

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická

# Abstraktní a konkrétní lineární algebra

Jiří Velebil  
katedra matematiky  
Praha, 2021

[velebil@fel.cvut.cz](mailto:velebil@fel.cvut.cz)  
<https://math.fel.cvut.cz/en/people/velebil>





# Obsah

|  |            |
|--|------------|
| <b>Úvod</b>  | <b>8</b>   |
| Domovská stránka tohoto textu a licence pro jeho šíření                              | 8          |
| Stručný návod k četbě tohoto textu   | 9          |
| Obsah základních kapitol   | 9          |
| Obsah dodatků  | 11         |
| Doporučená další četba   | 12         |
| <b>1 Lineární prostory</b>   | <b>14</b>  |
| 1.1 Lineární prostory nad tělesem $\mathbb{R}$                                       | 14         |
| 1.2 Lineární prostory nad obecným tělesem $\mathbb{F}$                               | 23         |
| 1.3 Jak se v tělese opravdu počítá?  | 29         |
| 1.4 A jak se počítá v lineárních prostorech?   | 32         |
| 1.5 Lineární kombinace a lineární obal   | 34         |
| 1.6 Lineární podprostor  | 37         |
| 1.7 Speciální lineární kombinace a speciální obaly                                   | 42         |
| <b>2 Lineární zobrazení</b>  | <b>51</b>  |
| 2.1 Lineární zobrazení   | 51         |
| 2.2 Skládání lineárních zobrazení  | 54         |
| 2.3 Monomorfismy, epimorfismy a izomorfismy  | 59         |
| 2.4 Abstraktní lineární rovnice  | 64         |
| 2.5 Lineární formy   | 67         |
| <b>3 Prostory konečné dimenze</b>  | <b>71</b>  |
| 3.1 Lineární závislost a nezávislost   | 71         |
| 3.2 Konečně generované prostory, báze, dimenze a souřadnice                          | 74         |
| 3.3 Lineární podprostory a jejich dimenze  | 81         |
| 3.4 Lineární zobrazení je určeno svým chováním na bázi                               | 87         |
| 3.5 Dualita pro lineární prostory konečné dimenze                                    | 88         |
| 3.6 Poznámky k prostorům nekonečné dimenze   | 91         |
| <b>4 Lineární zobrazení z <math>\mathbb{F}^s</math> do <math>\mathbb{F}^r</math></b> | <b>94</b>  |
| 4.1 Lineární zobrazení jako matice   | 94         |
| 4.2 Skládání lineárních zobrazení je násobení matic                                  | 101        |
| 4.3 Lineární prostor všech lineárních zobrazení z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$   | 106        |
| 4.4 Lineární formy na $\mathbb{F}^n$   | 110        |
| <b>5 Odbočka — Vnější mocnina a determinant</b>                                      | <b>113</b> |
| 5.1 Vnější mocnina lineárního prostoru   | 113        |
| 5.2 Determinant lineárního zobrazení   | 122        |
| 5.3 Cramerova věta a Laplaceův rozvoj determinantu                                   | 127        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>6</b>  | <b>Soustavy lineárních rovnic</b>  | <b>132</b> |
| 6.1       | Co zatím o maticích víme?  | 132        |
| 6.2       | Maticový zápis soustavy lineárních rovnic  | 136        |
| 6.3       | Gaussova eliminační metoda   | 137        |
| 6.4       | Řešitelnost obecných soustav lineárních rovnic   | 147        |
| <b>7</b>  | <b>Afinní podprostory a afinní zobrazení</b>   | <b>164</b> |
| 7.1       | Afinní podprostory lineárního prostoru   | 164        |
| 7.2       | Vzájemná poloha afinních podprostorů   | 166        |
| 7.3       | Parametrický a rovnicový zápis afinního podprostoru lineárního prostoru $\mathbb{F}^n$ | 169        |
| 7.4       | Průnik afinních podprostorů  | 176        |
| <b>8</b>  | <b>Determinant čtvercové matice</b>  | <b>178</b> |
| 8.1       | Permutace konečné množiny  | 178        |
| 8.2       | Determinant čtvercové matice   | 182        |
| 8.3       | Laplaceův rozvoj determinantu  | 194        |
| 8.4       | Řešitelnost regulárních čtvercových soustav lineárních rovnic                          | 200        |
| <b>9</b>  | <b>Matice lineárního zobrazení</b>   | <b>211</b> |
| 9.1       | Matice lineárního zobrazení  | 211        |
| 9.2       | Matice transformace souřadnic  | 222        |
| 9.3       | Ekvivalence a podobnost matic  | 229        |
| <b>10</b> | <b>Vlastní hodnoty lineárních zobrazení</b>  | <b>232</b> |
| 10.1      | Problém diagonalisace  | 232        |
| 10.2      | Okruh polynomů nad tělesem   | 235        |
| 10.3      | Vlastní vektory a vlastní hodnoty  | 244        |
| 10.4      | Diagonalisovatelnost lineárních zobrazení  | 247        |
| <b>11</b> | <b>Jordanův tvar</b>   | <b>253</b> |
| 11.1      | Nilpotentní lineární zobrazení   | 254        |
| 11.2      | Minimální polynom lineárního zobrazení   | 261        |
| 11.3      | Jordanův tvar lineárních nilpotentních zobrazení                                       | 266        |
| 11.4      | Jordanův tvar lineárních zobrazení   | 276        |
| 11.5      | Jordanův-Chevalleyho tvar lineárních zobrazení   | 289        |
| <b>12</b> | <b>Skalární součin</b>   | <b>294</b> |
| 12.1      | Reálný skalární součin   | 294        |
| 12.2      | Norma, metrika a úhel mezi vektory   | 300        |
| 12.3      | Obecný tvar skalárního součinu v prostoru konečné dimenze                              | 307        |
| 12.4      | Ortogonální projekce, ortogonální rejeckce a ortogonalisace                            | 315        |
| 12.5      | Ortogonální doplněk lineárního podprostoru   | 327        |
| 12.6      | Poznámky ke komplexnímu skalárnímu součinu   | 329        |
| <b>13</b> | <b>Banachovy a Hilbertovy prostory</b>   | <b>331</b> |
| 13.1      | Základy topologie normovaného lineárního prostoru $\mathbb{R}^n$                       | 332        |
| 13.2      | Nekonečné řady a exponenciála čtvercové matice   | 339        |
| 13.3      | Separabilní Hilbertovy prostory a abstraktní Fourierovy řady                           | 346        |
| <b>14</b> | <b>Věta o hlavních osách a SVD rozklad matice</b>                                      | <b>354</b> |
| 14.1      | Věta o hlavních osách  | 354        |
| 14.2      | SVD rozklad matice   | 361        |
| 14.3      | Aproximace matice pomocí SVD rozkladu  | 365        |
| 14.4      | Mooreova-Penroseova pseudoinverse obecné matice  | 371        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>15</b> | <b>Ortogonalita vzhledem k bilineární formě</b>   | <b>376</b> |
| 15.1      | Lineární prostory s bilineární formou   | 376        |
| 15.2      | Matice bilineárních forem   | 384        |
| 15.3      | Ortogonalita vzhledem k bilineární formě  | 386        |
| 15.4      | Geometrické prostory a jejich morfismy  | 388        |
| <b>16</b> | <b>Kvadratické a symplektické prostory</b>  | <b>396</b> |
| 16.1      | Kvadratické prostory a ortogonální báze   | 396        |
| 16.2      | Isometrie kvadratických prostorů a ortogonální grupa  | 401        |
| 16.3      | Symplektické prostory a symplektické báze   | 404        |
| 16.4      | Isometrie symplektických prostorů a symplektická grupa  | 406        |
| <b>17</b> | <b>Kvadratické prostory nad <math>\mathbb{R}</math></b>                                       | <b>409</b> |
| 17.1      | Klasifikace kvadratických forem nad uspořádaným tělesem                                       | 409        |
| 17.2      | Isometrie eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$  | 409        |
| 17.3      | Isometrie pseudo-eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^{n,1}$                                   | 413        |
| 17.4      | Isometrie obecného prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$  | 413        |
| <b>A</b>  | <b>Aplikace — Základy tensorového počtu</b>   | <b>417</b> |
| A.1       | Vektory, kovektory a lineární zobrazení: znovu a jinak  | 418        |
| A.2       | Tensory druhého řádu  | 420        |
| A.3       | Obecné tensory a abstraktní indexy  | 423        |
| <b>B</b>  | <b>Aplikace — Metrické výpočty v <math>\mathbb{R}^n</math></b>                                | <b>431</b> |
| B.1       | Gramův determinant  | 432        |
| B.2       | Vektorový součin v $\mathbb{R}^n$ , kde $n \geq 2$  | 436        |
| B.3       | Vzájemná vzdálenost afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$                              | 442        |
| B.4       | Vzájemná vzdálenost afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$             | 447        |
| <b>C</b>  | <b>Aplikace — Metoda nejmenších čtverců</b>   | <b>451</b> |
| C.1       | Řešení soustav metodou nejmenších čtverců   | 451        |
| C.2       | Lineární a polynomiální regrese   | 456        |
| C.3       | Regrese jiných typů   | 462        |
| C.4       | Zobecněné řešení soustav metodou nejmenších čtverců   | 464        |
| <b>D</b>  | <b>Aplikace — Ortogonální aproximace analogového a digitálního signálu</b>                    | <b>466</b> |
| D.1       | Základní myšlenky zpracování signálu  | 466        |
| D.2       | Riemannův-Stieltjesův integrál a Hilbertův prostor $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$           | 469        |
| D.3       | Ortonormální systémy a abstraktní Fourierovy řady v prostoru $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ | 479        |
| D.4       | Trigonometrické polynomy  | 483        |
| D.5       | Ortogonální polynomy, Haarovy funkce a Walshovy funkce  | 487        |
| D.6       | Gaussova-Jacobiho transformace, DFT a DCT   | 493        |
| <b>E</b>  | <b>Aplikace — Spline funkce</b>   | <b>502</b> |
| E.1       | Bézierovy křivky  | 502        |
| E.2       | Kubická $C^2$ -interpolace  | 502        |
| <b>F</b>  | <b>Aplikace — Vektor důležitosti webových stránek</b>   | <b>503</b> |
| F.1       | Základní myšlenky výpočtu vektoru důležitosti   | 504        |
| F.2       | Vlastní vektory pozitivních sloupcově stochastických matic                                    | 508        |
| F.3       | Algoritmus PageRank   | 513        |
| <b>G</b>  | <b>Aplikace — Komprese dat</b>  | <b>515</b> |
| G.1       | LSI — Latentní sémantické indexování  | 515        |
| G.2       | PCA — Analýza hlavní komponenty   | 524        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>H Aplikace — Komprese obrazu</b>  | <b>529</b> |
| H.1 Trichromatické vidění a prostory barev   | 530        |
| H.2 Vzorkování signálu   | 533        |
| H.3 Huffmanovo kódování  | 535        |
| H.4 Formát JPEG  | 537        |
| <b>I Aplikace — Lineární kódy</b>  | <b>540</b> |
| I.1 Uvedení do lineárních kódů   | 541        |
| I.2 Ortogonalita v $\mathbb{F}^n$ a Hammingova metrika v $\mathbb{F}^n$                    | 544        |
| I.3 Lineární kódy nad tělesem $\mathbb{F}$   | 547        |
| I.4 Detekce a oprava chyb v lineárních kódech  | 550        |
| I.5 Další témata teorie lineárních kódů  | 560        |
| <b>J Aplikace — Konvexní množiny</b>   | <b>563</b> |
| J.1 Konvexní a konické množiny   | 564        |
| J.2 Extremální body konvexních množin  | 567        |
| J.3 Simplexy   | 572        |
| J.4 Konvexní polyedry a konvexní polytopy  | 579        |
| J.5 Strukturální popis konvexních polyedrů   | 585        |
| J.6 Extremální paprsky konečně generovaných konických množin                               | 589        |
| <b>K Aplikace — Lineární programování</b>  | <b>593</b> |
| K.1 Formulace standardní úlohy lineárního programování                                     | 593        |
| K.2 Simplexová metoda  | 594        |
| K.3 Princip duality lineárního programování  | 594        |
| K.4 Další algoritmy řešení úloh lineárního programování                                    | 594        |
| <b>L Aplikace — Projektivní geometrie a počítačová grafika</b>                             | <b>595</b> |
| L.1 Translace a perspektivní projekce  | 595        |
| L.2 Projektivní prostor a homogenní souřadnice   | 595        |
| L.3 Topologie reálné projektivní roviny  | 595        |
| <b>M Aplikace — Nahlédnutí do geometrické algebry</b>                                      | <b>596</b> |
| M.1 Anarchistické výpočty v rovinné geometrii  | 596        |
| M.2 Klasický vektorový model geometrické algebry   | 596        |
| M.3 Exotické modely geometrické algebry  | 596        |
| <b>N Aplikace — Rekurentní rovnice a složitost</b>   | <b>598</b> |
| N.1 Lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty                                 | 598        |
| N.2 Generující matice  | 598        |
| <b>O Aplikace — Soustavy lineárních diferenciálních rovnic</b>                             | <b>599</b> |
| O.1 Diferenciální rovnice růstu populace — základní myšlenky řešení diferenciálních rovnic | 600        |
| O.2 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty     | 604        |
| O.3 Fázové prostory řešení   | 617        |
| O.4 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty                 | 625        |
| <b>P Aplikace — Speciální teorie relativity</b>  | <b>650</b> |
| P.1 Pojetí časoprostoru před teorií relativity   | 650        |
| P.2 Minkowského časoprostor  | 651        |
| P.3 Odvození Lorentzovy transformace   | 651        |
| <b>Q Aplikace — Obrázkový kalkulus pro kvantové výpočty</b>                                | <b>652</b> |
| Q.1 Matematické základy kvantové mechaniky   | 652        |
| Q.2 Obrázkový kalkulus   | 652        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>R Aplikace — Diskrétní diferenciální geometrie</b>                          | <b>653</b> |
| R.1 Řetězy a kořetězy . . . . .  | 653        |
| R.2 Diskrétní diferenciální formy . . . . .                                    | 653        |
| <b>S Aplikace — Plochy v <math>\mathbb{R}^n</math> a jejich tečné prostory</b> | <b>654</b> |
| S.1 Parametrisace $d$ -rozměrné plochy v $\mathbb{R}^n$ . . . . .              | 654        |
| S.2 Tečný prostor . . . . .  | 654        |
| S.3 Diferenciální formy . . . . .  | 654        |
| <b>Rejstřík</b>  | <b>655</b> |

# Úvod

This work contains many things which are new and interesting. Unfortunately, everything that is new is not interesting, and everything which is interesting, is not new.

Lev D. Landau

Lineární algebra na FEL ČVUT se vyučuje v řadě mutací. Tento text *není* napsán jako universální text, který by sloužil jako učebnice pro všechny studijní programy FEL ČVUT. Snažil jsem se zaměřit na to, co je v lineární algebře (podle mého soudu) podstatné a k čemu lineární algebra může dobře posloužit. Výběr témat je tedy značně subjektivní. Domnívám se ale, že text může posloužit jako výchozí bod pro hlubší studium z dalších zdrojů.

Budu rád, když mi dáte vědět, jak jste s textem spokojeni nebo nespokojeni. Dejte mi také vědět, pokud v textu objevíte překlepy, chyby, atd. Errata budu udržovat na stránce <https://math.fel.cvut.cz/en/people/velebil/akla.html>.

**Název textu.** Název *Abstraktní a konkrétní lineární algebra* byl inspirován názvem knihy

☞ Jiří Adámek, Horst Herrlich a George Strecker, *Abstract and concrete categories: The joy of cats*, John Wiley & Sons, 1990

kteřá sice nepojednává o lineární algebře a ve které slova *abstraktní* a *konkrétní* mají specifický význam, ale která rozhodně stojí za přečtení.

**Poděkování.** Text je vysázen makrem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Leslieho Lamporta s využitím balíku *hyperref* Sebastiana Rahtze a Heiko Oberdiek. Obrázky byly nakresleny pomocí maker TikZ Tilla Tantau a komutativní diagramy pomocí maker Xy-pic Kristoffera Rose a Rosse Moorea.

Rád bych poděkoval svým kolegům Martinu Bohatovi, Aleně Gollové, Matěji Dostálovi a Denysi Rozumnému za cenné připomínky ke struktuře textu a za upozornění na řadu překlepů a chyb. Za chyby, které proklouzly jejich pečlivým korekturám, nesu ovšem plnou odpovědnost já sám.

Jiří Velebil  
katedra matematiky  
FEL ČVUT  
velebil@math.feld.cvut.cz

## Domovská stránka tohoto textu a licence pro jeho šíření

Aktuální verze tohoto textu je dostupná na stránce <https://math.fel.cvut.cz/en/people/velebil/akla.html>, právě čtete verzi ze dne 12. září 2021, 10:50 hodin. Za správnost dřívějších verzí, vystavených na jiných stránkách než výše uvedených, neručím.

Text je volně šiřitelný podle následující licence. Autorem licenčního ujednání je Petr Olšák.

**Licence k elektronické verzi textu Jiří Velebil, *Abstraktní a konkrétní lineární algebra***

- (1) Uživatel, tj. čtenář, může tento text použít pro svoje potřeby bez omezení. To znamená, že jej může číst na obrazovce počítače a tisknout v libovolném počtu kopií na svoje náklady a jen pro svoje potřeby. Může teoreticky též měnit text, ale nesmí změněný text dále šířit. Pokud se uživatel rozhodne text dále šířit, stává se distributorem textu a platí pro něj podmínky podle bodu (2).



- (2) Distributor textu může nezměněný text šířit v elektronické podobě bez omezení. To znamená, že jej může zařadit do libovolného balíku, jehož licence není v rozporu s touto licencí. Teoreticky jej může (například v rámci většího balíku) poskytovat též za úplatu, ovšem obsah žádného přiloženého souboru nesmí být měněn a žádná část textu nesmí být obsažena v tištěných dokumentech dodávaných s balíkem. Uživatel tedy musí mít možnost si přečíst tuto licenci, ve které je napsáno, že autor šíří tento text v elektronické formě bezplatně. Aktuální adresa Internetu, na které šíří text autor, je <https://math.fel.cvut.cz/en/people/velebil/akla.html>
- (3) Distributor nebo nakladatel může rozmnožit a distribuovat text v tištěné podobě pouze tehdy, pokud uzavře s autorem písemnou autorskou smlouvu. Tato smlouva musí být v souladu s touto licencí. Nedodržení tohoto požadavku je klasifikováno jako porušení autorského zákona.
- (4) Text může mít více verzí, které vznikají tím, že autor může text v průběhu času měnit. Autor zveřejňuje na Internetu jen poslední verzi textu. Autor je tedy zároveň jediným distributorem, který je oprávněn měnit obsah textu.
- (5) Žádná část tohoto textu ani po převedení do jiného jazyka se nesmí bez svolení autora použít v textu jiného autora. Výjimkou je možnost citace textu v rozsahu maximálně jednoho odstavce s uvedením zdroje.
- (6) Autor neručí za žádné škody, které by mohly vzniknout jakýmkoli používáním textu.

## Stručný návod k četbě tohoto textu

Text je psán systémem definice-věta-důkaz. Teoretické výsledky jsou ilustrovány řadou řešených příkladů. Všechny definice, tvrzení, a příklady jsou průběžně číslovány a v textu jsou na ně uváděny hypertextové odkazy. Na konci textu je rejstřík, který obsahuje odkazy na klíčové zavedené pojmy.

Pokud v textu narazíte na značku



zvolněte: je tak označeno něco, co vyžaduje zvýšenou pozornost.

V rámečku, jako je tento, naleznete většinou shrnutí teorie, důležité upozornění na další souvislosti v textu nebo slogan, který má umožnit zapamatovat si abstraktní pojmy.

## Obsah základních kapitol

Text obsahuje kapitoly se základní teorií a dodatky, ve kterých jsou probrána další zajímavá témata a aplikace.

- ☞ Prvním základním pojmem lineární algebry je *lineární prostor* (v řadě knih také: *vektorový prostor*). Lineární prostory jsou zavedeny v **Kapitole 1**. V této kapitole naleznete motivaci definice lineárního prostoru nad tělesem reálných čísel jako přímé zobecnění *geometrické* představy: s vektory lze pracovat jako s orientovanými úsečkami v rovině. To jest: vektory můžeme navzájem sčítat a každému vektoru lze změnit „délku“ pronásobením daného vektoru reálným skalárem.

Pro řadu aplikací s reálnými skaláry nevystačíme. Ve skutečnosti můžeme reálná čísla nahradit prvky matematické struktury, které se říká *těleso*. Lineární prostory nad nejrozumnějšími tělesy jsou pro aplikace velmi důležité: velká část fyziky pracuje s tělesem komplexních čísel, velká část teoretické informatiky pracuje s konečnými tělesy. Ukážeme, že v obecném tělese se dá počítat „jako v reálných číslech“ a uvedeme příklady lineárních prostorů nad obecným tělesem.

Závěr této kapitoly je věnován pojmu *lineární kombinace* vektorů v lineárním prostoru a s ním souvisejícím pojmem *lineárního podprostoru*. Zobecnění lineárních kombinací na lineární kombinace vzhledem k *operadu koeficientů* pak umožní definovat množiny, uzavřené na speciální lineární kombinace.

- ☞ Druhým základním pojmem lineární algebry je *lineární zobrazení* (zde se pojem *vektorové zobrazení* nepoužívá). Vlastnostem lineárních zobrazení je věnována **Kapitola 2**. Dozvíme se, jak linearitu zobrazení poznat a jak vytvářet nová lineární zobrazení ze starých.

Podstatnou částí této kapitoly je zavedení notace *komutativních diagramů*. Tato notace nás bude provázet celým dalším textem, a věříme, že jakmile si na tuto notaci zvyknete, řada abstraktních pojmů se stane velmi názornými.

Důležitou součástí lineární algebry jsou algoritmy pro řešení *lineárních rovnic*. Lineární rovnice je možné zavést už na abstraktní úrovni lineárních zobrazení. Přesně to uděláme a vysvětlíme, jakou mají lineární rovnice a jejich řešení *geometrickou interpretaci*.

- ☞ V **Kapitole 3** zavedeme centrální pojem celého textu: *lineární prostory konečné dimenze*. Lineární prostory konečné dimenze mají tu výhodu, že je lze „vytvořit“ z *konečné* množiny vektorů, které se říká *báze*. Zavedení báze v lineárním prostoru je zavedením *souřadnicového systému*. Teprve zavedením souřadnic získáváme nástroj, jak v abstraktním lineárním prostoru něco skutečně spočítat.

- ☞ Lze říci, že lineární algebra (prostorů konečné dimenze) je převážně práce s *maticemi*. Matice zavedeme v **Kapitole 4** jako jistá *lineární zobrazení*. Tato definice má tu výhodu, že řada vlastností *operací* s maticemi je jen instancí toho, jak se pracuje s lineárními zobrazeními. Vysvětlíme tedy, jak matice *násobit* mezi sebou, jak matice *sčítat* a jak matice *násobit skalárem*.

- ☞ **Kapitolu 5** lze vynechat. Její přeskočení nemá vliv na pochopení dalšího textu. Co se dozvíte, pokud ji nepřeskočíte? V této kapitole zavedeme *vnější mocninu* lineárního prostoru. I když to zní hrozně, je myšlenka vnějšího součinu stejně stará jako lineární algebra. Vnější součin totiž umožňuje uvažovat o *orientovaných objemech* jistých rovnoběžnostěnů v lineárním prostoru. A odtud vede jen malý krok k velmi elegantní definici *determinantu* lineárního zobrazení.

- ☞ Řešení *soustav lineárních rovnic* se budeme věnovat v **Kapitole 6**. Vysvětlíme, jak *maticový zápis* soustav lineárních rovnic vede ke *geometrické představě* řešení soustav lineárních rovnic. Tato představa je zhmotněna důležitým algoritmem: *Gaussovou eliminační metodou*. Ukážeme také řadu úloh, které lze elegantně vyřešit pomocí soustav lineárních rovnic.

- ☞ **Kapitola 7** je věnována studiu vzájemných poloh *afinních podprostorů* lineárního prostoru. Jedná se o přímé zobecnění studia vzájemné polohy (například) dvojice přímek v prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Studium afinních podprostorů lineárního prostoru vede přirozeně k pojmům *afinní prostor* a *afinní zobrazení*. Ukážeme důležitou representační větu: každý afinní prostor si lze představit jako nadrovinu lineárního prostoru. To vede k reprezentaci afinních zobrazení, která se používá v počítačové grafice, viz Dodatek L.

- ☞ V **Kapitole 8** zavedeme *determinant čtvercové matice* elementárním způsobem (tj. bez využití aparátu vnější mocniny). Elementárnost zavedení determinantu musíme vykoupit úvahami o *permutacích* konečné množiny. Zavedeme další grafickou notaci: permutace budeme znázorňovat *strunovými diagramy*.

Podstatná část této kapitoly je věnována metodám, jak determinant matice *spočítat*. Kromě výpočtu determinantu *Gaussovou eliminací* zmíníme i metodu výpočtu pomocí *algebraických doplňků* (také: *kofaktorů*) matice.

Determinanty lze použít ke zjištění *invertibility matice* a k nalezení řešení soustav lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí (takzvaná *Cramerova věta*, také: *Cramerovo pravidlo*).

- ☞ Maticové výpočty přesuneme i do abstraktních lineárních prostorů: v **Kapitole 9** ukážeme, že s lineárním zobrazením lze pracovat pomocí *matice lineárního zobrazení* (vzhledem k pevným bázím).

Uvidíme, jakým způsobem lze pomocí matic *transformovat souřadnicové systémy* a opět ukážeme nej-různější aplikace takových transformací.

- ☞ Existují směry, ve kterých se obecné lineární zobrazení chová velmi jednoduše? Odpovědím na tuto otázku je věnována **Kapitola 10**.

K danému lineárnímu zobrazení budeme hledat *vlastní hodnoty* a *vlastní vektory*. Zaměříme se na *diagonalizovatelná* zobrazení: to jsou taková lineární zobrazení, která se v souřadnicovém systému z vlastních vektorů chovají jako pouhá změna měřítka.

Protože hledání vlastních hodnot a vlastních zobrazení probíhá řešením *polynomiálních rovnic*, tvoří podstatnou část této kapitoly základy teorie polynomů nad tělesem (hledání *hodnot polynomů* pomocí *Hornerova schématu*, hledání *kořenů* polynomů a hledání *kořenových rozkladů* polynomů).

- ☞ Ne každé lineární zobrazení je diagonalisovatelné. Přesto lze — za určitých podmínek — tvrdit, že každé lineární zobrazení se dá chápat jako „téměř diagonální“. Přesněji: lineární zobrazení lze napsat v *Jordanově tvaru*. Hledání Jordanova tvaru lineárních zobrazení je věnována **Kapitola 11**.

Jordanův tvar *čtvercové matice* má dvě významné aplikace: v teorii *lineárních rekurentních rovnic* (viz Dodatek **N**) a v teorii *lineárních diferenciálních rovnic* (viz Dodatek **O**).

- ☞ V **Kapitole 12** zavedeme *skalární součin* pro lineární prostory nad tělesem *reálných čísel*. Skalární součin nám umožňuje mluvit o *kolmosti* vektorů, o *velikosti* (také: *normě*) vektorů a o *vzdálenosti* vektorů. Řadu faktů známých z planimetrie tak budeme schopni zrekonstruovat pro abstraktní skalární součiny: například *Pythagorovu větu*, *výpočet kolmé projekce*, atd.

- ☞ Pro řadu aplikací je nutné kombinovat lineární algebru s matematickou analýzou. Důležitými příklady takových kombinací jsou *Banachovy prostory* a *Hilbertovy prostory*. Naprostým základům této teorie je věnována **Kapitola 13**.

Vybudujeme zde základy *diferenciálního počtu vektorových funkcí* a *abstraktní Fourierovy transformace*. Aplikace vybudované teorie použijeme v Dodatcích **D** (ortogonální aproximace signálů), **H** (komprese obrazu), **O** (soustavy lineárních diferenciálních rovnic) a **S** (teorie obecných  $d$ -dimensionálních ploch v prostoru  $\mathbb{R}^n$ ).

- ☞ V **Kapitole 14** dokážeme *větu o hlavních osách* pro abstraktní kuželosečky. Z této věty plyne velmi důležitý pojem *SVD rozkladu matice*. Uvidíme, že SVD rozklad umožňuje aproximovat zadanou matici maticí předem zvolené hodnoty. Dále SVD rozklad vede přirozeně k pojmu *pseudoinverse* obecné matice nad  $\mathbb{R}$ .

SVD rozklad má řadu důležitých aplikací, viz například Dodatek **G** (*komprese databází*).

- ☞ V **Kapitole 15** zavedeme obecný pojem *kolmosti vzhledem k bilineární formě*.

To si vyžádá nejprve zavedení základních pojmů: *bilineárních forem* a *matic bilineárních forem*.

Studium kolmosti vzhledem k bilineární formě nás donutí klást další požadavky na bilineární formu: forma musí být buď *symetrická* nebo *symplektická*. Obecné *geometrické prostory*, které v této kapitole budeme studovat, jsou pak lineární prostory vybavené speciálními bilineárními formami. *Morfismy* geometrických prostorů jsou ta lineární zobrazení, která „zachovávají vzdálenosti“.

Kapitoly 16 a 17 ještě nejsou plně sepsány. Objeví se v budoucích verzích tohoto textu.

## Obsah dodatků

V dodatcích k tomuto textu jsou uvedeny nejrůznější aplikace teoretických výsledků z hlavní části textu. Výběr témat dodatků je opět velmi subjektivní.

- ☞ V **Dodatku A** nahlédneme do základů teorie *tenzorů*.

Tensor na lineárním prostoru je speciální multilineární forma. V textu zavedeme *grafický kalkulus* tenzorů a ukážeme základy klasického *indexového přístupu* k tenzorům. Pro použití tenzorů v praxi (převážně ve fyzice a diferenciální geometrii) odkazujeme na další literaturu, uvedenou v tomto Dodatku.

- ☞ **Dodatek B** je věnován *metrickým výpočtům* v prostorech  $\mathbb{R}^n$ .

Zavedeme *vektorový součin*. Vektorový součin je důležitým geometrickým pojmem, který má mnoho využití jak v čisté geometrii, tak v aplikacích geometrie v diferenciálním a integrálním počtu. Vektorový součin zavedeme pomocí determinantu pro libovolný seznam  $(n - 1)$  vektorů v prostoru  $\mathbb{R}^n$ , kde  $n \geq 2$ .

Vybudovaná teorie umožní elegantní klasifikaci vzájemných poloh ploch v  $\mathbb{R}^n$  a výpočet nejmenší vzdálenosti dvojic ploch.

- ☞ V **Dodatku C** budeme studovat soustavy lineárních rovnic nad  $\mathbb{R}$ , které nemají řešení. Přesto lze ale nalézt optimální *aproximaci* řešení, které říkáme *řešení metodou nejmenších čtverců*.  
Řešení soustav metodou nejmenších čtverců je jednoduchou aplikací teorie ortogonálních projekcí a rejekcí. Pomocí této metody lze prokládat zadanými body *regresní křivky* nejrůznějších typů.
- ☞ Lineární algebru lze využít i pro tvorbu *vektoru důležitosti* webových stránek. Úvahám o vektoru důležitosti a jeho použití algoritmem **PageRank** společnosti Google<sup>TM</sup> je věnován **Dodatek F**.  
Vektor důležitosti je vlastním vektorem *matice hyperlinků* webu. Výpočet vektoru důležitosti je z praktických důvodů nutné počítat iterativní metodou. Iterativní metody nemusí obecně konvergovat, pro *stochastické matice* je ale možné provést analýzu vlastního podprostoru, která konvergenci zajistí.
- ☞ V **Dodatku G** ukážeme dvě aplikace SVD rozkladu matice z Kapitoly 14: metodu *latentního sémantického indexování* databází a *analýzu hlavní komponenty* statistických dat.
- ☞ **Dodatek I** je věnován uvedení do teorie *lineárních kódů*.  
Zavedeme pojem *generující matice* a *kontrolní matice* lineárního kódu a vysvětlíme, jakým způsobem lze lineární kódy využít pro *detekci* a *opravu* chyb v přenášených zprávách.  
Teorie lineárních kódů je důvtipnou kombinací úvah o řešení soustav lineárních rovnic a geometrie prostorů tvaru  $\mathbb{F}^n$ , kde  $\mathbb{F}$  je konečné těleso.
- ☞ V **Dodatku O** podáme základy teorie *řešení diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty*. Tyto diferenciální rovnice se týkají *vektorů* spojitých funkcí s první derivací. Řešení rovnic zformulujeme pomocí *exponenciály čtvercové matice* z Kapitoly 13, protože tento pojem umožňuje řešení vektorových lineárních diferenciálních rovnic zformulovat velmi elegantně.  
Podáme i *geometrickou klasifikaci* řešení lineárních diferenciálních rovnic pomocí *fázových prostorů*. Nakonec ukážeme řadu fyzikálních a inženýrských aplikací diferenciálních rovnic.

Ostatní dodatky ještě nejsou plně sepsány. Objeví se v budoucích verzích tohoto textu.

## Doporučená další četba

Četba tohoto textu nevyžaduje studium dalších knih. Přesto je studium z různých zdrojů zábavné a důležité. Člověk například zjistí, že terminologie a značení se text od textu mohou lišit. To je v matematice typické. Při čtení jakékoli z následujících knih se tedy ujistěte, jak jsou pojmy značeny a zavedeny.

**Sbírky úloh z lineární algebry.** Text, který právě čtete, *neobsahuje* sady příkladů k samostatnému procvičení. Sbírek úloh z lineární algebry je mnoho. Doporučujeme obsáhlou sbírku

- ☞ Karel Výborný a Miloš Zahradník, *Používáme lineární algebru*, 2011

která je volně ke stažení. Sady příkladů k procvičení také obsahuje řada následujících skript a knih.

**Texty katedry matematiky FEL ČVUT.** Vyučující katedry matematiky FEL ČVUT sepsali řadu textů z lineární algebry. Většinou jsou ušity na míru jednotlivým mutacím lineární algebry, které se na FEL ČVUT učí.

- ☞ Marie Demlová a Bedřich Pondělíček, *Úvod do algebry*, skriptum ČVUT, Praha 2000
- ☞ Eduard Krajník, *Maticový počet*, skriptum ČVUT, Praha 2005
- ☞ Petr Olšák, *Úvod do algebry, zejména lineární*, skriptum ČVUT, Praha 2007
- ☞ Pavel Pták, *Introduction to linear algebra*, skriptum ČVUT, Praha 2005

**Prakticky orientované knihy.** Pokud vás zajímají nejrůznější praktické aplikace lineární algebry (a aplikací je opravdu hodně), pak by vás mohla zaujmout některá z následujících knih:

- ☞ Jim Hefferon, *Linear algebra*

- ☞ David C. Lay, *Linear algebra and its applications*, Pearson, 4. vydání, 2011
- ☞ Robert Messer, *Linear algebra: Gateway to mathematics*, Pearson, 1997
- ☞ Carl D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM Publishers, 2001

Zvláště učebnice Jima Hefferona (je volně ke stažení) je psána velmi příjemným tempem.

**Teoreticky orientované knihy.** Chcete-li si prohloubit teoretické poznatky z lineární algebry, pak lze doporučit například knihy:

- ☞ Emil Artin, *Geometric algebra*, Interscience Publishers, London 1957
- ☞ Ladislav Bican, *Lineární algebra*, SNTL, 1979
- ☞ Nicolas Bourbaki, *Algebra I: Chapters 1–3*, Springer-Verlag, 2. vydání, 1998
- ☞ Werner H. Greub, *Linear algebra*, Springer-Verlag, 1967
- ☞ Paul R. Halmos, *Finite-dimensional vector spaces*, D. Van Nostrand Inc., New York, 1958
- ☞ Falko Lorenz, *Lineare algebra* Bd I, II, Spektrum Akademische Verlag, 4. vydání, 2003
- ☞ Igor R. Shafarevich a Alexey O. Remizov, *Linear algebra and geometry*, Springer-Verlag, 2013

**Encyklopedie lineární algebry.** Přehled nejružnějších témat lineární algebry (s velmi rozsáhlými seznamy literatury) najdete v příručce lineární algebry

- ☞ Leslie Hogben (ed.), *Handbook of linear algebra*, Chapman & Hall/CRC, 2007

Jde pouze o příručku plnou hesel. Přesto má tato příručka 77 kapitol a 1 400 stran.

**Historie lineární algebry.** Zajímá-li vás historie lineární algebry, pak doporučujeme sborník

- ☞ Jindřich Bečvář, *Z historie lineární algebry*, Matfyzpress, Praha, 2007

který je volně ke stažení.

# Kapitola 1

## Lineární prostory

... la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.

Henri Poincaré, *Science et méthode*

V této kapitole zavedeme základní pojem lineární algebry: *lineární prostor*. *Lineární prostor* je (velmi zhruba) soubor prvků, kterým říkáme vektory. Vektory můžeme navzájem „sčítat“ a „natahovat“ pomocí skalárů. V podkapitole 1.1 zvolíme jako skaláry reálná čísla. Lineární prostory s takovou volbou skalárů mají jasnou geometrickou interpretaci, kterou budeme později zobecňovat. Prvním zobecněním je změna volby skalárů: množina skalárů může být „téměř cokoli“. Samozřejmě, abychom byli schopni vybudovat smysluplnou teorii, musí množina skalárů splňovat „téměř totéž“ jako množina všech reálných čísel. Vhodným množinám skalárů se říká těleso. Lineárním prostorům nad obecným tělesem je věnována podkapitola 1.2.

Lineární prostor je zaveden axiomaticky (to je v moderní matematice zcela běžný způsob). Není proto možné se odvolávat na intuici a říkat, že v lineárním prostoru něco platí, protože „je to jasné“. Základní vlastnosti a techniky pro *počítání v obecném tělese a lineárním prostoru* ukážeme v podkapitolách 1.3 a 1.4.

Nejobecnější typ výpočtu v lineárním prostoru je *lineární kombinace* konečné množiny (nebo seznamu) vektorů. Lineárním kombinacím a základním vlastnostem *lineárního obalu* je věnována podkapitola 1.5.

Lineární obal množiny vektorů je příkladem „pěkné“ podmnožiny lineárního prostoru. Obecným „pěkným“ podmnožinám lineárního prostoru říkáme *lineární podprostor*. V podkapitole 1.6 se něco málo o lineárních podprostorech dozvíme. Na závěr, v podkapitole 1.7 zavedeme obecný obal množiny vektorů vzhledem k operadu koeficientů.

### 1.1 Lineární prostory nad tělesem $\mathbb{R}$

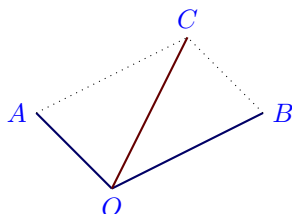
Pojem lineárního prostoru nad tělesem reálných čísel, který v této kapitole zavedeme, je zobecněním následujícího příkladu:



**1.1.1 Příklad (Lineární prostor úseček)** V rovině vyznačíme pevný bod  $O$  a budeme studovat množinu  $L$  všech úseček (případně i nulové délky), které mají  $O$  jako jeden z krajních bodů.

Úsečky budeme chtít navzájem *sčítat* a každou úsečku *prodloužit* pomocí reálného čísla.

- (1) Sčítání dvou úseček provedeme pomocí „rovnoběžníku sil“. Na následujícím obrázku je úsečka  $OC$  součtem úseček  $OA$  a  $OB$ :

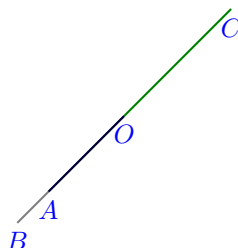


Je zřejmé, že takto definované sčítání podléhá některým zákonitostem. Například, pro každou trojici úseček  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , platí  $OA + (OB + OC) = (OA + OB) + OC$ .

Pochopitelně, sčítání úseček splňuje i jiné zákony. Jejich výčet prozatím nebudeme psát.

- (2) Prodlužování úsečky  $OA$  pomocí reálného čísla  $a$  znamená úsečku „natáhnout“ buď  $a$ -krát ve směru  $OA$ , pokud  $a > 0$ , nebo  $|a|$ -krát v opačném směru než  $OA$ , pokud  $a < 0$ .

Na následujícím obrázku je úsečka  $OA$ , úsečka  $OB$  je původní úsečka  $OA$  vynásobená číslem  $\sqrt{2}$ . Nakonec, úsečka  $OC$  je původní úsečka  $OA$  vynásobená číslem  $-\sqrt{2}$ :



Násobení úseček reálnými čísly opět musí podléhat jistým zákonitostem. Například, intuitivně by měla platit rovnost  $(a \cdot b) \cdot OA = a \cdot (b \cdot OA)$ , a to pro libovolnou úsečku  $OA$  a libovolná reálná čísla  $a$  a  $b$ .

Navíc, sčítání úseček a prodlužování úseček by spolu mělo souviset: například pro libovolnou úsečku  $OA$  a libovolná reálná čísla  $a$  a  $b$  očekáváme rovnost  $(a + b) \cdot OA = a \cdot OA + b \cdot OA$ .

Abstrakcí prostoru úseček je pojem lineárního prostoru nad reálnými čísly.

Máme před sebou první definici. Pokud si pojmy *definice*, *věta* a *důkaz* nejste jisti, přečtěte si například Kapitulu 1 textu

☞ Jiří Velebil, *Velmi jemný úvod do matematické logiky*, Praha 2007

O psaní důkazů, o typech důkazů a o chybách při psaní důkazů pojednává pěkný text

☞ Larry W. Cusick, *How to write proofs*, California State University, Fresno

**1.1.2 Definice (Lineární prostor nad tělesem reálných čísel)** *Lineární prostor* nad  $\mathbb{R}$  je trojice  $(L, +, \cdot)$ , kde  $L$  je množina (typickému prvku v  $L$  říkáme *vektor* a značíme jej  $\vec{x}$ ),  $\cdot$  a  $+$  jsou funkce typu

$$+ : L \times L \longrightarrow L \quad (\text{čteme: sčítání vektorů}), \quad \cdot : \mathbb{R} \times L \longrightarrow L \quad (\text{čteme: násobení vektoru reálným skalárem}),$$

které navíc splňují následující axiomy:

- (1) Axiomy pro sčítání vektorů.
  - (a) Existence nulového vektoru. Existuje  $\vec{o}$  takový, že pro všechna  $\vec{x}$  platí  $\vec{x} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ . Vektoru  $\vec{o}$  říkáme *nulový vektor*.
  - (b) Komutativita sčítání vektorů. Pro všechna  $\vec{x}, \vec{y}$  platí  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ .
  - (c) Asociativita sčítání vektorů. Pro všechna  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  platí  $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ .
  - (d) Existence opačného vektoru. Pro každé  $\vec{x}$  existuje právě jedno  $\vec{y}$  takové, že platí  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} = \vec{o}$ . Tomuto  $\vec{y}$  říkáme *opačný vektor* k vektoru  $\vec{x}$  a značíme jej  $-\vec{x}$ .
- (2) Axiomy pro násobení vektoru reálným skalárem.
  - (a) Neutralita násobení jedničkou. Pro každé  $\vec{x}$  platí  $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ .
  - (b) Asociativita násobení skalárem. Pro všechna  $a, b$  v  $\mathbb{R}$  a všechna  $\vec{x}$  platí  $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$ .



## (3) Distributivní zákony.

- (a) Distributivita sčítání vektorů. Pro všechna  $a$  v  $\mathbb{R}$  a všechna  $\vec{x}, \vec{y}$  platí  $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ .
- (b) Distributivita sčítání skalárů. Pro všechna  $a, b$  v  $\mathbb{R}$  a všechna  $\vec{x}$  platí  $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ .

**1.1.3 Poznámka** Definice lineárního prostoru nad  $\mathbb{R}$  je poměrně komplikovaná. Pojďme ji projít podrobně a porovnáme ji s Příkladem 1.1.1 prostoru úseček.

## (1) Axiomy pro sčítání vektorů jsou abstraktním vyjádřením vlastností sčítání úseček.

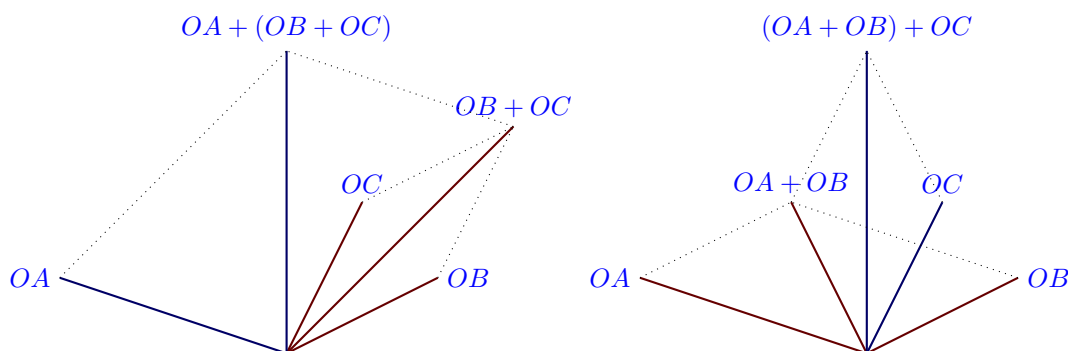
- (a) Nulovým vektorem  $\vec{o}$  je v Příkladu 1.1.1 úsečka nulové délky  $OO$ . Sečtením úsečky  $OO$  s libovolnou úsečkou  $OA$  dostaneme opět úsečku  $OA$ .

Důležité je si uvědomit, že v *každém* lineárním prostoru musí existovat *nulový vektor*.<sup>1</sup>

- (b) Pro každé dvě úsečky  $OA, OB$ , z Příkladu 1.1.1 platí rovnost  $OA + OB = OB + OA$ . Je tedy jedno v jakém pořadí úsečky sečteme.

V *každém* lineárním prostoru musí mít sčítání vektorů tuto vlastnost: výsledek součtu nesmí záviset na pořadí sčítání vektorů. Této vlastnosti říkáme *komutativita* operace sčítání.

- (c) Pro libovolné tři úsečky  $OA, OB, OC$  z Příkladu 1.1.1 platí rovnost  $OA + (OB + OC) = (OA + OB) + OC$ . To je patrné z následujících obrázků:



V *každém* lineárním prostoru musí mít sčítání vektorů tuto vlastnost: výsledek součtu tří vektorů nesmí záviset na uzávkování tohoto součtu. Této vlastnosti říkáme *asociativita* operace sčítání.

- (d) Pro každou úsečku  $OA$  z Příkladu 1.1.1 existuje jediná úsečka  $OB$  taková, že platí rovnost  $OA + OB = OB + OA = OO$ . Úsečka  $OB$  má stejnou délku jako úsečka  $OA$ , ale opačnou orientaci.

V *každém* lineárním prostoru musí mít libovolný vektor k sobě vektor opačný.

## (2) Axiomy pro násobení vektoru reálným skalárem jsou abstraktním vyjádřením vlastností prodlužování úseček pomocí reálných čísel.

- (a) Neutralita násobení jedničkou znamená v Příkladu 1.1.1 zřejmý fakt, že pro každou úsečku  $OA$  platí rovnost  $OA = 1 \cdot OA$ .

V *každém* lineárním prostoru musí platit analogická rovnost: 1-násobek vektoru  $\vec{x}$  je opět vektor  $\vec{x}$ .

- (b) Asociativita násobení skalárem v Příkladu 1.1.1 znamená platnost rovnosti  $a \cdot (b \cdot OA) = (a \cdot b) \cdot OA$ , pro libovolnou úsečku  $OA$  a libovolná reálná čísla  $a, b$ . To znamená, že pokud úsečku  $OA$  protáhneme  $b$ -krát a výsledek poté protáhneme  $a$ -krát, dostaneme stejný výsledek, jako když si nejprve spočteme faktor  $a \cdot b$  a tímto faktorem protáhneme úsečku  $OA$ .

V *každém* lineárním prostoru musí platit analogický fakt:  $a \cdot b$ -násobek vektoru  $\vec{x}$  je totéž jako  $a$ -násobek vektoru  $b \cdot \vec{x}$ .

## (3) Distributivní zákony dávají do vztahu sčítání vektorů a násobení reálným skalárem.

<sup>1</sup>Jak uvidíme později, nulový vektor  $\vec{o}$  je — co se týče souřadnic — v lineárním prostoru „jediná jistota“.



- (a) Distributivita sčítání vektorů v Příkladu 1.1.1 znamená platnost rovnosti  $a \cdot (OA + OB) = a \cdot OA + a \cdot OB$ , pro libovolné úsečky  $OA$ ,  $OB$  a libovolné reálné číslo  $a$ . Je tedy jedno, zda nejprve sečteme úsečky  $OA$ ,  $OB$  a poté součet  $a$ -krát protáhneme, nebo, zda nejprve  $a$ -krát protáhneme úsečky  $OA$  a  $OB$  a poté výsledky sečteme.

V každém lineárním prostoru musí platit analogický fakt:  $a$ -násobek vektoru  $\vec{x} + \vec{y}$  je totéž jako součet vektorů  $a \cdot \vec{x}$  a  $a \cdot \vec{y}$ .

- (b) Distributivita sčítání skalárů v Příkladu 1.1.1 znamená platnost rovnosti  $(a+b) \cdot OA = a \cdot OA + b \cdot OA$ , pro libovolnou úsečku  $OA$  a libovolná reálná čísla  $a$ ,  $b$ . Je tedy jedno, zda nejprve sečteme čísla  $a$ ,  $b$  a poté úsečku  $OA$  protáhneme  $(a+b)$ -krát, nebo, zda sečteme  $a$ -krát protaženou úsečku  $OA$  s  $b$ -krát protaženou úsečkou  $OA$ .

V každém lineárním prostoru musí platit analogický fakt:  $(a+b)$ -násobek vektoru  $\vec{x}$  je totéž jako součet vektorů  $a \cdot \vec{x}$  a  $b \cdot \vec{x}$ .

Prostor úseček z Příkladu 1.1.1 je tedy lineárním prostorem nad  $\mathbb{R}$ , protože jsou splněny všechny axiomy Definice 1.1.2.



**1.1.4 Poznámka** Jako všude v matematice, není ani v lineární algebře jednotné značení a terminologie.

- (1) V některé literatuře se místo termínu *lineární prostor* (linear space) používá termín *vektorový prostor* (vector space).
- (2) Označení pro *generic* vektor (naše  $\vec{x}$ ) může být také různé: používají se tučná písmena  $\mathbf{x}$ , kurzíva  $x$  a podobně.
- (3) Poslední poznámka: z důvodu lepší čitelnosti budeme lineární prostor zapisovat pouze písmenem  $L$  místo přesnějšího zápisu jako uspořádané trojice  $(L, +, \cdot)$ .

Budete-li číst jinou knihu, podívejte se, jak jsou jednotlivé pojmy definovány a projděte si značení.

Nyní uvedeme základní příklady lineárních prostorů nad  $\mathbb{R}$ .

**1.1.5 Příklad (Prostor  $n$ -tic nad  $\mathbb{R}$ )** Pro přirozené číslo  $n \geq 1$ , označíme jako  $\mathbb{R}^n$  množinu všech uspořádaných  $n$ -tic reálných čísel. Jednu takovou  $n$ -tici  $\mathbf{x}$  budeme psát do svislé tabulky, tj.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Na množině  $\mathbb{R}^n$  zavedeme operace sčítání a násobení prvkem z  $\mathbb{R}$  takto:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ a \cdot x_2 \\ \vdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Je jednoduché ukázat, že výše definované operace sčítání  $n$ -tic a násobení  $n$ -tic reálným skalárem definují na  $\mathbb{R}^n$  strukturu lineárního prostoru nad  $\mathbb{R}$ . Všechny axiomy pro lineární prostor totiž „platí po složkách“.

Speciálním případem je situace, kdy  $n = 1$ . Potom  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ . To znamená, že  $\mathbb{R}$  spolu s obvyklými operacemi sčítání a násobení tvoří lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ .

V dalším budeme dodržovat *konvenci*: vektory prostoru  $\mathbb{R}^n$  budeme typicky značit *tučně*, tj. například  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{o}$  (nulový vektor), a tak dále.

*Důležité:* vektory z  $\mathbb{R}^n$  budeme *vždy* psát do sloupců.



**1.1.6 Příklad (Co je zobrazení?)** V teorii množin se zobrazení  $f : A \rightarrow B$ , kde  $A$  a  $B$  jsou množiny, definuje jako množina uspořádaných dvojic  $(a, b)$ , která splňuje následující požadavek:

Pro každé  $a \in A$  existuje *právě jedno*  $b \in B$  takové, že  $(a, b) \in f$ .

Je-li dán prvek  $a$  v množině  $A$ , potom tomu jedinému výše uvedenému  $b$  říkáme *funkční hodnota* v bodě  $a$ . Budeme psát

$$b = f(a), \quad \text{nebo} \quad f : a \mapsto b \quad (\text{čteme: } f \text{ posílá } a \text{ na } b)$$

Povšimněme si důležité věci: abychom mohli mluvit o zobrazení  $f : A \rightarrow B$ , musí být definována funkční hodnota  $f(a)$  pro *každý* prvek  $a$  množiny  $A$ . Proto například  $\log : x \mapsto \log x$  pro nás *není* zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  (jde o zobrazení z intervalu  $(0; +\infty)$  do  $\mathbb{R}$ ).

Zvláštní pozornost zasluhují zobrazení, týkající se *prázdné množiny*. Připomeňme, že prázdnou množinu značíme  $\emptyset$ .

- (1) Pro každou množinu  $B$  existuje *právě jedno* zobrazení  $f : \emptyset \rightarrow B$ . Opravdu: množina všech uspořádaných dvojic  $(a, b)$ , kde  $a \in \emptyset$  a  $b \in B$  je *prázdná* a navíc splňuje podmínku:

Pro každé  $a \in \emptyset$  existuje *právě jedno*  $b \in B$  takové, že  $(a, b) \in \emptyset$ .

To znamená, že  $\emptyset$  je jediné zobrazení z  $\emptyset$  do  $B$ .

- (2) Je-li  $A$  neprázdná množina, potom *neexistuje* zobrazení z  $A$  do  $\emptyset$ . Opravdu: množina všech uspořádaných dvojic  $(a, b)$ , kde  $a \in A$  a  $b \in \emptyset$  je *prázdná*. Jediným kandidátem na  $f : A \rightarrow \emptyset$  je tedy prázdná množina. Ta ale podmínku

Pro každé  $a \in A$  existuje *právě jedno*  $b \in \emptyset$  takové, že  $(a, b) \in \emptyset$ .

nesplňuje.

Důležité: všimněme si dvou *různých* typů šipek:

- (1) Šipkou tvaru  $\rightarrow$  zapisujeme zobrazení.
- (2) Šipkou tvaru  $\mapsto$  zapisujeme funkční hodnoty.

Poslední poznámka: často se říká *funkce* místo zobrazení. To jest, slova *zobrazení* a *funkce* znamenají totéž.



**1.1.7 Poznámka** (*n*-tice reálných čísel jakožto zobrazení z množiny  $n$  do množiny  $\mathbb{R}$ ) Je zřejmé, že bychom všechny *n*-tice

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^n$  mohli přeindexovat a psát

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Pokud bychom (zatím z nejasných důvodů) na takovém přeindexování trvali, mělo by velký sjednocující efekt.

Důvodem je takzvaný *ordinální zápis přirozeného čísla*, známý z teorie množin. Přesněji: v teorii množin je přirozené číslo 0 *definováno* jako  $\emptyset$  (tj. číslo nula je prázdná množina) a přirozené číslo  $n+1$  je *definováno* jako množina  $n \cup \{n\}$ . Pojdme projít tvar několika prvních přirozených čísel:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= 0 + 1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} \\ 2 &= 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \\ 3 &= 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} \\ 4 &= 3 + 1 = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Obecně lze ukázat, že pro  $n \geq 1$  platí

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

a této skutečnosti bychom dále mohli podstatně využívat následujícím způsobem:

Pro množiny  $A$  a  $B$  totiž jako  $B^A$  značíme množinu všech zobrazení z množiny  $A$  do množiny  $B$ . Jedno takové zobrazení  $f : A \rightarrow B$  je zadáno hodnotami  $f(a) \in B$  pro každé  $a \in A$ .

Značení  $\mathbb{R}^n$  by potom bylo zcela consistentní s výše uvedeným značením pro množinu všech zobrazení z jedné množiny do druhé. Množina  $\mathbb{R}^n$  je tedy množina všech zobrazení z množiny  $n$  do množiny  $\mathbb{R}$ . Jedno takové zobrazení  $\mathbf{x} : n \rightarrow \mathbb{R}$  je zadáno hodnotami  $\mathbf{x}(i) = x_i \in \mathbb{R}$  pro každé  $i \in n$ . Protože množina  $n$  má jako prvky čísla  $0, 1, \dots, n-1$ , dostáváme pro  $\mathbf{x}$  popis

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Kdykoli to budeme potřebovat, budeme říkat, že množina  $\mathbb{R}^n$  je množina všech zobrazení z  $n$  do  $\mathbb{R}$ . Přesto budeme prvky  $\mathbb{R}^n$  běžně indexovat obvyklým způsobem, tj. od 1 do  $n$ , ve shodě se značením Příkladu 1.1.5.

O ordinálních číslech v teorii množin se lze dočíst například v knihách

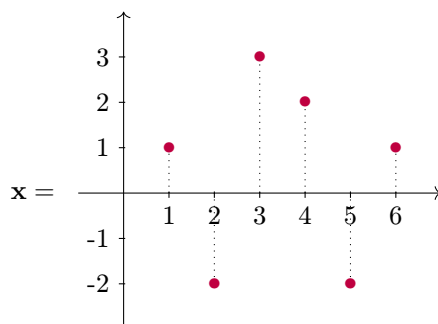
☞ Bohuslav Balcar a Petr Štěpánek, *Teorie množin* (2. vydání), Academia, Praha, 2005

☞ Thomas Jech, *Set theory* (3. vydání), Springer Monographs in Mathematics, 2006

**1.1.8 Příklad (Prostor  $\mathbb{R}^n$  jako prostor „diskrétních signálů“)** Vektory z prostoru  $\mathbb{R}^n$   $n$ -tic reálných čísel z Příkladu 1.1.5 si můžeme představit jako „diskrétní signály“, snímané „v časech“ 1 až  $n$ . Uvedeme příklad pro  $n = 6$ : typický vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

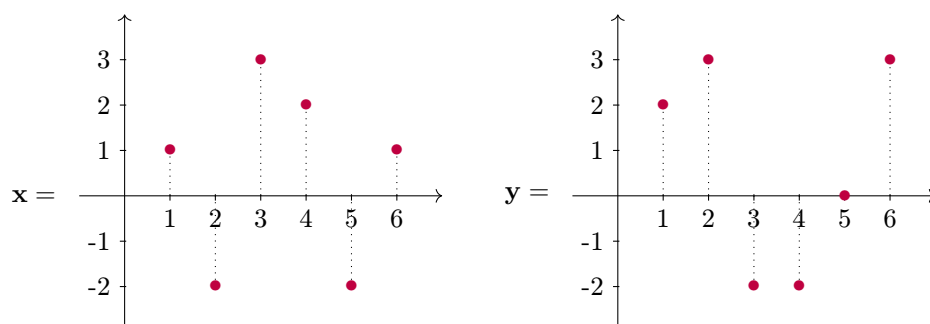
z prostoru  $\mathbb{R}^6$  lze znázornit takto:



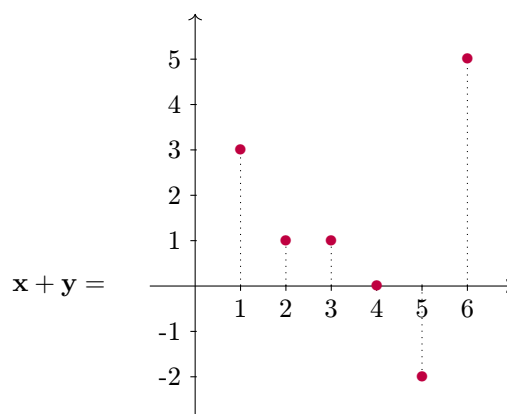
tj. jakožto „digitální“ signál, měřený v časech 1, ..., 6.

Taková interpretace dovoluje nahlížet na operace lineárního prostoru následovně:

(1) Sčítání vektorů: pro

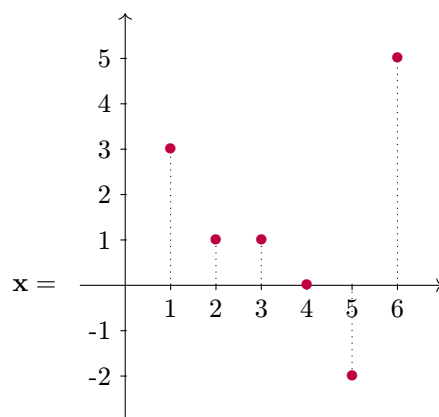


je

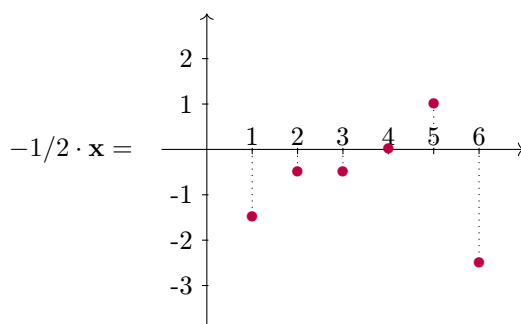


To znamená: signál  $x + y$  má v čase  $t$  „intenzitu“ rovnou součtu „intezit“ signálů  $x$  a  $y$  v čase  $t$ .

(2) Násobení vektoru skalárem: pro skalár  $-1/2$  a vektor



je



To znamená: skalár  $-1/2$  působí jako „zesilovací faktor“: signál  $x$  se „zesílí“  $(-1/2)$ -krát.

Podobně lze uvažovat o lineárních prostorech  $\mathbb{R}^n$  pro libovolné  $n$ . Více se o diskrétních signálech lze dočíst v Dodatku D.

**1.1.9 Příklad (Prostor reálných posloupností)** Označme jako  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  množinu všech funkcí z  $\mathbb{N}$  do  $\mathbb{R}$ . Každou funkci  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  můžeme považovat za posloupnost  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Proto budeme množině  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  také říkat množina reálných posloupností.

Na množině  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  zavedeme operace sčítání a násobení prvkem z  $\mathbb{R}$  takto:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad a \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Je jednoduché ukázat, že výše definované operace sčítání  $n$ -tic a násobení  $n$ -tic reálným skalárem definují na množině  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  strukturu lineárního prostoru nad  $\mathbb{R}$ . Všechny axiomy pro lineární prostor totiž „platí po složkách“.

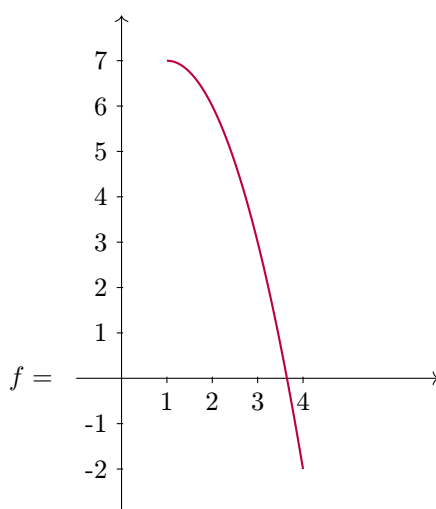
**1.1.10 Příklad (Prostor reálných spojitých funkcí)** Označme jako  $C([c, d]; \mathbb{R})$  množinu všech funkcí z uzavřeného intervalu  $[c, d]$  do  $\mathbb{R}$ , které jsou *spojité*.<sup>2</sup> Ukážeme, že spojitě funkce lze navzájem sčítat, a že každou spojitou funkci lze vynásobit reálným číslem.

- (1) Sčítání spojitých funkcí. Jsou-li  $f$  a  $g$  funkce, spojitě na intervalu  $[c, d]$ , je i funkce  $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$  spojitá funkce na intervalu  $[c, d]$ .
- (2) Násobení spojitě funkce reálným číslem. Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $[c, d]$  a je-li  $a$  reálné číslo, potom funkce  $a \cdot f : x \mapsto a \cdot f(x)$  je spojitá na intervalu  $[c, d]$ .

Nyní je snadné ukázat, že výše definované operace na množině  $C([c, d]; \mathbb{R})$  dávají strukturu lineárního prostoru nad  $\mathbb{R}$ . Všechny axiomy totiž „platí bod po bodu“.

Podobně jako v Příkladu 1.1.8 lze dát vektorům z prostoru  $C([c, d]; \mathbb{R})$  „fyzikální“ interpretaci, tentokrát jako „spojitým signálům“, měřených v časovém intervalu  $[c, d]$ .

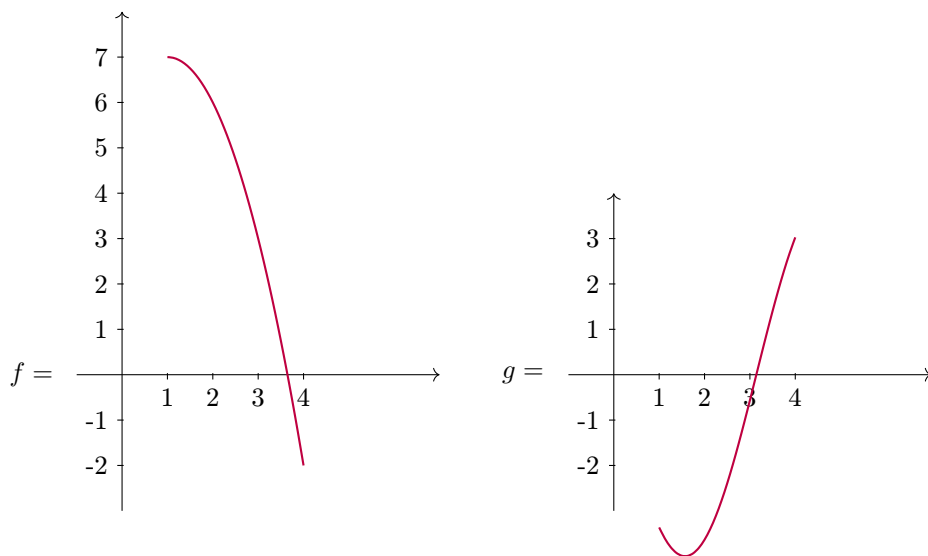
Pro ilustraci zvolme  $[c, d] = [1; 4]$ . Potom funkce  $f(x) = -x^2 + 2x + 6$  jakožto vektor z prostoru  $C([1, 4]; \mathbb{R})$  je „signál“



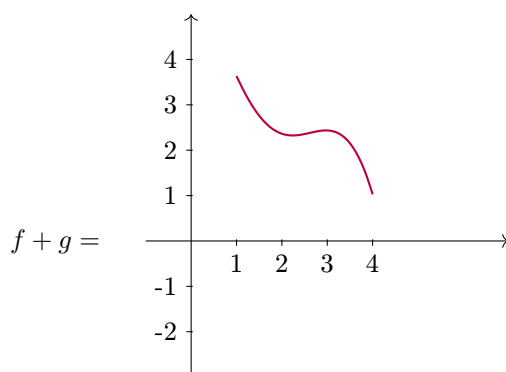
Sčítání takových „signálů“ je definováno jako sčítání hodnot „intensit“ v jednotlivých časech. Například pro

<sup>2</sup>Tím myslíme: spojitost v každém vnitřním bodě intervalu  $[c, d]$  a spojitost zprava v bodě  $c$  a spojitost zleva v bodě  $d$ .

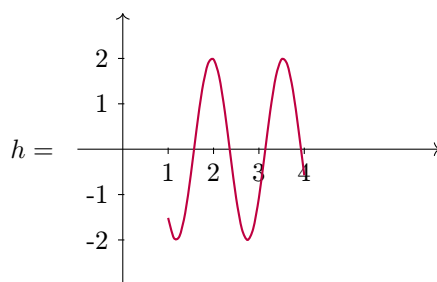
$f(x) = -x^2 + 2x + 6$  a  $g(x) = -4 \cdot \sin x$ , tj. pro „signály“



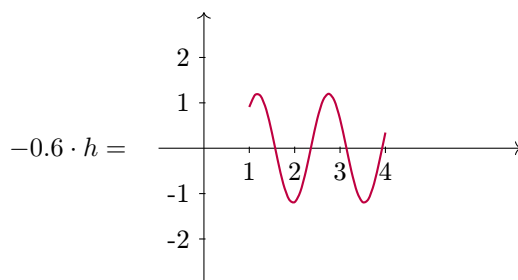
je



Analogicky, pro skalár  $-0.6$  a „signál“  $h(x) = 2 \cdot \sin(4x)$



je  $-0.6 \cdot h$  „signál“



**1.1.11 Příklad (Exotický lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ )** Ať  $L$  je otevřený interval  $(0, +\infty)$ . Definujeme dvě operace

$$\oplus : L \times L \longrightarrow L \quad \odot : \mathbb{R} \times L \longrightarrow L$$

následujícím způsobem:  $x \oplus y := x \cdot y$  (tj.  $\oplus$  je obyčejné násobení kladných reálných čísel) a  $a \odot x = x^a$  (tj.  $\odot$  je umocňování kladného reálného čísla na reálné číslo).

Je snadné ověřit, že takto definované „sčítání vektorů“ a „násobení skalárem“ vytváří na  $(0, +\infty)$  strukturu lineárního prostoru nad  $\mathbb{R}$ .

Ne vždy, když zadáme „sčítání a násobení“ reálným číslem, dostaneme strukturu lineárního prostoru nad  $\mathbb{R}$ . Příkladem je následující.

**1.1.12 Příklad (Struktura, která není lineární prostor)** Na množině  $L$  všech dvojic reálných čísel definujeme dvě operace

$$\oplus : L \times L \longrightarrow L \quad \odot : \mathbb{R} \times L \longrightarrow L$$

následujícím způsobem:  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix}$  a  $a \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$ .

Protože  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ , neplatí pro operaci  $\oplus$  komutativní zákon. Tudíž  $\oplus$  nemůže být sčítáním vektorů.

## 1.2 Lineární prostory nad obecným tělesem $\mathbb{F}$

Pojďme si uvědomit, že definici lineárního prostoru nad  $\mathbb{R}$  lze zobecnit. Zobecnění bude spočívat v tom, že dovolíme vektory v lineárním prostoru „natahovat“ obecnými skaláry. To jediné, co od skalárů potřebujeme, je totiž následující:

- (1) Skaláry musíme umět *sčítat*. Pak můžeme požadovat například rovnost  $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ .
- (2) Skaláry mezi sebou musíme umět *násobit*. Pak můžeme požadovat rovnost  $(a \cdot b) \cdot \vec{x} = a \cdot (b \cdot \vec{x})$ .

