

Control de manipuladores

Una vez que la trayectoria nominal es determinada, queda el problema de incorporar los comando a los actuadores que harán que el manipulador siga fielmente la trayectoria planeada. Varias técnicas se han usado para resolver este problema.

- A partir de la Cinemática Inversa, derivar para determinar las velocidades articulares $\dot{\Theta}$.
- Regulando el torque articular τ a partir del modelo dinámico.
- Mediante el uso de variables de estado, se buscan los puntos de equilibrio por las técnicas de estabilidad de Liapunov.
- Control PID de una articulación simple.
- Control PD con compensación gravitatoria.

El problema de control

El manipulador es modelado como un sistema de n ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, dado por la siguiente expresión obtenida con la formulación de Lagrange-Euler:

$$\tau = D\ddot{\Theta} + C(\Theta, \dot{\Theta}) + h(\Theta) + b(\dot{\Theta})$$

Para simplificar el modelo, la primera observación será mover el manipulador con velocidad bajas.

$$\dot{\Theta} \rightarrow 0$$

$$C(\Theta, \dot{\Theta}) \rightarrow 0$$

C es la matriz de acoplamiento, generada por las fuerzas centrífugas y de Coriolis.

Por lo tanto, si el brazo es operado de forma que se mueva sólo un eje a la vez, el término de velocidad de acoplamiento es despreciable, independientemente de la velocidad del brazo. En el caso de la fricción, ésta no desaparece pues se tienen efectos debido a la fricción estática. Otro factor que facilita el control es el uso de reductores entre los actuadores y el eslabón. Sea M_k la razón de reducción para el eslabón k , la inercia del brazo está relacionada con el actuador por un factor de M_k^2 .

Ecuaciones de Estado

$D \rightarrow$ Tensor positivo definido y no singular

$$\tau = D\ddot{\Theta} + C(\Theta, \dot{\Theta}) + h(\Theta) + b(\dot{\Theta})$$

$$x = \begin{pmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}$$
$$V = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix}$$

$V, \Theta \rightarrow$ Variables de estado

$$V = \dot{\Theta}$$

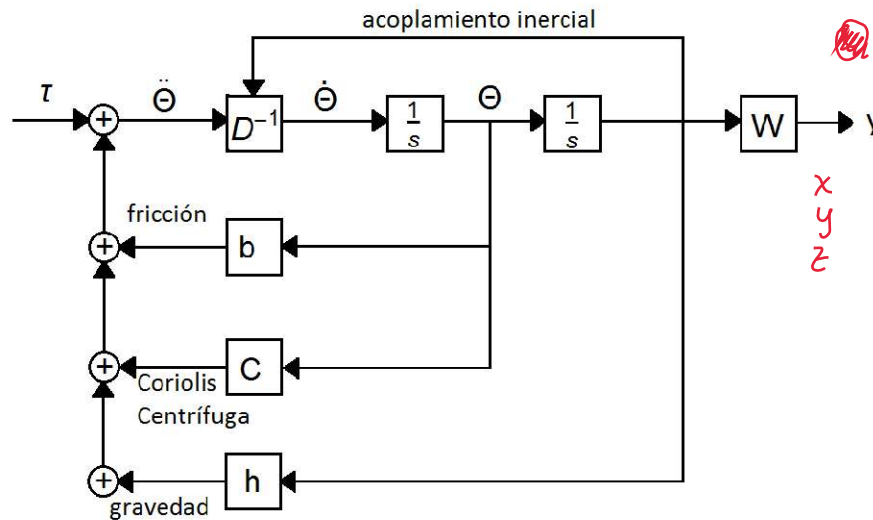
→ $\dot{\Theta} = V$ Primera ecuación de estado

