)$$

וכיבוי ע"פ האנליזה של Liñan מתקבל עבור:

(66.4)

$$\tilde{\delta} \leq \delta_E$$

כאשר:

(76.4)

$$\delta_E = e[1 - |\bar{\gamma}| - (1 - |\bar{\gamma}|)^2 + 0.26(1 - |\bar{\gamma}|)^3 + 0.055(1 - |\bar{\gamma}|)^4]$$

יש לציין ש [Liñan 1974] הניח במודל עבורו ביצע את האנליזה זרימה נגדית (ראה בפרק 1 הסבר על סוגי זרימה) של דלק גזי ומחמצן. ואנו עוסקים בזרימה מקבילית ובלהבת תרסיס. ההצדקה לשימוש בתוצאות האנליזה של Liñan היא ההנחה שעובי הלהבה קטן בהרבה מרדיוס העקמומיות שלה באזור בו מבוצעת האנליזה, כלומר בשיא הלהבה. כך, מנגנון הדיפוסיה מוביל את המגיבים אל אזור הריאקציה באופן דומה לזרימה נגדית ומתאפשרת התייחסות אל הבעיה כאל בעיה חד כיוונית. לגבי התרסיס, אכן אין ביטוי ישיר של טיפות התרסיס באנליזה של המבנה הפנימי של הלהבה וזאת כיוון שהטיפות אינן משתתפות בריאקציה ואידוי הטיפות ובעירתן הינן תופעות בסדרי גודל שאינם משפיעים על משוואות האזור הפנימי (כמוזכר לעיל בפיתוח משוואות האזור הפנימי בפרק זה). לעומת זאת נוכחות טיפות התרסיס משפיעה על הפתרון החיצוני- על טמפרטורת הלהבה (כפי שראינו בפרק 3 בגרפים 3.9-3.10) ועל נגזרת הטמפרטורה בקרבתה (ראה בפרק 3 גרף 3-11) ודרך כך נוכחות טיפות התרסיס באה לידי ביטוי בפתרון המבנה הפנימי של הלהבה ובתנאי הכיבוי (ראה משוואות 4.34, 4.52, 4.54, 4.63, 4.65).

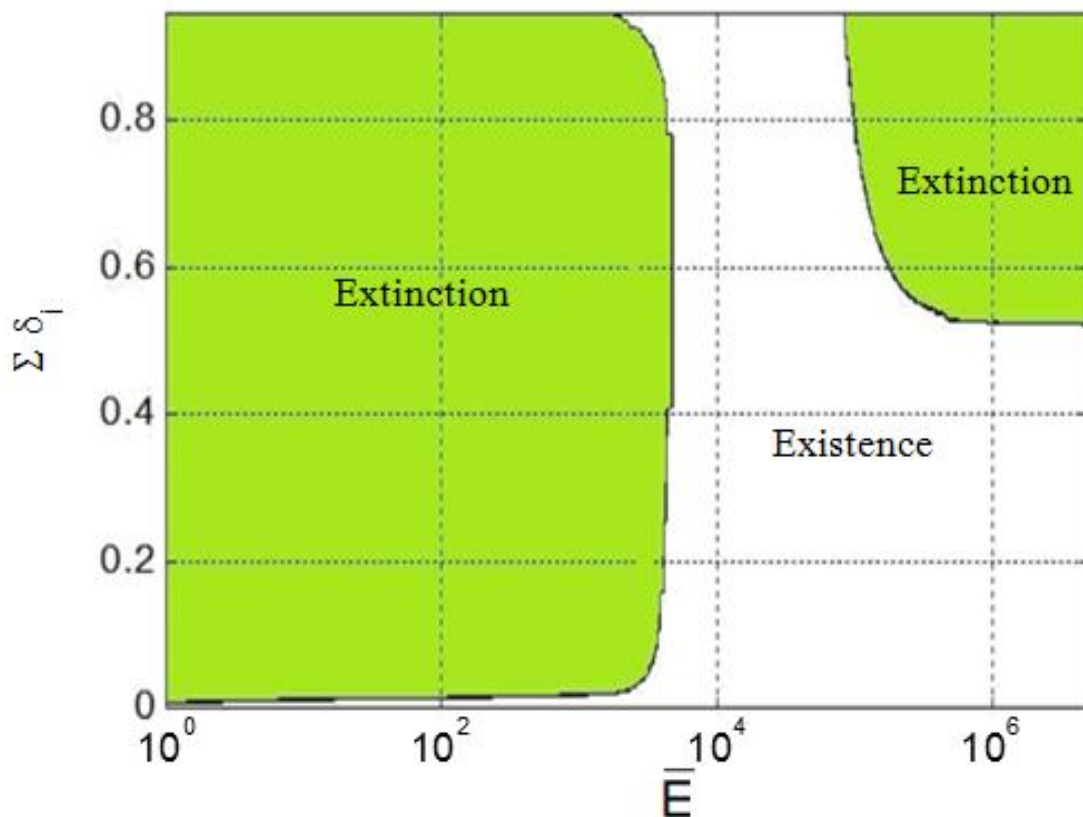
תוצאות טיפוסיות

בחלק זה נציג מפות כיבוי המתארות את רגישות כיבוי שיא הלהבה למאפייני התרסיס. הערכים בהם נעשה שימוש עבור הפרמטרים המאפיינים את הבעיה זהים לאלו המוצגים בפרק 3. בנוסף על כך, כפי שצוין לעיל, תנאי הכיבוי של שיא הלהבה תלוי בפתרון החיצוני (כמוצג בפרק 3) ונגזר ממנו ולפיכך יש לפתור מחדש לכל שינוי של מאפייני התרסיס (כלומר לכל נקודה במפה).

תוצאות טיפוסיות

ראשית נציג תוצאה טיפוסית של מפת כיבוי עבור תרסיס חד חתכי בו גודל כל טיפה שייך לחתך 6. כאשר נבחנת רגישות הכיבוי למקדם האידוי המנורמל של הטיפות וליחס ההתחלתי בין כמות הדלק הנוזלי לסך הדלק (גזי+טיפות) (להלן כמות התרסיס היחסית). התוצאות מחושבות עבור $Pe = 10$.

Extinction Map @ $(\delta_6 / \sum \delta_i) = 1$



גרף 4-1: מפת כיבוי עבור תרסיס חד-חתכי
Graph 4-1: Extinction Map for Monosectional Spray

ניתן להבחין שמפת הכיבוי מתחלקת ל-3 אזורים עיקריים:

(א) עבור מקדמי אידוי נמוכים (עד $\bar{E} \cong 4,500$) - מתרחש כיבוי לכל כמות תרסיס יחסית למעט אזור צר של יחס נמוך מאד של התרסיס לסך הדלק.

(ב) עבור מקדמי אידוי גבוהים יותר (עד $\bar{E} \cong 10,000$) – הלהבה מתקיימת ללא תלות בכמות התרסיס היחסית.

(ג) עבור מקדמי אידוי גבוהים מאד (למעלה מ- $\bar{E} \cong 10,000$) – כיבוי הלהבה נקבע בעיקר ע"פ כמות התרסיס היחסית, כאשר מתחת לערך מסוים הלהבה מתקיימת ומעליו מתקבל כיבוי.

ניתן להסביר את התנהגות מפת הכיבוי ע"פ הגרפים שהוצגו בפרק 3 המתארים את גובה הלהבה כנגד מקדם האידוי המנורמל של התרסיס:

(א) עבור מקדמי אידוי נמוכים הוסבר שהטיפות אינן מתאדות ועיקר השפעתן היא שככל שיש יותר דלק בצורת תרסיס כך יש פחות דלק גזי. כתוצאה מכך הלהבה נמוכה יותר והטמפרטורה שלה נמוכה יותר (גרף 4-3 וגרף 10-3). ככל שטמפרטורת שיא הלהבה נמוכה יותר כך הלהבה פחות אנרגטית, הרגישות לכיבוי גדלה ואזורי הקיום במפת הכיבוי מצטמצמים. כפי שצוין לעיל, הלהבה מתקיימת באזור זה עבור כמות תרסיס יחסית נמוכה מאד. לפי ההסבר הנ"ל והגרפים המוזכרים מפרק 3 ניתן להבין תופעה זו כיוון שכמות מזערית של טיפות כמעט לא משפיעה על טמפרטורת שיא הלהבה ולא תגרום לכיבוי.

(ב) עבור מקדמי אידוי גבוהים יותר גובה הלהבה עולה עם מקדם האידוי ואיתו אף עולה טמפרטורת הלהבה (גרף 4-3 וגרף 10-3). עם עליית הטמפרטורה בשיא הלהבה, הלהבה יותר אנרגטית, והרגישות לכיבוי נדחית.