Samozřejmě: sčítání a násobení skalárů musí spolu „dobře souviset“. Dále očekáváme, že jak sčítání skalárů, tak násobení skalárů splňuje jisté axiomy.

Tou správnou strukturou, kterou skaláry mají tvořit, je pojem v matematice známý jako *těleso*. Přesná definice je následující.

**1.2.1 Definice (Těleso)** *Těleso* je zadáno množinou  $\mathbb{F}$  (typickému prvku v  $\mathbb{F}$  říkáme *skalár* a značíme jej  $a$ ) a dvěma funkcemi  $\cdot$  a  $+$  typu

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \quad (\text{čteme: sčítání skalárů}), \quad \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \quad (\text{čteme: násobení skalárů}),$$

které navíc splňují následující axiomy:

- (1) Axiomy pro sčítání skalárů.
  - (a) Existence nulového skaláru. Existuje skalár  $0$  takový, že pro všechna  $a$  platí  $a + 0 = 0 + a = a$ . Skaláru  $0$  říkáme *nula*.
  - (b) Komutativita sčítání skalárů. Pro všechna  $a, b$  platí  $a + b = b + a$ .
  - (c) Asociativita sčítání skalárů. Pro všechna  $a, b, c$  platí  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .
  - (d) Existence opačného skaláru. Pro každé  $a$  existuje právě jedno  $b$  takové, že platí  $a + b = b + a = 0$ . Tomuto jednoznačně určenému  $b$  říkáme *opačný skalár* ke skaláru  $a$  a značíme jej  $-a$ .
- (2) Axiomy pro násobení skalárů.
  - (a) Existence jedničky. Existuje skalár  $1$  takový, že pro každé  $a$  platí  $1 \cdot a = a$ . Skaláru  $1$  říkáme *jednička*.
  - (b) Komutativita násobení skalárů. Pro všechna  $a, b$  platí  $a \cdot b = b \cdot a$ .
  - (c) Asociativita násobení skalárů. Pro všechna  $a, b, c$  platí  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .

- (3) Distributivní zákon. Pro všechna  $a, b, c$  platí  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .
- (4) Test invertibility. Pro každé  $a$  platí  $a \neq 0$  právě tehdy, když existuje jediné  $a^{-1}$  tak, že  $a \cdot a^{-1} = 1$ . Tomuto jednoznačně určenému  $a^{-1}$  říkáme *inversní prvek k a* (také: *inverse prvku a*).

Definice tělesa je poměrně komplikovaná. Následující slogany by mohly pomoci:

- (1) Těleso je množina prvků, které umíme vzájemně sčítat a násobit. Jak sčítání, tak násobení v tělese musí splňovat „pěkné“ vlastnosti (tyto vlastnosti jsou obvyklé vlastnosti sčítání a násobení například celých čísel). Obě operace spolu dále musí „pěkně“ souviset (to zajišťuje možnost roznásobení závorek, tomu říkáme *distributivní zákony*).
- (2) I když v tělese bezprostředně o dělení nemluvíme, máme možnost pro každý *nenulový* prvek vytvořit jeho „převrácenou hodnotu“ (této hodnotě říkáme *inverse*).

Poznamenejme, že například množina celých čísel  $\mathbb{Z}$  spolu s obvyklými operacemi sčítání a násobení *netvoří* těleso. Důvod: v  $\mathbb{Z}$  obecně neplatí test invertibility. Například pro  $a = 2$  platí:  $a \neq 0$ , ale  $a^{-1}$  v  $\mathbb{Z}$  neexistuje. Podobná situace nastává, pracujeme-li se zbytky po dělení pevným přirozeným číslem.

**1.2.2 Tvzení** Ať  $\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, \dots, [m-1]_m\}$  označuje množinu zbytků po dělení přirozeným číslem  $m \geq 2$ . Definujme na množině  $\mathbb{Z}_m$  operace  $\oplus_m$  a  $\odot_m$  následovně:

$$\begin{aligned} [a]_m \oplus_m [b]_m &= \text{zbytek po dělení čísla } a + b \text{ číslem } m \\ [a]_m \odot_m [b]_m &= \text{zbytek po dělení čísla } a \cdot b \text{ číslem } m \end{aligned}$$

Potom platí:

- (1) Množina  $\mathbb{Z}_m$  spolu s operacemi  $\oplus_m$  a  $\odot_m$  splňuje všechny axiomy Definice 1.2.1, kromě testu invertibility.
- (2) Množina  $\mathbb{Z}_m$  spolu s operacemi  $\oplus_m$  a  $\odot_m$  splňuje všechny axiomy Definice 1.2.1 (i s testem invertibility) právě tehdy, když  $m$  je prvočíslo.

DŮKAZ. Je snadné nahlédnout, že operace  $\oplus_m$  a  $\odot_m$  na množině  $\mathbb{Z}_m$  splňují všechny axiomy Definice 1.2.1, kromě testu invertibility. Test invertibility není splněn například v množině  $\mathbb{Z}_6$ : platí  $[3]_6 \neq [0]_6$ , ale  $[3]_6^{-1}$  neexistuje. Platí totiž

$$[3]_6 \odot_m [0]_6 = [0]_6, [3]_6 \odot_m [1]_6 = [3]_6, [3]_6 \odot_m [2]_6 = [0]_6, [3]_6 \odot_m [3]_6 = [3]_6, [3]_6 \odot_m [4]_6 = [0]_6, [3]_6 \odot_m [5]_6 = [3]_6$$

Tím je dokázána podmínka (1).

Abychom dokázali podmínku (2), předpokládejme nejprve, že  $m$  je složené číslo. Potom v  $\mathbb{Z}$  platí  $m = a \cdot b$  pro nějaká  $a > 1, b > 1$ . Tudiž v  $\mathbb{Z}_m$  platí  $[0]_m = [a \cdot b]_m = [a]_m \odot [b]_m$ , a proto ani jeden z nenulových prvků  $[a]_m, [b]_m$  nemá v  $\mathbb{Z}_m$  inverzi.

Předpokládejme, že  $m$  je prvočíslo. Indukcí ukážeme, že každý prvek  $[a]_m$  z množiny  $\{[1]_m, \dots, [m-1]_m\}$  má v  $\mathbb{Z}_m$  inverzi.

- (i) Je-li  $[a]_m = [1]_m$ , pak  $[a]_m^{-1} = [1]_m$ .
- (ii) Ať  $a$  splňuje  $1 < a \leq m-1$  a ať pro všechna  $a' < a$  platí, že  $[a']_m^{-1}$  existuje. Vyděleme se zbytkem: platí  $m = q \cdot a + a'$  v  $\mathbb{Z}$ , kde  $a' < a$ . Proto v  $\mathbb{Z}_m$  platí  $[0]_m = [m]_m = [q \cdot a]_m + [a']_m$ , neboli  $[a']_m = -[q \cdot a]_m$ . Z toho plyne, že  $[1]_m = -[a']_m^{-1} \odot [q]_m \odot [a]_m$ . A proto platí  $[a]_m^{-1} = -[a']_m^{-1} \odot [q]_m$ .

■

**1.2.3 Poznámka** Tělesa tvaru  $\mathbb{Z}_p$ , kde  $p$  je prvočíslo, jsou velmi důležitá (například) v teorii kódů a v kryptografii. Je proto užitečné mít *efektivní* algoritmus pro výpočet inverse v  $\mathbb{Z}_p$ . Takové algoritmy existují, viz například

☞ N. Koblitz, *A course in number theory and cryptography*, Springer-Verlag, New York, 1994.



☞ J. Velebil, *Diskrétní matematika*, Praha, 2007

a jsou jiné, než rekursivní algoritmus z důkazu Tvzení 1.2.2.

**1.2.4 Příklad (Příklady těles)** Následující příklady těles nevyčerpávají celou zásobárnu těles. V našich počátečních úvahách však komplikovanější tělesa než zde uvedená nebudeme potřebovat.

- (1) Množiny reálných čísel  $\mathbb{R}$ , racionálních čísel  $\mathbb{Q}$ , komplexních čísel  $\mathbb{C}$  jsou tělesa. Ve všech těchto příkladech jsou sčítání a násobení obvyklé operace známé z elementární aritmetiky.
- (2) Označme jako  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  množinu výrazů tvaru  $a + b\sqrt{2}$ , kde  $a$  a  $b$  jsou racionální čísla. (Poznamenejme, že  $\sqrt{2}$  racionální číslo *není*.)

Na množině  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  definujeme sčítání  $\oplus$  a násobení  $\odot$  následovně:

$$(a + b\sqrt{2}) \oplus (c + d\sqrt{2}) := (a + c) + (b + d)\sqrt{2}, \quad (a + b\sqrt{2}) \odot (c + d\sqrt{2}) := (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$$

Je snadné ukázat, že  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  spolu s operacemi  $\oplus$  a  $\odot$  tvoří těleso.<sup>3</sup>

- (3) Zajímavými (a velmi důležitými) příklady těles jsou tělesa tvaru  $\mathbb{Z}_p$ , kde  $p$  je pevné prvočíslo. Přesněji:  $\mathbb{Z}_p$  je množina prvků tvaru  $[0]_p, [1]_p, \dots, [p-1]_p$ , kde s jednotlivými prvky zacházíme jako se zbytky po dělení číslem  $p$ , viz Tvzení 1.2.2.

Například  $\mathbb{Z}_7$  obsahuje sedm prvků  $[0]_7, [1]_7, [2]_7, [3]_7, [4]_7, [5]_7, [6]_7$ . Operace sčítání a násobení jsou definovány následujícími tabulkami:

| $\oplus_7$ | $[0]_7$ | $[1]_7$ | $[2]_7$ | $[3]_7$ | $[4]_7$ | $[5]_7$ | $[6]_7$ |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $[0]_7$    | $[0]_7$ | $[1]_7$ | $[2]_7$ | $[3]_7$ | $[4]_7$ | $[5]_7$ | $[6]_7$ |
| $[1]_7$    | $[1]_7$ | $[2]_7$ | $[3]_7$ | $[4]_7$ | $[5]_7$ | $[6]_7$ | $[0]_7$ |
| $[2]_7$    | $[2]_7$ | $[3]_7$ | $[4]_7$ | $[5]_7$ | $[6]_7$ | $[0]_7$ | $[1]_7$ |
| $[3]_7$    | $[3]_7$ | $[4]_7$ | $[5]_7$ | $[6]_7$ | $[0]_7$ | $[1]_7$ | $[2]_7$ |
| $[4]_7$    | $[4]_7$ | $[5]_7$ | $[6]_7$ | $[0]_7$ | $[1]_7$ | $[2]_7$ | $[3]_7$ |
| $[5]_7$    | $[5]_7$ | $[6]_7$ | $[0]_7$ | $[1]_7$ | $[2]_7$ | $[3]_7$ | $[4]_7$ |
| $[6]_7$    | $[6]_7$ | $[0]_7$ | $[1]_7$ | $[2]_7$ | $[3]_7$ | $[4]_7$ | $[5]_7$ |

| $\odot_7$ | $[0]_7$ | $[1]_7$ | $[2]_7$ | $[3]_7$ | $[4]_7$ | $[5]_7$ | $[6]_7$ |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $[0]_7$   | $[0]_7$ | $[0]_7$ | $[0]_7$ | $[0]_7$ | $[0]_7$ | $[0]_7$ | $[0]_7$ |
| $[1]_7$   | $[0]_7$ | $[1]_7$ | $[2]_7$ | $[3]_7$ | $[4]_7$ | $[5]_7$ | $[6]_7$ |
| $[2]_7$   | $[0]_7$ | $[2]_7$ | $[4]_7$ | $[6]_7$ | $[1]_7$ | $[3]_7$ | $[5]_7$ |
| $[3]_7$   | $[0]_7$ | $[3]_7$ | $[6]_7$ | $[2]_7$ | $[5]_7$ | $[1]_7$ | $[4]_7$ |
| $[4]_7$   | $[0]_7$ | $[4]_7$ | $[1]_7$ | $[5]_7$ | $[2]_7$ | $[6]_7$ | $[3]_7$ |
| $[5]_7$   | $[0]_7$ | $[5]_7$ | $[3]_7$ | $[1]_7$ | $[6]_7$ | $[4]_7$ | $[2]_7$ |
| $[6]_7$   | $[0]_7$ | $[6]_7$ | $[5]_7$ | $[4]_7$ | $[3]_7$ | $[2]_7$ | $[1]_7$ |

Podějme návod na sčítání: máme-li sečíst  $[4]_7$  a  $[5]_7$ , sečteme  $4 + 5 = 9$  a spočteme zbytek po dělení 7, tj. 2. Tudíž  $[4]_7 \oplus [5]_7 = [2]_7$ . Podobně se násobí: máme-li vynásobit  $[3]_7$  a  $[5]_7$ , vynásobíme  $3 \cdot 5 = 15$  a spočteme zbytek po dělení 7, tj. 1. Tudíž  $[3]_7 \odot [5]_7 = [1]_7$ .

Z tabulek operací poměrně snadné ověřit, že  $\mathbb{Z}_7$  s operacemi  $\oplus_7$  a  $\odot_7$  tvoří těleso. Podívejme se na inverse nenulových prvků:  $[1]_7^{-1} = [1]_7$ ,  $[2]_7^{-1} = [4]_7$ ,  $[3]_7^{-1} = [5]_7$ ,  $[4]_7^{-1} = [2]_7$ ,  $[5]_7^{-1} = [3]_7$  a  $[6]_7^{-1} = [6]_7$ .

Často se značení v  $\mathbb{Z}_p$  relaxuje, a tak i my budeme psát  $3 \cdot 5 = 1$  v  $\mathbb{Z}_7$ , místo zdouhavého  $[3]_7 \odot [5]_7 = [1]_7$ .

- (4) V aplikacích (lineární kódy, a podobně) se velmi často používá těleso  $\mathbb{Z}_2$ . V relaxovaném zápisu obsahuje  $\mathbb{Z}_2$  prvky 0 a 1, a operace sčítání a násobení jsou zadány následujícími tabulkami:

| $+$ | 0 | 1 |
|-----|---|---|
| 0   | 0 | 1 |
| 1   | 1 | 0 |

| $\cdot$ | 0 | 1 |
|---------|---|---|
| 0       | 0 | 0 |
| 1       | 0 | 1 |

- (5) A řada dalších příkladů...

Trochu více o tělesech řekneme v podkapitole 1.3.

**1.2.5 Definice (Lineární prostor nad obecným tělesem)** Lineární prostor nad tělesem  $\mathbb{F}$  je trojice  $(L, +, \cdot)$ , kde  $L$  je množina (typickému prvku v  $L$  říkáme *vektor* a značíme jej  $\vec{x}$ ),  $+$  a  $\cdot$  jsou funkce typu

$$+ : L \times L \longrightarrow L \quad (\text{čteme: sčítání vektorů}), \quad \cdot : \mathbb{F} \times L \longrightarrow L \quad (\text{čteme: násobení vektoru skalárem z } \mathbb{F}),$$

kteří navíc splňují následující axiomy:

<sup>3</sup>Podobně lze definovat  $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$  pro libovolné přirozené číslo. Tělesa tvaru  $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ , kde  $\sqrt{n}$  není racionální, hrají velkou roli při dokazování neexistence některých geometrických konstrukcí (například nemožnost trisekce úhlu kružítkem a pravítkem). Více například v knize C. R. Haddock, *Field theory and its classical problems*, Mathematical Association of America, 1978.

(1) Axiomy pro sčítání vektorů.

- (a) Existence nulového vektoru. Existuje  $\vec{o}$  takový, že pro všechna  $\vec{x}$  platí  $\vec{x} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ . Vektoru  $\vec{o}$  říkáme *nulový vektor*.
- (b) Komutativita sčítání vektorů. Pro všechna  $\vec{x}, \vec{y}$  platí  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ .
- (c) Asociativita sčítání vektorů. Pro všechna  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  platí  $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ .
- (d) Existence opačného vektoru. Pro každé  $\vec{x}$  existuje právě jedno  $\vec{y}$  takové, že platí  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} = \vec{o}$ . Tomuto  $\vec{y}$  říkáme *opačný vektor* k vektoru  $\vec{x}$  a značíme jej  $-\vec{x}$ .

(2) Axiomy pro násobení vektoru skalárem z  $\mathbb{F}$ .

- (a) Neutralita násobení jedničkou. Pro každé  $\vec{x}$  platí  $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ .
- (b) Asociativita násobení skalárem. Pro všechna  $\alpha, \beta$  v  $\mathbb{F}$  a všechna  $\vec{x}$  platí  $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x}$ .

(3) Distributivní zákony.

- (a) Distributivita sčítání vektorů. Pro všechna  $\alpha$  v  $\mathbb{F}$  a všechna  $\vec{x}, \vec{y}$  platí  $\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$ .
- (b) Distributivita sčítání skalárů. Pro všechna  $\alpha, \beta$  v  $\mathbb{F}$  a všechna  $\vec{x}$  platí  $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$ .

**1.2.6 Poznámka** Porovnejte Definice 1.1.2 a 1.2.5. Jediné, čím se obě definice liší je poznámka, odkud bereme skaláry. V Definici 1.2.5 bereme skaláry z obecného tělesa  $\mathbb{F}$ .

Nyní uvedeme několik příkladů lineárních prostorů nad obecným tělesem  $\mathbb{F}$ .

**1.2.7 Příklad** Množina reálných čísel  $\mathbb{R}$  je lineární prostor nad tělesem *racionálních* čísel  $\mathbb{Q}$ . Všechny axiomy lineárního prostoru se snadno ověří. K tomuto prostoru se vrátíme v Příkladu 3.6.5.

**1.2.8 Příklad (Prostor  $n$ -tic nad  $\mathbb{F}$ )** Ať  $\mathbb{F}$  je jakékoli těleso. Pro přirozené číslo  $n \geq 1$ , označíme jako  $\mathbb{F}^n$  množinu všech uspořádaných  $n$ -tic prvků z tělesa  $\mathbb{F}$ . Jednu takovou  $n$ -tici  $\mathbf{x}$  budeme psát do svislé tabulky, tj.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Na množině  $\mathbb{F}^n$  zavedeme operace sčítání a násobení prvkem z  $\mathbb{F}$  takto:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ a \cdot x_2 \\ \vdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Je jednoduché ukázat, že výše definované operace sčítání  $n$ -tic a násobení  $n$ -tic skalárem z tělesa  $\mathbb{F}$  definují na  $\mathbb{F}^n$  strukturu lineárního prostoru nad  $\mathbb{F}$ . Všechny axiomy pro lineární prostor totiž „platí po složkách“.

V dalším budeme dodržovat *konvenci*: vektory prostoru  $\mathbb{F}^n$  budeme typicky značit *tučně*, tj. například  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{o}$  (nulový vektor), a tak dále.

*Důležité*: vektory z  $\mathbb{F}^n$  budeme *vždy* psát do *sloupců*.

**1.2.9 Příklad (Prostor  $I$ -tic nad  $\mathbb{F}$ )** Ať  $I$  je jakákoli množina, ať  $\mathbb{F}$  je jakékoli těleso. Označme jako  $\mathbb{F}^I$  množinu všech funkcí  $v : I \rightarrow \mathbb{F}$ . Ukážeme, že tyto funkce lze navzájem sčítat a každou takovou funkci lze násobit prvkem  $\mathbb{F}$ .

- (1) Sčítání  $I$ -tic. Pro funkce  $u : I \rightarrow \mathbb{F}$  a  $v : I \rightarrow \mathbb{F}$  definujeme  $u + v : I \rightarrow \mathbb{F}$  jako funkci, která v bodě  $i \in I$  má hodnotu  $u(i) + v(i)$ .

- (2) Násobení  $I$ -tice prvkem z  $\mathbb{F}$ . Pro funkci  $u : I \rightarrow \mathbb{F}$  a prvek  $a$  v  $\mathbb{F}$  definujeme  $a \cdot u : I \rightarrow \mathbb{F}$  jako funkci, která v bodě  $i \in I$  má hodnotu  $a \cdot u(i)$ .

Je snadné ukázat, že  $\mathbb{F}^I$  s výše definovanými operacemi je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ .

Povšimněme si dvou speciálních případů prostoru  $I$ -tic:

- (1) Pro libovolné přirozené číslo  $n \geq 1$  a množinu  $I = n = \{0, \dots, n-1\}$  je lineární prostor  $\mathbb{F}^I$  *totožný* s lineárním prostorem  $\mathbb{F}^n$  všech  $n$ -tic z příkladu 1.2.8. Funkci  $u : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \mathbb{F}$  totiž můžeme ztotožnit (po přeindexování) s  $n$ -ticí

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

- (2) Pro  $I = \emptyset$  máme jedinou funkci  $v : I \rightarrow \mathbb{F}$  (sice prázdnou). Lineární prostor  $\mathbb{F}^\emptyset$  tedy obsahuje jediný vektor. Tento vektor je nutně nulovým vektorem. Tudíž  $\mathbb{F}^\emptyset = \mathbb{F}^0 = \{\vec{0}\}$ .

**1.2.10 Příklad (Prostor polynomů nad  $\mathbb{F}$ )** Polynom  $p(x)$  v neurčité  $x$  nad tělesem  $\mathbb{F}$  je buď výraz 0 nebo výraz  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , kde  $n \geq 0$  je přirozené číslo a každé  $a_i$  je prvek tělesa  $\mathbb{F}$ ,  $a_n \neq 0$ . Číslo  $n$  říkáme *stupeň* polynomu  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Stupeň polynomu 0 definujeme jako symbol  $-\infty$ .

Množinu všech polynomů nad  $\mathbb{F}$  v neurčité  $x$  označíme  $\mathbb{F}[x]$ . Ukážeme, že polynomy lze sčítat a že každý polynom lze vynásobit prvkem tělesa  $\mathbb{F}$ .

- (1) Sčítání polynomů.

Ať pro polynomy  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$   $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$  platí  $n \geq m$ . Polynom  $p(x) + q(x)$  bude mít stupeň  $n$  a u jednotlivých mocnin bude mít jako koeficient součet koeficientů polynomů  $p(x)$  a  $q(x)$ . (Například: součet polynomů  $2x^3 - 7x + 5$  a  $x + 4$  v  $\mathbb{R}[x]$  je polynom  $2x^3 - 6x + 9$ .)

Dále definujeme  $p(x) + q(x) = p(x)$ , jakmile  $q(x) = 0$ .

- (2) Násobení polynomu skalárem z  $\mathbb{F}$ .

Pro  $p(x) = 0$  definujeme  $a \cdot p(x) = 0$  a pro  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  definujeme  $a \cdot p(x) = aa_n x^n + aa_{n-1} x^{n-1} + \dots + aa_1 x + aa_0$ .

Je snadné ukázat, že výše uvedené operace definují na množině  $\mathbb{F}[x]$  strukturu lineárního prostoru nad  $\mathbb{F}$ . Polynomům se budeme podrobně věnovat v podkapitole 10.2.

**1.2.11 Příklad (Polynomy nejvýše  $n$ -tého stupně)** Označme jako  $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$  množinu polynomů nad  $\mathbb{F}$  v neurčité  $x$ , které mají stupeň nejvýše  $n$ . Tato množina, spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu skalárem (viz Příklad 1.2.10), tvoří lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ . To je snadné, protože jak sčítání polynomů, tak násobení polynomu skalárem, nezvyšují stupeň polynomu.



**1.2.12 Poznámka (Konečné množiny)** V dalším budeme velmi často pracovat s konečnými množinami. Pro definici konečnosti využijeme popis přirozených čísel z Poznámky 1.1.7.

Množina  $M$  je *konečná*, pokud existuje přirozené číslo  $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$  a bijektivní zobrazení  $b : n \rightarrow M$ . Bijektivita zobrazení  $b$  znamená dvě následující podmínky.

- (1) Zobrazení  $b$  je injektivní (prosté): jestliže  $b(i) = b(j)$ , potom  $i = j$ .  
 (2) Zobrazení  $b$  je surjektivní (na): pro každé  $m \in M$  existuje  $i \in n$  tak, že  $b(i) = m$ .

Řečeno lapidárně: zobrazení  $b$  indexuje všechny prvky množiny  $M$ . Zobrazení  $b$  žádný prvek množiny  $M$  „nevynechá“ (tj. zobrazení  $b$  je surjektivní) a žádný prvek množiny  $M$  „nepočítá dvakrát“ (tj. zobrazení  $b$  je injektivní). Množinu  $M$  tedy můžeme zapsat výčtem takto  $M = \{m_0, \dots, m_{n-1}\}$ . To znamená, že množina  $M$  je buď prázdná (pokud  $n = 0$ ), nebo má přesně  $n$  prvků (v případě  $n \geq 1$ ).

Následující příklad lineárního prostoru bude hrát důležitou roli při studiu lineárních prostorů nekonečné dimenze, viz podkapitolu 3.6.

**1.2.13 Příklad (Prostor  $I$ -souřadnic nad  $\mathbb{F}$ )** Ať  $I$  je jakákoli množina, ať  $\mathbb{F}$  je jakékoli těleso. Funkci  $v : I \rightarrow \mathbb{F}$  takovou, že  $\{i \mid v(i) \neq 0\}$  je konečná množina, nazveme  *$I$ -souřadnice*.

Ukážeme, že  $I$ -souřadnice lze navzájem sčítat, a že každou  $I$ -souřadnici lze vynásobit prvkem  $\mathbb{F}$ .

- (1) Sčítání  $I$ -souřadnic. Ať  $v$  a  $w$  jsou  $I$ -souřadnice. Potom platí

$$\{i \mid v(i) + w(i) \neq 0\} \subseteq \{i \mid v(i) \neq 0\} \cup \{i \mid w(i) \neq 0\}$$

Opravdu: je-li  $i_0 \in I$  takové, že  $v(i_0) + w(i_0) \neq 0$ , potom musí platit alespoň jedna z nerovností  $v(i_0) \neq 0$ ,  $w(i_0) \neq 0$ .

Množina  $\{i \mid v(i) + w(i) \neq 0\}$  je tedy konečná (každá z množin  $\{i \mid v(i) \neq 0\}$ ,  $\{i \mid w(i) \neq 0\}$  je podle předpokladu konečná, tudíž je konečná i množina  $\{i \mid v(i) \neq 0\} \cup \{i \mid w(i) \neq 0\}$ , a tudíž je konečná i každá její podmnožina).

To nám umožňuje definovat novou  $I$ -souřadnici, kterou označíme  $v + w$ . Nová  $I$ -souřadnice  $v + w$  má v bodě  $i$  hodnotu  $v(i) + w(i)$ .

- (2) Násobení  $I$ -souřadnic skalárem. Ať  $v$  je  $I$ -souřadnice a ať  $a$  je v  $\mathbb{F}$ . Potom platí

$$\{i \mid a \cdot v(i) \neq 0\} \subseteq \{i \mid v(i) \neq 0\}$$

Opravdu: je-li  $i_0 \in I$  takové, že  $a \cdot v(i_0) \neq 0$ , potom musí platit  $v(i_0) \neq 0$ .

Množina  $\{i \mid a \cdot v(i) \neq 0\}$  je tedy konečná (je to podmnožina konečné množiny  $\{i \mid v(i) \neq 0\}$ ).

To nám umožňuje definovat novou  $I$ -souřadnici, kterou označíme  $a \cdot v$ . Nová  $I$ -souřadnice  $a \cdot v$  má v bodě  $i$  hodnotu  $a \cdot v(i)$ .

Je snadné ukázat, že takto definované sčítání a násobení skalárem zavádí na množině všech  $I$ -souřadnic strukturu lineárního prostoru.

Lineární prostor všech  $I$ -souřadnic označíme  $\mathbb{F}^{(I)}$ . V Důsledku 3.6.6 uvidíme, že lineární prostory  $I$ -souřadnic hrají v lineární algebře zcela zásadní roli.

**1.2.14 Příklad ( $n$ -souřadnice nad  $\mathbb{F}$  jsou přesně  $n$ -tice nad  $\mathbb{F}$ )** Ať  $n \geq 1$  je přirozené číslo. Lineární prostor  $\mathbb{F}^{(n)}$  všech  $n$ -souřadnic je *totožný* s prostorem  $\mathbb{F}^n$  všech  $n$ -tic z Příkladu 1.2.9. Pro libovolné  $u : n \rightarrow \mathbb{F}$  je množina  $\{i \mid u(i) \neq 0\}$  vždy konečná. To znamená, že každá  $n$ -tice je  $n$ -souřadnice, neboli platí  $\mathbb{F}^n \subseteq \mathbb{F}^{(n)}$ . Obrácená inkluze  $\mathbb{F}^{(n)} \subseteq \mathbb{F}^n$  platí z triviálních důvodů.

**1.2.15 Příklad (Součin lineárních prostorů)** Pro dva lineární prostory  $L_1$  a  $L_2$  nad stejným tělesem  $\mathbb{F}$  můžeme definovat nový lineární prostor

$$L_1 \times L_2 \quad (\text{čteme: součin prostorů } L_1 \text{ a } L_2)$$

tak, že definujeme operace po složkách pomocí operací z prostorů  $L_1$  a  $L_2$ . Pro lepší čitelnost budeme operace z prostorů  $L_1$  a  $L_2$  indexovat. Postupujeme takto:

- (1) Vektory v  $L_1 \times L_2$  jsou uspořádané dvojice  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ , kde  $\vec{v}_1$  je vektor z  $L_1$  a  $\vec{v}_2$  je vektor z  $L_2$ .  
 (2) Součet vektorů  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  a  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$  z  $L_1 \times L_2$  je definován takto:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + (\vec{w}_1, \vec{w}_2) = (\vec{v}_1 + \vec{w}_1, \vec{v}_2 + \vec{w}_2)$$

- (3) Násobek vektoru  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  z  $L_1 \times L_2$  skalárem  $a$  z  $\mathbb{F}$  je definován takto:

$$a \cdot (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (a \cdot_1 \vec{v}_1, a \cdot_2 \vec{v}_2)$$

Je snadné se přesvědčit, že  $L_1 \times L_2$  je opět lineární prostor.

Pozor! Netvrdíme, že (například)  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$  je totéž jako  $\mathbb{R}^5$ . Obecný vektor z  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$  má totiž tvar

$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

O součinu lineárních prostorů si povíme více v Příkladech 2.2.6 a 2.3.10.

**1.2.16 Poznámka** Dají se podmínky na množinu skalárů ještě více uvolnit? Existuje například „lineární algebra nad  $\mathbb{Z}$ “? Připomeňme, že  $\mathbb{Z}$  *není* těleso, protože v  $\mathbb{Z}$  existuje alespoň jeden nenulový prvek, který nemá inverzi vzhledem k násobení. Takovým prvkem je například číslo 2: neexistuje celé číslo  $a$  s vlastností  $2 \cdot a = 1$ .

Kromě testu invertibility z Definice 1.2.1 ale množina  $\mathbb{Z}$  spolu s operacemi  $+$  a  $\cdot$  splňuje všechny ostatní podmínky v Definici 1.2.1. Takové struktury se říká *komutativní okruh s jednotkou*.<sup>4</sup> Lineární algebru lze vybudovat nad komutativním okruhem s jednotkou. Výsledná *teorie modulů* ovšem musí řešit některé potíže způsobené neplatností testu invertibility. Více se lze dočíst například v knihách:

☞ William C. Brown, *Matrices over commutative rings*, Marcel Dekker, 1993

☞ Friedrich Kasch, *Moduln und Ringe*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1977

## 1.3 Jak se v tělese opravdu počítá?

Axiomy tělesa (Definice 1.2.1) a axiomy lineárního prostoru nad  $\mathbb{F}$  (Definice 1.2.5) popisují základní chování operací v tělese a lineárním prostoru. V této a následující podkapitole si odvodíme některé jednoduché důsledky těchto axiomů.

Lapidárně by šly následující výpočty shrnout sloganem: v tělese  $\mathbb{F}$  se „počítá stejně“ jako v tělese reálných čísel.

Protože je ale nutné k výpočtům používat axiomy tělesa, ukážeme si, jak základní výpočty probíhají. Abychom nepsali zbytečně složité výrazy, dohodneme se na několika konvencích:

- (1) Budeme předpokládat, že násobení váže silněji než sčítání. To jest, budeme psát  $a \cdot b + c$  místo  $(a \cdot b) + c$ , atd.
- (2) Díky asociativitě sčítání nebudeme sčítání závorkovat. To jest, budeme psát  $a + b + c$  místo  $(a + b) + c$  nebo  $a + (b + c)$ , atd.
- (3) Budeme psát  $a - b$  místo  $a + (-b)$ .
- (4) Díky asociativitě násobení nebudeme násobení závorkovat. To jest, budeme psát  $a \cdot b \cdot c$  místo  $(a \cdot b) \cdot c$  nebo  $a \cdot (b \cdot c)$ , atd.

I když slogan „tělesa jsou obecná reálná čísla“ je velmi přitažlivý, musíme být opatrní, pokud chceme mluvit o *uspořádání* prvků tělesa, viz Definici 1.3.6.

Začneme základními fakty o jedničce a nule v tělese: Definice 1.2.1 postuluje *existenci* nuly a jedničky, nikoli jejich jednoznačnost. Ukážeme, že nula i jednička jsou v tělese určeny opravdu jednoznačně a že jde vždy o *navzájem různé* prvky.

**1.3.1 Lemma** *V jakémkoli tělese jsou nula i jednička určeny jednoznačně.*

**DŮKAZ.** Předpokládejme, že  $0_1$  a  $0_2$  jsou dvě nuly v tělese  $\mathbb{F}$ . Potom platí  $0_1 = 0_1 + 0_2$  (protože  $0_2$  je nula v  $\mathbb{F}$ ) a  $0_1 + 0_2 = 0_2$  (protože  $0_1$  je nula v  $\mathbb{F}$ ). To znamená, že  $0_1 = 0_2$ .

Předpokládejme, že  $1_1$  a  $1_2$  jsou dvě jedničky v tělese  $\mathbb{F}$ . Potom platí  $1_1 = 1_1 \cdot 1_2$  (protože  $1_2$  je jednička v  $\mathbb{F}$ ) a  $1_1 \cdot 1_2 = 1_2$  (protože  $1_1$  je jednička v  $\mathbb{F}$ ). To znamená, že  $1_1 = 1_2$ . ■

Povšimněme si techniky důkazu Lemmatu 1.3.1: jakýkoli prvek, který si „hraje“ na nulu (nebo jedničku) musí být nula (nebo jednička).

Srovnejte se rčením: *If it looks like a duck, swims like a duck, and quacks like a duck, then it has to be a duck.*

**1.3.2 Lemma** *V jakémkoli tělese platí  $0 \neq 1$ .*

<sup>4</sup>Tvrzení 1.2.2 říká, že pro složené číslo  $m$  je  $\mathbb{Z}_m$  spolu s operacemi  $\oplus_m$ ,  $\odot_m$  komutativní okruh s jednotkou.

DŮKAZ. Rovnice  $1 \cdot x = 1$  má jediné řešení, sice  $x = 1$ . Proto  $1 = 1^{-1}$ . Podle axiomu invertibility je  $1 \neq 0$ . ■

Pokračujeme souhrnem základních faktů o výpočtech v tělese.

**1.3.3 Lemma** V jakémkoli tělese  $\mathbb{F}$  platí rovnosti:  $a \cdot 0 = 0$  a  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ . Speciálně platí  $(-1) \cdot (-1) = 1$ .

DŮKAZ. Abychom ukázali, že  $a \cdot 0 = 0$  v tělese  $\mathbb{F}$ , stačí podle Lemmatu 1.3.1 ukázat, že  $a \cdot 0$  je nulový prvek, tj., stačí pro každé  $b$  z  $\mathbb{F}$  ukázat rovnost  $b + a \cdot 0 = b$ . Podle axiomů tělesa platí  $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$ . Takže  $b + a \cdot 0 = b + a \cdot 0 + a \cdot 0$ , a tedy  $b = b + a \cdot 0 - a \cdot 0 = b + a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 = b + a \cdot 0$ .

Pro rovnost  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$  stačí ukázat, že  $(-a) \cdot b$  je opačný prvek k  $a \cdot b$ . To je snadné:  $a \cdot b + (-a) \cdot b = (a - a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$ .

Součin  $(-1) \cdot (-1)$  je podle předchozího opačný prvek k  $1 \cdot (-1) = -1$ . Protože platí  $-(-1) = 1$ , je rovnost  $(-1) \cdot (-1) = 1$  dokázána. ■

**1.3.4 Lemma** V jakémkoli tělese  $\mathbb{F}$  platí:  $a \cdot b = 0$  právě tehdy, když  $a = 0$  nebo  $b = 0$ .

DŮKAZ. Předpokládejme, že v tělese  $\mathbb{F}$  platí  $a \cdot b = 0$  a  $a \neq 0$ . Potom  $a^{-1} \cdot a \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b = 0$ .

Jestliže  $a = 0$  nebo  $b = 0$ , potom  $a \cdot b = 0$  podle Lemmatu 1.3.3. ■

**1.3.5 Lemma** V jakémkoli tělese  $\mathbb{F}$  platí:

- (1) Rovnice  $a + x = b$ , kde  $a, b$  jsou z  $\mathbb{F}$ , má právě jedno řešení.
- (2) Rovnice  $a \cdot x = b$ , kde  $a \neq 0$ ,  $b$  jsou z  $\mathbb{F}$ , má právě jedno řešení.

DŮKAZ. Obě tvrzení se dokazují velmi podobně:

- (1) Platí-li  $a + x = b$ , potom  $-a + (a + x) = -a + b$ . To znamená, že pokud  $x$  je řešením rovnice  $a + x = b$ , je  $x = -a + b = b - a$ . Ukážeme, že  $b - a$  řeší rovnici  $a + x = b$ . To plyne z rovností  $a + (b - a) = a + b + (-a) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$ .
- (2) Platí-li  $a \cdot x = b$ , kde  $a \neq 0$ , potom  $a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b$ . To znamená, že pokud  $x$  je řešením rovnice  $a \cdot x = b$ , kde  $a \neq 0$ , potom  $x = a^{-1} \cdot b$ . Ukážeme, že  $a^{-1} \cdot b$  řeší rovnici  $a \cdot x = b$ . To plyne z rovností  $a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = 1 \cdot b = b$ . ■

I když je naše intuitivní představa tělesa jako číselného oboru se sčítáním a násobením naprosto správná, nelze tuto představu rozšířit na číselný obor, který je uspořádaný. Relace uspořádání na číselném oboru totiž musí souviset s operacemi na číselném oboru. V teorii těles je zvykem místo relace uspořádání podat definici *kladných* prvků tělesa: pojem kladnosti pak dovolí relaci uspořádání snadno definovat. Více viz například knihy:

☞ Emil Artin, *Geometric algebra*, Interscience Publishers, London 1957

☞ Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965

**1.3.6 Definice** Řekneme, že těleso  $\mathbb{F}$  je *uspořádané*, pokud v  $\mathbb{F}$  existuje podmnožina  $\mathbb{F}_+$  (takzvaná *množina kladných prvků tělesa*  $\mathbb{F}$ ) s následujícími vlastnostmi:

- (1) Pro každý prvek  $a \in \mathbb{F}$  platí buď  $-a \in \mathbb{F}_+$ , nebo  $a = 0$ , nebo  $a \in \mathbb{F}_+$ .
- (2) Jestliže  $a \in \mathbb{F}_+$  a  $b \in \mathbb{F}_+$ , potom  $a + b \in \mathbb{F}_+$  a  $ab \in \mathbb{F}_+$ .

V uspořádaném tělese zavedeme relaci  $a < b$ , pokud  $b - a \in \mathbb{F}_+$ .

Například těleso  $\mathbb{R}$  reálných čísel s klasickým „uspořádáním podle velikosti“ je uspořádané těleso: množina  $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$  splňuje všechny vlastnosti z Definice 1.3.6. Navíc vztah  $a < b$  platí přesně tehdy, když platí  $b - a \in \mathbb{R}_+$ .

V každém uspořádaném tělese má relace  $<$  očekávané vlastnosti:

**1.3.7 Lemma** *Ať  $\mathbb{F}$  je uspořádané těleso a ať  $\mathbb{F}_+$  je množina jeho kladných prvků. Pro příslušnou relaci  $<$  platí:*

- (1) *Pro žádné  $a \in \mathbb{F}$  neplatí  $a < a$ .*
- (2) *Jestliže  $a < b$  a  $b < c$ , potom  $a < c$ .*
- (3) *Platí  $0 < 1$ .*
- (4) *Jestliže  $a < b$  a  $a' < b'$ , potom  $a + a' < b + b'$ .*
- (5) *Jestliže  $a < b$  a  $0 < c$ , pak  $ac < bc$ .*
- (6) *Jestliže  $a < b$ , potom  $-b < -a$ .*
- (7) *Jestliže  $a \neq 0$ , potom  $0 < a^2$ .*
- (8) *Jestliže  $0 < a$ , potom  $0 < a^{-1}$ .*
- (9) *Jestliže  $a < b$ ,  $0 < a$ ,  $0 < b$ , potom  $b^{-1} < a^{-1}$ .*

DŮKAZ.

- (1) Platnost vztahu  $a < a$  je ekvivalentní platnosti vztahu  $0 \in \mathbb{F}_+$ . To je spor s vlastností množiny  $\mathbb{F}_+$ .
- (2) Ať  $a < b$  a  $b < c$ . Potom  $(b-a) \in \mathbb{F}_+$  a  $(c-b) \in \mathbb{F}_+$ . Takže  $(c-b) + (b-a) \in \mathbb{F}_+$ . Protože  $(c-b) + (b-a) = c-a$ , platí  $a < c$ .
- (3) Platí  $1 \neq 0$ . Takže buď  $1 \in \mathbb{F}_+$ , nebo  $-1 \in \mathbb{F}_+$ . V prvním případě  $1 \cdot 1 \in \mathbb{F}_+$ , ve druhém  $(-1) \cdot (-1) \in \mathbb{F}_+$ . Platí ale  $1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$ , takže  $1 \in \mathbb{F}_+$ .
- (4) Ať  $a < b$  a  $a' < b'$ . Potom  $(b-a) + (b'-a') \in \mathbb{F}_+$ . Protože  $(b-a) + (b'-a') = (b+b') - (a+a')$ , je  $(b+b') - (a+a') \in \mathbb{F}_+$ , neboli  $a+a' < b+b'$ .
- (5) Ať  $a < b$  a  $0 < c$ . Potom  $(b-a)c \in \mathbb{F}_+$ . Protože  $(b-a)c = bc - ac$ , je  $bc - ac \in \mathbb{F}_+$ , neboli  $ac < bc$ .
- (6) Ať  $a < b$ . Potom  $(b-a) \in \mathbb{F}_+$ . Protože  $(b-a) = -a - (-b)$ , je  $-a - (-b) \in \mathbb{F}_+$ , neboli  $-b < -a$ .
- (7) Ať  $a \neq 0$ . To znamená, že buď  $0 < a$  nebo  $0 < -a$ . Podle (5) platí  $0 < a^2$ . Využili jsme toho, že  $a^2 = aa = (-a)(-a)$ .
- (8) Jestliže  $0 < a$ , pak  $a \neq 0$ . Tudíž inverse  $a^{-1}$  existuje a platí  $a^{-1} \neq 0$ . Protože  $a^{-1} = a(a^{-1})^2$ , platí  $0 < a^{-1}$ . Využili jsme toho, že  $0 < a$  a že (podle (7))  $0 < (a^{-1})^2$ .
- (9) Jestliže  $0 < a$  a  $0 < b$ , pak  $a \neq 0$  a  $b \neq 0$ . Tudíž inverse  $a^{-1}$  a  $b^{-1}$  existují. Ať  $a < b$ . Potom  $a \neq b$ , tudíž  $a^{-1} \neq b^{-1}$ . Předpokládejme, že platí  $a^{-1} < b^{-1}$ . Potom z rovnosti  $(b^{-1} - a^{-1})ab = a - b$  plyne, že  $(a-b) \in \mathbb{F}_+$ , a to je spor. Dokázali jsme, že platí  $b^{-1} < a^{-1}$ .

■



**1.3.8 Příklad (Těleso  $\mathbb{C}$  nelze uspořádat)** Příkladem tělesa, které uspořádat *nelze*, je těleso komplexních čísel  $\mathbb{C}$ . To dokážeme sporem. Předpokládejme, že na množině  $\mathbb{C}$  je zadána množina  $\mathbb{C}_+$  kladných prvků, která splňuje podmínky z Definice 1.3.6. Potom pro komplexní číslo  $i$  platí buď  $-i \in \mathbb{C}_+$  nebo  $i \in \mathbb{C}_+$ , protože  $i \neq 0$ .

- (a) Předpokládejme, že platí  $-i \in \mathbb{C}_+$ .

Potom  $(-i)^2 \in \mathbb{C}_+$  a  $(-i)^4 \in \mathbb{C}_+$ . Protože  $(-i)^2 = -1$  a  $(-i)^4 = 1$ , dostali jsme spor.



(b) Předpokládejme, že platí  $i \in \mathbb{C}_+$ .

Potom  $i^2 \in \mathbb{C}_+$  a  $i^4 \in \mathbb{C}_+$ . Protože  $i^2 = -1$  a  $i^4 = 1$ , dostali jsme spor.

To znamená, že těleso  $\mathbb{C}$  nelze uspořádat.



**1.3.9 Příklad (Žádné konečné těleso nelze uspořádat)** Ať  $\mathbb{F}$  je konečné těleso. Postupujeme sporem: ať existuje množina kladných prvků  $\mathbb{F}_+$  tělesa  $\mathbb{F}$ , která splňuje podmínky Definice 1.3.6.

Víme, že platí  $0 < a^2$  pro všechna  $a \neq 0$ , a že platí  $0 < a + b$ , jakmile  $0 < a$  a  $0 < b$ . Protože  $\mathbb{F}$  je konečná množina, existuje nejmenší kladné přirozené číslo  $n$  tak, že  $\underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-krát}} = 0$ . Protože  $1 = 1^2$ , musí platit

$0 < \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-krát}}$ . To je spor.

Příklad 1.3.9 je třeba *pořádně promyslet*. V tělese  $\mathbb{Z}_p$ , kde  $p$  je prvočíslo, se totiž nabízí „přirozené uspořádání podle velikosti“

$$[0]_p < [1]_p < \dots < [p-2]_p < [p-1]_p$$

Jakkoli je taková relace na  $\mathbb{Z}_p$  velmi přitažlivá, neodráží základní vlastnosti toho, jak si uspořádání představujeme; platilo by pak totiž (například)  $[0]_p < [0]_p$ . Protože těleso  $\mathbb{Z}_p$  uspořádat nelze, budeme muset při aplikacích v teorii kódů postupovat opatrně, viz Tvzení 1.2.1.

Teorie uspořádaných těles je poměrně bohatá. Existují například tělesa, která lze uspořádat více než jedním způsobem, existují uspořádaná tělesa, která nemají Archimedovu vlastnost (tj. „přirozená čísla nejsou shora neomezená“), atd. Více se lze dočíst v knihách

☞ Bernard R. Gelbaum a John M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, Amsterdam, 1964.

☞ John M. H. Olmsted, *The real number system*, Appleton-Century-Crofts Inc., New York, 1962.

Zbývá zmínit, kdy těleso uspořádat lze. Platí následující věta, kterou dokazovat nebudeme (důkaz by vyžadoval zavedení teorie rozšiřování těles):

**1.3.10 Věta (Artin-Schreier)** Ať  $\mathbb{F}$  je těleso. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Těleso  $\mathbb{F}$  lze uspořádat.
- (2) Pro jakékoli  $n \geq 1$  a pro jakékoli prvky  $a_1, \dots, a_n$  z  $\mathbb{F}$  plynou z rovnosti  $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0$  rovnosti  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .
- (3) Prvek  $-1$  z  $\mathbb{F}$  nelze napsat<sup>5</sup> jako konečný součet prvků tvaru  $a^2$ , kde  $a$  je z  $\mathbb{F}$ .

Více se lze dočíst například v knihách:

☞ Nicholas Bourbaki, *Algebra II*, Springer-Verlag 1990.

☞ Paul M. Cohn, *Algebra Vol. 3*, John Wiley & Sons, 1991.

Něco více z teorie těles uvedeme v podkapitole 11.5.

## 1.4 A jak se počítá v lineárních prostorech?

Základní výpočty v lineárních prostorech probíhají podobně jako v tělesech. Důkazy základních tvrzení jsou tedy analogické důkazům z podkapitoly 1.3.

<sup>5</sup>Tělesům, která splňují tuto podmínku se říká *formálně reálná* (anglicky: *formally real fields*).



Následující výpočty by šly shrnout sloganem: v lineárním prostoru  $L$  nad tělesem  $\mathbb{F}$  se „počítá stejně“ jako (například) v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^2$  nad tělesem  $\mathbb{R}$ .

Protože je ale nutné k výpočtům používat axiomy lineárního prostoru, ukážeme si, jak základní výpočty probíhají.

Abychom nepsali zbytečně složité výrazy, dohodneme se na několika konvencích:

- (1) Budeme předpokládat, že násobení skalárem váže silněji než sčítání vektorů. To jest, budeme psát  $a \cdot \vec{b} + \vec{c}$  místo  $(a \cdot \vec{b}) + \vec{c}$ , atd.
- (2) Díky asociativitě sčítání nebudeme sčítání vektorů závorkovat. To jest, budeme psát  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  místo  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  nebo  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ , atd.
- (3) Budeme psát  $\vec{a} - \vec{b}$  místo  $\vec{a} + (-\vec{b})$ .
- (4) Díky asociativitě násobení skalárem nebudeme násobení skalárem závorkovat. To jest, budeme psát  $a \cdot b \cdot \vec{c}$  místo  $(a \cdot b) \cdot \vec{c}$  nebo  $a \cdot (b \cdot \vec{c})$ , atd.

**1.4.1 Lemma** *Nulový vektor v jakémkoli lineárním prostoru je určen jednoznačně.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že  $\vec{o}_1$  a  $\vec{o}_2$  jsou nulové vektory v lineárním prostoru  $L$ . Potom  $\vec{o}_1 = \vec{o}_1 + \vec{o}_2 = \vec{o}_2$ , kde první rovnost platí, protože  $\vec{o}_2$  je nulový vektor v  $L$  a druhá rovnost platí, protože  $\vec{o}_1$  je nulový vektor v  $L$ . ■

**1.4.2 Lemma** *V jakémkoli lineárním prostoru platí  $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$  a  $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$ .*

DŮKAZ. Platí  $0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = (0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x}$ . Takže pro libovolný vektor  $\vec{y}$  platí:  $\vec{y} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{y} + 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$ . To znamená, že pro libovolný vektor  $\vec{y}$  platí  $\vec{y} = \vec{y} + 0 \cdot \vec{x}$ . Ukázali jsme, že  $0 \cdot \vec{x}$  se chová jako nulový vektor. Nulový vektor je ovšem určen jednoznačně podle Lemmatu 1.4.1. To znamená, že  $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$ .

Platí  $a \cdot \vec{o} + a \cdot \vec{o} = a \cdot (\vec{o} + \vec{o}) = a \cdot \vec{o}$ . Takže pro libovolný vektor  $\vec{y}$  platí:  $\vec{y} + a \cdot \vec{o} = \vec{y} + a \cdot \vec{o} + a \cdot \vec{o}$ . To znamená, že pro libovolný vektor  $\vec{y}$  platí  $\vec{y} = \vec{y} + a \cdot \vec{o}$ . Ukázali jsme, že  $a \cdot \vec{o}$  se chová jako nulový vektor. Nulový vektor je ovšem určen jednoznačně podle Lemmatu 1.4.1. To znamená, že  $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$ . ■

**1.4.3 Lemma** *Pro libovolný vektor  $\vec{x}$  a libovolný skalár  $a$  platí  $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$  právě tehdy, když  $a = 0$  nebo  $\vec{x} = \vec{o}$ .*

DŮKAZ. Předpokládejme, že  $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$  a  $a \neq 0$ . Protože  $\mathbb{F}$  je těleso, existuje  $a^{-1}$ . Potom

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (a^{-1} \cdot a) \cdot \vec{x} = a^{-1} \cdot (a \cdot \vec{x}) = a^{-1} \cdot \vec{o} = \vec{o}$$

kde poslední rovnost je díky Lemmatu 1.4.2.

Obrácená implikace plyne z Lemmatu 1.4.2. ■

**1.4.4 Lemma** *Opačný vektor k vektoru  $\vec{x}$  je vektor  $(-1) \cdot \vec{x}$ .*

DŮKAZ. Protože opačný vektor je v lineárním prostoru určen jednoznačně, stačí ukázat, že  $(-1) \cdot \vec{x} + \vec{x} = \vec{o}$ . To ale platí, protože platí rovnosti

$$(-1) \cdot \vec{x} + \vec{x} = (-1) \cdot \vec{x} + 1 \cdot \vec{x} = (-1 + 1) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

■

## 1.5 Lineární kombinace a lineární obal

Díky asociativitě sčítání vektorů můžeme zavést následující konvenci: můžeme psát například  $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$  místo  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$  nebo  $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ . Indukcí lze dokázat, že můžeme psát  $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n$  místo *jakkoli* uzávorkovaného součtu. Často také budeme psát místo  $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n$  sumu  $\sum_{i=1}^n \vec{x}_i$ . Protože na pořadí vektorů při sčítání nezáleží (komutativita sčítání vektorů), můžeme jít ještě dál: místo  $\sum_{i=1}^n \vec{x}_i$  můžeme psát  $\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \vec{x}_i$ . Poslední způsob je zvláště výhodný, umožňuje nám totiž psát součet  $\sum_{i \in I} \vec{x}_i$  pro *jakoukoli konečnou* množinu indexů  $I$ . Protože konečná množina může být i prázdná, máme tak k dispozici zápis  $\sum_{i \in \emptyset} \vec{x}_i$ . Součet přes prázdnou množinu indexů definujeme jako nulový vektor  $\vec{o}$ .

Proč jsme zavedli  $\sum_{i \in \emptyset} \vec{x}_i = \vec{o}$ ?

Pro libovolné konečné neprázdné a *disjunktní* množiny  $I, J$  totiž platí rovnost

$$\sum_{i \in I} \vec{x}_i + \sum_{j \in J} \vec{x}_j = \sum_{k \in I \cup J} \vec{x}_k$$

Chceme-li tuto užitečnou rovnost zachovat pro všechny disjunktní množiny, musíme zavést konvenci  $\sum_{i \in \emptyset} \vec{x}_i = \vec{o}$ . Součet  $\sum_{i \in \emptyset} \vec{x}_i$  se totiž „chová jako nulový vektor“:

$$\sum_{i \in \emptyset} \vec{x}_i + \sum_{j \in J} \vec{x}_j = \sum_{k \in \emptyset \cup J} \vec{x}_k = \sum_{j \in J} \vec{x}_j$$

a nulový vektor je podle Lemmatu 1.4.1 určen jednoznačně.

Mějme na paměti: *If it looks like a duck, swims like a duck, and quacks like a duck, then it has to be a duck.*

Zavedeme nyní velmi důležitý pojem *lineární kombinace*. Lineární kombinace jsou tím nejobecnějším, co nám axiomy lineárního prostoru dovolují počítat.

**1.5.1 Definice** Ať  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ , ať  $I$  je jakákoli množina. Funkci  $v : I \rightarrow L$  říkáme *I-tice vektorů* v  $L$ . Budeme ji značit  $(\vec{v}_i)_{i \in I}$ .

### 1.5.2 Poznámka

- (1) V obecné  $I$ -tici  $(\vec{v}_i)_{i \in I}$  záleží na pořadí vektorů. Přesněji: pro  $u, v : I \rightarrow L$  platí  $(\vec{u}_i)_{i \in I} \neq (\vec{v}_i)_{i \in I}$  právě tehdy, když existuje  $i \in I$  tak, že  $\vec{u}_i \neq \vec{v}_i$ .
- (2) V obecné  $I$ -tici  $(\vec{v}_i)_{i \in I}$  se vektory mohou opakovat. Extrémním případem je  $I$ -tice  $(\vec{v}_i)_{i \in I}$ , kde  $\vec{v}_i = \vec{v}$ , pro každé  $i \in I$ . Taková  $I$ -tice je zadána funkcí  $v : I \rightarrow L$ , kde  $v(i) = \vec{v}$ , pro každé  $i \in I$ .
- (3) V případě, že množina  $I$  je konečná, mluvíme často o *seznamu* nebo také *skupině* vektorů. Prázdný seznam značíme  $()$ , seznam délky  $n \geq 1$  značíme  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ .

**1.5.3 Definice (Lineární kombinace I-tice vektorů)** Ať  $(\vec{v}_i)_{i \in I}$  je  $I$ -tice vektorů. Její *lineární kombinace* je vektor

$$\sum_{i \in I} a_i \cdot \vec{v}_i$$

kde  $a_i$  (tzv. *koefficienty* lineární kombinace) jsou z  $\mathbb{F}$  a množina  $\{i \in I \mid a_i \neq 0\}$  je konečná.

Lineární kombinace obecné  $I$ -tice vektorů je tedy vektor, zapsaný ve tvaru  $\sum_{i \in I} a_i \cdot \vec{v}_i$ , kde „téměř všechny“ koefficienty  $a_i$  (tj. všechny koefficienty, až na *konečnou* množinu) jsou rovny nule.

**1.5.4 Příklad** Pro  $I = \{1, 2, 3\}$  je seznam  $(2x, 2x, 4x^3)$   $I$ -tice vektorů v lineárním prostoru  $\mathbb{R}[x]$ . Lineární kombinací seznamu  $(2x, 2x, 4x^3)$  je například polynom  $5x^3 - 5x$ . Koefficienty této lineární kombinace jsou  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = -3$  a  $a_3 = \frac{5}{4}$ .

Polynom  $5x^3 - 5x$  můžeme ovšem napsat i jako lineární kombinaci seznamu  $(2x, 2x, 4x^3)$  s koeficienty  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -\frac{5}{2}$  a  $b_3 = \frac{5}{4}$ .

Příkladem  $\mathbb{N}$ -tice vektorů v  $\mathbb{R}[x]$  je  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Lineární kombinací seznamu  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  je například polynom  $4x^7 - 1$ . Koeficienty této lineární kombinace jsou  $a_0 = -1$ ,  $a_7 = 4$ ,  $a_n = 0$  pro  $n \notin \{0, 7\}$ . Tedy množina  $\{n \mid a_n \neq 0\}$  je konečná množina.

Všimněme si, že zápis  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$  *není* lineární kombinací  $\mathbb{N}$ -tice  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Pro koeficienty  $a_n = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , totiž neplatí, že  $\{n \mid a_n \neq 0\}$  je konečná množina.

**1.5.5 Příklad** Ať  $M = \{x, x^7\}$  je podmnožina  $\mathbb{R}[x]$ . Chceme vědět, jak vypadají *všechny* lineární kombinace prvků  $M$ .

Obecná  $I$ -tice prvků množiny  $M$  má tvar  $(p_i(x))_{i \in I}$ , kde každé  $p_i(x)$  je buď polynom  $x$  nebo polynom  $x^7$ . Lineární kombinace této  $I$ -tice musí mít jako koeficienty  $a_i$  taková reálná čísla  $a_i$ , pro která je  $\{i \mid a_i \neq 0\}$  konečná množina.

- (1) V případě, že  $\{i \mid a_i \neq 0\} = \emptyset$ , jsou všechna  $a_i = 0$ , a tedy  $\sum_{i \in I} a_i \cdot p_i(x) = 0$ .
- (2) V případě, že  $\{i \mid a_i \neq 0\} \neq \emptyset$ , můžeme konečnou množinu  $\{i \mid a_i \neq 0\}$  rozdělit na dvě části: na koeficienty, které použijeme u polynomu  $x$  a na koeficienty, které použijeme u polynomu  $x^7$ :

$$\{i \mid a_i \neq 0\} = \{i \mid a_i \neq 0 \text{ a } p_i(x) = x\} \cup \{i \mid a_i \neq 0 \text{ a } p_i(x) = x^7\}$$

Označme  $I_1 = \{i \mid a_i \neq 0 \text{ a } p_i(x) = x\}$  a  $I_2 = \{i \mid a_i \neq 0 \text{ a } p_i(x) = x^7\}$ . Potom platí

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i \cdot p_i(x) &= \sum_{i \in I_1 \cup I_2} a_i \cdot p_i(x) = \sum_{i \in I_1} a_i \cdot p_i(x) + \sum_{i \in I_2} a_i \cdot p_i(x) \\ &= \sum_{i \in I_1} a_i \cdot x + \sum_{i \in I_2} a_i \cdot x^7 = \left( \sum_{i \in I_1} a_i \right) \cdot x + \left( \sum_{i \in I_2} a_i \right) \cdot x^7 \end{aligned}$$

Celkově tedy platí: lineární kombinace prvků množiny  $\{x, x^7\}$  jsou polynomy tvaru  $a \cdot x^7 + b \cdot x$ , kde  $a$  a  $b$  jsou reálná čísla.

**1.5.6 Definice** Ať  $M$  je jakákoli podmnožina lineárního prostoru  $L$ . Podmnožině  $\text{span}(M) \subseteq L$ , která je definována následovně

$$\text{span}(M) = \{\vec{x} \mid \vec{x} \text{ je lineární kombinací } \sum_{i \in I} a_i \cdot \vec{x}_i \text{ pro nějakou } I\text{-tici vektorů } (\vec{x}_i)_{i \in I} \text{ z } M\}$$

říkáme *lineární obal* množiny  $M$ .

Pojem lineárního obalu množiny vektorů bude v dalším textu hrát zásadní úlohu, viz například podkapitolu 1.6. Protože množina  $\text{span}(M)$  je definována jako množina všech možných lineárních kombinací vektorů z množiny  $M$ , tvoří  $\text{span}(M)$  „zabalení“ množiny  $M$  na lineární kombinace. Pro přesný význam tohoto sloganu odkazujeme na Tvzení 1.5.11 a 1.6.6.

Z definice lineárního obalu okamžitě plyne jeho konečný charakter:

**1.5.7 Lemma (Konečný charakter lineárního obalu)** Jestliže  $\vec{x}$  leží v  $\text{span}(M)$ , potom existuje konečná množina  $M'$  taková, že  $M' \subseteq M$  a  $\vec{x}$  leží v  $\text{span}(M')$

**DŮKAZ.** Jestliže  $\vec{x}$  je v  $\text{span}(M)$ , pak podle definice je  $\vec{x} = \sum_{i \in I} a_i \cdot \vec{x}_i$  pro nějakou  $I$ -tici  $(\vec{x}_i)_{i \in I}$  vektorů z  $M$ , kde množina  $F = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$  je *konečná*. Množina  $M' := \{\vec{x}_i \mid i \in F\}$  je konečná,  $\vec{x}$  je v  $\text{span}(M')$ , a platí  $M' \subseteq M$ . ■

V Příkladu 1.5.5 jsme ukázali, že pro množinu  $M = \{x, x^7\}$  v  $\mathbb{R}[x]$  je lineární obal  $\text{span}(M)$  roven množině  $\{a \cdot x^7 + b \cdot x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ . Podobnou úvahou jako v Příkladu 1.5.5 můžeme dokázat následující výsledek.

**1.5.8 Lemma (Lineární obal konečné množiny)** *At  $M$  je konečná podmnožina lineárního prostoru  $L$  nad  $\mathbb{F}$ . Potom  $\text{span}(M)$  má následující tvar:*

- (1)  $\{\vec{0}\}$ , v případě, kdy  $M = \emptyset$ .
- (2)  $\{a_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$ , v případě, kdy  $M = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ .

DŮKAZ. Postupně:

- (1) At  $M = \emptyset$ . Popíšeme všechny  $I$ -tice prvků  $M$ . Jestliže  $I \neq \emptyset$ , žádná funkce  $v : I \rightarrow M$  neexistuje. Jedinou možností, jak vytvořit  $I$ -tici v  $M$  je tedy případ, kdy  $I = \emptyset$ . Každá lineární kombinace  $\sum_{i \in \emptyset} a_i \cdot \vec{v}_i$  je ale rovna  $\vec{0}$ . Ukázali jsme, že  $\text{span}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$ .
- (2) At  $M = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ . Vezměme si libovolnou  $I$ -tici  $(\vec{w}_i)_{i \in I}$  vektorů v  $M$ . Pro lineární kombinaci  $\sum_{i \in I} b_i \cdot \vec{w}_i$  platí, že  $\{i \in I \mid b_i \neq 0\}$  je konečná množina.

Definujeme

$$I_1 = \{i \in I \mid b_i \neq 0 \text{ a } \vec{w}_i = \vec{v}_1\}, \quad I_2 = \{i \in I \mid b_i \neq 0 \text{ a } \vec{w}_i = \vec{v}_2\}, \quad \dots, \quad I_n = \{i \in I \mid b_i \neq 0 \text{ a } \vec{w}_i = \vec{v}_n\}$$

Množina  $I_1$  je tedy konečná množina indexů těch nenulových koeficientů  $b_i$ , které jsou v lineární kombinaci použity pro vektor  $\vec{v}_1$ . Množina  $I_2$  je konečná množina indexů těch nenulových koeficientů  $b_i$ , které jsou v lineární kombinaci použity pro vektor  $\vec{v}_2$ . A tak dále.

Potom platí

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} b_i \cdot \vec{w}_i &= \sum_{i \in I_1} b_i \cdot \vec{w}_i + \sum_{i \in I_2} b_i \cdot \vec{w}_i + \dots + \sum_{i \in I_n} b_i \cdot \vec{w}_i \\ &= \left( \sum_{i \in I_1} b_i \right) \cdot \vec{v}_1 + \left( \sum_{i \in I_2} b_i \right) \cdot \vec{v}_2 + \dots + \left( \sum_{i \in I_n} b_i \right) \cdot \vec{v}_n \\ &= a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n \end{aligned}$$

kde jsme definovali

$$a_1 = \sum_{i \in I_1} b_i, \quad a_2 = \sum_{i \in I_2} b_i, \quad \dots, \quad a_n = \sum_{i \in I_n} b_i$$

Tím jsme ukázali, že  $\text{span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$  je přesně množina  $\{a_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$ . ■

**1.5.9 Příklad** Ukážeme, že funkce  $e^x$  není v lineárním obalu množiny  $\{\sin x, \cos x\}$  v prostoru  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  spojitých funkcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  (jde o instanci prostoru z Příkladu 1.1.10).

Předpokládejme opak. Podle Lemmatu 1.5.8 by tedy musela platit rovnost funkcí  $e^x = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ , pro nějaká reálná čísla  $a$  a  $b$ . Speciálně musí platit rovnosti  $e^0 = a \cdot \sin 0 + b \cdot \cos 0$  a  $e^{2\pi} = a \cdot \sin 2\pi + b \cdot \cos 2\pi$ . Tudíž  $b = 1$  a  $b = e^{2\pi}$ , to je spor.

**1.5.10 Příklad (Přítomnost v lineárním obalu=řešení soustavy rovnic)** Ukážeme, že  $\mathbf{b}$  je v množině  $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\})$ , kde

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

jsou vektory v  $\mathbb{R}^2$ .

Hledáme tedy reálná čísla  $x_1, x_2, x_3$  tak, aby platila rovnost  $\mathbf{b} = x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + x_2 \cdot \mathbf{a}_2 + x_3 \cdot \mathbf{a}_3$ . Vypíšeme-li tuto rovnost po jednotlivých položkách, dostaneme *soustavu* rovnic

$$\begin{aligned} 9 &= 1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 \\ 31 &= 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení například  $x_1 = 12, x_2 = 1, x_3 = 0$ . Existují však i jiná řešení této soustavy. Řešením soustav lineárních rovnic se budeme systematicky věnovat v Kapitole 6.

Nyní ukážeme základní vlastnosti lineárního obalu.

**1.5.11 Tvrzení (Uzávěrové vlastnosti lineárního obalu)** *At  $M$  a  $N$  jsou jakékoli množiny vektorů v prostoru  $L$ . Potom platí:*

- (1) *Jestliže  $M \subseteq N$ , potom  $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$ .*
- (2)  *$M \subseteq \text{span}(M)$ .*
- (3)  *$\text{span}(\text{span}(M)) \subseteq \text{span}(M)$ .*

DŮKAZ. Postupně:

- (1) Předpokládejme, že  $\vec{v}$  je ve  $\text{span}(M)$ . To znamená, že  $\vec{v} = \sum_{i \in I} a_i \cdot \vec{v}_i$ , kde každé  $\vec{v}_i$  je v množině  $M$  a množina  $\{i \in I \mid a_i \neq 0\}$  je konečná. Protože  $M \subseteq N$ , je  $\vec{v} = \sum_{i \in I} a_i \cdot \vec{v}_i$ , kde každé  $\vec{v}_i$  je v množině  $N$  a množina  $\{i \in I \mid a_i \neq 0\}$  je konečná. To znamená, že  $\vec{v}$  je v množině  $\text{span}(N)$ .
- (2) At  $\vec{v}$  je v množině  $M$ . Potom platí  $\vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$ . Proto je  $\vec{v}$  v množině  $\text{span}(M)$ .
- (3) Předpokládejme, že  $\vec{v}$  je v množině  $\text{span}(\text{span}(M))$ . To znamená, že  $\vec{v} = \sum_{i \in I} a_i \cdot \vec{v}_i$ , kde každé  $\vec{v}_i$  je v množině  $\text{span}(M)$  a množina  $\{i \in I \mid a_i \neq 0\}$  je konečná. Pro každé  $i$  napíšeme  $\vec{v}_i = \sum_{j \in J_i} b_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}$ , kde každé  $\vec{v}_{ij}$  je v množině  $M$  a množina  $\{j \in J_i \mid b_{ij} \neq 0\}$  je konečná. Celkově platí

$$\vec{v} = \sum_{i \in I} a_i \cdot \sum_{j \in J_i} b_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} (a_i \cdot b_{ij}) \cdot \vec{v}_{ij}$$

Součin  $a_i \cdot b_{ij}$  je nenulový pouze pro konečně mnoho dvojic  $(i, j)$ . To znamená, že  $\vec{v}$  je v množině  $\text{span}(M)$ . ■

## 1.6 Lineární podprostor

Lineární podprostor lineárního prostoru je taková jeho podmnožina, která je uzavřená na tvorbu lineárních kombinací.

**1.6.1 Definice** At  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$  a at  $W \subseteq L$ . Množině  $W$  říkáme *lineární podprostor* lineárního prostoru  $L$ , pokud platí  $\text{span}(W) \subseteq W$ .