$$\tau = D\dot{V} + C(\Theta, V) + h(\Theta) + b(V)$$

→ $\dot{V} = D^{-1}[\tau - h(\theta) - C(\theta, V) - b(V)]$ ← modelo no lineal

Segunda ecuación de estado

$$Y = W(\Theta) \quad \text{Espacio operacional } X$$



Control PID para un eje simple

$r(t) \in \mathbb{R}^n \rightarrow$ entrada de referencia

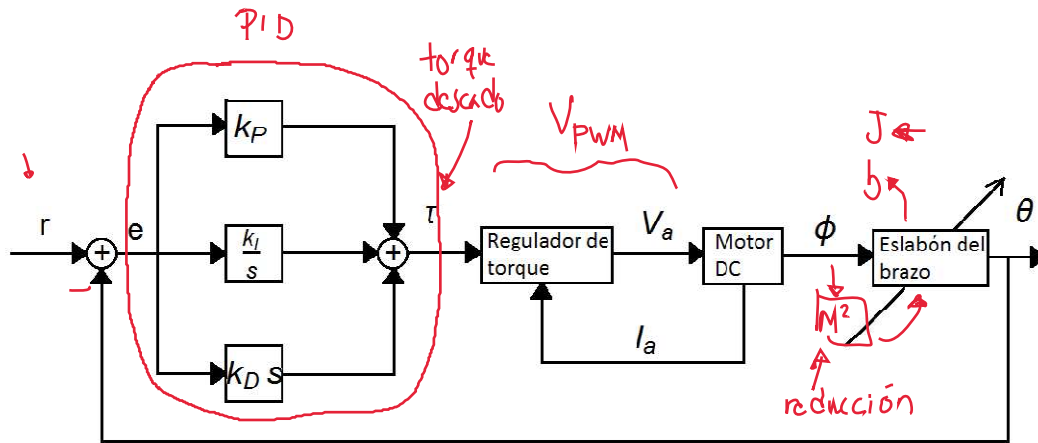
$e(t) \rightarrow$ error de muestreo

$$e(t) = r(t) - \theta(t)$$

Una técnica común para controlar un manipulador es emplear n controladores independientes.

$$\tau(t) = \underline{k_P} e(t) + \underline{k_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + \underline{k_D} \dot{e}(t) \quad \text{ley de control}$$

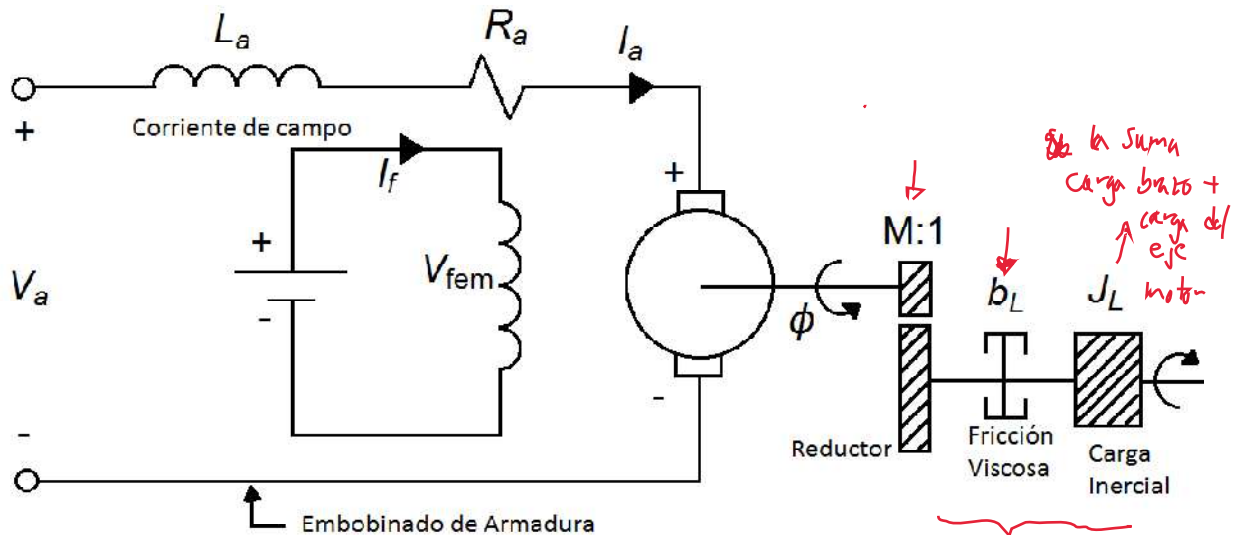
k_P, k_I, k_D son las ganancias proporcional, integral y derivativa respectivamente.



