

Ecuación de Lagrange

La ecuación de Lagrange está basada en la noción de coordenadas generalizadas, energía y fuerzas generalizadas. Las coordenadas generalizadas son el marco en el cual se registra el movimiento, mientras que las fuerzas generalizadas son aquellas fuerzas residuales en el sistema una vez que se han removido aquellas debidas directamente al movimiento y a la gravedad, casi siempre suelen ser las reacciones en los apoyos y la fricción.

Para un brazo robótico de n ejes, un apropiado conjunto de coordenadas generalizadas (las cuales no necesariamente tienen que ser de dimensión 3 ni mucho menos cartesianas) es el vector de n articulaciones variables Θ . Se define al lagrangiano de la función como la diferencia entre la energía cinética y potencial.

$$L(\Theta, \dot{\Theta}) = T(\Theta, \dot{\Theta}) - U(\Theta)$$

$T \rightarrow$ Energía cinética

$U \rightarrow$ Energía potencial

$\Theta \rightarrow$ Espacio articular

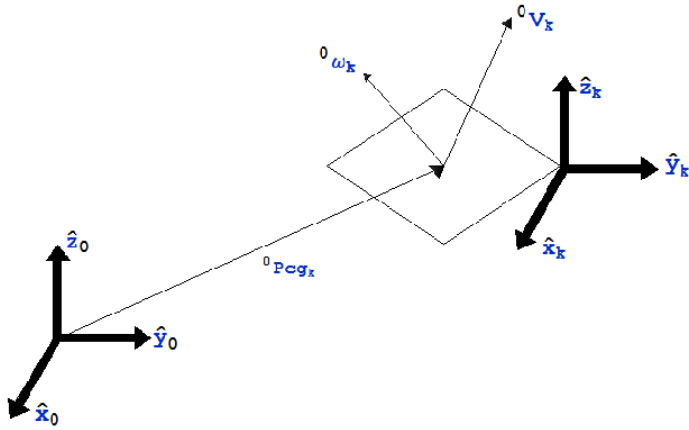
$\dot{\Theta} \rightarrow$ Vector de velocidades articulares

Las ecuaciones generales de movimiento de un brazo robótico pueden ser formuladas en términos de la función lagrangiana.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_i} L(\Theta, \dot{\Theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta_i} L(\Theta, \dot{\Theta}) = F_i \quad 1 \leq i \leq n$$

F_i es la fuerza (o par) generalizada en la i ésima articulación.

Energía cinética y potencial



${}^0V_k \rightarrow$ Velocidad del centro de masa del eslabón k respecto a $\{0\}$

${}^0\omega_k \rightarrow$ Velocidad angular del centro de masa del eslabón k respecto a $\{0\}$

${}^0Pcg_k \rightarrow$ Vector de posición del centro de masa del eslabón k respecto a $\{0\}$

La energía cinética total del brazo es la suma de las energías cinéticas de sus eslabones.

$$T(\Theta, \dot{\Theta}) = \sum_{k=1}^n \frac{{}^0V_k^T m_k {}^0V_k + {}^0\omega_k^T {}^0I_k {}^0\omega_k}{2}$$

$m_k \rightarrow$ Masa del i ésimo eslabón

${}^0I_k \rightarrow$ Tensor de inercia del eslabón k sobre su centro de masa respecto a $\{0\}$

${}^0I_k = {}^0R_k {}^kI_k {}^kR_0$

${}^kI_k \rightarrow$ Momento de inercia del eslabón k respecto a su centro de masa

■ Jacobiano del eslabón

Para desarrollar una formulación explícita de la energía cinética total del brazo, se deben desarrollar expresiones para 0V_k y ${}^0\omega_k$ en términos de las variables articulares Θ y $\dot{\Theta}$. Mucho de este trabajo afortunadamente ya está hecho. Para ello, recuérdese que la matriz jacobiana del manipulador $J(\Theta)$ relaciona desplazamientos infinitesimales de las variables articulares con desplazamientos infinitesimales del espacio operacional (velocidad lineal y angular) del extremo del brazo. Es decir, se puede particionar esa relación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} V \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = J(\Theta) \dot{\Theta}$$

La matriz jacobiana mapea la velocidad articular instantánea del extremo del brazo en una velocidad lineal y angular. De forma análoga, se puede proceder para que cada eslabón tenga su propia matriz jacobiana $J_k(\Theta)$, si se acomoda el centro de masa del eslabón k como si fuese la punta de la herramienta.

$$\begin{pmatrix} {}^0V_k \\ {}^0\omega_k \end{pmatrix} = J_k(\Theta) \dot{\Theta} \quad 1 \leq k \leq n$$

Así pues se puede hallar la matriz J_k de $6 \times n$ de la siguiente manera:

$$J_k(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} [{}^0Pcg_k] & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_j} [{}^0Pcg_k] & 0 \\ \xi_1 \hat{z}_0 & \dots & \xi_k \hat{z}_{j-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0A_k(\Theta) \\ {}^0B_k(\Theta) \end{pmatrix}$$

$${}^0A_k(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} [{}^0Pcg_k] & \dots & \frac{\partial}{\partial \theta_j} [{}^0Pcg_k] & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^0B_k(\Theta) = (\xi_1 \hat{z}_0 \dots \xi_k \hat{z}_{k-1} \ 0)$$

A continuación se desglosa qué es cada elemento.