**1.6.2 Věta (Charakterisace lineárního podprostoru)** *Pro podmnožinu  $W$  lineárního prostoru  $L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1)  *$W$  je lineární podprostor prostoru  $L$ .*
- (2) *Každá lineární kombinace prvků  $W$  je opět prvkem  $W$ .*
- (3) *Platí rovnost  $\text{span}(W) = W$ , tj.  $W$  je lineárně uzavřená podmnožina prostoru  $L$ .*
- (4) *Pro  $W$  jsou splněny následující tři podmínky:*
  - (a) *Uzavřenost  $W$  na nulový vektor. Platí:  $\vec{0}$  je v množině  $W$ .*
  - (b) *Uzavřenost  $W$  na sčítání vektorů. Pokud  $\vec{x}, \vec{y}$  jsou ve  $W$ , potom vektor  $\vec{x} + \vec{y}$  je ve  $W$ .*
  - (c) *Uzavřenost  $W$  na násobení skalárem. Pokud  $\vec{x}$  je ve  $W$  a pokud  $a$  je v  $\mathbb{F}$ , potom vektor  $a \cdot \vec{x}$  je ve  $W$ .*

DŮKAZ. Podmínky (1) a (2) jsou navzájem ekvivalentní, protože  $\text{span}(W)$  obsahuje právě všechny lineární kombinace vektorů z množiny  $W$ .

Z podmínky (1) plyne podmínka (3): podle Tvrzení 1.5.11 totiž vždy platí  $W \subseteq \text{span}(W)$ .

Z podmínky (3) plyne podmínka (4). Prázdnou lineární kombinací  $\sum_{i \in \emptyset} a_i \cdot \vec{x}_i$  dostaneme nulový vektor, a součet dvou vektorů a skalární násobek vektoru jsou jisté speciální lineární kombinace.

Z podmínky (4) plyne podmínka (1). Každý vektor  $\vec{w}$  ze  $\text{span}(W)$  je buď nulový vektor nebo jde o součet nenulového počtu vektorů tvaru  $a \cdot \vec{v}$ , kde  $\vec{v}$  je ve  $W$ . V prvním případě použijeme podmínku (a), ve druhém případě konečněkrát podmínky (b) a (c) na to, abychom ukázali, že  $\vec{w}$  je ve  $W$ . ■

**1.6.3 Důsledek** *At  $L$  je lineární prostor. Potom  $L$  a  $\{\vec{0}\}$  jsou lineární podprostory  $L$ .*

**DŮKAZ.** Zřejmě platí  $\text{span}(L) = L$  a  $\text{span}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}$ . ■

Tři podmínky (4a), (4b) a (4c) z Věty 1.6.2 jsou v praxi velmi užitečným nástrojem, který umožní rozhodnout, zda nějaká podmnožina  $W$  lineárního prostoru  $L$  je lineární podprostor. Tyto tři podmínky říkají, že lineární podprostor  $W$  prostoru  $L$  musí být v  $L$  uzavřen na tři základní typy operací, které v lineárním prostoru  $L$  lze vykonávat:

(4a) Nulový vektor z  $L$  musí ležet ve  $W$ .

(4b) Sčítáním vektorů z  $W$  nemůžeme z množiny  $W$  „utéct“.

(4c) Skalárními násobky vektorů z  $W$  nemůžeme z množiny  $W$  „utéct“.

Samozřejmě, tyto tři podmínky přesně říkají, že vytvářením lineárních kombinací vektorů z  $W$  nemůžeme z množiny  $W$  „utéct“. To je přesně definice lineárního podprostoru:  $\text{span}(W) \subseteq W$ .

**1.6.4 Příklad** Připomeňme prostor  $C^1((a; b), \mathbb{R})$  reálných spojitých funkcí z Příkladu 1.1.10. Ukážeme, že množina  $C^1((a; b), \mathbb{R})$  všech spojitých funkcí s konečnou první derivací je lineárním podprostorem lineárního prostoru  $C((a; b), \mathbb{R})$ . Použijeme podmínky (4a), (4b) a (4c) z Věty 1.6.2:

- (1) Uzavřenost  $C^1((a; b), \mathbb{R})$  na nulový vektor. Nulovým vektorem  $\vec{0}$  je funkce konstantně rovna 0. Tato funkce má konečnou první derivaci. Platí tedy:  $\vec{0}$  je v množině  $C^1((a; b), \mathbb{R})$ .
- (2) Uzavřenost  $C^1((a; b), \mathbb{R})$  na sčítání vektorů. Pokud  $f, g$  jsou v  $C^1((a; b), \mathbb{R})$ , potom i funkce  $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$  má konečnou první derivaci. Ukázali jsme, že  $f + g$  je v  $C^1((a; b), \mathbb{R})$ .
- (3) Uzavřenost  $C^1((a; b), \mathbb{R})$  na násobení skalárem. Pokud  $f$  je ve  $C^1((a; b), \mathbb{R})$  a pokud  $a$  je v  $\mathbb{R}$ , potom funkce  $a \cdot f : x \mapsto a \cdot f(x)$  má konečnou první derivaci. Tudíž  $a \cdot f$  je v  $C^1((a; b), \mathbb{R})$ .

**1.6.5 Příklad** Připomeňme prostor  $\mathbb{F}^I$  všech  $I$ -tic nad  $\mathbb{F}$  z Příkladu 1.2.9 a prostor  $\mathbb{F}^{(I)}$  všech  $I$ -souroadnic z Příkladu 1.2.13. Ukážeme, že  $\mathbb{F}^{(I)}$  je lineární podprostor lineárního prostoru  $\mathbb{F}^I$ .

Zjevně platí  $\mathbb{F}^{(I)} \subseteq \mathbb{F}^I$ , protože každá  $I$ -souroadnice je funkce  $u : I \rightarrow \mathbb{F}$ . Zbývá tedy ověřit podmínky (4a), (4b), (4c) z Věty 1.6.2:

- (1) Uzavřenost  $\mathbb{F}^{(I)}$  na nulový vektor. Nulovým vektorem  $\vec{0}$  v  $\mathbb{F}^I$  je funkce  $o : I \rightarrow \mathbb{F}$  konstantně rovna 0. Tedy množina  $\{i \in I \mid o(i) \neq 0\}$  je konečná (je totiž prázdná). Platí tedy:  $\vec{0}$  je v množině  $\mathbb{F}^{(I)}$ .
- (2) Uzavřenost  $\mathbb{F}^{(I)}$  na sčítání vektorů. Ať  $u : I \rightarrow \mathbb{F}$  a  $v : I \rightarrow \mathbb{F}$  jsou v  $\mathbb{F}^{(I)}$ . Potom součet  $u + v$  je opět v množině  $\mathbb{F}^{(I)}$ . To jsme ukázali v Příkladu 1.2.13.
- (3) Uzavřenost  $\mathbb{F}^{(I)}$  na násobení skalárem. Ať  $u : I \rightarrow \mathbb{F}$  je v  $\mathbb{F}^{(I)}$ , ať  $a$  je v  $\mathbb{F}$ . Potom skalární násobek  $a \cdot u$  je opět v  $\mathbb{F}^{(I)}$ . To jsme ukázali v Příkladu 1.2.13.

**1.6.6 Tvzení** *At  $M$  je jakákoli podmnožina lineárního prostoru  $L$ . Potom  $\text{span}(M)$  je nejmenší lineární podprostor prostoru  $L$  obsahující množinu  $M$ , tj. jsou splněny následující dvě podmínky:*

- (1) Platí  $M \subseteq \text{span}(M)$  a  $\text{span}(M)$  je lineární podprostor prostoru  $L$ .
- (2) Jestliže  $M \subseteq W$ , kde  $W$  je lineární podprostor lineárního prostoru  $L$ , potom platí  $\text{span}(M) \subseteq W$ .

DŮKAZ. Využijeme Tvzení 1.5.11: víme, že platí  $M \subseteq \text{span}(M)$  a  $\text{span}(\text{span}(M)) \subseteq \text{span}(M)$ . Podmínka (1) je tedy splněna.

Ať  $M \subseteq W$ . Potom podle Tvzení 1.5.11 platí  $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(W)$ . Protože  $W$  je lineární podprostor, platí  $\text{span}(W) \subseteq W$ . Dokázali jsme, že  $\text{span}(M) \subseteq W$ . ■

Tvrzení 1.6.6 vysvětluje, proč jsme třem podmínkám z Tvzení 1.5.11 říkali *uzávěrové vlastnosti* lineárního obalu. Podle Tvzení 1.6.6 totiž  $\text{span}$  „zabalí“ množinu  $M$  tak, aby z ní byl lineární podprostor  $\text{span}(M)$ .

**1.6.7 Tvzení (Průnik systému lineárních podprostorů je lineární podprostor)** Ať  $W_i$ ,  $i \in I$ , je jakýkoli systém lineárních podprostorů lineárního prostoru  $L$ . Potom  $\bigcap_{i \in I} W_i$  je opět lineární podprostor lineárního prostoru  $L$ .

DŮKAZ. Označme  $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ . Protože pro každé  $i$  platí  $W \subseteq W_i$ , platí i  $\text{span}(W) \subseteq \text{span}(W_i)$  pro každé  $i \in I$ . Pro každé  $i \in I$  také platí  $\text{span}(W_i) \subseteq W_i$ . Tudíž pro každé  $i \in I$  platí  $\text{span}(W) \subseteq W_i$ . To znamená, že platí i inkluze

$$\text{span}(W) \subseteq \bigcap_{i \in I} W_i = W$$

a to jsme chtěli dokázat. ■

**1.6.8 Příklad (Sjednocení lineárních podprostorů obecně není lineární podprostor)** V prostoru  $\mathbb{R}^2$  jsou následující dvě podmnožiny lineární podprostory

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

Množina  $W_1 \cup W_2$  ovšem lineární podprostor lineárního prostoru  $\mathbb{R}^2$  není. Například vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  leží ve  $W_1 \cup W_2$  (protože leží ve  $W_1$ ) a vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  leží ve  $W_1 \cup W_2$  (protože leží ve  $W_2$ ), ale vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  neleží ve  $W_1 \cup W_2$ .

Příklad 1.6.8 není náhoda: následující tvrzení ukazuje, že sjednocení dvou lineárních podprostorů je lineární podprostor pouze ve velmi speciálních případech.

**1.6.9 Tvzení** Ať  $W_1, W_2$  jsou lineární podprostory lineárního prostoru  $L$ . Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Sjednocení  $W_1 \cup W_2$  je lineární podprostor prostoru  $L$ .
- (2) Platí  $W_1 \subseteq W_2$  nebo  $W_2 \subseteq W_1$ .

DŮKAZ. Ze (2) plyne triviálně (1), proto zbývá ukázat, že z (1) plyne (2). Předpokládejme, že neplatí ani  $W_1 \subseteq W_2$  ani  $W_2 \subseteq W_1$ . To znamená, že existuje  $\vec{w}_1 \in W_1 \setminus W_2$  a  $\vec{w}_2 \in W_2 \setminus W_1$ . Tvrdíme, že  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$  neleží ve  $W_1 \cup W_2$ . To bude spor s tím, že  $W_1 \cup W_2$  je lineární podprostor. Jestliže vektor  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$  leží ve  $W_1$ , potom i vektor  $\vec{w}_2 = (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) - \vec{w}_1$  leží ve  $W_1$ , a to není možné. Jestliže vektor  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$  leží ve  $W_2$ , potom i vektor  $\vec{w}_1 = (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) - \vec{w}_2$  leží ve  $W_2$ , a to není možné. ■

Protože sjednocení lineárních podprostorů obecně nemusí být lineární podprostor, budeme muset sjednocení podprostorů často nahrazovat lineárním obalem sjednocení. Lineární obal sjednocení totiž je lineárním podprostorem (podle Tvzení 1.6.6 jde o nejmenší lineární podprostor, který dané sjednocení obsahuje). Lineárnímu obalu sjednocení nyní dáme jméno.



**1.6.10 Definice** Ať  $W_i$ ,  $i \in I$ , jsou lineární podprostory lineárního prostoru  $L$ . Lineárnímu podprostoru

$$\text{span}\left(\bigcup_{i \in I} W_i\right)$$

říkáme *spojení* podprostorů  $W_i$ ,  $i \in I$ . Spojení podprostorů značíme  $\bigvee_{i \in I} W_i$ . Je-li  $I = \{1, \dots, k\}$  konečná množina, píšeme  $W_1 \vee \dots \vee W_k$  místo  $\bigvee_{i \in I} W_i$ .

Definice spojení  $\bigvee_{i \in I} W_i$  je motivována tím, že sjednocení  $\bigcup_{i \in I} W_i$  lineárních podprostorů  $W_i$  obecně nemusí být lineárním podprostorem. Uděláme tedy „the next best thing“: zabalíme  $\bigcup_{i \in I} W_i$  pomocí  $\text{span}$ . Vznikne tak *nejmenší* lineární podprostor, který množinu  $\bigcup_{i \in I} W_i$  obsahuje. Viz Tvzení 1.6.6.

**1.6.11 Lemma** Pro lineární podprostory  $W_1, \dots, W_k$  lineárního prostoru  $L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1)  $L = W_1 \vee \dots \vee W_k$ .
- (2) Každý vektor  $\vec{x}$  z prostoru  $L$  lze zapsat ve tvaru součtu  $\vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k$ , kde  $\vec{w}_i$  je z  $W_i$ .

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Ať  $L = W_1 \vee \dots \vee W_k$  a ať  $\vec{x}$  je libovolný vektor z  $L$ . Potom  $\vec{x}$  leží v  $\text{span}(W_1 \cup \dots \cup W_k)$ , tudíž platí  $\vec{x} = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \vec{x}_j$ , kde každý z vektorů  $\vec{x}_j$  leží ve  $W_{i(j)}$ , kde  $i(j) \in \{1, \dots, k\}$ . Protože  $W_1, \dots, W_k$  jsou lineární podprostory, leží i součin  $a_j \cdot \vec{x}_j$  ve  $W_{i(j)}$ . Součet  $\vec{w}_i = \sum_{i=i(j)} a_j \cdot \vec{x}_j$  leží ve  $W_i$  a platí  $\vec{x} = \vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k$ .

Ze (2) plyne (1). Jestliže lze každý vektor  $\vec{x}$  z  $L$  zapsat ve tvaru součtu  $\vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k$ , kde  $\vec{w}_i$  je z  $W_i$ , pak  $L \subseteq \text{span}(W_1 \cup \dots \cup W_k)$ . Protože inkluze  $\text{span}(W_1 \cup \dots \cup W_k) \subseteq L$  platí vždy, dokázali jsme, že  $L = W_1 \vee \dots \vee W_k$ . ■

Vyjádření  $\vec{x} = \vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k$  z Lemmatu 1.6.11 není obecně jednoznačné. Pro jednoznačnost musíme přidat ještě podmínku, že lineární podprostory  $W_1, \dots, W_k$  „nemají mnoho společného“.

**1.6.12 Lemma** Pro lineární podprostory  $W_1, \dots, W_k$  lineárního prostoru  $L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1)  $L = W_1 \vee \dots \vee W_k$  a současně  $W_i \cap \left(\bigvee_{j \neq i} W_j\right) = \{\vec{0}\}$ .
- (2) Každý vektor  $\vec{x}$  z prostoru  $L$  lze jednoznačně zapsat ve tvaru součtu  $\vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k$ , kde  $\vec{w}_i$  je z  $W_i$ .

DŮKAZ. Pro  $k = 1$  není co dokazovat, budeme tedy předpokládat, že  $k \geq 2$ .

Z (1) plyne (2). S využitím Lemmatu 1.6.11 stačí ukázat, že zápis  $\vec{x} = \vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k$ , kde  $\vec{w}_i$  je z  $W_i$ , je jednoznačný. Budeme postupovat indukcí podle  $k \geq 2$ .

- (a)  $k = 2$ . Ať platí rovnost  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{w}'_1 + \vec{w}'_2$ , kde  $\vec{w}_i, \vec{w}'_i$  jsou z  $W_i$ . Ukážeme, že  $\vec{w}_1 = \vec{w}'_1$  a  $\vec{w}_2 = \vec{w}'_2$ . Platí rovnost  $\vec{w}'_1 - \vec{w}_1 = \vec{w}_2 - \vec{w}'_2$ . To znamená, že vektor  $\vec{w}_2 - \vec{w}'_2$  leží v průniku  $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ .
- (b)  $k + 1 \geq 2$ . Indukční předpoklad zní: je-li  $L' = V_1 \vee \dots \vee V_k$  a  $V_i \cap \left(\bigvee_{j \neq i} V_j\right) = \{\vec{0}\}$ , pak je zápis každého vektoru z  $L'$  ve tvaru  $\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_k$  jednoznačný.

Ať platí rovnost  $\vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k + \vec{w}_{k+1} = \vec{w}'_1 + \dots + \vec{w}'_k + \vec{w}'_{k+1}$ , kde  $\vec{w}_i, \vec{w}'_i$  jsou z  $W_i$ . Potom platí rovnost  $\vec{w}'_{k+1} - \vec{w}_{k+1} = (\vec{w}_1 - \vec{w}'_1) + \dots + (\vec{w}_k - \vec{w}'_k)$ . Označíme-li  $L' = W_1 \vee \dots \vee W_k$ , ukázali jsme, že vektor  $\vec{w}'_{k+1} - \vec{w}_{k+1}$  leží v  $L'$ . Protože  $\vec{w}'_{k+1} - \vec{w}_{k+1}$  leží v  $W_{k+1}$ , musí platit  $\vec{w}'_{k+1} = \vec{w}_{k+1}$ , protože  $L' \cap W_{k+1} = \{\vec{0}\}$ . To znamená, že platí rovnost  $\vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k = \vec{w}'_1 + \dots + \vec{w}'_k$  a podle indukčního předpokladu platí  $\vec{w}'_1 = \vec{w}_1, \dots, \vec{w}'_k = \vec{w}_k$ .

Ze (2) plyne (1). Předpokládejme, že  $W_{i_1} \cap W_{i_2} \neq \{\vec{0}\}$  pro nějaká  $i_1$  a  $i_2$ . Zvolme nenulový vektor  $\vec{x}$  z  $W_{i_1} \cap W_{i_2}$ . Potom  $\vec{x}$  lze zapsat jako součet  $\vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k$ , kde  $\vec{w}_i$  je z  $W_i$ , dvěma různými způsoby. To je spor. ■



**1.6.13 Definice (Direktní rozklad a direktní součet)** Říkáme, že podprostory  $W_1, \dots, W_k$  lineárního prostoru  $L$  tvoří *direktní rozklad*  $L$  (tento fakt značíme  $L = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ ), jestliže platí následující dvě podmínky:

- (1)  $L = W_1 \vee \dots \vee W_k$ .
- (2)  $W_i \cap \left(\bigvee_{j \neq i} W_j\right) = \{\vec{0}\}$ .

Pokud  $L = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ , říkáme také, že  $L$  je *direktním součtem* podprostorů  $W_1, \dots, W_k$ .

**1.6.14 Příklad (Lineární podprostory  $\mathbb{R}^3$ )** Ukážeme, že každá přímka a každá rovina procházející počátkem je lineární podprostor  $\mathbb{R}^3$ .

- (1) Každá přímka  $p$  v  $\mathbb{R}^3$  procházející počátkem obsahuje přesně trojice tvaru  $a \cdot \mathbf{a}$ , kde  $\mathbf{a}$  je pevný nenulový vektor (tzv. *směr* přímky) a  $a$  je libovolné reálné číslo.

To znamená, že  $p = \text{span}(\{\mathbf{a}\})$ . Tudíž  $p$  je lineární podprostor  $\mathbb{R}^3$ .

- (2) Každá rovina  $\rho$  v  $\mathbb{R}^3$  procházející počátkem obsahuje přesně trojice tvaru  $a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  jsou pevné nenulové vektory takové, že  $\mathbf{a}$  není násobkem  $\mathbf{b}$  (tzv. *zaměření* roviny) a  $a, b$  jsou libovolná reálná čísla.

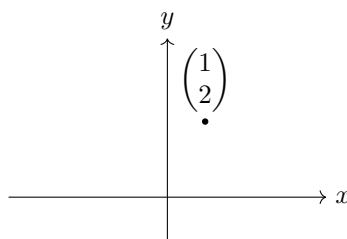
To znamená, že  $\rho = \text{span}(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\})$ . Tudíž  $\rho$  je lineární podprostor  $\mathbb{R}^3$ .

Pochopitelně, počátek  $\{\mathbf{o}\}$  a celé  $\mathbb{R}^3$  jsou další typy lineárních podprostorů prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Později v Příkladu 3.3.2 uvidíme, že tento výčet lineárních podprostorů (tj. počátek, přímky procházející počátkem, roviny procházející počátkem a celé  $\mathbb{R}^3$ ) je úplný.

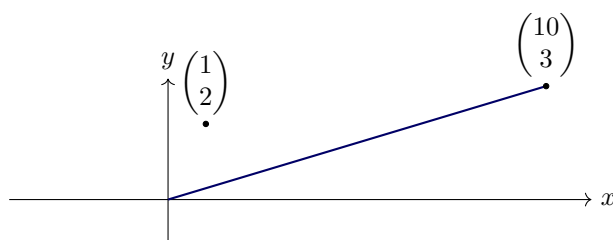
**1.6.15 Příklad (Popis obecné přímky v  $\mathbb{R}^2$ )** Ukážeme, že množina vektorů v  $\mathbb{R}^2$  tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } a \text{ je reálné číslo,}$$

má velmi jasnou geometrickou interpretaci: jde o *přímku* v rovině, která prochází bodem



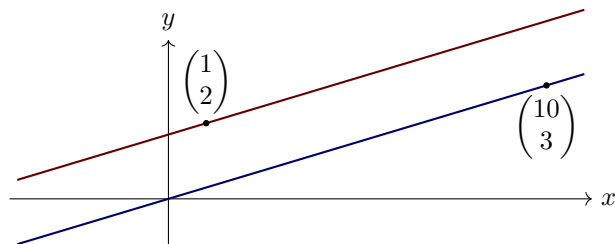
a která má směr určený bodem



To znamená, že množina bodů tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } a \text{ je reálné číslo}$$

je červená přímka v obrázku



Uvědomme si, že tato červená přímka *není* lineárním podprostorem prostoru  $\mathbb{R}^2$ , protože neprochází počátkem.

**1.6.16 Poznámka** Analogií k Příkladu 1.6.15 si můžeme množinu vektorů v *obecném* lineárním prostoru  $L$ , které mají tvar

$$\vec{p} + a \cdot \vec{s}, \quad \text{kde skalár } a \text{ je z tělesa } \mathbb{F}$$

nebo (jiným, ekvivalentním zápisem)

$$\vec{p} + \text{span}(\vec{s})$$

představit jako *přímku* procházející bodem  $\vec{p}$  a mající směr  $\vec{s}$ .

Analogicky si lze představit množinu

$$\vec{p} + W$$

kde  $W$  je lineární podprostor prostoru  $L$ , jako „podprostor  $W$  posunutý do bodu  $\vec{p}$ “. Podmnožinám tohoto tvaru se říká *afinní podprostory* a my je budeme studovat v Kapitole 6 při řešení soustav lineárních rovnic a v Dodatku B.

## 1.7 Speciální lineární kombinace a speciální obaly

V této podkapitole zavedeme obecný pojem *obalu* množiny vektorů z lineárního prostoru nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Speciálním případem obalu bude pochopitelně pojem *lineárního obalu*, viz Definici 1.5.6. Pro lineární prostory nad  $\mathbb{R}$  ale uvedeme i dva důležité příklady obalů: *konvexní obal* a *konický obal*. Tyto dva obaly hrají důležitou roli v počítačové grafice a v lineárním programování, viz Dodatky J a K.

V podkapitole 1.5 jsme začali pracovat s lineárními kombinacemi  $I$ -tic vektorů. V nejobecnější formě je lineární kombinace  $I$ -tice vektorů zápis

$$\sum_{i \in I} a_i \vec{v}_i$$

kde v  $I$ -tici koeficientů  $(a_i)_{i \in I}$  je jen konečně mnoho nenulových skalárů. Připomeňme dále, že jsme definovali

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

protože prázdná suma se „chová jako nulový vektor“.

V podkapitole 1.5 jsme viděli, že ve skutečnosti se stačí omezit na takové lineární kombinace

$$\sum_{i \in I} a_i \vec{v}_i$$

kde množina  $I$  je *konečná*.

V této podkapitole budeme studovat *speciální* lineární kombinace v lineárních prostorech nad  $\mathbb{F}$ . Tyto speciální lineární kombinace budou zadány „systémem speciálních koeficientů“ pro lineární kombinace. V lineárních prostorech nad  $\mathbb{R}$  tak (například) můžeme chtít studovat *pouze* lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^k a_i \vec{v}_i \tag{1.1}$$

kde  $k$  je jakékoli přirozené číslo a kde platí  $a_i \geq 0$  pro všechna  $i = 1, \dots, k$ .

Lineární kombinace tvaru (1.1) jdou „vybrat“ množinou koeficientů

$$\Gamma = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}} \mid a_1 \geq 0, \dots, a_k \geq 0\}$$

Přesněji: kombinace (1.1) jsou přesně ty, které mají koeficienty z množiny  $\Gamma$ . V dalším bude výhodnější si množinu  $\Gamma$  „rozbít“ na jednotlivé množiny

$$\Gamma_k = \{(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}} \mid a_1 \geq 0, \dots, a_k \geq 0\}$$

pro přirozená čísla  $k$ . Uvidíme tak lépe jistou *substituční* strukturu množin  $\Gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , které budeme říkat *operad koeficientů*.

Prvky kartézského součinu  $\underbrace{\mathbb{F} \times \dots \times \mathbb{F}}_{k\text{-krát}}$  jsou seznamy prvků tělesa  $\mathbb{F}$ , které mají délku  $k$ . To znamená, že analogicky úvaze ze začátku podkapitoly 1.5 jsme nuceni definovat

$$\underbrace{\mathbb{F} \times \dots \times \mathbb{F}}_{0\text{-krát}} = \{()\}$$

to jest: jako jednoprvkovou množinu obsahující prázdný seznam.

Chceme totiž zachovat „příjemný“ vztah

$$\underbrace{\mathbb{F} \times \dots \times \mathbb{F}}_{n\text{-krát}} \times \underbrace{\mathbb{F} \times \dots \times \mathbb{F}}_{m\text{-krát}} = \underbrace{\mathbb{F} \times \dots \times \mathbb{F}}_{(n+m)\text{-krát}}$$

pro zřetězování seznamů.

### 1.7.1 Definice (Operad koeficientů $\Gamma$ ) Systému množin

$$\Gamma_k \subseteq \underbrace{\mathbb{F} \times \dots \times \mathbb{F}}_{k\text{-krát}}$$

kde  $k$  je přirozené číslo, a který splňuje následující požadavky:

- (1) Seznam (1) je v  $\Gamma_1$ .
- (2) Je-li  $(a_1, \dots, a_k) \in \Gamma_k$  a jestliže  $(b_{11}, \dots, b_{1j_1}) \in \Gamma_{j_1}, \dots, (b_{k1}, \dots, b_{kj_k}) \in \Gamma_{j_k}$ , potom

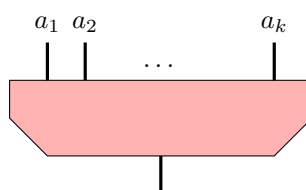
$$(a_1 \cdot b_{11}, \dots, a_1 \cdot b_{1j_1}, a_2 \cdot b_{21}, \dots, a_2 \cdot b_{2j_2}, \dots, a_k \cdot b_{k1}, \dots, a_k \cdot b_{kj_k})$$

je v  $\Gamma_{j_1 + \dots + j_k}$ .

budeme říkat *operad koeficientů* a značit jej  $\Gamma$ .

**1.7.2 Poznámka** Prvky operadu se v aplikacích často značí graficky. Nebudeme zde kalkulus operadů přesně definovat. Naznačíme jen, jak si lze definici nějakého operadu koeficientů  $\Gamma$  pomocí obrázků zapamatovat.

Prvek  $(a_1, \dots, a_k)$  množiny  $\Gamma_k$  budeme značit jako



a takové obrázky „budeme na sebe napojovat“. Přesněji:

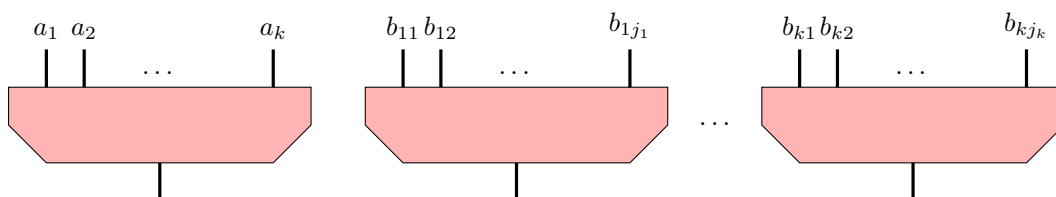
(1) Seznam (1) z  $\Gamma_1$  znázorníme obrázkem



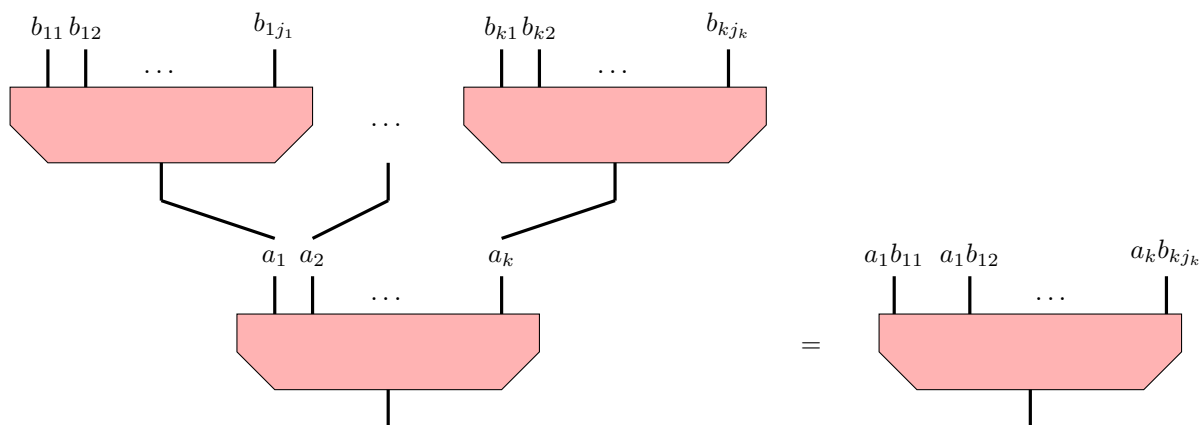
nebo znak 1 z obrázku zcela vynecháme:



(2) Pro



které jsou po řadě z  $\Gamma_k, \Gamma_{j_1}, \dots, \Gamma_{j_k}$ , označíme



To znamená: „napojíme dráty“, „jednotlivé koeficienty projdou po drátech směrem nahoru“ a tam se vynásobí.<sup>6</sup>

**1.7.3 Definice ( $\Gamma$ -kombinace)** Ať  $\Gamma$  je operad koeficientů. Lineární kombinaci

$$\sum_{i=1}^k a_i \vec{v}_i$$

v lineárním prostoru nad  $\mathbb{F}$  budeme říkat  $\Gamma$ -kombinace, pokud platí  $(a_1, \dots, a_k) \in \Gamma_k$ .

**1.7.4 Příklad**

(1) Systém množin, zadaný pro  $k \in \mathbb{N}$  následovně

$$\Gamma_k = \underbrace{\mathbb{F} \times \dots \times \mathbb{F}}_{k\text{-krát}}$$

je operad koeficientů:

(a) Seznam (1) je v  $\Gamma_1 = \mathbb{F}$ .

<sup>6</sup>To je důvod, proč jsme seznam (1) značili jako „nepopsaný drát“.

(b) Je-li  $(a_1, \dots, a_k)$  v  $\Gamma_k$  a jestliže  $(b_{11}, \dots, b_{1j_1})$  v  $\Gamma_{j_1}, \dots, (b_{k1}, \dots, b_{kj_k})$  v  $\Gamma_{j_k}$ , potom

$$(a_1 \cdot b_{11}, \dots, a_1 \cdot b_{1j_1}, a_2 \cdot b_{21}, \dots, a_2 \cdot b_{2j_2}, \dots, a_k \cdot b_{k1}, \dots, a_k \cdot b_{kj_k})$$

je v  $\Gamma_{j_1+\dots+j_k}$ .

Příslušné  $\Gamma$ -kombinace jsou *všechny* lineární kombinace. Operad  $\Gamma$  totiž neklade na koeficienty žádné omezení.

(2) Systém množin

$$\Gamma_k = \{(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{\mathbb{F} \times \dots \times \mathbb{F}}_{k\text{-krát}} \mid \sum_{i=1}^k a_i = 1\}$$

je operad koeficientů:

(a) Seznam (1) je v  $\Gamma_1 = \{1\}$ .

(b) Je-li  $(a_1, \dots, a_k)$  v  $\Gamma_k$  a jestliže  $(b_{11}, \dots, b_{1j_1})$  v  $\Gamma_{j_1}, \dots, (b_{k1}, \dots, b_{kj_k})$  v  $\Gamma_{j_k}$ , potom

$$(a_1 \cdot b_{11}, \dots, a_1 \cdot b_{1j_1}, a_2 \cdot b_{21}, \dots, a_2 \cdot b_{2j_2}, \dots, a_k \cdot b_{k1}, \dots, a_k \cdot b_{kj_k})$$

je v  $\Gamma_{j_1+\dots+j_k}$ , protože

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{j_i} a_i b_{ij} = \sum_{i=1}^k a_i \underbrace{\sum_{j=1}^{j_i} b_{ij}}_{=1} = \sum_{i=1}^k a_i = 1$$

Příslušné  $\Gamma$ -kombinace jsou *afinní* kombinace. Pomocí tohoto pojmu lze vybudovat teorii *afinních podprostorů* lineárních prostorů. Pro afinní podprostory prostoru  $\mathbb{R}^n$  odkazujeme na Definici 7.1.1.

(3) Je-li  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , pak systém množin

$$\Gamma_k = \{(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}} \mid a_1 \geq 0, \dots, a_k \geq 0\}$$

je operad koeficientů:

(a) Seznam (1) je v  $\Gamma_1 = [0; +\infty)$ .

(b) Je-li  $(a_1, \dots, a_k)$  v  $\Gamma_k$  a jestliže  $(b_{11}, \dots, b_{1j_1})$  v  $\Gamma_{j_1}, \dots, (b_{k1}, \dots, b_{kj_k})$  v  $\Gamma_{j_k}$ , potom

$$(a_1 \cdot b_{11}, \dots, a_1 \cdot b_{1j_1}, a_2 \cdot b_{21}, \dots, a_2 \cdot b_{2j_2}, \dots, a_k \cdot b_{k1}, \dots, a_k \cdot b_{kj_k})$$

je v  $\Gamma_{j_1+\dots+j_k}$ , protože  $a_i b_{ij} \geq 0$  pro všechna  $i$  a  $j$ .

Příslušným lineárním kombinacím v lineárních prostorech nad  $\mathbb{R}$  se říká *konické* kombinace. Budeme je podrobněji studovat v podkapitole J.1.

Konické kombinace lze studovat obecněji v lineárních prostorech nad *uspořádaným tělesem*  $\mathbb{F}$ , viz Definici 1.3.6. Podle Lemmatu 1.3.7 totiž v uspořádaném tělese  $\mathbb{F}$  platí nerovnost  $1 \geq 0$ .

(4) Je-li  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , pak systém množin

$$\Gamma_k = \{(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}} \mid a_1 \geq 0, \dots, a_k \geq 0, \sum_{i=1}^k a_i = 1\}$$

je operad koeficientů:

(a) Seznam (1) je v  $\Gamma_1 = \{1\}$ .

(b) Je-li  $(a_1, \dots, a_k) \in \Gamma_k$  a jestliže  $(b_{11}, \dots, b_{1j_1}) \in \Gamma_{j_1}, \dots, (b_{k1}, \dots, b_{kj_k}) \in \Gamma_{j_k}$ , potom

$$(a_1 \cdot b_{11}, \dots, a_1 \cdot b_{1j_1}, a_2 \cdot b_{21}, \dots, a_1 \cdot b_{2j_2}, \dots, a_k \cdot b_{1k}, \dots, a_k \cdot b_{1j_k})$$

je v  $\Gamma_{j_1+\dots+j_k}$ , protože  $a_i \cdot b_{ij} \geq 0$  pro všechna  $i, j$  a platí

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{j_i} a_i b_{ij} = \sum_{i=1}^k a_i \underbrace{\sum_{j=1}^{j_i} b_{ij}}_{=1} = \sum_{i=1}^k a_i = 1$$

Příslušným lineárním kombinacím v lineárních prostorech nad  $\mathbb{R}$  se říká *konvexní* kombinace. Budeme je podrobněji studovat v podkapitole J.1.

Konvexní kombinace lze studovat obecněji v lineárních prostorech nad *uspořádaným tělesem*  $\mathbb{F}$ , viz Definici 1.3.6. Podle Lemmatu 1.3.7 totiž v uspořádaném tělese  $\mathbb{F}$  platí nerovnost  $1 \geq 0$ .

(5) Je-li  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , pak systém množin

$$\Gamma_k = \{(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}} \mid \sum_{i=1}^k |a_i| \leq 1\}$$

je operad koeficientů:

(a) Seznam (1) je v  $\Gamma_1 = \{1\}$ .

(b) Je-li  $(a_1, \dots, a_k) \in \Gamma_k$  a jestliže  $(b_{11}, \dots, b_{1j_1}) \in \Gamma_{j_1}, \dots, (b_{k1}, \dots, b_{kj_k}) \in \Gamma_{j_k}$ , potom

$$(a_1 \cdot b_{11}, \dots, a_1 \cdot b_{1j_1}, a_2 \cdot b_{21}, \dots, a_1 \cdot b_{2j_2}, \dots, a_k \cdot b_{1k}, \dots, a_k \cdot b_{1j_k})$$

je v  $\Gamma_{j_1+\dots+j_k}$ , protože platí

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{j_i} |a_i b_{ij}| = \sum_{i=1}^k |a_i| \underbrace{\sum_{j=1}^{j_i} |b_{ij}|}_{\leq 1} \leq \sum_{i=1}^k |a_i| \leq 1$$

Příslušným lineárním kombinacím v lineárních prostorech nad  $\mathbb{R}$  se říká *absolutně konvexní* kombinace.

Absolutně konvexní kombinace lze studovat obecněji v lineárních prostorech nad *uspořádaným tělesem*  $\mathbb{F}$ , viz Definici 1.3.6. Podle Lemmatu 1.3.7 totiž v uspořádaném tělese  $\mathbb{F}$  platí nerovnost  $1 \geq 0$ .

(6) A řada dalších... viz například knihu

☞ Semyon S. Kutateladze, *Fundamentals of functional analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

Srovnáme-li Definici 1.7.3 s Definicí 1.5.3 obecné lineární kombinace, zjistíme, že v  $\Gamma$ -kombinaci připouštíme pouze *některé*  $k$ -tice koeficientů. V jistém smyslu tedy budeme zobecňovat výsledky podkapitoly 1.5. Příkladem je hned následující definice (srovnejte ji s Definicí 1.5.6).

**1.7.5 Definice** Ať  $\Gamma$  je operad koeficientů. Ať  $M$  je jakákoli podmnožina lineárního prostoru  $L$  nad  $\mathbb{F}$ . Podmnožině  $\Gamma\text{-hull}(M) \subseteq L$ , která je definována následovně

$$\Gamma\text{-hull}(M) = \{\vec{x} \mid \vec{x} \text{ je } \Gamma\text{-kombinací vektorů z } M\}$$

říkáme  $\Gamma$ -*obal* množiny  $M$ .

### 1.7.6 Příklad (Afinní, konický a konvexní obal)

(1) Pro operad  $\Gamma$  *afinních* kombinací (viz Příklad 1.7.4(2)) píšeme

$$\text{aff}(M)$$

místo  $\Gamma\text{-hull}(M)$  a mluvíme o *afinním obalu* množiny  $M$ .

(2) Pro operad  $\Gamma$  *konických* kombinací (viz Příklad 1.7.4(3)) píšeme

$$\text{cone}(M)$$

místo  $\Gamma\text{-hull}(M)$  a mluvíme o *konickém obalu* množiny  $M$ .

(3) Pro operad  $\Gamma$  *konvexních* kombinací (viz Příklad 1.7.4(4)) píšeme

$$\text{conv}(M)$$

místo  $\Gamma\text{-hull}(M)$  a mluvíme o *konvexním obalu* množiny  $M$ .

Konickým a konvexním obalům se budeme věnovat v podkapitole J.1.

Z definice  $\Gamma$ -obalu (stejně jako u lineárního obalu) okamžitě plyne jeho konečný charakter:

**1.7.7 Lemma (Konečný charakter  $\Gamma$ -obalu)** *Jestliže  $\vec{x}$  leží v  $\Gamma\text{-hull}(M)$ , potom existuje konečná množina  $M'$  taková, že  $M' \subseteq M$  a  $\vec{x}$  leží v  $\Gamma\text{-hull}(M')$ .*

DŮKAZ. Jestliže  $\vec{x}$  je v  $\Gamma\text{-hull}(M)$ , pak podle definice je  $\vec{x} = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \vec{x}_i$  pro nějakou  $k$ -tici  $(\vec{x}_i)_{i=1}^k$  vektorů z  $M$ . Množina  $M' := \{\vec{x}_i \mid i = 1, \dots, k\}$  je konečná,  $\vec{x}$  je v  $\Gamma\text{-hull}(M')$ , a platí  $M' \subseteq M$ . ■

Důkaz Lemmatu 1.7.7 je zcela analogický důkazu Lemmatu 1.5.7. Tak tomu bude u většiny tvrzení v této podkapitole. Přesto raději (většinu) důkazů uvedeme.

Jako další ukážeme základní uzávěrové vlastnosti  $\Gamma$ -obalu.

**1.7.8 Tvrzení (Uzávěrové vlastnosti  $\Gamma$ -obalu)** *Ať  $\Gamma$  je operad koeficientů. Ať  $M$  a  $N$  jsou jakékoli množiny vektorů v prostoru  $L$  nad  $\mathbb{F}$ . Potom platí:*

- (1) *Jestliže  $M \subseteq N$ , potom  $\Gamma\text{-hull}(M) \subseteq \Gamma\text{-hull}(N)$ .*
- (2)  *$M \subseteq \Gamma\text{-hull}(M)$ .*
- (3)  *$\Gamma\text{-hull}(\Gamma\text{-hull}(M)) \subseteq \Gamma\text{-hull}(M)$ .*

DŮKAZ.

- (1) Předpokládejme, že  $\vec{v}$  je v  $\Gamma\text{-hull}(M)$ . To znamená, že  $\vec{v} = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \vec{v}_i$ , kde každé  $\vec{v}_i$  je v množině  $M$  a  $(a_1, \dots, a_k) \in \Gamma$ . Protože  $M \subseteq N$ , je  $\vec{v} = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \vec{v}_i$ , kde každé  $\vec{v}_i$  je v množině  $N$  a  $(a_1, \dots, a_k) \in \Gamma$ . To znamená, že  $\vec{v}$  je v množině  $\Gamma\text{-hull}(N)$ .
- (2) Ať  $\vec{v}$  je v množině  $M$ . Potom platí  $\vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$ . Protože víme, že  $1$  leží v  $\Gamma_1$ , je  $\vec{v}$  v množině  $\Gamma\text{-hull}(M)$ .
- (3) Předpokládejme, že  $\vec{v}$  je v množině  $\Gamma\text{-hull}(\Gamma\text{-hull}(M))$ . To znamená, že  $\vec{v} = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \vec{v}_i$ , kde každé  $\vec{v}_i$  je v množině  $\Gamma\text{-hull}(M)$  a  $(a_1, \dots, a_k) \in \Gamma_k$ . Pro každé  $i$  napíšeme  $\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{j_i} b_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}$ , kde každé  $\vec{v}_{ij}$  je v množině  $M$  a  $(b_{i1}, \dots, b_{ij_i}) \in \Gamma_{j_i}$ .

Celkově platí

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \sum_{j=1}^{j_i} b_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{j_i} (a_i \cdot b_{ij}) \cdot \vec{v}_{ij}$$

Protože  $\Gamma$  je operad koeficientů, platí že

$$(a_1 \cdot b_{11}, \dots, a_1 \cdot b_{1j_1}, a_2 \cdot b_{21}, \dots, a_2 \cdot b_{2j_2}, \dots, a_k \cdot b_{1k}, \dots, a_k \cdot b_{kj_k})$$

je v  $\Gamma_{j_1+\dots+j_k}$ . To znamená, že  $\vec{v}$  je v množině  $\Gamma\text{-hull}(M)$ .

Důkaz je u konce. ■

**Tvrzení 1.7.8** vysvětluje dvě podmínky v Definici 1.7.1 operadu koeficientů: podmínka (1) zajišťuje, že každý vektor lze považovat za (velmi jednoduchou)  $\Gamma$ -kombinaci, podmínka (2) zajišťuje, že  $\Gamma$ -kombinace  $\Gamma$ -kombinací je opět  $\Gamma$ -kombinace. Proto platí podmínky  $M \subseteq \Gamma\text{-hull}(M)$  a  $\Gamma\text{-hull}(\Gamma\text{-hull}(M)) \subseteq \Gamma\text{-hull}(M)$ . Viz také Poznámku 1.7.2.

**1.7.9 Definice** Ať  $\Gamma$  je operad koeficientů. Množina  $M$  v lineárním prostoru  $L$  je  $\Gamma$ -uzavřená, pokud platí  $\Gamma\text{-hull}(M) \subseteq M$ .

**1.7.10 Věta (Charakterisace  $\Gamma$ -uzavřených podmnožin)** Ať  $\Gamma$  je operad koeficientů. Pro podmnožinu  $W$  lineárního prostoru  $L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1)  $W$  je  $\Gamma$ -uzavřená podmnožina prostoru  $L$ .
- (2) Každá  $\Gamma$ -kombinace prvků  $W$  je opět prvkem  $W$ .
- (3) Platí rovnost  $\Gamma\text{-hull}(W) = W$ .

**DŮKAZ.** Podmínky (1) a (2) jsou navzájem ekvivalentní, protože  $\Gamma\text{-hull}(W)$  obsahuje právě všechny  $\Gamma$ -kombinace vektorů z množiny  $W$ .

Z podmínky (1) plyne podmínka (3): podle Tvrzení 1.7.8 totiž vždy platí  $W \subseteq \Gamma\text{-hull}(W)$ .

Z podmínky (3) plyne podmínka (1) triviálně. ■

### 1.7.11 Příklad (Afinní podprostory, konické a konvexní množiny)

- (1) Pro operad  $\Gamma$  *afinních* kombinací (viz Příklad 1.7.4(2)) neprázdným  $\Gamma$ -uzavřeným množinám v  $L$ , tj. neprázdným množinám  $W$ , které splňují rovnost

$$\text{aff}(W) = W$$

říkáme *afinní podprostor* prostoru  $L$ .

- (2) Pro operad  $\Gamma$  *konických* kombinací (viz Příklad 1.7.4(3))  $\Gamma$ -uzavřeným množinám v  $L$ , tj. množinám  $W$ , které splňují rovnost

$$\text{cone}(W) = W$$

říkáme *konická podmnožina* v prostoru  $L$ .

- (3) Pro operad  $\Gamma$  *konvexních* kombinací (viz Příklad 1.7.4(4))  $\Gamma$ -uzavřeným množinám v  $L$ , tj. množinám  $W$ , které splňují rovnost

$$\text{conv}(W) = W$$

říkáme *konvexní podmnožina* v prostoru  $L$ .

Afinním podprostorům lineárního prostoru se budeme věnovat v Kapitole 7. Konickým a konvexním množinám v lineárních prostorech nad  $\mathbb{R}$  se budeme věnovat v podkapitole J.1.

**1.7.12 Tvrzení** Ať  $\Gamma$  je operad koeficientů. Ať  $M$  je jakákoli podmnožina lineárního prostoru  $L$ . Potom  $\Gamma\text{-hull}(M)$  je nejmenší  $\Gamma$ -uzavřená podmnožina prostoru  $L$  obsahující množinu  $M$ , tj. jsou splněny následující dvě podmínky:

- (1) Platí  $M \subseteq \Gamma\text{-hull}(M)$  a  $\Gamma\text{-hull}(M)$  je  $\Gamma$ -uzavřená podmnožina prostoru  $L$ .
- (2) Jestliže  $M \subseteq W$ , kde  $W$  je  $\Gamma$ -uzavřená podmnožina lineárního prostoru  $L$ , potom platí  $\Gamma\text{-hull}(M) \subseteq W$ .



DŮKAZ. Využijeme Tvzení 1.7.8: víme, že platí  $M \subseteq \Gamma\text{-hull}(M)$  a  $\Gamma\text{-hull}(\Gamma\text{-hull}(M)) \subseteq \Gamma\text{-hull}(M)$ . Podmínka (1) je tedy splněna.

Ať  $M \subseteq W$ . Potom podle Tvzení 1.7.8 platí  $\Gamma\text{-hull}(M) \subseteq \Gamma\text{-hull}(W)$ . Protože  $W$  je  $\Gamma$ -uzavřená podmnožina, platí  $\Gamma\text{-hull}(W) \subseteq W$ . Dokázali jsme, že  $\Gamma\text{-hull}(M) \subseteq W$ . ■

Tvrzení 1.7.12 vysvětluje, proč jsme třem podmínkám z Tvzení 1.7.8 říkali *uzávěrové vlastnosti*  $\Gamma$ -obalu. Podle Tvzení 1.7.12 totiž  $\Gamma\text{-hull}$  „zabalí“ množinu  $M$  tak, aby z ní byla  $\Gamma$ -uzavřená podmnožina  $\Gamma\text{-hull}(M)$ .

**1.7.13 Tvzení (Průnik systému  $\Gamma$ -uzavřených podmnožin je  $\Gamma$ -uzavřená podmnožina)** Ať  $\Gamma$  je operad koeficientů. Ať  $W_i, i \in I$ , je jakýkoli systém  $\Gamma$ -uzavřených podmnožin lineárního prostoru  $L$ . Potom  $\bigcap_{i \in I} W_i$  je opět  $\Gamma$ -uzavřená podmnožina lineárního prostoru  $L$ .

DŮKAZ. Označme  $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ . Protože pro každé  $i$  platí  $W \subseteq W_i$ , platí i  $\Gamma\text{-hull}(W) \subseteq \Gamma\text{-hull}(W_i)$  pro každé  $i \in I$ . Pro každé  $i \in I$  také platí  $\Gamma\text{-hull}(W_i) \subseteq W_i$ . Tudíž pro každé  $i \in I$  platí  $\Gamma\text{-hull}(W) \subseteq W_i$ . To znamená, že platí i inkluze

$$\Gamma\text{-hull}(W) \subseteq \bigcap_{i \in I} W_i = W$$

a to jsme chtěli dokázat. ■

**1.7.14 Příklad (Sjednocení  $\Gamma$ -uzavřených podmnožin obecně není  $\Gamma$ -uzavřená podmnožina)**

Příklad 1.6.8 ukazuje, že sjednocení lineárních podprostorů obecně není lineární podprostor. To ale přesně znamená, že sjednocení  $\Gamma$ -uzavřených podmnožin obecně není  $\Gamma$ -uzavřená podmnožina pro případ operadu *všech* koeficientů. Podobné příklady lze konstruovat i pro jiné operady  $\Gamma$ . Například: ať  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  a ať operad koeficientů je zadán následovně:

$$\Gamma_k = \{(a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}} \mid a_1 \geq 0, \dots, a_k \geq 0, \sum_{i=1}^k a_i = 1\}$$

To jest,  $\Gamma$  je operad pro *konvexní* kombinace. Příslušným  $\Gamma$ -uzavřeným množinám říkáme *konvexní* množiny.

V prostoru  $\mathbb{R}^2$  jsou následující dvě podmnožiny

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \geq 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \geq 0 \right\}$$

konvexní. Množina  $W_1 \cup W_2$  ovšem konvexní podmnožina lineárního prostoru  $\mathbb{R}^2$  není. Například vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  leží ve  $W_1 \cup W_2$  (protože leží ve  $W_1$ ) a vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  leží ve  $W_1 \cup W_2$  (protože leží ve  $W_2$ ), ale vektor

$$1/2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

(který je konvexní kombinací vektorů z  $W_1$  a  $W_2$ ) neleží ve  $W_1 \cup W_2$ .

Pozor: analogie Tvzení 1.6.9 pro obecné operady *neplatí*. Například pro operad konvexních kombinací jsou množiny

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid 0 \leq x \leq 1 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid 1 \leq x \leq 2 \right\}, \quad W_1 \cup W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid 0 \leq x \leq 2 \right\}$$

konvexní podmnožiny prostoru  $\mathbb{R}^2$ , ale neplatí ani  $W_1 \subseteq W_2$ , ani  $W_2 \subseteq W_1$ .

Teorie obecných operadů je velmi bohatá. My jsme v této podkapitole použili jen naprosté minimum této teorie. Vůbec jsme se nedotkli problému *vygenerování* operadu koeficientů, pokud jsou zadány pouze některé množiny  $S_k$  koeficientů pro  $k \in \mathbb{N}$ . Více se lze dočíst například v knihách

- ☞ Tom Leinster, *Higher operads, higher categories*, Cambridge Univ. Press, 2004.
- ☞ Martin Markl, Steve Shnider a Jim Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs 96, AMS, 2002.

## Kapitola 2

# Lineární zobrazení

*A, B, and C do a certain piece of work. A can do as much work in one hour as B in two, or C in four. Find how long they work at it.*

Stephen Leacock, *A, B, and C, or, The human element in mathematics*

Dalším základním pojmem lineární algebry je pojem *lineárního zobrazení*. Lineární zobrazení jsou taková, která respektují sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. Jinými slovy, lineární zobrazení mezi lineárními prostory jsou ta „správná“ zobrazení mezi lineárními prostory.

Definici a příkladům *lineárních zobrazení* je věnována podkapitola 2.1. Ukážeme, že linearita zobrazení má geometrickou interpretaci (*zachovávání přímek*) a ukážeme, že lineární zobrazení mezi dvěma lineárními prostory tvoří opět lineární prostor.

V podkapitole 2.2 se zaměříme na *skládání lineárních zobrazení*. Pro znázorňování složených lineárních zobrazení zavedeme notaci *komutativních diagramů*, kterou budeme v dalším textu často používat.

Speciální typy lineárních zobrazení (*monomorfismy*, *epimorfismy* a *isomorfismy*) budeme studovat v podkapitole 2.3. Zavedeme také pojmy *jádra* a *obrazu* lineárních zobrazení, a ukážeme, jakým způsobem tyto pojmy souvisí s tím, zda je lineární zobrazení monomorfismus či epimorfismus.

Lineární algebra slouží i k pochopení *lineárních rovnic*. Lineární rovnice zavedeme (opět s využitím lineárních zobrazení) v podkapitole 2.4. Dokážeme také důležitou *větu o řešitelnosti lineárních rovnic* (takzvanou *Frobeniovu větu*) a vysvětlíme její použití na řadě praktických problémů (například geometrie přímek v rovině, hledání primitivních funkcí a řešení diferenciálních rovnic).

Podkapitola 2.5 je věnována *lineárním formám* na lineárním prostoru. Příkladem lineární formy je *určitý integrál*. Kromě příkladů zavedeme důležitý pojem *duálního lineárního prostoru* a vyslovíme několik základních faktů o dualitě.

## 2.1 Lineární zobrazení

**2.1.1 Definice** Ať  $L_1$  a  $L_2$  jsou lineární prostory nad  $\mathbb{F}$ . Zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  nazveme *lineární*, pokud pro všechny vektory  $\vec{x}, \vec{y} \in L_1$  a pro všechny skaláry  $a \in \mathbb{F}$  platí rovnosti:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \quad f(a \cdot \vec{x}) = a \cdot f(\vec{x})$$

Linearitu zobrazení lze poznat i následujícím způsobem, který v dalším budeme často používat.

**2.1.2 Lemma (Linearita = „zachovávání přímek“)** Ať  $L_1$  a  $L_2$  jsou lineární prostory nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (1) Zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární.
- (2) Pro všechny skaláry  $a \in \mathbb{F}$  a všechny vektory  $\vec{x}, \vec{s} \in L_1$  platí rovnost

$$f(\vec{x} + a \cdot \vec{s}) = f(\vec{x}) + a \cdot f(\vec{s})$$

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Pokud pro  $\mathbf{f}$  platí dvě rovnosti z Definice 2.1.1, potom jistě platí rovnosti

$$\mathbf{f}(\vec{x} + a \cdot \vec{s}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(a \cdot \vec{s}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + a \cdot \mathbf{f}(\vec{s})$$

pro všechny skaláry  $a \in \mathbb{F}$  a všechny vektory  $\vec{x}, \vec{s}$  z prostoru  $L_1$ .

Ze (2) plyne (1). Ať platí  $\mathbf{f}(\vec{x} + a \cdot \vec{s}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + a \cdot \mathbf{f}(\vec{s})$  pro všechny skaláry  $a \in \mathbb{F}$  a všechny vektory  $\vec{x}, \vec{s} \in L_1$ . Protože platí rovnosti

$$\mathbf{f}(\vec{o}) = \mathbf{f}(\vec{o} - \vec{o}) = \mathbf{f}(\vec{o} - 1 \cdot \vec{o}) = \mathbf{f}(\vec{o}) - 1 \cdot \mathbf{f}(\vec{o}) = \mathbf{f}(\vec{o}) - \mathbf{f}(\vec{o}) = \vec{o}$$

ukázali jsme, že platí  $\mathbf{f}(\vec{o}) = \vec{o}$ .

Potom platí

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\vec{x} + 1 \cdot \vec{y}) &= \mathbf{f}(\vec{x}) + 1 \cdot \mathbf{f}(\vec{y}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y}) \\ \mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) &= \mathbf{f}(\vec{o} + a \cdot \vec{x}) = \mathbf{f}(\vec{o}) + a \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o} + a \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že zobrazení  $\mathbf{f}$  splňuje obě rovnosti z Definice 2.1.1 a je tedy lineární. ■

Proč mluvíme o zachovávaní přímek? Podle Poznámky 1.6.16 si vektory tvaru  $\vec{x} + a \cdot \vec{s}$  lze představit jako přímkou procházející bodem  $\vec{x}$  a mající směr  $\vec{s}$ . Tudíž

Zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární právě tehdy, když každý bod  $\vec{x} + a \cdot \vec{s}$  z přímky, která prochází bodem  $\vec{x}$  a má směr  $\vec{s}$ , zobrazí na bod  $\mathbf{f}(\vec{x}) + a \cdot \mathbf{f}(\vec{s})$  z přímky, která prochází bodem  $\mathbf{f}(\vec{x})$  a má směr  $\mathbf{f}(\vec{s})$ .

**2.1.3 Poznámka (Linearita=platnost principu superposice)** Lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  jsou přesně ta zobrazení, která se „chovají dobře“ vzhledem k lineárním kombinacím. Přesněji:

Zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární právě tehdy, když platí *princip superposice*, tj. právě tehdy, když platí rovnost

$$\mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{f}(\vec{x}_i)$$

pro všechna  $n$ , všechny skaláry  $a_1, \dots, a_n$  z tělesa  $\mathbb{F}$  a všechny vektory  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  z lineárního prostoru  $L_1$ .

Důkaz tohoto tvrzení je jednoduchý: pokud pro  $\mathbf{f}$  platí princip superposice, platí i dvě rovnosti z Definice 2.1.1. Stačí použít princip superposice na dvě jednoduché lineární kombinace:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\vec{x} + \vec{y}) &= \mathbf{f}(1 \cdot \vec{x} + 1 \cdot \vec{y}) = 1 \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) + 1 \cdot \mathbf{f}(\vec{y}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y}) \\ \mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) &= a \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Pokud pro  $\mathbf{f}$  platí dvě rovnosti z Definice 2.1.1, pak platí princip superposice. Stačí použít matematickou indukci:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(a_1 \cdot \vec{x}_1) &= a_1 \cdot \mathbf{f}(\vec{x}_1) \\ \mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i\right) &= \mathbf{f}(a_1 \cdot \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^n a_i \cdot \vec{x}_i) = a_1 \cdot \mathbf{f}(\vec{x}_1) + \sum_{i=2}^n a_i \cdot \mathbf{f}(\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{f}(\vec{x}_i) \end{aligned}$$

**2.1.4 Poznámka (Negativní test na linearitu)** Pro jakékoli lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  musí platit rovnosti

$$\mathbf{f}(\vec{o}) = \mathbf{f}(0 \cdot \vec{o}) = 0 \cdot \mathbf{f}(\vec{o}) = \vec{o}$$

Z toho plyne jednoduchý test situace, kdy zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  lineární být *nemůže*:

Jakmile platí  $\mathbf{f}(\vec{o}) \neq \vec{o}$ , potom zobrazení  $\mathbf{f}$  není lineární.

Příkladem použití tohoto negativního testu je poznatek, že *translace* (také: *posunutí*) o nenulový vektor není lineární zobrazení. Přesněji: ať  $\vec{v}$  je pevně zvolený nenulový vektor v lineárním prostoru  $L$  a ať zobrazení  $\mathbf{tr}_{\vec{v}} : L \rightarrow L$  je definováno takto

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{v}$$

Protože  $\mathbf{tr}_{\vec{v}}(\vec{o}) = \vec{o} + \vec{v} = \vec{v} \neq \vec{o}$ , není zobrazení  $\mathbf{tr}_{\vec{v}} : L \rightarrow L$  lineární.

**2.1.5 Příklad** Uvedme některé příklady lineárních zobrazení.

- (1) Pro každý lineární prostor  $L$  je *identické zobrazení*  $\vec{x} \mapsto \vec{x}$  lineární. Toto lineární zobrazení budeme značit  $\text{id}_L : L \rightarrow L$  (většinou budeme psát pouze  $\text{id}$  místo  $\text{id}_L$ ). Pro všechny vektory  $\vec{x}, \vec{y} \in L$  a pro všechny skaláry  $a \in \mathbb{F}$  totiž platí rovnosti

$$\text{id}_L(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y} = \text{id}_L(\vec{x}) + \text{id}_L(\vec{y}), \quad \text{id}_L(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \vec{x} = a \cdot \text{id}_L(\vec{x})$$

- (2) Mírným zobecněním předchozího příkladu jsou lineární zobrazení, kterým říkáme *homotetie* (také: *stejnolehlost*). (Homotetiím se budeme podrobněji věnovat v Kapitole 10). Zvolme pevný skalár  $a_0$  z tělesa  $\mathbb{F}$ . Potom pro libovolný lineární prostor  $L$  nad  $\mathbb{F}$  je zobrazení  $\mathbf{f}(\vec{x}) = a_0 \cdot \vec{x}$  lineární zobrazení z  $L$  do  $L$ .

Linearitu homotetie ukážeme pomocí testu linearit z Lemmatu 2.1.2: rovnost

$$\mathbf{f}(\vec{x} + a \cdot \vec{s}) = a_0 \cdot (\vec{x} + a \cdot \vec{s}) = a_0 \cdot \vec{x} + a_0 \cdot a \cdot \vec{s} = a_0 \cdot \vec{x} + a \cdot a_0 \cdot \vec{s} = \mathbf{f}(\vec{x}) + a \cdot \mathbf{f}(\vec{s})$$

platí pro všechny vektory  $\vec{x}, \vec{s} \in L$  a pro všechny skaláry  $a \in \mathbb{F}$ .

- (3) Zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , které je zadáno následovně

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

je lineární podle testu linearit z Lemmatu 2.1.2, protože pro libovolná reálná čísla  $x_1, x_2, s_1, s_2$  a  $a$  platí rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}\right) &= \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x_1 + a \cdot s_1 \\ x_2 + a \cdot s_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + a \cdot s_1) + (x_2 + a \cdot s_2) \\ 3 \cdot (x_2 + a \cdot s_2) - 5 \cdot (x_1 + a \cdot s_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + a \cdot (s_1 + s_2) \\ (3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1) + a \cdot (3 \cdot s_2 - 5 \cdot s_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} s_1 + s_2 \\ 3 \cdot s_2 - 5 \cdot s_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + a \cdot \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Soupis základních informací o lineárních zobrazeních uzavřeme tvrzením, které říká, že lineární zobrazení mezi sebou můžeme sčítat a že lineární zobrazení je možné vynásobit skalárem. To znamená: všechna lineární zobrazení mezi pevnými lineárními prostory opět tvoří lineární prostor!

**2.1.6 Tvrzení (Lineární prostor lineárních zobrazení)** Ať  $L_1$  a  $L_2$  jsou lineární prostory nad  $\mathbb{F}$ . Potom množina

$$\text{Lin}(L_1, L_2) = \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2 \text{ je lineární zobrazení}\}$$

je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ , když definujeme součet  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  a skalární násobek  $a \cdot \mathbf{f}$  následovně

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\vec{x}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{g}(\vec{x}), \quad (a \cdot \mathbf{f})(\vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$$

pro každý vektor  $\vec{x} \in L_1$  a každý skalár  $a \in \mathbb{F}$ .

**DŮKAZ.** Nejprve musíme ukázat, že pro lineární zobrazení  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}$  a skalár  $a$  jsou zobrazení  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  a  $a \cdot \mathbf{f}$  opět lineární. Použijeme k tomu Lemma 2.1.2.

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} + \mathbf{g})(\vec{x} + b \cdot \vec{y}) &= \mathbf{f}(\vec{x} + b \cdot \vec{y}) + \mathbf{g}(\vec{x} + b \cdot \vec{y}) \\ &= \mathbf{f}(\vec{x}) + b \cdot \mathbf{f}(\vec{y}) + \mathbf{g}(\vec{x}) + b \cdot \mathbf{g}(\vec{y}) \\ &= (\mathbf{f} + \mathbf{g})(\vec{x}) + b \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{g})(\vec{y}) \\ (a \cdot \mathbf{f})(\vec{x} + b \cdot \vec{y}) &= a \cdot (\mathbf{f}(\vec{x} + b \cdot \vec{y})) \\ &= a \cdot (\mathbf{f}(\vec{x}) + b \cdot \mathbf{f}(\vec{y})) \\ &= a \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) + a \cdot b \cdot \mathbf{f}(\vec{y}) \\ &= (a \cdot \mathbf{f})(\vec{x}) + b \cdot (a \cdot \mathbf{f})(\vec{y}) \end{aligned}$$

Nulový vektor v  $\text{Lin}(L_1, L_2)$  je lineární zobrazení  $\vec{x} \mapsto \vec{0}$ . Zbývá dokázat, že  $\text{Lin}(L_1, L_2)$  je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ . Důkaz je shodný s důkazem pro prostor  $I$ -tic nad  $\mathbb{F}$  z Příkladu 1.2.9. Všechny axiomy z definice lineárního prostoru platí po složkách. ■

**2.1.7 Příklad** V Příkladu 2.1.5 jsme ukázali, že

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

je lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$ .

Spočteme lineární kombinaci  $3 \cdot \mathbf{f} - 6 \cdot \mathbf{id}$  v lineárním prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Protože platí

$$(3 \cdot \mathbf{f} - 6 \cdot \mathbf{id})\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 3 \cdot \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - 6 \cdot \mathbf{id}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ 3 \cdot x_2 - 15 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

je  $3 \cdot \mathbf{f} - 6 \cdot \mathbf{id}$  lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$  (označme jej  $\mathbf{g}$ )

$$\mathbf{g}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ 3 \cdot x_2 - 15 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Skládání lineárních zobrazení

Z lineárních zobrazení lze vytvořit další lineární zobrazení *skládáním*. Připomeňme nyní, jak se skládají *obyčejná* zobrazení mezi *množinami*.



**2.2.1 Příklad (Skládání množinových zobrazení a komutativní diagramy)** Pro zobrazení  $f : A \rightarrow B$  a zobrazení  $g : B \rightarrow C$  lze definovat nové zobrazení  $h : A \rightarrow C$  takto:

$$h : a \mapsto g(f(a))$$

Tomuto novému zobrazení  $h$  říkáme *složení* zobrazení  $f$  a  $g$  a značíme jej

$$g \cdot f : A \rightarrow C$$

Skládání zobrazení má příjemné vlastnosti, které připomínají násobení čísel:

- (1) Skládání zobrazení je *asociativní*, tj. pro libovolná zobrazení  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  a  $h : C \rightarrow D$  platí rovnost

$$(h \cdot g) \cdot f = h \cdot (g \cdot f)$$

- (2) Pro každou množinu  $A$  se zobrazení  $\text{id}_A : a \mapsto a$  chová podobně jako číslo 1, tj. platí rovnosti

$$f \cdot \text{id}_A = f = \text{id}_B \cdot f$$

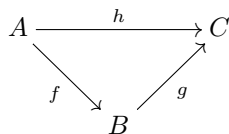
pro každé zobrazení  $f : A \rightarrow B$ . Zobrazení  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  se říká *identické zobrazení* (také: *identita*) na množině  $A$ . V dalším budeme spodní index často vynechávat a budeme psát jen *id* místo (například)  $\text{id}_A$ .

Pro práci se složenými zobrazeními se nám velmi často bude hodit zápis, kdy jméno zobrazení zapíšeme nad (nebo pod) šipku  $\rightarrow$ . Zápisy

$$f : A \longrightarrow B \qquad A \xrightarrow{f} B \qquad A \xrightarrow[f]{} B$$

tedy znamenají totéž.

Zápis jména zobrazení nad nebo pod šipku totiž umožní „obrázkový“ zápis skládání zobrazení. Například obrázek



v sobě nese následující informace:

- (1) Jsou zadána tři zobrazení  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  a  $h : A \rightarrow C$ .
- (2) Existují dvě možnosti, jak ve směru šipek docestovat ze „začátku“ na „konec“ obrázku (začátek je v bodě označeném  $A$  a konec je v bodě označeném  $C$ ):
  - (a) Nejprve jedeme šipkou jménem  $f$  do  $B$  a poté šipkou jménem  $g$  do  $C$ . Tím vykonáme přesně složené zobrazení  $g \cdot f$ .
  - (b) Jedeme šipkou jménem  $h$  z  $A$  do  $C$ .

Výše uvedený obrázek říká, že obě cesty dávají totéž, neboli  $h = g \cdot f$ .

Díky asociativitě skládání mají smysl i obrázky obsahující orientované cesty větší délky než dvě: například orientovanou cestu

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

můžeme číst jako zobrazení  $(h \cdot g) \cdot f$  nebo jako zobrazení  $h \cdot (g \cdot f)$ .

Obrázky mohou být i složitější. Pokud mají jednoznačně zadaný „začátek“ a „konec“, vyprávějí takové obrázky o rovnostech nejruznějších složených zobrazení. Například obrázek

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow \\ X & \xrightarrow{x} & Y & \xrightarrow{y} & Z \end{array}$$

v sobě nese následující informace:

- (1) Jsou zadána zobrazení  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $a : A \rightarrow X$ ,  $b : B \rightarrow Y$ ,  $c : C \rightarrow Z$ ,  $x : X \rightarrow Y$  a  $y : Y \rightarrow Z$ .
- (2) Platí rovnosti

$$c \cdot g \cdot f = y \cdot x \cdot a = y \cdot b \cdot f$$

Vyjadřování pomocí takových obrázků (říkáme jim *komutativní diagramy*) je velmi úsporné a my jej v dalším budeme často používat. Abstraktnímu studiu komutativních diagramů se systematicky věnuje *teorie kategorií*, viz například knihu

☞ Michael Barr a Charles Wells, *Category Theory for Computing Science*, Prentice Hall 1995

Notace komutativních diagramů bude v tomto textu hrát zásadní úlohu. Tuto notaci je nutné pochopit dokonale.