La ley de control produce un torque punto de ajuste τ , que sirve como entrada al subsistema regulador de torque, el cual controla el torque del motor al sensar la corriente de armadura I_a y variar el voltaje de armadura V_a .

La carga para el k-ésimo controlador PID incluye el eslabón k así con los eslabones distales hasta el extremo del brazo. Por lo tanto, la carga en cada una de las articulaciones cambia rápidamente durante la operación normal del robot.

Motor de DC y carga



$I_a \rightarrow$ Corriente de armadura

$R_a \rightarrow$ Resistencia de armadura

$L_a \rightarrow$ Inductancia de armadura

$V_a \rightarrow$ Voltaje de armadura

$V_{\text{fem}} \rightarrow$ Voltaje inducido de campo

$I_f \rightarrow$ Corriente de campo

Ecuación de equilibrio

$$V_a = L_a \frac{dI_a}{dt} + R_a I_a + V_{\text{fem}}$$

$$V_{\text{fem}} = k_b \frac{d\phi}{dt} \quad k_b \rightarrow \text{Constante de fem}$$

Examinando la parte mecánica se tiene

$$J \frac{d^2\phi}{dt^2} + b \frac{d\phi}{dt} = \tau_m$$

$\phi \rightarrow$ Posición angular del eje del motor

$\tau_m \rightarrow$ Torque en el eje del motor

$J \rightarrow$ Momento de inercia

$b \rightarrow$ Coeficiente de fricción viscosa

$$J = J_m + M^2 J_L$$

$M \rightarrow$ Razón de reducción entre el motor y la carga

$$b = b_m + M^2 b_L$$

$$\theta = M\phi$$

$$\tau_m = k_a I_a \quad k_a \rightarrow \text{Constante de torque del motor}$$

Combinando las expresiones anteriores y pasando a Laplace

$$V_a(s) = \frac{1}{k_a} (L_a s + R_a) T_m(s) + s k_b \Phi(s)$$

$$T_m(s) = (Js^2 + bs) \Phi(s)$$

Con esta última expresión se puede desarrollar una función de transferencia de torque

$$G_L(s) = \frac{\Theta(s)}{T_L(s)}$$

Esta última relaciona la posición del eje de la carga con el torque desarrollado en el eje de la carga. Suponiendo que no hay juego ni deformación elástica en los engranes, el trabajo hecho por el eje de la carga es igual al trabajo hecho por el eje del motor

$$\tau_L = \frac{\tau_m}{M} \quad M = \frac{\phi}{\theta}$$

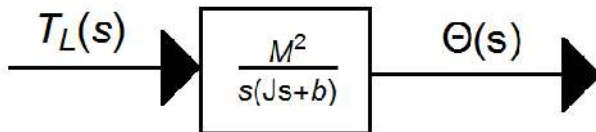
$$G_L(s) = \frac{M^2}{s(Js + b)}$$

Handwritten red annotations: A red arrow points from the M in the first equation to the M^2 in the second. Another red arrow points from the J in the denominator to the J in the first equation. A third red arrow points from the b in the denominator to the b in the first equation.

De esta función de transferencia, se observa que la constante de tiempo de la función de torque es