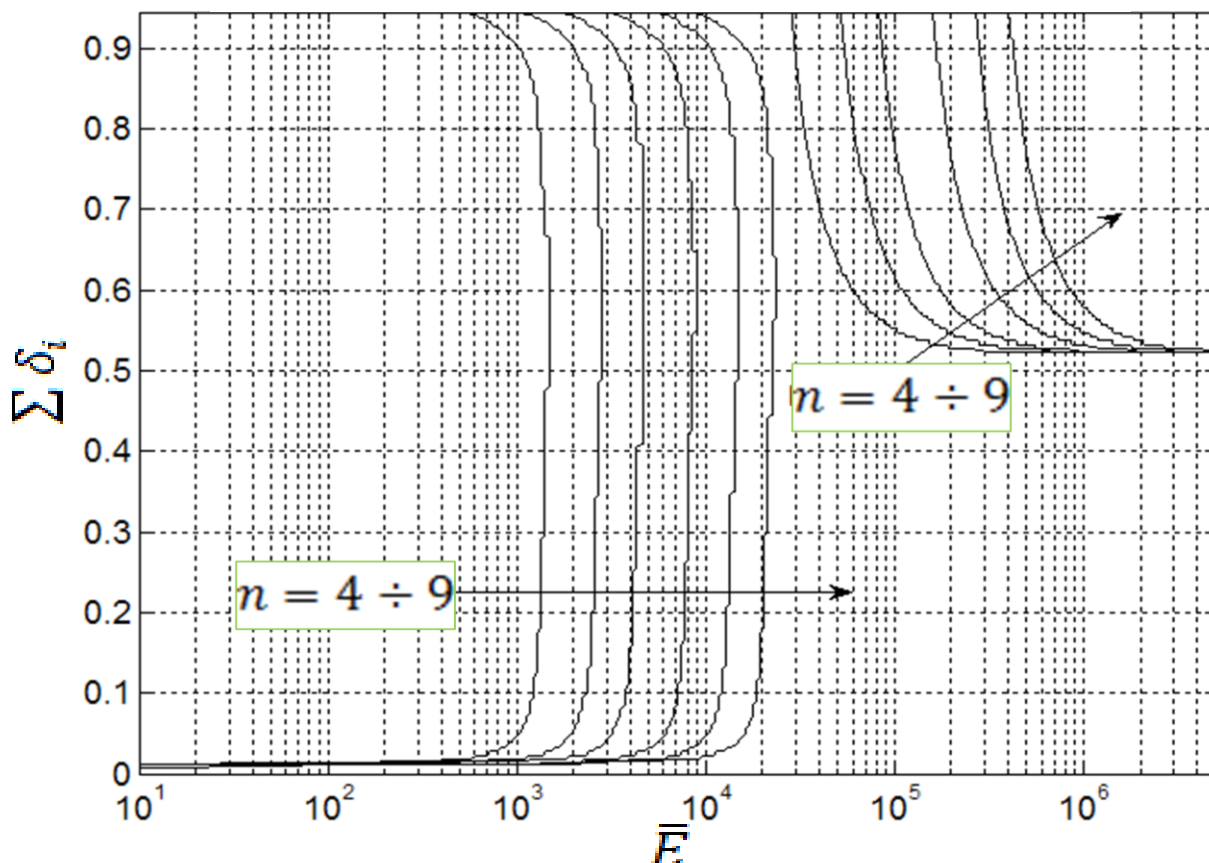
(ג) עבור מקדמי אידוי גבוהים מאד רוב התרסיס מתאדה בשלבים מוקדמים מאד בזרימה, גובה הלהבה שואף אסימפטוטית לגובה להבת Burke & Schumann הגזית והטמפרטורה אף היא יורדת לערך ממוצע בין שני

האזורים הראשונים. ניתן לראות בגרף 10-3 שהטמפרטורה עבור מקדמי אידוי גבוהים מאד תלויה בכמות התרסיס היחסית באופן שכל שכמות התרסיס היחסית גדלה כך הטמפרטורה קטנה. וזאת משום שכמות גדולה יותר של חום נבלעת באידוי הטיפות ככל שכמות התרסיס יותר גדולה. לפיכך ניתן לראות במפת הכיבוי שקיים ערך קריטי מסוים של תרסיס שרק מעליו מתרחש הכיבוי.

באופן איכותי, ניתן לראות הקבלה בין מפת הכיבוי ובין הגרפים המוזכרים מפרק 3 בנוגע לחלוקת האזורים ע"פ ערכי מקדם האידוי המנומל.

נתבונן על השפעת גודל הטיפות. הגרפים הבאים מתארים את מפות הכיבוי של תרסיסים חד-חתכים שונים מחתך 4 עד חתך 9.

Extinction Map @ $(\delta_{i=n}/\sum \delta_i) = 1$, $\delta_{i \neq n} = 0$

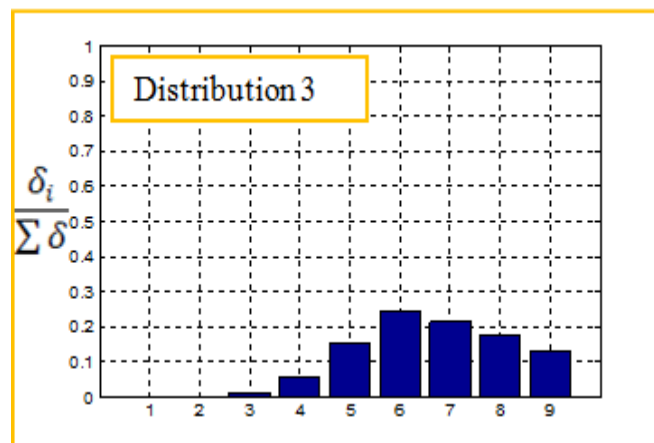
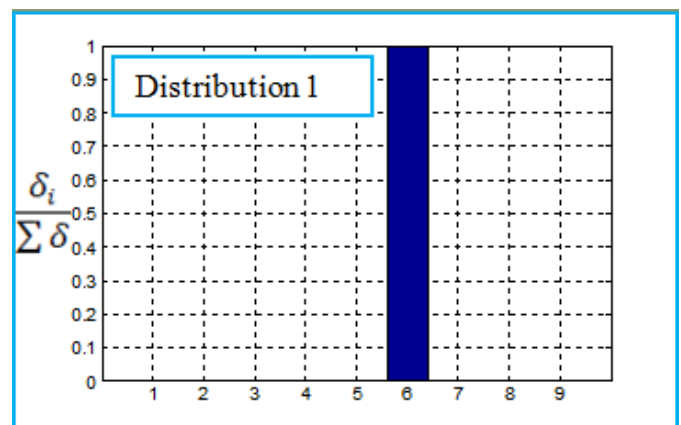
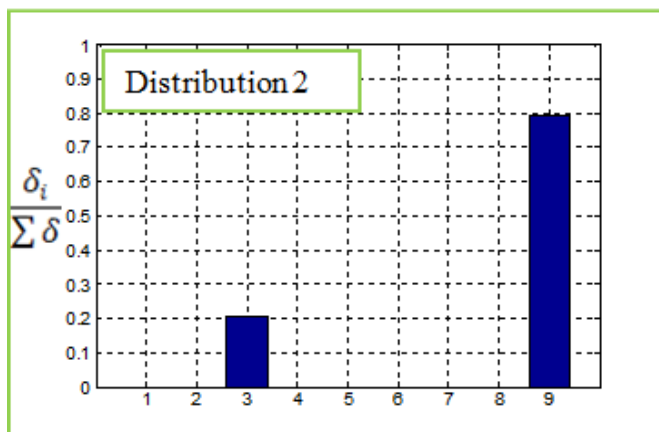


גרף 4-2: רגישות מפת הכיבוי לגודל טיפות התרסיס

Graph 4-2: Extinction Map Sensitivity to Size of Droplets

ככל שהתרסיס החד-חתיכי בעל טיפות מחתך גבוה יותר הוא מכיל טיפות גדולות יותר אך פחות טיפות. אנו רואים שככל שטיפות התרסיס יותר גדולות הגרף נע ימינה, כלומר, נדרש מקדם אידיי גדול יותר בכדי לקבל את אותן התוצאות.

נבחן כעת את השפעת פילוג הטיפות על מפת הכיבוי. כפי שהוצג בפרק 3 לפילוג הטיפות קיימת השפעה על מאפייני הלהבה אפילו כאשר גודל הטיפות הממוצע (SMD) קבוע (ראה גרפים 6-3, 7-3). באופן דומה לבחינה שבוצעה בפרק 3 נבחן שוב את אותם 3 פילוגים שווי SMD (טבלה 1-3) ונבנה עבור כל אחד מהם מפת כיבוי התלוי במקדם האידיי המנורמל ובכמות התרסיס היחסית. תזכורת ל-3 הפילוגים: חד-חתיכי, דו-חתיכי ורב-חתיכי (מועתקים מגרף 6-3):

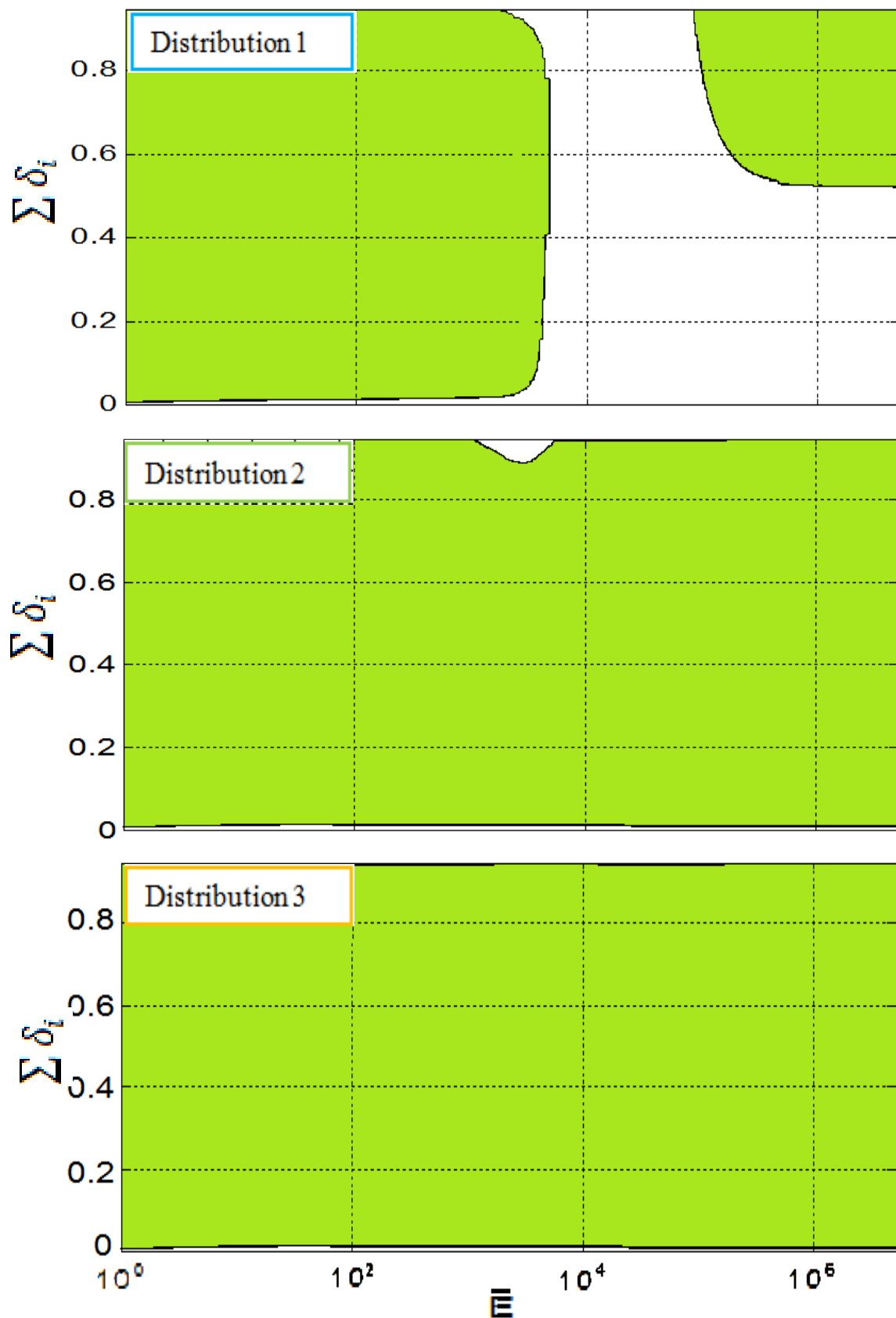


Section No.