V některé literatuře se skládání zobrazení  $f$  a  $g$  značí  $g \circ f$ . My budeme značit skládání zobrazení  $g \cdot f$  (používáme tedy stejnou značku pro násobení skalárů a skládání zobrazení). Máme pro to dobrý důvod. Jak uvidíme později v Kapitole 4, je skládání lineárních zobrazení vlastně jakési (poněkud komplikované) násobení.



### 2.2.2 Poznámka (Slepování komutativních diagramů) Mějme dva komutativní diagramy

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ X & \xrightarrow{x} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ b \downarrow & & \downarrow c \\ Y & \xrightarrow{y} & Z \end{array}$$

Všimněme si, že tyto diagramy mají *společné* zobrazení  $b : B \rightarrow Y$ . „Slepíme-li“ oba diagramy za společné zobrazení  $b : B \rightarrow Y$ , dostaneme obrázek

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow \\ X & \xrightarrow{x} & Y & \xrightarrow{y} & Z \end{array}$$

který je opět komutativním diagramem. Často společné zobrazení  $b : B \rightarrow Y$  nebudeme chtít zapisovat a předchozí diagram napíšeme jako

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ a \downarrow & & & & c \downarrow \\ X & \xrightarrow{x} & Y & \xrightarrow{y} & Z \end{array}$$

nebo dokonce jako

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g \cdot f} & C \\ a \downarrow & & c \downarrow \\ X & \xrightarrow{y \cdot x} & Z \end{array}$$



**2.2.3 Poznámka (Trhání diagramů nefunguje)** Pozor! „Trhání“ diagramů obecně nefunguje! Jestliže

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow \\ X & \xrightarrow{x} & Y & \xrightarrow{y} & Z \end{array}$$

je komutativní diagram, pak se může stát, že ani jeden z diagramů

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \downarrow & & b \downarrow \\ X & \xrightarrow{x} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ b \downarrow & & c \downarrow \\ Y & \xrightarrow{y} & Z \end{array}$$

komutativní není.

**2.2.4 Tvzení** *Identické zobrazení je lineární. Složení lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení. Skládání lineárních zobrazení je asociativní.*

DŮKAZ. První tvrzení je triviální. Ať  $L$  je jakýkoli lineární prostor. Identické zobrazení<sup>1</sup>  $\text{id}_L : L \rightarrow L$  je dáno předpisem  $\text{id}_L(\vec{x}) = \vec{x}$ . To je jistě lineární zobrazení, viz Příklad 2.1.5.

Ukážeme, že složení lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení. Předpokládejme, že  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  a  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$  jsou lineární zobrazení. Chceme ukázat, že

$$\vec{x} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x}))$$

je opět lineární zobrazení. To plyne ale okamžitě z toho, že jak  $\mathbf{f}$  tak  $\mathbf{g}$  jsou lineární zobrazení. Rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{y})) &= \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y})) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x})) + \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{y})) \\ \mathbf{g}(\mathbf{f}(a \cdot \vec{x})) &= \mathbf{g}(a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})) = a \cdot \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x})) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>V dalším budeme často spodní index vynechávat a psát pouze  $\text{id}$  místo  $\text{id}_L$ .



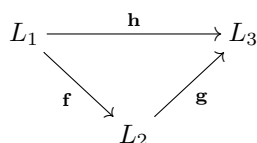
platí pro všechny vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  z  $L_1$  a všechny skaláry z  $\mathbb{F}$ .

Protože skládání obyčejných zobrazení je asociativní (viz Příklad 2.2.1), je i skládání lineárních zobrazení asociativní. ■

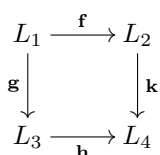
Zavádíme další konvenci: lineární zobrazení budeme značit *tučně*, tj. **f**, **g**, a tak dále.

Tvrzení 2.2.4 nám tedy dovoluje malovat komutativní diagramy (viz Příklad 2.2.1) pro *lineární* zobrazení, protože skládání lineárních zobrazení je asociativní. Dvěma nejčastěji používaným komutativním diagramům dáme jména.

### 2.2.5 Definice Komutativnímu diagramu



lineárních prostorů a lineárních zobrazení říkáme *komutativní trojúhelník*. Komutativnímu diagramu



lineárních prostorů a lineárních zobrazení říkáme *komutativní čtverec*.

**2.2.6 Příklad (Universální vlastnost součinu lineárních prostorů)** Připomeňme si z Příkladu 1.2.15 součin  $L_1 \times L_2$  lineárních prostorů  $L_1$  a  $L_2$ .

Ukážeme, že prostor  $L_1 \times L_2$  je vybaven dvěma *kanonickými* lineárními zobrazeními

$$\mathbf{p}_1 : L_1 \times L_2 \longrightarrow L_1, \quad \mathbf{p}_2 : L_1 \times L_2 \longrightarrow L_2$$

která mají následující *universální vlastnost*:

*Pro jakýkoli lineární prostor  $L$  a jakoukoli dvojici lineárních zobrazení*

$$\mathbf{f}_1 : L \longrightarrow L_1, \quad \mathbf{f}_2 : L \longrightarrow L_2$$

*existuje právě jedno lineární zobrazení  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) : L \longrightarrow L_1 \times L_2$  takové, že diagram*

$$\begin{array}{ccccc} & & L_2 & & \\ & \nearrow \mathbf{f}_2 & \uparrow \mathbf{p}_2 & & \\ L & \xrightarrow{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)} & L_1 \times L_2 & \xrightarrow{\quad} & \\ & \searrow \mathbf{f}_1 & \downarrow \mathbf{p}_1 & & \\ & & L_1 & & \end{array} \quad (2.1)$$

*je komutativní.*

Zobrazení  $\mathbf{p}_1$  a  $\mathbf{p}_2$  definujeme předpisem

$$\mathbf{p}_1((\vec{v}_1, \vec{v}_2)) = \vec{v}_1, \quad \mathbf{p}_2((\vec{v}_1, \vec{v}_2)) = \vec{v}_2$$

a díky definici operací v prostoru  $L_1 \times L_2$  (Příklad 1.2.15) jsou obě zobrazení lineární.

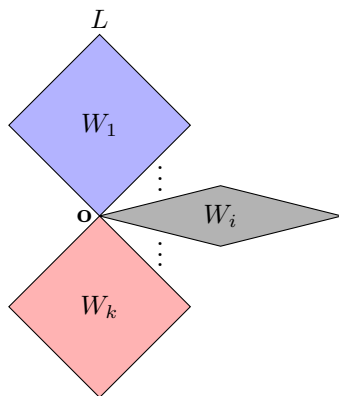
Důkaz universální vlastnosti je jednoduchý. Má-li diagram (2.1) komutovat, je totiž jediná možnost, jak  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$  můžeme definovat. A sice:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) : \vec{v} \mapsto (\mathbf{f}_1(\vec{v}), \mathbf{f}_2(\vec{v}))$$

Poslední „manipulací“ s lineárními zobrazeními bude zobecnění direktního rozkladu na lineární podprostory. Připomeňme, o co šlo: v Definici 1.6.13 jsme pro podprostory  $W_1, \dots, W_k$  lineárního prostoru  $L$  definovali vztah  $L = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$  (tj.  $L$  je direktním součtem podprostorů  $W_1, \dots, W_k$ ) dvěma následujícími podmínkami:

- (1)  $L = W_1 \vee \dots \vee W_k$ .
- (2)  $W_i \cap \bigvee_{j \neq i} W_j = \{\vec{o}\}$ .

Tyto podmínky říkají, že prostor  $L$  lze „rozbít“



na  $k$  navzájem různých podprostorů  $W_1, \dots, W_k$ . Obráceně: jsou-li zadány podprostory  $W_1, \dots, W_k$ , pak lze říci, že prostor  $L$  vzniká „slepením jednotlivých kousků“  $W_1, \dots, W_k$ .

Takové „slepování kousků“ lze rošířit i na lineární zobrazení, a to je smyslem následující definice.

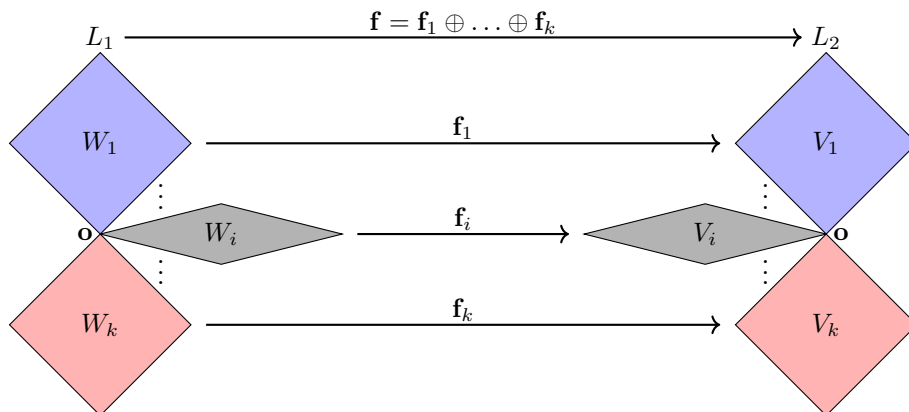
**2.2.7 Definice (Direktní rozklad a direktní součet zobrazení)** Ať  $L_1 = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$  a  $L_2 = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$  jsou direktní rozklady lineárních prostorů  $L_1$  a  $L_2$ . Řekneme, že lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je *direktním součtem* lineárních zobrazení

$$f_1 : W_1 \rightarrow V_1, \quad \dots, \quad f_k : W_k \rightarrow V_k$$

(tento fakt značíme  $f = f_1 \oplus \dots \oplus f_k$ ), pokud pro každý vektor  $\vec{x}$  z  $L_1$  platí:

$$f(\vec{x}) = f_1(\vec{w}_1) + \dots + f_k(\vec{w}_k)$$

kde  $\vec{x} = \vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k$  je jednoznačný rozklad<sup>2</sup> vektoru  $\vec{x}$  na komponenty z podprostorů  $W_1, \dots, W_k$ . V případě  $f = f_1 \oplus \dots \oplus f_k$  také říkáme, že  $f_1, \dots, f_k$  tvoří *direktní rozklad* zobrazení  $f$ .



Viz Příklad 4.3.6. K direktním součtům lineárních zobrazení se ještě vrátíme v Kapitolách 9, 10 a 11.

<sup>2</sup>Viz Lemma 1.6.12.

## 2.3 Monomorfismy, epimorfismy a isomorfismy

Při studiu lineárních zobrazení bude užitečné rozlišovat následující základní typy lineárních zobrazení.

**2.3.1 Definice (Základní typy lineárních zobrazení)** Řekneme, že lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je

- (1) *Monomorfismus*, když  $f$  je zobrazení prosté (tj., když  $f$  je injekce).
- (2) *Epimorfismus*, když  $f$  je zobrazení na (tj., když  $f$  je surjekce).
- (3) *Isomorfismus*, když  $f$  je zobrazení prosté a na současně (tj., když  $f$  je bijekce).<sup>3</sup>

Monomorfismy, epimorfismy a isomorfismy jsou analogií prostých zobrazení (injekcí), zobrazení na (surjekcí) a zobrazení vzájemně jednoznačných (bijekcí). Monomorfismy mají tedy podobné vlastnosti jako injekce, epimorfismy jako surjekce a isomorfismy jako bijekce. Viz například Tvzení 2.3.3.

**2.3.2 Poznámka** Netvrdíme, že lineární zobrazení je vždy buď monomorfismus nebo epimorfismus nebo isomorfismus. Zobrazení  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definované předpisem

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je lineární, ale není ani monomorfismus, ani epimorfismus, ani isomorfismus.

Nejprve několik jednoduchých pozorování:

**2.3.3 Tvzení Platí:**

- (1) *Složení monomorfismů je monomorfismus.*
- (2) *Složení epimorfismů je epimorfismus.*
- (3) *Složení isomorfismů je isomorfismus.*

DŮKAZ. Všechna tři tvrzení okamžitě plynou z toho, že složení injekcí/surjekcí/bijekcí je injekce/surjekce/bijekce a z toho, že složení lineárních zobrazení je lineární zobrazení. ■

Podrobnější studium speciálních lineárních zobrazení zahájíme studiem isomorfismů.

**2.3.4 Tvzení** Pro lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1)  $f$  je isomorfismus.
- (2) Existuje jediné lineární zobrazení  $g : L_2 \rightarrow L_1$  takové, že trojúhelníky

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{f} & L_2 \\ & \searrow \text{id}_{L_1} & \downarrow g \\ & & L_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L_2 & & \\ \downarrow g & \searrow \text{id}_{L_2} & \\ L_1 & \xrightarrow{f} & L_2 \end{array}$$

jsou komutativní.

- (3) Lineární zobrazení  $f$  je monomorfismus a epimorfismus současně.

<sup>3</sup>Isomorfismům také říkáme *invertibilní* lineární zobrazení. Více v Poznámce 2.3.6.

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Protože  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je bijekce, existuje zobrazení  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_1$  takové, že  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} = \text{id}_{L_1}$  a  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \text{id}_{L_2}$ . To znamená, že oba trojúhelníky v podmínce (2) jsou komutativní. Jediné, co zbývá dokázat, je linearita zobrazení  $\mathbf{g}$ . Použijeme Lemma 2.1.2 a následující důležitou vlastnost zobrazení  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g}(\vec{y}) = \vec{x} \quad \text{právě tehdy, když} \quad \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{y}$$

Takže, po dosazení  $\vec{y} := \vec{y}_1 + a \cdot \vec{y}_2$  a  $\vec{x} := \mathbf{g}(\vec{y}_1) + a \cdot \mathbf{g}(\vec{y}_2)$  víme, že

$$\mathbf{g}(\vec{y}_1 + a \cdot \vec{y}_2) = \mathbf{g}(\vec{y}_1) + a \cdot \mathbf{g}(\vec{y}_2) \quad \text{právě tehdy, když} \quad \mathbf{f}(\mathbf{g}(\vec{y}_1) + a \cdot \mathbf{g}(\vec{y}_2)) = \vec{y}_1 + a \cdot \vec{y}_2$$

Protože  $\mathbf{f}$  je lineární, platí

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\vec{y}_1) + a \cdot \mathbf{g}(\vec{y}_2)) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\vec{y}_1)) + a \cdot \mathbf{f}(\mathbf{g}(\vec{y}_2)) = \vec{y}_1 + a \cdot \vec{y}_2$$

To znamená, že  $\mathbf{g}$  je lineární.

Ze (2) plyne (3), protože z podmínky (2) plyne, že  $\mathbf{f}$  je injekce a surjekce současně:

(i) Zobrazení  $\mathbf{f}$  je injekce. Předpokládejme, že platí  $\mathbf{f}(\vec{x}_1) = \mathbf{f}(\vec{x}_2)$ . Potom

$$\vec{x}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x}_1)) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x}_2)) = \vec{x}_2$$

(ii) Zobrazení  $\mathbf{f}$  je surjekce. Vezměme libovolný vektor  $\vec{y}$  z  $L_2$  a definujme  $\vec{x} := \mathbf{g}(\vec{y})$ . Potom platí

$$\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\vec{y})) = \vec{y}$$

Ze (3) plyne (1), protože isomorfismus je lineární zobrazení, které je prosté a na současně. ■

**2.3.5 Definice (Inverse k isomorfismu)** Pro isomorfismus  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  říkáme jednoznačně určenému lineárnímu zobrazení  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_1$  z Tvzení 2.3.4 *inverse* k zobrazení  $\mathbf{f}$ . Píšeme  $\mathbf{f}^{-1}$  místo  $\mathbf{g}$ .

**2.3.6 Poznámka (Proč říkáme isomorfismům *invertibilní* lineární zobrazení?)** Přídavné jméno *invertibilní* znamená *schopný invertování*. Každý isomorfismus  $\mathbf{f}$  je schopný invertování, to říká podmínka (2) Tvzení 2.3.4. Inverzi k  $\mathbf{f}$  značíme  $\mathbf{f}^{-1}$  (viz Definice 2.3.5).

**2.3.7 Poznámka (Proč jsou isomorfismy důležité?)** Lineární prostory  $L_1$  a  $L_2$  můžeme prohlásit z *abstraktního hlediska za stejné*, pokud existuje lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ , které je isomorfismus.

**2.3.8 Příklad (Příklad isomorfismu)** Poněkud exotický lineární prostor na otevřeném intervalu  $(0; +\infty)$  z Příkladu 1.1.11 je isomorfní s lineárním prostorem  $\mathbb{R}$ . Hledaným isomorfismem je například zobrazení dekadického logaritmu  $\log : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Platí totiž následující:

(1) Zobrazení  $x \mapsto \log x$  z  $(0; +\infty)$  do  $\mathbb{R}$  je prosté a na.

Jestliže  $\log x_1 = \log x_2$ , potom  $x_1 = 10^{\log x_1} = 10^{\log x_2} = x_2$ .

Pro libovolné reálné číslo  $y$  existuje kladné reálné číslo  $x$  tak, že  $\log x = y$ . Zvolte  $x = 10^y$ .

(2) Zobrazení  $x \mapsto \log x$  z  $(0; +\infty)$  do  $\mathbb{R}$  je lineární.

Připomeňme, že sčítání vektorů v  $(0; +\infty)$  bylo definováno jako  $x_1 \oplus x_2 = x_1 \cdot x_2$  a násobení vektoru skalárem jako  $a \odot x = x^a$ . Vzhledem k těmto operacím je zobrazení  $\log$  skutečně lineární, protože platí

$$\log(a \odot x_1 \oplus b \odot x_2) = \log(x_1^a \cdot x_2^b) = a \cdot \log x_1 + b \cdot \log x_2$$

**2.3.9 Příklad (Reálné polynomy jsou isomorfní s  $\mathbb{N}$ -souřadnicemi nad  $\mathbb{R}$ )** Ukážeme, že zobrazení  $\mathbf{f}$  z  $\mathbb{R}[x]$  do  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  definované předpisem

$$\mathbf{f}(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

je isomorfismus.

- (1) Zobrazení  $\mathbf{f}$  je prosté a na, protože polynom je jednoznačně určen svými koeficienty a každá  $\mathbb{N}$ -souřadnice určuje jednoznačně polynom.
- (2) Zobrazení  $\mathbf{f}$  je lineární, protože polynomy se sčítají a násobí skalárem příslušnými operacemi s jednotlivými koeficienty.

**2.3.10 Příklad (Součin  $\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m$  je isomorfní  $\mathbb{F}^{n+m}$ )** Zobrazení  $\mathbf{f}$  z prostoru  $\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m$  do prostoru  $\mathbb{F}^{n+m}$  definujeme následovně:

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

- (1) Zobrazení  $\mathbf{f}$  je prosté a na, protože  $\mathbf{f}$  pouze „staví vektor  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  nad vektor  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ “ a tento proces je vzájemně jednoznačný.
- (2) Zobrazení  $\mathbf{f}$  je lineární. To plyne okamžitě z toho, jak jsou definovány operace v prostorech  $\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m$  a  $\mathbb{F}^{n+m}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\left(a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\right) + b \cdot \left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}\right) &= \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} a \cdot x_1 + b \cdot x'_1 \\ \vdots \\ a \cdot x_n + b \cdot x'_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \cdot y_1 + b \cdot y'_1 \\ \vdots \\ a \cdot y_m + b \cdot y'_m \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot x_1 + b \cdot x'_1 \\ \vdots \\ a \cdot x_n + b \cdot x'_n \\ a \cdot y_1 + b \cdot y'_1 \\ \vdots \\ a \cdot y_m + b \cdot y'_m \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\right) + b \cdot \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Předchozí příklad ukazuje možné výhody toho, když dva lineární prostory jsou isomorfní. Například lineární prostor  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6$  je isomorfní lineárnímu prostoru  $\mathbb{R}^9$ . To znamená, že můžeme (pro všechny praktické účely) pracovat v prostoru  $\mathbb{R}^9$  místo v prostoru  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6$ . Například později uvidíme, že lineárním podprostorům prostoru  $\mathbb{R}^9$  lze velmi dobře porozumět. Tím porozumíme i lineárním podprostorům lineárního prostoru  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6$ . Stejně úvahy lze provést s *jakýmkoli* isomorfními lineárními prostory.

Nyní se budeme věnovat monomorfismům a epimorfismům. Pro obecné lineární zobrazení zavedeme dva důležité pojmy: *jádro* a *obraz*. Uvidíme, že jádro lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  slouží ke zjištění toho „jak moc je  $\mathbf{f}$  monomorfismus“ a obraz lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  slouží ke zjištění toho „jak moc je  $\mathbf{f}$  epimorfismus“. Viz Tvzení 2.3.13.

**2.3.11 Definice** Ať  $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$  je lineární zobrazení.

- (1) Množině

$$\ker(\mathbf{f}) = \{\vec{x} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

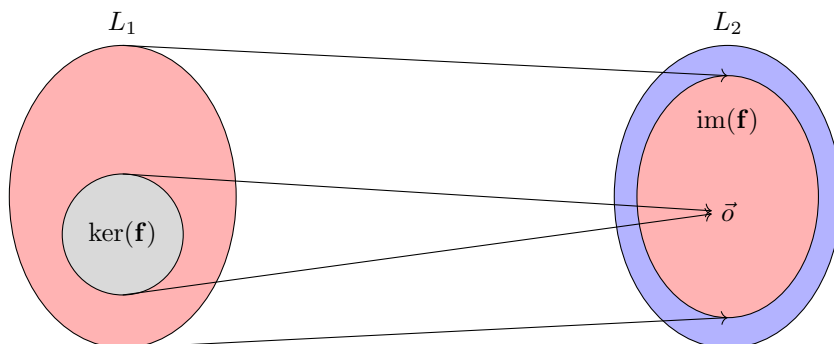
říkáme *jádro* lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ .

- (2) Množině

$$\operatorname{im}(\mathbf{f}) = \{\vec{y} \mid \text{existuje } \vec{x} \text{ tak, že } \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

říkáme *obraz* lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ .

Pro představu položení jádra a obrazu lineárního zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$  se nám bude hodit následující obrázek:



**2.3.12 Tvzení** Ať  $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$  je lineární zobrazení. Potom  $\ker(\mathbf{f})$  je lineární podprostor prostoru  $L_1$  a  $\operatorname{im}(\mathbf{f})$  je lineární podprostor prostoru  $L_2$ .

**DŮKAZ.** Ukážeme, že  $\ker(\mathbf{f})$  je lineární podprostor prostoru  $L_1$  podle Věty 1.6.2.

- (1) Uzavřenost  $\ker(\mathbf{f})$  na nulový vektor. Podle Poznámky 2.1.3 platí rovnost  $\mathbf{f}(\vec{0}) = \vec{0}$  pro každé lineární zobrazení  $\mathbf{f}$ . Proto je vektor  $\vec{0}$  v prostoru  $\ker(\mathbf{f})$ .
- (2) Uzavřenost  $\ker(\mathbf{f})$  na sčítání vektorů. Ať  $\vec{u}, \vec{v}$  jsou v  $\ker(\mathbf{f})$ . Potom

$$\mathbf{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \mathbf{f}(\vec{u}) + \mathbf{f}(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Takže vektor  $\vec{u} + \vec{v}$  je v prostoru  $\ker(\mathbf{f})$ .

- (3) Uzavřenost  $\ker(\mathbf{f})$  na násobení skalárem. Ať  $\vec{u}$  je v  $\ker(\mathbf{f})$  a ať  $a$  je libovolný skalár. Potom platí

$$\mathbf{f}(a \cdot \vec{u}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{u}) = a \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Takže vektor  $a \cdot \vec{u}$  je v prostoru  $\ker(\mathbf{f})$ .

Ukážeme, že  $\operatorname{im}(\mathbf{f})$  je lineární podprostor prostoru  $L_2$ , opět podle Věty 1.6.2.

- (1) Uzavřenost  $\operatorname{im}(\mathbf{f})$  na nulový vektor. Protože platí rovnost  $\mathbf{f}(\vec{0}) = \vec{0}$ , leží vektor  $\vec{0}$  v prostoru  $\operatorname{im}(\mathbf{f})$ .

- (2) Uzavřenost  $\text{im}(\mathbf{f})$  na sčítání vektorů. Ať  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  jsou v  $\text{im}(\mathbf{f})$ . Označme jako  $\vec{u}'$  a  $\vec{v}'$  nějaké vektory z  $L_1$ , pro které platí  $\mathbf{f}(\vec{u}') = \vec{u}$  a  $\mathbf{f}(\vec{v}') = \vec{v}$ . Potom platí

$$\vec{u} + \vec{v} = \mathbf{f}(\vec{u}') + \mathbf{f}(\vec{v}') = \mathbf{f}(\vec{u}' + \vec{v}')$$

Takže vektor  $\vec{u} + \vec{v}$  leží v prostoru  $\text{im}(\mathbf{f})$ .

- (3) Uzavřenost  $\text{im}(\mathbf{f})$  na násobení skalárem. Ať  $\vec{u}$  je libovolný vektor v  $\text{im}(\mathbf{f})$  a ať  $a$  je libovolný skalár. Označme jako  $\vec{u}'$  nějaký vektor z  $L_1$ , pro který platí  $\mathbf{f}(\vec{u}') = \vec{u}$ . Potom platí

$$a \cdot \vec{u} = a \cdot \mathbf{f}(\vec{u}') = \mathbf{f}(a \cdot \vec{u}')$$

Takže vektor  $a \cdot \vec{u}$  leží v prostoru  $\text{im}(\mathbf{f})$ . ■

Jádro a obraz nám dovolují klasifikovat monomorfismy a epimorfismy.

**2.3.13 Tvzení** Ať  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární zobrazení. Potom platí:

- (1) Lineární zobrazení  $\mathbf{f}$  je monomorfismus právě tehdy, když  $\ker(\mathbf{f}) = \{\vec{o}\}$ .
- (2) Lineární zobrazení  $\mathbf{f}$  je epimorfismus právě tehdy, když  $\text{im}(\mathbf{f}) = L_2$ .

DŮKAZ.

- (1) Předpokládejme, že  $\mathbf{f}$  je monomorfismus. Ukážeme, že platí  $\ker(\mathbf{f}) = \{\vec{o}\}$ .

Z rovnosti  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o}$  opravdu plyne  $\vec{x} = \vec{o}$ . Využili jsme toho, že  $\mathbf{f}(\vec{o}) = \vec{o}$ , protože  $\mathbf{f}$  je lineární zobrazení.

Předpokládejme, že  $\ker(\mathbf{f}) = \{\vec{o}\}$ . Ať  $\mathbf{f}(\vec{x}_1) = \mathbf{f}(\vec{x}_2)$ . Potom  $\mathbf{f}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \mathbf{f}(\vec{x}_1) - \mathbf{f}(\vec{x}_2) = \vec{o}$ . Proto  $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{o}$ , neboli  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ .

- (2) Toto tvrzení plyne okamžitě z Definice 2.3.11. ■

Tvrzení 2.3.12 a 2.3.13 dávají jasnou náplň sloganů

- (1) Jádro lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  určuje „míru monomorfie“ zobrazení  $\mathbf{f}$ .
- (2) Obraz lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  určuje „míru epimorfie“ zobrazení  $\mathbf{f}$ .

Podle Tvrzení 2.3.12 jsou totiž jádro a obraz lineární podprostory. Podle Tvrzení 2.3.13 je zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  monomorfismus právě tehdy, když  $\ker(\mathbf{f})$  je *nejmenší* možný podprostor prostoru  $L_1$ ; a  $\mathbf{f}$  je epimorfismus právě tehdy, když  $\text{im}(\mathbf{f})$  je *největší* možný podprostor prostoru  $L_2$ .

Jemnější význam těchto sloganů uvidíme později při zavedení *defektu* a *hodnosti* lineárního zobrazení, viz Definici 3.3.7.

Poslední tvrzení této podkapitoly dává do souvislosti obrazy a jádra složených zobrazení. Tvrzení lze interpretovat tak, že složenina  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$  „nemůže být víc monomorfismem“ než je jím  $\mathbf{f}$  a „nemůže být víc epimorfismem“ než je jím  $\mathbf{g}$ . Přesnější význam této sloganů dáme v Tvrzení 3.3.11.

**2.3.14 Tvzení** Ať  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ ,  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$  jsou lineární zobrazení. Potom  $\text{im}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$  je lineární podprostor prostoru  $\text{im}(\mathbf{g})$  a  $\ker(\mathbf{f})$  je lineární podprostor prostoru  $\ker(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$ .

DŮKAZ. Stačí ukázat, že  $\text{im}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$  je podmnožina  $\text{im}(\mathbf{g})$  a  $\ker(\mathbf{f})$  je podmnožina  $\ker(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$ . Obojí je jednoduché. Jestliže  $\vec{y}$  je v  $\text{im}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$ , pak  $\vec{y} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x}))$  pro nějaký vektor  $\vec{x}$ . To znamená, že  $\vec{y}$  je v  $\text{im}(\mathbf{g})$ . Jestliže  $\vec{x}$  je  $\ker(\mathbf{f})$ , pak  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o}$ . Tudíž  $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x})) = \vec{o}$ , neboli  $\vec{x}$  leží v  $\ker(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$ . ■

## 2.4 Abstraktní lineární rovnice

Lineární zobrazení budeme (kromě jiných aplikací) používat pro řešení lineárních rovnic. Zavedeme základní terminologii.

**2.4.1 Definice** Ať  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární zobrazení, ať  $\vec{b}$  je vektor v prostoru  $L_2$ .

- (1) Rovnici  $f(\vec{x}) = \vec{b}$  budeme říkat *lineární rovnice*. Vektoru  $\vec{b}$  budeme říkat *pravá strana lineární rovnice*.
- (2) Jakémukoli vektoru  $\vec{p}$  v prostoru  $L_1$  splňujícímu  $f(\vec{p}) = \vec{b}$  budeme říkat *partikulární řešení rovnice*  $f(\vec{x}) = \vec{b}$ .
- (3) Lineární rovnici  $f(\vec{x}) = \vec{o}$  budeme říkat *přidružená homogenní rovnice k rovnici  $f(\vec{x}) = \vec{b}$* .

**2.4.2 Poznámka (Monomorfismy, epimorfismy, isomorfismy a řešení lineárních rovnic)** Pojmy monomorfismu, epimorfismu a isomorfismu bezprostředně souvisí s řešením lineárních rovnic. Například Tvzení 2.3.13 lze pomocí terminologie lineárních rovnic přepsat takto:

- (1) Lineární zobrazení  $f$  je monomorfismus právě tehdy, když rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{o}$  má jediné řešení  $\vec{o}$ .
- (2) Lineární zobrazení  $f$  je epimorfismus právě tehdy, když pro každé  $\vec{b}$  má rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$  alespoň jedno řešení.

Lze přidat ještě následující:

- (3) Lineární zobrazení  $f$  je isomorfismus právě tehdy, když pro každé  $\vec{b}$  má rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$  právě jedno řešení.

Opravdu: jestliže lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je isomorfismus, pak podle Tvzení 2.3.4 existuje (jednoznačně určené) lineární zobrazení  $g : L_2 \rightarrow L_1$  splňující  $g \cdot f = \text{id}_{L_1}$  a  $f \cdot g = \text{id}_{L_2}$ . Pro jakékoli  $\vec{b}$  z  $L_2$  je pak  $g(\vec{b})$  jediné řešení rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$ .

Obráceně: označme, pro každé  $\vec{b}$  z  $L_2$ , jako  $g(\vec{b})$  jediné řešení rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$ . Potom je snadné ukázat, že zobrazení  $\vec{b} \mapsto g(\vec{b})$  je lineární a splňuje  $g \cdot f = \text{id}_{L_1}$  a  $f \cdot g = \text{id}_{L_2}$ . Tudíž  $f$  je isomorfismus podle Tvzení 2.3.4.

Obecná lineární rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$  nemusí mít žádné řešení, nebo všech řešení může být hodně. Následující důležitá věta charakterizuje situace, kdy lineární rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$  řešení má. Ve své druhé části pak věta popisuje kvalitu řešení: stačí znát jedno partikulární řešení a znát úplný popis jádra lineárního zobrazení  $f$ .

**2.4.3 Věta (Frobeniova věta pro lineární zobrazení)** Ať  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární zobrazení a ať  $\vec{b}$  je jakýkoli vektor v lineárním prostoru  $L_2$ . Potom platí:

- (1) Rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$  má řešení právě tehdy, když  $\vec{b}$  leží v lineárním prostoru  $\text{im}(f)$ .
- (2) Ať  $\vec{p}$  je jakékoli partikulární řešení rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$ . Pak každé řešení rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$  je tvaru  $\vec{p} + \vec{x}_0$ , pro nějaký vektor  $\vec{x}_0$  z  $\ker(f)$ .

**DŮKAZ.** Podmínka (1) je triviální:  $\vec{b}$  je v  $\text{im}(f)$  právě tehdy, když existuje  $\vec{x}$  tak, že  $f(\vec{x}) = \vec{b}$ .

Podmínka (2). Ať  $\vec{p}$  je vektor splňující rovnost  $f(\vec{p}) = \vec{b}$ .

Předpokládejme, že  $\vec{x}'$  je další řešení rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$ . Potom (z linearit  $f$ ) dostáváme

$$\vec{o} = \vec{b} - \vec{b} = f(\vec{x}') - f(\vec{p}) = f(\vec{x}' - \vec{p})$$

Tudíž vektor  $\vec{x}_0 := \vec{x}' - \vec{p}$  leží v prostoru  $\ker(f)$  a platí  $\vec{x}' = \vec{p} + \vec{x}_0$ .

Obráceně: ukážeme, že každý vektor tvaru  $\vec{p} + \vec{x}_0$ , kde  $\vec{x}_0$  je v  $\ker(f)$ , splňuje rovnici  $f(\vec{x}) = \vec{b}$ . To ale snadno plyne z linearit zobrazení  $f$ :

$$f(\vec{p} + \vec{x}_0) = f(\vec{p}) + f(\vec{x}_0) = \vec{b} + \vec{o} = \vec{b}$$

■

Frobeniovu větu pro lineární rovnice dále zjemníme ve Větě 6.4.1 pro soustavy lineárních rovnic. Zatím se zaměříme na základní geometrický aspekt Frobeniové věty.



**2.4.4 Příklad (Geometrický význam Frobeniovy věty)** Ať  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je lineární zobrazení zadané předpisem

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 3 \cdot x - 10 \cdot y$$

Chceme vyřešit rovnici

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = -17 \quad (2.2)$$

pomocí Věty 2.4.3.

- (1) Nejprve musíme zjistit, zda pravá strana rovnice  $-17$  leží v  $\text{im}(\mathbf{f})$ . Pokud ano, rovnice bude mít řešení. Protože platí rovnost

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = -17$$

leží skalár  $-17$  v podprostoru  $\text{im}(\mathbf{f})$ . Rovnice (2.2) tedy podle Věty 2.4.3 řešení má. Současně jsme našli partikulární řešení

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (2) Pro úplný popis všech řešení potřebujeme plně popsat vektory v  $\ker(\mathbf{f})$ . To jest, potřebujeme popsat úplné řešení přidružené homogenní rovnice

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0 \quad (2.3)$$

V prostoru  $\ker(\mathbf{f})$  jistě leží vektor

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a každý jeho skalární násobek, protože platí

$$\mathbf{f}\left(a \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 10 \cdot a \\ 3 \cdot a \end{pmatrix}\right) = 3 \cdot 10 \cdot a - 10 \cdot 3 \cdot a = 0$$

To znamená, že platí

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \subseteq \ker(\mathbf{f})$$

Ukážeme, že platí i opačná inkluze. Ať tedy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

je jakýkoli vektor splňující rovnost  $3 \cdot x - 10 \cdot y = 0$ . Potom musí platit  $y = \frac{3}{10} \cdot x$ , což znamená, že

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x}{10} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

neboli, že platí

$$\ker(\mathbf{f}) \subseteq \text{span}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Celkově jsme ukázali, že

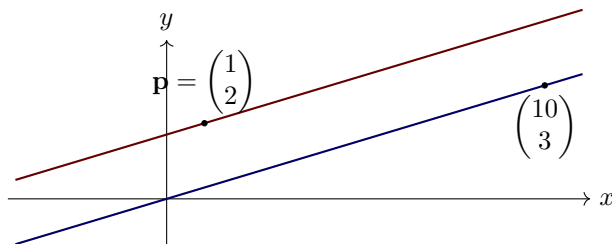
$$\ker(\mathbf{f}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

- (3) Podle Věty 2.4.3 je každé řešení rovnice (2.2) tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

pro nějaké reálné číslo  $a$ .

Podle Příkladu 1.6.15 je toto řešení červená přímka v obrázku



a my tak můžeme dát jednotlivým krokům řešení rovnice

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = -17$$

geometrický význam:

- Partikulární řešení zadané rovnice je *jakýkoli* bod na hledané červené přímce.
- Popis  $\ker(\mathbf{f})$  je popis (směru) modré přímky. Jde o paralelní posun hledané červené přímky do počátku.
- Jakmile máme modrou přímku nalezenou, posuneme ji paralelně tak, aby procházela partikulárním řešením. Výsledek je červená přímka, neboli hledané úplné řešení lineární rovnice.

Výpočty v předchozím příkladu byly poměrně těžkopádné. V Kapitole 6 vybudujeme teorii, která nám umožní řešit problémy tohoto typu velmi rychle a elegantně.

Geometrická úvaha o způsobu hledání řešení rovnice  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}$  platí však zcela obecně: přidružená homogenní rovnice  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{0}$  je „paralelním posunutím“ původní rovnice  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}$  „do počátku“. Úplný popis  $\ker(\mathbf{f})$  je nalezení „směru“ řešení. Úplný popis řešení rovnice  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}$  ve tvaru  $\vec{p} + \vec{x}_0$  pak říká, že všechna řešení rovnice  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}$  lze nalézt ve „směru“  $\ker(\mathbf{f})$  od partikulárního řešení  $\vec{p}$ .

**2.4.5 Příklad (Další aplikace Frobeniovy věty: obecný tvar primitivní funkce)** Ať  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  je lineární podprostor prostoru  $C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  tvořený těmi spojitými funkcemi, které mají všude *spojitou* první derivaci.

Zobrazení  $D : C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ , které každé funkci  $f$  z prostoru  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  přiřadí její první derivaci  $Df$ , je lineární:

$$D(f + g) = D(f) + D(g), \quad D(a \cdot f) = a \cdot D(f)$$

Vyřešíme rovnici  $D(f) = h$ , kde  $h : x \mapsto 2x$ , podle Věty 2.4.3:

- Funkce  $h$  leží v podprostoru  $\text{im}(D)$ , protože existuje funkce  $f$  taková, že  $D(f) = h$ . Takovou funkcí je například  $p : x \mapsto x^2$ .
- Prostor  $\ker(D)$  je tvořen těmi funkcemi  $f$ , pro které platí rovnost  $D(f) = 0$ . To znamená, že  $\ker(D)$  je tvořen přesně všemi konstantními funkcemi (a to jsou přesně skalární násobky funkce  $x \mapsto 1$ ).
- Každá funkce  $f$  splňující rovnost  $D(f) = h$  musí mít tvar  $p + f_0$  pro nějakou funkci  $f_0$  v prostoru  $\ker(D)$ . To ale znamená, že funkce  $f$  splňující rovnost  $D(f) = h$  jsou přesně funkce tvaru

$$f(x) = x^2 + c, \quad \text{kde } c \text{ je v } \mathbb{R}.$$

Jakékoli funkci tvaru  $f(x) = x^2 + c$  říkáme *primitivní funkce* k funkci  $x \mapsto 2x$ . Podle Poznámky 1.6.16 si lze množinu všech primitivních funkcí k funkci  $x \mapsto 2x$  představit jako *přímku v prostoru*  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ , která prochází bodem  $x \mapsto x^2$  a má směr  $x \mapsto 1$  (pozor: body v  $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  jsou spojitě funkce se spojitou první derivací).

Tyto úvahy lze zobecnit: při hledání primitivní funkce k obecné spojitě funkci  $h$  hledáme řešení lineární rovnice  $D(f) = h$ . Podle Věty 2.4.3 je každé řešení rovnice  $D(f) = h$  tvaru

$$F + c, \quad \text{kde } c \text{ je reálné číslo}$$

kde  $F$  je jakákoli spojitá funkce, jejíž derivace je funkce  $f$ .

**2.4.6 Příklad (Aplikace Frobeniovy věty: řešení diferenciální rovnice)** Ať  $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  je lineární podprostor prostoru  $C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  tvořený těmi spojitými funkcemi, které mají všude *spojité* derivace všech řádů. Zobrazení  $D : C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ , které každé funkci  $f$  z prostoru  $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  přiřadí její první derivaci  $Df$ , je lineární:

$$D(f + g) = D(f) + D(g), \quad D(a \cdot f) = a \cdot D(f)$$

Tudíž je lineární i zobrazení

$$H = D \cdot D + 5 \cdot D + 6 \cdot \text{id}$$

kteřé funkci  $f$  přiřazuje funkci  $f'' + 5f' + 6f$ .

Označme jako  $g$  funkci  $x \mapsto 16x^2 + 50x + 10$ . Vyřešit rovnici  $H(f) = g$  tedy znamená vyřešit *diferenciální rovnici*, která se tradičně zapisuje takto:

$$f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = 16x^2 + 50x + 10$$

Ukážeme, jak vypadá úplné řešení této diferenciální rovnice.

- (1) Lineární zobrazení  $H$  lze napsat jako složení  $(D + 2 \cdot \text{id}) \cdot (D + 3 \cdot \text{id})$ . Hledáme-li jádro zobrazení  $H$ , můžeme postupovat takto:

- (a) Najdeme jádro lineárního zobrazení  $(D + 2 \cdot \text{id})$  a lineárního zobrazení  $(D + 3 \cdot \text{id})$ . To znamená vyřešit dvě lineární diferenciální rovnice

$$f'(x) + 2f(x) = 0 \quad f'(x) + 3f(x) = 0$$

To je snadné: jádro  $(D + 2 \cdot \text{id})$  je  $\text{span}(e^{-2x})$  a jádro  $(D + 3 \cdot \text{id})$  je  $\text{span}(e^{-3x})$ . Funkce tvaru  $x \mapsto a \cdot e^x$  jsou totiž jediné spojitě funkce splňující  $f(x) = f'(x)$ . Proto funkce tvaru  $x \mapsto a \cdot e^{-2x}$  jsou jediné funkce splňující rovnost  $-2f(x) = f'(x)$  a funkce tvaru  $x \mapsto a \cdot e^{-3x}$  jsou jediné funkce splňující rovnost  $-3f(x) = f'(x)$ .

- (b) Tvrdíme, že  $\ker(H) = \text{span}(e^{-2x}, e^{-3x})$ .

Protože platí rovnosti

$$H(a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{-3x}) = (D + 2 \cdot \text{id})((D + 3 \cdot \text{id})(a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{-3x})) = (D + 2 \cdot \text{id})(a \cdot e^{-2x}) = 0$$

je  $\text{span}(e^{-2x}, e^{-3x})$  podmnožinou  $\ker(H)$ .

Ukážeme, že  $\ker(H)$  je podmnožinou  $\text{span}(e^{-2x}, e^{-3x})$ . Ať  $H(f) = 0$ . Potom funkce  $(D + 3 \cdot \text{id})(f) = f' + 3f$  musí být prvkem  $\ker(D + 2 \cdot \text{id})$ . To znamená, že funkce  $f$  musí splňovat rovnici  $f'(x) + 3f(x) = c \cdot e^{-2x}$  pro nějaké reálné číslo  $c$ . Úvahami o derivování exponenciál z toho plyne, že  $f(x) = a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{-3x}$  pro nějaká reálná čísla  $a$  a  $b$ .

- (2) Nalezení partikulárního řešení by vyžadovalo vybudování jisté teorie z diferenciálního počtu.<sup>4</sup> Nebudeme to nyní dělat. Dosazením se lze přesvědčit, že partikulárním řešením je například funkce  $x \mapsto 5x^2$ .

Řešením diferenciální rovnice  $f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = 16x^2 + 50x + 10$  jsou tedy právě všechny funkce tvaru

$$x \mapsto 5x^2 + a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{-3x}$$

kde  $a, b$  jsou reálná čísla.

Více o (lineárních) diferenciálních rovnicích povíme v Dodatku O.

## 2.5 Lineární formy

**2.5.1 Značení (Duální prostor (prostor lineárních forem))** Pro lineární prostor  $L$  nad  $\mathbb{F}$  píšeme

$$L^*$$

místo  $\text{Lin}(L, \mathbb{F})$ . Prostoru  $L^*$  říkáme *duální prostor* k prostoru  $L$  (v některé literatuře se používá termín *prostor lineárních forem na  $L$* ; lineárnímu zobrazení  $h : L \rightarrow \mathbb{F}$  se také říká *lineární forma na  $L$*  nebo *kovektor*<sup>5</sup>).

<sup>4</sup>Například metodu *variace konstant* nebo *metodu odhadu pro kvasipolynomiální pravou stranu*, viz podkapitolu O.4.

<sup>5</sup>Pro bližší vysvětlení termínu *kovektor* odkazujeme na podkapitolu 4.4 a Dodatek A).

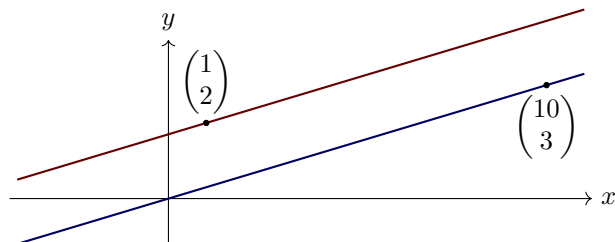
**2.5.2 Příklad (Visualisace lineárních forem pro prostory nad  $\mathbb{R}$ )** Lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  z Příkladu 2.4.4, tj. lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zadané předpisem

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 3 \cdot x - 10 \cdot y$$

je příkladem lineární formy na  $\mathbb{R}^2$ . Z Příkladu 2.4.4 dále víme, že řešení rovnice

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = -17$$

vyplňují červenou přímku v obrázku



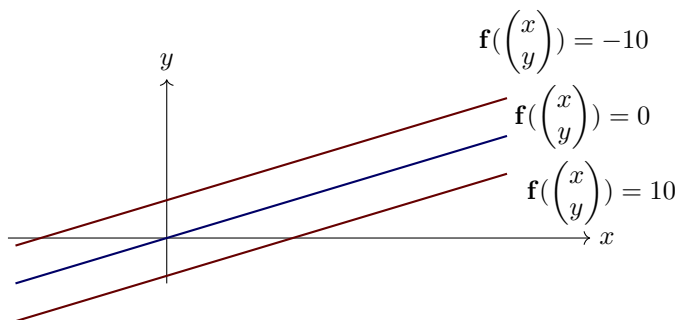
zatímco modrá přímka je řešením rovnice

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0$$

Obecně z Příkladu 2.4.4 plyne, že řešení rovnice

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = a$$

pro parametr  $a \in \mathbb{R}$  je vždy nějaká přímka rovnoběžná s modrou přímkou. Obecně tedy můžeme ztotožnit zadanou lineární formu  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se *svazkem* (také se říká: *svazkem 2. druhu* nebo *osnovou*) rovnoběžných přímek. Například:



Podobným způsobem můžeme uvažovat o jakékoli lineární formě  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Například o lineární formě typu  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  lze uvažovat jako o svazku paralelních rovin tvaru

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

v prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

Obecněji tak můžeme uvažovat o jakékoli lineární formě  $\mathbf{f} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ , kde  $\mathbb{F}$  je těleso. K takovému pohledu na lineární formy se vrátíme při vysvětlení Gaussovy eliminace v Kapitole 6.

**2.5.3 Příklad (Určitý integrál je lineární forma)** Příkladem lineární formy na prostoru  $C([0, 1]; \mathbb{R})$ <sup>6</sup> je určitý integrál

$$f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

<sup>6</sup> $C([0, 1]; \mathbb{R})$  je lineární prostor všech reálných funkcí spojitých na uzavřeném intervalu  $[0, 1]$ . Operace v tomto lineárním prostoru jsou definovány analogicky Příkladu 1.1.10.

Pro libovolné spojité funkce  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a libovolné reálné číslo  $a$  totiž platí rovnosti

$$\int_0^1 (f(x) + g(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx, \quad \int_0^1 (a \cdot f(x)) dx = a \cdot \int_0^1 f(x) dx$$

Analogií k Příkladu 2.5.2 lze říci, že určitý integrál

$$\int_0^1 (-) dx : C([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

lze visualisovat jako *svazek paralelních nadrovin*<sup>7</sup> v prostoru  $C([0, 1]; \mathbb{R})$ .

**2.5.4 Definice** Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  definujeme *duální zobrazení*  $\mathbf{f}^* : L_2^* \rightarrow L_1^*$  takto:

$$\mathbf{f}^* : (\mathbf{h} : L_2 \rightarrow \mathbb{F}) \mapsto (\mathbf{h} \cdot \mathbf{f} : L_1 \rightarrow \mathbb{F})$$

**2.5.5 Lemma** Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je duální zobrazení  $\mathbf{f}^* : L_2^* \rightarrow L_1^*$  opět lineární.

DŮKAZ. Linearitu  $\mathbf{f}^* : L_2^* \rightarrow L_1^*$  dokazuje následující sada rovností

$$\mathbf{f}^*(a \cdot \mathbf{h}_1 + b \cdot \mathbf{h}_2) = (a \cdot \mathbf{h}_1 + b \cdot \mathbf{h}_2) \cdot \mathbf{f} = a \cdot \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{f} + b \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{f} = a \cdot \mathbf{f}^*(\mathbf{h}_1) + b \cdot \mathbf{f}^*(\mathbf{h}_2)$$

kde prostřední rovnost lineárních zobrazení plyne z rovností

$$((a \cdot \mathbf{h}_1 + b \cdot \mathbf{h}_2) \cdot \mathbf{f})(\vec{x}) = (a \cdot \mathbf{h}_1 + b \cdot \mathbf{h}_2) \mathbf{f}(\vec{x}) = a \cdot \mathbf{h}_1(\mathbf{f}(\vec{x})) + b \cdot \mathbf{h}_2(\mathbf{f}(\vec{x})) = (a \cdot \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{f} + b \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{f})(\vec{x})$$

kteří platí pro každý vektor  $\vec{x}$  z  $L_1$  díky Tvzení 2.1.6. ■

**2.5.6 Definice** Ať  $L$  je libovolný lineární prostor. Pro libovolnou množinu  $F$  lineárních forem na  $L$ , definujeme množinu vektorů v  $L$  takto:

$$F^\perp = \{\vec{x} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = 0 \text{ pro všechny lineární formy } \mathbf{f} \text{ z množiny } F\}$$

Pro libovolnou množinu  $M$  vektorů v  $L$  definujeme množinu lineárních forem na  $L$  takto:

$${}^\perp M = \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = 0 \text{ pro všechny vektory } \vec{x} \text{ z množiny } M\}$$

Množina  $F^\perp$  je zobecněním jádra lineární formy, protože pro libovolnou lineární formu  $\mathbf{f} : L \rightarrow \mathbb{F}$  platí rovnost  $\{\mathbf{f}\}^\perp = \ker(\mathbf{f})$ . Tento pohled na množinu  $F^\perp$  využijeme při studiu soustav lineárních rovnic v Kapitole 6.

**2.5.7 Lemma** Ať  $L$  je lineární prostor.

- (1) Pro libovolnou množinu lineárních forem  $F$  na  $L$  je množina  $F^\perp$  lineární podprostor prostoru  $L$ .
- (2) Pro libovolnou množinu  $M$  vektorů z  $L$  je množina  ${}^\perp M$  lineární podprostor prostoru  $L^*$ .

DŮKAZ.

- (1) Povšimněme si, že množinu  $F^\perp$  lze zapsat takto

$$F^\perp = \bigcap_{\mathbf{f} \in F} \ker(\mathbf{f})$$

Protože pro každou lineární formu  $\mathbf{f}$  z množiny  $F$  je  $\ker(\mathbf{f})$  lineární podprostor prostoru  $L$ , je podle Tvzení 1.6.7 i množina  $F^\perp$  lineární podprostor prostoru  $L$ .

<sup>7</sup>Pojem *nadroviny* v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^n$  zavedeme přesně v Definici 17.4.1. Pojem nadroviny v *obecném* lineárním prostoru (jakým je například  $C([0, 1]; \mathbb{R})$ ) definovat nebudeme; svazek nadrovin v  $C([0, 1]; \mathbb{R})$  berme jen jako *slogan*.

- (2) Abychom ukázali, že  ${}^{\perp}M$  je lineární podprostor prostoru  $L^*$  musíme ukázat, že  ${}^{\perp}M$  obsahuje nulový vektor prostoru  $L^*$  a že množina  ${}^{\perp}M$  je uzavřená na tvorbu lineárních kombinací.

Nulovým vektorem prostoru  $L^*$  je nulová lineární forma  $\mathbf{o} : L \rightarrow \mathbb{F}$ , která *každý* vektor  $\vec{x}$  pošle na skalár 0 v  $\mathbb{F}$ . To znamená, že  ${}^{\perp}M$  obsahuje nulový vektor prostoru  $L^*$

Ať lineární formy  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}$  v množině  ${}^{\perp}M$  leží. Chceme ukázat, že v množině  ${}^{\perp}M$  leží i lineární kombinace  $a \cdot \mathbf{f} + b \cdot \mathbf{g}$ . Pro každý vektor  $\vec{x}$  z množiny  $M$  ovšem platí rovnosti

$$(a \cdot \mathbf{f} + b \cdot \mathbf{g})(\vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) + b \cdot \mathbf{g}(\vec{x}) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

protože jak  $\mathbf{f}$ , tak  $\mathbf{g}$  v množině  ${}^{\perp}M$  leží.

■

Dále se lineárním prostorům  ${}^{\perp}M$  a  $F^{\perp}$  v této kapitole věnovat nebudeme. Vráťme se k nim v Kapitole 3: pomocí množin tvaru  ${}^{\perp}M$  a  $F^{\perp}$  budeme moci v Důsledku 3.5.6 odvodit důležitý vztah mezi *hodnotami* lineárního zobrazení a příslušného duálního zobrazení.

## Kapitola 3

# Prostory konečné dimenze

That is my spot. In an ever-changing world it is a single point of consistency. If my life were expressed as a function on a four-dimensional Cartesian coordinate system, that spot, at the moment I first sat on it, would be (0, 0, 0, 0).

Sheldon Lee Cooper, MA, PhD, ScD, *The Cushion Saturation*

V této kapitole zavedeme třídu lineárních prostorů, které mají *konečnou dimenzi*. Prostory s konečnou dimensí jsou zvláště příjemné tím, že v nich lze zvolit *souřadnicový systém*, který umožní řadu výpočtů.

Báze je speciálním případem *lineárně nezávislé* množiny vektorů. Takovým množinám se budeme věnovat v podkapitole 3.1. Ukážeme také příklady lineárně nezávislých množin.

Studium *konečně generovaných lineárních prostorů* zahájíme v podkapitole 3.2. Ukážeme, že každý konečně generovaný prostor má *bázi*. Navíc všechny báze takového prostoru mají stejný počet prvků, kterému říkáme *dimenze* prostoru. Pojem báze pak přímo vede k pojmu *souřadnic* vzhledem k bázi.

V podkapitole 3.3 dáme do souvislosti dimenzi prostoru a dimenze nejrůznějších podprostorů. Dokážeme větu *o dimenzi spojení a průniku podprostorů* a větu *o dimenzi jádra a obrazu lineárního zobrazení*.

Vybudovaná teorie nám umožní v podkapitole 3.4 dokázat, že lineární zobrazení je *plně vystiženo svými hodnotami na bázi*. Tento důležitý fakt v dalším textu mnohokrát využijeme.

V podkapitole 3.5 popíšeme *duální bázi* k zadané bázi a využijeme ji pro výpočet hodnoty duálního zobrazení k zadanému lineárnímu zobrazení.

Ne všechny lineární prostory mají konečnou dimenzi. Hlubší teorie lineárních prostorů nekonečné dimenze je mimo rozsah tohoto textu — základní poznámky si lze přečíst v podkapitole 3.6.

### 3.1 Lineární závislost a nezávislost

Připomeňme z Poznámky 1.5.2, že seznam vektorů je  $I$ -tice vektorů, kde indexová množina  $I$  je konečná.

**3.1.1 Definice (Lineární závislost a nezávislost seznamu vektorů)** Seznam  $S$  vektorů v lineárním prostoru  $L$  je *lineárně nezávislý*, pokud buď  $S$  je prázdný seznam, nebo  $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$  a platí:

$$\text{jestliže } \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0}, \text{ potom } a_i = 0 \text{ pro všechna } i \text{ z množiny } \{1, 2, \dots, n\}$$

Seznam  $S$  je *lineárně závislý*, když není lineárně nezávislý.

**3.1.2 Poznámka** Lineární kombinaci  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i$  s vlastností  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$  se často říká *nulová lineární kombinace*.

Lineární kombinaci  $\sum_{i=1}^n 0 \cdot \vec{v}_i$  (tj. lineární kombinaci, která má všechny koeficienty nulové) se říká *triviální lineární kombinace*. Pochopitelně, každá triviální lineární kombinace je nulová lineární kombinace. Obrácená implikace neplatí: lineární kombinace

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v prostoru  $\mathbb{R}^2$  je nulová, ale netriviální.

### 3.1.3 Příklad Příklady lineárně nezávislých seznamů:

- (1) Ať pro  $i$  z množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  je  $\mathbf{e}_i$  vektor v  $\mathbb{F}^n$ , který má na  $i$ -té posici prvek 1, všude jinde má prvek 0. Tedy

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seznam  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  je lineárně nezávislý v  $\mathbb{F}^n$ .

Předpokládejme, že

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Potom  $a_i = 0$  pro všechna  $i$  z množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

- (2) Seznam tvaru  $(\vec{v})$  je lineárně nezávislý právě tehdy, když  $\vec{v}$  je nenulový vektor.

Protože  $\vec{v}$  je nenulový vektor, podle Lemmatu 1.4.3 rovnost  $a \cdot \vec{v} = \vec{0}$  platí právě tehdy, když  $a = 0$ .

- (3) Každý „kus“ lineárně nezávislého seznamu je lineárně nezávislý.

Předpokládejme, že  $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$  je lineárně nezávislý seznam vektorů v prostoru  $L$ . „Kus“ seznamu  $S$  je buď prázdný seznam  $S' = ()$  (a ten je podle Definice 3.1.1 lineárně nezávislý), nebo  $S'$  je tvaru  $(\vec{v}_{s(1)}, \vec{v}_{s(2)}, \dots, \vec{v}_{s(k)})$ , kde  $s : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  je neklesající injekce.

Předpokládejme, že  $\sum_{i=1}^k a_i \cdot \vec{v}_{s(i)} = \vec{0}$ . Pak platí

$$\sum_{i=1}^k a_i \cdot \vec{v}_{s(i)} + \sum_{j \notin \{s(1), \dots, s(k)\}} 0 \cdot \vec{v}_j = \vec{0}$$

(to jest, všem vektorům, které nejsou v  $S'$ , jsme jako koeficienty lineární kombinace dali nulové skaláry). Protože seznam  $S$  je lineárně nezávislý, plyne z toho  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$ . Ukázali jsme, že  $S'$  je lineárně nezávislý seznam.

Příklady lineárně závislých seznamů:

- (1) Seznam  $(\vec{0})$  je lineárně závislý.

Ano, lineární kombinace  $1 \cdot \vec{0}$  je netriviální a je rovna nulovému vektoru.

- (2) Seznam  $(\vec{v}, \vec{v})$  je vždy lineárně závislý.

Lineární kombinace  $1 \cdot \vec{v} - 1 \cdot \vec{v}$  je netriviální a je rovna nulovému vektoru.

- (3) Ať seznam  $S$  je lineárně závislý. Potom i každý „větší“ seznam je lineárně závislý.

- (4) Důsledkem výše uvedeného je, že lineárně závislý je každý seznam obsahující nulový vektor a každý seznam obsahující nějaký vektor dvakrát.

### 3.1.4 Lemma (Lineární nezávislost a charakterisace monomorfismů) Ať $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (1)  $\mathbf{f}$  je monomorfismus.

- (2)  $\mathbf{f}$  respektuje lineární nezávislost seznamů. To jest: jestliže  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$  je jakýkoli lineárně nezávislý seznam vektorů v prostoru  $L_1$ , potom  $(\mathbf{f}(\vec{v}_1), \mathbf{f}(\vec{v}_2), \dots, \mathbf{f}(\vec{v}_n))$  je lineárně nezávislý seznam vektorů v  $L_2$ .



DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Předpokládejme, že  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$  je lineárně nezávislý seznam a že platí

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{f}(\vec{v}_i) = \vec{o}$$

Protože  $\mathbf{f}$  je lineární, platí  $\mathbf{f}(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i) = \vec{o}$ . Protože  $\mathbf{f}$  je monomorfismus, podle Tvzení 2.3.13 platí

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i = \vec{o}$$

Protože  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$  je lineárně nezávislý seznam, platí  $a_i = 0$  pro všechna  $i$ .

Ze (2) plyne (1). Stačí ukázat, že  $\ker(\mathbf{f}) = \{\vec{o}\}$ . Předpokládejme, že platí rovnost  $\mathbf{f}(\vec{v}_1) = \vec{o}$ . Potom seznam  $(\mathbf{f}(\vec{v}_1))$  je lineárně závislý. Tudíž podle podmínky (2) je i seznam  $(\vec{v}_1)$  lineárně závislý. To znamená, že  $\vec{v}_1 = \vec{o}$ , neboli  $\ker(\mathbf{f}) = \{\vec{o}\}$ . ■

Pojem lineární nezávislosti konečného seznamu vektorů nyní rozšíříme na *libovolné* množiny vektorů. Myšlenka je následující: množina  $M$  vektorů lineárního prostoru  $L$  je lineárně nezávislá, pokud je lineárně nezávislý jakýkoli konečný seznam vektorů z množiny  $M$ . Musíme ovšem vyloučit ty seznamy, ve kterých se vektory *opakují*. Seznam  $u : I \rightarrow M$ , ve kterém se vektory *neopakují*, lze popsat podmínkou:  $u(i) \neq u(j)$ , jakmile  $i \neq j$ .

**3.1.5 Definice** Řekneme, že množina  $M$  vektorů je *lineárně nezávislá*, pokud je každý konečný seznam vektorů z  $M$ , ve kterém se vektory neopakují, lineárně nezávislý. Množina  $M$  je *lineárně závislá*, když není lineárně nezávislá.

**3.1.6 Poznámka (Každé lineární zobrazení respektuje lineární závislost)** Lemma 3.1.4 nám může vnuknout otázku: *Která lineární zobrazení respektují lineární závislost množiny vektorů?*

Odpověď není příliš zajímavá: *každé* lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  respektuje lineární závislost: je-li množina  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  lineárně závislá, pak i množina  $\{\mathbf{f}(\vec{v}_1), \dots, \mathbf{f}(\vec{v}_n)\}$  je lineárně závislá.

To nahlédneme takto: ať množina  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  je lineárně závislá. To znamená, že existuje netriviální lineární kombinace rovna nulovému vektoru, tj.  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i = \vec{o}$  a ne všechna  $a_i$  jsou nulová. Potom, díky linearitě zobrazení  $\mathbf{f}$ , platí

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{f}(\vec{v}_i) = \mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i\right) = \mathbf{f}(\vec{o}) = \vec{o}$$

Ukázali jsme, že množina  $\{\mathbf{f}(\vec{v}_1), \dots, \mathbf{f}(\vec{v}_n)\}$  je lineárně závislá.



**3.1.7 Poznámka (Abstraktní lineární závislost a nezávislost)** Pro dvě podmnožiny  $A, B$  lineárního prostoru  $L$  označme symbolem

$$B \triangleleft A \quad (\text{čteme: } B \text{ závisí na } A)$$

situaci, kdy platí  $B \subseteq \text{span}(A)$ . Potom je splněno následujících pět podmínek:

(L1) Jestliže  $B \subseteq A$ , potom  $B \triangleleft A$ .

Podle Tvzení 1.5.11 platí  $\text{span}(B) \subseteq \text{span}(A)$  a  $B \subseteq \text{span}(B)$ . Tedy  $B \subseteq \text{span}(A)$ .

(L2) Jestliže  $B \triangleleft A$  a  $C \triangleleft B$ , potom  $C \triangleleft A$ .

Ať  $B \subseteq \text{span}(A)$  a současně  $C \subseteq \text{span}(B)$ . Podle Tvzení 1.5.11 platí  $\text{span}(B) \subseteq \text{span}(\text{span}(A))$  a  $\text{span}(\text{span}(A)) \subseteq \text{span}(A)$ . Tedy celkově  $C \subseteq \text{span}(A)$ .

(L3) Jestliže  $B_i \triangleleft A$  pro každé  $i \in I$ , potom  $\bigcup_{i \in I} B_i \triangleleft A$ .

Pokud  $B_i \subseteq \text{span}(A)$  pro každé  $i \in I$ , potom platí  $\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \text{span}(A)$ .

(L4) Jestliže  $\{\vec{v}\} \triangleleft A$ , potom existuje konečná množina  $F \subseteq A$  tak, že  $\{\vec{v}\} \triangleleft F$ .

Ať  $\{\vec{v}\} \subseteq \text{span}(A)$ . To znamená, že vektor  $\vec{v}$  je lineární kombinací konečné množiny  $F$  vektorů z množiny  $A$ . Potom  $\{\vec{v}\} \subseteq \text{span}(F)$ .

(L5) Pokud  $\{\vec{w}\} \triangleleft A \cup \{\vec{v}\}$  a  $\{\vec{w}\} \not\triangleleft A$ , pak  $\{\vec{v}\} \triangleleft A \cup \{\vec{w}\}$ .

Ať  $\vec{w} \in \text{span}(A \cup \{\vec{v}\})$  a  $\vec{w} \notin \text{span}(A)$ . Potom vektor  $\vec{w}$  lze napsat jako lineární kombinaci

$$\vec{w} = a \cdot \vec{v} + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{a}_i$$

pro nenulový skalár  $a$ , nějaké skaláry  $a_1, \dots, a_n$  a nějaké vektory  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  z množiny  $A$ . Potom

$$\vec{v} = a^{-1} \cdot \vec{w} - \sum_{i=1}^n a^{-1} \cdot a_i \cdot \vec{a}_i$$

neboli  $\vec{v} \in \text{span}(A \cup \{\vec{w}\})$ .

Ať  $L$  je *jakákoliv* množina, vybavená relací  $\triangleleft$  na svých podmnožinách, která splňuje podmínky (L1)–(L5). Dvojici  $(L, \triangleleft)$  se říká *abstraktní lineární prostor*. Více se lze dočíst v článku

☞ A. Kertész, On independent sets of elements in abstract algebra, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 21 (1960), 260–269.

## 3.2 Konečně generované prostory, báze, dimenze a souřadnice

**3.2.1 Definice** Množině  $G$  říkáme *množina generátorů* lineárního prostoru  $L$ , když platí  $\text{span}(G) = L$ . Řekneme, že lineární prostor  $L$  je *konečně generovaný*, pokud existuje konečná množina generátorů lineárního prostoru  $L$ .

**3.2.2 Příklad** Ukážeme, že prostor  $\mathbb{F}^n$  všech  $n$ -tic nad tělesem  $\mathbb{F}$  (viz Příklad 1.2.8) je konečně generovaný. Množina generátorů je například následující seznam

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tedy  $\mathbf{e}_i$  je  $n$ -tice, která má na  $i$ -té posici prvek 1, všude jinde má prvek 0.

Označme  $K_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Abychom ukázali, že  $K_n$  je množina generátorů prostoru  $\mathbb{F}^n$ , musíme ukázat, že jakýkoli vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

v prostoru  $\mathbb{F}^n$  lze zapsat jako lineární kombinaci prvků množiny  $K_n$ . To je ale snadné: platí  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbf{e}_i$ .

Samozřejmě: lineární prostor má i *jiné* množiny generátorů. Je snadné se přesvědčit, že například množina

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

je opět množina generátorů lineárního prostoru  $\mathbb{F}^n$ .

Předchozí příklad ukazuje, že množina generátorů konečně generovaného prostoru není jednoznačně určena. Ukážeme, že „zvětšením“ množiny generátorů získáme opět množinu generátorů, a že *každou* množinu generátorů konečně generovaného prostoru lze „zmenšit“ na konečnou množinu generátorů.

**3.2.3 Lemma** *Ať  $L$  je lineární prostor s množinou generátorů  $G$ . Pak platí:*

- (1) *Jestliže  $G \subseteq H \subseteq L$ , pak je  $H$  opět množina generátorů prostoru  $L$ .*
- (2) *Ať  $G$  je konečná množina. Jestliže  $H$  je jakákoli množina generátorů prostoru  $L$ , pak existuje konečná množina  $H'$  generátorů prostoru  $L$ , pro kterou platí  $H' \subseteq H$ .*

DŮKAZ.

- (1) Protože  $G \subseteq H$ , platí  $\text{span}(G) \subseteq \text{span}(H)$  (viz Tvzení 1.5.11). Ze stejných důvodů platí  $\text{span}(H) \subseteq L$ . Potom ale platí  $L = \text{span}(G) \subseteq \text{span}(H) \subseteq L$ . To znamená, že platí rovnost  $\text{span}(H) = L$ , tedy  $H$  je množina generátorů prostoru  $L$ .
- (2) Jestliže  $H$  je konečná množina, není co dokazovat. Jestliže množina  $H$  konečná není, postupujeme takto: Označme si jako  $G = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$  konečnou množinu generátorů prostoru  $L$ . Pro každé  $i = 1, \dots, n$  platí, že  $\vec{g}_i$  je ve  $\text{span}(H) = L$ . Proto, pro každé  $i = 1, \dots, n$ , podle Lemmatu 1.5.7 existuje *konečná* množina  $H_i \subseteq H$  tak, že  $\vec{g}_i$  leží ve  $\text{span}(H_i)$ . Množina  $H' := H_1 \cup \dots \cup H_n$  je konečná, generuje prostor  $L$  a platí  $H' \subseteq H$ .

■

**3.2.4 Příklad (Lineární prostor, který není konečně generovaný)** Lineární prostor  $\mathbb{F}[x]$  všech polynomů v neurčité  $x$  nad tělesem  $\mathbb{F}$  (viz Příklad 1.2.10) *není* konečně generovaný.