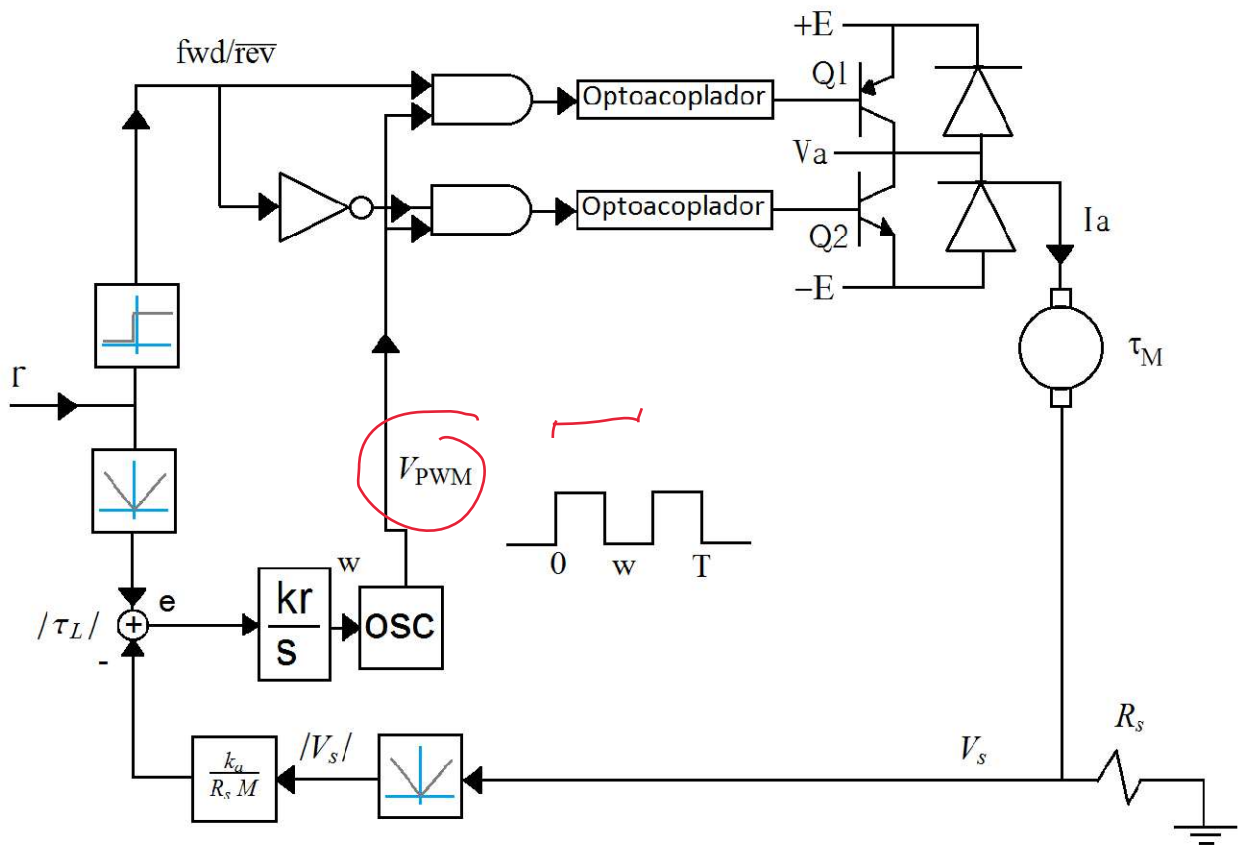
$$t = \frac{J}{b}$$

Handwritten red annotations: A red arrow points from the J in the numerator to the J in the first equation. A red bracket is drawn under the entire expression.



Regulador de Torque

El torque de un motor de DC puede ser controlado directamente al variar el voltaje de armadura V_a . Este voltaje es proporcional a la corriente del embobinado de armadura I_a . Para regular el torque (o la corriente de armadura) se inserta un pequeño resistor de sentido de corriente R_s en serie con el embobinado de armadura con el fin de generar un voltaje de retroalimentación V_s .