גרף 4-3: שלושה פילוגי טיפות התחלתיים בעלי SMD=44.8

Graph 4-3: Three Initial Droplets Distributions with SMD=44.8

מפות כיבוי עבור 3 הפילוגים ($Pe = 10$):



גרף 4-4: מפת כיבוי עבור תרסיסים רב-חתיכים שונים, $Pe=10$
 Graph 4-4: Extinction Map for Various Polysectional Sprays, $Pe=10$

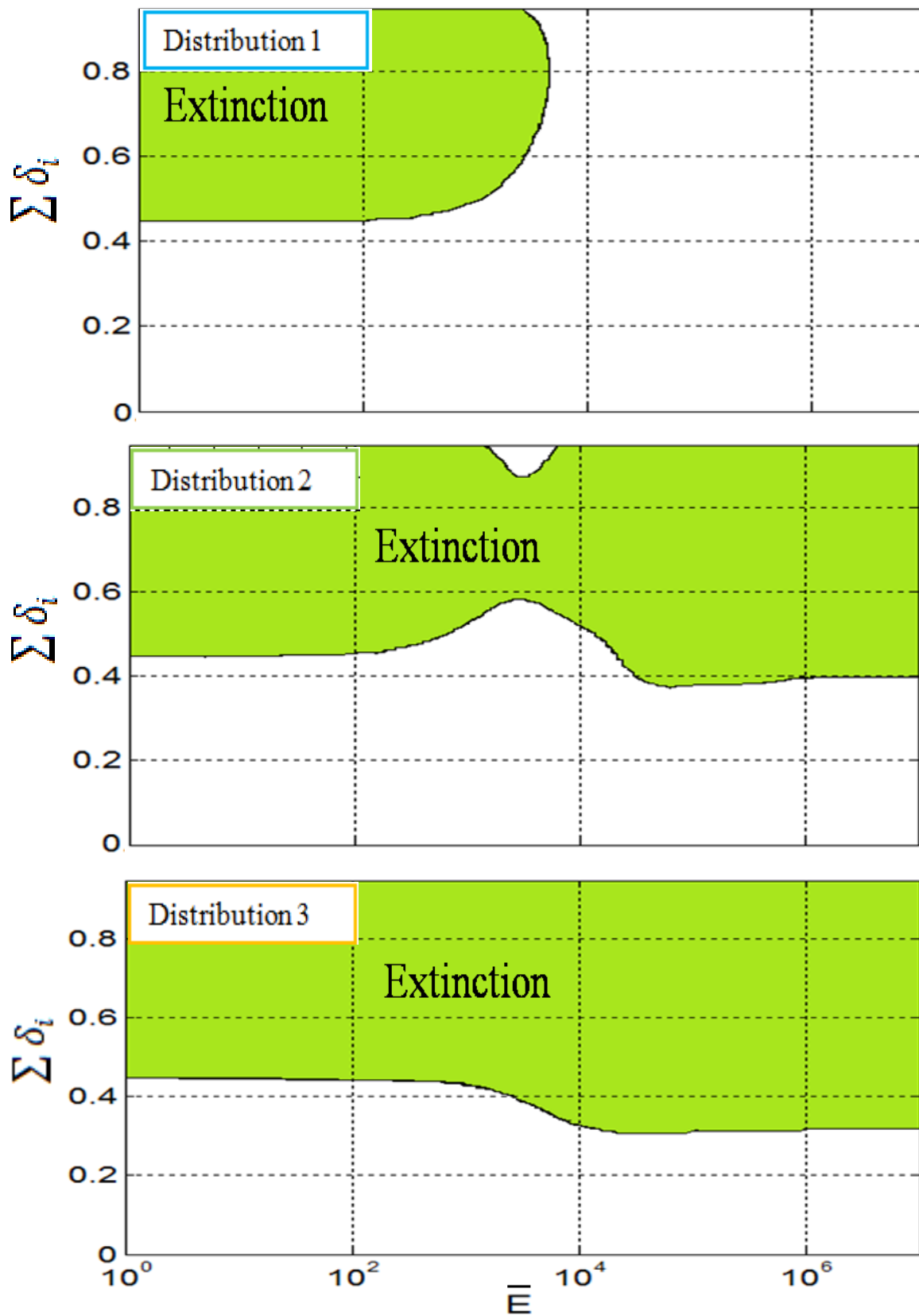
ההבדלים במפות הכיבוי עבור 3 הפילוגים משמעותיים ביותר עד כי אזור קיום שלם בפילוג החד-חתכי "נעלם" בפילוג הרב חתכי (למעשה זהו פילוג רב-גדלי המתואר ע"י חתכים רבים) פרט לפס צר בתחתית הגרף כלומר עבור כמות טיפות יחסית מזערית ביותר שאז אין משמעות לפילוג הטיפות. התוצאות ממחישות באופן ברור כי קיימת רגישות של כיבוי שיא הלהבה לפילוג הטיפות אפילו עבור SMD קבוע. ניתן לקבל חיזוק לתוצאות מתוך בחינת השפעת הפילוג על מאפייני הלהבה (פרק 3). בגרף 3-7 ניתן לראות שגובה הלהבה המרבי יורד במעבר מהפילוג החד-חתכי לפילוג הדו-חתכי ומקבל ערכים נמוכים ביותר עבור הפילוג הרב-חתכי. ראינו שישנה קורלציה חזקה בין גובה הלהבה ובין הטמפרטורה של שיא הלהבה. כמו-כן ראינו שכל שטמפרטורת שיא הלהבה נמוכה יותר אזורי הכיבוי גדלים. מכאן מובן שאזורי הכיבוי "מתפשטים" בין הפילוג החד-חתכי ועד לפילוג הרב-חתכי.

התנהגות מפת הכיבוי עבור הפילוג הדו-חתכי ניתנת להסבר בעזרת החלוקה ל-3 אזורים כנזכר לעיל אלא שעבור מקדמי אידוי גבוהים מאד הרף הקריטי של כמות התרסיס שגורמת לכיבוי יורד עד לערכים נמוכים מאד. האזור היחיד שעדיין ניתן לקבל בו קיום של הלהבה הינו האזור האמצעי בו הלהבה תתקבל עבור ערכים גבוהים של כמות תרסיס יחסית ועבור תחום מקדמי אידוי מצומצם בו גובה הלהבה מרבי ולכן גם הטמפרטורה בשיא הלהבה מרבית.

כמובן שמפה זו תלויה בגורמים רבים נוספים מלבד פילוג הטיפות כגון גיאומטריית הבעיה, מספר Peclet, כמות המחמצן ועוד.. אך ניתן לראות בבירור את השפעת פילוג הטיפות על כיבוי שיא הלהבה.

נתבונן בתוצאות נוספות עבור 3 הפילוגים אלא שכעת נבחר מספר Peclet גדול יותר. מתוך הגדרת תנאי הכיבוי (משוואה 4.66), הגדרת $\tilde{\delta}$ (משוואה 4.65) ותלות D ב-Pe (משוואה 4.34) ניתן לראות שנקבל אזורי קיום יותר נרחבים.

מפות כיבוי עבור 3 הפילוגים ($Pe = 100$):



גרף 4-5: מפת כיבוי עבור תרסיסים רב-חתיכים שונים, $Pe=100$
 Graph 4-5: Extinction Map for Various Polysectional Sprays, $Pe=100$

אכן עבור מספר Peclet גדול יותר התקבלו אזורי קיום יותר נרחבים לשיא הלהבה עבור כל אחד מהפילוגים. שוב ניתן לראות חלוקה ל- 3 אזורים (בעיקר עבור הפילוג הדו-חתכי, בפילוג החד-חתכי אזור מקדמי האידוי הגבוהים כנראה מחוץ לסקלה) כאשר באזור האמצעי אזורי הקיום הגדולים ביותר באופן כללי. תוצאה נוספת שחזרה על עצמה היא צמצום של אזורי קיום שיא הלהבה במעבר מהפילוג החד-חתכי לפילוג הדו-חתכי ולפילוג הרב-חתכי.