Ať platí opak: ať  $G$  je konečná množina generátorů pro  $\mathbb{F}[x]$ . To znamená, že v  $G$  je konečně mnoho polynomů a my v této množině můžeme určit polynom s nejvyšším stupněm. Označme tento polynom jako  $p(x)$  a jeho stupeň označme jako  $n$ . Víme, že  $n$  může být buď symbol  $-\infty$  (v případě, že  $p(x) = 0$ ) nebo  $n$  je nějaké přirozené číslo. Pojďme oba případy rozebrat:

- (1) V prvním případě musí být  $G = \{0\}$ . Pak ale pomocí  $G$  lze vygenerovat pouze polynom 0. Množina  $G$  tedy nemůže být množinou generátorů prostoru  $\mathbb{F}[x]$ .
- (2) Ve druhém případě si vezmeme polynom  $q(x) = x \cdot p(x)$ . Tento polynom  $q(x)$  má stupeň  $n+1$ . A polynom  $q(x)$  nelze vygenerovat lineárními kombinacemi prvků množiny  $G$ .

Shrnuto: konečná množina  $G$  není v žádném případě schopna vygenerovat celou množinu  $\mathbb{F}[x]$ . Tudiž lineární prostor  $\mathbb{F}[x]$  není konečně generovaný.

**3.2.5 Definice (Báze a uspořádaná báze)** Lineárně nezávislé množině generátorů lineárního prostoru  $L$  říkáme *báze prostoru  $L$* . Pokud bázi  $B$  lineárního prostoru  $L$  napíšeme jako seznam, mluvíme o *uspořádané bázi*.

**3.2.6 Příklad (Kanonická báze prostoru  $\mathbb{F}^n$ )** Množina vektorů  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  z Příkladu 3.2.2 tvoří lineární nezávislou množinu generátorů prostoru  $\mathbb{F}^n$  nad  $\mathbb{F}$ . Jde tedy o bázi prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Seznamu  $K_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  budeme říkat *kanonická báze* lineárního prostoru  $\mathbb{F}^n$  nad  $\mathbb{F}$ .



**3.2.7 Tvzení** Každý konečně generovaný lineární prostor má bázi.

DŮKAZ. Označme jako  $G$  konečnou množinu generátorů prostoru  $L$ . Rozlišíme dva případy:

- (1) Množina  $G$  je prázdná. Pak ale  $G$  je lineárně nezávislá množina. Tudiž  $G$  tvoří bázi  $L$ . (A prostor  $L$  je nutně triviální prostor  $\{\vec{0}\}$  podle Lemmatu 1.5.8.)
- (2) Množina  $G$  je neprázdná. Dále definujme  $\mathcal{M}$  jako systém všech lineárně nezávislých podmnožin množiny  $G$ :

$$\mathcal{M} = \{M \mid M \subseteq G \text{ a } M \text{ je lineárně nezávislá množina}\}$$

Protože systém  $\mathcal{M}$  je konečný (jedná se o podmnožiny *konečné* množiny  $G$ ), existuje v  $\mathcal{M}$  alespoň jedna množina, která má maximální počet prvků. Označme takovou množinu jako  $M_0 = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ . Ukážeme, že  $M_0$  tvoří bázi prostoru  $L$ . Protože  $M_0$  je lineárně nezávislá množina, stačí ukázat, že  $M_0$  generuje  $L$ . Máme tedy ukázat, že  $\text{span}(M_0) = L$ .

Kdybychom věděli, že  $G \subseteq \text{span}(M_0)$ , byl by důkaz u konce. Skutečně: z  $G \subseteq \text{span}(M_0)$  plyne (s využitím Tvzení 1.5.11)  $L = \text{span}(G) \subseteq \text{span}(\text{span}(M_0)) = \text{span}(M_0)$ . Protože platí  $\text{span}(M_0) \subseteq L$ , dokázali bychom  $L = \text{span}(M_0)$ .

Dokažme tedy  $G \subseteq \text{span}(M_0)$ . Vezměme libovolný prvek  $\vec{x}$  v  $G$ . Rozlišíme opět dva případy:

- (a)  $\vec{x}$  je v  $M_0$ . Protože  $M_0 \subseteq \text{span}(M_0)$ , je  $\vec{x}$  v množině  $\text{span}(M_0)$ . Hotovo.
- (b)  $\vec{x}$  není v  $M_0$ . Pak je ale množina  $M_0 \cup \{\vec{x}\}$  lineárně závislá. A proto existuje netriviální nulová lineární kombinace

$$a \cdot \vec{x} + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i = \vec{0}$$

Musí platit  $a \neq 0$  (jinak by všechny  $a_i$  byly rovny 0 a my bychom neměli netriviální kombinaci). Protože  $a^{-1}$  existuje, platí

$$\vec{x} = -\sum_{i=1}^n a^{-1} \cdot a_i \cdot \vec{b}_i$$

a my jsme ukázali, že  $\vec{x}$  je v množině  $\text{span}(M_0)$ . Hotovo.

Důkaz skončil: každý konečně generovaný prostor má bázi. ■

**3.2.8 Poznámka** Můžeme se zeptat, zda *každý* lineární prostor  $L$  má bázi (tj. lineárně nezávislou množinu generátorů). Odpověď je kladná. Nejde ovšem o jednoduchý výsledek, viz Věta 3.6.3. Tento výsledek používá jistý mechanismus, který nám umožní nalézt maximální prvek  $M_0$  množiny

$$\mathcal{M} = \{M \mid M \subseteq G \text{ a } M \text{ je lineárně nezávislá množina}\}$$

kde  $G$  je *nekonečná* množina generátorů prostoru  $L$ . Uvědomme si totiž, že po nalezení maximálního prvku  $M_0$  množiny  $\mathcal{M}$  už v důkazu Tvzení 3.2.7 nikde nepoužijeme konečnost množiny  $G$ .

Ukažme zatím alespoň příklad prostoru, který má *nekonečnou* bázi. Z Příkladu 3.2.4 plyne, že lineární prostor  $\mathbb{F}[x]$  nad  $\mathbb{F}$  není konečně generovaný. Prostor  $\mathbb{F}[x]$  nad  $\mathbb{F}$  tudíž nemůže mít konečnou bázi. Přesto v  $\mathbb{F}[x]$  existuje *nekonečná* lineárně nezávislá množina generátorů.

**3.2.9 Příklad** Prostor  $\mathbb{F}[x]$  všech polynomů v neurčité  $x$  nad tělesem  $\mathbb{F}$  (viz Příklad 1.2.10) má následující *nekonečnou bázi*:  $B = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ . Je totiž zřejmé, že  $B$  je množina generátorů prostoru  $\mathbb{F}[x]$  a že  $B$  je lineárně nezávislá množina.

Z Tvzení 3.2.7 plyne, že každý konečně generovaný lineární prostor má *konečnou* bázi. Nyní ukážeme, že počet prvků báze takového prostoru je určen jednoznačně. Budeme potřebovat následující technický výsledek týkající se konečných *uspořádaných* bází, viz Definici 3.2.5. Geometrický význam tohoto výsledku zmíníme v Poznámce 3.2.19.

**3.2.10 Lemma (Exchange Lemma)** *At  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je uspořádaná báze lineárního prostoru  $L$  a at*

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \vec{b}_i \tag{3.1}$$

*je jakýkoli vektor v  $L$ . Jestliže  $v_i \neq 0$ , potom seznam  $B[\vec{v} \leftrightarrow \vec{b}_i]$ , vytvořený z  $B$  záměnou  $\vec{b}_i$  za  $\vec{v}$ , je opět báze prostoru  $L$ .*

**DŮKAZ.** Pro jednoduchost dokážeme tvrzení pro případ, kdy  $v_1 \neq 0$ . Obecný případ lze dokázat analogicky. Ukažeme, že seznam

$$B[\vec{v} \leftrightarrow \vec{b}_1] = (\vec{v}, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$$

je lineárně nezávislá množina generátorů prostoru  $L$ .

- (1) Lineární nezávislost seznamu
- $B[\vec{v} \leftrightarrow \vec{b}_1]$
- .

Předpokládejme, že platí  $a_1 \cdot \vec{v} + a_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{b}_n = \vec{o}$ . S použitím rovnosti (3.1) tedy dostáváme rovnost

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i \cdot \vec{b}_i \right) + a_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{b}_n = a_1 \cdot v_1 \cdot \vec{b}_1 + (a_1 \cdot v_2 + a_2) \cdot \vec{b}_2 + \dots + (a_1 \cdot v_n + a_n) \cdot \vec{b}_n = \vec{o}$$

a protože seznam  $B$  je lineárně nezávislý, plynou dále rovnosti

$$a_1 \cdot v_1 = 0, \quad a_1 \cdot v_2 + a_2 = 0, \quad \dots, \quad a_1 \cdot v_n + a_n = 0$$

Protože  $v_1 \neq 0$ , musí být  $a_1 = 0$ . Pak ale  $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ .

- (2) Seznam
- $B[\vec{v} \leftrightarrow \vec{b}_1]$
- generuje
- $L$
- .

Vezměme jakýkoli vektor  $\vec{w}$  z prostoru  $L$ . Protože  $B$  generuje  $L$ , lze psát

$$\vec{w} = w_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + w_n \cdot \vec{b}_n \quad (3.2)$$

pro nějaké skaláry  $w_1, \dots, w_n$  z  $\mathbb{F}$ . Protože  $v_1 \neq 0$ , můžeme rovnost (3.1) přepsat do tvaru

$$\vec{b}_1 = v_1^{-1} \cdot (\vec{v} - v_2 \cdot \vec{b}_2 - \dots - v_n \cdot \vec{b}_n)$$

A proto lze (3.2) psát ve tvaru

$$\vec{w} = w_1 \cdot v_1^{-1} \cdot \vec{v} + (w_2 - v_1^{-1} \cdot v_2) \cdot \vec{b}_2 + \dots + (w_n - v_1^{-1} \cdot v_n) \cdot \vec{b}_n$$

Ukázali jsme, že seznam  $B[\vec{v} \leftrightarrow \vec{b}_1]$  generuje  $L$ .

Důkaz je hotov. ■

### 3.2.11 Tvzení Všechny báze konečně generovaného prostoru $L$ mají stejný počet prvků.

DŮKAZ. Jakákoli báze konečně generovaného prostoru  $L$  má jistě konečný počet prvků. Ze všech možnýchází prostoru  $L$  vyberme bázi  $B$ , která má *nejmenší* počet prvků. Počet prvků báze  $B$  označme  $n$ .

Ukážeme, že *jakákoli* báze  $C$  prostoru  $L$  má opět  $n$  prvků. Rozlišíme dva případy:

- (1)  $n = 0$ . V tomto případě  $L = \{\vec{o}\}$  a báze  $B$  i  $C$  musí být nutně prázdné množiny. Takže  $B$  i  $C$  mají stejný počet prvků.
- (2)  $n \geq 1$ . Označme jednotlivé báze jako  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  a  $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m)$ . Protože  $B$  byla vybrána tak, aby měla nejmenší možný počet prvků, platí nerovnost  $n \leq m$ .

Nyní využijeme Lemma 3.2.10 a budeme postupně vyměňovat vektory z báze  $C$  za vektory z báze  $B$ .

- (a) Vektor  $\vec{c}_1$  lze napsat jako lineární kombinaci

$$\vec{c}_1 = \sum_{i=1}^n c_{1,i} \cdot \vec{b}_i$$

kde pro alespoň jedno  $i$  platí  $c_{1,i} \neq 0$ . V opačném případě by totiž platilo  $\vec{c} = \vec{o}$  a  $C$  by nemohla být báze.

Vezmeme tedy takové  $i$ , pro které platí  $c_{1,i} \neq 0$ . Podle Lemmatu 3.2.10 víme, že  $B_1 = B[\vec{c}_1 \leftrightarrow \vec{b}_i]$  je opět báze prostoru  $L$ , která má evidentně opět  $n$  prvků.

- (b) Předpokládejme, že jsme již pro  $1 \leq k < n$  vyměňováním sestrojili bázi  $B_k$  prostoru  $L$ , která obsahuje vektory  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k$ , a jejíž ostatní vektory jsou z původní báze  $B$ .

Vyberme nyní vektor  $\vec{c}_{k+1}$ . To můžeme udělat, protože platí nerovnost  $m \geq n$ . Vektor  $\vec{c}_{k+1}$  napíšeme jako lineární kombinaci prvků báze  $B_k$ . V této lineární kombinaci musí být koeficient u některého vektoru  $\vec{b}$  z báze  $B$  nenulový (jinak by  $C$  nebyla báze). Vyměňme  $\vec{c}_{k+1}$  za tento vektor  $\vec{b}$  a výslednou bázi označme  $B_{k+1}$ .

- (c) Výše uvedeným postupem získáme bázi  $B_n$  prostoru  $L$ , která obsahuje přesně vektory  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ .  
 Kdyby  $m > n$ , musel by vektor  $\vec{c}_{n+1}$  být lineární kombinací vektorů  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ . To ale není možné, protože  $C$  je báze. Proto musí platit  $m = n$ . ■

**3.2.12 Definice** Počtu prvků báze konečně generovaného prostoru  $L$  říkáme *dimenze* prostoru  $L$ . Dimensi lineárního prostoru  $L$  značíme  $\dim(L)$ .

### 3.2.13 Příklad

- (1) Jakýkoli triviální prostor  $\{\vec{0}\}$  má dimenzi 0. Bázi prostoru  $\{\vec{0}\}$  je prázdná množina. Prázdná množina totiž je lineárně nezávislá podle Definice 3.1.1 a generuje  $\{\vec{0}\}$ , protože  $\text{span}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$  podle Lemmatu 1.5.8.
- (2) Lineární prostor  $\mathbb{F}^n$  má dimenzi  $n$ . Jestliže  $n \geq 1$ , je bázi  $\mathbb{F}^n$  například kanonická báze  $K_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  z Příkladu 3.2.6. Je-li  $n = 0$ , je  $\mathbb{F}^n$  triviální prostor  $\{\mathbf{o}\}$  a ten má dimenzi 0.

**3.2.14 Důsledek** Ať  $\dim(L) = n$ . Potom každá lineárně nezávislá množina vektorů v  $L$  má nejvýše  $n$  prvků.

DŮKAZ. Označme jako  $B$  bázi prostoru  $L$  a ať  $M$  je jakákoli lineárně nezávislá množina vektorů v  $L$ . Nemůžeme předem vyloučit, že množina  $M$  je nekonečná. Ukážeme, že každá *konečná* podmnožina  $C$  množiny  $M$  má nejvýše  $n$  prvků. Tím bude důkaz hotov: i množina  $M$  pak musí mít nejvýše  $n$  prvků.

Protože  $M$  je lineárně nezávislá množina, je podle Definice 3.1.5 i množina  $C$  lineárně nezávislá. Projdeme znovu důkaz Tvzení 3.2.11 (s našimi množinami  $B$  a  $C$ ): nikde nevyužíváme, že  $C$  je báze prostoru  $L$ , potřebujeme pouze fakt, že  $C$  je lineárně nezávislá množina. Proto má  $C$  nejvýše  $n$  prvků. ■

**3.2.15 Důsledek** Ať lineární prostor  $L$  má konečnou dimenzi. Potom platí:

- (1) Z každé množiny generátorů prostoru  $L$  lze vybrat bázi.
- (2) Každou lineárně nezávislou množinu vektorů z prostoru  $L$  lze doplnit na bázi.

DŮKAZ. (1) Ať  $G$  je jakákoli množina generátorů prostoru  $L$ . Z Lemmatu 3.2.3 plyne, že existuje konečná množina generátorů  $G'$ , pro kterou platí  $G' \subseteq G$ . Důkaz Tvzení 3.2.7 pak dává návod, jak vybrat bázi  $B$  prostoru  $L$ , pro kterou platí  $B \subseteq G'$ . Tudíž jsme vybrali bázi  $B$  prostoru  $L$ , pro kterou platí  $B \subseteq G$ . A to jsme chtěli dokázat.

(2) Ať  $M$  je lineárně nezávislá množina vektorů v  $L$ , která má  $m$  prvků. Podle Důsledku 3.2.14 platí  $m \leq n$ . Pokud  $m = n$ , je množina  $M$  bázi prostoru  $L$  a důkaz končí. Předpokládejme tedy, že  $n = m + k$  pro nějaké  $k > 0$ . Potom  $\text{span}(M) \neq L$  a my můžeme vybrat vektor  $\vec{v}_1$  z  $L$ , který není v  $\text{span}(M)$ . Množina  $M_1 = M \cup \{\vec{v}_1\}$  má  $m + 1$  prvků a je lineárně nezávislá. Pokud  $m + 1 = n$ , důkaz končí. Pokud ne, pokračujeme v přidávání vektorů k množině  $M_1$ . Po  $k$  krocích důkaz končí. ■

Jestliže  $B$  je konečná uspořádaná báze prostoru  $L$ , potom lze každý vektor z  $L$  jednoznačně „rozvinout“ jako lineární kombinaci seznamu  $B$ . Zformulujeme to jako samostatné lemma.

**3.2.16 Lemma** Ať  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je  $n$ -tice vektorů tvořící uspořádanou bázi lineárního prostoru  $L$ . Potom pro každý vektor  $\vec{x}$  existuje jediná lineární kombinace tvaru  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{b}_i$ .

DŮKAZ. Protože  $B$  je množina generátorů  $L$ , platí  $\text{span}(B) = L$ . Proto pro každý vektor  $\vec{x}$  existuje nějaká lineární kombinace tvaru  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{b}_i$ .

Zbývá ukázat, že skaláry  $x_1, \dots, x_n$  jsou určeny jednoznačně. Kdyby platilo

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{b}_i = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot \vec{b}_i$$

potom platí

$$\vec{o} = \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) \cdot \vec{b}_i$$

Tudíž  $x_i = x'_i$  pro všechna  $i$ , protože seznam  $B$  je lineárně nezávislý. ■

**3.2.17 Definice (Souřadnice vzhledem k bázi)** Ať  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je  $n$ -tice vektorů tvořící uspořádanou bázi lineárního prostoru  $L$ . Jednoznačně určenému vektoru

$$\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

v prostoru  $\mathbb{F}^n$  s vlastností  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{b}_i$  říkáme *vektor souřadnic* vektoru  $\vec{x}$  vzhledem k bázi  $B$ .

**3.2.18 Tvzení** Ať  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$  s uspořádanou bází  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ . Potom zobrazení

$$\mathbf{coord}_B : L \longrightarrow \mathbb{F}^n, \quad \vec{v} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{v})$$

je isomorfismus.

DŮKAZ. Tvzení triviálně platí, pokud  $n = 0$ . Potom totiž lineární prostor  $L$  obsahuje pouze nulový vektor, stejně jako lineární prostor  $\mathbb{F}^0$ .

Ať tedy  $n \geq 1$ . Nejprve ukážeme, že zobrazení  $\mathbf{coord}_B : L \longrightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární.

(1) Ať  $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \vec{b}_i$  a  $\vec{w} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \vec{b}_i$ . Potom

$$\mathbf{coord}_B(a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}) = \begin{pmatrix} a \cdot v_1 + b \cdot w_1 \\ a \cdot v_2 + b \cdot w_2 \\ \vdots \\ a \cdot v_n + b \cdot w_n \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = a \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{v}) + b \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{w})$$

Abychom ukázali, že  $\mathbf{coord}_B$  je isomorfismus, musí být podle Tvzení 2.3.4 monomorfismus a epimorfismus současně. Použijeme Tvzení 2.3.13, charakterisující monomorphy a epimorphy.

(2) Jestliže  $\mathbf{coord}_B(\vec{v}) = \mathbf{o}$ , znamená to, že  $\vec{v} = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \vec{b}_i = \vec{o}$ .

Ukázali jsme, že  $\ker(\mathbf{coord}_B) = \{\vec{o}\}$ . Tudíž  $\mathbf{coord}_B$  je monomorfismus.

(3) Zvolme jakýkoli vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

v prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Potom pro vektor  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{b}_i$  platí  $\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{x}$ .

Ukázali jsme, že  $\text{im}(\mathbf{coord}_B) = \mathbb{F}^n$ . Tudíž  $\mathbf{coord}_B$  je epimorfismus. ■

Definice 3.2.5 a 3.2.17 a Tvzení 3.2.18 v dalším textu mnohokrát použijeme. Zformulujme tedy následující *slogany*:

- (1) Báze  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  lineárního prostoru  $L$  je výběr *souřadnicových os* v prostoru  $L$ . Protože v množině  $B$  nezáleží na pořadí prvků, výběrem báze prostoru  $L$  vybíráme souřadnicové osy v prostoru  $L$  a *nezáleží* nám na pořadí jednotlivých souřadnicových os.

Například: v  $\mathbb{R}^2$  platí  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ . Mlvíme-li tedy o bázích  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  a  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$  prostoru  $\mathbb{R}^2$ , mluvíme o *jedné* bázi. Je nám jedno, v jakém pořadí jsou bazové vektory vypisovány.

- (2) Uspořádaná báze  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  lineárního prostoru  $L$  je výběr *souřadnicových os a jejich pořadí* v prostoru  $L$ . Protože v seznamu  $B$  záleží na pořadí prvků, výběrem uspořádané báze prostoru  $L$  vybíráme souřadnicové osy v prostoru  $L$  a *záleží* nám na pořadí jednotlivých souřadnicových os.

Například: v  $\mathbb{R}^2$  platí  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \neq (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ . Mlvíme-li tedy o uspořádaných bázích  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  a  $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$  prostoru  $\mathbb{R}^2$ , mluvíme o *dvou různých* uspořádaných bázích. Je pro nás důležité, v jakém pořadí jsou bazové vektory vypisovány.

- (3) Pojem uspořádané báze  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  lineárního prostoru  $L$  umožňuje definovat *vektor souřadnic*

$$\text{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$  z  $L$ . To říká Lemma 3.2.16.

Protože  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{b}_i$ , lze si skalár  $x_i$  představovat jako „úsek vektoru  $\vec{x}$  na souřadnicové ose  $\vec{b}_i$ “.

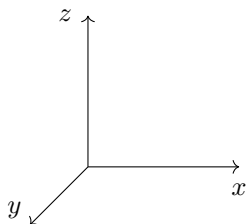
- (4) Podle Poznámky 2.3.6 jsou isomorfní lineární prostory z abstraktního hlediska stejné. Tvzení 3.2.18 ukazuje, že volba uspořádané báze  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  v prostoru  $L$  nám umožňuje „ztotožnit“ lineární prostor  $L$  s lineárním prostorem  $\mathbb{F}^n$ . Tohoto „ztotožnění“ využijeme v Kapitole 9.

**3.2.19 Poznámka (Exchange Lemma: jeho geometrický význam)** Jestliže  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je uspořádaná báze lineárního prostoru  $L$ , pak to znamená, že v prostoru  $L$  je zadán *souřadnicový systém*, kde *záleží na pořadí* jednotlivých souřadnicových os  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ .

Lemma 3.2.10 pak má tento geometrický význam:

Jestliže  $\vec{v}$  je vektor v lineárním prostoru  $L$ , jehož  $i$ -tá souřadnice v souřadnicovém systému  $B$  je *nenulová*, potom vektor  $\vec{v}$  můžeme zvolit jako *novou souřadnicovou osu* místo souřadnicové osy  $\vec{b}_i$ .

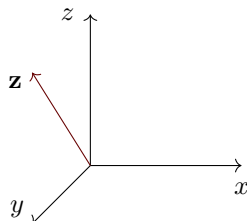
Příkladem takové výměny v  $\mathbb{R}^3$  je následující. Ať  $K_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  je kanonická báze prostoru  $\mathbb{R}^3$ . To znamená, že jsme si vybrali tradiční pravoúhlou soutavu souřadnic, která se často maluje takto:



Každý vektor  $\mathbf{z}$ , který má *nenulovou* třetí souřadnici můžeme zvolit místo osy  $z$ . Dostaneme tak nový souřad-



nicový systém  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{z})$  v  $\mathbb{R}^3$ :



Z obrázku je též zřejmé, že osu  $z$  (tj. vektor  $\mathbf{e}_3$ ) *nemůžeme* nahradit nějakým vektorem  $\mathbf{y}$ , který leží v rovině  $xy$  (tj. takovým, který má třetí souřadnici nulovou).

### 3.3 Lineární podprostory a jejich dimenze

**3.3.1 Tvzení** *Ať  $W$  je lineární podprostor konečně dimensionálního lineárního prostoru  $L$ . Potom platí  $\dim(W) \leq \dim(L)$ . Rovnost dimensí platí pouze tehdy, když  $W = L$ .*

**DŮKAZ.** Označme  $\dim(L) = n$ . Každá lineárně nezávislá množina vektorů ve  $W$  je lineárně nezávislou množinou v prostoru  $L$ . Podle Důsledku 3.2.14 má tedy každá lineárně nezávislá množina vektorů ve  $W$  nejvýše  $n$  prvků. To znamená, že můžeme vybrat lineárně nezávislou množinu  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ , kde  $m$  je *největší možné*.

- (1) Tvrdíme, že  $W = \text{span}(\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\})$ .

Inkluse  $\text{span}(\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}) \subseteq W$  platí triviálně, protože  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\} \subseteq W$ .

Je-li  $\vec{w}$  jakýkoli vektor z  $W$ , který neleží v  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ , je množina  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m, \vec{w}\}$  lineárně závislá, protože má  $m+1$  prvků. Proto  $W \subseteq \text{span}(\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\})$ .

- (2) Podle části (1) je  $W$  konečně generovaný prostor, který má  $m$ -prvkovou množinu generátorů. Podle důkazu Tvzení 3.2.7 pak lze z této množiny vybrat bázi prostoru  $W$ . Tato báze má nejvýše  $m$  prvků. Proto  $\dim(W) \leq \dim(L)$ .

Poslední tvrzení je triviální: je-li  $\dim(W) = n$ , pak  $W = L$  podle Lemmatu 3.2.10. ■

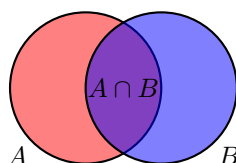
**3.3.2 Příklad (Úplný popis lineárních podprostorů prostoru  $\mathbb{R}^3$ )** V Příkladu 1.6.14 jsme ukázali čtyři typy podprostorů  $\mathbb{R}^3$ :

- (1) Triviální prostor  $\{\mathbf{o}\}$ .
- (2) Každá přímka  $\text{span}(\mathbf{a})$ , kde  $\mathbf{a}$  je nenulový vektor.
- (3) Každá rovina  $\text{span}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , kde  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  jsou lineárně nezávislé vektory.
- (4) Prostor  $\mathbb{R}^3$ .

Podle Tvzení 3.3.1 to jsou *všechny* typy lineárních podprostorů  $\mathbb{R}^3$ . Každý lineární podprostor  $\mathbb{R}^3$  totiž musí mít buď dimenzi 0 (triviální podprostor), nebo 1 (přímka procházející počátkem), nebo 2 (rovina procházející počátkem), nebo 3 (celý prostor  $\mathbb{R}^3$ ).

Než dokážeme větu o dimenzi spojení a průniku lineárních podprostorů, připomeneme známý kombinatorický princip. Věta 3.3.4 je přímou analogií tohoto principu, když nahradíme počet prvků konečné množiny dimensí lineárního podprostoru.

**3.3.3 Poznámka (Princip inkluze a exkluze)** Ať  $A$  a  $B$  jsou *konečné* množiny. Obecnou polohu těchto množin můžeme znázornit následujícím Vennovým diagramem.



Označíme-li počet prvků množin  $A$ ,  $B$  a  $A \cap B$  a  $A \cup B$  jako  $\text{card}(A)$ ,  $\text{card}(B)$ ,  $\text{card}(A \cap B)$  a  $\text{card}(A \cup B)$ , potom platí rovnost

$$\text{card}(A) + \text{card}(B) = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B)$$

které se říká *princip inkluze a exkluze* pro konečné množiny.

Princip inkluze se dokáže velmi snadno. Pokud označíme  $A \cap B = \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ , potom existují přirozená čísla  $m$  a  $n$  tak, že  $A = \{x_0, \dots, x_{k-1}, a_0, \dots, a_{m-1}\}$ ,  $B = \{x_0, \dots, x_{k-1}, b_0, \dots, b_{n-1}\}$ . Platí tedy

$$\text{card}(A) + \text{card}(B) = (k + m) + (k + n) = (k + m + n) + k = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B)$$

**3.3.4 Věta (Věta o dimenzi spojení a průniku)** Pro libovolné podprostory  $V$  a  $W$  prostoru konečné dimenze platí rovnost

$$\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \vee W) + \dim(V \cap W)$$

DŮKAZ. Protože podle Tvzení 1.6.7 je  $V \cap W$  lineární podprostor prostoru konečné dimenze, můžeme označit jako  $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}$  bázi podprostoru  $V \cap W$ . Protože jak  $V$  tak  $W$  mají konečnou dimenzi, existují podle Důsledku 3.2.15 přirozená čísla  $m$ ,  $n$  a vektory  $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{m-1}$ ,  $\vec{w}_0, \dots, \vec{w}_{n-1}$  tak, že

$$\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}, \vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{m-1} \text{ je báze } V \quad \text{a} \quad \vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}, \vec{w}_0, \dots, \vec{w}_{n-1} \text{ je báze } W$$

Nejprve ukážeme, že

$$\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}, \vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{m-1}, \vec{w}_0, \dots, \vec{w}_{n-1} \text{ je báze } V \vee W$$

Protože evidentně platí

$$\text{span}(\{\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}, \vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{m-1}, \vec{w}_0, \dots, \vec{w}_{n-1}\}) = V \vee W$$

stačí ukázat, že vektory  $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}, \vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{m-1}, \vec{w}_0, \dots, \vec{w}_{n-1}$  jsou lineárně nezávislé. Ať tedy platí

$$\vec{o} = \vec{x} + \vec{v} + \vec{w}, \quad \text{kde } \vec{x} = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \cdot \vec{x}_i, \quad \vec{v} = \sum_{a=0}^{m-1} v_a \cdot \vec{v}_a, \quad \vec{w} = \sum_{b=0}^{n-1} w_b \cdot \vec{w}_b$$

Chceme ukázat, že  $x_i = 0$  pro všechna  $i = 0, \dots, k-1$ ,  $v_a = 0$  pro všechna  $a = 0, \dots, m-1$  a  $w_b = 0$  pro všechna  $b = 0, \dots, n-1$ . Uvědomme si, že  $\vec{x}$  je ve  $V \cap W$ ,  $\vec{v}$  ve  $V$  a  $\vec{w}$  ve  $W$ .

- (1) Protože  $\vec{v} = -\vec{x} - \vec{w}$ , je  $\vec{v}$  ve  $W$ . To plyne z toho, že  $\vec{x}$  je ve  $W$ ,  $\vec{w}$  je ve  $W$  a  $W$  je lineární podprostor. Tudíž  $\vec{v}$  leží v prostoru  $V \cap W$ . Platí tedy rovnost

$$\vec{v} = \sum_{a=0}^{m-1} v_a \cdot \vec{v}_a = \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot \vec{x}_i$$

pro nějaké skaláry  $y_1, \dots, y_{k-1}$ , protože  $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}$  tvoří bázi prostoru  $V \cap W$ . Odtud plyne rovnost

$$\sum_{a=0}^{m-1} v_a \cdot \vec{v}_a - \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot \vec{x}_i = \vec{o}$$

a musí se jednat o triviální kombinaci, protože  $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}, \vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{m-1}$  tvoří bázi  $V$ . Speciálně platí  $v_a = 0$  pro všechna  $a = 0, \dots, m-1$ .

- (2)  $w_b = 0$  pro všechna  $b = 0, \dots, n-1$  se dokáže analogicky, protože  $\vec{w} = -\vec{x} - \vec{v}$  je ve  $V \cap W$ .
- (3) Z výše dokázaného vyplývá, že  $\vec{o} = \vec{x} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{x}$ , a tudíž  $x_i = 0$  pro všechna  $i = 0, \dots, k-1$ .

Proto vektory  $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}, \vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{m-1}, \vec{w}_0, \dots, \vec{w}_{n-1}$  tvoří bázi  $V \vee W$ , a platí:

$$\dim(V) + \dim(W) = (k + m) + (k + n) = (k + m + n) + k = \dim(V \vee W) + \dim(V \cap W)$$

a to jsme chtěli dokázat. ■

Pro lineární podprostory  $V$  a  $W$  lineárního prostoru je často výpočetně náročné zjistit  $\dim(V \cap W)$  přímo. K tomu se právě dobře hodí Věta 3.3.4, protože  $\dim(V)$ ,  $\dim(W)$  a  $\dim(V \vee W)$  se většinou snadno určí.

**3.3.5 Příklad (Použití věty o dimenzi spojení a průniku)** Ať  $V$  a  $W$  jsou lineární podprostory prostoru  $\mathbb{R}^6$ ,  $\dim(V) = 3$ ,  $\dim(W) = 4$ . Ukážeme, že  $\dim(V \cap W) \geq 1$ .

Uvědomme si, že  $\dim(V \vee W) \leq 6$ , protože  $V \vee W$  je lineární podprostor prostoru  $\mathbb{R}^6$ . S použitím Věty 3.3.4 dostaneme

$$3 + 4 = \dim(V) + \dim(W) = \dim(V \vee W) + \dim(V \cap W) \leq 6 + \dim(V \cap W)$$

Odtud plyne  $\dim(V \cap W) \geq 1$ .

Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  jsme v Tvzení 2.3.12 ukázali, že jádro  $\ker(\mathbf{f})$  je lineární podprostor prostoru  $L_1$  a obraz  $\operatorname{im}(\mathbf{f})$  je lineární podprostor prostoru  $L_2$ . Ukážeme, že pokud má  $L_1$  konečnou dimenzi, mají konečnou dimenzi i podprostory  $\ker(\mathbf{f})$  a  $\operatorname{im}(\mathbf{f})$  a tyto dimenze jsou spolu svázané.

**3.3.6 Věta (Věta o dimenzi jádra a obrazu)** Ať  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární zobrazení, ať  $L_1$  má konečnou dimenzi. Potom  $\ker(\mathbf{f})$  a  $\operatorname{im}(\mathbf{f})$  mají konečnou dimenzi a platí rovnost:

$$\dim(L_1) = \dim(\ker(\mathbf{f})) + \dim(\operatorname{im}(\mathbf{f}))$$

DŮKAZ. Ať  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je báze prostoru  $L_1$ . Protože podle Tvzení 2.3.12 je  $\ker(\mathbf{f})$  lineární podprostor prostoru  $L_1$ , má  $\ker(\mathbf{f})$  konečnou dimenzi podle Tvzení 3.3.1. Označme jako  $K = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  bázi prostoru  $\ker(\mathbf{f})$ . Podle Důsledku 3.2.15 existuje (nutně lineárně nezávislá) množina  $D = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_d\}$  taková, že  $K \cup D$  je báze prostoru  $L_1$ . Povšimněme si, že  $k + d = \dim(L_1)$ . Definujeme lineární zobrazení

$$\mathbf{g} : \operatorname{span}(D) \rightarrow L_2, \quad \mathbf{g}(\vec{w}) = \mathbf{f}(\vec{w})$$

to jest,  $\mathbf{g}$  je restrikce lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  na podprostor  $\operatorname{span}(D)$ . Pak platí:

- (1)  $\operatorname{span}(D) \cap \ker(\mathbf{f})$  je triviální podprostor prostoru  $L_1$ .

To plyne okamžitě z definice množiny  $D$ .

- (2) Lineární zobrazení  $\mathbf{g}$  je monomorfismus.

Jestliže  $\mathbf{g}(\vec{w}) = \vec{0}$ , pak  $\vec{w}$  musí být vektor z  $\operatorname{span}(D) \cap \ker(\mathbf{f})$ . Jediný takový vektor je nulový vektor podle části (1). Tudíž  $\ker(\mathbf{g}) = \{\vec{0}\}$  a  $\mathbf{g}$  je podle Tvzení 2.3.13 monomorfismus.

- (3) Protože  $\mathbf{g}$  je monomorfismus, je podle Lemmatu 3.1.4  $\dim(\operatorname{im}(\mathbf{g})) = d$ . Protože  $\operatorname{im}(\mathbf{g}) = \operatorname{im}(\mathbf{f})$ , platí  $\dim(\operatorname{im}(\mathbf{f})) = d$ .

Ukázali jsme  $\dim(\operatorname{im}(\mathbf{f})) = d$ . Dále, díky volbě množiny  $K$ , platí  $\dim(\ker(\mathbf{f})) = k$ . Ale  $k + d = \dim(L_1)$ . ■

Dimenze jádra a obrazu lineárního zobrazení budou hrát v dalších úvahách důležitou roli. Těmto dimensím tedy dáme jméno.

**3.3.7 Definice** Ať  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární zobrazení, ať  $L_1$  má konečnou dimenzi. Přirozeným číslem

$$\operatorname{def}(\mathbf{f}) = \dim(\ker(\mathbf{f})), \quad \operatorname{rank}(\mathbf{f}) = \dim(\operatorname{im}(\mathbf{f}))$$

říkáme *defekt* a *hodnost* lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ .

Věta o dimenzi jádra a obrazu má překvapivý důsledek:

**3.3.8 Důsledek** Ať  $L_1, L_2$  mají stejnou konečnou dimenzi. Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je ekvivalentní:

- (1)  $\mathbf{f}$  je *isomorfismus*.
- (2)  $\mathbf{f}$  je *epimorfismus*.
- (3)  $\mathbf{f}$  je *monomorfismus*.

DŮKAZ. Z (1) plyne (2) podle Tvzení 2.3.4.

Ze (2) plyne (3). Protože  $\mathbf{f}$  je epimorfismus a protože  $\dim(L_2) = \dim(L_1)$ , platí  $\dim(\operatorname{im}(\mathbf{f})) = \operatorname{rank}(\mathbf{f}) = \dim(L_2) = \dim(L_1)$ . Podle Věty 3.3.6 je  $\operatorname{def}(\mathbf{f}) = \dim(\ker(\mathbf{f})) = 0$ . Tudíž  $\mathbf{f}$  je monomorfismus.

Ze (3) plyne (1). Protože  $\mathbf{f}$  je monomorfismus, platí  $\operatorname{def}(\mathbf{f}) = \dim(\ker(\mathbf{f})) = 0$ . Podle Věty 3.3.6 je tedy  $\dim(\operatorname{im}(\mathbf{f})) = \operatorname{rank}(\mathbf{f}) = \dim(L_1)$ . Protože  $\dim(L_2) = \dim(L_1)$ , platí  $\dim(\operatorname{im}(\mathbf{f})) = \operatorname{rank}(\mathbf{f}) = \dim(L_2)$ . Podle Tvzení 3.3.1 je tedy  $\operatorname{im}(\mathbf{f}) = L_2$ . Ukázali jsme, že  $\mathbf{f}$  je epimorfismus, tudíž isomorfismus. ■

**3.3.9 Příklad (Lagrangeova polynomiální interpolace)** V tomto příkladu se pro názornost omezíme na lineární prostory nad  $\mathbb{R}$ . V následujících úvahách však reálná čísla nehrají žádnou podstatnou roli, stejný výsledek dostaneme pro lineární prostory nad libovolným tělesem.

Zvolme vektory

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

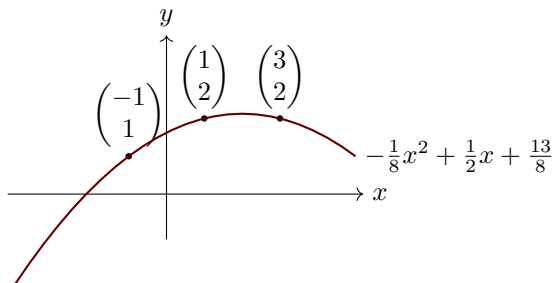
v  $\mathbb{R}^2$ , kde čísla  $x_1, \dots, x_n$  jsou navzájem různá,  $n \geq 1$ . Ukážeme, že existuje *jediný* reálný polynom  $p(x)$  stupně nejvýše  $n - 1$  s vlastností

$$p(x_1) = y_1, \quad p(x_2) = y_2, \quad \dots, \quad p(x_n) = y_n$$

Takovému polynomu se říká *Lagrangeův interpolační polynom*. Příkladem Lagrangeova interpolačního polynomu pro vektory

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

je polynom  $-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{8}$ :



Pro nalezení obecného Lagrangeova interpolačního polynomu sestavíme *lineární* zobrazení

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^{\leq n-1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad p(x) \mapsto \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$$

kde  $\mathbb{R}^{\leq n-1}[x]$  je lineární prostor polynomů nad  $\mathbb{R}$  v neurčité  $x$  stupně nejvýše  $n - 1$  (viz Příklad 1.2.11). Povšimněme si, že  $\dim(\mathbb{R}^{\leq n-1}[x]) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$ , protože  $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$  tvoří bázi prostoru  $\mathbb{R}^{\leq n-1}[x]$ .

Zobrazení  $\mathbf{f}$  je evidentně lineární a jde o monomorfismus, protože jediný reálný polynom stupně nejvýše  $n - 1$ , který je nulový v  $n$  různých bodech, je nulový polynom.

Podle Důsledku 3.3.8 je  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{\leq n-1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  epimorfismus, a tudíž isomorfismus. Proto pro vektor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^n$  existuje *jediný* polynom  $p(x)$  v  $\mathbb{R}^{\leq n-1}[x]$  takový, že

$$\mathbf{f}(p(x)) = \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Je snadné ukázat, že Lagrangeův interpolační polynom pro body

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

z  $\mathbb{R}^2$  musí mít tvar

$$p(x) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot p_i(x), \quad \text{kde } p_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

viz také Důsledek C.2.7.

Z Důsledku 3.3.8 plyne další zajímavý fakt pro isomorfismy prostorů *konečné* dimenze. Pro detekci isomorfismu totiž stačí, aby existovala pouze jedna z „jedostranných inverzí“. To znamená, že k detekci isomorfismu stačí *jeden* z komutativních trojúhelníků z Tvzení 2.3.4.

**3.3.10 Důsledek** *At  $L_1, L_2$  mají stejnou konečnou dimenzi. Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je ekvivalentní:*

- (1)  $\mathbf{f}$  je isomorfismus.
- (2) Existuje lineární zobrazení  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_1$  takové, že trojúhelník

$$\begin{array}{ccc} L_2 & & \\ \mathbf{g} \downarrow & \searrow \text{id}_{L_2} & \\ L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_2 \end{array}$$

je komutativní.

- (3) Existuje lineární zobrazení  $\mathbf{h} : L_2 \rightarrow L_1$  takové, že trojúhelník

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_2 \\ & \searrow \text{id}_{L_1} & \downarrow \mathbf{h} \\ & & L_1 \end{array}$$

je komutativní.

DŮKAZ. Z (1) plyne (2) i (3), protože můžeme podle Tvzení 2.3.4 zvolit  $\mathbf{g} = \mathbf{h} = \mathbf{f}^{-1}$ .

Ze (2) plyne (1). Pokud existuje lineární zobrazení  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_1$  takové, že  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \text{id}_{L_2}$ , potom  $\mathbf{f}$  je epimorfismus. Pro libovolné  $\vec{y}$  v  $L_2$  totiž můžeme definovat  $\vec{x} = \mathbf{g}(\vec{y})$ ; potom platí  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\vec{y})) = \vec{y}$ . Podle Důsledku 3.3.8 je  $\mathbf{f}$  isomorfismus.

Ze (3) plyne (1). Pokud existuje lineární zobrazení  $\mathbf{h} : L_2 \rightarrow L_1$  takové, že  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{f} = \text{id}_{L_1}$ , potom  $\mathbf{f}$  je monomorfismus. Pokud totiž  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o}$ , je  $\vec{x} = \mathbf{h}(\mathbf{f}(\vec{x})) = \mathbf{h}(\vec{o}) = \vec{o}$ . Podle Důsledku 3.3.8 je  $\mathbf{f}$  isomorfismus. ■

**3.3.11 Tvzení** *At  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ ,  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$  jsou lineární zobrazení, kde prostory  $L_1, L_2$  a  $L_3$  mají konečnou dimenzi. Pak platí nerovnosti*

$$\text{rank}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) \leq \text{rank}(\mathbf{g}) \quad \text{def}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) \geq \text{def}(\mathbf{f})$$

*Je-li  $\mathbf{g}$  isomorfismus, platí rovnosti  $\text{def}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \text{def}(\mathbf{f})$  a  $\text{rank}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \text{rank}(\mathbf{f})$ .*

DŮKAZ. Podle Tvzení 2.3.14 je  $\text{im}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$  lineární podprostor prostoru  $\text{im}(\mathbf{g})$  a  $\ker(\mathbf{f})$  je lineární podprostor prostoru  $\ker(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$ . Z Tvzení 3.3.1 pak plynou nerovnosti

$$\dim(\text{im}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})) \leq \dim(\text{im}(\mathbf{g})) \quad \dim(\ker(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})) \geq \dim(\ker(\mathbf{f}))$$

a ty jsme chtěli dokázat.

Ať je  $\mathbf{g}$  isomorfismus. Pak platí  $\ker(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \ker(\mathbf{f})$  a tudíž  $\text{def}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \text{def}(\mathbf{f})$ . Rovnost  $\text{rank}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \text{rank}(\mathbf{f})$  pak plyne z Věty 3.3.6. ■

Nerovnosti  $\text{rank}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) \leq \text{rank}(\mathbf{g})$  a  $\text{def}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) \geq \text{def}(\mathbf{f})$  lze zpřesnit. Přesněji, platí následující tvrzení:

**3.3.12 Tvrzení** *At'  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ ,  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$  jsou lineární zobrazení, kde prostory  $L_1$ ,  $L_2$  a  $L_3$  mají konečnou dimenzi. Pak platí*

$$\text{rank}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \text{rank}(\mathbf{f}) - \dim(\ker(\mathbf{g}) \cap \text{im}(\mathbf{f}))$$

a

$$\text{def}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \text{def}(\mathbf{f}) + \dim(\ker(\mathbf{g}) \cap \text{im}(\mathbf{f}))$$

DŮKAZ. (I) Ukážeme rovnost  $\text{rank}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \text{rank}(\mathbf{f}) - \dim(\ker(\mathbf{g}) \cap \text{im}(\mathbf{f}))$ .

Protože platí  $\ker(\mathbf{g}) \cap \text{im}(\mathbf{f}) \subseteq \text{im}(\mathbf{f})$ , můžeme bázi  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  podprostoru  $\ker(\mathbf{g}) \cap \text{im}(\mathbf{f})$  doplnit na bázi  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$  prostoru  $\text{im}(\mathbf{f})$ . Ukážeme, že  $\text{rank}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = m$  a tím bude důkaz u konce.

Stačí ukázat, že  $\{\mathbf{g}(\vec{w}_1), \dots, \mathbf{g}(\vec{w}_m)\}$  je báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$ .

- (1) Množina  $\{\mathbf{g}(\vec{w}_1), \dots, \mathbf{g}(\vec{w}_m)\}$  je množina generátorů prostoru  $\text{im}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$ .

Jestliže  $\vec{z}$  leží v  $\text{im}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})$ , potom  $\vec{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x}))$  pro nějaký vektor  $\vec{x}$ . Protože  $\mathbf{f}(\vec{x})$  leží v  $\text{im}(\mathbf{f})$ , lze psát

$$\mathbf{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i + \sum_{j=1}^m b_j \vec{w}_j$$

a tudíž

$$\vec{y} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x})) = \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\mathbf{g}(\vec{v}_i)}_{=\vec{0}} + \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{g}(\vec{w}_j) = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{g}(\vec{w}_j)$$

- (2) Množina  $\{\mathbf{g}(\vec{w}_1), \dots, \mathbf{g}(\vec{w}_m)\}$  je lineárně nezávislá.

Ať platí

$$\sum_{j=1}^m b_j \mathbf{g}(\vec{w}_j) = \vec{0}$$

Chceme ukázat, že platí  $b_1 = 0, \dots, b_m = 0$ .

Potom

$$\mathbf{g}\left(\sum_{j=1}^m b_j \vec{w}_j\right) = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{g}(\vec{w}_j) = \vec{0}$$

a proto vektor  $\sum_{j=1}^m b_j \vec{w}_j$  patří do  $\ker(\mathbf{g}) \cap \text{im}(\mathbf{f})$ . To znamená, že

$$\sum_{j=1}^m b_j \vec{w}_j = \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i$$

neboli

$$\sum_{j=1}^m b_j \vec{w}_j - \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

pro nějaká  $a_1, \dots, a_n$ . Protože  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$  je báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{f})$ , znamená to, že  $a_1 = 0, \dots, a_n = 0, b_1 = 0, \dots, b_m = 0$ .

(II) Ukážeme rovnost  $\text{def}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \text{def}(\mathbf{f}) + \dim(\ker(\mathbf{g}) \cap \text{im}(\mathbf{f}))$ .

Označme jako  $d = \dim(L_1)$ . Podle Věty 3.3.6 platí

$$\text{def}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) + \text{rank}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = d \quad \text{a} \quad \text{def}(\mathbf{f}) + \text{rank}(\mathbf{f}) = d$$

Podle první části důkazu platí

$$\underbrace{\text{rank}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})}_{=d-\text{def}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})} = \underbrace{\text{rank}(\mathbf{f})}_{=d-\text{def}(\mathbf{f})} - \dim(\ker(\mathbf{g}) \cap \text{im}(\mathbf{f}))$$

a tudíž platí  $\text{def}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \text{def}(\mathbf{f}) + \dim(\ker(\mathbf{g}) \cap \text{im}(\mathbf{f}))$ . ■

### 3.4 Lineární zobrazení je určeno svým chováním na bázi

V této podkapitole dokážeme důležitou Větu 3.4.1 o lineárních zobrazeních: lineární zobrazení je jednoznačně určeno svými hodnotami na bázi. Tento fakt nám umožní zahájit systematické studium lineárních zobrazení.

**3.4.1 Věta (Lineární zobrazení je určeno hodnotami na bázi)** *At  $L_1$  a  $L_2$  jsou lineární prostory. At prostor  $L_1$  má konečnou bázi  $B$ . Potom zadat zobrazení  $f : B \rightarrow L_2$  je totéž jako zadat lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ , pro které platí  $\mathbf{f}(\vec{b}) = f(\vec{b})$ , pro všechna  $\vec{b}$  z  $B$ .*

**DŮKAZ.** Nejprve předpokládejme, že  $B = \emptyset$ . To znamená, že  $L_1 = \{\vec{0}\}$ . Potom je tvrzení triviální. Existuje jediné zobrazení  $f : \emptyset \rightarrow L_2$ , totiž prázdné. Na druhé straně existuje jediné zobrazení  $\mathbf{f} : \{\vec{0}\} \rightarrow L_2$ , totiž  $\vec{0} \mapsto \vec{0}$ . Pro všechna  $\vec{b}$  z množiny  $\emptyset$  platí  $\mathbf{f}(\vec{b}) = f(\vec{b})$ .

Předpokládejme nyní, že  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ . Zadání zobrazení  $f : B \rightarrow L_2$  znamená zadání  $n$ -tici vektorů  $(f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n))$  v prostoru  $L_2$ . To ale znamená, že jsme zadali lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ , sice pro  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i$  definujeme  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f(\vec{b}_i)$ . Tato definice je jediná možná; jinak lineární zobrazení splňující  $\mathbf{f}(\vec{b}_i) = f(\vec{b}_i)$ , pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$ , zadat nejde. ■

Obecný popis všech lineárních zobrazení z obecného lineárního prostoru  $L_1$  do obecného lineárního prostoru  $L_2$  může být těžká úloha. Ukážeme, jeden (důležitý) příklad, kdy je popis všech lineárních zobrazení možný. Dalším příkladům je věnována celá Kapitola 4.

**3.4.2 Příklad (Úplný popis lineárních zobrazení na prostoru dimenze 1)** Předpokládejme, že lineární prostor  $L$  nad tělesem  $\mathbb{F}$  má dimenzi 1. V tomto příkladu ukážeme, že každé lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  má tvar  $\mathbf{f}(\vec{x}) = a \cdot \vec{x}$  pro jediný skalár  $a$  z tělesa  $\mathbb{F}$ .

- (1) Pro každý skalár  $a$  z  $\mathbb{F}$  je zobrazení  $\mathbf{f}(\vec{x}) = a \cdot \vec{x}$  lineární. To plyne okamžitě z definice lineárního prostoru. Pro libovolný skalár  $b$  a libovolné vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  totiž platí rovnosti

$$\begin{aligned} a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) &= a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}, & \text{neboli} & \quad \mathbf{f}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y}) \\ a \cdot (b \cdot \vec{x}) &= b \cdot (a \cdot \vec{x}), & \text{neboli} & \quad \mathbf{f}(b \cdot \vec{x}) = b \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) \end{aligned}$$

- (2) Obráceně: ukážeme, že lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  musí mít tvar  $\mathbf{f}(\vec{x}) = a \cdot \vec{x}$  pro jediný skalár  $a$  z  $\mathbb{F}$ .

Zvolme pevně nenulový vektor  $\vec{b}_0$ . Seznam  $B_0 = (\vec{b}_0)$  je lineárně nezávislý a tudíž tvoří uspořádanou bázi prostoru  $L$  (předpokládáme, že  $\dim(L) = 1$ ).

Vektor  $\mathbf{f}(\vec{b}_0)$  má jednoznačně určenou souřadnici  $b_0$  vzhledem k bázi  $B$ , tj. platí rovnost:

$$\mathbf{f}(\vec{b}_0) = b_0 \cdot \vec{b}_0$$

Potom pro libovolný vektor  $\vec{x}$  platí:

$$\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{f}(x \cdot \vec{b}_0) = x \cdot \mathbf{f}(\vec{b}_0) = x \cdot (b_0 \cdot \vec{b}_0) = b_0 \cdot (x \cdot \vec{b}_0) = b_0 \cdot \vec{x}$$

kde jsme označili jako  $x$  souřadnici vektoru  $\vec{x}$  vzhledem k bázi  $B_0$ .

Za hledaný skalár  $a$  bychom mohli zvolit skalár  $b_0$ . Věc má jediný háček: potřebujeme ukázat, že volba skaláru na vektoru  $\vec{b}_0$  nezávisí. Zvolme tedy jiný nenulový vektor  $\vec{b}_1$ , příslušnou bázi  $(\vec{b}_1)$  označme  $B_1$  a příslušný skalár označme  $b_1$ . To znamená, že pro každý vektor  $\vec{x}$  platí rovnosti

$$\mathbf{f}(\vec{x}) = b_0 \cdot \vec{x} = b_1 \cdot \vec{x}$$

Potom ale pro každý vektor  $\vec{x}$  platí

$$\vec{0} = b_0 \cdot \vec{x} - b_1 \cdot \vec{x} = (b_0 - b_1) \cdot \vec{x}$$

Podle Lemmatu 1.4.3 musí tedy pro každý vektor  $\vec{x}$  platit  $b_0 - b_1 = 0$  nebo  $\vec{x} = \vec{0}$ . Prostor  $L$  obsahuje nenulový vektor, protože má dimenzi 1. Tudíž platí  $b_0 - b_1 = 0$ , neboli  $b_0 = b_1$ .

**3.4.3 Poznámka** V předchozím příkladě jsme ukázali, že každé lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , kde prostor  $L$  má dimenzi 1, je to nejjednodušší možné — sice násobení pevným skalárem. Této skutečnosti využijeme při definici determinantu lineárního zobrazení, viz Definici 5.2.2.

Větu 3.4.1 v dalším textu mnohokrát využijeme, nejčastěji v následující podobě:

Ať lineární prostor  $L_1$  má konečnou dimenzi. Abychom ukázali že čtverec

$$\begin{array}{ccc} L_3 & \xrightarrow{\mathbf{g}} & L_4 \\ \mathbf{h} \uparrow & & \uparrow \mathbf{k} \\ L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_2 \end{array}$$

lineárních zobrazení je komutativní, stačí dokázat, že platí rovnost

$$\mathbf{g}(\mathbf{h}(\vec{b})) = \mathbf{k}(\mathbf{f}(\vec{b}))$$

pro každý prvek  $\vec{b}$  nějaké báze  $B$  prostoru  $L_1$ .

Výše uvedenou rovnost budeme velmi často znázorňovat obrázkem

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h}(\vec{b}) & \xrightarrow{\mathbf{g}} & \mathbf{g}(\mathbf{h}(\vec{b})) = \mathbf{k}(\mathbf{f}(\vec{b})) \\ \mathbf{h} \uparrow & & \uparrow \mathbf{k} \\ \vec{b} & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbf{f}(\vec{b}) \end{array}$$

kterému se často říká *prohánění* prvku  $\vec{b}$  diagramem (anglicky: *chasing the element through the diagram*)

$$\begin{array}{ccc} L_3 & \xrightarrow{\mathbf{g}} & L_4 \\ \mathbf{h} \uparrow & & \uparrow \mathbf{k} \\ L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_2 \end{array}$$

Znovu upozorňujeme na rozdíl mezi šipkami  $\rightarrow$  a  $\mapsto$ .

## 3.5 Dualita pro lineární prostory konečné dimenze

V této podkapitole zavedeme *duální bázi* k zadané bázi lineárního prostoru. Pojem duální báze nám umožní dokázat důležitý výsledek o rovnosti hodnot lineárního zobrazení a jeho duálního zobrazení, viz Důsledek 3.5.6.



**3.5.1 Tvzení (Báze prostoru lineárních forem na prostoru  $L$ )** *At  $L$  je lineární prostor dimenze  $n$ . Pak prostor  $L^*$  všech lineárních forem na  $L$  má opět dimenzi  $n$ .*

DŮKAZ. Je-li  $L$  triviální prostor  $\{\vec{0}\}$ , pak  $L^*$  je opět triviální prostor (protože existuje jediná lineární forma  $\mathbf{f} : L \rightarrow \mathbb{F}$ , a sice  $\mathbf{f}(\vec{0}) = 0$ ). Proto  $\dim(L^*) = 0$ , jestliže  $\dim(L) = 0$ .

V případě, kdy  $\dim(L) = n \geq 1$ , označme jako  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  nějakou bázi prostoru  $L$ . Definujme, pro každé  $i = 1, \dots, n$ , lineární zobrazení hodnotami na vektorech báze  $B$  takto:

$$\vec{b}_i^* : L \rightarrow \mathbb{F}, \quad \vec{b}_j \mapsto \delta_{ij}$$

kde  $\delta_{ij}$  je *Kroneckerův symbol*, tj.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{v případě } i = j, \\ 0, & \text{jindy.} \end{cases}$$

Tvrdíme, že seznam  $B^* = (\vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_n^*)$  je uspořádaná báze prostoru  $L^*$ .

(1) Seznam  $B^*$  generuje  $L^*$ .

At  $\mathbf{f} : L \rightarrow \mathbb{F}$  je libovolná lineární forma. Tvrdíme, že platí rovnost

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}(\vec{b}_i) \cdot \vec{b}_i^*$$

Opravdu, pro libovolné pevné  $i_0$  z množiny  $\{1, \dots, n\}$  platí

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{f}(\vec{b}_i) \cdot \vec{b}_i^* \right) (\vec{b}_{i_0}) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{f}(\vec{b}_i) \cdot \vec{b}_i^*(\vec{b}_{i_0}) \\ &= \mathbf{f}(\vec{b}_{i_0}) \end{aligned}$$

To znamená, že hodnoty lineárních zobrazení  $\mathbf{f}$  a  $\sum_{i=1}^n \mathbf{f}(\vec{b}_i) \cdot \vec{b}_i^*$  se shodují na prvcích báze  $B$ , a proto se shodují na všech vektorech lineárního prostoru  $L$ .

(2) Seznam  $B^*$  je lineárně nezávislý. Předpokládejme, že platí

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i^* = \mathbf{0}$$

kde jsme jako  $\mathbf{0} : L \rightarrow \mathbb{F}$  označili nulovou lineární formu, která splňuje  $\mathbf{0}(\vec{x}) = 0$  pro každý vektor  $\vec{x}$ .

Zvolme pevné libovolné  $i_0$  z množiny  $\{1, \dots, n\}$ . Potom rovnosti

$$0 = \mathbf{0}(\vec{b}_{i_0}) = \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i^* \right) (\vec{b}_{i_0}) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i^*(\vec{b}_{i_0}) = a_{i_0}$$

ukazují, že seznam  $B^*$  je lineárně nezávislý. ■

**3.5.2 Definice** Uspořádané bázi  $B^*$  z důkazu Tvzení 3.5.1 říkáme *duální báze* k uspořádané bázi  $B$ .



**3.5.3 Poznámka** Značení  $(\vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_n^*)$  pro duální bázi budí dojem, že existuje operace „napiš hvězdičku“, která z vektoru  $\vec{b}_1$  udělá lineární formu  $\vec{b}_1^*$ , z vektoru  $\vec{b}_2$  udělá lineární formu  $\vec{b}_2^*$ , atd. To není pravda: *každá* z lineárních forem  $\vec{b}_j^*$  závisí na *celé* bázi  $B$ . Viz Příklad 4.4.2.

**3.5.4 Lemma (Duální báze určuje souřadnice vzhledem k původní bázi)** *Ať  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je báze lineárního prostoru  $L$ . Označme jako  $B^* = (\vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_n^*)$  příslušnou duální bázi. Potom pro každý vektor  $\vec{v}$  z prostoru  $L$  platí rovnost*

$$\text{coord}_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \vec{b}_1^*(\vec{v}) \\ \vec{b}_2^*(\vec{v}) \\ \vdots \\ \vec{b}_n^*(\vec{v}) \end{pmatrix}$$

neboli rovnost

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \vec{b}_i^*(\vec{v}) \cdot \vec{b}_i$$

platí pro každý vektor  $\vec{v}$  z  $L$ .

DŮKAZ. Ať  $\vec{v}$  je libovolný vektor z  $L$ . Protože  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je báze prostoru  $L$ , existují jednoznačně určené skaláry  $a_1, \dots, a_n$  tak, že platí rovnost

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i$$

Potřebujeme ukázat, že pro každé  $i_0$  z množiny  $\{1, \dots, n\}$  platí rovnost  $a_{i_0} = \vec{b}_{i_0}^*(\vec{v})$ . To ale plyne z linearitě zobrazení  $\vec{b}_{i_0}^*$  a z definice duální báze:

$$\vec{b}_{i_0}^*(\vec{v}) = \vec{b}_{i_0}^*\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_{i_0}^*(\vec{b}_i) = a_{i_0}$$

■

Duální báze využijeme ke zjištění hodnoty duálního zobrazení (viz Definici 2.5.4). Než to budeme moci udělat, musíme dokázat následující technické lemma.

**3.5.5 Lemma** *Pro libovolný prostor  $L$  konečné dimenze a libovolnou jeho podmnožinu  $M$  platí rovnost*

$$\dim(L) = \dim({}^\perp M) + \dim(\text{span}(M))$$

DŮKAZ. Označme  $\dim(L) = n$  a  $W = \text{span}(M)$ . Potom  $W$  je lineární podprostor  $L$ , označme  $m = \dim(W)$ . Podle Tvzení 3.3.1 je  $m \leq n$ .

- (1) Ukážeme, že  ${}^\perp M = {}^\perp W$ .

Protože  $M \subseteq W$ , platí podle Definice 2.5.6  ${}^\perp M \supseteq {}^\perp W$ .

Zvolme lineární formu  $\mathbf{h} : L \rightarrow \mathbb{F}$  z množiny  ${}^\perp M$ . To znamená, že pro každý vektor  $\vec{x}$  z  $M$  platí  $\mathbf{h}(\vec{x}) = \vec{0}$ . Protože  $W = \text{span}(M)$  a  $\mathbf{h}$  je lineární, je  $\mathbf{h}(\vec{x}) = \vec{0}$  pro každý vektor z prostoru  $W$ . Ukázali jsme, že  $\mathbf{h}$  leží v množině  ${}^\perp W$ .

- (2) Zvolme uspořádanou bázi  $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)$  prostoru  $W$  a podle Důsledku 3.2.15 ji doplníme na uspořádanou bázi  $B = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$  prostoru  $L$ .
- (3) Sestrojme bázi  $B^* = (\vec{w}_1^*, \dots, \vec{w}_m^*, \vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_k^*)$  duální k bázi  $B$  podle Tvzení 3.5.1. Tvrdíme, že  $(\vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_k^*)$  je báze lineárního prostoru  ${}^\perp W$ .

Zvolme jakoukoli lineární formu  $\mathbf{h} : L \rightarrow \mathbb{F}$  a zapišme ji v bázi  $B^*$  jako lineární kombinaci

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^m \mathbf{h}(\vec{w}_i) \cdot \vec{w}_i^* + \sum_{j=1}^k \mathbf{h}(\vec{b}_j) \cdot \vec{b}_j^*$$

podle důkazu Tvzení 3.5.1.

Forma  $\mathbf{h}$  je v  ${}^\perp W$  právě tehdy, když  $\mathbf{h}(\vec{w}_i) = \vec{0}$  pro všechna  $i = 1, \dots, m$ . To ale znamená, že  $(\vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_k^*)$  je báze lineárního prostoru  ${}^\perp W$ .

Ukázali jsme, že  $\dim({}^\perp W) = k$ . Protože  $m + k = n$ , je důkaz hotov. ■

**3.5.6 Důsledek (Hodnost duálního zobrazení)** *At  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární zobrazení, kde oba prostory  $L_1$  a  $L_2$  mají konečnou (ne nutně stejnou) dimenzi. Potom platí  $\text{rank}(f^*) = \text{rank}(f)$ .*

DŮKAZ. Nejprve ukažme, že platí

$$\ker(f^*) = {}^\perp \text{im}(f)$$

Podle definice jádra a duálního zobrazení platí

$$\ker(f^*) = \{h : L_2 \rightarrow \mathbb{F} \mid f^*(h) = o\} = \{h : L_2 \rightarrow \mathbb{F} \mid h \cdot f = o\}$$

kde  $o : L_1 \rightarrow \mathbb{F}$  je nulová lineární forma. To znamená, že platí

$$\ker(f^*) = \{h : L_2 \rightarrow \mathbb{F} \mid h(f(\vec{x})) = \vec{o} \text{ pro všechna } \vec{x} \text{ z } L_1\} = \{h : L_2 \rightarrow \mathbb{F} \mid h(\vec{y}) = \vec{o} \text{ pro všechna } \vec{y} \text{ z } \text{im}(f)\}$$

poslední množina je ale podle Definice 2.5.6 přesně množina  ${}^\perp \text{im}(f)$ .

Podle Věty 3.3.6 aplikované na lineární zobrazení  $f^* : L_2^* \rightarrow L_1^*$  platí rovnost

$$\dim(L_2^*) = \dim(\ker(f^*)) + \dim(\text{im}(f^*))$$

a podle Lemmatu 3.5.5 platí další rovnost

$$\dim(L_2^*) = \dim({}^\perp \text{im}(f)) + \dim(\text{im}(f))$$

Protože  $\ker(f^*) = {}^\perp \text{im}(f)$ , platí  $\dim(\ker(f^*)) = \dim({}^\perp \text{im}(f))$ . Tudíž

$$\text{rank}(f^*) = \dim(\text{im}(f^*)) = \dim(\text{im}(f)) = \text{rank}(f)$$

což jsme chtěli dokázat. ■

## 3.6 Poznámky k prostorům nekonečné dimenze

V Příkladu 3.2.4 jsme ukázali, že lineární prostor  $\mathbb{F}[x]$  všech polynomů nad  $\mathbb{F}$  v neurčité  $x$  není konečně generovaný a v Příkladu 3.2.9 jsme ukázali, že  $\mathbb{N}$ -tice  $B = (x^i)_{i \in \mathbb{N}}$  tvoří bázi prostoru  $\mathbb{F}[x]$ . Protože indexová množina  $\mathbb{N}$  není konečná, je prostor  $\mathbb{F}[x]$  příkladem lineárního prostoru, který má *nekonečnou dimenzi*.

Přesněji: lineární prostor  $\mathbb{F}[x]$  má *dimensi rovnou počtu prvků množiny přirozených čísel*  $\mathbb{N}$ . To plyne z toho, že zobrazení  $b : \mathbb{N} \rightarrow B$ , definované předpisem  $b(n) = x^n$  je evidentně bijekce. Množiny  $\mathbb{N}$  a  $B$  mají tedy stejný počet prvků.<sup>1</sup> Pokud bychom chtěli zobecnit definici dimenze (Definice 3.2.12) z konečně generovaných prostorů na *všechny* lineární prostory, museli bychom vyvinout teorii „čísel“, která nám umožní počítat i s počty prvků nekonečných množin. Taková čísla existují a říká se jim *kardinální čísla* (také: *kardinály*), viz například knihy

☞ Bohuslav Balcar a Petr Štěpánek, *Teorie množin* (2. vydání), Academia, Praha, 2005

☞ Thomas Jech, *Set theory* (3. vydání), Springer Monographs in Mathematics, 2006

V tomto textu nebudeme teorii kardinálních čísel rozvíjet, zaměříme se jen na otázku, zda lze u *každého* lineárního prostoru nalézt bázi. Odpověď překvapivě není jednoduchá. Přesněji: tvrzení,

*Každý lineární prostor má bázi.*

platit může, ale také nemusí. Co to znamená? Vše záleží na typu matematiky, ve kterém se pohybujeme. Abychom tuto zvláštnost přiblížili, vzpomeňme si na známý *pátý Eukleidův postulát* (také: *axiom o rovnoběžkách*) rovinné geometrie:<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Srovnejte situaci s definicí konečné množiny v Poznámce 1.2.12. Množinám, které mají stejný počet prvků jako množina  $\mathbb{N}$ , se říká *spočetné*.

<sup>2</sup>První čtyři Eukleidovy axiomy jsou: (1) Každé dva různé body lze spojit právě jednou úsečkou. (2) Každou úsečku lze jednoznačně prodloužit do přímky. (3) Bod a úsečka určují jednoznačně kružnici. (4) Všechny pravé úhly jsou shodné.

*Ať je dána přímka v rovině. Potom jakýmkoli bodem, který na zadané přímce neleží, lze vést právě jednu rovnoběžku se zadanou přímkou.*

Axiom o rovnoběžkách je navíc ekvivalentní známému tvrzení: Rovina Eukleidovské geometrie je „rovná“: součet vnitřních úhlů trojúhelníka je roven přímému úhlu.

V 19. století bylo ukázáno, že v zásadě existují tři typy rovinných geometrií:

- (1) *Eukleidovská geometrie*. V této geometrii platí všech pět Eukleidových axiomů.
- (2) *Sférická geometrie*. V této geometrii platí první čtyři Eukleidovy axiomy. Pátý axiom ale neplatí: bodem mimo zadanou přímku nelze vést žádnou rovnoběžku se zadanou přímkou.
- (3) *Hyperbolická geometrie*. I v této geometrii platí první čtyři Eukleidovy axiomy. Pátý axiom opět neplatí: bodem mimo zadanou přímku lze vést alespoň dvě různé rovnoběžky se zadanou přímkou.

Vynikajícím zdrojem informací o moderní geometrii je kniha

☞ Harold Scott MacDonald Coxeter, *Introduction to geometry*, Wiley, 1989

O vlivu geometrických myšlenek na vývoj vědění lidstva se lze dočíst v knize

☞ Petr Vopěnka, *Úhelny kámen evropské vzdělanosti a moci*, Academia, Praha 2000

Tvrzení, které v teorii množin hraje roli axiomu o rovnoběžkách, je takzvaný *axiom výběru*.