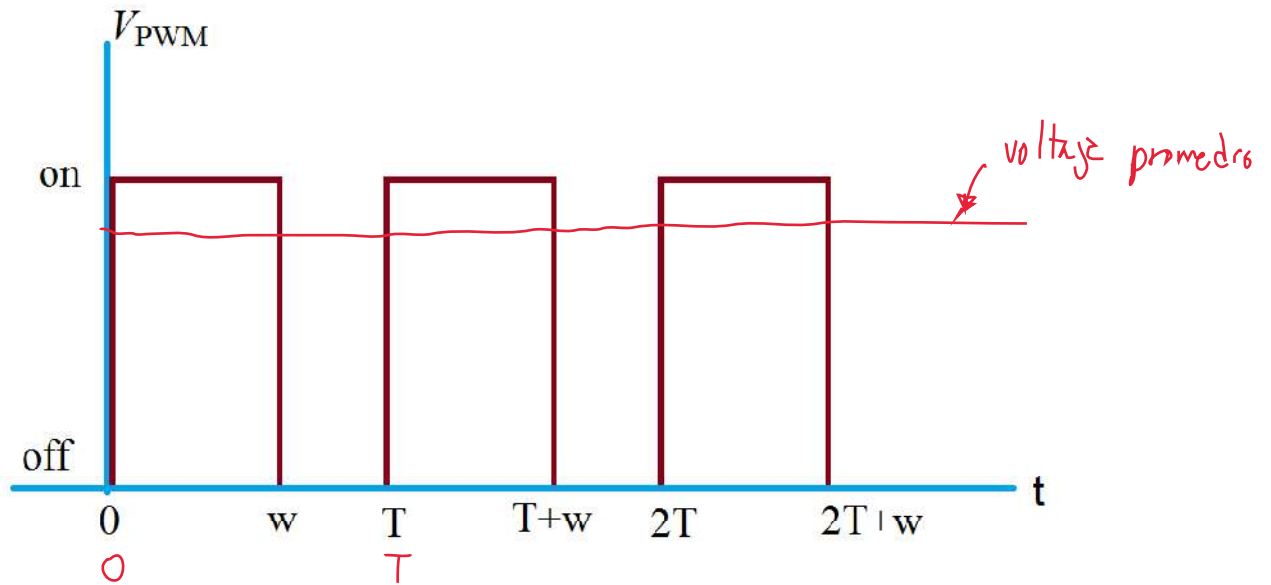


El elemento clave en el regulador de torque es el oscilador. La salida del oscilador V_{PWM} es un tren de pulsos con ancho w y período T , donde T es seleccionador de forma que sea pequeño en comparación con la constante de tiempo del motor τ_M .

La señal V_{PWM} alterna los transistores Q1 y Q2 en estados de alta y baja (encendido-apagado). Dependiendo del signo de τ , uno de los transistores será apagado mientras el otro está encendido. El signo de τ controla la dirección en la cual el eje del motor gira. El torque es controlado al cambiar el voltaje promedio del voltaje de armadura V_a . Dado un voltaje de corriente directa (voltaje del motor), el valor promedio de V_a es:

$$V_a = \frac{wE}{T}$$

$$V_a(s) = \frac{W(s)E}{T}$$



El regulador de torque emplea retroalimentación negativa con ganancia k_r . Para desarrollar la función de transferencia de lazo cerrado para el regulador de torque, se obtiene primero $W(s)$.

$$W(s) = \frac{k_r E(s)}{s}$$

$$W(s) = k_r \frac{[\tau(s) - \tau_L(s)]}{s}$$

$$W(s) \approx \frac{k_r [\tau(s) - \tau_L(s)] E}{T s}$$

con $T \ll T_m$

El voltaje de armadura es proporcional a la integral del error de torque $\tau - \tau_L$, con una constante de proporcionalidad $k_r E/T$. De esta forma puede deducirse una función de transferencia del regulador de torque.

$$G_\tau(s) \doteq (k_a k_r E (Js + b)) / (Ts(Js + b) (L_a s + R_a) + k_a k_b Ts + k_a k_r E (Js + b))$$

$$G_\tau(s) = (k_a k_r E (Js + b)) / (Ts(Js + b) (L_a s + R_a) + k_a k_b Ts + k_a k_r E (Js + b))$$

$$G_\tau(s) =$$

Si la inductancia de armadura es desprecia, $L_a \rightarrow 0$:

$$G_\tau(s) = \frac{k_1 (Js + b)}{s^2 + k_2 s + k_1 b}$$

$$k_1 = \frac{k_a k_r E}{R_a J T}$$

$$k_2 = (T R_a b + T k_a k_b + k_a k_r E J) / (R_a J T)$$

La ganancia de corriente directa de lazo cerrado es la unidad. Entonces, si $\tau(t)$ es constante, en el estado estable $\tau_L = \tau$, lo que significa que el torque entregado a la carga en el eje θ es igual al torque solicitado τ . El máximo torque que puede desarrollar el eje de la carga es:

$$\tau_{\max} = \frac{k_a E}{R_a M}$$

El torque requerido debe satisfacer $|\tau(t)| \leq \tau_{\max}$ para evitar la saturación del circuito regulador de torque. En términos de la trayectoria de referencia $r(t)$, esto significa que la velocidad del robot a lo largo de la trayectoria deseada tiene que ser reducida, pues de otra forma mayor torque puede ser requerido del que el actuador es capaz de entregar.

Recuerdo que el regulador de torque es estable si y sólo si los polos de $G_r(s)$ caen en el hemisferio izquierdo del plano imaginario.

Función de transferencia PID

Suponiendo que τ_{\max} es lo suficientemente grande para que pueda ser ignorada para la trayectoria de referencia, el resultado es un modelo lineal simplificado del controlador PID

Este modelo es sólo aplicable a un sólo eje el cual está alineado con el campo gravitacional, puesto que no se han incluido en el modelo las perturbaciones debidas a la gravedad. La función de transferencia de este modelo es :

$$G_{\text{PID}} = \frac{\Theta(s)}{R(s)}$$

$$G_{\text{PID}} = \frac{(M^2 (k_D s^2 + k_P s + k_I))}{(Js^3 + (M^2 k_D + b) s^2 + M^2 k_P s + M^2 k_I)}$$

El controlador PID es estable si las ganancias de los controladores siguen las siguientes desigualdades :

$$k_I > 0$$

$$k_D > -\frac{b}{M^2} \quad (M^2 k_D + b) k_P > J k_I$$

$$k_P > \frac{J k_I}{M^2 k_D + b}$$

Deducción de las ganancias del controlador PID

Caracterización de un motor de CD

$R_a \rightarrow$ Resistencia de armadura

$L \rightarrow$ Inductancia del embobinado

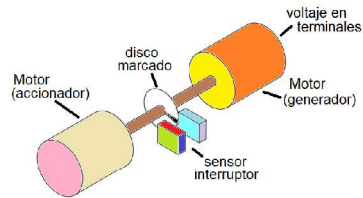
$k_a \rightarrow$ Constante de armadura

$k_e \rightarrow$ Constante de fuerza electromotriz (fem)

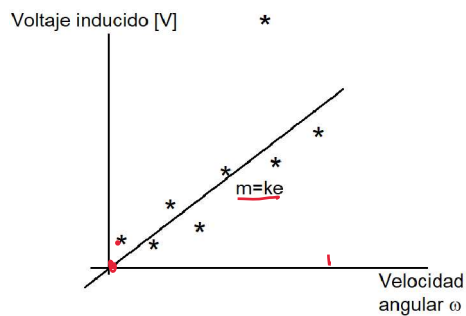
$J \rightarrow$ Momento de inercia

$b \rightarrow$ Coeficiente de fricción viscosa rotacional

Constante electromotriz



Gráfica voltaje inducido $fem[V]$ - frecuencia de giro $\omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$