נבחן כעת השפעה של טמפרטורת השפעול T_a ושל מקדם איבר הריאקציה B על מפת הכיבוי. פרמטרים אלו מופיעים במשוואות השולטות באיבר הריאקציה:

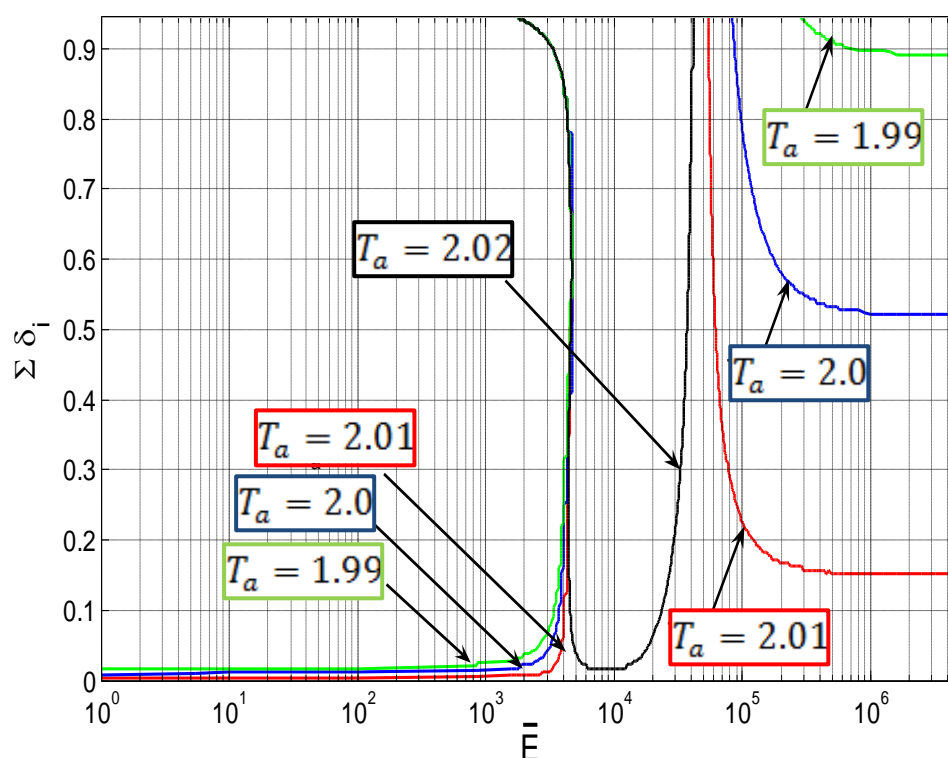
(86.4)

$$B\gamma_F\gamma_0 e^{-T_a/T}$$

המבטא במשוואות המגיבים את קצב איבוד הדלק הגזי / המחמצן כתוצאה מהריאקציה ובמשוואות בטמפרטורה מבטא את קצב היווצרות החום כתוצאה מהריאקציה. ככל שטמפרטורת השפעול גבוהה אנרגיית השפעול הדרושה לריאקציה גבוהה יותר והריאקציה פחות פעילה, איבר זה קטן ונצפה ללהבה פחות אנרגטית ולאזורי כיבוי נרחבים יותר. באופן דומה ככל שמקדם הריאקציה נמוך יותר איבר הריאקציה קטן ונצפה לאזורים נרחבים יותר של כיבוי שיא הלהבה. שני פרמטרים אלו תלויים בסוג הריאקציה ולמעשה תלויים במגיבים עצמם (סוגי הדלק והמחמצן).

רגישות הכיבוי לטמפרטורת השפעול ולמקדם הריאקציה מתוארת ע"י מפות כיבוי בעמוד הבא.

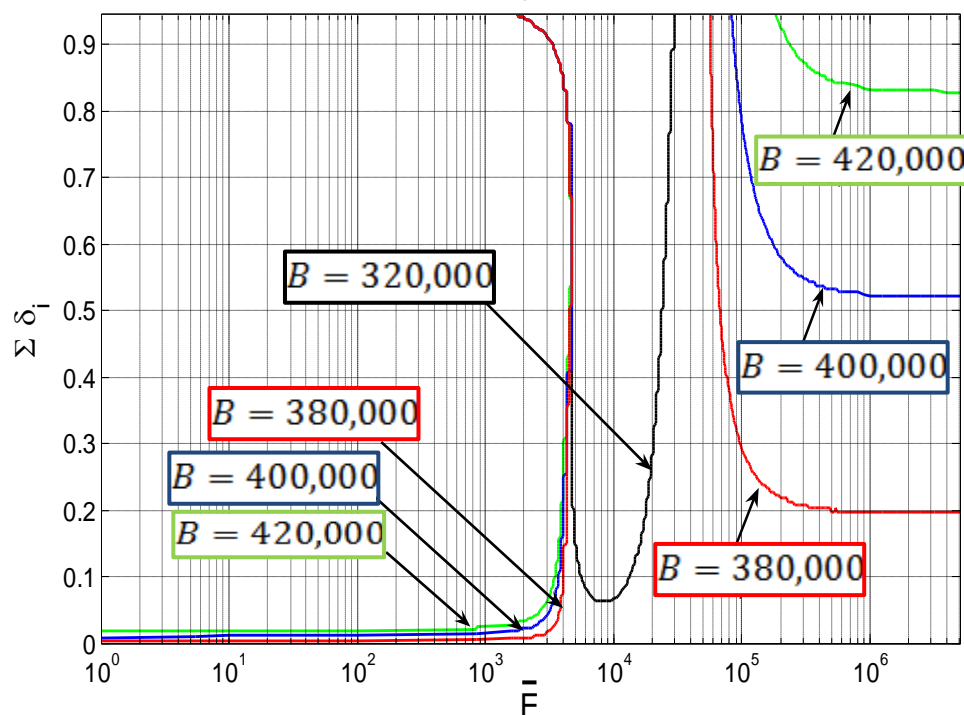
Extinction Map @ Various T_a



גרף 4-6: מפת כיבוי עבור טמפרטורות שפעול משתנה, $Pe=10$

Graph 4-6: Extinction Map for Various Activation Temperatures, $Pe=10$

Extinction Map @ Various B



גרף 4-7: מפת כיבוי עבור מקדם ריאקציה משתנה, $Pe=10$

Graph 4-7: Extinction Map for Various Reaction Coefficient, $Pe=10$

אכן התוצאות מאשרות את ההשערות וניתן לראות את אופן השתנות מפת הכיבוי עם שינוי של איבר הריאקציה.

לסיכום, בפרק זה פותח תנאי הכיבוי לאזור שיא הלהבה והוצגו תוצאות בדרך של מפת כיבוי כתלות במאפייני התרסיס. בעזרת המודל הרב-חתכי הוצגו תוצאות חדשות לרגישות הכיבוי ונבחנה השפעת פילוג הטיפות על תנאי הכיבוי. התוצאות ממחישות כי קיימת רגישות משמעותית של כיבוי שיא הלהבה לפילוג טיפות שונה אפילו כשנשמר גודל ממוצע של טיפות התרסיס (SMD).

פרק 5 – סיכום והצעות להמשך המחקר

סיכום

בעבודה זו פותח מודל לתיאור להבת תרסיס רב-גדלי למינרית דיפוזיבית בזרימה מקבילית וכן יושמה אנליזה לכיבוי להבות דיפוזיביות על אזור שיא הלהבה בהתבסס על המודל הנ"ל. בעזרת המודל נחקרה השפעת פילוג גודל טיפות התרסיס על מאפייני הלהבה ולאחר מכן נבחנה רגישות כיבוי שיא הלהבה לפילוג גודל טיפות התרסיס.

בשלב הראשון, הוצגו פתרונות אנליטיים של משוואת התרסיס, משוואות הפאזה הגזית ומשוואת הטמפרטורה והוצגו תוצאות טיפוסיות חדשות של הפתרונות ע"פ המודל החדש, כגון: קצב דעיכת כמות הטיפות במורד הזרימה, צורת הלהבה, שדה הטמפרטורה, וכן גובה הלהבה והטמפרטורה בשיא הלהבה כתלות במקדם האידוי של הדלק, בכמות התרסיס, בגודל הטיפות ובפילוג גודלן. התוצאות ממחישות כי קיימת רגישות של מאפייני הלהבה לפילוג טיפות התרסיס ועל-כן יש צורך לאפיין את התרסיס הרב-גדלי ע"י מודל רב-חתי בו יש ביטוי לפילוג גודל הטיפות. בנוסף, התוצאות הראו כי גם כאשר פילוג הטיפות ההתחלתי הוא חד-חתי באופן שגודל הטיפות תחום בתחום צר מאד, גם אז מתקבלות תוצאות שונות משמעותית למאפייני הלהבה כתוצאה משימוש במודלים השונים. הסיבה לכך היא שבמהלך האידוי גודל הטיפות משתנה ותופעה זו מקבלת ביטוי רק במודל הרב-חתי.

לאחר מכן, בוצעה אנליזה למבנה הפנימי של הלהבה ופותח תנאי הכיבוי לשיא הלהבה. תנאי הכיבוי מתבסס על הפתרונות שהוזכרו לעיל לריכוזיות המגיבים (משוואת הפאזה הגזית) ולטמפרטורה בשדה. בהסתמך על תנאי הכיבוי ועל המודל הרב-חתי הוצגו תוצאות חדשות למפת קיום וכיבוי שיא הלהבה כתלות במקדם האידוי ובכמות התרסיס היחסית בכניסה לתא השריפה. מפות כיבוי אלו חושבו עבור פילוגים שונים בעלי ממוצע גודל טיפות קבוע והתוצאות המחישו כי קיימת רגישות משמעותית של כיבוי שיא הלהבה לפילוג הטיפות. כמו-כן הוצגו תוצאות חדשות של מפות הכיבוי כתלות בפרמטרים נוספים.

הצעות להמשך המחקר

(א) בעבודה זו הוצגה ראייה להשפעת פילוג טיפות התרסיס על מאפייני הלהבה הנחקרת וביניהם על רגישות כיבוי שיא הלהבה. עם זאת, יש מקום להעמיק בחקירת אופן ההשפעה של פילוג הטיפות על מאפייני הלהבה ועל מצבי הקיום והכיבוי של הלהבה.

הצעות לכיוונים בחקירה זו:

חקירה נומרית – יש לאפיין פילוגים שונים, להריץ עבורם את האנליזה ע"פ המודל הרב-חתכי ולבחון את השפעתם על מאפייני הלהבה (גובה הלהבה כנגד מקדם האידוי ומאפייני התרסיס) ועל מפת הכיבוי (למשל להגדיר פילוג נורמלי ולבחון את רגישות התוצאות לממוצע ולשונות).

חקירה אנליטית – התוצאות מעידות על תופעות אסימפטוטיות. כגון גובה להבת התרסיס עבור מקדמי אידוי הולכים וגדלים. וכן עבור הטמפרטורה של שיא הלהבה. כמו-כן, הגבול בין אזור הקיום ואזור הכיבוי בתחום מקדמי האידוי הגבוהים של מפת הכיבוי ועוד. יש לחזור למשוואות ולבחון את האפשרות של ניוון המשוואות באופן שיאפשר פתרון פשוט ומיידי עבור אותם ערכים אסימפטוטים.