**3.6.1 Axiom výběru** Ať  $A_i$ ,  $i \in I$ , je jakýkoli systém neprázdných množin. Potom kartézský součin  $\prod_{i \in I} A_i$  je neprázdna množina.

Povšimněme si, že axiom výběru je triviálně splněn pokud množina  $I$  je *konečná*: kartézský součin

$$\prod_{i=1}^n A_i$$

neprázdných množin  $A_i$  je vždy neprázdna množina.

Axiom výběru lze ekvivalentně zformulovat mnoha různými způsoby, viz například knihu

☞ Herman Rubin a Jean E. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice II*, North Holland, 1985

Jedním z takových ekvivalentních způsobů formulace axiomu výběru je princip, kterému se říká Zornovo Lemma:



**3.6.2 Zornovo Lemma** Ať  $X$  je libovolná množina a ať  $\mathcal{M}$  je neprázdny systém podmnožin množiny  $X$  s vlastností: každý řetězec v  $\mathcal{M}$  má maximální prvek vzhledem k inklusi. Potom  $\mathcal{M}$  má maximální prvek.

Povšimněme si opět, že tvrzení Zornova Lemmatu je opět triviálně splněno v případě, kdy  $X$  je *konečná množina*. Ukážeme nyní, že z Zornova Lemmatu plyne důležitý fakt o lineárních prostorech: *každý* lineární prostor nad *jakýmkoli* tělesem má bázi.

**3.6.3 Věta (Obecná věta o existenci báze)** *Ať platí tvrzení Zornova Lemmatu. Potom každý lineární prostor má bázi.*

**DŮKAZ.** Ať  $\mathbb{F}$  je libovolné těleso a ať  $L$  je libovolný lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ . Protože zřejmě platí  $\text{span}(L) = L$ , má lineární prostor  $L$  množinu generátorů  $L$ .

Definujeme

$$\mathcal{M} = \{M \mid M \subseteq L \text{ a } M \text{ je lineárně nezávislá množina} \}$$

Ať  $M_i$ ,  $i \in I$ , je řetězec v  $\mathcal{M}$ . Potom  $\bigcup_{i \in I} M_i$  je opět v  $\mathcal{M}$ .

Tudíž, podle Zornova Lemmatu, množina  $\mathcal{M}$  má maximální prvek  $M_0$ . Množina  $M_0$  tvoří bázi lineárního prostoru  $L$ . Důkaz je stejný jako v důkazu Tvrzení 3.2.7. ■

**3.6.4 Poznámka** Ve skutečnosti je tvrzení, že každý lineární prostor má bázi, opět jen ekvivalentní formulací axiomu výběru. Více se lze dočíst v článku

☞ Andreas Blass, Existence of bases implies the axiom of choice, *Contemp. Math.* 31 (1984), 31—33

Důkaz toho, že tvrzení axiomu výběru plyne z toho, že každý lineární prostor má bázi, by vyžadoval vybudování další teorie.

**3.6.5 Příklad (Hamelova báze reálných čísel)** Množina reálných čísel  $\mathbb{R}$  tvoří lineární prostor nad tělesem racionálních čísel  $\mathbb{Q}$ , viz Příklad 1.2.7. Tento lineární prostor má zásadně jiné vlastnosti než prostor  $\mathbb{R}$  nad tělesem reálných čísel.

Podle Věty 3.6.3 víme, že prostor  $\mathbb{R}$  nad  $\mathbb{Q}$  má bázi, pokud předpokládáme platnost axiomu výběru. Věta 3.6.3 dává návod, jak tuto bázi „nalézt“. Definujme množinu

$$\mathcal{M} = \{M \mid M \subseteq \mathbb{R} \text{ a } M \text{ je lineárně nezávislá množina} \}$$

Její maximální prvek je hledaná báze  $B$ . Této bázi se říká *Hamelova báze reálných čísel*.<sup>3</sup>

Povšimněme si, že báze  $B$  nemůže být konečná. Kdyby báze  $B$  byla konečná a obsahovala přesně  $n$  reálných čísel  $r_1, \dots, r_n$ , potom by existoval isomorfismus

$$\text{coord}_B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}^n$$

Speciálně by to znamenalo, že existuje bijekce mezi všemi reálnými čísly a všemi  $n$ -ticemi racionálních čísel. Z toho by plynulo, že  $\mathbb{R}$  je spočetná množina (tj., že  $\mathbb{R}$  má stejnou kardinalitu jako množina  $\mathbb{N}$  všech přirozených čísel). To je spor, množina  $\mathbb{R}$  totiž spočetná není.

Tento příklad ukazuje, jak důležité je zmínit těleso skalárů. Lineární prostor  $\mathbb{R}$  nad  $\mathbb{R}$  má bázi o jednom prvku, tedy má dimenzi 1.

Důsledkem Věty 3.6.3 je úplný popis všech lineárních prostorů nad  $\mathbb{F}$ : až na isomorfismus jde o prostory  $I$ -souroadnic z Příkladu 1.2.13.

**3.6.6 Důsledek (Úplný popis lineárních prostorů)** Každý lineární prostor nad  $\mathbb{F}$  je isomorfní lineárnímu prostoru tvaru  $\mathbb{F}^{(I)}$ , pro nějakou množinu  $I$ .

DŮKAZ. Ať  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$  a ať  $B$  je báze prostoru  $L$ . Potom zobrazení

$$\text{ev} : \mathbb{F}^{(B)} \longrightarrow L, \quad f \mapsto \sum_{\vec{b} \in B} f(\vec{b}) \cdot \vec{b}$$

je isomorfismus. ■

<sup>3</sup>Zdůrazněme, že existence Hamelovy báze má *nekonstruktivní* povahu: maximální prvek množiny  $\mathcal{M}$  nelze zaručit ostatními axiomy teorie množin.

## Kapitola 4

# Lineární zobrazení z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$

Unfortunately, no one can be told what the Matrix is.  
You have to see it for yourself.

Morpheus, *Matrix*

V této kapitole se budeme věnovat lineárním zobrazením mezi velmi speciálními lineárními prostory; popíšeme všechna lineární zobrazení z prostoru  $\mathbb{F}^s$  do prostoru  $\mathbb{F}^r$ .

Popis lineárních zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$  podáme formou jistých *tabulek* skalárů (těm tabulkám začneme říkat *matice*), které mají  $s$  sloupců a  $r$  řádků. Proto jsme zvolili značení  $\mathbb{F}^s$  a  $\mathbb{F}^r$ .

V podkapitole 4.1 využijeme faktu, že lineární zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$  je plně určeno svými hodnotami na *kanonické* bázi prostoru  $\mathbb{F}^s$ . Z toho plyne úplný popis takových lineárních zobrazení pomocí tabulek skalárů, kterým říkáme *matice*. Ukážeme, jak maticemi lze zadat (například) *základní lineární zobrazení v rovině*: projekce na souřadnicové osy, rotaci, změnu měřítka a zkosení. Vysvětlíme také, jak pomocí *lineárních rovnic* (nebo *defektu* a *hodnoty*) na matici poznat, že jde o monomorfismus, epimorfismus nebo isomorfismus.

V podkapitole 4.2 zavedeme *násobení matic*, které odpovídá skládání lineárních zobrazení. Protože skládání lineárních zobrazení podléhá jistým zákonitostem, bude stejným zákonitostem podléhat i násobení matic. Součinu matic lze využít i pro řešení jednoduchých úloh z *počítačové grafiky*. Příklady takových úloh ukážeme.

Protože lineární zobrazení mezi dvěma pevnými lineárními prostory tvoří opět lineární prostor, tvoří lineární prostor i matice pevných rozměrů. Vysvětlení operací v tomto lineárním prostoru (tj., *součtu* matic a *skalárnímu násobku* matice) je věnována podkapitola 4.3.

V podkapitole 4.4 vysvětlíme, jak vypadají *lineární formy* na prostoru  $\mathbb{F}^n$  a ukážeme, jak pomocí matic zformulovat podmínku pro duální bázi.

### 4.1 Lineární zobrazení jako matice

Všechny následující úvahy jsou založeny na tom, že vektory z lineárních prostorů tvaru  $\mathbb{F}^n$  píšeme do *sloupců*. To není jen typografická „libůstka“: psali-li bychom vektory do řádků, řada následujících výpočtů by byla zcela špatně.

**4.1.1 Úvahy vedoucí k pojmu matice** Ať  $s \geq 1$  a  $r \geq 1$  jsou přirozená čísla. Připomeňme (Příklad 3.2.6), že lineární prostor  $\mathbb{F}^s$  všech  $s$ -tic prvků  $\mathbb{F}$  má *kanonickou* bázi  $K_s = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$ :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tedy  $\mathbf{e}_i$  je  $s$ -tice, která má na  $i$ -té posici prvek 1, všude jinde má prvek 0.

Podle Věty 3.4.1 je *každé* lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  jednoznačně určeno hodnotami na jakékoli pevně zvolené bázi prostoru  $\mathbb{F}^s$ . Zvolme za tuto bázi kanonickou bázi  $K_s$ . Zadat lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  je pak totéž jako zadat seznam vektorů  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  v lineárním prostoru  $\mathbb{F}^r$ . Zadáním jakéhokoli seznamu  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  totiž definujeme zobrazení

$$f : K_s \rightarrow \mathbb{F}^r, \quad \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{a}_2, \quad \dots, \mathbf{e}_s \mapsto \mathbf{a}_s$$

a toto zobrazení určuje lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  hodnotami

$$\mathbf{f}\left(\sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{f}(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

Pro vektor  $\sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$  zavedeme značení  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ . Tím dosáhneme rovnosti

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

kteřá velmi připomíná zápis nejjednoduššího lineárního zobrazení  $x \mapsto a \cdot x$ .

Co zápis  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  přesně znamená, objevíme podrobnou analýzou seznamu  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ . Po rozepsání každého z vektorů  $\mathbf{a}_j$  do sloupců

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}$$

můžeme seznam  $\mathbf{A}$  psát jako obdélníkovou tabulku

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

prvků tělesa  $\mathbb{F}$  a hodnotu zobrazení  $\mathbf{f}$  ve vektoru  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j$  zapíšeme takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ a_{3s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^s a_{1j} \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^s a_{2j} \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^s a_{3j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^s a_{rj} \cdot x_j \end{pmatrix}$$

Jinými slovy, pro tabulku  $\mathbf{A}$  a sloupec  $\mathbf{x}$  definujeme  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  jako ten vektor v  $\mathbb{F}^r$ , který má na  $i$ -té posici součet

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot x_j$$

Poznamenejme ještě, že linearita zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  znamená přesně platnost následujících dvou rovností

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{A} \cdot (a \cdot \mathbf{x}) = a \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})$$

pro libovolné vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  v  $\mathbb{F}^s$  a libovolný skalár  $a$  v  $\mathbb{F}$ .

Obdélníkové tabulky skalárů budou v dalším textu hrát důležitou roli, proto jim dáme jméno.

## 4.1.2 Definice Tabulce

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

skalárů říkáme *matice* typu  $r \times s$  nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Značíme ji  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ . Vektoru

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}$$

budeme říkat *j-tý sloupec* matice  $\mathbf{A}$ . Tabulce

$$\mathbf{h}_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{is})$$

budeme říkat *i-tý řádek* matice  $\mathbf{A}$ . Skalár  $a_{ij}$  budeme říkat *položka* matice  $\mathbf{A}$  v  $j$ -tém sloupci a  $i$ -tém řádku. Matici  $\mathbf{A}$  také budeme zapisovat ve sloupcovém zápisu nebo řádkovém zápisu:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) \quad (\text{sloupcový zápis}) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_r \end{pmatrix} \quad (\text{řádkový zápis})$$

V dalším budeme matici  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  s  $r$  řádky a  $s$  sloupci nad tělesem  $\mathbb{F}$  *ztotožňovat* s lineárním zobrazením  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ , zadaným na kanonické bázi  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$  prostoru  $\mathbb{F}^s$  takto:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{a}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_s \mapsto \mathbf{a}_s$$

Notace  $a_{ij}$  pro položky matic nás bude provázet zbytkem textu. Uvědomme si, že *pořadí* indexů v zápisu  $a_{ij}$  je velmi *důležité*. Například  $a_{23}$  značí položku na *druhém* řádku ve *třetím* sloupci, zatímco  $a_{32}$  značí položku na *třetím* řádku ve *druhém* sloupci.

## 4.1.3 Příklad Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  je lineární zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , které má na kanonické bázi  $K_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  prostoru  $\mathbb{R}^3$  hodnoty

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hodnota  $\mathbf{A}$  v nějakém vektoru  $\mathbf{x}$  v prostoru  $\mathbb{R}^3$  se snadno spočítá díky linearitě  $\mathbf{A}$ . Například pro

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{e}_1 - 10 \cdot \mathbf{e}_2 + 3 \cdot \mathbf{e}_3$$

je

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{A} \cdot (2 \cdot \mathbf{e}_1 - 10 \cdot \mathbf{e}_2 + 3 \cdot \mathbf{e}_3) \\ &= 2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 - 10 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 + 3 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 10 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -39 \\ -23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Maticový zápis je jen zkrácená forma téhož výpočtu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 10 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 10 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 - 10 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ -23 \end{pmatrix}$$

**4.1.4 Poznámka** Slovo *matice* se v matematice vyskytuje poměrně často, leckdy zcela mimo oblast lineární algebry. Termín matice se totiž obvykle používá pro jakoukoli obdélníkovou tabulku nějakých hodnot, které typicky skaláry (tj. prvky nějakého tělesa) nejsou. Příkladem může být *matice incidence* orientovaného grafu v teorii grafů. Více v knihách

☞ Jiří Demel, *Grafy a jejich aplikace*, Academia, Praha 2002

☞ Reinhard Diestel, *Graph theory*, Springer 2012

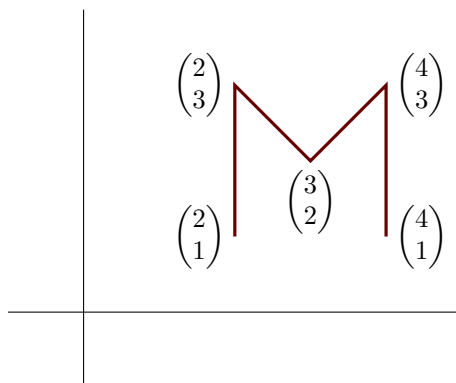
**4.1.5 Poznámka (Úplný popis lineárních zobrazení z  $\mathbb{F}^{(S)}$  do  $\mathbb{F}^{(R)}$ )** Předchozí úvahy je možné zobecnit a podat tak úplný popis lineárních zobrazení z  $\mathbb{F}^{(S)}$  do  $\mathbb{F}^{(R)}$ , kde  $S$  a  $R$  jsou libovolné množiny. Zadat lineární zobrazení  $f : \mathbb{F}^{(S)} \rightarrow \mathbb{F}^{(R)}$  podle Věty 3.4.1 totiž znamená zadat funkci  $f^b : S \rightarrow \mathbb{F}^{(R)}$ . To znamená, že pro každé  $i \in S$  zadáváme  $f^b(i) \in \mathbb{F}^{(R)}$ .

Každé  $f^b(i)$  je  $R$ -souřadnice a hodnotě  $f^b(i)$  je možné říkat  *$i$ -tý sloupec matice  $f$* . V případě, kdy  $S = s$  a  $R = r$  jsou přirozená čísla větší nebo rovna 1 (tj. když  $S = \{0, \dots, s-1\}$  a  $R = \{0, \dots, r-1\}$ , viz Poznámku 1.1.7), dostáváme opět popis lineárních zobrazení z  $F^s$  do  $\mathbb{F}^r$  pomocí matic z Definice 4.1.2.

**4.1.6 Příklad (Seznam bodů jako geometrický útvar)** Protože lineární zobrazení je jednoznačně určeno seznamem svých hodnot na kanonické bázi, můžeme *každý* seznam vektorů považovat za lineární zobrazení. Například matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  je seznam pěti bodů v  $\mathbb{R}^2$ , které dohromady „tvoří písmeno M“:



Toto „písmeno“ lze považovat za lineární zobrazení  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  s hodnotami

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

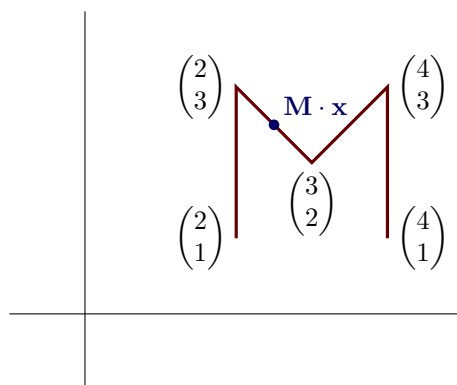
Hodnotu zobrazení  $\mathbf{M}$  v libovolném vektoru  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{R}^5$  spočítáme jako součin  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$ . Například pro

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

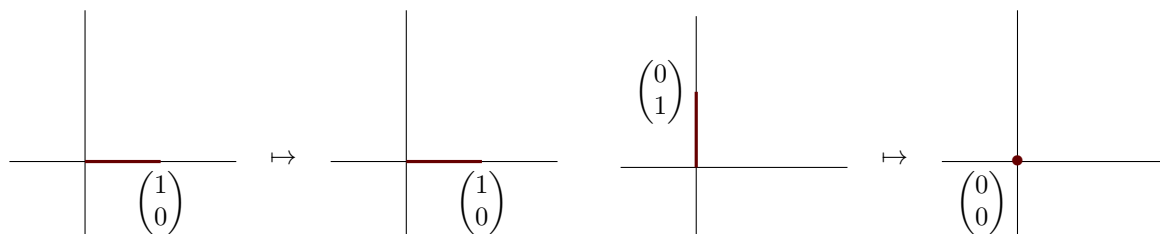
Na obrázku můžeme výsledek označit takto:



Více se o geometrické interpretaci lineárních zobrazení dozvíme v Příkladu 4.2.9.

**4.1.7 Příklad (Matice základních lineárních zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$ )** Připomeňme, že  $\mathbb{R}^2$  má kanonickou bázi  $K_2$  tvořenou vektory  $\mathbf{e}_1$  a  $\mathbf{e}_2$ . Základní lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$  zadáme seznamem hodnot na bázi  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

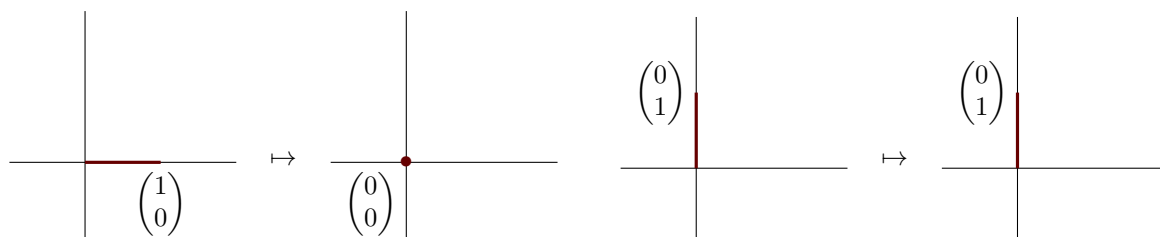
- (1) *Projekce na osu  $x$ .* Pro každý vektor z  $\mathbb{R}^2$  počítá toto zobrazení kolmou projekci na osu  $x$ . Jde tedy o zobrazení, jehož akce na vektorech  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  je následující:



Tudíž matice projekce na osu  $x$  je

$$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

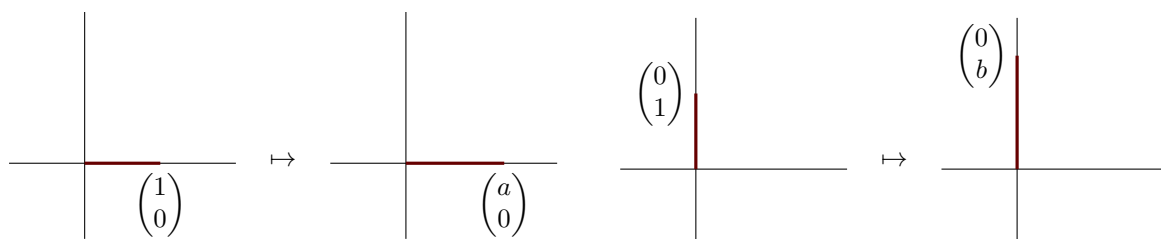
- (2) *Projekce na osu  $y$ .* Pro každý vektor z  $\mathbb{R}^2$  počítá toto zobrazení kolmou projekci na osu  $y$ . Jde o zobrazení, jehož akce na vektorech  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  je následující:



Tudíž matice projekce na osu  $y$  je

$$\mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) *Změna měřítka*. Pro každý vektor  $z \in \mathbb{R}^2$  toto zobrazení „natahuje“  $a$ -krát ve směru osy  $x$  a  $b$ -krát ve směru osy  $y$ , kde  $a$  a  $b$  jsou pevně zadána nenulová reálná čísla. Jde o zobrazení, jehož akce na vektorech  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  je následující:

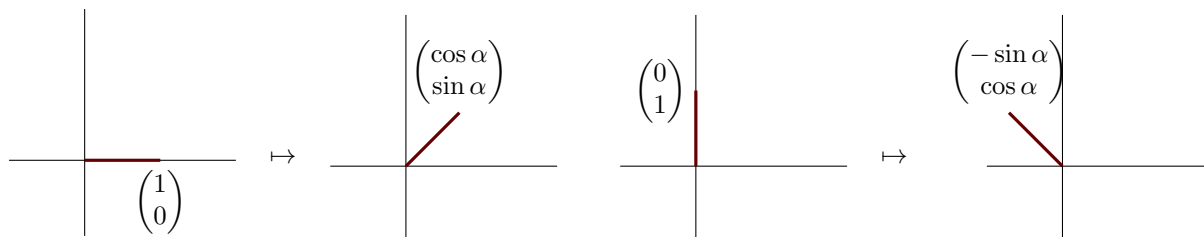


Tudíž matice změny měřítka je

$$\mathbf{M}_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

kde  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

- (4) *Rotace o úhel  $\alpha$* . Zobrazení rotace o úhel  $\alpha \in [0; 2\pi)$  otáčí kolem počátku o úhel  $\alpha$  (proti směru hodinových ručiček). Jde tedy o zobrazení, jehož akce na vektorech  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  je následující:

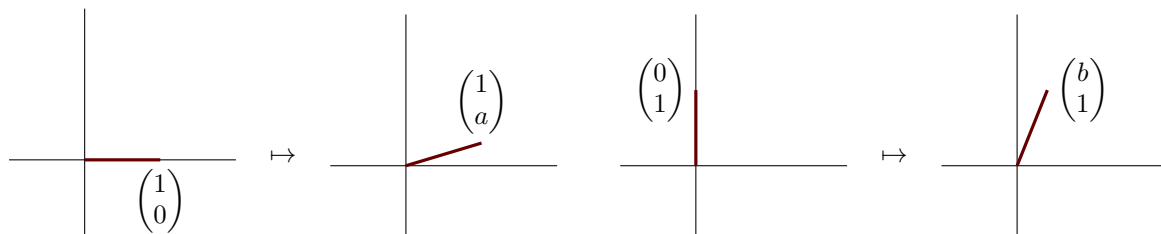


Tudíž matice rotace o úhel  $\alpha$  je

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

kde  $\alpha \in [0; 2\pi)$ .

- (5) *Zkosení* (také: *shear*). Zobrazení „zkosí“ pravoúhlý systém souřadnic. Jde tedy o zobrazení, jehož akce na vektorech  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  je následující:



Tudíž matice zkosení je

$$\mathbf{S}_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Úvahy o lineárních zobrazeních  $z \in \mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$  zakončíme klasifikací monomorfismů, epimorfismů a isomorfismů. Připomeňme z Definice 3.3.7 defekt a hodnotu obecného lineárního zobrazení. Protože defekt je dimenze jádra a hodnota je dimenze obrazu (viz Definici 3.3.7), určují defekt a hodnotu míru toho, „jak moc“ je lineární zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  monomorfismus nebo epimorfismus.

**4.1.8 Tvzení** *Obraz lineárního zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  je  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ .*

DŮKAZ. Ať vektor  $\mathbf{y}$  z  $\mathbb{F}^r$  je v  $\text{im}(\mathbf{A})$ . To znamená, že existuje vektor  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{F}^s$  tak, že  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Využijme toho, že  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$  je báze  $\mathbb{F}^s$  a napišme  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^s a_j \cdot \mathbf{e}_j$ . Potom z linearity zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  plynou rovnosti

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \left( \sum_{j=1}^s a_j \cdot \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^s a_j \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^s a_j \cdot \mathbf{a}_j$$

Tedy  $\mathbf{y}$  je ve  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ .

Obráceně: ať  $\mathbf{y}$  je ve  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ . To znamená, že existují skaláry  $a_1, \dots, a_n$  takové, že  $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \mathbf{a}_j$ . Definujme  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^s a_j \cdot \mathbf{e}_j$ . Potom  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$  z linearity zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ . ■

**4.1.9 Důsledek (Defekt a hodnost matice)** Pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  platí  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \dim(\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s))$  a  $\text{def}(\mathbf{A}) = s - \text{rank}(\mathbf{A})$ .

DŮKAZ. Protože  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \dim(\text{im}(\mathbf{A}))$ , platí první rovnost díky Tvzení 4.1.8. Druhá rovnost plyne okamžitě z Věty 3.3.6. ■

Klasifikaci monomorfismů, epimorfismů a izomorfismů podáme v řeči řešení jistých soustav lineárních rovnic.

Připomeňme, že lineární rovnice v abstraktním smyslu jsme studovali v podkapitole 2.4. Zápis  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , který jsme zavedli v části 4.1.1, ovšem přesně popisuje *soustavy lineárních rovnic*! Přesněji:

Pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ , vektor  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{F}^s$  a vektor  $\mathbf{b}$  z  $\mathbb{F}^r$ , zadané následovně

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

je zápis  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  ekvivalentní standardnímu zápisu

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1s} \cdot x_s &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \dots + a_{2s} \cdot x_s &= b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \dots + a_{3s} \cdot x_s &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{r1} \cdot x_1 + a_{r2} \cdot x_2 + a_{r3} \cdot x_3 + \dots + a_{rs} \cdot x_s &= b_r \end{aligned}$$

soustavy lineárních rovnic o  $s$  neznámých a  $r$  rovnicích.

Soustavám lineárních rovnic a jejich řešení bude věnována celá Kapitola 6.

**4.1.10 Tvzení** Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  je lineární zobrazení.

(1) Následující je ekvivalentní:

- (a) Zobrazení  $\mathbf{A}$  je monomorfismus.
- (b) Rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$  má jediné řešení  $\mathbf{0}$ .
- (c) Pro defekt zobrazení  $\mathbf{A}$  platí:  $\text{def}(\mathbf{A}) = 0$ .

(2) Následující je ekvivalentní:

- (a) Zobrazení  $\mathbf{A}$  je epimorfismus.

- (b) Pro každé  $\mathbf{b}$  v  $\mathbb{F}^r$  má rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má alespoň jedno řešení.
- (c) Pro hodnotu zobrazení  $\mathbf{A}$  platí:  $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$ .
- (3) Ať  $r = s = n$ . Následující je ekvivalentní:
- (a) Zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  je isomorfismus.
- (b) Pro každé  $\mathbf{b}$  v  $\mathbb{F}^r$  má rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  právě jedno řešení.
- (c) Pro hodnotu zobrazení  $\mathbf{A}$  platí:  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ .
- (d) Pro defekt zobrazení  $\mathbf{A}$  platí:  $\text{def}(\mathbf{A}) = 0$ .

DŮKAZ. Důkaz plyne přepsáním Poznámky 2.4.2 a využitím Důsledku 4.1.9. Pro část (3) využijeme i Důsledek 3.3.8. ■



**4.1.11 Poznámka (Další terminologie pro isomorfismy  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ )** Matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  je isomorfismus (podle Definice 2.3.1), když zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  je bijekce (tj., když je prosté a na).

Místo slova *isomorfismus* se pro čtvercové matice používá i řada jiných termínů:

- (1) Matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  je *invertibilní*. Viz Poznámku 2.3.6.
- (2) Matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  je *regulární*.

Tyto termíny budeme v dalším také používat. Pochopitelně, pro inverzi zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  budeme používat značku

$$\mathbf{A}^{-1}$$

a zobrazení  $\mathbf{A}^{-1}$  budeme říkat *matice inverzní k matici  $\mathbf{A}$*  (také: *inverse matice  $\mathbf{A}$* ), viz Definici 2.3.5.

Poznamenejme ještě, že matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  se říká *singulární*, když není regulární (tj., když není isomorfismus). Singulární matice ovšem podle Důsledku 3.3.8 *nemůže* být ani monomorfismus ani epimorfismus.

## 4.2 Skládání lineárních zobrazení je násobení matic

**4.2.1 Úvahy vedoucí k součinu matic** Protože podle Tvzení 2.2.4 je složení lineárních zobrazení opět lineární zobrazení, jakékoli dvě zadané matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^p$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \longrightarrow \mathbb{F}^r$  jednoznačně určují matici  $\mathbf{C} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ . Této matici  $\mathbf{C}$  budeme říkat *součin matic  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{A}$*  (pozor: záleží na pořadí). Matice  $\mathbf{C}$  musí být definována tak, aby pro každý vektor  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{F}^s$  platila rovnost

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})$$

Popisu matice  $\mathbf{C}$  lze dosáhnout následujícími úvahami:

(1) Rovnost  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})$  platí právě tehdy, pokud platí rovnost  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j)$  pro každé  $j$  z množiny  $\{1, \dots, s\}$ . Opravdu: stačí se opět odvolat na Větu 3.4.1, protože lineární zobrazení  $\mathbf{C} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  je plně určeno hodnotami na uspořádané bázi  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$  prostoru  $\mathbb{F}^s$ . To znamená, že  $j$ -tý sloupec hledané matice  $\mathbf{C}$  bude vektor  $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j)$ .

(2) Matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^p$  je seznam vektorů  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$  v prostoru  $\mathbb{F}^p$ . Připomeňme, že platí  $\mathbf{a}_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j$ . Proto platí  $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j$  pro každé  $j$  z množiny  $\{1, \dots, s\}$ . Matice  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \longrightarrow \mathbb{F}^r$  je seznam vektorů  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p)$  v prostoru  $\mathbb{F}^r$ . Podle odstavce 4.1.1 je

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j = a_{1j} \cdot \mathbf{b}_1 + a_{2j} \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + a_{pj} \cdot \mathbf{b}_p$$

kde jsme rozepsali vektor  $\mathbf{a}_j$  po jednotlivých položkách

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$$

Vektor  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j$  nyní opět rozepíšeme po položkách

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \cdot b_{11} + a_{2j} \cdot b_{12} + \cdots + a_{pj} \cdot b_{1p} \\ a_{1j} \cdot b_{21} + a_{2j} \cdot b_{22} + \cdots + a_{pj} \cdot b_{2p} \\ \vdots \\ a_{1j} \cdot b_{r1} + a_{2j} \cdot b_{r2} + \cdots + a_{pj} \cdot b_{rp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p b_{1k} \cdot a_{kj} \\ \sum_{k=1}^p b_{2k} \cdot a_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p b_{rk} \cdot a_{kj} \end{pmatrix}$$

a to je  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{C}$ .

**4.2.2 Definice (Součin matic)** Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^p$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^r$  jsou matice. *Součin matic*  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{A}$  je matice  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ . Pokud jako  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  označíme sloupcový zápis matice  $\mathbf{A}$ , potom

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_s)$$

je sloupcový zápis matice  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ . Neboli: v  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  je na  $i$ -tém řádku skalár tvaru

$$\sum_{k=1}^p b_{ik} \cdot a_{kj}$$

Součin matic tedy *není nic jiného* než skládání příslušných lineárních zobrazení. To má dalekosáhlé důsledky: vše, co víme o skládání lineárních zobrazení, lze převést na poznatky o násobení matic. Součin matic má však i *geometrickou interpretaci*, viz Příklad 4.2.9.

**4.2.3 Příklad** Spočítáme  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  pro matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , které jsou zadány následovně:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 5 \\ 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Potom matice

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 5 \\ 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

musí mít 2 sloupce a 3 řádky, protože víme, že součin  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  je lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^3$ . Navíc si povšimněme, že *matice  $\mathbf{B}$  má stejně sloupců jako má matice  $\mathbf{A}$  řádků*. To musí platit: kdyby tomu tak nebylo, nemohli bychom lineární zobrazení  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  složit. Více o této „rozměrové zkoušce“ řekneme v Poznámce 4.2.4.

- (1) Výpočet *prvního sloupce* matice  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ . Podle Definice 4.2.2 máme vzít *první sloupec* matice  $\mathbf{A}$  a vynásobit jím matici  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 25 \\ 33 \end{pmatrix}$$

- (2) Výpočet *druhého sloupce* matice  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ . Podle Definice 4.2.2 máme vzít *druhý sloupec* matice  $\mathbf{A}$  a vynásobit jím matici  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 \\ 26 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Celkově dostáváme rovnost

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 5 \\ 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 83 \\ 25 & 26 \\ 33 & 18 \end{pmatrix}$$

**4.2.4 Poznámka (Rozměrová zkouška pro násobení matic)** Pro matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^p$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^t \rightarrow \mathbb{F}^r$  je součin  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  definován *pouze tehdy*, pokud platí  $t = p$ . To je jasné: pro  $p \neq t$  není možné příslušná lineární zobrazení skládat. Z toho plyne *rozměrová zkouška* pro součin matic:

*Maticový součin  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  je definován pouze tehdy, pokud matice  $\mathbf{B}$  má stejně sloupců jako má matice  $\mathbf{A}$  řádků.*

Protože součin matic je skládání příslušných lineárních zobrazení, platí následující.

**4.2.5 Tvzení** *Násobení matic je asociativní. Podrobněji: pro matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  platí*

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$$

*kdykoli matice mají takové rozměry, že součiny mají smysl (tj., kdykoli platí příslušné rozměrové zkoušky z Poznámky 4.2.4).*

DŮKAZ. Pro skládání lineárních zobrazení asociativní zákon platí, viz Tvzení 2.2.4. ■



**4.2.6 Příklad (Násobení matic není komutativní)** I když výrazu  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  říkáme *součin* matic  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{A}$ , musíme si dát pozor: násobení matic *není* komutativní. To znamená, že na pořadí jednotlivých činitelů záleží. Například pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

**4.2.7 Definice (Jednotková matice)** Matice  $\mathbf{E}_n : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ , která má v  $i$ -tém sloupci vektor  $\mathbf{e}_i$ , říkáme *jednotková matice*.

**4.2.8 Poznámka (Proč se říká jednotková matice?)** Matice  $\mathbf{E}_n : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  evidentně splňuje rovnosti

$$\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{B}$$

pro každou matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^n$  a každou matice  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^r$ . To plyne z toho, že platí  $\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$  pro všechna  $i = 1, \dots, n$ . Matice  $\mathbf{E}_n$  je tedy pouze jiná značka pro identické zobrazení  $\text{id} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ .

Matice  $\mathbf{E}_n$  se tedy chová podobně jako reálné číslo 1 (připomeňme, že v reálných číslech platí rovnosti  $1 \cdot a = a$  a  $b \cdot 1 = b$ , pro každá reálná čísla  $a, b$ ). To vysvětluje terminologii.

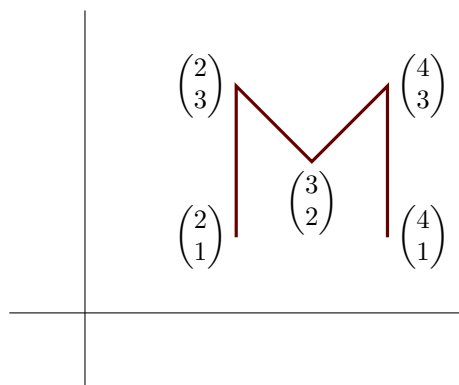
Násobení matic má (kromě interpretace součinu matic jako složení příslušných lineárních zobrazení) i následující jasnou geometrickou interpretaci. Součin  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ , kde  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^p$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^r$ , si lze představit takto:

- (1) Matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^p$  je seznam  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  bodů v lineárním prostoru  $\mathbb{F}^p$ .
- (2) Matice  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^r$  je lineární zobrazení.
- (3) Matice  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  je seznam  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s)$  bodů v lineárním prostoru  $\mathbb{F}^r$ . Každý bod  $\mathbf{b}_j$  vznikl jako  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j$ . Neboli: každý bod  $\mathbf{b}_j$  vznikl z bodu  $\mathbf{a}_j$  aplikací lineárního zobrazení  $\mathbf{B}$ .

#### 4.2.9 Příklad (Geometrická interpretace násobení matic) Z Příkladu 4.1.6 víme, že matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

je seznam následujících pěti bodů v  $\mathbb{R}^2$



který lze považovat za lineární zobrazení  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

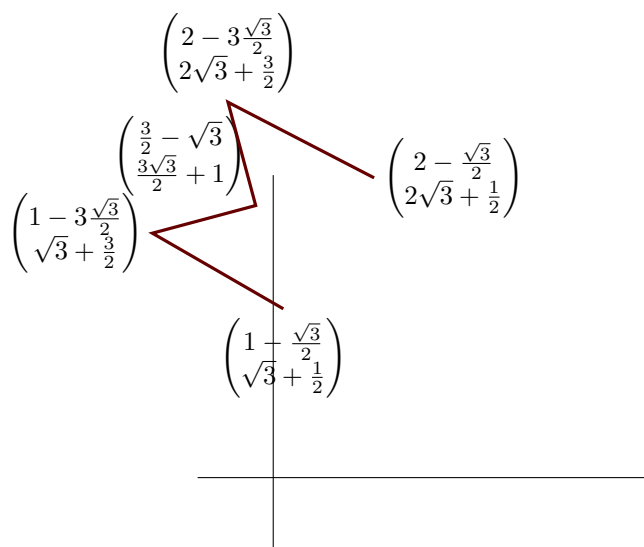
Matice  $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{3}}$  rotace o úhel  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  má tvar

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Součin matic

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{3}} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} - \sqrt{3} & 2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} & 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} & \sqrt{3} + \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 & 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} & 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

tedy odpovídá složení zobrazení  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a  $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{3}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Výsledná pětice bodů



je otočení písmene  $M$  o úhel  $\frac{\pi}{3}$ .

Podobně můžeme využít matici

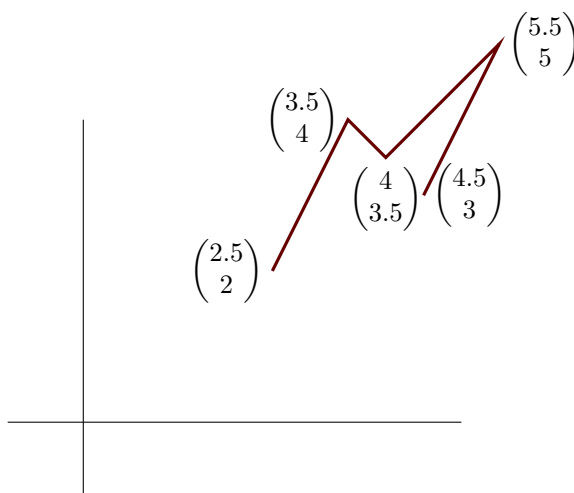
$$\mathbf{S}_{0.5,0.5} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$



zkosení pravoúhlých souřadnic. Součin

$$\mathbf{S}_{0.5,0.5} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 3.5 & 4 & 5.5 & 4.5 \\ 2 & 4 & 3.5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

tedy odpovídá složení zobrazení  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a  $\mathbf{S}_{0.5,0.5} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Výsledná pětice bodů



je zkosením písmene M.

Dalším skládáním lze dosáhnout složitějších efektů. Například maticový součin  $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{6}} \cdot \mathbf{S}_{0.6,0.4} \cdot \mathbf{M}$  písmeno M nejprve zkosí maticí  $\mathbf{S}_{0.6,0.4}$  a poté výsledek otočí o  $\frac{\pi}{6}$  maticí  $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{6}}$ .

**4.2.10 Poznámka** Příklad 4.2.9 dává návod, jak zpracovávat rovinné útvary pomocí násobení matic. Podobně by šlo zpracovávat i útvary v  $\mathbb{R}^3$ . Získali bychom tak algoritmy, které mají využití v počítačové grafice. Mezi dvě důležité úpravy prostorových útvarů patří jistě i *translace* (posunutí) o pevný vektor a *perspektivní projekce*. Ani jedna z těchto úprav však není zadána lineárním zobrazením a tudíž není možné maticové násobení použít. Tyto obtíže velmi elegantně řeší projektivní geometrie, více v Dodatku L.

**4.2.11 Příklad (Lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^3$  do  $\mathbb{R}^3$  v blokovém tvaru)** V tomto příkladu ukážeme, že některá lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^3$  do  $\mathbb{R}^3$  lze „poskládat“ ze známých lineárních zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$  „blokovým“ způsobem.

Například matice

$$\mathbf{R}_{\alpha,z} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je lineární zobrazení  $\mathbf{R}_{\alpha,z} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , které otáčí o úhel  $\alpha$  kolem osy  $z$ . Opravdu: součin

$$\mathbf{R}_{\alpha,z} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z \end{pmatrix}$$

ukazuje, že vektor  $\mathbf{R}_{\alpha,z} \cdot \mathbf{x}$  má první dvě položky otočeny o úhel  $\alpha$  a třetí položka zůstává nezměněna.

To je obecný jev: pro každou matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  s položkami

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

můžeme definovat matici  $\mathbf{A}_z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  jako

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Potom vektor  $\mathbf{x}$  je zobrazen na vektor  $\mathbf{A}_z \cdot \mathbf{x}$ , jehož první dvě položky jsou zmeněny tak, jak udává matice  $\mathbf{A}$  na prvních dvou položkách vektoru  $\mathbf{x}$  a třetí položka vektoru  $\mathbf{x}$  je nezměněna.

Jak získat například matici  $\mathbf{R}_{\alpha,x}$  rotace o úhel  $\alpha$  kolem osy  $x$ ? Budeme postupovat koncepčně: hledanou matici  $\mathbf{R}_{\alpha,x}$  vytvoříme z matice  $\mathbf{R}_{\alpha,z}$  *přejmenováním souřadnicových os*. Přesněji, matice  $\mathbf{R}_{\alpha,x}$  je následující složení lineárních zobrazení

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{swap}_{x \mapsto z, y \mapsto y, z \mapsto x}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{R}_{\alpha,z}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{swap}_{x \mapsto z, y \mapsto y, z \mapsto x}} \mathbb{R}^3$$

kde lineární zobrazení  $\text{swap}_{x \mapsto z, y \mapsto y, z \mapsto x}$  prohazuje osy  $x$  a  $z$ .

Zjevně platí

$$\text{swap}_{x \mapsto z, y \mapsto y, z \mapsto x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a proto

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\alpha,x} &= \text{swap}_{x \mapsto z, y \mapsto y, z \mapsto x} \cdot \mathbf{R}_{\alpha,z} \cdot \text{swap}_{x \mapsto z, y \mapsto y, z \mapsto x} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Výsledná matice  $\mathbf{R}_{\alpha,x}$  počítá rotaci o úhel  $\alpha$  kolem osy  $x$  *ve směru hodinových ručiček*.

Podobným způsobem lze postupovat s libovolnou maticí  $\mathbf{A}_z$  a vytvořit tak matice  $\mathbf{A}_x$  a  $\mathbf{A}_y$ .

Více se o maticích v blokovém tvaru dozvíme v Příkladu 4.3.6.

### 4.3 Lineární prostor všech lineárních zobrazení z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$

Podle Tvzení 2.1.6 tvoří všechna lineární zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$  opět lineární prostor nad tělesem  $\mathbb{F}$ , značený  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ .

Jeden vektor z prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  je tedy jedna matice  $\mathbf{A}$ , která má  $s$  sloupců a  $r$  řádků. Definice nulového vektoru v  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  operací sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem v lineárním prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  byly podány v důkazu Tvzení 2.1.6. Tyto definice nám tedy umožňují psát

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad a \cdot \mathbf{A}$$

pro libovolné matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  a libovolný skalár  $a$  z tělesa  $\mathbb{F}$ . Nulový vektor lineárního prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  označme jako  $\mathbf{O}_{s,r}$ .

Podle důkazu Tvzení 2.1.6 musí platit rovnosti

$$\mathbf{O}_{s,r} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}, \quad (a \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = a \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \quad (4.1)$$

pro libovolný vektor  $\mathbf{x}$  z prostoru  $\mathbb{F}^s$ .

I když tyto definice zní velmi abstraktně, ve skutečnosti mají velmi jednoduchý projev. Abychom zjistili, jak matice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  a  $a \cdot \mathbf{A}$  opravdu vypadají, stačí využít toho, že  $K_s = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  je báze prostoru  $\mathbb{F}^s$  a použít Větu 3.4.1.

**4.3.1 Tvzení** *At  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  jsou libovolné matice a  $a$  je libovolný skalár z tělesa  $\mathbb{F}$ . Potom pro všechna  $j = 1, \dots, s$  platí:*

- (1)  *$j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{O}_{s,r}$  je nulový vektor  $\mathbf{o}$  prostoru  $\mathbb{F}^r$ .*

(2)  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  je vypočten jako součet  $j$ -tých sloupců matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ .

(3)  $j$ -tý sloupec matice  $a \cdot \mathbf{A}$  je vypočten jako  $a$ -násobek  $j$ -tého sloupce matice  $\mathbf{A}$ .

DŮKAZ. Rovnosti (4.1) musí platit i pro každý vektor  $\mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, s$  z báze  $K_s$ .

(1) Součin  $\mathbf{O}_{s,r} \cdot \mathbf{e}_j$  je  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{O}_{s,r}$ . Podle (4.1) musí jít o nulový vektor  $\mathbf{o}$  prostoru  $\mathbb{F}^r$ .

(2) Součin  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_j$  je  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ . Součet  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_j$  je součet  $j$ -tých sloupců matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ .

(3) Součin  $(a \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_j$  je  $j$ -tý sloupec matice  $a \cdot \mathbf{A}$ . Součin  $a \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j)$  je  $a$ -násobek  $j$ -tého sloupce matice  $\mathbf{A}$ .

■

Nulový vektor  $\mathbf{O}_{s,r}$  lineárního prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  lze podle Tvzení 4.3.1 přepsat do složkového tvaru:

$$\mathbf{O}_{s,r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

To jest: matice  $\mathbf{O}_{s,r}$  je matice samých nul (pochopitelně musí mít  $s$  sloupců a  $r$  řádků). Říkáme jí *nulová matice*.

Protože součet vektorů a násobek vektoru skalárem jsou v prostoru  $\mathbb{F}^r$  definovány po složkách, je možné Tvzení 4.3.1 přepsat do složkového tvaru:

Jsou-li matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  zadány po položkách jako tabulky

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2s} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3s} \\ \vdots & & & & \\ b_{r1} & b_{r2} & b_{r3} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix}$$

potom matice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  a  $a \cdot \mathbf{A}$  (kde  $a$  je libovolný skalár) jsou zadány jako tabulky

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1s} + b_{1s} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2s} + b_{2s} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \dots & a_{3s} + b_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} + b_{r1} & a_{r2} + b_{r2} & a_{r3} + b_{r3} & \dots & a_{rs} + b_{rs} \end{pmatrix} \quad a \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a \cdot a_{12} & a \cdot a_{13} & \dots & a \cdot a_{1s} \\ a \cdot a_{21} & a \cdot a_{22} & a \cdot a_{23} & \dots & a \cdot a_{2s} \\ a \cdot a_{31} & a \cdot a_{32} & a \cdot a_{33} & \dots & a \cdot a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a \cdot a_{r1} & a \cdot a_{r2} & a \cdot a_{r3} & \dots & a \cdot a_{rs} \end{pmatrix}$$

To jest: matice stejných rozměrů sčítáme po složkách, matici násobíme skalárem tak, že tím skalárem vynásobíme všechny položky.

**4.3.2 Poznámka (Rozměrová zkouška pro součet matic)** Z naší definice okamžitě plyne následující *rozměrová zkouška* pro sčítání matic:

*Dvě matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  lze sečíst pouze tehdy, když  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  mají stejný počet sloupců a současně  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  mají stejný počet řádků. Jindy sčítání matic definováno není.*

To je jasné: součet matic je definován jako součet dvou vektorů z *jednoho* lineárního prostoru. Máme-li matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^{s_1} \rightarrow \mathbb{F}^{r_1}$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^{s_2} \rightarrow \mathbb{F}^{r_2}$ , kde  $s_1 = s_2$  a současně  $r_1 = r_2$ , pak lineární prostory  $\text{Lin}(\mathbb{F}^{s_1}, \mathbb{F}^{r_1})$  a  $\text{Lin}(\mathbb{F}^{s_2}, \mathbb{F}^{r_2})$  jsou *stejné*,  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  tedy sčítat můžeme. Je-li  $s_1 \neq s_2$  nebo  $r_1 \neq r_2$ , pak jsou lineární prostory  $\text{Lin}(\mathbb{F}^{s_1}, \mathbb{F}^{r_1})$  a  $\text{Lin}(\mathbb{F}^{s_2}, \mathbb{F}^{r_2})$  *různé*,  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  tedy sčítat nemůžeme.

**4.3.3 Příklad** Všechny následující matice jsou nad tělesem  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 31 & 7 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 25 & -13 & 14 \\ 1 & 24 & 65 \end{pmatrix}$$

- (1) Součty  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C} + \mathbf{B}$  definovány nejsou (viz rozměrovou zkoušku z Poznámky 4.3.2), součty  $\mathbf{A} + \mathbf{C}$  a  $\mathbf{C} + \mathbf{A}$  definovány jsou:

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1+25 & 3-13 & 4+14 \\ 2+1 & 4+24 & 5+65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -10 & 18 \\ 3 & 28 & 70 \end{pmatrix} = \mathbf{C} + \mathbf{A}$$

- (2) Platí

$$3 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 12 \\ 6 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

- (3) Můžeme vytvářet i lineární kombinace matic. Například

$$5 \cdot \mathbf{A} - 3 \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 25 & 5 \cdot 3 - 3 \cdot (-13) & 5 \cdot 4 - 3 \cdot 14 \\ 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 & 5 \cdot 4 - 3 \cdot 24 & 5 \cdot 5 - 3 \cdot 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 & 54 & -22 \\ 7 & -52 & -175 \end{pmatrix}$$

Protože  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  je lineární prostor, zajímá nás i dimenze tohoto prostoru. Výpočet je jednoduchý:

**4.3.4 Tvzení (Dimenze prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ )** Dimenze lineárního prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  nad  $\mathbb{F}$  je rovna přirozenému číslu  $s \cdot r$ .

**DŮKAZ.** Předpokládejme, že  $s \cdot r = 0$ . Potom  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  obsahuje pouze jediné lineární zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$ . Toto lineární zobrazení je nutně zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}$ . Proto  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$  obsahuje pouze nulový vektor, a proto má dimenzi 0.

Předpokládejme, že  $s \cdot r \neq 0$ . To znamená, že  $s \geq 1$  a současně  $r \geq 1$ . Pro libovolnou dvojici  $(i, j)$ , kde  $1 \leq i \leq r$  a  $1 \leq j \leq s$  označme jako

$$\mathbf{B}_{(i,j)} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$$

matici, která má v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci skalár 1 a na všech ostatních pozicích skalár 0. Ukážeme, že množina

$$M = \{\mathbf{B}_{(i,j)} \mid 1 \leq i \leq r \text{ a } 1 \leq j \leq s\}$$

je bází prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ .

- (1) Platí  $\text{span}(M) = \text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ . Skutečně, pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  s položkami  $a_{ij}$  platí rovnost

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot \mathbf{B}_{(i,j)}$$

- (2) Množina  $M$  je lineárně nezávislá: pokud

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot \mathbf{B}_{(i,j)} = \mathbf{0}_{r,s}$$

potom  $a_{ij} = 0$  pro všechna  $i$  a  $j$ .

Protože množina  $M$  má  $s \cdot r$  prvků, je důkaz u konce. ■

**4.3.5 Příklad** Dimenze prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  nad  $\mathbb{R}$  je rovna 6. Následující množina je báze prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  nad  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(1,1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{B}_{(1,2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{B}_{(1,3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}_{(2,1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{B}_{(2,2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{B}_{(2,3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V Příkladu 4.2.11 jsme viděli *blokový zápis* matice. Zápis matice pomocí bloků bude v dalším velmi užitečný. Ukážeme, jak interpretovat matice, které mají na hlavní diagonále bloky a všude jinde nulové matice příslušných rozměrů.

**4.3.6 Příklad (Blokově diagonální tvar matice a direktní součet matic)** Matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{B}_k \end{pmatrix}$$

kde  $\mathbf{O}$  jsou nulové matice příslušných rozměrů, budeme říkat *blokově diagonální*. Jak takovou matici interpretovat jako lineární zobrazení?

Vše podrobně vysvětlíme na příkladu matice

$$\mathbf{R}_{\alpha,z} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  z Příkladu 4.2.11, která má na diagonále dva bloky:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (1)$$

Blokově diagonální tvar budeme zapisovat i takto:

$$\left( \begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Víme, že blok

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

je rotace v rovině kolem počátku o úhel  $\alpha$ , viz Příklad 4.1.7 a blok

$$(1)$$

je matice identického zobrazení na  $\mathbb{R}$ , viz Definici 4.2.7.

Jednoduché úvahy nás vedou k tomu, že matici

$$\left( \begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

můžeme *ztotožnit* s lineárním zobrazením

$$\mathbf{f}_1 : \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \longrightarrow \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

které otáčí v podprostoru  $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Stejně tak matici

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

můžeme *ztotožnit* s lineárním zobrazením

$$\mathbf{f}_2 : \text{span}(\mathbf{e}_3) \longrightarrow \text{span}(\mathbf{e}_3)$$

které je identické v podprostoru  $\text{span}(\mathbf{e}_3)$  prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

Matice

$$\left( \begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

je tedy přesně *direktním součtem* zobrazení  $\mathbf{f}_1$  a  $\mathbf{f}_2$ , viz Definici 2.2.7. Skutečně: platí  $\mathbb{R}^3 = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \oplus \text{span}(\mathbf{e}_3)$  a my jsme výše uvedenou maticí popsali přesně direktní součet zobrazení: na  $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  otáčejte a na  $\text{span}(\mathbf{e}_3)$  nedělejte nic.

Proto budeme značit

$$\left( \begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \oplus (1)$$

Obecný případ je pak jednoduchým zobecněním: blokově diagonální matici budeme psát jako direktní součet bloků na diagonále:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{B}_k \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_k$$

## 4.4 Lineární formy na $\mathbb{F}^n$

Speciálním případem lineárních zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$  jsou lineární zobrazení z  $\mathbb{F}^n$  do  $\mathbb{F}$ . Podle podkapitoly 2.5 takovým zobrazením říkáme *lineární formy na  $\mathbb{F}^n$* . Pojem matice nám umožňuje podat úplný popis lineárních forem.

Podle odstavce 4.1.1 je každé lineární zobrazení  $\mathbf{h} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$  zadáno maticí tvaru  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ , kde  $a_i = \mathbf{h}(\mathbf{e}_i)$  pro  $i = 1, \dots, n$ . Matice lineární formy  $\mathbf{h}$  je tedy vektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

který je *zapsán do řádku místo do sloupce*. Řádkovým vektorům se často říká *kovektory*. Kovektor, který vznikl z vektoru  $\mathbf{a}$  budeme značit  $\mathbf{a}^T$ , tj.

$$\text{pro vektor } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ je příslušný kovektor roven matici } \mathbf{a}^T = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

Hodnota lineárního zobrazení zadaného kovektorem  $\mathbf{a}^T = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$  ve vektoru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

z prostoru  $\mathbb{F}^n$  je dána součinem

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$$

Máme-li matici  $\mathbf{A}$  zapsanou po položkách jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

pak *každý její řádek* tvoří jeden kovektor. Označíme-li  $i$ -tý řádek jako kovektor  $\mathbf{h}_i$ , potom  $\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{x}$  je  $i$ -tá *levá strana* soustavy lineárních rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  o  $s$  neznámých a  $r$  rovnicích. Toho využijeme v Kapitole 6.

**4.4.1 Poznámka** Popis prostoru lineárních forem na  $\mathbb{F}^n$  pomocí kovektorů silně využíval fakt, že lineární prostor  $\mathbb{F}^n$  má konečnou dimenzi. V případě prostorů  $L$ , které nemají konečnou dimenzi, je popis lineárních forem značně barvitější. Například lineární forma na  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ , která je definovaná „nekonečnou maticí“

$$\mathbf{a} = (1 \ 1 \ \dots)$$

samých jedniček, není tvaru  $\mathbf{a} = \mathbf{x}^T$  pro žádný vektor  $\mathbf{x}$ , protože každý vektor  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  má pouze konečně mnoho nenulových hodnot.

**4.4.2 Příklad (Duální báze k zadané bázi prostoru  $\mathbb{R}^2$ )** Popíšeme duální báze  $B^*$  a  $C^*$  ke dvěma bázím

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \quad C = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Kovektory duálních bází  $B^*$  a  $C^*$  označíme jako  $\mathbf{b}_1^*$  a  $\mathbf{b}_2^*$ , respektive  $\mathbf{c}_1^*$  a  $\mathbf{c}_2^*$ , a v tomto příkladu je *uhodneme*. Metodu, jak kovektory duální báze *spočítat*, vyvineme v Kapitole 6.

(1) Protože musí platit rovnosti

$$\mathbf{b}_1^* \cdot \mathbf{b}_1 = 1, \quad \mathbf{b}_1^* \cdot \mathbf{b}_2 = 0, \quad \mathbf{b}_2^* \cdot \mathbf{b}_1 = 0, \quad \mathbf{b}_2^* \cdot \mathbf{b}_2 = 1$$

platí

$$\mathbf{b}_1^* = (2 \ -1), \quad \mathbf{b}_2^* = \left(-\frac{3}{2} \ 1\right)$$

(2) Protože musí platit rovnosti

$$\mathbf{c}_1^* \cdot \mathbf{c}_1 = 1, \quad \mathbf{c}_1^* \cdot \mathbf{c}_2 = 0, \quad \mathbf{c}_2^* \cdot \mathbf{c}_1 = 0, \quad \mathbf{c}_2^* \cdot \mathbf{c}_2 = 1$$

platí

$$\mathbf{c}_1^* = \left(0 \ \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{c}_2^* = \left(\frac{1}{2} \ -\frac{1}{3}\right)$$

Všimněme si, že báze  $B$  a  $C$  se *liší v jediném vektoru*, duální báze  $B^*$  a  $C^*$  se však *liší v obou vektorech*. To znamená, že obecně každý z vektorů duální báze závisí na celé původní bázi.

V předchozím příkladu jsme neřekli, *jak* duální bázi k zadané bázi nalézt. Zatím jsme schopni pouze zformulovat následující maticovou podmínku, kterou kovektory duální báze musí splňovat. Prostředky k nalezení duální báze vyvineme až v Kapitole 6.

**4.4.3 Lemma (Maticová rovnice pro duální bázi prostoru  $\mathbb{F}^n$ )** Předpokládejme, že  $n \geq 1$ . Ať jednotlivé vektory dané báze  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  tvoří sloupce matice  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ .

Potom jednotlivé kovektory  $\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*$  duální báze  $B^*$  tvoří řádky matice  $\mathbf{Y} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ , která splňuje rovnici

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}_n$$

DŮKAZ. Jednotlivé kovektory  $\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*$  duální báze  $B^*$  musí splňovat rovnosti

$$\mathbf{b}_i^* \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$$

pro každé  $i, j$  z množiny  $\{1, \dots, n\}$ . To ale znamená přesně maticovou rovnost  $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}_n$ , kde řádky matice  $\mathbf{Y}$  jsou kovektory  $\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*$ . ■

Tvoří-li sloupce matice  $\mathbf{B}$  bázi lineárního prostoru  $\mathbb{F}^n$ , pak matice  $\mathbf{B}$  musí být isomorfismus (tj., regulární matice), protože platí rovnost  $\text{rank}(\mathbf{B}) = \dim(\text{im}(\mathbf{B})) = n$ . Podle definice isomorfismu pak má maticová rovnice  $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}_n$  právě jedno řešení, sice  $\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}$ . Lemma 4.4.3 tedy říká:

*Jestliže jakoukoli bázi  $B$  prostoru  $\mathbb{F}^n$  napíšeme po sloupcích do matice  $\mathbf{B}$ , pak řádky matice  $\mathbf{B}^{-1}$  jsou kovektory duální báze  $B^*$ .*

Invertování matic, tj. výpočtu  $\mathbf{B}^{-1}$  pro zadanou matici  $\mathbf{B}$ , se budeme věnovat v Kapitolách 6 (Příklad 6.4.12) a 8 (Příklad 8.4.5).

**4.4.4 Poznámka** Určení duální báze je jednoduché v případě, kdy báze prostoru  $\mathbb{F}^n$  je kanonická báze  $K_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Duální báze  $K_n^* = (\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$  je tvořena kovektory (připomínáme značení  $\mathbf{a}^T$ )

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1^T, \quad \mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_2^T, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n^* = \mathbf{e}_n^T$$

protože pro každé  $i, j$  z množiny  $\{1, \dots, n\}$  evidentně platí rovnost  $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ .

**4.4.5 Příklad (Matice určuje lineární zobrazení mezi duálními prostory)** Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  je matice. Lineární prostor  $(\mathbb{F}^r)^*$  je tvořen lineárními formami (kovektory) tvaru

$$\mathbf{h} = (h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_r)$$

Maticový součin  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}$  je tedy lineární forma na  $\mathbb{F}^s$ . Navíc předpis

$$\mathbf{h} \mapsto \mathbf{h} \cdot \mathbf{A}$$

určuje lineární zobrazení  $\mathbf{A}^*$  z  $(\mathbb{F}^r)^*$  do  $(\mathbb{F}^s)^*$ , které je duální (viz Definici 2.5.4) k zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ .

Nejprve ukážeme, že zobrazení  $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{h} \cdot \mathbf{A}$  je lineární.

- (1) Rovnost  $\mathbf{A}^*(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) = \mathbf{A}^*(\mathbf{h}_1) + \mathbf{A}^*(\mathbf{h}_2)$  ukážeme následovně.

Zvolme jakýkoli vektor  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Potom

$$(\mathbf{A}^*(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2))(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i) + (\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i) = (\mathbf{A}^*(\mathbf{h}_1))(\mathbf{e}_i) + (\mathbf{A}^*(\mathbf{h}_2))(\mathbf{e}_i)$$

Lineární zobrazení  $\mathbf{A}^*(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}$  a  $\mathbf{A}^*(\mathbf{h}_1) + \mathbf{A}^*(\mathbf{h}_2) : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}$  se tedy shodují na všech prvcích báze prostoru  $\mathbb{F}^s$ , proto platí rovnost  $\mathbf{A}^*(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) = \mathbf{A}^*(\mathbf{h}_1) + \mathbf{A}^*(\mathbf{h}_2)$ .

- (2) Rovnost  $\mathbf{A}^*(a \cdot \mathbf{h}) = a \cdot \mathbf{A}^*(\mathbf{h})$  ukážeme analogicky.

Zvolme jakýkoli vektor  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Potom

$$(\mathbf{A}^*(a \cdot \mathbf{h}))(\mathbf{e}_i) = (a \cdot \mathbf{h}) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = a \cdot (\mathbf{h} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i) = a \cdot (\mathbf{A}^*(\mathbf{h}))(\mathbf{e}_i)$$

Lineární zobrazení  $\mathbf{A}^*(a \cdot \mathbf{h}) : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}$  a  $a \cdot \mathbf{A}^*(\mathbf{h}) : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}$  se tedy shodují na všech prvcích báze prostoru  $\mathbb{F}^s$ , proto platí rovnost  $\mathbf{A}^*(a \cdot \mathbf{h}) = a \cdot \mathbf{A}^*(\mathbf{h})$ .

Máme pocit, že duální zobrazení  $\mathbf{A}^* : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{h} \cdot \mathbf{A}$  nějak souvisí s tím, že jsme v matici  $\mathbf{A}$  brali ohled na řádky místo na sloupce. V Poznámce 9.1.14 uvidíme, že tento pocit je správný. Zatím ale pro bližší vysvětlení nemáme vybudované technické prostředky.



## Kapitola 5

# Odbočka — Vnější mocnina a determinant

It is my experience that proofs involving matrices can be shortened by 50% if one throws the matrices out.

Emil Artin, *Geometric Algebra*

Tuto kapitolu lze při prvním čtení přeskocit. Zavedeme zde dva důležité pojmy: *vnější mocninu* lineárního prostoru a *determinant* lineárního zobrazení. Způsob zavedení determinantu pomocí vnější mocniny umožní velmi elegantním způsobem dokázat základní vlastnosti determinantů. Vlastnosti determinantů odvodíme znovu (a mnohem těžkopádněji) pro *čtvercové matice* v podkapitole 8.2.

V podkapitole 5.1 definujeme *vnější mocninu lineárního prostoru*. Vnější mocnina zobecňuje základní myšlenku lineárních prostorů: místo s vektorem jakožto abstrakcí orientované úsečky budeme pracovat s *k-vektorem* jakožto abstrakcí orientovaného *k*-dimensionálního rovnoběžnostěnu.

*Determinant* obecného lineárního zobrazení zavedeme v podkapitole 5.2. Ukážeme řadu příkladů výpočtu determinantů. Ukážeme také, že definice determinantu lineárního zobrazení má (s využitím pojmu vnější mocniny lineárního prostoru) velmi názorný geometrický význam. Odvodíme také základní vlastnosti determinantu složeného zobrazení a vztah mezi determinanty zobrazení a jeho duálního zobrazení.

V závěrečné části 5.3 odvodíme *Laplaceův rozvoj determinantu podle jednoho sloupce* a ukážeme, jakým způsobem lze determinant využít pro řešení abstraktních lineárních rovnic.

Vynikajícím zdrojem informací o tom, jak lze s vnější mocninou efektivně pracovat, je kniha

☞ Sergei Winitzki, *Linear algebra via exterior products*, 2010

volně dostupná z webu.

Způsobu uvažování o lineární algebře, který v této kapitole nastíníme, se často říká “coordinate-free”. Tyto postupy se čím dál více využívají v algoritmech počítačové grafiky, viz například knihu

☞ Leo Dorst, Daniel Fontijne a Stephen Mann, *Geometric algebra for Computer Science*, Morgan Kaufmann Publishers, 2007

nebo Dodatek M.

### 5.1 Vnější mocnina lineárního prostoru

V této podkapitole zavedeme, pro *n*-dimensionální lineární prostor *L* a každé  $k \leq n$ , nový lineární prostor  $L^{\wedge k}$ , kterému budeme říkat *k-tá vnější mocnina* lineárního prostoru *L*.

Vektorům v *k*-té vnější mocnině budeme říkat *k-vektory* a půjde o lineární kombinace jistých základních *k*-vektorů, které budeme zapisovat ve tvaru

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k \quad (\text{čteme: } \vec{v}_1 \text{ stříška } \vec{v}_2 \dots \text{ stříška } \vec{v}_k)$$

kde  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  jsou vektory z lineárního prostoru  $L$ . Základní  $k$ -vektory si budeme představovat jako zakódování dvou typů informace:

- (1) První část informace, kterou  $k$ -vektor  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k$  reprezentuje, je  *$k$ -dimensionální rovnoběžnostěn* v prostoru  $L$ , který je zadán seznamem vektorů  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ .
- (2) Druhá část informace reprezentované  $k$ -vektorem  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k$  je informace o *orientovaném objemu* příslušného  $k$ -dimensionálního rovnoběžnostěnu. Na pořadí jednotlivých vektorů v zápise  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k$  nám totiž záleží a případnou změnou pořadí jednotlivých vektorů můžeme způsobit změnu orientace objemu daného  $k$ -dimensionálního rovnoběžnostěnu.

Podle naší definice vnější mocniny bude platit rovnost  $L^{\wedge 1} = L$ . To je zcela v souladu s naší dosavadní představou: chceme, aby 1-vektor  $\vec{v}$  v  $L^{\wedge 1}$  nesl informaci o 1-dimensionálním rovnoběžnostěnu  $\vec{v}$  (tj. chceme si vektor  $\vec{v}$  představovat jako úsečku) a jeho orientaci (tj. vektor  $\vec{v}$  bude mít opačnou orientaci než vektor  $-\vec{v}$ ).

Vnější mocnina tedy není nic jiného než rozšíření základního Příkladu 1.1.1 (prostor orientovaných úseček) ve dvou aspektech:

- (1) Od úseček v rovině chceme přejít ke  $k$ -rovnoběžnostěnům v  $\mathbb{R}^n$ , kde  $k \leq n$ .
- (2) Prostor  $\mathbb{R}^n$  nahradíme libovolným  $n$ -dimensionálním prostorem  $L$  nad tělesem  $\mathbb{F}$ .

Myšlenka  $k$ -té vnější mocniny prostoru  $L$  je tedy jednoduchá. Přesná definice vnější mocniny je ale trochu technická. Proto začneme jednoduchým příkladem.



### 5.1.1 Příklad (Lineární prostor 2-vektorů nad $\mathbb{R}^2$ )

V tomto příkladu zavedeme lineární prostor

$(\mathbb{R}^2)^{\wedge 2}$  (budeme také psát  $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$ , čteme: *druhá vnější mocnina  $\mathbb{R}^2$* , nebo  $\mathbb{R}^2$  *stříška  $\mathbb{R}^2$* )

jehož prvkům budeme říkat *2-vektory* (nad  $\mathbb{R}^2$ ). Základním příkladem takového 2-vektoru je symbol  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  jsou vektory z lineárního prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Obecný 2-vektor z lineárního prostoru  $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$  má tvar

$$a_1 \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1) + a_2 \cdot (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_2) + \dots + a_n \cdot (\mathbf{a}_n \wedge \mathbf{b}_n) \quad \text{nebo} \quad \mathbf{o}$$

kde  $n \geq 1$  je přirozené číslo,  $a_1, \dots, a_n$  jsou libovolná reálná čísla, a  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  jsou libovolné vektory z lineárního prostoru  $\mathbb{R}^2$ .

2-vektory z prostoru  $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$  budeme mezi sebou sčítat a násobit skalárem  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby platily následující rovnosti:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{o} \tag{5.1}$$

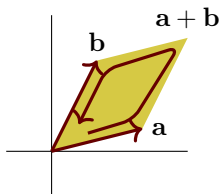
$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}), \tag{5.2}$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_2), \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} a \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= (a \cdot \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \wedge (a \cdot \mathbf{b}) \end{aligned} \tag{5.4}$$

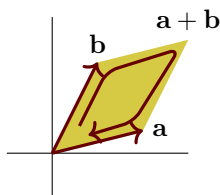
Je snadné se přesvědčit, že  $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$  s výše uvedenými operacemi tvoří lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ . Jak si ale máme 2-vektory představit? A jak si vysvětlit rovnosti (5.1)–(5.4)?