${}^0Pcg_k \rightarrow$ Vector de posición del centro de masa del eslabón k respecto a $\{0\}$. Recordemos que suele conocerse más bien el vector de ubicación del centro de masa del eslabón k respecto al sistema $\{k\}$ kPcg_k . Para determinar 0Pcg_k :

$${}^0Pcg_k = H {}^0T_k {}^kPcg_k^*$$

${}^k\text{Pcg}_k^* \rightarrow$ Vector de posición del centro de masa del eslabón k respecto a $\{k\}$ en coordenadas homogéneas.

${}^0T_k \rightarrow$ Transformada homogénea que relaciona a $\{k\}$ con $\{0\}$.

$H \rightarrow$ Matriz de conversión de coordenadas homogéneas a cartesianas.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial \theta_{kj}} [{}^0\text{Pcg}_k]$ \rightarrow Es la derivada parcial respecto a la j -ésima variable de ${}^0\text{Pcg}_k$. Observe que si $k < j \leq n$ dicha derivada vale cero, lo cual tiene que ver con el hecho de que la posición del centro de masa del eslabón k no depende de los cuerpos más distales a dicho eslabón.

$\xi_k \rightarrow$ Es un parámetro de validación dependiendo del tipo de articulación. Vale 1 para articulaciones rotacionales y 0 para articulaciones prismáticas.

$\hat{z}_{j-1} \rightarrow$ Es el vector unitario $(0, 0, 1)^T$, siempre y cuando no se trate de la columna $k < j \leq n$, pues en caso contrario dicho vector valdrá $(0, 0, 0)^T$.

Observe que de preferencia, el jacobiano del eslabón k se particiona en dos.

$${}^0A_k(\Theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} [{}^0\text{Pcg}_k] \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial \theta_j} [{}^0\text{Pcg}_k] \quad 0 \right)$$

$${}^0B_k(\Theta) = (\xi_1 \hat{z}_0 \quad \dots \quad \xi_k \hat{z}_{k-1} \quad 0)$$

La primera matriz, 0A_k , de $3 \times n$ está relacionado con la velocidad lineal del cuerpo k , mientras 0B_k que también es de $3 \times n$ está relacionado con la velocidad angular de dicho eslabón.

■ Tensor de inercia del manipulador

Ahora puede determinarse una expresión para la energía cinética total del brazo en términos de Θ y $\dot{\Theta}$.

$${}^0V_k(\Theta, \dot{\Theta}) = {}^0A_k(\Theta) \dot{\Theta} \quad 1 \leq k \leq n$$

$${}^0\omega_k(\Theta, \dot{\Theta}) = {}^0B_k(\Theta) \dot{\Theta} \quad 1 \leq k \leq n$$

Si se sustituyen estas expresiones en la energía cinética total, se obtiene lo siguiente.

$$T(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \sum_{k=1}^n \{A_k^T m_k A_k + B_k^T {}^0I_k {}^0B_k\} \dot{\Theta}$$

Con esto es posible definir una expresión para la energía cinética total del brazo simplificada mediante lo expresado en la sumatoria anterior.

$$D(\Theta) \doteq \sum_{k=1}^n \{A_k^T m_k A_k + B_k^T {}^0I_k {}^0B_k A_k^T m_k A_k + B_k^T {}^0I_k {}^0B_k\}$$

$D(\Theta)$ recibe el nombre de Tensor de Inercia del Manipulador. Como los n momentos de inercia de cada eslabón individual, este tensor es simétrico y positivo definido ($D(\Theta) \geq 0$). Con este elemento, se puede compactar la energía cinética total del brazo.

$$T(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T D(\Theta) \dot{\Theta}$$

■ Gravedad

Para completar la formulación de la función lagrangiana, queda examinar la energía potencia total del brazo $U(\Theta)$. La energía potencial almacenada en el k ésimo eslabón es la cantidad de trabajo requerido para desplazar el centro de masa del eslabón k desde un plano de referencia horizontal bajo la presencia de la gravedad. Sea $g \in \mathcal{R}^3$ la aceleración gravitatoria respecto al marco inercial. Entonces el trabajo requerido para desplazar el centro de masa del eslabón k a la posición ${}^0Pc_{g_k}(\Theta)$ es $-m_k g^T {}^0Pc_{g_k}(\Theta)$. La energía potencial total para todo el brazo es:

$$U(\Theta) = - \sum_{k=1}^n \{m_k g^T {}^0Pc_{g_k}(\Theta)\}$$

Nuevamente se pueden definir algunos términos para compactar la expresión anterior.