(ב) כפי שהוסבר בפרק המבוא, הלהבות המצויות בתאי השריפה הן להבות טורבולנטיות אך באופן מקומי קיימות להבות למינריות בזרימה מקבילית. Peters [2000] הציג שיטה למידול הלהבות הטורבולנטיות ע"י אוסף של 'להבוניות' למינריות. יש לבחון את השפעת השימוש במודל להבת תרסיס רב-גדלי על מודל הלהבה הטורבולנטית.

(ג) ההצעה האחרונה היא בתחום הניסויי. יש לבצע סדרת ניסויים לטובת השוואה לתוצאות מחקר זה ולאישוש המודל הרב-חתכי.

מקורות

1. Akamatsu, F. and Katsuki, M., "Group Combustion Behavior of Liquid Fuel Spray", in proceedings of Thermal Engineering Conference, Japan, (2004).
2. Anidjar, F., Greenberg, J.B. and Tambour, Y., "On the Solution of a Class of Polydisperse Spray Problems", European Journal of Applied Mathematics, Vol. 7, pp.75-96, (1996).
3. Apte, S.V., Gorokhovski, M. and Moin, P., "LES of Atomizing Spray with Stochastic Modeling of Secondary Breakup", International Journal of Multiphase Flow 29, pp. 1503–1522, (2003).
4. Briffa, F.E.J. and Dombrowski, N., "The Stability of Flames on Flat Sprays", Proceedings of the Royal Society London, Series A, Vol. 320, pp. 309-322, (1970).
5. Burgoyne, J.H. and Cohen, L., "The Effect of Droplet Size on Flame Propagation in Liquid Aerosol", Proceedings of the Royal Society London, Series A, Vol. 225, pp. 375-392, (1954).
6. Burke, S.P. and Schumann, T.E.W., "Diffusion Flames", Industrial and Engineering Chemistry 20, pp. 998–1004, (1928).
7. Cheatham, S. and Matalon, M., "A General Asymptotic Theory of Diffusion Flames with Application to Cellular Instability", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 404, pp. 105-144, (2000).
8. Chen, G., "An Experimental Investigation on Laminar Diffusion flames on Monodisperse Fuel Sprays", Ph.D. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, Yale University, Hartford, CT, (1995).
9. Chen, Z.H., Lin, T.H. and Sohrab, S.H., "Combustion of Liquid Fuel Sprays in Stagnation-Point Flow", Combustion Science and Technology, Vol. 60, Issue 1-3, pp. 63-77, (1988).
10. Chigier, N.A., "Energy Combustion and Environment", McGraw – Hill, (1981).
11. Chigier, N.A. and McGreath, C.G., "Combustion of Droplets in Sprays", Acta Astronautica1, pp. 687-710, (1974).
12. Chiu, H. H., Kim, H. Y. and Croke, E. J., "Internal Group Combustion of Liquid Droplets", Nineteenth Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, Pittsburgh, pp. 971-980, (1982).
13. Chung, S.H. and Law, C.K., "Burke–Schumann Flame with Streamwise and Preferential Diffusion", Combustion Science and Technology 37, pp. 21–46, (1984).
14. Clarke, J.F., "On the Structure of a Hydrogen-Oxygen Diffusion Flame", Proceedings of the Royal Society London, Series A, Vol. 307, pp. 283–302, (1968).
15. Davies, C.N., Aerosol Science, Academic Press, New York, New York, pp. 393-468, (1976).
16. Dvorjetski, A. and Greenberg, J.B., "Influence of Non-Unity Lewis Numbers and Droplets Loading on the Extinction of Counter-Flow Spray Diffusion Flames", Proceedings of the Combustion Institute, Vol. 28, pp. 1047-1054, (2000).
17. Faeth, G.M., "Current Status of Droplet and Liquid Combustion", Progress in Energy and Combustion Science, Vol. 3, pp. 191-224, (1977).
18. Ghosal, S. and Vervisch, L., "Stability diagram for lift-off and blowout of a round jet laminar diffusion flame", Combustion and Flame, Vol. 124, Issue 4, pp. 646-655, (2001).
19. Godsave, G.A.E., "Studies of the Combustion of Drops in a Fuel Spray-The Burning of Single Drops of Fuel", Fourth International Symposium on Combustion, Williams and Wilkins, Baltimore, pp. 818-830, (1953).
20. Goldsmith, M. and Penner, S.S., "On the Burning of Single Drops of Fuel in an Oxidizing Atmosphere", Jet Propulsion 24, pp. 245-251, (1954).
21. Golovanevsky, B., Levy, Y., Greenberg, J.B. and Matalon, M., "On Oscillatory Behavior of Laminar Spray Diffusion Flames: Theory and Experiment", Combustion and Flame, Vol. 117, Nos. 1-2, pp. 373-383, (1999).
22. Greenberg, J.B. and Tambour, Y., "Far-Field Coalescence Effects in Polydisperse Spray Jet Diffusion Flames", Twenty-first International Symposium on Combustion/The Combustion Institute, pp. 655-663, (1986).
23. Greenberg, J.B., "The Burke-Schumann Diffusion Flame Revisited-With Fuel Spray Injection", Combustion and Flame 77, pp. 229-240, (1989).
24. Greenberg, J.B., "Spray Diffusion Flames with Arbitrary Initial Droplet Velocity Distributions", Combustion Science and Technology, Vol. 75, pp. 13–30, (1991).
25. Greenberg, J.B., Silverman, I. and Tambour, Y., "On the Origins of Spray Sectional Conservation Equations", Combustion and Flame 93, pp. 90-96, (1993).

26. Greenberg, J.B., Elkaim, D., Tambour, Y., "On the Computation of the Combustion of a Cloud of Fuel Droplets", *International Journal of Turbo & Jet-Engines*, Vol. 11, pp. 263-275, (1994).
27. Greenberg, J.B. and Grodek, F., "Curvature Effects in Burke-Schumann Spray Flame Extinction", *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 8, pp. 1507-1513, (2003).
28. Harsha, P.T. and Edelman, R.B., "Analytic Modeling of a Spray Diffusion Flame", AIAA-84-1317, AIAA/SAE/ASME, 20th Joint Propulsion Conference, Cincinnati, OH, (1984).
29. Hollmann, C., and Gutheil, E., "Flamelet-Modeling of Turbulent Spray Diffusion Flames Based on a Laminar Spray Flame Library", *Combustion Science and Technology*, Vol. 135, pp. 175-192, (1998).
30. Igra, D., "Theoretical Study of a Polydisperse Evaporating Spray in the Near Field of an Axisymmetric Non-Uniform Flow", M.Sc. Thesis, Israel Institute of Technology, (1997).
31. Im, H.G., Law, C.K. and Axelbaum, R.L., "Opening of the Burke-Schumann Flame Tip and the Effects of Curvature on Diffusion Flame Extinction", *Proceedings of the Combustion Institute*, Vol. 23, pp. 551-558, (1991).
32. Katoshevski, D., Tambour, Y., "A Theoretical Study of Polydisperse Liquid Sprays in a Shear Layer Flow", *Physics of Fluids*, Vol. 5, pp. 3085-3098, (1993).
33. Katoshevski, D., Tambour, Y., "On the Combustion of Sprays of Liquid Fuels and Liquid Oxidizers in a Diffusion Flame in a Shear Layer Flow", *Proceedings of the Combustion Institute*, Vol. 28, pp. 1087-1093, (2000).
34. Khosid, S. and Greenberg, J.B., "The Burke-Schumann Spray Diffusion Flame in a Nonuniform Flow Field", *Combustion and Flame* 118: pp. 13-24, (1999).
35. Khosid S., Tambour Y., "New Closed-Form Analytical Solutions of the Discrete Coagulation Equation with Simultaneous Evaporation and Their Use for Validation of Sectional Solutions", *Atomization and Sprays*, Vol. 3, Issue 4, pp. 223-248, (1993).
36. Kunin, A., Greenberg, J.B., Natan, B., "Influence of Organic Gel Droplets on the Behavior of Gel Spray Diffusion Flames", AIAA-2005-4476, AIAA/ASME/SAE/ASEE, 41st Joint Propulsion Conference and Exhibit, (2005).
37. Kunin, A., Greenberg, J.B., Natan, B., "Hot Spots in Organic Gel Spray Diffusion Flames", AIAA-2006-1440, 44th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, (2006).
38. Labowsky, M., and Rosner, D.E., " "Group" Combustion of Droplets in Fuel Clouds. I. Quasi-Steady Predictions", *Symposium on Evaporation-Combustion of Fuel Droplets*, Division of Petroleum Chemistry, American Chemical Society, (1976).
See also in the book: "Evaporation—Combustion of Fuels", Joseph T. Zung, Vol. 166, Chap. 4, pp: 63-79, (1978).
39. Law, C.K., "Recent Advances in Droplet Vaporization and Combustion", *Progress in Energy and Combustion Science*, Vol. 8, pp. 181-201, (1982).
40. Lefebvre, A.H., "Atomization and Sprays". *Combustion: An International Series*, (1989).
41. Liñan, A., "The Asymptotic Structure of Counterflow Diffusion Flames for Large Activation Energies", *Acta Astronautica* Vol. 1, pp. 1007-1039, (1974).
42. Peters, N., "Turbulent Combustion", Cambridge University Press, (2000).
43. Polymeropoulos, C.E., "Steady state vaporization and ignition of liquid spheres", *Combustion Science and Technology* 8, pp. 111-120, (1973).
44. Polymeropoulos, C.E., "Steady State Vaporization and Ignition of Liquid Spheres", *Combustion Science and Technology* 8, pp. 111-120, (1973)
45. Sala, R. and Spalding, D.B., "A mathematical Model for an Axi-Symmetrical Diffusion Flame in a Furnace", *La Rivista dei Combustibili*, Vol. 27, pp. 180-186, (1973).
46. Sirignano, W.A., "The Formulation of Spray Combustion Model, Resolution Compared to Droplet Spacing", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 633-639, (1986).
47. Sirignano, W.A., "Fluid Dynamics and Transport of Droplets and Sprays", Cambridge University Press, (1999).
48. Spalding, D.B., "The Combustion of Liquid Fuel", *Fourth International Symposium on Combustion*, Williams and Wilkins, Baltimore, pp. 847-864, (1953).
49. Styles, A.C., and Chigier, N.A., "Combustion of air blast atomized spray flames", *Sixteenth Symposium (International) on Combustion*, The Combustion Institute, Pittsburgh, pp. 619-630, (1977).