2-vektor tvaru  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  v  $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$  budeme znázorňovat jako rovnoběžník s vrcholy  $\mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$  a  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , který má *orientovanou plochu*



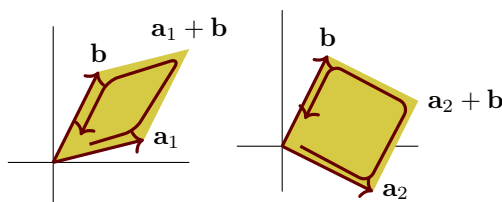
v rovině  $\mathbb{R}^2$ .

2-vektor  $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$  značí *stejný* rovnoběžník, ale jeho plocha má *opačnou* orientaci

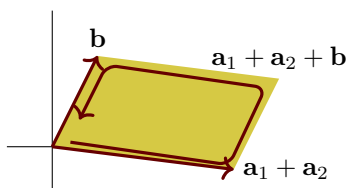


Nyní přejdeme k vysvětlení rovností (5.1)–(5.4). Místo rovnoběžník s orientovanou plochou budeme krátce říkat *orientovaný rovnoběžník*.

- (1) Vysvětlení rovnosti (5.1) je jednoduché: orientovaný rovnoběžník určený *jediným* vektorem  $\mathbf{a}$  je „zdegenerovaný“ do úsečky, má tedy nulový (orientovaný) obsah. Proto chceme, aby 2-vektor  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}$  byl roven nulovému 2-vektoru  $\mathbf{o}$ .
- (2) Vysvětlíme rovnost (5.2), rovnost (5.3) lze vysvětlit analogicky. 2-vektory  $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}$  a  $\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}$  představují orientované rovnoběžníky

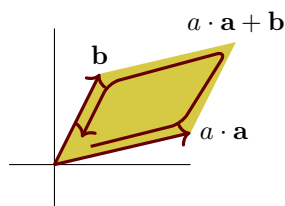


a 2-vektor  $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \wedge \mathbf{b}$  je pak orientovaný rovnoběžník

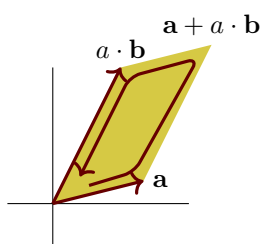


který je součtem předchozích dvou orientovaných rovnoběžníků.

- (3) Vysvětlení rovností (5.4). Orientovaný rovnoběžník  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b}$



ztotožníme s orientovaným rovnoběžníkem  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$



a oba označíme jako  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ , tj. jako  $a$ -násobek orientovaného rovnoběžníku  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ .

Povšimněme si, že z rovnosti (5.1)–(5.4) plyne další důležitá rovnost:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (5.5)$$

Opravdu, upravujeme

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \end{aligned}$$

a z toho okamžitě plyne rovnost  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ .

**5.1.2 Příklad (Jednoduchý výpočet v  $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$ )** Předvedeme, jak v  $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$  upravit výraz

$$7 \cdot \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) + 6 \cdot \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Využijeme značení

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro kanonickou bázi prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Potom (s použitím pravidel (5.1)–(5.4)) dostáváme rovnosti

$$\begin{aligned} 7 \cdot \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) &= 7 \cdot ((2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2) \wedge (0\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2)) \\ &= (14\mathbf{e}_1 - 21\mathbf{e}_2) \wedge (0\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2) \\ &= 14\mathbf{e}_1 \wedge (0\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2) - 21\mathbf{e}_2 \wedge (0\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2) \\ &= 14\mathbf{e}_1 \wedge 0\mathbf{e}_1 + 14\mathbf{e}_1 \wedge 4\mathbf{e}_2 - 21\mathbf{e}_2 \wedge 0\mathbf{e}_1 - 21\mathbf{e}_2 \wedge 4\mathbf{e}_2 \\ &= (14 \cdot 0) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + (14 \cdot 4) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + (21 \cdot 0) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + (21 \cdot 4) \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= (14 \cdot 4) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= 56 \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

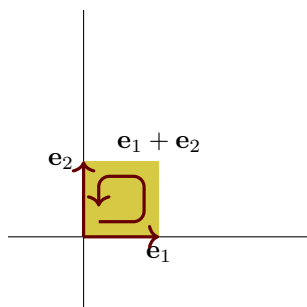
kde jsme využili toho, že  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1$  a  $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2$  jsou podle pravidla (5.1) nulové vektory a že podle pravidla (5.5) platí  $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ . Analogicky dostáváme rovnosti

$$\begin{aligned} 6 \cdot \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) &= 6((-1\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \wedge (1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2)) \\ &= (-6\mathbf{e}_1 - 12\mathbf{e}_2) \wedge (1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \\ &= -6\mathbf{e}_1 \wedge (1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) - 12\mathbf{e}_2 \wedge (1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \\ &= (-6) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + (-6 \cdot 3) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + (-12) \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) + (-12 \cdot 3) \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= (-18 + 12) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= (-6) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Celkově platí

$$7 \cdot \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) + 6 \cdot \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 56 \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) - 6 \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = 50 \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Zjevně jsme spočítali padesátinásobek jednotkového orientovaného rovnoběžníku



Zatím v prostoru  $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$  budeme s 2-vektory pracovat formálně. Brzy však zjistíme, že výpočty v  $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$  mají jasný geometrický význam.

**5.1.3 Poznámka** V Definici 15.1.1 zavedeme *bilineární formu* na lineárním prostoru  $L$  jako funkci dvou proměnných

$$\gamma(-, -) : L \times L \longrightarrow \mathbb{F}$$

která je *lineární v každé proměnné zvlášť*. Půjde o velmi obecný „skalární součin“.

Nám se nyní bude hodit *ještě obecnější* pojem: budeme studovat funkce  $k$  proměnných, které jsou lineární v každé proměnné zvlášť. Navíc dovolíme, aby hodnoty našeho zobrazení byly prvky libovolného lineárního prostoru.

**5.1.4 Definice** Ať  $L_1, L_2, \dots, L_k$  a  $L'$  jsou lineární prostory nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Zobrazení  $k$  proměnných tvaru

$$\mathbf{f} : L_1 \times L_2 \times \dots \times L_k \longrightarrow L'$$

budeme říkat

- (1) *multilineární*, pokud je  $\mathbf{f}$  lineární v každé proměnné. To jest: pro každé  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$  a pro každé pevně zvolené vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i_0-1}, \vec{v}_{i_0+1}, \dots, \vec{v}_k$  platí, že zobrazení

$$\mathbf{f}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i_0-1}, -, \vec{v}_{i_0+1}, \dots, \vec{v}_k) : L_{i_0} \longrightarrow L'$$

je lineární. Pokud platí  $L_1 = L_2 = \dots = L_k = L$ , mluvíme také o *k-lineárním* zobrazení z  $L^k$  do  $L'$ . V případě  $k = 2$  mluvíme také o *bilineárním* zobrazení.

- (2) *alternující*, pokud platí  $L_1 = L_2 = \dots = L_k = L$  a pokud

$$\mathbf{f}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \vec{0}$$

jakmile jsou některé dva vektory ze seznamu  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  totožné.

**5.1.5 Příklad (Kanonické zobrazení z  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$ )** Tvrdíme, že zobrazení

$$\eta_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

je bilineární a alternující.

- (1) Bilinearita zobrazení  $\eta_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2}$  znamená přesně to, že pro každé vektory  $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  a pro každé reálné skaláry  $a_1, a_2, b_1, b_2$  platí rovnosti:

$$\mathbf{a} \wedge (b_1 \cdot \mathbf{b}_1 + b_2 \cdot \mathbf{b}_2) = b_1 \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_1) + b_2 \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_2) \quad \text{a} \quad (a_1 \cdot \mathbf{a}_1 + a_2 \cdot \mathbf{a}_2) \wedge \mathbf{b} = a_1 \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}) + a_2 \cdot (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b})$$

To ale plyne okamžitě z rovností (5.2)–(5.4).

- (2) To, že zobrazení  $\eta_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2}$  je alternující, říká přesně rovnost (5.1).

**5.1.6 Definice (*k*-tá vnější mocnina lineárního prostoru)** Ať  $L$  je lineární prostor nad tělesem  $\mathbb{F}$  dimenze  $n$ . Pro libovolné přirozené číslo  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , definujeme *k-tou vnější mocninu prostoru  $L$*  jako lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ , který je označený  $L^{\wedge k}$  a který je definován následujícím způsobem:

- (1) Pro  $k = 0$  definujeme  $L^{\wedge 0}$  jako těleso  $\mathbb{F}$ .  
 (2) Pro  $k = 1$  definujeme  $L^{\wedge 1}$  jako lineární prostor  $L$ .  
 (3) Pro  $2 \leq k \leq n$  jsou prvky  $L^{\wedge k}$  *k-vektory*. *Základní k-vektor* je zápis

$$\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k$$

Obecný *k-vektor* je lineární kombinací základních *k-vektorů*, přičemž jsou dodrženy následující dva požadavky:

- (a)  $\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k$  je roven nulovému  $k$ -vektoru, jakmile jsou dva vektory ze seznamu  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  stejné.  
 (b) Pro každé  $j_0$  z množiny  $\{1, \dots, k\}$  platí rovnosti

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{j_0-1} \wedge (\vec{x} + \vec{y}) \wedge \vec{v}_{j_0+1} \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k &= (\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{j_0-1} \wedge \vec{x} \wedge \vec{v}_{j_0+1} \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k) \\ &\quad + (\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{j_0-1} \wedge \vec{y} \wedge \vec{v}_{j_0+1} \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k) \\ \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{j_0-1} \wedge (a \cdot \vec{x}) \wedge \vec{v}_{j_0+1} \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k &= a \cdot (\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{j_0-1} \wedge \vec{x} \wedge \vec{v}_{j_0+1} \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k) \end{aligned}$$

To znamená:  $k$ -vektor  $\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k$  je lineární v každé souřadnici.

$k$ -tou vnější mocninu jsme zavedli proto, abychom mohli technický pojem  $k$ -lineárního alternujícího zobrazení tvaru  $L^k \rightarrow L'$  nahradit příjemnějším pojmem lineárního zobrazení tvaru  $L^{\wedge k} \rightarrow L'$ . Následující věta říká, že to udělat lze.

**5.1.7 Věta (Universální vlastnost  $k$ -té vnější mocniny)** *At  $L$  je lineární prostor nad tělesem  $\mathbb{F}$ , at  $k$  je libovolné přirozené číslo. Potom pro zobrazení*

$$\eta_{L^k} : L^k \rightarrow L^{\wedge k}, \quad (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) \mapsto \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k$$

platí:

- (1) Zobrazení  $\eta_{L^k}$  je  $k$ -lineární a alternující.
- (2) Pokud  $\mathbf{f} : L^k \rightarrow L'$  je jakékoli  $k$ -lineární a alternující zobrazení, potom existuje jediné lineární zobrazení  $\mathbf{f}^\# : L^{\wedge k} \rightarrow L'$  takové, že diagram

$$\begin{array}{ccc} L^{\wedge k} & \xrightarrow{\mathbf{f}^\#} & L' \\ \eta_{L^k} \uparrow & \searrow \mathbf{f} & \\ L^k & & \end{array} \quad (5.6)$$

je komutativní.

DŮKAZ.

- (1) Zobrazení  $\eta_{L^k} : L^k \rightarrow L^{\wedge k}$  přiřazuje  $k$ -tici vektorů  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  základní  $k$ -vektor  $\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k$ . Podle Definice 5.1.6 je toto přiřazení  $k$ -lineární a alternující.
- (2) Předpokládejme, že je zadáno  $k$ -lineární alternující zobrazení  $\mathbf{f} : L^k \rightarrow L'$ . Zobrazení  $\mathbf{f}^\#$  musíme na základních  $k$ -vektorech definovat takto:

$$\mathbf{f}^\#(\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k) = \mathbf{f}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$$

Tím zajistíme, že trojúhelník (5.6) je komutativní.

Složitější  $k$ -vektory v  $L^{\wedge k}$  jsou lineární kombinace základních  $k$ -vektorů. Pro takovou lineární kombinaci  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{w}_i$  v  $L^{\wedge k}$ , kde každé  $\vec{w}_i$  je základní  $k$ -vektor definujeme  $\mathbf{f}^\#$  takto:

$$\mathbf{f}^\# \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{w}_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{f}^\#(\vec{w}_i)$$

Tím zajistíme linearitu zobrazení  $\mathbf{f}^\#$ .

Je jasné, že naše definice  $\mathbf{f}^\#$  je jediná možná, chceme-li dodržet podmínky věty. ■

Smyslem vnější mocniny lineárního prostoru bylo nahradit universálním způsobem  $k$ -lineární a alternující zobrazení lineárními. Této universalitě využijeme k definici  $k$ -té vnější mocniny lineárního zobrazení.

**5.1.8 Důsledek (Vnější mocnina lineárního zobrazení)** Každé lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  určuje jednoznačně lineární zobrazení

$$\mathbf{f}^{\wedge k} : L_1^{\wedge k} \rightarrow L_2^{\wedge k} \quad (\text{čteme: } k\text{-tá vnější mocnina lineárního zobrazení } \mathbf{f})$$

tak, že diagram

$$\begin{array}{ccc} L_1^{\wedge k} & \xrightarrow{\mathbf{f}^{\wedge k}} & L_2^{\wedge k} \\ \eta_{L_1^k} \uparrow & & \uparrow \eta_{L_2^k} \\ L_1^k & \xrightarrow{\mathbf{f}^k} & L_2^k \end{array} \quad (5.7)$$

je komutativní.

Navíc platí následující dvě podmínky:

- (1) Pro identické lineární zobrazení  $\mathbf{id}_L : L \rightarrow L$  platí  $(\mathbf{id}_L)^{\wedge k} = \mathbf{id}_{L^{\wedge k}} : L^{\wedge k} \rightarrow L^{\wedge k}$ .
- (2) Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ ,  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$  platí  $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})^{\wedge k} = \mathbf{g}^{\wedge k} \cdot \mathbf{f}^{\wedge k} : L_1^{\wedge k} \rightarrow L_3^{\wedge k}$

DŮKAZ. Můžeme se pokusit (ve značení Věty 5.1.7) definovat

$$\mathbf{f}^{\wedge k} = (\eta_{L_2^k} \cdot \mathbf{f}^k)^{\sharp}$$

K tomu ovšem potřebujeme dokázat, že zobrazení  $\eta_{L_2^k} \cdot \mathbf{f}^k$  je  $k$ -lineární a alternující. Pak by čtverec (5.7) komutoval, protože komutuje trojúhelník (5.6).

Zobrazení  $\eta_{L_2^k} \cdot \mathbf{f}^k$  vezme  $k$ -tici vektorů  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  z lineárního prostoru  $L_1$  a přiřadí jí základní  $k$ -vektor  $\mathbf{f}(\vec{v}_1) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{v}_k)$  v lineárním prostoru  $L_2^{\wedge k}$ . Zobrazení  $\eta_{L_2^k} \cdot \mathbf{f}^k$  je  $k$ -lineární, protože  $\mathbf{f}$  je lineární zobrazení a zobrazení  $\eta_{L_2^k}$  je  $k$ -lineární. Zobrazení  $\eta_{L_2^k} \cdot \mathbf{f}^k$  je alternující, protože zobrazení  $\eta_{L_2^k}$  je alternující.

Definice  $\mathbf{f}^{\wedge k} = (\eta_{L_2^k} \cdot \mathbf{f}^k)^{\sharp}$  je evidentně jediná možná, kterou jsme mohli nabídnout, aby platily podmínky věty.

Nyní dokážeme zbylé dvě podmínky:

- (1) Protože  $(\mathbf{id}_L)^k = \mathbf{id}_{L^k} : L^k \rightarrow L^k$ , má komutativní čtverec (5.7) definující  $(\mathbf{id}_L)^{\wedge k}$  tvar

$$\begin{array}{ccc} L^{\wedge k} & \xrightarrow{(\mathbf{id}_L)^{\wedge k}} & L^{\wedge k} \\ \eta_{L^k} \uparrow & & \uparrow \eta_{L^k} \\ L^k & \xrightarrow{\mathbf{id}_{L^k}} & L^k \end{array}$$

Protože ale čtverec

$$\begin{array}{ccc} L^{\wedge k} & \xrightarrow{\mathbf{id}_{L^{\wedge k}}} & L^{\wedge k} \\ \eta_{L^k} \uparrow & & \uparrow \eta_{L^k} \\ L^k & \xrightarrow{\mathbf{id}_{L^k}} & L^k \end{array}$$

také komutuje, musí platit rovnost  $(\mathbf{id}_L)^{\wedge k} = \mathbf{id}_{L^{\wedge k}}$ , protože  $k$ -tá vnější mocnina je určena jednoznačně.

- (2) Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  a  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$  vezmeme instance diagramu (5.7), které definují lineární zobrazení  $\mathbf{f}^{\wedge k}$  a  $\mathbf{g}^{\wedge k}$ :

$$\begin{array}{ccc} L_1^{\wedge k} & \xrightarrow{\mathbf{f}^{\wedge k}} & L_2^{\wedge k} \\ \eta_{L_1^k} \uparrow & & \uparrow \eta_{L_2^k} \\ L_1^k & \xrightarrow{\mathbf{f}^k} & L_2^k \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L_2^{\wedge k} & \xrightarrow{\mathbf{g}^{\wedge k}} & L_3^{\wedge k} \\ \eta_{L_2^k} \uparrow & & \uparrow \eta_{L_3^k} \\ L_2^k & \xrightarrow{\mathbf{g}^k} & L_3^k \end{array}$$

a „slepíme“ je (viz Poznámku 2.2.2) podle společného zobrazení  $\eta_{L_2^k}$ . Dostaneme diagram

$$\begin{array}{ccccc} L_1^{\wedge k} & \xrightarrow{\mathbf{f}^{\wedge k}} & L_2^{\wedge k} & \xrightarrow{\mathbf{g}^{\wedge k}} & L_3^{\wedge k} \\ \uparrow \eta_{L_1^k} & & & & \uparrow \eta_{L_3^k} \\ L_1^k & \xrightarrow{\mathbf{f}^k} & L_2^k & \xrightarrow{\mathbf{g}^k} & L_3^k \end{array}$$

Protože  $\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{f}^k = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})^k$ , můžeme tento diagram přepsat na komutativní diagram

$$\begin{array}{ccc} L_1^{\wedge k} & \xrightarrow{\mathbf{g}^{\wedge k} \cdot \mathbf{f}^{\wedge k}} & L_2^{\wedge k} \\ \uparrow \eta_{L_1^k} & & \uparrow \eta_{L_3^k} \\ L_1^k & \xrightarrow{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})^k} & L_3^k \end{array}$$

který definuje lineární zobrazení  $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})^{\wedge k}$ . Dokázali jsme rovnost  $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})^{\wedge k} = \mathbf{g}^{\wedge k} \cdot \mathbf{f}^{\wedge k}$ . ■

Víme, že  $k$ -tá vnější mocnina  $L^{\wedge k}$  lineárního prostoru  $L$  je opět lineární prostor. Zjistíme nyní, jakou má prostor  $L^{\wedge k}$  dimenzi. Ukážeme, že dimenze prostoru  $L^{\wedge k}$  je rovna *kombinačnímu číslu*<sup>1</sup>

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**5.1.9 Tvzení** *At  $L$  je lineární prostor dimenze  $n$  nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Potom  $L^{\wedge k}$  je lineární prostor dimenze  $\binom{n}{k}$ , pro  $k \leq n$ .*

DŮKAZ. Ať  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je uspořádaná báze prostoru  $L$ . Ukážeme, že  $k$ -vektory tvaru

$$\vec{b}_{i_1} \wedge \vec{b}_{i_2} \wedge \dots \wedge \vec{b}_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

tvoří bázi  $L^{\wedge k}$ . To je jednoduché: stačí ukázat, že každý  $k$ -vektor  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k$  se dá jednoznačně napsat jako lineární kombinace navrhovaných bázeických vektorů. Uvažujme o souřadnicích jednotlivých vektorů  $\vec{v}_i$  vzhledem k uspořádané bázi  $B$ :

$$\vec{v}_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} \vec{b}_j, \quad \vec{v}_2 = \sum_{j=1}^n a_{2j} \vec{b}_j, \quad \dots, \quad \vec{v}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \vec{b}_j$$

Potom platí (z vlastností počítání s  $k$ -vektory) rovnosti:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k &= \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} \vec{b}_{j_1} \wedge \sum_{j_2=1}^n a_{2j_2} \vec{b}_{j_2} \wedge \dots \wedge \sum_{j_k=1}^n a_{kj_k} \vec{b}_{j_k} \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_k=1}^n a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{kj_k} \cdot (\vec{b}_{j_1} \wedge \vec{b}_{j_2} \wedge \dots \wedge \vec{b}_{j_k}) \end{aligned}$$

Po případném přerovnání stříšek je jasné, že  $k$ -vektor  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k$  lze jednoznačně zapsat jako lineární kombinaci základních  $k$ -vektorů

$$\vec{b}_{i_1} \wedge \vec{b}_{i_2} \wedge \dots \wedge \vec{b}_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

Zbývá jen zjistit, kolik takových bázeických  $k$ -vektorů je. Každou  $k$ -tici indexů  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  lze ztotožnit s přesně  $k$ -prvkovou podmnožinou množiny  $\{1, \dots, n\}$ . Takových podmnožin je přesně  $\binom{n}{k}$ . ■

<sup>1</sup>Pozor! Značka  $\binom{n}{k}$  teď *není* označení vektoru s položkami  $n$  a  $k$ . Značka  $\binom{n}{k}$  se velmi běžně používá v kombinatorice, použijeme ji i my. Jiná značení pro kombinační čísla jsou například  $C_{n,k}$  nebo  $C(n,k)$ . Značku  $\binom{n}{k}$  ještě několikrát v této kapitole pro kombinační čísla použijeme, věříme, že k nedorozumění nedojde.



**5.1.10 Příklad** Pro lineární prostor  $\mathbb{R}^2$  je

$$\dim((\mathbb{R}^2)^{\wedge 0}) = \binom{2}{0} = 1, \quad \dim((\mathbb{R}^2)^{\wedge 1}) = \binom{2}{1} = 2, \quad \dim((\mathbb{R}^2)^{\wedge 2}) = \binom{2}{2} = 1$$

Poznamenejme, že dimenze prostorů  $(\mathbb{R}^2)^{\wedge 0}$  a  $(\mathbb{R}^2)^{\wedge 1}$  jsme již znali, protože podle Definice 5.1.6 je  $(\mathbb{R}^2)^{\wedge 0} = \mathbb{R}$  a  $(\mathbb{R}^2)^{\wedge 1} = \mathbb{R}^2$ .

Studium vnější mocniny lineárního prostoru zakončíme jednoduchým tvrzením, které dává do souvislosti lineární nezávislost množiny vektorů s nenulovostí příslušného  $k$ -vektoru.

**5.1.11 Lemma (Lineární nezávislost pomocí vnější mocniny)** *At  $L$  je lineární prostor dimenze  $n$ . Pro množinu vektorů  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  v lineárním prostoru  $L$ , kde  $1 \leq k \leq n$ , jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) Množina  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  je lineárně nezávislá v prostoru  $L$ .
- (2)  $k$ -vektor  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k$  je nenulový v lineárním prostoru  $L^{\wedge k}$ .

**DŮKAZ.** Z (1) plyne (2). Budeme postupovat indukcí podle  $k$ .

(a)  $k = 1$ . Podle Definice 5.1.6 je  $L^{\wedge 1} = L$  a je-li množina  $\{\vec{v}_1\}$  lineárně nezávislá, pak  $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ .

(b) At  $k + 1 \leq n$  a at  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}\}$  je lineárně nezávislá množina v  $L$ .

Indukční předpoklad zní: je-li  $k$ -prvková množina lineárně nezávislá v  $L$ , potom příslušný  $k$ -vektor v  $L^{\wedge k}$  je nenulový.

Důkaz bude hotov, jakmile sestavíme lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L^{\wedge k+1} \rightarrow L^{\wedge k}$  splňující

$$\mathbf{f}(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k \wedge \vec{v}_{k+1}) = (-1)^k \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k)$$

Opravdu, pokud je množina  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}\}$  lineárně nezávislá v  $L$ , je i množina  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  lineárně nezávislá v  $L$ . Podle indukčního předpokladu je  $k$ -vektor  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k$  nenulový v lineárním prostoru  $L^{\wedge k}$ . Proto je nenulový i  $k$ -vektor  $(-1)^k \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k)$ . Protože zobrazení  $\mathbf{f}$  je lineární, je podle Poznámky 2.1.4  $(k+1)$ -vektor  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k \wedge \vec{v}_{k+1}$  nenulový v lineárním prostoru  $L^{\wedge k+1}$ .

Požadované lineární zobrazení  $\mathbf{f}$  nyní sestojíme. Nejprve si uvědomme, že existuje lineární forma  $\mathbf{h} : L \rightarrow \mathbb{F}$  s vlastností

$$\mathbf{h}(\vec{v}_1) = 0, \quad \dots, \mathbf{h}(\vec{v}_k) = 0, \quad \mathbf{h}(\vec{v}_{k+1}) = 1.$$

V případě  $k+1 < \dim(L)$  totiž stačí lineárně nezávislou množinu  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}\}$  doplnit na uspořádanou bázi  $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  lineárního prostoru  $L$  podle Důsledku 3.2.15. V případě  $k+1 = \dim(L)$ , vezmeme  $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1})$  za uspořádanou bázi lineárního prostoru  $L$ . Pak je možné vzít za  $\mathbf{h}$   $(k+1)$ -ný prvek duální báze  $B^*$  k bázi  $B$  (viz Definice 3.5.2).

Pro libovolný  $(k+1)$ -vektor  $\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_k \wedge \vec{x}_{k+1}$  v  $L^{\wedge k+1}$  definujeme  $\mathbf{f}(\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_k \wedge \vec{x}_{k+1})$  jako *alternující součet*

$$\mathbf{h}(\vec{x}_1) \cdot (\vec{x}_2 \wedge \dots \wedge \vec{x}_k \wedge \vec{x}_{k+1}) - \mathbf{h}(\vec{x}_2) \cdot (\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 \wedge \dots \wedge \vec{x}_k \wedge \vec{x}_{k+1}) + \dots + (-1)^k \cdot \mathbf{h}(\vec{x}_{k+1}) \cdot (\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \dots \wedge \vec{x}_k)$$

Linearitu  $\mathbf{f}$  je snadné ověřit. Z vlastností lineární formy  $\mathbf{h}$  pak plyne požadovaná rovnost

$$\mathbf{f}(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k \wedge \vec{v}_{k+1}) = (-1)^k \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k)$$

Ze (2) plyne (1). Dokážeme, že pokud je množina  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  lineárně závislá v prostoru  $L$ , potom  $k$ -vektor  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k$  je nulový v lineárním prostoru  $L^{\wedge k}$ .

Protože předpokládáme, že  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  je lineárně závislá množina, můžeme (po případném přecíslování vektorů) psát

$$\vec{v}_1 = \sum_{j=2}^k a_j \cdot \vec{v}_j$$

Potom platí

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k &= \left( \sum_{j=2}^k a_j \cdot \vec{v}_j \right) \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k \\ &= \sum_{j=2}^k a_j \cdot (\vec{v}_j \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí z toho důvodu, že každý z  $k$ -vektorů

$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k, \quad \vec{v}_3 \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k, \quad \dots, \quad \vec{v}_k \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k$$

je nulový vektor v  $L^{\wedge k}$  ■

Tvrzení Lemmatu 5.1.11 není překvapivé. Opět má totiž geometrickou interpretaci: množina vektorů je lineárně nezávislá právě tehdy když příslušný rovnoběžnostěn má nenulový orientovaný objem.

## 5.2 Determinant lineárního zobrazení

V této podkapitole přiřadíme každému lineárnímu zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  určitý skalár, kterému budeme říkat *determinant* lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ . Technika vnější mocniny umožní podat definici velmi čistě a determinant získá jasný geometrický význam. Determinant zavedeme znovu „elementárním“ způsobem pro čtvercové matice v Kapitole 8.

**5.2.1 Lemma** Jestliže  $\dim(L) = n$ , potom  $\dim(L^{\wedge n}) = 1$  a pro každé lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  existuje jednoznačně určený skalár  $\det(\mathbf{f})$ , pro který platí rovnost

$$\mathbf{f}^{\wedge n} = \det(\mathbf{f}) \cdot \text{id} \quad (5.8)$$

**DŮKAZ.** Dimenze prostoru  $L^{\wedge n}$  je  $\binom{n}{n} = 1$  podle Tvrzení 5.1.9. Podle Příkladu 3.4.2 je lineární zobrazení  $\mathbf{f}^{\wedge n} : L^{\wedge n} \rightarrow L^{\wedge n}$  tvaru  $\vec{x} \mapsto a \cdot \vec{x}$  pro jednoznačně určený skalár  $a$ . Tento skalár závisí pouze na lineárním zobrazení  $\mathbf{f}$  a my jej můžeme označit  $\det(\mathbf{f})$ . ■

**5.2.2 Definice** Ať  $L$  je lineární prostor dimenze  $n$ . Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  říkáme skaláru  $\det(\mathbf{f})$  *determinant* lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ .

**5.2.3 Poznámka** Připomeňme, že podle Příkladu 3.4.2 lze skalár  $\det(\mathbf{f})$  nalézt jako souřadnice vektoru  $\mathbf{f}^{\wedge n}(\vec{b})$  vzhledem k jakékoli bázi  $(\vec{b})$  jednodimensionálního prostoru  $L^{\wedge n}$ . Příkladem takové báze prostoru  $L^{\wedge n}$  je ovšem báze  $(\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n)$ , kde  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$  je uspořádaná báze lineárního prostoru  $L$ . Protože (podle definice zobrazení  $\mathbf{f}^{\wedge n}$ ) platí rovnost

$$\mathbf{f}^{\wedge n}(\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n) = \mathbf{f}(\vec{b}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_n)$$

dostáváme, že  $\det(\mathbf{f})$  je jediný skalár, pro který platí rovnost

$$\mathbf{f}(\vec{b}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_n) = \det(\mathbf{f}) \cdot (\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n) \quad (5.9)$$

pro jakoukoli uspořádanou bázi  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$  lineárního prostoru  $L$ .

Definice determinantu lineárního zobrazení, kterou jsme podali, působí jako z jiné planety. Tvrdíme ale, že tato definice má velmi jasnou geometrickou interpretaci, jakmile si uvědomíme, co říká rovnost

$$\mathbf{f}(\vec{b}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_n) = \det(\mathbf{f}) \cdot (\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n)$$

kde  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$  je (jakákoli) báze lineárního prostoru  $L$ .

- (1) Základní  $k$ -vektor  $\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n$  je orientovaný objem  $n$ -dimensionálního rovnoběžnostěnu určeného jednotlivými souřadnicovými vektory  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ .
- (2) Základní  $k$ -vektor  $\mathbf{f}(\vec{b}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_n)$  je orientovaný objem  $n$ -dimensionálního rovnoběžnostěnu určeného jednotlivými vektory  $\mathbf{f}(\vec{b}_1), \mathbf{f}(\vec{b}_2), \dots, \mathbf{f}(\vec{b}_n)$ .

Determinant zobrazení  $\mathbf{f}$  je pak *lineární faktor* dávající do souvislosti oba orientované objemy (tj., kolikrát se objem zvětší či zmenší). Taková představa ovšem funguje pro orientovaný objem *jakéhokoli*  $n$ -dimensionálního rovnoběžnostěnu s jedním vrcholem v počátku souřadnic. Sloganem bychom mohli říci:

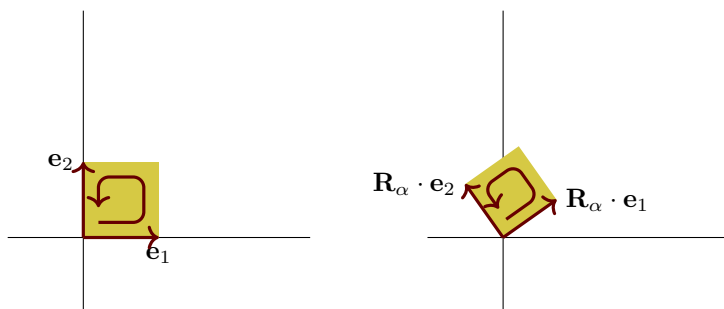
Determinant lineárního zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , kde  $\dim(L) = n$ , určuje kolikrát se změnil orientovaný objem *jakéhokoli*  $n$ -dimensionálního rovnoběžnostěnu s jedním vrcholem v počátku souřadnic po aplikaci lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  na jednotlivé hrany, které tento rovnoběžnostěn určují.

Přesný význam tohoto sloganu je dán rovností (5.8).

**5.2.4 Příklad (Výpočet determinantu rotace)** Připomeňme z Příkladu 4.1.7, že *rotace o úhel*  $\alpha \in [0; 2\pi)$  (proti směru hodinových ručiček) je dána maticí

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení  $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  intuitivně nemění orientovanou plochu:



Očekáváme tedy, že platí  $\det(\mathbf{R}_\alpha) = 1$ . Ukážeme, že naše očekávání je správné.

Z definice determinantu musí platit rovnost

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \det(\mathbf{R}_\alpha) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$$

a my upravíme její levou stranu podle pravidel výpočtů ve druhé vnější mocnině:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= (\cos \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_2) \wedge (-\sin \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= \cos \alpha \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge (-\sin \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \cdot \mathbf{e}_2)) + \sin \alpha \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge (-\sin \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \cdot \mathbf{e}_2)) \\ &= \cos^2 \alpha \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) - \sin^2 \alpha \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) \\ &= \cos^2 \alpha \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + \sin^2 \alpha \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= 1 \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že  $\det(\mathbf{R}_\alpha) = 1$ .

**5.2.5 Příklad (Determinant zkosení)** Připomeňme z Příkladu 4.1.7, že *zkosení* je lineární zobrazení  $\mathbf{S}_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$ , které je dáno maticí

$$\mathbf{S}_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Spočítáme  $\det(\mathbf{S}_{a,b})$ . Budeme již postupovat rychleji:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{a,b} \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{S}_{a,b} \cdot \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{e}_1 + a \cdot \mathbf{e}_2) \wedge (b \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ &= \mathbf{e}_1 \wedge (b \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + a \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge (b \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)) \\ &= 1 \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + a \cdot b \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) \\ &= (1 - a \cdot b) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Proto  $\det(\mathbf{S}_{a,b}) = 1 - a \cdot b$ .

Předchozí příklady jsou zobecnit. Spočteme nyní  $\det(\mathbf{A})$  pro jakékoli zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$ .

**5.2.6 Příklad (Výpočet determinantu matice  $2 \times 2$ )** Determinant lineárního zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$  zadaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

lze spočítat následujícím způsobem. Zvolíme kanonickou uspořádanou bázi  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  prostoru  $\mathbb{F}^2$ . Potom platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{21} \cdot \mathbf{e}_2) \wedge (a_{12} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{22} \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= (a_{11} \cdot a_{22}) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + (a_{12} \cdot a_{21}) \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) \\ &= (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Spočetli jsme  $\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ .

**5.2.7 Příklad (Výpočet determinantu matice  $n \times n$ )** Determinant lineárního zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  zadaného maticí, jejíž  $j$ -tý sloupec  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j$  je

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

lze spočítat takto:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) &= \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n \\ &= \left( \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \cdot \mathbf{e}_{i_1} \right) \wedge \left( \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \cdot \mathbf{e}_{i_2} \right) \wedge \cdots \wedge \left( \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} \cdot \mathbf{e}_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n (a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}) \cdot (\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

$n$ -vektory tvaru  $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_n}$  jsou nenulové pouze tehdy, když všechny indexy  $i_1, i_2, \dots, i_n$  jsou navzájem různé. To znamená, že zobrazení

$$\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, \quad 1 \mapsto i_1, \quad 2 \mapsto i_2, \quad \dots, \quad n \mapsto i_n$$

musí být bijekce. Takové  $\pi$  bijekci se říká *permutace*<sup>2</sup>  $n$ -prvkové množiny. Označme množinu všech permutací  $n$ -prvkové množiny jako  $S_n$ .

Výše uvedený součet lze tedy zjednodušit:

$$\det(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = \left( \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n} \right) \cdot (\mathbf{e}_{\pi(1)} \wedge \mathbf{e}_{\pi(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{\pi(n)})$$

Stále není vyhráno: každý  $n$ -vektor tvaru  $\mathbf{e}_{\pi(1)} \wedge \mathbf{e}_{\pi(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{\pi(n)}$  se od  $n$ -vektoru  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$  může lišit znaménkem, pokud je permutace  $\pi$  „příliš komplikovaná“. Přesněji: pokud počet situací, kdy  $i < j$  a současně  $\pi(i) > \pi(j)$ , je liché číslo, bude platit

$$\mathbf{e}_{\pi(1)} \wedge \mathbf{e}_{\pi(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{\pi(n)} = -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$$

V případě, kdy počet situací, kdy  $i < j$  a současně  $\pi(i) > \pi(j)$ , je sudé číslo, bude platit

$$\mathbf{e}_{\pi(1)} \wedge \mathbf{e}_{\pi(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{\pi(n)} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$$

Pro permutaci  $\pi$  tedy definujeme její *znaménko*  $\text{sign}(\pi)$  takto:

$$\text{sign}(\pi) = \begin{cases} +1, & \text{když počet situací, kdy } i < j \text{ a současně } \pi(i) > \pi(j), \text{ je sudé číslo} \\ -1, & \text{když počet situací, kdy } i < j \text{ a současně } \pi(i) > \pi(j), \text{ je liché číslo} \end{cases}$$

Toto značení nám dovolí závěrečný přepis:

$$\det(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = \left( \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n} \right) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n)$$

Dokázali jsme tedy platnost rovnosti

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n}. \quad (5.10)$$

**5.2.8 Příklad (Výpočet determinantu obecného lineárního zobrazení)** Spočítáme determinant lineárního zobrazení

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{\leq 2}, \quad (ax^2 + bx + c) \mapsto (3ax^2 + 2bx + c)$$

Zvolíme uspořádanou bázi  $B = (1, x, x^2)$  prostoru  $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ . Potom

$$\det(\mathbf{f}) \cdot (1 \wedge x \wedge x^2) = \mathbf{f}(1) \wedge \mathbf{f}(x) \wedge \mathbf{f}(x^2) = 1 \wedge 2x \wedge 3x^2 = 6 \cdot (1 \wedge x \wedge x^2)$$

Tudíž  $\det(\mathbf{f}) = 6$ .

**5.2.9 Tvzení (Základní vlastnosti determinantu)** *At  $L$  je lineární prostor dimenze  $n$ . Potom platí:*

- (1)  $\det(\mathbf{id}) = 1$ .
- (2)  $\det(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \det(\mathbf{g}) \cdot \det(\mathbf{f})$ , pro libovolná lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$  a  $\mathbf{g} : L \longrightarrow L$ .
- (3) Lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$  je isomorfismus právě tehdy, když  $\det(\mathbf{f}) \neq 0$ . V tomto případě platí  $\det(\mathbf{f}^{-1}) = (\det(\mathbf{f}))^{-1}$ .

**DŮKAZ.** Zvolme jakoukoli uspořádanou bázi  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$  lineárního prostoru  $L$ . Rovnost (5.9) říká, že platí

$$\mathbf{f}(\vec{b}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_n) = \det(\mathbf{f}) \cdot (\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n)$$

Z této rovnosti snadno tři požadované vlastnosti determinantu spočítáme:

<sup>2</sup>O permutacích budeme mluvit podrobněji v podkapitole 8.1.

(1) Platí rovnosti

$$\begin{aligned} 1 \cdot (\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n) &= \mathbf{id}(\vec{b}_1) \wedge \mathbf{id}(\vec{b}_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{id}(\vec{b}_n) \\ &= \det(\mathbf{id}) \cdot (\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n) \end{aligned}$$

a proto  $\det(\mathbf{id}) = 1$ .

(2) Platí rovnosti

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) \cdot (\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n) &= \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{b}_1)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{b}_2)) \wedge \cdots \wedge \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{b}_n)) \\ &= \det(\mathbf{g}) \cdot (\mathbf{f}(\vec{b}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_n)) \\ &= (\det(\mathbf{g}) \cdot \det(\mathbf{f})) \cdot \vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n \end{aligned}$$

a odtud plyne rovnost  $\det(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \det(\mathbf{g}) \cdot \det(\mathbf{f})$ .

(3) Ať  $\mathbf{f}$  je isomorfismus. Podle předchozího platí  $1 = \det(\mathbf{id}) = \det(\mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{f}) = \det(\mathbf{f}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{f})$ . Protože  $\mathbb{F}$  je těleso, platí rovnosti  $\det(\mathbf{f}) \neq 0$  a  $\det(\mathbf{f}^{-1}) = (\det(\mathbf{f}))^{-1}$ .

Předpokládejme, že  $\det(\mathbf{f}) \neq 0$ . Z rovnosti  $\mathbf{f}(\vec{b}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_n) = \det(\mathbf{f}) \cdot (\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{b}_n)$  plyne, že  $k$ -vektor  $\mathbf{f}(\vec{b}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}(\vec{b}_n)$  je nenulový. Podle Lemmatu 5.1.11 je tedy množina  $\{\mathbf{f}(\vec{b}_1), \mathbf{f}(\vec{b}_2), \dots, \mathbf{f}(\vec{b}_n)\}$  lineárně nezávislá v  $L$ . Protože  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  byla libovolná báze prostoru  $L$ , je  $\text{rank}(\mathbf{f}) = n$ . Lineární zobrazení  $\mathbf{f}$  je isomorfismus podle Věty 3.3.6. ■

Protože příkladem lineárních zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , kde  $\dim L$  je  $n$ , jsou čtvercové matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ , můžeme Tvzení 5.2.9 přeformulovat pro matice:

**5.2.10 Důsledek** *Ať  $n \geq 1$  je přirozené číslo. Platí rovnosti*

- (1)  $\det(\mathbf{E}_n) = 1$ .
- (2)  $\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{A})$ , kde  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  jsou libovolné.
- (3) Lineární zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je isomorfismus právě tehdy, když  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . V tomto případě platí  $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$ .

Důsledek 5.2.10 dokážeme znovu (a daleko těžkopádnějším způsobem) v podkapitole 8.4. Porovnáte-li důkaz Tvzení 5.2.9 a důkazy z podkapitoly 8.4, nejspíše znovu oceníte eleganci vnější mocniny lineárního prostoru.

Poslední série výsledků se týká determinantu *duálního zobrazení* (viz Definici 2.5.4) k lineárnímu zobrazení. Nejprve dokážeme technické lemma.

**5.2.11 Lemma** *Ať  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$  dimenze  $n$ . Potom zobrazení*

$$D : (L^*)^n \times L^n \rightarrow \mathbb{F}, \quad (\mathbf{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_n, \vec{x}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x}_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(\vec{x}_1) & \mathbf{f}_2(\vec{x}_1) & \cdots & \mathbf{f}_n(\vec{x}_1) \\ \mathbf{f}_1(\vec{x}_2) & \mathbf{f}_2(\vec{x}_2) & \cdots & \mathbf{f}_n(\vec{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{f}_1(\vec{x}_n) & \mathbf{f}_2(\vec{x}_n) & \cdots & \mathbf{f}_n(\vec{x}_n) \end{pmatrix}$$

*je nenulové a bilineární.*

**DŮKAZ.** Podle Příkladu 5.2.7 platí

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(\vec{x}_1) & \mathbf{f}_2(\vec{x}_1) & \cdots & \mathbf{f}_n(\vec{x}_1) \\ \mathbf{f}_1(\vec{x}_2) & \mathbf{f}_2(\vec{x}_2) & \cdots & \mathbf{f}_n(\vec{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{f}_1(\vec{x}_n) & \mathbf{f}_2(\vec{x}_n) & \cdots & \mathbf{f}_n(\vec{x}_n) \end{pmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot \mathbf{f}_1(\vec{x}_{\pi(1)}) \cdot \mathbf{f}_2(\vec{x}_{\pi(2)}) \cdot \cdots \cdot \mathbf{f}_n(\vec{x}_{\pi(n)})$$

a z tohoto vzorce okamžitě plyne, že  $D$  je bilineární.

Nenulovost zobrazení  $D$  je zřejmá: stačí zvolit libovolnou uspořádanou bázi  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  prostoru  $L$  a k ní duální bázi  $B^* = (\vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_n^*)$ . Potom platí  $D(\vec{b}_1^* \wedge \dots \wedge \vec{b}_n^*, \vec{b}_1 \wedge \dots \wedge \vec{b}_n) = 1$ . ■

**5.2.12 Důsledek** Pro každé lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  platí rovnost  $\det(f) = \det(f^*)$ .

DŮKAZ. Využijeme zobrazení  $D$  z Lemmatu 5.2.11. Pro libovolná  $f_1, \dots, f_n$  a  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  platí

$$\begin{aligned} \det(f) \cdot D(f_1 \wedge \dots \wedge f_n, \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_n) &= D(f_1 \wedge \dots \wedge f_n, \det(f) \cdot (\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_n)) \\ &= D(f_1 \wedge \dots \wedge f_n, f(\vec{x}_1) \wedge \dots \wedge f(\vec{x}_n)) \\ &= \det \begin{pmatrix} f_1(f(\vec{x}_1)) & f_2(f(\vec{x}_1)) & \dots & f_n(f(\vec{x}_1)) \\ f_1(f(\vec{x}_2)) & f_2(f(\vec{x}_2)) & \dots & f_n(f(\vec{x}_2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(f(\vec{x}_n)) & f_2(f(\vec{x}_n)) & \dots & f_n(f(\vec{x}_n)) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} f^*(f_1)(\vec{x}_1) & f^*(f_2)(\vec{x}_1) & \dots & f^*(f_n)(\vec{x}_1) \\ f^*(f_1)(\vec{x}_2) & f^*(f_2)(\vec{x}_2) & \dots & f^*(f_n)(\vec{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^*(f_1)(\vec{x}_n) & f^*(f_2)(\vec{x}_n) & \dots & f^*(f_n)(\vec{x}_n) \end{pmatrix} \\ &= D(f^*(f_1) \wedge \dots \wedge f^*(f_n), \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_n) \\ &= D(\det(f^*) \cdot (f_1 \wedge \dots \wedge f_n), \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_n) \\ &= \det(f^*) \cdot D(f_1 \wedge \dots \wedge f_n, \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_n) \end{aligned}$$

Dokázali jsme rovnost  $\det(f) = \det(f^*)$ . ■

**5.2.13 Poznámka** Podobným způsobem, jakým jsme zavedli determinant, lze zavést stopu  $\text{tr}(f)$  lineárního zobrazení  $f : L \rightarrow L$  kde  $L$  má dimenzi  $n$ . Pro lineární zobrazení

$$\partial(f) : L^{\wedge n} \rightarrow L^{\wedge n}, \quad x_1 \wedge \dots \wedge x_n \mapsto \sum_{j=1}^n x_1 \wedge \dots \wedge x_{j-1} \wedge f(x_j) \wedge x_{j+1} \wedge \dots \wedge x_n$$

existuje jediný skalár  $\text{tr}(f)$  tak, že platí rovnost

$$\partial(f) = \text{tr}(f) \cdot \text{id}$$

Povšimněme si, že zjevně platí rovnost  $\det(f) = \text{tr}(f^{\wedge n})$ .

## 5.3 Cramerova věta a Laplaceův rozvoj determinantu

Jakékoli lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  a vektor  $\vec{b}$  v  $L$  určují lineární rovnici  $f(\vec{x}) = \vec{b}$ . V případě, že  $f$  je isomorfismus, víme podle Poznámky 2.4.2, že rovnice  $f(\vec{x}) = \vec{b}$  má pro každé  $\vec{b}$  jediné řešení.

V této podkapitole ukážeme, jak toto jediné řešení nalézt pomocí determinantu. Ukážeme také, že determinant lze počítat rozvojem podle pevně zvolené souřadnicové osy.

**5.3.1 Značení** Ať  $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  je jakákoli uspořádaná báze prostoru  $L$ . Pro libovolné lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  a libovolný vektor  $\vec{b}$  označme symbolem

$$f[\vec{a}_j \mapsto \vec{b}] : L \rightarrow L$$

to lineární zobrazení, které se shoduje se zobrazením  $\mathbf{f}$  na všech vektorech báze  $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  kromě jediného: ve vektoru  $\vec{a}_j$  má zobrazení  $\mathbf{f}[\vec{a}_j \mapsto \vec{b}]$  hodnotu  $\vec{b}$ . To jest,  $\mathbf{f}[\vec{a}_j \mapsto \vec{b}] : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení dané hodnotami

$$\vec{a}_1 \mapsto \mathbf{f}(\vec{a}_1), \quad \dots, \quad \vec{a}_{j-1} \mapsto \mathbf{f}(\vec{a}_{j-1}), \quad \vec{a}_j \mapsto \vec{b}, \quad \vec{a}_{j+1} \mapsto \mathbf{f}(\vec{a}_{j+1}), \quad \dots, \quad \vec{a}_n \mapsto \mathbf{f}(\vec{a}_n)$$

**5.3.2 Věta (Cramerova věta pro lineární zobrazení)** *Ať  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení, kde  $\dim(L) = n$ . Potom platí:*

- (1) Lineární rovnice  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}$  má jediné řešení právě tehdy, když  $\det(\mathbf{f}) \neq 0$ .
- (2) V případě, že jediné řešení  $\vec{x}_0$  rovnice  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}$  existuje, pak pro jeho souřadnice  $\text{coord}_B(\vec{x}_0)$  vzhledem k jakékoli uspořádané bázi  $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  platí rovnost

$$\text{coord}_B(\vec{x}_0) = (\det(\mathbf{f}))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \det(\mathbf{f}[\vec{a}_1 \mapsto \vec{b}]) \\ \det(\mathbf{f}[\vec{a}_2 \mapsto \vec{b}]) \\ \vdots \\ \det(\mathbf{f}[\vec{a}_n \mapsto \vec{b}]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\det(\mathbf{f}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{f}[\vec{a}_1 \mapsto \vec{b}]) \\ (\det(\mathbf{f}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{f}[\vec{a}_2 \mapsto \vec{b}]) \\ \vdots \\ (\det(\mathbf{f}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{f}[\vec{a}_n \mapsto \vec{b}]) \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

DŮKAZ.

- (1) Lineární rovnice  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}$  má podle Poznámky 2.4.2 jediné řešení právě tehdy, když je  $\mathbf{f}$  isomorfismus. Podle Tvzení 5.2.9 je  $\mathbf{f}$  isomorfismus právě tehdy, když  $\det(\mathbf{f}) \neq 0$ .
- (2) Ať  $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  je jakákoli uspořádaná báze prostoru  $L$ . Označme

$$\text{coord}_B(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Protože platí  $\mathbf{f}(\vec{x}_0) = \vec{b}$ , víme, že platí rovnost  $\vec{b} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbf{f}(\vec{a}_i)$ , a proto pro každé  $j$  platí rovnosti

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{f}[\vec{a}_j \mapsto \vec{b}]) \cdot (\vec{a}_1 \wedge \dots \wedge \vec{a}_n) &= \mathbf{f}(\vec{a}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_2) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j-1}) \wedge \vec{b} \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j+1}) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_n) \\ &= \mathbf{f}(\vec{a}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_2) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j-1}) \wedge \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbf{f}(\vec{a}_i) \right) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j+1}) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \mathbf{f}(\vec{a}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_2) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j-1}) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_i) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j+1}) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_n) \right) \\ &= x_j \cdot \left( \mathbf{f}(\vec{a}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_2) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j-1}) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_j) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j+1}) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_n) \right) \\ &= x_j \cdot \det(\mathbf{f}) \cdot (\vec{a}_1 \wedge \dots \wedge \vec{a}_n) \end{aligned}$$

kde předposlední rovnost platí díky tomu, že

$$\mathbf{f}(\vec{a}_1) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_2) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j-1}) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_i) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j+1}) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_n) = \vec{0}$$

jakmile  $i \neq j$ .

Ukázali jsme, že pro každé  $j$  platí  $\det(\mathbf{f}[\vec{a}_j \mapsto \vec{b}]) = x_j \cdot \det(\mathbf{f})$ . Protože víme, že  $\det(\mathbf{f}) \neq 0$ , ukázali jsme, že pro každé  $j$  platí rovnost  $x_j = (\det(\mathbf{f}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{f}[\vec{a}_j \mapsto \vec{b}])$ , což jsme přesně ukázat chtěli. ■

Rovnost (5.11) vyžaduje spočítat mnoho determinantů, a to může být výpočetně náročné. Uvědomme si ale, že Věta 5.3.2 je velmi výhodná, pokud potřebujeme znát jen některé souřadnice řešení rovnice  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ .



**5.3.3 Příklad (Použití Cramerovy věty)** V Příkladu 5.2.7 jsme spočetli determinant lineárního zobrazení rotace  $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Ukázali jsme, že

$$\det(\mathbf{R}_\alpha) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = 1$$

Podle Tvzení 5.2.9 to znamená, že  $\mathbf{R}_\alpha$  isomorfismus. Lineární rovnice

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

má tedy právě jedno řešení pro každý vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

pravých stran. Toto jediné řešení nalezneme pomocí Věty 5.3.2. Jako uspořádanou bázi prostoru  $\mathbb{R}^2$  si zvolíme kanonickou bázi  $K_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

Nejprve musíme spočítat zobrazení  $\mathbf{R}_\alpha[\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{b}]$  a  $\mathbf{R}_\alpha[\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{b}]$ . Podle Značení 5.3.1 musí platit rovnosti

$$\mathbf{R}_\alpha[\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{b}] \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{R}_\alpha[\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{b}] \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{R}_\alpha[\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{b}] \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{R}_\alpha[\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{b}] \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}$$

To znamená, že

$$\mathbf{R}_\alpha[\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} b_1 & -\sin \alpha \\ b_2 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_\alpha[\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & b_1 \\ \sin \alpha & b_2 \end{pmatrix}$$

Podle Příkladu 5.2.6 pak platí

$$\det(\mathbf{R}_\alpha[\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{b}]) = b_1 \cdot \cos \alpha + b_2 \cdot \sin \alpha \quad \det(\mathbf{R}_\alpha[\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{b}]) = b_2 \cdot \cos \alpha - b_1 \cdot \sin \alpha$$

a podle Věty 5.3.2 má jedné řešení  $\mathbf{x}_0$  rovnice  $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  souřadnice v kanonické bázi  $K_2$

$$\text{coord}_{K_2}(\mathbf{x}_0) = (\det(\mathbf{R}_\alpha))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \cdot \cos \alpha + b_2 \cdot \sin \alpha \\ b_2 \cdot \cos \alpha - b_1 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Protože  $\text{coord}_{K_2}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$  a  $\det(\mathbf{R}_\alpha) = 1$ , znamená to, že

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \cdot \cos \alpha + b_2 \cdot \sin \alpha \\ b_2 \cdot \cos \alpha - b_1 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Poznamenejme, že řešení rovnice  $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  lze nalézt rychleji *geometrickou úvahou*. Je totiž zjevné, že  $\mathbf{R}_\alpha^{-1} = \mathbf{R}_{-\alpha}$ . Proto

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{R}_{-\alpha} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cdot \cos \alpha + b_2 \cdot \sin \alpha \\ b_2 \cdot \cos \alpha - b_1 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

kde jsme využili sudosti funkce  $\cos$  a lichosti funkce  $\sin$ .

**5.3.4 Příklad (Ještě jedno použití Cramerovy věty)** V Příkladu 5.2.8 jsme ukázali, že determinant lineárního zobrazení

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x], \quad (ax^2 + bx + c) \mapsto (3ax^2 + 2bx + c)$$

je roven číslu 6. Rovnice  $\mathbf{f}(p(x)) = 3x + 1$  má tedy jediné řešení  $p_0(x)$  a my jej najdeme Cramerovou větou.

Zvolíme uspořádanou bázi  $(1, x, x^2)$ . Jednotlivá zobrazení v Cramerově větě jsou definována takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}[1 \mapsto 3x + 1] : & \quad 1 \mapsto 3x + 1, \quad x \mapsto 2x, \quad x^2 \mapsto 3x^2 \\ \mathbf{f}[x \mapsto 3x + 1] : & \quad 1 \mapsto 1, \quad x \mapsto 3x + 1, \quad x^2 \mapsto 3x^2 \\ \mathbf{f}[x^2 \mapsto 3x + 1] : & \quad 1 \mapsto 1, \quad x \mapsto 2x, \quad x^2 \mapsto 3x + 1 \end{aligned}$$

a pro jejich determinanty platí rovnosti

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{f}[1 \mapsto 3x+1]) \cdot (1 \wedge x \wedge x^2) &= (3x+1) \wedge 2x \wedge 3x^2 \\
 &= 3x \wedge 2x \wedge 3x^2 + 1 \wedge 2x \wedge 3x^2 \\
 &= 1 \wedge 2x \wedge 3x^2 \\
 &= 6 \cdot (1 \wedge x \wedge x^2) \\
 \det(\mathbf{f}[x \mapsto 3x+1]) \cdot (1 \wedge x \wedge x^2) &= 1 \wedge (3x+1) \wedge x^2 \\
 &= 1 \wedge 3x \wedge x^2 + 1 \wedge 1 \wedge x^2 \\
 &= 1 \wedge 3x \wedge x^2 \\
 &= 3 \cdot (1 \wedge x \wedge x^2) \\
 \det(\mathbf{f}[x^2 \mapsto 3x+1]) \cdot (1 \wedge x \wedge x^2) &= 1 \wedge 2x \wedge (3x+1) \\
 &= 1 \wedge 2x \wedge 3x + 1 \wedge 2x \wedge 1 \\
 &= 0 \cdot (1 \wedge x \wedge x^2)
 \end{aligned}$$

neboli

$$\det(\mathbf{f}[1 \mapsto 3x+1]) = 6, \quad \det(\mathbf{f}[x \mapsto 3x+1]) = 3, \quad \det(\mathbf{f}[x^2 \mapsto 3x+1]) = 0$$

Podle Cramerovy věty je

$$\mathbf{coord}_{(1,x,x^2)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

To znamená:  $p_0(x) = \frac{1}{2}x + 1$ .

Posledním výsledkem o obecných determinantech, který v této kapitole dokážeme, je možnost determinant počítat jako jistou lineární kombinaci determinantů jiných zobrazení.

**5.3.5 Tvrzení (Laplaceův rozvoj determinantu podle  $j_0$ -té souřadnicové osy)** *At  $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  je jakákoli uspořádaná báze lineárního prostoru  $L$ . Pro libovolné lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  a libovolné pevné  $j_0$  z množiny  $\{1, \dots, n\}$  platí rovnost*

$$\det(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \det(\mathbf{f}[\vec{a}_{j_0} \mapsto \vec{a}_j]) \quad (5.12)$$

kde jsme označili

$$\mathbf{coord}_B(\mathbf{f}(\vec{a}_{j_0})) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

DŮKAZ. Podle předpokladu platí rovnost  $\mathbf{f}(\vec{a}_{j_0}) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \vec{a}_j$ , můžeme psát rovnosti

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{f}) \cdot (\vec{a}_1 \wedge \dots \wedge \vec{a}_n) &= \mathbf{f}(\vec{a}_1) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_n) \\
 &= \mathbf{f}(\vec{a}_1) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j_0-1}) \wedge \left( \sum_{j=1}^n a_j \cdot \vec{a}_j \right) \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j_0+1}) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_n) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \cdot \left( \mathbf{f}(\vec{a}_1) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j_0-1}) \wedge \vec{a}_j \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_{j_0+1}) \wedge \dots \wedge \mathbf{f}(\vec{a}_n) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \cdot \det(\mathbf{f}[\vec{a}_{j_0} \mapsto \vec{a}_j]) \cdot (\vec{a}_1 \wedge \dots \wedge \vec{a}_n)
 \end{aligned}$$

Rovnost  $\det(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \det(\mathbf{f}[\vec{a}_{j_0} \mapsto \vec{a}_j])$  nyní plyne okamžitě. ■

**5.3.6 Příklad (Příklad Laplaceova rozvoje pro matice  $3 \times 3$ )** Ukážeme, jak lze Tvzení 5.3.5 aplikovat na lineární zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3$ . Jako uspořádanou bázi prostoru  $\mathbb{F}^3$  zvolíme kanonickou bázi  $K_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Označme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_3$$

to znamená, že matice  $\mathbf{A}$  má sloupce  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ .

Nyní si musíme vybrat jednu souřadnicovou osu  $\mathbf{e}_{j_0}$ , podle které budeme determinant rozvíjet. Zvolme  $j_0 = 3$ , to znamená, že budeme rozvíjet podle  $\mathbf{e}_3$  (uvidíme, proč se tomuto výpočtu také říká *rozvoj podle třetího sloupce matice  $\mathbf{A}$* ).

Bude vhodné mít označeny všechny položky matice  $\mathbf{A}$ , zavedme tedy ještě značení

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Potom

$$\mathbf{A}[\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_1] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}[\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}[\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_3] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Tudíž rozvoj  $\det(\mathbf{A})$  podle souřadnicové osy  $\mathbf{e}_3$  je

$$\det(\mathbf{A}) = a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + a_{33} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

kde jsme využili toho, že  $\text{coord}_{K_3}(\mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_3$ .

**5.3.7 Příklad (Laplaceův rozvoj determinantu lineárního zobrazení)** V Příkladu 5.2.8 jsme ukázali, že determinant lineárního zobrazení

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x], \quad (ax^2 + bx + c) \mapsto (3ax^2 + 2bx + c)$$

je roven číslu 6.

V tomto příkladu determinant zobrazení  $\mathbf{f}$  spočteme ještě jednou, a to podle Tvzení 5.3.5.

Jako uspořádanou bázi prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$  zvolíme bázi  $B = (1, x, x^2)$ . Budeme rozvíjet podle druhé souřadnicové osy, tj. podle vektoru  $x$ .

Protože  $\mathbf{f}(x) = 2x$ , platí

$$\text{coord}_B(\mathbf{f}(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podle Tvzení 5.3.5 je tedy

$$\det(\mathbf{f}) = 2 \cdot \det(\mathbf{f}[x \mapsto x])$$

protože zbylé dva sčítance v lineární kombinaci jsou nulové.

Podle Značení 5.3.1 je  $\mathbf{f}[x \mapsto x](1) = \mathbf{f}(1) = 1$ ,  $\mathbf{f}[x \mapsto x](x) = x$ ,  $\mathbf{f}[x \mapsto x](x^2) = \mathbf{f}(x^2) = 3x^2$ . Výpočet

$$\det(\mathbf{f}[x \mapsto x]) \cdot (1 \wedge x \wedge x^2) = \mathbf{f}[x \mapsto x](1) \wedge \mathbf{f}[x \mapsto x](x) \wedge \mathbf{f}[x \mapsto x](x^2) = 1 \wedge x \wedge 3x^2 = 3 \cdot (1 \wedge x \wedge x^2)$$

pak ukazuje, že  $\det(\mathbf{f}[x \mapsto x]) = 3$ . Celkově  $\det(\mathbf{f}) = 2 \cdot \det(\mathbf{f}[x \mapsto x]) = 2 \cdot 3 = 6$ .

Předchozí příklad naznačuje způsob využití Laplaceova rozvoje. Pokud souřadnicová osa  $\vec{a}_{j_0}$  báze  $B$  je taková, že souřadnice vektoru  $\mathbf{f}(\vec{a}_{j_0})$  vzhledem jsou převážně nulové, pak lineární kombinace (5.12) z Laplaceova rozvoje má převážně nulové členy.

## Kapitola 6

# Soustavy lineárních rovnic

When Gauss was nineteen his mother asked his mathematical friend Wolfgang Bolyai whether Gauss would ever amount to anything. When Bolyai exclaimed “The greatest mathematician in Europe!” she burst into tears.

E. T. Bell, *Men of mathematics*

Důležitým důsledkem teorie obecných lineárních rovnic z podkapitoly 2.4 a popisu lineárních zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$  pomocí matic z Kapitoly 4 je možnost vybudování *velmi elegantní* teorie řešení *soustav lineárních rovnic o  $s$  neznámých a  $r$  rovnicích*. Celou tuto kapitolu věnujeme vysvětlení postupu při řešení takových soustav. Díky vybudované teorii také budeme schopni dát způsobu řešení soustav *geometrický význam*.

V podkapitole 6.1 shrneme vše podstatné, co zatím o maticích víme. Jde jen o „telefonní seznam“ faktů, všude uvádíme reference na dřívější části textu pro podrobnější vysvětlení.

V podkapitole 6.2 ukážeme nejrůznější pohledy na soustavy lineárních rovnic. Zavedeme také maticovou terminologii pro soustavy.

Různé pohledy na soustavy využijeme v podkapitole 6.3. Vysvětlíme, že *vektorový* pohled na lineární soustavu nám umožní říci, že soustavy v jistém tvaru se nám budou řešit velmi pohodlně. Převod soustavy na „hezký“ tvar se děje velmi důležitým algoritmem: *Gaussovou eliminací*. Vysvětlíme, jak Gaussova eliminace funguje a jak ji využít pro zjišťování *hodnosti* matice.

V podkapitole 6.4 pak zformulujeme obecnou větu o řešitelnosti soustav lineárních rovnic a předvedeme řadu řešených příkladů týkajících se soustav lineárních rovnic.

### 6.1 Co zatím o maticích víme?

Tato podkapitola je pouze přehledným souhrnem faktů, které jsme se v předchozích kapitolách o maticích dozvěděli.

**6.1.1 Matice jsou lineární zobrazení** *Matice* o  $r$  řádcích a  $s$  sloupcích jsme v podkapitole 4.1 identifikovali jako úplný popis všech lineárních zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$ . Matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  píšeme jako obdélníkovou tabulku

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

prvků tělesa  $\mathbb{F}$ . Díky tvaru tabulky se také používá terminologie *matice  $r \times s$* . V případě, kdy  $r = s$ , mluvíme o *čtvercové matici*.

Vektoru

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix}$$

pro  $j = 1, \dots, s$  říkáme  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A}$ . Matici  $\mathbf{A}$  můžeme zapsat ve *sloupcovém* zápisu jako  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ .

Kovektoru

$$\mathbf{h}_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{is})$$

pro  $i = 1, \dots, r$  říkáme  $i$ -tý řádek matice  $\mathbf{A}$ . Matici  $\mathbf{A}$  můžeme zapsat v *řádkovém* zápisu jako  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_r \end{pmatrix}$ .

Lineární zobrazení, které matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  reprezentuje, je na kanonické bázi  $K_s = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$  definováno takto:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{a}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_s \mapsto \mathbf{a}_s$$

tj. hodnota  $\mathbf{A}$  na vektoru  $\mathbf{e}_j$  je  $j$ -tý sloupec  $\mathbf{a}_j$  matice  $\mathbf{A}$ .

Díky linearitě zobrazení  $\mathbf{A}$  platí

$$\mathbf{A} : \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

což zapisujeme jako

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^s a_{1j} \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^s a_{2j} \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^s a_{3j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^s a_{rj} \cdot x_j \end{pmatrix}$$

kde  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j$ . Speciálně platí rovnosti

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_s = \mathbf{a}_s$$

Matici  $\mathbf{E}_n : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ , která má v  $j$ -tém sloupci vektor  $\mathbf{e}_j$ , říkáme *jednotková matice* (viz Definici 4.2.7).

**6.1.2 Násobení matic je skládání lineárních zobrazení** Násobení matice vektorem je speciální případ *násobení matic*. Pro matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^p$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \longrightarrow \mathbb{F}^s$  jsme v podkapitole 4.2 ukázali, že složené zobrazení  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^s$  má v  $j$ -tém sloupci na  $i$ -tém místě skalár

$$\sum_{k=1}^p b_{ik} \cdot a_{kj}$$

Matici  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  říkáme *součin matic*  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{A}$ . Protože násobení matic je skládání lineárních zobrazení, platí

$$\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{B}, \quad (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$$

kdykoli má násobení smysl (tj., kdykoli platí rozměrová zkouška pro násobení matic, viz Poznámku 4.2.4).

**6.1.3 Sčítání matic a násobení matic skalárem** Podle Tvzení 2.1.6 tvoří množina všech lineárních zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$  lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ . To znamená, že pro matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  s položkami

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2s} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3s} \\ \vdots & & & & \\ b_{r1} & b_{r2} & b_{r3} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix}$$

je  $\mathbf{A} + \mathbf{B} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  matice (čteme: *součet matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$* ) s položkami

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1s} + b_{1s} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2s} + b_{2s} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \dots & a_{3s} + b_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a_{r1} + b_{r1} & a_{r2} + b_{r2} & a_{r3} + b_{r3} & \dots & a_{rs} + b_{rs} \end{pmatrix}$$

A pro skalár  $a$  z  $\mathbb{F}$  je  $a \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  matice s položkami

$$a \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a \cdot a_{12} & a \cdot a_{13} & \dots & a \cdot a_{1s} \\ a \cdot a_{21} & a \cdot a_{22} & a \cdot a_{23} & \dots & a \cdot a_{2s} \\ a \cdot a_{31} & a \cdot a_{32} & a \cdot a_{33} & \dots & a \cdot a_{3s} \\ \vdots & & & & \\ a \cdot a_{r1} & a \cdot a_{r2} & a \cdot a_{r3} & \dots & a \cdot a_{rs} \end{pmatrix}$$

Výše uvedené plyne okamžitě z toho, že podle definice násobení matic vektorem pro jakýkoli vektor  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{F}^s$  platí rovnosti

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}, \quad (a \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = a \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})$$

a tak jsou podle Tvzení 2.1.6 definovány operace sčítání a násobení skalárem v lineárním prostoru všech lineárních zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$ . Pro podrobnosti, viz podkapitolu 4.3.

#### 6.1.4 Algebraické úpravy maticových výrazů Z předchozího okamžitě plynou *distributivní zákony*

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} \cdot (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}$$

kdykoli jsou matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  matice takových rozměrů, že sčítání a násobení matic je definováno. Dokážeme druhou rovnost, první se dokáže analogicky. Zvolme vektor  $\mathbf{e}_i$ . Potom

$$(\mathbf{B} \cdot (\mathbf{X} + \mathbf{Y})) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{B} \cdot ((\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{e}_i$$

To znamená, že zobrazení  $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{X} + \mathbf{Y})$  a  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}$  se shodují na všech prvcích kanonické báze. Proto platí rovnost  $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}$ .

Poznamenejme, že násobení matic obecně *není* komutativní, viz Příklad 4.2.6. Až na neplatnost komutativního zákona pro násobení však můžeme s maticemi zacházet jako s čísly.

Pro čtvercové matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  se nám bude hodit značení

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^n$$

které je bezprostředním zobecněním rekursivní definice umocňování reálných čísel ( $a^0 = 1$ ,  $a^{n+1} = a \cdot a^n$ ).

Pro čtvercové matice platí analogie binomické věty. Musíme si ovšem znovu dát pozor na to, že násobení matic není komutativní. Platí tedy například

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}^2$$

a poslední výraz už obecně zjednodušit nelze.