$$\bar{c}(\Theta) \doteq \sum_{k=1}^n \{m_k {}^0Pc_{g_k}(\Theta)\}$$

$$U(\Theta) = -g^T \bar{c}(\Theta)$$

Note que $U(\Theta)$ es máximo cuando todos los eslabones del brazo están directamente opuestos a g , mínimo cuando están alineados a g y valen cero cuando son ortogonales a g . Una constante debería ser agregada para la expresión $U(\Theta)$ para hacer la mínima energía potencial cero. Sin embargo, no es esto necesario, porque se verá que sólo la derivada de $U(\Theta)$ es importante.

Ahora puede expresarse el lagrangiano del manipulador en términos de la energía cinética y potencia como se acaban de deducir.

$$L(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T D(\Theta) \dot{\Theta} + g^T \bar{c}(\Theta)$$

Resta sacar las derivadas de L con respecto a Θ , $\dot{\Theta}$ y t para formular las ecuaciones dinámicas del brazo. Antes de hacerlo se desarrollará una formulación más detallada del término del lado derecho de la ecuación de Lagrange.

Fuerza generalizada

Las fuerzas generalizadas son las fuerzas residuales actuantes sobre el brazo una vez que han sido removidas las fuerzas asociadas con la energía cinética (fuerzas inerciales) y con la energía potencial. Las fuerzas generalizadas pueden ser definidas al examinar el trabajo producido por un desplazamiento virtual de las articulaciones, es decir, por un desplazamiento instantáneo infinitesimal $\delta\Theta$. Un desplazamiento virtual debe satisfacer las restricciones geométricas impuestas por los eslabones del brazo, pero no tiene que satisfacer las restricciones temporales, porque se asume que ocurren sin dependencia del tiempo. El trabajo producido por un desplazamiento virtual, llamado trabajo virtual, es denotado como δW . La fuerza que relaciona un desplazamiento virtual con el trabajo virtual que produce es la fuerza generalizada. De esta forma la fuerza generalizada F , es un vector de $n \times 1$ definido implícitamente por la siguiente ecuación:

$$\delta W = F^T \delta\Theta$$

Note que, dependiendo del tipo de articulación, los componentes del vector de fuerza generalizada pueden ser o las fuerzas (para articulaciones prismáticas) o los torques (para articulaciones rotacionales). Hay dos contribuciones para las fuerzas generalizadas.

■ Trabajo en los actuadores

Cada articulación es manejada o encendida por un actuador tal como un motor eléctrico o un cilindro neumático. Sea $\tau \in \mathcal{R}^n$ el vector torque articular generado por n actuadores. Por conveniencia, τ es referido como "torque", sin embargo se entiende que τ_k representa un torque si la articulación k es articular o representa una fuerza si la articulación k es prismática. Note que τ_k denota el torque o la fuerza real entregada a la articulación k . Por lo tanto, los efectos de las dinámicas del actuador, engranes, y las transmisiones mecánicas están implícitos en τ . El trabajo virtual producido por el torque del actuador es:

$$\delta W_1 = \tau^T \delta\Theta$$

De esta forma la fuerza generalizada es simplemente el torque en este caso. Sin embargo, hay una segunda fuente de la fuerza generalizada.

■ Fricción

Debido a que la fricción tiene una naturaleza compleja, puede tener un efecto significativo sobre la dinámica del brazo. La siguiente expresión ha sido propuesta a partir de diferentes experimentos.

$$b_k(\dot{\theta}) = b_k^V \dot{\theta}_k + \text{sgn}(\dot{\theta}_k) \left[b_k^d + (b_k^s - b_k^d) e^{-\frac{|\dot{\theta}_k|}{\epsilon}} \right] \quad 1 \leq k \leq n$$

$\text{sgn} \rightarrow$ Función signo, donde vale 1 si $\dot{\theta}_k > 0$, 0 si $\dot{\theta}_k = 0$ y -1 si $\dot{\theta}_k < 0$.

$b_k^V \rightarrow$ Coeficiente de fricción viscosa

$b_k^d \rightarrow$ Coeficiente de fricción dinámica

$b_k^s \rightarrow$ Coeficiente de fricción estática

$\epsilon \rightarrow$ Parámetro de reducción

Observe que si la velocidad de la articulación k se aproxima a cero, la fuerza de fricción es prácticamente $\pm b_k^s$. En consecuencia b_k^s puede ser interpretado como el torque o fuerza requerido para vencer la fricción cuando el movimiento de la articulación k se inicia. Es claro que la fricción viscosa es una función lineal de $\dot{\theta}_k$ mientras que la fricción estática y dinámica son funciones no lineales discontinuas. El modelo de fuerzas de fricción que actúan sobre la k -ésima articulación es resumido en la gráfica siguiente.