50. Tambour, Y., "A Lagrangian Sectional Approach for Simulating Droplet Size Distribution of Vaporizing Fuel Sprays in a Turbulent Jet", *Combustion and Flame* 61 Issue 1, pp. 15-28, (1985).
51. Tambour, Y., "Coalescence of Vaporizing Kerosene Fuel Sprays in a Turbulent Jet", *Atomisation and Spray Technology*, Vol. 1, no. 2, pp. 125-146, (1985).
52. Tambour, Y., "Simulation of Coalescence and Vaporization of Kerosene Fuel Sprays in a Turbulent Jet - A Sectional Approach", *AIAA/SAE/ASME/ASEE, 21st Joint Propulsion Conference*, Monterey, CA, pp. 13- (1985).
53. Tsuji, H., "Counterflow Diffusion Flames", *Progress in Energy and Combustion Science*, Vol. 8, Issue 2, pp. 93-119, (1982).
54. Williams, F.A., *Phys. Fluids* 1, pp. 541-545, (1958). See also "Combustion Theory", 2nd Edition, The Benjamin/Cummings Publishing: Menlo Park, CA, (1985).
55. Williams, F.A., "Combustion Theory", 2nd Edition, The Benjamin/Cummings Publishing: Menlo Park, CA, (1985).
56. Wise, H., Lorell, J. and Wood, B. J., The effects of chemical and physical parameters on the burning rate of a liquid droplet, *Fifth International Symposium on Combustion*, Reinhold, N.Y., pp. 132-141, (1954).
57. Yule, A.J., Ah Seng, C., Felton, P.G., Ungut, A., Chigier, N.A., "A Study of Vaporizing Fuel Sprays by Laser Techniques", *Combustion and Flame* 44, pp. 71-84, (1982).
58. Yule, A.J., Ereaut, P.R., Ungut, A., "Droplet Sizes and Velocities in Vaporizing Sprays", *Combustion and Flame* 54, pp. 15-22, (1983).

נספח א'- תוכנית המחשב לפתרון שדה הזרימה ותנאי הכיבוי

במסגרת עבודה זו נעשה שימוש בפתרון נומרי לטובת פתרון שדה הזרימה-
ריכוזיות המגיבים וטמפרטורת השדה ותנאי הכיבוי של שיא הלהבה. בעזרת
תוכניות אלו שורטטו הגרפים הממחישים את התוצאות הטיפוסיות שהוצגו
לעיל. להלן תדפיס של תוכנית המחשב שנכתבה בתוכנת Matlab 7.0.

תוכנית ראשית למציאת קונטור להבה כתלות במקדם האידיוי המנורמל:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% Flame Contour %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all; close all;
%%% Initialize %%%
Xi_i=0; Xi_f=1; dXi=(Xi_f-Xi_i)/1000;
Xi=[Xi_i:dXi:Xi_f]';
Eta_i=0.0; Eta_f=0.5; dEta=1e-5; %(Eta_f-Eta_i)/100;
Eta=[Eta_i:dEta:Eta_f];
V=0.3; c=0.166; Pe=10;
delta=[0 0 0 0 0.6 0 0 0];%[1xN]
N=length(delta);
E=3000;
[Delta,Psi] = Init_Delta_Psi(E); %[1xN]
Delta=Delta(1:N); Psi=Psi(1:N);
eps1=1e-4;
%%% Solving %%%
Xi_Flame=Find_Flame_Shape(Eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe,eps1);
%%% Plotting %%%
figure; plot(Xi_Flame,Eta(1:length(Xi_Flame)));
grid on; set(gca,'FontSize',12);
title('Flame Shape'); xlabel('\xi'); ylabel('\eta');
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

פונקציות עזר למציאת מיקום חזית הלהבה:

```
function Xi_flame=Find_Flame_Shape(Eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe,eps1)
Xi_flame=c;
for eta_ind=2:length(Eta)
    eta=Eta(eta_ind);
    xi0=0;
    xi1=1;
    Gamma0 = Get_Gamma(xi0,eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe);
    Gamma1 = Get_Gamma(xi1,eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe);
    if sign(Gamma0)==sign(Gamma1) break; end
    while (xi1-xi0)>eps1
        xi2=(xi0+xi1)/2;
        Gamma2 = Get_Gamma(xi2,eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe);
        if sign(Gamma0)==sign(Gamma2)
            xi0=xi2;
            Gamma0 = Gamma2;
        elseif sign(Gamma1)==sign(Gamma2)
            xi1=xi2;
            Gamma1 = Gamma2;
        else % Gamma0/Gamma1/Gamma2 equals zero
```

```

        xi2=(~sign(Gamma0))*xi0+(~sign(Gamma1))*xi1+(~sign(Gamma2))*xi2;
        break;
    end
end
Xi_flame(eta_ind) = xi2;
end

```

%%%

תכנית ראשית לחישוב שדה הטמפרטורה:

%%%
 %%%%%%%%% Temperature Field %%%%%%%%%
 %%

```

clear all; close all;
tic;
%%% Initialize %%%
Xi_i=0; Xi_f=1; dXi=(Xi_f-Xi_i)/100;
Xi=[Xi_i:dXi:Xi_f]';
Eta_i=0.0; Eta_f=0.5; dEta=1e-3; %(Eta_f-Eta_i)/100;
Eta=[Eta_i:dEta:Eta_f];
V=0.3; c=0.166; Pe=10;
delta=[0 0 0 0 0.6 0 0];%[1xN]
N=length(delta);
T0=0; E=3000;
[Delta,Psi] = Init_Delta_Psi(E); %[1xN]
Delta=Delta(1:N); Psi=Psi(1:N);
eps1=1e-4;
Xi_Flame=Find_Flame_Shape(Eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe,eps1);
Temp=[];
for eta_ind=1:length(Xi_Flame)
    for xi_ind=1:length(Xi)
        eta=Eta(eta_ind);
        xi=Xi(xi_ind);
        Gamma_Temp = Get_Gamma_Temp(xi,eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe,T0);
        if xi<Xi_Flame(eta_ind)
            Gamma=Get_Gamma(xi,eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe);
            Temp(xi_ind,eta_ind) = Gamma_Temp - Gamma;
        else
            Temp(xi_ind,eta_ind) = Gamma_Temp;
        end
    end
end
for eta_ind=length(Xi_Flame)+1:length(Eta)
    for xi_ind=1:length(Xi)
        eta=Eta(eta_ind);
        xi=Xi(xi_ind);
        Gamma_Temp = Get_Gamma_Temp(xi,eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe,T0);
        Temp(xi_ind,eta_ind) = Gamma_Temp;
    end
end
figure;
[XI,ETA]=meshgrid(Xi,Eta);
[C,h] = contour(XI,ETA,Temp',18);
grid on;
set(gca,'FontSize',12);
title(['Flame Shape & Temprature Contours @ Pe=' num2str(Pe) ' , E=' num2str(E)],'fontSize',14);
xlabel('\xi','FontSize',16);
ylabel('\eta','FontSize',16);
colorbar;

```

%%%

תכנית ראשית ליצירת מפת כיבוי:

```
close all; clear all;
clc;
V=0.3; c=0.166; Pe=10; T0=0;
Lamda=0.01;% %Heat Coeff.
xi_0=0.001;
delta_Arr(1,:)= [0 0 0 0 1 0 0 0];
for i=6
    tic;
    E_Arr=[1 10 1e2 10.^([2.3:.02:2.9 3:0.1:3.9 4:.01:5 5.1:1:6.7])];
    delta_ratio=[0.0:0.005:0.945];
    Ext=[];
    delta_dist=zeros(1,9); delta_dist(i)=1;
    for dist_i=1:length(delta_dist(:,1))
        for B=[4e5]
            for T_a=[2.0]
                for d_r=1:length(delta_ratio)
                    delta=delta_dist(dist_i,:)*delta_ratio(d_r);
                    for E_i=1:length(E_Arr)
                        E=E_Arr(E_i);
                        [Extinction_Flag(E_i), delta1(E_i), delta_E(E_i), Gamma(E_i),Gamma_T(E_i),eta_f(E_i),bF(E_i),bO(E_i),G(E_i)) = ...
                            Is_Exinction(xi_0,c,V,delta,E,Pe,T0,B,T_a,Lamda);

                        Ext(d_r,E_i) = Extinction_Flag(E_i);
                    end
                end
            end
        end
    end
    figure;
    contour(E_Arr(1:length(Ext(:,1))),delta_ratio(1:length(Ext(:,1))),Ext,5);
    grid on;
    obj=get(gca,'Children'); set(obj,'LevelList',[0.5]); set(obj,'LineColor','k');
    set(gca,'FontSize',14);
    title(['Extinction Map @ B=' num2str(B) ' / T_a = ' num2str(T_a) ' / (\delta_i = '...
        num2str(find(delta_dist)) '\Sigma\delta_i)=1, \delta_i \neq '...
        num2str(find(delta_dist)) '=0'], 'FontSize',14);
    xlabel('E','FontSize',16); ylabel('\Sigma \delta_i','FontSize',16);
    set(gca,'XScale','log');
end
time_minutes=toc/60
end
```

%%%

פונקציות אתחול ופונקציות עזר לתכניות הראשיות:

```
function [Extinction_Flag,delta1,delta_E,Gamma,Gamma_T,eta_f,bF,bO,G] = Is_Exinction(xi_0,c,V,delta,E,Pe,T0,B,T_a,Lamda)
    [bF,bO,T_f,Gamma,Gamma_T,eta_f]=Get_bF_bO(xi_0,c,V,delta,E,Pe,T0,Lamda);

    eps1=T_f^2/T_a;
    D = B*eps1^3*Pe^2*exp(-T_a/T_f);
    delta1 = 4*D/(bF-bO)^2;
    G = (bF+bO)/(bF-bO);
    delta_E = exp(1) * ( 1 - abs(G) - (1-abs(G))^2 + 0.26*(1-abs(G))^3 + 0.055*(1-abs(G))^4 );
    if delta1 <= delta_E
        Extinction_Flag=1;
    else
        Extinction_Flag=0;
    End
```