Resistencia de armadura

$i_a \rightarrow$ Corriente de armadura

$V_m \rightarrow$ Voltaje suministrado

Consideración

$$\frac{di_a}{dt} = 0$$

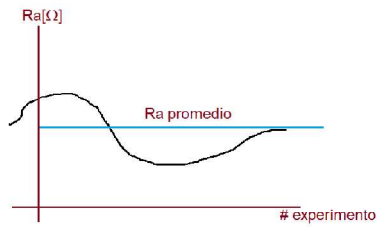
Ecuación de malla

$$V_m = V_r + V_L + V_{fem}$$

$$R_a = \frac{V_m - k_e \omega}{i_a}$$

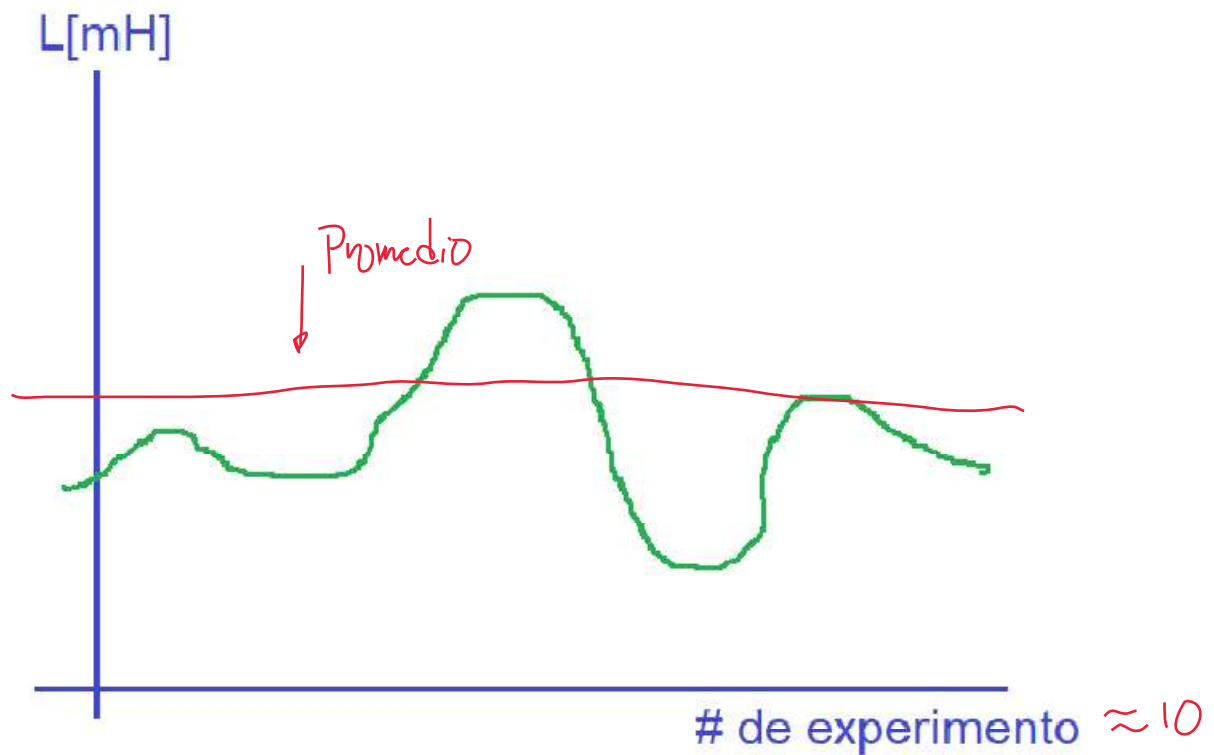
Variamos V_m y medimos i_a calculamos R_a con la fórmula mostrada

$V_m [0, V_{max}]$
20 puntos



Obtención de inductancia

Medición con multímetro digital

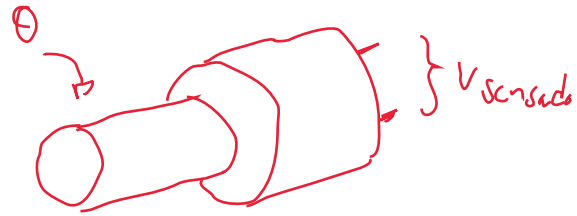


Obtención de la constante de armadura

El corrimiento hacia abajo puede deberse a que el rotor se encuentra estático y bajo la influencia del campo magnético de los imanes.