(Pegar figura)

Para un brazo robótico bien diseñado, particularmente un brazo directamente manejado, los coeficientes de fricción serán pequeños. La ecuación presentada es tan sólo un modelo rudo de las fuerzas friccionales. Una representación más comprehensiva debería emplear términos de la forma $\dot{b}(\theta, \dot{\theta})$, los cuales dependen tanto de la posición articular como de la velocidad. Esto sería necesario si los ejes sobre los cuales rotan o se trasladaran los eslabones no fueran perfectamente circulares y uniformes. El trabajo virtual producido por el robot debido a las fuerzas friccionales que se oponen al movimiento es:

$$\delta W_2 = -b(\dot{\theta})^T \delta \theta$$

Las dos contribuciones a las fuerzas generalizadas pueden ahora ser combinadas. El trabajo virtual total producido por los actuadores y la fricción es:

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = [\tau - b(\dot{\theta})]^T \delta \theta$$

De aquí se desprende que la expresión para la fuerza generalizada aplicada al brazo robótico es:

$$F = \tau - b(\dot{\theta})$$

El término de fricción tiene un signo negativo porque las fuerzas friccionantes se oponen al movimiento generado por los actuadores. También es posible agregar un tercer término al vector de fuerzas generalizadas: aquel inducido por una fuerza o par en el extremo del brazo. Sin embargo, para mantener el modelo lo más simple posible, se asumirá que el brazo se mueve libremente y que su espacio de trabajo y que cualquier carga que se carga está implícitamente incluida en la descripción física del último eslabón. Bajo estas condiciones, dicho par o fuerza valdrá cero.

Modelo dinámico de Lagrange - Euler

Expandiendo las expresiones de energía cinética y potencial en forma tensorial se tiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{kj} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j$$

$$U = - \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j \bar{c}_{jk}$$

$D_{kj} \rightarrow$ Elemento del renglón k y columna j del tensor de inercia D

$\bar{c}_{jk} \rightarrow$ Elemento k del vector \bar{c}_j

En esta oportunidad no se desarrollará la deducción de las

derivadas del lagrangiano. Esto puede consultarse en el libro de Schilling

" Fundamentals for Robotics ". Desarrollando las derivadas del lagrangiano, se tiene lo siguiente

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = \sum_{j=1}^n D_{ij} \dot{\theta}_j$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{\theta}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial \theta_k} \right) \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial D_{kj}}{\partial \theta_k} \right) \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j A_{jki}$$

$A_{jki} \rightarrow$ Es el elemento renglón k columna i de la partición A del jacobiano del eslabón j

Para simplificar los términos, se introducen los siguientes elementos.

$$C_{ikj} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{kj}}{\partial \theta_i} \quad i \leq j, i, k \leq n$$

$C_i \rightarrow$ Matriz de acoplamiento de velocidades de la articulación i.

$$h_i = - \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j A_{jki} \quad 1 \leq i \leq n$$

$h_i \rightarrow$ Vector de carga gravitatoria

Con estas expresiones y tomando en cuenta la fricción, se obtiene la siguiente expresión para el par/fuerza de la articulación i

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{\theta}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ikj} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j + h_i + b_i$$

El primer término del lado derecho son las fuerzas o torques inerciales,
el segundo se debe a los efectos de fuerzas de Coriolis y fuerzas centrífugas,
y los dos últimos ya fueron revisados.

Algoritmo de Lagrange - Euler

1. Aplicar el algoritmo de DH para asignar coordenadas a las articulaciones.
2. Haga ${}^0T_0 = I$; $i = 1$; $D = 0$.
3. Encuentre ${}^iPcg_i^*$.
4. Halle iIcg_i .
5. Calcule:

$$\hat{z}_{i-1} = {}^0R_{i-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$${}^0T_{i-1} = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{i-1}T_i$$

$${}^0Pcg_i = H {}^0T_i {}^iPcg_i^*$$

$${}^iIcg_i = {}^0R_i {}^iIcg_i {}^iR_0$$

6. Calcule J_i
7. Particione J_i y encuentre:

$$D = D + A_i^T m_k A_i + B_i^T {}^0I_i {}^0B_i$$

8. Haga $i = i + 1$. Si $i \leq n$, vaya al paso 3, sino, haga $i=1$ y continúe.
9. Calcule C_i , h_i y b_i .

10. Formule la ecuación para el par/fuerza de la articulación i según:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{\theta}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ikj} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j + h_i + b_i$$

11. Haga $i = i + 1$. Si $i \leq n$, vaya al paso 9, en caso contrario deténgase.