%%%

```

function [bF,bO,T_f,Gamma,Gamma_T,eta_f] = Get_bF_bO(xi_0,c,V,delta,E,Pe,T0,Lamda)
[Delta,Psi] = Init_Delta_Psi(E); %[1xN]
N=length(delta);
Delta=Delta(1:N); Psi=Psi(1:N);
eta_f= Flame_Height_Vs_E(delta,E,xi_0,c,V,Pe);% Eta_Flame
d_eta=0.0005;
Gamma = Get_Gamma(xi_0,eta_f,c,V,delta,Delta,Psi,Pe);
Gamma_T = Get_Gamma_Temp(xi_0,eta_f,c,V,delta,Delta,Psi,Pe,T0);
T_f = Gamma_T;
[b0,bn] = Get_bn(xi_0,eta_f,c,delta,Pe,Delta,Psi);
bF=0; bO=0;
b0_tag=b0*(1-Gamma);
bn_tag=bn*(1-Gamma);
bF=-0.5*sum(b0_tag.*Delta.*exp(-Delta*eta_f));
bO=0.5*Lamda*sum(b0.*Delta.*exp(-Delta*eta_f));
M=50;
for n=1:M
    qn=Pe^2/2*(1-sqrt(1+4*n^2*pi^2/Pe^2)); % qn=qn(n)
    add_F1=2*(1-sum(delta))*qn/(1-qn/Pe^2)*sin(n*pi*c)/(n*pi)*exp(qn*eta_f);
    add_F2 = sum(bn_tag(n,:).*((1+Delta/Pe^2)*qn/(1-qn/Pe^2)*exp(qn*eta_f)+Delta.*exp(-Delta*eta_f)));
    bF=bF+add_F1-add_F2;;
    add_O1=2*V*qn/(1-qn/Pe^2)*sin(n*pi*c)/(n*pi)*exp(qn*eta_f);
    add_O2 = Lamda*sum(bn(n,:).*((1+Delta/Pe^2)*qn/(1-qn/Pe^2)*exp(qn*eta_f)+Delta.*exp(-Delta*eta_f)));
    bO=bO-add_O1+add_O2;
end

```

%%%

תפוקציה למציאת גובה הלהבה כנגד מקדם האידוי המנורמל:

```

function Flame_Height = Flame_Height_Vs_E(delta,E_Arr,xi,c,V,Pe)
Flame_Height=[];
N=length(delta);
for E_ind=1:length(E_Arr)
    E=E_Arr(E_ind);
    [Delta,Psi] = Init_Delta_Psi(E); %[1xN]
    Delta=Delta(1:N); Psi=Psi(1:N);
    eta0=0;
    eta1=100;
    Gamma0 = Get_Gamma(xi,eta0,c,V,delta,Delta,Psi,Pe);
    Gamma1 = Get_Gamma(xi,eta1,c,V,delta,Delta,Psi,Pe);
    if sign(Gamma0)==sign(Gamma1) break; end
    while (eta1-eta0)>1e-5
        eta2=(eta0+eta1)/2;
        Gamma2 = Get_Gamma(xi,eta2,c,V,delta,Delta,Psi,Pe);
        if sign(Gamma0)==sign(Gamma2)
            eta0=eta2;
            Gamma0 = Gamma2;
        elseif sign(Gamma1)==sign(Gamma2)
            eta1=eta2;
            Gamma1 = Gamma2;
        else % Gamma0/Gamma1/Gamma2 equals zero
            eta2=(~sign(Gamma0))*eta0+(~sign(Gamma1))*eta1+(~sign(Gamma2))*eta2;
            break;
        end
    end
    Flame_Height(E_ind)=eta2;
    E_Arr(E_ind);
End

```

%%%

פונקציה לחישוב γ :

```
function Gamma = Get_Gamma(xi,eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe)
N=length(delta); dn=find(delta);
n_max=1000;
eps0=0.001;
Gamma_d0_xi=delta;
% Omega=Omega*0; Omega(dn,dn)=Gamma_d0_xi(dn);% For MonoSectional running -uncomment this line
Omega = Init_Omega_it(Gamma_d0_xi,Delta,Psi); %[i,j]
for j=1:N
    Gamma_d_xi(j)=0;
    for i=j:N
        Gamma_d_xi(j) = Gamma_d_xi(j) + Omega(i,j)*exp(-Delta(i)*eta);
    end
end
H=zeros(1,N);
for i=1:N
    for j=1:i
        H(i) = H(i) + Omega(i,j);
    end
end
K0 = 2*c*H(1,:);
b0=-Delta./(Delta+(Delta/Pe).^2).*K0;
M=150; % Fouriur highest index
for m=1:M
    Km(m,:) = 2/pi*sin(m*pi*c)/m*H(1,:); % Km=Km(m,i)
    bn(m,:)=-Delta./(Delta+(Delta/Pe).^2-(m*pi)^2).*Km(m,:); % bn=bn(m,i)
end
Gamma_p = 0;
for i=1:N
    Bn = 0;
    for n=1:M
        Bn = Bn + bn(n,i)*cos(n*pi*xi);
    end
    Gamma_p = Gamma_p + (b0(i)/2 + Bn)*exp(-Delta(i)*eta);
end
Gamma_h = sum(.5*K0-c*delta) + c*(1+V)-V;
for n=1:M
    qn(n)=Pe^2/2*(1-sqrt(1+4*n^2*pi^2/Pe^2)); % qn=qn(n)
    C2(n) = 2*(1+V)*sin(n*pi*c) - (sum(bn(n,:).*(1+Delta/Pe^2)*n*pi+2*delta*sin(n*pi*c)));
    C2(n) = C2(n)/n/pi/(1-qn(n)/Pe^2);
    Gamma_h = Gamma_h + C2(n)*cos(n*pi*xi)*exp(qn(n)*eta);
end
Gamma = Gamma_h + Gamma_p;
```

פונקציה לחישוב γ_T :

```
function Gamma = Get_Gamma_Temp(xi,eta,c,V,delta,Delta,Psi,Pe,T0)
N=length(delta);
n_max=1000;
eps0=0.001;
Lamda=0.01;% %Heat Coeff.
Gamma_d0_xi = Init_Gamma_d0_it(xi,c,delta,eps0,n_max); %[1,N]
Omega = Init_Omega_it(Gamma_d0_xi,Delta,Psi); %[i,j]
for j=1:N
    Gamma_d_xi(j)=0;
    for i=j:N
        Gamma_d_xi(j) = Gamma_d_xi(j) + Omega(i,j)*exp(-Delta(i)*eta);
    end
end
H=zeros(1,N);
```

```

for i=1:N
    for j=1:i
        H(i) = H(i) + Omega(i,j);
    end
end
K0 = 2*c*H(1,:)*(1-Lamda); %K0=K0(i)
b0=-Delta./(Delta+(Delta/Pe).^2).*K0;
M=50; % Fouriur highest index
for m=1:M
    Km(m,:)=2/pi*sin(m*pi*c)/m*H(1,:)*(1-Lamda); % Km=Km(m,i)
    bn(m,:)=-Delta./(Delta+(Delta/Pe).^2-(m*pi)^2).*Km(m,:); % bn=bn(m,i)
end
Gamma_p = 0;
for i=1:N
    Bn = 0; %
    for n=1:M
        Bn = Bn + bn(n,i)*cos(n*pi*xi);
    end
    Gamma_p = Gamma_p + (b0(i)/2 + Bn)*exp(-Delta(i)*eta);
end

Gamma_h = sum(.5*K0-c*delta) + c + T0;
for n=1:M
    qn(n)=Pe^2/2*(1-sqrt(1+4*n^2*pi^2/Pe^2)); % qn=qn(n)
    C2(n) = 2*sin(n*pi*c) - (sum(bn(n,:).*(1+Delta/Pe^2)*n*pi+2*delta*sin(n*pi*c)));
%   C2(n) = 2*(1+V)*sin(n*pi*c) - (sum(bn(n,:))*n*pi+bn(n,:)*Delta'/Pe^2*n*pi) + 2*sum(delta)*sin(n*pi*c);
    C2(n) = C2(n)/n/pi/(1-qn(n)/Pe^2);
    Gamma_h = Gamma_h + C2(n)*cos(n*pi*xi)*exp(qn(n)*eta);
end
Gamma = Gamma_h + Gamma_p;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

פונקציות עזר:

```

function [b0,bn] = Get_bn(xi_0,eta,c,delta,Pe,Delta,Psi)
n_max=1000;
eps0=0.001;
M=50; % Fouriur highest index
N=length(delta);
Gamma_d0_xi = delta;
Omega = Init_Omega_it(Gamma_d0_xi,Delta,Psi); %[i,j]
for j=1:N
    Gamma_d_xi(j)=0;
    for i=j:N
        Gamma_d_xi(j) = Gamma_d_xi(j) + Omega(i,j)*exp(-Delta(i)*eta);
    end
end
H=zeros(1,N);
for i=1:N
    for j=1:i
        H(i) = H(i) + Omega(i,j);
    end
end
K0 = 2*c*H(1,:); %K0=K0(i)
b0=-Delta./(Delta+(Delta/Pe).^2).*K0;
for m=1:M
    Km(m,:)=2/pi*sin(m*pi*c)/m*H(1,:); % Km=Km(m,i)
    bn(m,:)=-Delta./(Delta+(Delta/Pe).^2-(m*pi)^2).*Km(m,:); % bn=bn(m,i)
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```


פונקציה לאתחול Δ, ψ :

```
function [Delta,Psi] = Init_Delta_Psi(E)
%% Lower Diameter
d_l = [1 5 10 20 30 40 50 70 90];
%% Upper Diameter
d_u = [5 10 20 30 40 50 70 90 110];
Delta = 1.5*E*(3*d_u-2*d_l)/(d_u.^3-d_l.^3);
Psi = 1.5*E*d_l/(d_u.^3-d_l.^3);
Psi(1:end-1) = Psi(2:end);
Psi(end) = 0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

פונקציה לאתחול Ω_{ij} :