Eficiencia del motor

$$\eta = \frac{k_a}{k_e}$$

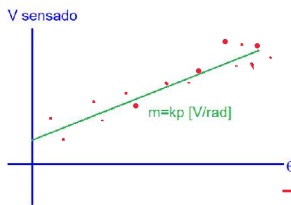


Sensor de posición angular

Resistor

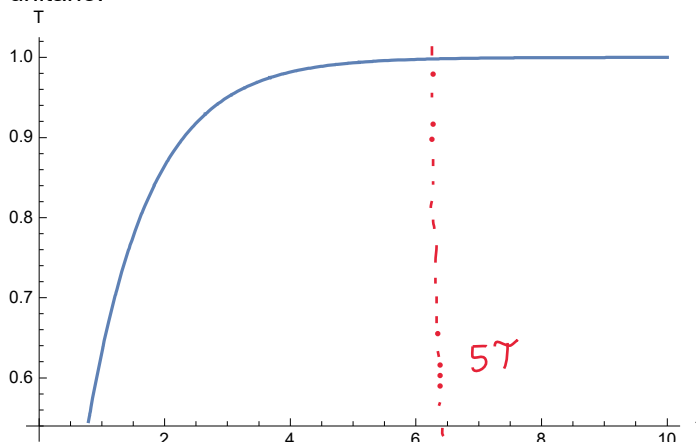
$$R_s = k_p (\theta + \theta_{ref})$$

← Constante de armadura



Momento de inercia del motor

En este experimento, se registrará la respuesta al escalón cuando se envía al motor un voltaje escalón unitario.



$$T_m = \frac{J}{b}$$

Función de transferencia entre la posición angular del rotor del motor y el voltaje del motor:

$$T(s) = \frac{\Theta(s)}{V_m(s)}$$

$$T(s) = \frac{k}{s + \frac{1}{\mu}}$$

$$\frac{k}{s + \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{s + T_m}$$

$$\frac{1}{\mu} = T_m = \frac{J}{b}$$

$$k = \frac{k_a}{(R_a J + L B)}$$

$$\mu = \frac{R_a J + L B}{R_a B + k_a k_e}$$

$$T_m = \frac{1}{\mu}$$

← De aquí hay que despejar

J y B comparando la respuesta del escalón

Ecuación de transferencia simplificada

$$T(s) = \frac{\theta(s)}{V_m(s)}$$

$$T(s) = \frac{k}{s + \frac{1}{\mu}}$$

Si se excita con V_e :

$$\omega(t) = \mu k V_e \left(1 - e^{-\frac{t}{\mu}}\right)$$

$$\text{con } \psi = \mu k V_e$$

$$\psi = \frac{V_m}{k_e}$$

$$k = \frac{V_m}{k_e \mu V_e}$$

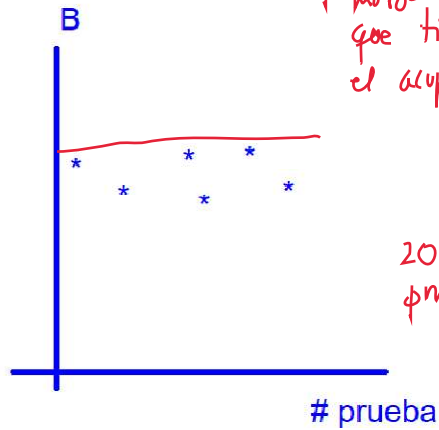
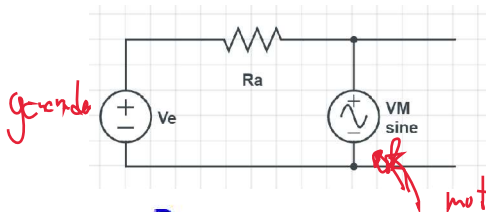
$$k\mu = \frac{k_a}{R_a B + k_a k_e} = \frac{V_m}{k_e V_e}$$

$$B = \frac{k_a k_e}{R_a} \left(\frac{V_e}{V_m} - 1 \right)$$

$$J = \frac{\mu(R_a B + k_a k_e) - L B}{R_a}$$

V_e : voltaje experimental V_e
 V_m : voltaje moto- (generador) V_m

Valores de placa
 Aproximados



20
 pruebas.