```
function Omega = Init_Omega_it(Gamma_d0,Delta,Psi)
% Omega(i,j)
N=length(Delta);
Sum_Omega=0;
for i=N:-1:2
    Omega(i,i)=Gamma_d0(i)-Sum_Omega;
    for j=(i-1):-1:1
        Omega(i,j)=Psi(j)/(Delta(j)-Delta(i))*Omega(i,j+1);
    end
    Sum_Omega=sum(Omega(i:end,i-1));
end
Omega(1,1)=Gamma_d0(1)-Sum_Omega
```

Abstract

The study of the behavior of flames is a central issue in planning and improving processes of combustion in many applications, including jet engines. In the vast majority of cases the flame is a turbulent flame. A popular method for modeling turbulent flame structure is through the concept of laminar 'flamelets'. Understanding the behavior of these laminar 'flamelets' can be highly significant, leading to repercussions that modify the overall behavior of the turbulent flame, which can be described as a collection of laminar flamelets. In many combustion engineering applications the fuel (and sometimes the oxidant) is supplied as a spray of droplets. Thus, extended modeling of turbulent spray flames needs to consider laminar spray flamelets and their behavior. In this context it is very important to examine the conditions for flame extinction since this impacts on the efficiency of the combustion, sooting of the structure of the engine thereby damaging it and increasing pollution to the environment.

In a symposium on combustion which took place about 80 years ago, an article entitled "Diffusion Flames" by S.P. Burke and T.E.W Schumann was published. The article discusses the behavior of a diffusion flame in a configuration in which fuel vapor flows in an inner duct and air flows in an outer duct. The authors, under certain assumptions, suggested an analytic solution for the shape of the flame, and presented a comparison of the results with experiments. In 1989 J.B. Greenberg reexamined the Burke-Schumann diffusion flame assuming the fuel is introduced in the form of liquid droplets suspended homogeneously in an inert gas stream, as is common in jet engines. The author suggested an analytic solution

for the flame shape and revealed that under certain circumstances the use of the spray can quite markedly affect the existence, shape and characteristics of the diffusion flame. Although a realistic spray contains various sizes of droplets, for mathematical simplification the latter work assumes a uniform size distribution of droplets.

In the present work, a model of a polydisperse spray diffusion flame in co-flow is suggested and an investigation of extinction at the tip of the flame is conducted. The aim of the work was to examine how the non-uniform distribution of the spray droplets influences the flame characteristics; in particular, the extinction at the tip, in order to understand better this important dependence and to try to provide tools to control the efficiency of the combustion and to prevent sooting and environment pollution.

We considered the Burke-Schumann spray flame configuration, as mentioned above, using the sectional approach in order to describe the polydisperse spray and its downstream changes in droplet size due to vaporization. The fuel droplets are presumed to be injected into the inner duct at a sufficiently large distance upstream so that on reaching its exit they have already undergone secondary breakup and have settled into motion at a velocity equal to that of the gas stream in which they are homogeneously suspended. The temperature at the exit of the ducts is taken to be equal to (or greater than) the saturation temperature of the liquid fuel so that droplets are vaporizing.

Under appropriate conditions, after diffusive mixing of the two streams, a steady laminar spray diffusion flame is maintained. A constant density model is taken, and the velocities in the inner and outer ducts are taken

to be constant and equal, as per Burke-Schumann's original gas flame analysis. It is assumed that the various transport coefficients such as thermal conductivity, diffusion coefficients, specific heat at constant temperature, latent heat of vaporization of the liquid droplets, etc. can be satisfactorily specified by representative constant values. In addition, the diffusion coefficients of the gases are taken as equal, and the Lewis numbers of the reactants are supposed to be unity. Under the assumption of infinite Damkohler number of reaction, an instantaneous chemical reaction occurs on the surface of the flame, which is defined as the locus of those points where the gaseous fuel and oxidant are in stoichiometric ratio.

Under these assumptions, the governing equations have been written.

The conservation equations are written for the mass fractions of the gaseous species and for the energy and include terms relating to convection, diffusion, chemical reaction and vaporization. The governing equations implicitly account for different possible scenarios that are physically viable and that have been experimentally observed. Namely, complete evaporation of the droplets occur before reaching the homogeneous diffusion flame front or pre-homogeneous flame-front evaporation followed by post-homogeneous diffusion-flame burning of individual (or clusters of) droplets that survive the main flame front. Schwab-Zeldovich functions have been used in order to solve the equations analytically and a set of boundary conditions have been specified.

New analytical solutions are presented for the mass fractions of the reactants and for the temperature in the field. Typical results are

presented for the flame shape, and for the flame height and temperature at the tip versus the vaporization coefficient, liquid fuel load, size of the droplets and their distribution.

Under the assumptions that the homogeneous flame-front thickness is much smaller than the radius of the curvature at the flame tip, a one dimensional analysis of conditions for extinction can be carried out in the vicinity of the tip. Use is made of the outer solutions, mentioned above, and follows the lines of Linan's classical development of the inner structure of the diffusion flame.

Typical results are presented in the form of an Extinction Map depending on vaporization coefficient, liquid fuel load and droplets size distribution. Various distributions that have the same Sauter mean diameter were examined.

New results are presented for the flame characteristics and tip extinction sensitivity. The results show that the flame characteristics, with an emphasis on the extinction at the tip, in Burke-Schumann spray diffusion flames, is strongly affected by the droplets distribution. In other words, the analysis reveals that a polysectional model is necessary in order to examine spray diffusion flames because significant parameters are strongly altered by the droplets size distribution even when we keep its Sauter mean diameter constant.

List of Tables and Chart

List of Charts

Chart 1-1: Demonstration of Pressure Atomizer and Twin Fluid Injection Atomizer.....	11
Chart 1-2: Demonstration of Creation of Atomization Zone and "Near Field" Region.....	13
Chart 1-3: A Schematic Description of Atomization Zone and "Near Field" Region.....	14
Chart 1-4: A Schematic Description of "Near Field" Region and "Far Field" Region.....	15
Chart 1-5: Numerical Example for Spray Diffusive Flame in Counter-Flow Mean Droplets Diameter: 74.2[μm].....	21
Chart 1-6: A Schematic Description of a Laminar Flame and a Turbulent Flame.....	23
Chart 2-1: A Schematic Description of a Diffusion Laminar Spray Flame in Co-Flow.....	31

List of Tables

Table 3-1: Sections' Division by Maximum and Minimum Diameter.....	75
Table 3-2: Three Initial Droplets Distributions with SMD=44.8.....	81

List of Graphs

Graph 1-3: Initial Droplets Distribution Histogram.....	76
Graph 2-3: Downstream Sections Normalized Mass Fractions.....	76
Graph 3-3: Flame Contour and Temperature Field – Comparison Between Monosectional and Polysectional Models.....	77
Graph 3-4: Flame Height Vs. Normalized Vaporization Coefficient for Various Liquid fuel Load – Polysectional Model	87
Graph 3-5: Flame Height Vs. Normalized Vaporization Coefficient for Various Liquid fuel Load – Monosectional Model	80
Graph 3-6: Three Initial Droplets Distributions with SMD=44.8.....	82
Graph 3-7: Flame Height Vs. Normalized Vaporization Coefficient and Liquid Fuel Load - Various Droplets Distribution.....	83-84
Graph 3-8: Flame Height Vs. Normalized Vaporization Coefficient for Various Droplets Size.....	85
Graph 3-9: Tip Temperature Vs. Normalized Vaporization Coefficient for Various Droplets Size.....	86
Graph 3-10: Tip Temperature Vs. Normalized Vaporization Coefficient for Various Liquid Fuel Load...87	
Graph 3-11: Downstream Center of Flame Temperature for Various Normalized Vaporization Coefficient	88
Graph 4-1: Extinction Map for Monosectional Spray.....	111
Graph 4-2: Extinction Map Sensitivity to Size of Droplets.....	113
Graph 4-3: Three Initial Droplets Distributions with SMD=44.8	114
Graph 4-4: Extinction Map for Various Polysectional Sprays, Pe=10.....	115
Graph 5-4: Extinction Map for Various Polysectional Sprays, Pe=100.....	117
Graph 4-6: Extinction Map for Various Activation Temperatures, Pe=10.....	119
Graph 4-7: Extinction Map for Various Reaction Coefficient, Pe=10.....	119

Contents

Hebrew Abstract.....	1
Nomenclature.....	3
Chapter 1 – Introduction and Literature Survey.....	8
Introduction.....	8
Literature Survey - Preface.....	10
Creation of Spray and Spray Existence Regions.....	11
The Dynamic of the Spray itsInteraction with the Gaseous Carrier.....	16
The Spray Vaporization Process.....	18
Chemical Reactants Flow and Mechanisms of Combustion.....	22
The Combustion Process in the Gas State.....	25
Solution of the Inner Structure of the Diffusive Flame.....	27
The Objective and the Innocation of the Current Work.....	28
Chapter 2 – the Governing Equations.....	30
General Introduction.....	30
Spray Equations.....	35
Das State Equations.....	41
Temperature Equation.....	47
Chapter 3 – Analytic Solution for the Governing Equations.....	54
Solution of the Spray Equations.....	54
Solution of the Gas State Equations.....	57
Solution of the Temperature Equation.....	69
Typical Results.....	75
Chapter 4 – Flame Tip Extinction.....	90
Introduction.....	92
The Outer Solution.....	93
Solution of the Inner Structure of the Flame.....	98
Linan's Extinction Condition.....	109
Typical Results.....	111
Chapter 5 – Conclusions and Suggestions for Additional Research.....	121
Conclusions	121
Suggestions for Additional Research.....	122
References.....	123
Appendix A –Computer Program for Flow Field and Extinction Condition.....	126
English Abstract.....	I

Acknowledgements

The Final Paper was done under the Supervision of Professor J.B. Greenberg in the Faculty of Aerospace Engineering. I want to thank Professor Greenberg for his Professional Guidance, Academic Help and Continues Support.

The Generous Financial Help of the Technion is Gratefully Acknowledged.

I owe Special Gratitude to my Wife for her Endless Support and Encouragement.

I Thank my Parents for their Help.

And I Thank G-d, the Reason of all Reasons.

A study of polydisperse spray diffusion flames and their extinction in co-flow

Final Paper In Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Master of
Science in Aerospace Engineering

Itzhak Shtauber

Submitted to the Senate of the
Technion – Israel Institute of Technology
Nisan, 5770 Haifa March, 2010

A study of polydisperse spray diffusion flames and their extinction in co-flow

By Itzhak Shtauber