**6.1.5 Transponovaná matice** Pro další výpočty se bude hodit pojem transpozice matice. Pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  definujeme *transponovanou matici*  $\mathbf{A}^T : \mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^s$  takto: matice  $\mathbf{A}^T$  má v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci hodnotu  $a_{ji}$  z  $j$ -tého řádku a  $i$ -tého sloupce matice  $\mathbf{A}$ .

Například pro matici

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

je transponovaná matice

$$\mathbf{A}^T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Pro jakékoli matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^p$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \longrightarrow \mathbb{F}^r$  platí rovnosti

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T \quad (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

Rovnice nalevo plyne okamžitě z definice násobení matic, rovnice napravo je triviální.

**6.1.6 Matice a monomorfismy, epimorfismy a isomorfismy** Připomeňme, že podle Tvzení 4.1.10 a Důsledků 3.3.8 a 3.3.10 pro lineární zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  platí:

(1) Následující je ekvivalentní:

- (a) Zobrazení  $\mathbf{A}$  je monomorfismus.
- (b) Rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$  má jediné řešení  $\mathbf{o}$ .
- (c) Defekt  $\text{def}(\mathbf{A}) = 0$ .

(2) Následující je ekvivalentní:

- (a) Zobrazení  $\mathbf{A}$  je epimorfismus.
- (b) Pro každé  $\mathbf{b}$  v  $\mathbb{F}^r$  má rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má alespoň jedno řešení.
- (c) Hodnota  $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$ .

(3) Ať  $r = s = n$ . Následující je ekvivalentní:

- (a) Zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  je isomorfismus (také: je regulární, je invertibilní, viz Poznámku 4.1.11).
- (b) Pro každé  $\mathbf{b}$  v  $\mathbb{F}^r$  má rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  právě jedno řešení.
- (c) Hodnota  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ .
- (d) Defekt  $\text{def}(\mathbf{A}) = 0$ .
- (e) Existuje matice  $\mathbf{Y} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  taková, že  $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ . V tom případě  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}$ .
- (f) Existuje matice  $\mathbf{X} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  taková, že  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ . V tom případě  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ .

**6.1.7 Blokový zápis matice** Každou matici  $\mathbf{A}$  můžeme „rozdělit“ na menší matice. Pak mluvíme o *blokovém tvaru matice*. Například matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

můžeme zapsat v blokovém tvaru jako

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hline -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

nebo dokonce jako

$$\left( \begin{array}{cc} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{array} \right)$$

kde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V dalším budeme hodně využívat blokový zápis  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ , kde  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  a  $\mathbf{b}$  je vektor z  $\mathbb{F}^r$ . Příklad takové matice  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  je

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 12 & 28 \\ 1 & 4 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

## 6.2 Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Abstraktní lineární rovnice byly zavedeny v Definici 2.4.1 pro jakékoli lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ . V této podkapitole všechny pojmy a výsledky z podkapitoly 2.4 znovu vysvětlíme pro speciální případ, kdy lineárním zobrazením je matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ .

**6.2.1 Definice** Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  je matice, ať  $\mathbf{b}$  je vektor v prostoru  $\mathbb{F}^r$ .

- (1) Rovnici  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  budeme říkat *soustava r lineárních rovnic o s neznámých nad tělesem  $\mathbb{F}$* . Vektoru  $\mathbf{b}$  v  $\mathbb{F}^r$  budeme říkat *pravá strana* rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Vektoru  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{F}^s$  budeme říkat *vektor neznámých* rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Matici  $\mathbf{A}$  říkáme *matice soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$* . Matici  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  v blokovém tvaru říkáme *rozšířená matice soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$* .
- (2) Jakémukoli vektoru  $\mathbf{p}$  v prostoru  $\mathbb{F}^s$  splňujícímu rovnost  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p = \mathbf{b}$  budeme říkat *partikulární řešení* rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .
- (3) Rovnici  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$  budeme říkat *přidružená homogenní soustava* k rovnici  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

**6.2.2 Příklad (Nejrůznější pohledy na jednu soustavu lineárních rovnic)** Soustavu

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 &= 9 \\ 2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 &= 31 \end{aligned}$$

dvou lineárních rovnic o třech neznámých nad tělesem  $\mathbb{R}$  jsme již viděli v Příkladu 1.5.10. Matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  této soustavy je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

a vektor  $\mathbf{b}$  pravých stran této soustavy je

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice této soustavy je

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 11 & 9 \\ 2 & 7 & 4 & 31 \end{array} \right)$$

Pokud označíme

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

pak  $\mathbf{x}$  je vektor neznámých soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Připomeňme, že v Příkladu 1.5.10 jsme ukázali, že vektor

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je partikulární řešení soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Na toto řešení  $\mathbf{p}$  soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  se můžeme dívat dvěma způsoby.



- (1) Vektor  $\mathbf{p}$  dosvědčuje, že  $\mathbf{b}$  je v lineárním obalu sloupců matice  $\mathbf{A}$ .

Přesně tak jsme uvažovali v Příkladu 1.5.10. Označíme-li sloupce matice  $\mathbf{A}$  jako

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

pak platí rovnost

$$12 \cdot \mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_2 + 0 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$$

Totéž lze říci vznešeněji: vektor  $\mathbf{p}$  dosvědčuje, že  $\mathbf{b}$  je v lineárním prostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$ , protože obraz lineárního zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je tvořen všemi lineárními kombinacemi sloupců matice  $\mathbf{A}$ .

- (2) Vektor  $\mathbf{p}$  je společným bodem rovin  $1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 = 9$  a  $2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 31$ .

Tuto geometrickou představu můžeme přeformulovat takto: označme jako  $\mathbf{h}_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\mathbf{h}_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  lineární formy (kovektory) na prostoru  $\mathbb{R}^3$ , které jsou dány řádky matice  $\mathbf{A}$ , tj.

$$\mathbf{h}_1 = (1 \quad -3 \quad 11) \quad \mathbf{h}_2 = (2 \quad 7 \quad 4)$$

Potom platí  $\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{p} = 9$  a  $\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{p} = 31$ .

Dva různé pohledy na tutéž soustavu, které jsme podali v Příkladu 6.2.2 mají zcela obecný charakter. Přesněji: ať  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  je soustava  $r$  rovnic o  $s$  neznámých nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Označme jako  $b_1, \dots, b_r$  jednotlivé položky vektoru  $\mathbf{b}$ .

Máme-li partikulární řešení  $\mathbf{p}$ , potom:

- (1)  $\mathbf{p}$  je vektor koeficientů, které dosvědčují, že  $\mathbf{b}$  je v lineárním prostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$ .
- (2) Označíme-li jako  $\mathbf{h}_1 : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}, \dots, \mathbf{h}_r : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}$  lineární formy (kovektory), které jsou určeny řádky matice  $\mathbf{A}$ , potom  $\mathbf{p}$  je společné řešení rovnic  $\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{x} = b_1, \dots, \mathbf{h}_r \cdot \mathbf{x} = b_r$ .

Oba pohledy na partikulární řešení budou pro nás velmi užitečné.

## 6.3 Gaussova eliminační metoda

Gaussova eliminační metoda je založena na tom, že některé soustavy lineárních rovnic se řeší pohodlněji než jiné. Naší snahou tedy bude zadanou soustavu rovnic  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  převést na *jinou* soustavu rovnic  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ , ovšem tak, abychom *nezměnili řešení*.

**6.3.1 Definice (Ekvivalentní soustavy rovnic)** Řekneme, že soustavy rovnic  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  a  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$  o  $r$  rovnicích a  $s$  neznámých jsou *ekvivalentní* pokud pro každý vektor  $\mathbf{x}_p$  z prostoru  $\mathbb{F}^s$  platí

vektor  $\mathbf{x}_p$  je řešením soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  právě tehdy, když  $\mathbf{x}_p$  je řešením soustavy  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ .

Ekvivalenci soustav budeme značit  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ .

**6.3.2 Lemma** *At  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  je soustava  $r$  rovnic o  $s$  neznámých. Pro každou regulární matici  $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$  platí  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$ . Navíc platí  $\text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \text{rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$ .*

**DŮKAZ.** Potřebujeme ukázat, že  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p = \mathbf{b}$  platí právě tehdy, když platí  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$ .

Jestliže  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p = \mathbf{b}$ , potom  $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$ . Protože násobení matic je asociativní, ukázali jsme, že platí  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$ .

Pokud platí  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$ , potom platí  $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$  opět díky asociativitě násobení matic. Protože matice  $\mathbf{P}$  je regulární, existuje inverzní matice  $\mathbf{P}^{-1}$ . Proto platí  $\mathbf{P}^{-1} \cdot (\mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p)) = \mathbf{P}^{-1} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$ . Díky asociativitě násobení matic a díky rovnosti  $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}_r$  platí  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p = \mathbf{b}$ .

Rovnost  $\text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \text{rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$  plyne z Tvzení 3.3.11. ■

**6.3.3 Poznámka** Připomeňme, že zadat matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  je totéž jako zadat seznam vektorů  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  v prostoru  $\mathbb{F}^r$ . Lemma 6.3.2 potom lze přeformulovat takto: pro každou regulární matici (tj. pro každý *isomorfismus*)  $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$  platí

$$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_s \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$$

Protože vektory  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_s$  a  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$  jsou obrazy vektorů  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$  a  $\mathbf{b}$  isomorfismem  $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$ , znamená to, že aplikací isomorfismu  $\mathbf{P}$  na jednotlivé sloupce soustavy  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b})$  nezměníme řešení této soustavy.



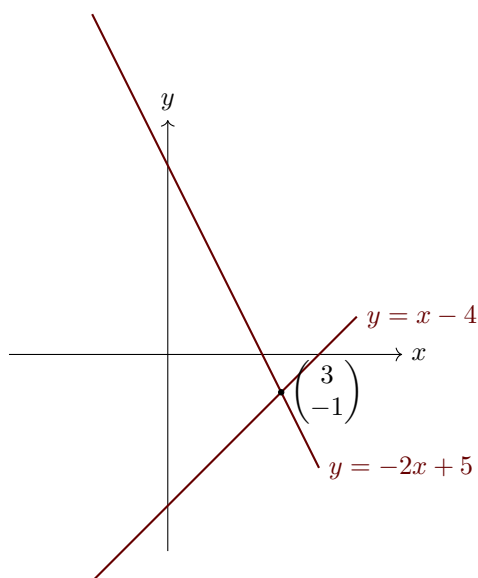
**6.3.4 Příklad (Geometrie řešení soustavy lineárních rovnic)** Uvažujme o soustavě rovnic

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

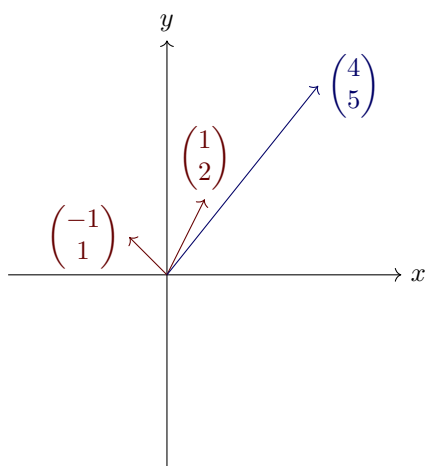
nad  $\mathbb{R}$ . Tradiční zápis této soustavy je

$$\begin{aligned} x - y &= 4 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$$

Proto (v pohledu na soustavu optikou lineárních forem) je řešením průsečík dvou přímek:  $x - y = 4$  a  $2x + y = 5$ :



Zvolme nyní *druhý* pohled na soustavu lineárních rovnic: jsou dány tři vektory



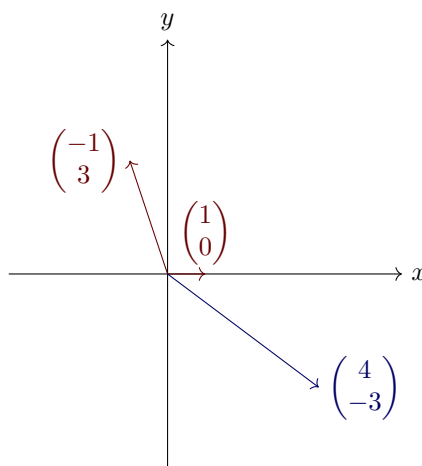
a nás zajímají koeficienty  $x$  a  $y$  lineární kombinace

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Použijeme-li isomorfismus  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  s maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

přejde výše zmíněný obrázek na



protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

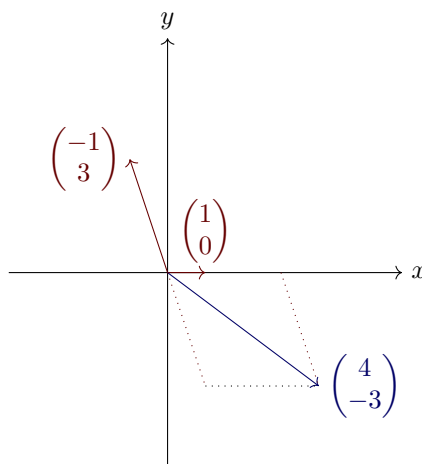
To znamená, že máme řešit soustavu

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

Protože  $\mathbf{P}$  je isomorfismus, platí

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

podle Lemmatu 6.3.2. Koeficienty lineární kombinace nyní snadno nalezneme, protože máme dostat úhlopříčku rovnoběžníka, jehož jedna strana leží na ose  $x$ :



Jak jsme isomorfismus  $\mathbf{P}$  získali? Jedná se o *zkosení* souřadnicového systému, které převedlo vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  na vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Úvahy z Příkladu 6.3.4 jdou zobecnit ve dvou směrech:

- (1) Koeficienty lineární kombinace se budou hledat lépe, pokud postupným zkosením souřadnicového systému dosáhneme toho, že jednotlivé sloupcové vektory matice  $\mathbf{A}$  soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$   $r$  rovnic o  $s$  neznámých budou ležet v „hezkých“ podprostorech prostoru  $\mathbb{R}^r$ .
- (2) Těleso  $\mathbb{R}$  lze nahradit jakýmkoli tělesem  $\mathbb{F}$ .

Metodě postupného kosení souřadnicového systému se říká *Gaussova eliminační metoda*. Gaussovu eliminaci budeme typicky provádět po jednotlivých *elementárních krocích* (po takzvaných *elementárních řádkových úpravách*) a jejím výsledkem bude soustava zapsaná v takzvaném *horním blokovém tvaru*.

Elementární řádkové úpravy soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$   $r$  rovnic o  $s$  neznámých jsou typicky děleny na tři typy. Připomeňme z Poznámky 4.4.4 kovektory

$$\mathbf{e}_i^T$$

duální báze  $K_n^*$  prostoru  $(\mathbb{F}^r)^*$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

**6.3.5 Definice (Matice elementárních řádkových úprav)** Elementární řádkové úpravy jsou tří následujících typů:

- (I) *Přičtení  $a$ -násobku řádku  $i_1$  k řádku  $i_0$* . Příslušná matice má řádkový zápis

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_0-1}^T \\ \mathbf{e}_{i_0}^T + a \cdot \mathbf{e}_{i_1}^T \\ \mathbf{e}_{i_0+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_r^T \end{pmatrix}$$

To jest: v  $i_0$ -tém řádku je kovektor  $\mathbf{e}_{i_0}^T + a \cdot \mathbf{e}_{i_1}^T$ , ostatní sloupce jsou kovektory duální báze  $K_r^*$ .

- (II) *Prohození řádku  $i_1$  s řádkem  $i_0$* . Příslušná matice (pro situaci  $i_0 < i_1$ ) má řádkový zápis

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_0-1}^T \\ \mathbf{e}_{i_1}^T \\ \mathbf{e}_{i_0+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_1-1}^T \\ \mathbf{e}_{i_0}^T \\ \mathbf{e}_{i_1+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_r^T \end{pmatrix}$$

To jest: v  $i_0$ -tém řádku je kovektor  $\mathbf{e}_{i_1}^T$ , v  $i_1$ -tém řádku je kovektor  $\mathbf{e}_{i_0}^T$ , ostatní řádky jsou kovektory duální báze  $K_r^*$ .

(III) Vynásobení řádku  $i_0$  skalárem  $a$ , který je různý od 0. Příslušná matice má řádkový zápis

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_0-1}^T \\ a \cdot \mathbf{e}_{i_0}^T \\ \mathbf{e}_{i_0+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_r^T \end{pmatrix}$$

To jest: v  $i_0$ -tém řádku je kovektor  $a \cdot \mathbf{e}_{i_0}^T$ , ostatní řádky jsou kovektory duální báze  $K_r^*$ .

Tři typy elementárních řádkových úprav z Definice 6.3.5 jsou intuitivně takové jednoduché úpravy soustavy lineárních rovnic, které nemění řešení dané soustavy:

- (I) K rovnici můžeme přičíst skalární násobek jiné rovnice.
- (II) Dvě rovnice v soustavě můžeme prohodit.
- (III) Rovnici můžeme vynásobit nenulovým skalárem.

To dokážeme v Tvzení 6.3.7. Ve Větě 6.3.10 navíc ukážeme, že konečným počtem takových úprav dosáhneme toho, že zadaná soustava bude v „hezkém“ tvaru, který nám umožní soustavu rychle vyřešit.

**6.3.6 Příklad** Příklady matic elementárních řádkových úprav jsou:

- (1) Pro soustavy o třech rovnicích je matice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T + (-3) \cdot \mathbf{e}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  maticí přičtení  $(-3)$ -násobku druhého řádku ke třetímu řádku.

- (2) Pro soustavy o čtyřech rovnicích je matice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_4^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  maticí prohození třetího a čtvrtého řádku.

- (3) Pro soustavy o čtyřech rovnicích je matice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ (-7) \cdot \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \\ \mathbf{e}_4^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  maticí vynásobení druhého řádku skalárem  $-7$ .

Abychom mohli elementární řádkové úpravy používat, je zapotřebí ukázat, že všechny matice elementárních řádkových úprav jsou invertibilní. Připomeňme značku

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{v případě } i = j, \\ 0, & \text{jindy.} \end{cases}$$

pro Kroneckerův symbol (viz důkaz Tvzení 3.5.1).

### 6.3.7 Tvzení Všechny matice elementárních řádkových úprav jsou invertibilní.

DŮKAZ. Označíme-li jako  $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$  matici elementární řádkové úpravy, potom podle Důsledku 3.3.10 stačí najít matici  $\mathbf{X} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$  tak, že platí  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_r$ . Důkaz rozdělíme podle typu elementární úpravy:

(I) Přičtení  $a$ -násobku řádku  $i_1$  k řádku  $i_0$  je realizováno maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_0-1}^T \\ \mathbf{e}_{i_0}^T + a \cdot \mathbf{e}_{i_1}^T \\ \mathbf{e}_{i_0+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_r^T \end{pmatrix}$$

Je-li  $a = 0$ , je matice  $\mathbf{P}$  totožná s maticí  $\mathbf{E}_r$  a proto je  $\mathbf{P}$  invertibilní.

V případě  $a \neq 0$  definujeme

$$\mathbf{X} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i_0}, a \cdot \mathbf{e}_{i_0} + a^{-1} \cdot (1 - a) \cdot \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_0+1}, \dots, \mathbf{e}_r)$$

Potom

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq i_0 \text{ nebo } j \neq i_0 \\ (\mathbf{e}_{i_0}^T + a \cdot \mathbf{e}_{i_1}^T) \cdot (a \cdot \mathbf{e}_{i_0} + a^{-1} \cdot (1 - a) \cdot \mathbf{e}_{i_1}) = 1, & i = i_0 \text{ a } j = i_0 \end{cases}$$

kde  $\mathbf{p}_i$  je  $i$ -tý řádek matice  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{x}_j$  je  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{X}$ . To znamená, že  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_r$  a  $\mathbf{P}$  je tudíž invertibilní.

(II) Prohození řádku  $i_1$  s řádkem  $i_0$ , kde  $i_0 < i_1$ , je realizováno maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_0-1}^T \\ \mathbf{e}_{i_1}^T \\ \mathbf{e}_{i_0+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_1-1}^T \\ \mathbf{e}_{i_0}^T \\ \mathbf{e}_{i_1+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_r^T \end{pmatrix}$$

Definujeme

$$\mathbf{X} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i_0-1}, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_0+1}, \dots, \mathbf{e}_{i_1-1}, \mathbf{e}_{i_0}, \mathbf{e}_{i_1+1}, \dots, \mathbf{e}_r)$$

Potom  $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij}$ , kde  $\mathbf{p}_i$  je  $i$ -tý řádek matice  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{x}_j$  je  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{X}$ . To znamená, že  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_r$  a  $\mathbf{P}$  je tudíž invertibilní.

(III) Vynásobení řádku  $i_0$  skalárem  $a$ , který je různý od 0, je realizováno maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_0-1}^T \\ a \cdot \mathbf{e}_{i_0}^T \\ \mathbf{e}_{i_0+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_r^T \end{pmatrix}$$

Definujme

$$\mathbf{X} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i_0-1}, a^{-1} \cdot \mathbf{e}_{i_0}, \mathbf{e}_{i_0+1}, \dots, \mathbf{e}_r)$$

Potom  $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij}$ , kde  $\mathbf{p}_i$  je  $i$ -tý řádek matice  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{x}_j$  je  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{X}$ . To znamená, že  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_r$  a  $\mathbf{P}$  je tudíž invertibilní. ■

Praktický význam Tvzení 6.3.7 lze vyjádřit sloganem:

*Elementární řádkové úpravy jsou vratné a nemění řešení soustav.*

Opravdu: mějme soustavu lineárních rovnic  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ . Potom soustava  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$  je podle Tvzení 6.3.7 a Lemmatu 6.3.2 ekvivalentní soustavě  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .

Elementární řádkové úpravy navíc jde řetěžit, aniž bychom změnili řešení soustav. To jest, pro soustavu lineárních rovnic  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  a pro matice  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$  elementárních řádkových úprav můžeme psát

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{b}) \sim (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{b}) \sim \dots \sim (\mathbf{P}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{b})$$

To znamená, že soustavu  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  nejprve řádkovou úpravou  $\mathbf{P}_1$  změním na soustavu  $(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{b})$ , tuto soustavu řádkovou úpravou  $\mathbf{P}_2$  změním na soustavu  $(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{b})$ , atd. Snahou tohoto řetězení elementárních řádkových úprav je pochopitelně dosáhnout „hezkého“ tvaru soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ , podobně jako v Příkladu 6.3.4.

Soustava lineárních rovnic je v našem pojetí zakódována svojí rozšířenou maticí  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ . „Hezký“ tvar soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ , ke kterému směřujeme, budeme definovat jako speciální tvar rozšířené matice soustavy. Tomuto tvaru budeme říkat *horní blokový tvar*. Protože má tento tvar řadu použití i mimo teorii soustav lineárních rovnic, definujeme horní blokový tvar pro *jakoukoli* matici.

**6.3.8 Definice (Horní blokový tvar matice)** Matice  $\mathbf{M}$  je v *horním blokovém tvaru*, jsou-li splněny následující dvě podmínky:

- (1) Každý nenulový řádek matice  $\mathbf{M}$  je nad jakýmkoli řádkem samých nul.
- (2) Každý *pivot* (tj. nenulová položka první zleva) jakéhokoli nenulového řádku matice  $\mathbf{M}$  je vždy více napravo než pivot předchozího řádku.

**6.3.9 Příklad** Matice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 6 & 1 & 5 & 32 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  je v horním blokovém tvaru:

- (1) Nenulové řádky jsou první, druhý a třetí. Každý z nich je nad čtvrtým a pátým řádkem (to jsou řádky samých nul).
- (2) Podmínka pro pivoty:
  - (a) Pivot třetího řádku je skalár 12. Je o jednu posici více vpravo než pivot druhého řádku (skalár 6).
  - (b) Pivot druhého řádku je skalár 6. Je o dvě posice více vpravo než pivot prvního řádku (skalár 3).

Matice

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 31 & 10 & 14 & 16 & -23 & 15 & 32 \\ 0 & 0 & 23 & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 42 & 12 & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{array} \right)$$

nad  $\mathbb{R}$  není v horním blokovém tvaru. Podmínka na nenulové řádky je sice splněna (není tu žádný nulový řádek, o kterém bychom měli rozhodovat), podmínka pro pivoty ale splněna není: pivot třetího řádku (skalár 42) není více vpravo než pivot druhého řádku (skalár 23).

Označíme-li pivoty v obou maticích z Příkladu 6.3.9 modře a tučně, vidíme rozdíl

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} \mathbf{3} & -1 & 4 & 6 & 1 & 5 & 32 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cccccc|c} \mathbf{31} & 10 & 14 & 16 & -23 & 15 & 32 \\ 0 & 0 & \mathbf{23} & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{42} & 12 & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{15} \end{array} \right)$$

mezi maticí, která je v horním blokovém tvaru, a maticí, která v horním blokovém tvaru není.

Matice v horním blokovém tvaru musí vypadat takto:

- (1) Pokud jsou v matici nulové řádky, jsou tyto řádky „napsány jako poslední“.
- (2) Směr posic pivotů jednotlivých nenulových řádků míří (čteno seshora) „ostře doprava dolů“.

**6.3.10 Věta (Gaussova eliminace)** Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na matici v horním blokovém tvaru.

DŮKAZ. Ať matice  $\mathbf{M}$  má  $r$  řádků a  $s$  sloupců. Položky matice  $\mathbf{M}$  označíme jako  $m_{ij}$ . Pro zjednodušení vyjádření v tomto důkazu řekneme, že matice o  $r$  řádcích a  $s$  sloupcích je v  $(s', r')$ -tvaru, kde  $s' = 0, \dots, s-1$  a  $r' = 0, \dots, r-1$ , pokud prvních  $s'$  sloupců matice tvoří matici v horním blokovém tvaru s  $r'$  nenulovými řádky.

- (1) Pro  $s' = 0$  a  $r' = 0$  definujeme  $\mathbf{M}^{(0,0)} = \mathbf{M}$ . Podle definice je matice  $\mathbf{M}^{(0,0)}$  v  $(0,0)$ -tvaru.
- (2) Je-li  $s' < s$  a  $r' < r$  a je-li matice  $\mathbf{M}^{(s', r')}$  v  $(s', r')$ -tvaru, nalezneme *nejmenší* sloupcový index  $j$  takový, že platí  $m_{ij} \neq 0$  a  $i > r'$  a  $j > s'$ .

Pokud takové  $j$  neexistuje, algoritmus končí. Matice  $\mathbf{M}^{(s', r')}$  je v horním blokovém tvaru.

V případě, že  $j$  existuje, prohodíme v matici  $\mathbf{M}^{(s', r')}$  řádky s indexy  $i$  a  $r' + 1$  (úprava typu (II)). Dále elementárními úpravami typu (I) vynulujeme  $j$ -tý sloupec od řádku  $r' + 2$  počínaje. K úpravám používáme pouze násobky řádku  $r' + 2$ .

- (3) Definujeme  $s' := j$  a  $r' := r' + 1$ . Matici z bodu (2) označíme jako  $\mathbf{M}^{(s', r')}$ . Je-li  $s' < s$  a  $r' < r$ , opakujeme bod (2). Je-li  $s' = s$  nebo  $r' = r$ , algoritmus končí, matice  $\mathbf{M}^{(s', r')}$  je v horním blokovém tvaru. ■

**6.3.11 Poznámka** Algoritmu z důkazu Věty 6.3.10 se říká *Gaussova eliminační metoda* (také: *Gaussova eliminace*, nebo zkráceně: *GEM*). Je také jasné, že můžeme značení  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$  rozšířit na jakékoli matice, které mají alespoň dva sloupce.



**6.3.12 Příklad (Ukázka GEM a zavedení značení pro GEM)** Máme spustit GEM na matici

$$\mathbf{M} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -1 \end{array} \right)$$



nad  $\mathbb{R}$ . Použijeme algoritmus z důkazu Věty 6.3.10. Výše uvedená matice je v  $(0,0)$ -tvaru. Nejmenší sloupcový index  $j$ , pro který existuje  $m_{ij} \neq 0$  tak, že  $i > 0$  a  $j > 0$ , je  $j = 1$ . Protože  $m_{i1} \neq 0$  pro všechna  $i$ , algoritmus GEM nám dovoluje si vybrat jakoukoli položku  $m_{i1}$  jako pivota. Zvolme položku  $m_{11}$ . To znamená, že necháváme první řádek na místě a vynulujeme první sloupec pod první posicí:

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

Upozorňujeme na značení, které jsme zavedli: u každého řádku *nové* matice jsme zapsali, jakou elementární úpravou řádků *staré* matice tento řádek vznikl. Například  $R_3 - 2R_1$  v novém třetím řádku znamená: od starého třetího řádku jsme odečetli 2-násobek starého prvního řádku.

Podle algoritmu z důkazu Věty 6.3.10 je nové  $s' = 1$  a nové  $r' = 1$ . To znamená, že

$$\mathbf{M}^{(1,1)} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

a my máme najít nejmenší sloupcový index  $j$  tak, že  $m_{ij} \neq 0$  a  $i > 1$  a  $j > 1$ . Zjevně  $j = 3$  a ve třetím sloupci matice si můžeme vybrat kteroukoli z nenulových položek  $m_{23} = -1$ ,  $m_{33} = 1$ ,  $m_{43} = 1$  jako pivota. Zvolíme-li položku  $m_{23}$ , máme vynulovat třetí sloupec od třetího řádku počínaje:

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 + R_2 \end{array}$$

Upozorňujeme znovu na značení: například zápis  $R_3 + R_2$  znamená, že jsme sečetli druhý a třetí řádek *předchozí* matice  $\mathbf{M}^{(1,1)}$ .

Nové  $s' = 3$  a nové  $r' = 2$ . To znamená, že

$$\mathbf{M}^{(3,2)} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nejmenší sloupcový index  $j$  tak, že  $m_{ij} \neq 0$  a  $i > 2$  a  $j > 3$ , neexistuje. To znamená, že matice

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

je v horním blokovém tvaru.

Značení a postup v Příkladu 6.3.12 se úzkostlivě držely důkazu Věty 6.3.10. V praxi budeme postupovat rychleji a budeme psát

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 + R_2 \end{matrix}$$

Všimněme si, že jsme převzali značení  $\sim$  pro ekvivalentní soustavy rovnic, viz Definici 6.3.1. To udělat můžeme: každou matici  $\mathbf{M}$  si totiž můžeme představit jako kódování *homogenní* soustavy rovnic  $(\mathbf{M} \mid \mathbf{o})$ . Přidání nulového sloupce pravých stran totiž nijak neovlivní výpočty:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{matrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 + R_2 \end{matrix}$$

Z Příkladu 6.3.12 je také jasné, jak GEM zformulovat *neformálně*:

- (1) Najděte první sloupec matice, ve kterém je nenulová položka. Pokud takový sloupec neexistuje, skončete algoritmus.  
Nalezenou nenulovou položku vyberte jako pivota. Pokud je kandidátů na pivota více, vyberte si takového, se kterým se „dobře“ počítá.  
Výběr pivota se děje prohozením řádků matice.  
Pod pivotem vynulujte všechny položky. Použijte k tomu přičítání skalárních násobků prvního řádku.
- (2) Najděte další sloupec, ve kterém je pivot. Prohledávejte pouze řádky od *druhého* výše. Pokud takový sloupec neexistuje, skončete algoritmus.  
Najdete-li pivota, prohoďte řádky matice tak, aby zvolený pivot byl ve *druhém* řádku matice. Sloupec pod pivotem vynulujte. Použijte k tomu přičítání skalárních násobků druhého řádku.
- (3) Najděte další sloupec, ve kterém je pivot. Prohledávejte pouze řádky od *třetího* výše. Pokud takový sloupec neexistuje, skončete algoritmus.  
Najdete-li pivota, prohoďte řádky matice tak, aby zvolený pivot byl ve *třetím* řádku matice. Sloupec pod pivotem vynulujte. Použijte k tomu přičítání skalárních násobků třetího řádku.
- (4) A tak dále...

Důležitou vlastností horního blokového tvaru matice je to, že nám umožní okamžitě zjistit hodnotu.

**6.3.13 Tvzení** Počet nenulových řádků matice  $\mathbf{M} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  v horním blokovém tvaru je roven číslu  $\text{rank}(\mathbf{M})$ .

DŮKAZ. Označme všechny řádky matice  $\mathbf{M}$  jako  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ . Připomeňme, že každé  $\mathbf{h}_i$  je kovektor, tj. jde o prvek duálního prostoru  $(\mathbb{F}^s)^*$ . Dále z Příkladu 4.4.5 připomeňme, že matice  $\mathbf{M} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  určuje *duální* zobrazení

$$\mathbf{M}^* : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{h} \cdot \mathbf{M}$$

z prostoru  $(\mathbb{F}^r)^*$  do prostoru  $(\mathbb{F}^s)^*$ . Podle Důsledku 3.5.6 platí  $\text{rank}(\mathbf{M}) = \text{rank}(\mathbf{M}^*)$ . Stačí tedy zjistit hodnotu duálního zobrazení  $\mathbf{M}^* : (\mathbb{F}^r)^* \rightarrow (\mathbb{F}^s)^*$ . Pro každý vektor  $\mathbf{e}_i^T$  duální báze prostoru  $(\mathbb{F}^r)^*$  platí

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{e}_i^T) = \mathbf{h}_i$$

Platí tedy

$$\operatorname{im}(\mathbf{M}^*) = \operatorname{span}(\mathbf{M}^*(\mathbf{e}_1^T), \dots, \mathbf{M}^*(\mathbf{e}_r^T)) = \operatorname{span}(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r) = \operatorname{span}(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k)$$

kde jako  $\mathbf{h}_k$  jsme označili poslední nenulový řádek matice  $\mathbf{M}$ . Ale kovektory  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k$  jsou lineárně nezávislé v prostoru  $(\mathbb{F}^s)^*$ , protože matice  $\mathbf{M}$  je v horním blokovém tvaru. To znamená, že platí

$$\operatorname{rank}(\mathbf{M}) = \operatorname{rank}(\mathbf{M}^*) = \dim(\operatorname{span}(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_k)) = k$$

a to jsme chtěli dokázat. ■

Tvrzení 6.3.13 dává jednoduchý návod, jak zjistit hodnotu obecné matice: stačí ji převést pomocí GEM na horní blokový tvar a spočítat počet nenulových řádků. To je správný postup. Podle Tvrzení 6.3.7 a Lemmatu 6.3.2 elementární řádkové úpravy nemění hodnotu matice.

**6.3.14 Příklad (Hodnota matice pomocí GEM)** Zjistíme hodnotu matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$ . Podle Příkladu 6.3.12 je horní blokový tvar matice  $\mathbf{M}$  roven matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proto  $\operatorname{rank}(\mathbf{M}) = 2$ .

## 6.4 Řešitelnost obecných soustav lineárních rovnic

Vyslovit obecnou větu o řešitelnosti soustav lineárních rovnic je snadné. Popis řešení soustavy lineárních rovnic plyne okamžitě z obecné Frobeniovy věty (Věta 2.4.3) pro lineární rovnice. Nové je to, že jsme schopni zformulovat *nutnou a postačující podmínku pro existenci řešení*, protože pracujeme s lineárními prostory, které mají konečnou dimenzi.

**6.4.1 Věta (Frobeniova věta pro soustavy lineárních rovnic)** *Atž  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  je soustava  $r$  rovnic o  $s$  neznámých nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Potom platí:*

- (1) *Soustava  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  má řešení právě tehdy, když  $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .*
- (2) *V případě, že řešení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  existuje, je každé řešení tvaru*

$$\mathbf{p} + \sum_{i=1}^d a_i \cdot \mathbf{x}_i$$

*kde  $\mathbf{p}$  je pevně zvolené partikulární řešení,  $d = \operatorname{def}(\mathbf{A})$ ,  $a_1, \dots, a_d$  jsou skaláry z tělesa  $\mathbb{F}$  a  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$  je báze prostoru  $\ker(\mathbf{A})$ .*

*Zkráceně budeme řešení zapisovat ve tvaru*

$$\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A})$$

DŮKAZ.

- (1) Soustava  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  má řešení právě tehdy, když  $\mathbf{b}$  leží v prostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$ . Stačí tedy dokázat, že  $\mathbf{b}$  je v prostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$  právě tehdy, když  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .

Připomeňme, že podle Tvzení 4.1.8 je  $\text{im}(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  a  $\text{im}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b})$ . To znamená, že pro jakékoli  $\mathbf{b}$  platí, že prostor  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  je lineárním podprostorem  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b})$ .

Podle Tvzení 3.3.1 rovnosti

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \dim(\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)) = \dim(\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b})) = \text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$$

platí právě tehdy, když  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) = \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b})$ . A to nastane právě tehdy, když  $\mathbf{b}$  leží v prostoru  $\text{im}(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ .

- (2) To plyne okamžitě z Věty 2.4.3. ■

Prostor  $\ker(\mathbf{A})$  bude hrát v řešení soustav lineárních rovnic důležitou roli. Proto zavedeme následující terminologii.

**6.4.2 Definice (Fundamentální systém soustavy)** Jakékoli bázi prostoru  $\ker(\mathbf{A})$  říkáme *fundamentální systém* homogenní soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{0})$ .

Věta 6.4.1 ve spojení s GEM dává velmi silný a elegantní nástroj k řešení soustav lineárních rovnic. Předvedeme to na několika příkladech.



#### 6.4.3 Příklad (Řešení soustavy pomocí GEM) Máme vyřešit soustavu

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 0 & -13 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -1 & -9 \end{array} \right)$$

nad  $\mathbb{R}$ . Označme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -13 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Nejprve použijeme GEM na rozšířenou matici  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 0 & -13 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -1 & -9 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array} \\ &\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 + R_2 \end{array} \end{aligned}$$

Označme

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elementární řádkové úpravy nemění hodnotu. To znamená, že podle Tvzení 6.3.13 platí

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}') = 2 = \text{rank}(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}') = \text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$$

Podle Věty 6.4.1 řešení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  existuje.

Podle téže věty máme najít defekt  $d = \text{def}(\mathbf{A})$  matice  $\mathbf{A}$ . To je snadné: podle Věty 3.3.6 platí rovnost  $5 = \text{def}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{A})$ . Protože  $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ , platí  $\text{def}(\mathbf{A}) = 3$ . Dále máme najít *fundamentální systém*, tj. jakoukoli bázi prostoru  $\ker(\mathbf{A})$ . Protože platí  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{o}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$ , platí

$$\ker(\mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A}')$$

To znamená, že máme najít *jakákoli* tři lineárně nezávislá řešení  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  homogenní soustavy

$$(\mathbf{A}' \mid \mathbf{o}) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Předvedeme *užitečný trik*: vhodnou volbou nul a jedniček zařídíme *nejprve lineární nezávislost* vektorů  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  a *poté dopočítáním položek* zajistíme, aby  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  byla řešení homogenní soustavy. Nuly a jedničky zvolíme na těch pozicích, které *nejdou* sloupcovými posicemi pivotů v matici  $\mathbf{A}'$ . Zvolíme tedy

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} ? \\ 1 \\ ? \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

protože pivoty matice  $\mathbf{A}'$  *nejdou* ve druhém, čtvrtém a pátém sloupci.

Pak vektory  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  a  $\mathbf{x}_3$  budou jistě lineárně nezávislé, ať na místě otazníků budou jakákoli reálná čísla. K dopočítání položek jednotlivých vektorů využijeme požadavek, aby vektory  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  a  $\mathbf{x}_3$  řešily homogenní soustavu  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$ .

(1) Dopčítání položek vektoru  $\mathbf{x}_1$ . Nahraďme otazníky symboly:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hodnoty  $a$  a  $b$  zjistíme procházením jednotlivých rovnic homogenní soustavy  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$  *odspodu*. Druhá rovnice po dosazení  $\mathbf{x}_1$  zní:

$$0 \cdot a + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot b + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

To znamená, že  $b = 0$ . Do první rovnice soustavy  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$  již dosazujeme vektor

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dostaneme tak:

$$1 \cdot a + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

neboli  $a = -2$ .

Celkově

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) Vektory  $\mathbf{x}_2$  a  $\mathbf{x}_3$  dopočítáme analogicky. Dostaneme:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dále podle Věty 6.4.1 potřebujeme najít *jakékoli* partikulární řešení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ . Protože platí  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ , stačí najít jakékoli partikulární řešení soustavy

$$(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}') = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Opět použijeme *trik*: v partikulárním řešení zvolíme hodně nul a zbylé položky dopočítáme. Nuly volíme opět na těch pozicích, které *nejdou* sloupcovými pozicemi pivotů v matici  $\mathbf{A}'$ . Takže

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a hodnoty  $b$  a  $a$  musíme dopočítat ze druhé a první rovnice. Druhá rovnice po dosazení  $\mathbf{p}$  zní:

$$0 \cdot a + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot b + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 5$$

Tedy  $b = -5$ . První rovnice po dosazení  $\mathbf{p}$  zní:

$$1 \cdot a + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -4$$

Tedy  $a = 1$ . Partikulární řešení je

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a celkové obecné řešení soustavy je ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{kde } a, b, c \text{ jsou libovolné skaláry z } \mathbb{R}$$

Obecné řešení budeme zapisovat *zkráceně* takto:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

V Příkladu 6.4.3 jsme některé hodnoty vektorů fundamentálního systému a vektoru partikulárního řešení volili. Ukážeme, že takový postup *vždy* vede k cíli. Přesněji: ukážeme, že zvolíme-li v nějakém vektoru pevně hodnoty na pozicích, které *nejdou* *posice pivotů*, můžeme další hodnoty vždy jednoznačně dopočítat tak, aby výsledný vektor řešil celou soustavu.

**6.4.4 Tvzení** *At soustava  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$  je horní blokový tvar soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  o  $s$  neznámých a  $r$  rovnicích. Označme hodnotu  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}') = h$ . Dále označme jako  $j_1 < j_2 < \dots < j_h$  posice těch sloupců, ve kterých jsou pivoty matice  $\mathbf{A}'$ . Potom v jakémkoli vektoru z  $\mathbb{F}^s$  tvaru*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{j_1-1} \\ \color{red}{x_{j_1}} \\ p_{j_1+1} \\ \vdots \\ p_{j_2-1} \\ \color{red}{x_{j_2}} \\ p_{j_2+1} \\ \vdots \\ p_{j_h-1} \\ \color{red}{x_{j_h}} \\ p_{j_h+1} \\ \vdots \\ p_s \end{pmatrix}$$

kde hodnoty  $p_1, \dots, p_{j_1-1}, p_{j_1+1}, \dots, p_{j_2-1}, p_{j_2+1}, \dots, p_{j_h-1}, p_{j_h+1}, \dots, p_s$  jsou pevně zvolené skaláry z tělesa  $\mathbb{F}$ , lze jednoznačně dopočítat hodnoty  $x_{j_1}, \dots, x_{j_h}$  tak, aby platila rovnost  $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$ .

DŮKAZ. Označme jako

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1s} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2s} \\ \vdots & & & \\ a'_{r1} & a'_{r2} & \dots & a'_{rs} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_r \end{pmatrix}$$

položky matice soustavy a vektoru pravých stran soustavy  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ . Protože matice  $\mathbf{A}'$  je v horním blokovém tvaru a  $\text{rank}(\mathbf{A}') = h$  podle předpokladů, je prvních  $h$  řádků matice  $\mathbf{A}'$  nenulových (navíc, v každém z těchto řádků je pivot) a poté již následují jen řádky samých nul.

Vybereme *poslední* nenulový řádek, tj. řádek s indexem  $h$ . V tomto řádku je pivotem *nenulová* položka  $a'_{h,j_h}$  a  $h$ -tá rovnice soustavy  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$  po dosazení vektoru  $\mathbf{x}$  má tvar

$$a'_{h,j_h} \cdot x_h + a'_{h,j_h+1} \cdot p_{j_h+1} + \dots + a'_{h,s} \cdot p_s = b'_h$$

protože položky na  $h$ -tém řádku matice  $\mathbf{A}'$  až do položky  $a'_{h,j_h-1}$  jsou nulové.

Vyřešením  $h$ -té rovnice dostáváme *jediné* řešení

$$x_h = (a'_{h,j_h})^{-1} \cdot (b'_h - a'_{h,j_h+1} \cdot p_{j_h+1} - \dots - a'_{h,s} \cdot p_s)$$

Nyní vektor  $\mathbf{x}$  dosadíme do rovnice na řádku s indexem  $h-1$  a postupujeme stejně:

$$x_{h-1} = (a'_{h-1,j_{h-1}})^{-1} \cdot (b'_{h-1} - a'_{h-1,j_{h-1}+1} \cdot p_{j_{h-1}+1} - \dots - a'_{h-1,s} \cdot p_s)$$

Takto postupujeme až k rovnici na prvním řádku, ze které dopočítáme položku  $x_{j_1}$ . ■

Výpočty z Příkladu 6.4.3 jdou shrnout do praktického návodu jak řešit soustavu  $r$  lineárních rovnic o  $s$  neznámých ve tvaru  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ :

- (1) Převědeme  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  na horní blokový tvar  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ . K tomu použijeme GEM.
- (2) Větu 6.4.1 můžeme aplikovat na soustavu  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ . Soustava  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  má řešení právě tehdy, když platí rovnost  $\text{rank}(\mathbf{A}') = \text{rank}(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ .  
Hodnosti  $\text{rank}(\mathbf{A}')$  a  $\text{rank}(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$  nalezneme spočítáním nenulových řádků matic  $\mathbf{A}'$  a  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ .
- (3) Pro  $d = \text{def}(\mathbf{A}')$  platí rovnost  $d = s - \text{rank}(\mathbf{A}')$ . Defekt tedy nalezneme takto:

$$d = \text{počet sloupců matice } \mathbf{A} - \text{rank}(\mathbf{A}')$$

Fundamentální systém soustavy  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$  nalezneme takto:

- (a) Zvolíme nuly a jedničky tak, aby vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$  byly lineárně nezávislé. Tyto nuly a jedničky volíme na pozicích mimo pozice pivotů (tj. postupujeme podle Tvzení 6.4.4, kde  $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ ).
- (b) Zbylé položky vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$  dopočítáváme tak, aby každý z vektorů řešil soustavu  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$ . Při dopočítávání postupujeme od spodních rovnic soustavy  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$  k vrchním.
- (4) Partikulární řešení  $\mathbf{p}$  nalezneme takto:
  - (a) Zvolíme ve vektoru  $\mathbf{p}$  co možná nejvíce nul. Tyto nuly volíme na pozicích mimo pozice pivotů, tj. podle Tvzení 6.4.4.
  - (b) Zbylé položky vektoru  $\mathbf{p}$  dopočítáváme tak, aby vektor  $\mathbf{p}$  řešil soustavu  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ . Při dopočítávání postupujeme od spodních rovnic soustavy  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$  k vrchním.
- (5) Celkové řešení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  je  $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ .

Řešení soustav lineárních rovnic lze interpretovat jako hledání *parametrických vyjádření* ploch v  $\mathbb{F}^s$ , známe-li jejich obecné rovnice.

**6.4.5 Příklad (Nalezení parametrické rovnice roviny)** Vyřešíme soustavu  $3x - 2y + 5z = -12$  o jedné rovnici a třech neznámých nad  $\mathbb{R}$ .

GEM končí po nula krocích, jedná se totiž o soustavu s rozšířenou maticí

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & -12 \end{array} \right)$$

Řešení této soustavy existuje, protože matice soustavy i rozšířená matice mají hodnotu 1.

- (1) Fundamentální systém.

Podle Tvzení 6.4.4 máme dopočítat vektory tvaru

$$\begin{pmatrix} ? \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

protože pivot není ve druhém a třetím sloupci matice soustavy.

Dopočtením zjišťujeme, že vektory

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tvoří fundamentální systém.

- (2) Partikulární řešení.



Podle Tvzení 6.4.4 máme dopočítat vektor tvaru

$$\begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

protože pivot není ve druhém a třetím sloupci matice soustavy.

Dopočtením zjišťujeme, že vektor

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je partikulární řešení.

Celkové řešení soustavy je ve tvaru

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

a to je *parametrické vyjádření* roviny  $3x - 2y + 5z = -12$ .

Předvedeme užitečný *trik*: protože skalární nenulové násobky prvků fundamentálního systému tvoří opět fundamentální systém, je možné se vhodným vynásobením zbavit nepříjemných zlomků. To znamená, že řešení rovnice  $3x - 2y + 5z = -12$  lze zapsat i ve tvaru

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Pozor: *netvrdíme*, že by se vynásobením dalo zbavit případných zlomků i u partikulárního řešení. Skalární násobek partikulárního řešení obecně *není* partikulární řešení.



#### 6.4.6 Příklad (GEM a soustavy s parametrem) Vyřešíme soustavu rovnic s rozšířenou maticí

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right)$$

nad  $\mathbb{R}$ , kde  $a \in \mathbb{R}$  je parametr.

Začneme Gaussovou eliminací. Uvidíme, že výpočty budeme muset v závislosti na parametru *větvit*.

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix} \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{array} \right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - a \cdot R_1 \end{matrix} \end{aligned}$$

(1) Je-li  $a = 1$ , jde o soustavu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

kde hodnost matice i rozšířené matice je rovna 1.

(2) Je-li  $a \neq 1$ , jde o soustavu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} R_1 \\ (1-a)^{-1} \cdot R_2 \end{matrix}$$

kde hodnost matice i rozšířené matice je rovna 2.

Řešení jednotlivých soustav nalezneme postupem z Příkladu 6.4.3.

(1) Soustava

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

má řešení

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(2) Soustava

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 1 & 1 \end{array} \right)$$

kde  $a \neq 1$ , má řešení

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1-a \end{pmatrix}\right)$$

GEM je *universální* metoda pro řešení soustav lineárních rovnic, tedy i pro řešení soustav lineárních rovnic s parametry. Nepříjemným větvením pro soustavy s parametry (jako v Příkladu 6.4.6) se lze vyhnout pro soustavy se *čtvercovou* maticí. K tomu potřebujeme více teorie: viz Příklad 8.4.10.



**6.4.7 Poznámka (Numerická nestabilita GEM)** I když je GEM skvělá teoretická metoda pro řešení soustav lineárních rovnic, *v praxi je často nepoužitelná*. Důvodem je její značná *numerická nestabilita* nad tělesy  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  (tj. náchylnost k chybám vzniklým zaokrouhlováním). Pro praktické účely se proto nad  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  používají *numerické* metody řešení soustav lineárních rovnic. Níže naznačíme, jak zhruba pracuje *Gaussova-Seidelova iterační metoda*. Bližší vysvětlení numerických metod lineární algebry je mimo rozsah tohoto textu, odkazujeme například na knihy

☞ Gene H. Golub a Charles F. van Loan, *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, 1996.

☞ Joe D. Hoffman, *Numerical methods for engineers and scientists*, Marcel Dekker Inc., 2001.

☞ William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling a Brian P. Flannery, *Numerical recipes in C — The art of scientific computing*, Cambridge University Press, 1997.

Gaussova-Seidelova metoda řešení *čtvercové* soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  nad  $\mathbb{R}$  s *regulární* maticí  $\mathbf{A}$ , využívá následujících faktů:

- (1) Vhodným přerovnáním řádků lze dosáhnout toho, že všechny prvky na hlavní diagonále matice  $\mathbf{A}$  jsou nenulové.
- (2) Matici  $\mathbf{A}$  lze zapsat ve tvaru  $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$ , kde  $\mathbf{U}$  má na hlavní diagonále a pod hlavní diagonálou samé nuly,  $\mathbf{L}$  má na hlavní diagonále a nad hlavní diagonálou samé nuly,  $\mathbf{D}$  má mimo hlavní diagonálu samé nuly.
- (3) Díky bodu (1) má matice  $\mathbf{L} + \mathbf{D}$  inversi. Pro řešení  $\mathbf{p}$  soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  tedy musí platit rovnost

$$\mathbf{p} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{p}) = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{p}$$

- (4) Definujeme posloupnost  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$  takto:

$$\mathbf{x}_0 \text{ je libovolný vektor, } \mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_k$$

Může se stát, že posloupnost vektorů  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$  *konverguje*<sup>1</sup> k vektoru  $\mathbf{p}$ . Potom je vektor  $\mathbf{p}$  řešením soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

<sup>1</sup>Přesněji: konverguje v *normě* určené skalárním součinem v  $\mathbb{R}^n$ , viz Kapitulu 12.

Poznamenejme ještě, že Gaussova-Seidelova metoda *konverguje* pro pozitivně definitní čtvercové matice, viz Definici 12.3.1. To znamená, že pro *libovolný* počáteční vektor  $\mathbf{x}_0$  posloupnost  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$  konverguje k řešení soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

V některých praktických problémech je nutno umět *sestavit* soustavu lineárních rovnic, pokud je známo řešení.

**6.4.8 Tvzení (Nalezení soustavy, známe-li její řešení)** *At vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$  z prostoru  $\mathbb{F}^s$  jsou lineárně nezávislé, kde  $1 < d < s$ , a at  $\mathbf{x}_p$  je jakýkoli vektor z prostoru  $\mathbb{F}^s$ . Potom soustavu  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ , která má jako řešení vektory tvaru*

$$\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$$

*lze najít takto:*

- (1) *Utvoříme matici  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^d$  jejíž řádky jsou kovektory  $\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_d^T$ . To jest:  $\mathbf{B} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)^T$ .*

*Matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^{s-d}$  obsahuje jako řádky kovektory tvaru  $\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_{s-d}^T$ , kde  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{s-d}$  je fundamentální systém rovnice  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{o})$ . To jest:  $\mathbf{A} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{s-d})^T$ .*

- (2) *Vektor  $\mathbf{b}$  definujeme jako  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ .*

DŮKAZ. Matice  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^d$  má hodnost  $d$ , protože vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$  jsou lineárně nezávislé. Podle Věty 6.4.1 má homogenní soustava  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{o})$  fundamentální systém tvořený  $s - d$  vektory, označme je  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{s-d}$ .

Sestavme matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^{s-d}$ , která má jako řádky kovektory  $\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_{s-d}^T$ . Matice  $\mathbf{A}$  má hodnost  $s - d$ , protože vektory  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{s-d}$  jsou lineárně nezávislé. To znamená, že  $\text{def}(\mathbf{A}) = s - (s - d) = d$ . Ukážeme, že  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{o}$  pro každé  $i = 1, \dots, d$ . Protože vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$  jsou lineárně nezávislé, ukážeme tím, že  $\ker(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ .

K tomu, aby platilo  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{o}$  stačí, aby platilo  $\mathbf{y}_j^T \cdot \mathbf{x}_i = 0$  pro všechna  $j = 1, \dots, s - d$ . Protože  $\mathbf{y}_j$  je řešením soustavy  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{o})$ , platí  $\mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{y}_j = 0$ . Ale  $\mathbf{y}_j^T \cdot \mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{y}_j)^T$ , proto  $\mathbf{y}_j^T \cdot \mathbf{x}_i = 0$ .

Definujeme-li  $\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ , pak každý vektor tvaru

$$\mathbf{p} + \sum_{i=1}^d a_i \cdot \mathbf{x}_i$$

je řešením soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ , protože platí rovnosti

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{p} + \sum_{i=1}^d a_i \cdot \mathbf{x}_i) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \sum_{i=1}^d a_i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{b} + \mathbf{o} = \mathbf{b}$$

■

**6.4.9 Poznámka** V aplikacích (viz například Dodatek B) je často vhodné zvolit zápis nalezené soustavy ve tvaru  $(\mathbf{N}^T \mid \mathbf{b})$ . To je snadné: matice  $\mathbf{N}$  je matice  $\mathbf{A}^T$ , tj.  $\mathbf{N}$  matice, která má jako sloupce fundamentální systém rovnice  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{o})$ .



**6.4.10 Příklad** Nad tělesem  $\mathbb{R}$  nalezneme soustavu tvaru  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ , která má jako řešení

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Budeme postupovat podle Tvzení 6.4.8. Nejprve vektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

napíšeme jako řádky matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a zapíšeme příslušnou homogenní soustavu:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Řešení homogenní soustavy nalezneme pomocí GEM:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \end{array}$$

Tato homogenní rovnice má řešení

$$\text{span}\left( \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Fundamentální systém zapíšeme jako řádky matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dále spočítáme

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hledaná soustava  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  je

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} -6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Hledání soustavy tvaru  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  z Tvzení 6.4.8 má jasný geometrický význam:

- (1) Zápis tvaru  $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ , kde vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$  z  $\mathbb{F}^s$  jsou lineárně nezávislé, je *parametrický* popis  $d$ -dimensionální „plochy“ v  $\mathbb{F}^s$ , která prochází bodem  $\mathbf{p}$  a má „směr“  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ .
- (2) Nalezení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ , která má jako řešení plochu  $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ , znamená nalezení *obecné* (maticové) rovnice dané „plochy“.

V prostorech typu  $\mathbb{R}^n$  se těmito „plochám“ budeme věnovat v Dodatku B.

**6.4.11 Příklad (Nalezení obecné rovnice roviny z jejího parametrického vyjádření)** Nad tělesem  $\mathbb{R}$  je zápis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

takzvané *parametrické vyjádření roviny*: rovina prochází bodem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a vektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

určí její „směr“. Máme nalézt *obecnou rovnici* této roviny, tj. rovnici tvaru  $ax + by + cz = d$ .

Budeme postupovat podle Tvzení 6.4.8. Nejprve vektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

napíšeme jako řádky matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a zapíšeme příslušnou homogenní soustavu:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Řešení homogenní soustavy nalezneme pomocí GEM:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \end{array}$$

Řešení této soustavy je

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Vektor

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nyň máme zapsat jako (jediný) řádek matice

$$\mathbf{A} = (-6 \quad 3 \quad 2)$$

Nyní máme spočítat

$$\mathbf{b} = (-6 \quad 3 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (6)$$

Hledaná soustava je

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

a hledaná obecná rovnice roviny tedy je  $-6x + 3y + 2z = 6$ .

Řešení soustav tvaru  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ , kde  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  a  $\mathbf{b}$  je z  $\mathbb{F}^r$ , lze zobecnit na řešení *maticových rovnic*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

kde  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ ,  $\mathbf{X} : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^s$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^r$ . Připomeňme, že rovnost

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{\mathbf{X}} & \mathbb{F}^s \\ & \searrow \mathbf{B} & \swarrow \mathbf{A} \\ & \mathbb{F}^r & \end{array}$$

lze podle podkapitoly 4.2 interpretovat takto: je dána  $p$ -tice bodů  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p)$  v prostoru  $\mathbb{F}^r$  a lineární zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ . Hledáme  $p$ -tici bodů  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)$  v prostoru  $\mathbb{F}^s$  tak, aby platilo  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$  pro všechna  $i = 1, \dots, p$ . To znamená vyřešit soustavy

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}_1) \quad (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}_2) \quad \dots \quad (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}_p)$$

*simultánně*. Stačí tedy matici  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$  v blokovém tvaru převést na horní blokový tvar.

Simultánního řešení soustav se hojně využívá, pokud hledáme *inverzi* čtvercové matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ . Podle Odstavce 6.1.6 najít inverzi k matici  $\mathbf{A}$  totiž znamená umět nalézt řešení rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ . Potom  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ .



#### 6.4.12 Příklad (GEM a nalezení inverzní matice) Pokud existuje, nalezněte inverzi k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$ .

Vytvoříme matici

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

v blokovém tvaru, protože máme řešit rovnici  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_3$ . Pomocí GEM tuto matici převedeme na horní blokový tvar:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array} \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array} \end{aligned}$$

Protože  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$ , řešení rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$  existuje. Toto řešení bychom mohli nalézt metodou z Příkladu 6.4.3, znamenalo by to vyřešit tři soustavy

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Použijeme opět *trik*: Gaussovu eliminační metodu můžeme „otočit“ a vynulovat položky i nad hlavní diagoná-

lou.<sup>2</sup>

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \\ R_2 - 3R_3 \\ R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 8 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$$

To znamená, že máme vyřešit tři soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Soustavy, jejichž matice je jednotková, se ale řeší extrémně snadno: řešení jsou po řadě

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To znamená, že

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -5 \\ 5 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Výpočty z Příkladu 6.4.12 dávají praktický návod, jak hledat inverzi matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  pomocí GEM.

- (1) Sestavíme matici  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_n)$  a převedeme ji na horní blokový tvar  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{B}')$ . Pokud  $\text{rank}(\mathbf{A}') \neq \text{rank}(\mathbf{A}' \mid \mathbf{B}')$ , inverze k  $\mathbf{A}$  neexistuje.
- (2) Pokud  $\text{rank}(\mathbf{A}') = \text{rank}(\mathbf{A}' \mid \mathbf{B}') = n$ , nulujeme řádkovými úpravami položky matice  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{B}')$  nad hlavní diagonálou.  
Poté případně řádky vydělíme tak, aby prvky na hlavní diagonále měly hodnotu 1. Získáme tak matici  $(\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1})$ .

Dalším využitím simultánního řešení několika soustav lineárních rovnic je problém inkluze lineárních obalů.



**6.4.13 Příklad (Inkluze lineárních obalů)** Nad tělesem  $\mathbb{R}$  máme rozhodnout, zda platí

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \subseteq \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

Podle Tvzení 1.5.11 výše uvedená inkluze platí právě tehdy, když

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ leží v } \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \text{ a současně } \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ leží v } \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

<sup>2</sup>Tomuto postupu se někdy říká *Gaussova-Jordanova eliminace*.

a to nastane právě tehdy, když obě soustavy

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 2 \\ -7 & 5 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 2 & -1 \\ -6 & 10 & 4 & 3 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 5 \\ -7 & 5 & -2 & 0 \\ 7 & -5 & 2 & 0 \\ -6 & 10 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

mají řešení (viz Příklad 1.5.10).

Stačí řešit obě soustavy simultánně. Použijeme GEM:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 5 \\ -7 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & 10 & 4 & 3 & 5 \end{array} \right) & \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 8 & 3 & 7 \\ 0 & -16 & -16 & -6 & -14 \\ 0 & 16 & 16 & 6 & 14 \\ 0 & -8 & -8 & -3 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - 7R_1 \\ R_4 + 7R_1 \\ R_5 - 6R_1 \end{array} \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 8 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 2R_2 \\ R_4 - 2R_2 \\ R_5 + R_2 \end{array} \end{aligned}$$

Hodnost rozšířené blokové matice je 2, hodnost matice soustavy je 2. Proto obě soustavy mají řešení. Toto řešení nemusíme hledat, stačí nám jeho existence. Tudíž inkluze

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \subseteq \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

platí.

Úvahy z Příkladu 6.4.13 dávají praktický obecný návod: inkluze  $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) \subseteq \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  platí právě tehdy, když simultánní soustava  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$  má řešení. Navíc: konkrétní řešení není třeba hledat. To znamená, že inkluze

$$\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) \subseteq \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$$

platí právě tehdy, když

$$\text{rank}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) = \text{rank}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b}_i) \quad \text{pro všechna } i = 1, \dots, k$$



**6.4.14 Příklad (Zjištění totožnosti dvou rovin)** V  $\mathbb{R}^3$  máme rozhodnout, zda plochy

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

jsou totožné.

(1) Nejprve zjistíme, zda platí

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

tj., zda platí

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \subseteq \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{a současně} \quad \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$



Pro každou inklusi budeme postupovat stejně jako v Příkladu 6.4.13.

(a) Pro rozhodnutí o platnosti inkluze

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \subseteq \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

sestavíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

a spustíme GEM:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 2R_2 \end{array} \end{aligned}$$

Protože hodnosti matice soustavy a rozšířené matice jsou 2, inkluze

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \subseteq \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

platí.

(b) Pro rozhodnutí o platnosti inkluze

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

sestavíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

a spustíme GEM:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_2 \end{array}$$

Protože hodnosti matice soustavy a rozšířené matice jsou 2, inkluze

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

platí.

Ukázali jsme, že platí rovnost

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

a můžeme tedy postupovat dále.

(2) Utvoříme vektor

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a rozhodneme, zda tento vektor leží ve

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

Sestavíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \end{array}\right)$$

Pokud ano, jsou obě roviny totožné. Pokud ne, jde o různé roviny.

Spustíme GEM:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_2 \end{array}$$

Protože hodnosti matice soustavy i rozšířené matice jsou rovny 2, vektor

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

v prostoru

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

leží.

Celkově jsme ukázali, že plochy

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

jsou totožné.

Předchozí výpočty umožňují rozhodnout o tom, zda dvě  $d$ -dimensionální „plochy“ v  $\mathbb{F}^s$  jsou totožné. Přesněji: rozhodnout, zda platí

$$\mathbf{a} + \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d) = \mathbf{b} + \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$$

kde  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$  jsou lineárně nezávislé,  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$  jsou lineárně nezávislé a  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  jsou libovolné vektory (všechny z prostoru  $\mathbb{F}^s$ ), lze takto:

- (1) Rozhodneme, zda  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$ . Tj. rozhodneme, zda obě „plochy“ mají stejný „směr“.

Pokud ne, plochy totožné nejsou. Pokud ano, pokračujeme dále.

- (2) Rozhodneme, zda vektor  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  je ve  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d)$  (nebo, což je totéž, zda vektor  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  je ve  $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$ ).

Pokud ne, plochy totožné nejsou. Pokud ano, jsou plochy  $\mathbf{a} + \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d)$  a  $\mathbf{b} + \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$  totožné.

Podotkněme, že všechny výše uvedené problémy lze řešit pouhým porovnáváním hodnot jistých matic. Více o problémech tohoto typu řekneme v podkapitolách 7.2 a 7.3, kde spočteme i více příkladů.

**6.4.15 Poznámka** Plochy tvaru  $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  v  $\mathbb{F}^s$  jsou „lineární podprostory posunuté mimo počátek“. Takovým podmnožinám se říká *afinní podprostory* prostoru  $\mathbb{F}^s$ . Studium afinních prostorů a jejich afinních podprostorů také patří do lineární algebry, více se lze dočíst například v knihách

☞ Ladislav Bican, *Lineární algebra*, SNTL, 1979

☞ Jacqueline Lelong-Ferrand, *Les fondements de la géométrie*, Presses Universitaires de France, 1985.

nebo v Kapitole 7.

## Kapitola 7

# Afinní podprostory a afinní zobrazení

Imagine a vast sheet of paper on which straight Lines, Triangles, Squares, Pentagons, Hexagons, and other figures, instead of remaining fixed in their places, move freely about, on or in the surface, but without the power of rising above or sinking below it, very much like shadows — only hard and with luminous edges — and you will then have a pretty correct notion of my country and countrymen.

Edwin Abbott Abbott, *Flatland*

Lineární podprostor lineárního prostoru  $L$  je „rovný kus“ lineárního prostoru  $L$ , který prochází vektorem  $\vec{o}$ . Jak vypadají *obecné* „rovné kusy“ lineárních prostorů? Příkladem takové situace je množina  $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A})$  řešení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ , studovaná v Kapitole 6. Jedná se o lineární podprostor  $\ker(\mathbf{A})$  *paralelně posunutý* do bodu  $\mathbf{p}$ .

Obecně se množinám tvaru  $\vec{p} + W$  (kde  $W$  je lineární podprostor) říká *afinní podprostor*. Afinní podprostory lineárního prostoru zavedeme v podkapitole 7.1 a ukážeme jejich souvislost s *afinními kombinacemi* z podkapitoly 1.7.

V podkapitole 7.2 budeme studovat *vzájemnou polohu* dvou afinních podprostorů lineárního prostoru. Jedná se o přímé zobecnění vzájemných poloh dvojice přímek v  $\mathbb{R}^3$ : dvě takové přímky mohou být buď *rovnoběžné*, nebo *různoběžné*, nebo *mimoběžné*. Stejnou klasifikaci lze podat pro vzájemnou polohu libovolných dvou afinních podprostorů.

V podkapitole 7.3 ukážeme, že každý afinní podprostor prostoru  $\mathbb{F}^n$  lze zadat dvěma způsoby: *parametrickým zápisem* a *obecnou rovnicí*. Jedná se opět o přímé zobecnění známé situace: každou přímku v  $\mathbb{R}^2$  lze zapsat buď parametricky nebo obecnou rovnicí.

Nakonec, v podkapitole 7.4, ukážeme několik příkladů, jak spočítat *průnik* dvojice afinních podprostorů.

Pro další možné informace lze doporučit některou z knih

- ☞ Ladislav Bican, *Lineární algebra*, SNTL, Praha, 1979.
- ☞ Jacqueline Lelong-Ferrand, *Les fondements de la géométrie*, Presses Universitaires de France, 1985.
- ☞ Boris A. Rozenfeld, *Mnogomernyye prostranstva*, Moskva, Nauka, 1966.
- ☞ Milan Sekanina, Leo Boček, Milan Kočandrle a Jaroslav Šedivý, *Geometrie I*, SPN, Praha, 1986.

## 7.1 Afinní podprostory lineárního prostoru

Namísto termínu *plocha dimense  $d$*  (který má v geometrii obecnější význam, viz Dodatek S) budeme používat termín *afinní podprostor dimense  $d$* .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>V angličtině se také používá termín *d-flat*.

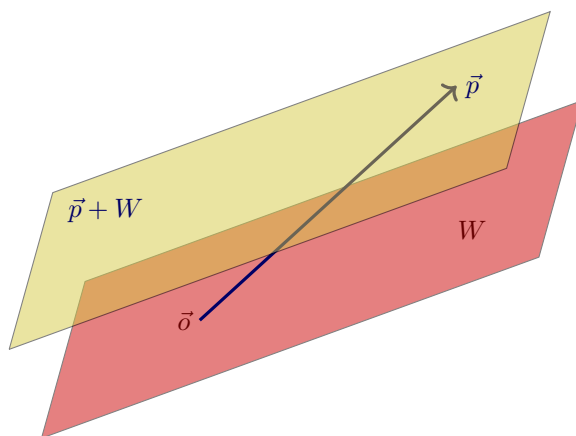
**7.1.1 Definice (Afinní podprostor lineárního prostoru)** Ať  $W$  je lineární podprostor lineárního prostoru  $L$ . Ať  $W$  má konečnou dimenzi a označme  $0 \leq d = \dim(W)$ . Ať  $\vec{p}$  je vektor v  $L$ . Množině vektorů

$$\pi = \vec{p} + W = \{\vec{p} + \vec{w} \mid \vec{w} \text{ je ve } W\}$$

říkáme *d-dimensionální afinní podprostor* prostoru  $L$ . Podprostoru  $W$  říkáme *směr* afinního podprostoru  $\pi$ .

Definice 7.1.1 je pouhým abstraktním zápisem „ploch“, které jsme studovali v Kapitole 6, viz Příklady 6.4.5 a 6.4.11. V případě, kdy  $\dim(W) = d$  a  $L = \mathbb{F}^n$ , lze totiž plochu  $\mathbf{p} + W$  zapsat ve tvaru  $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ , kde  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  je jakákoli báze podprostoru  $W$ .

Intuitivní geometrický význam afinních podprostorů lineárního prostoru  $L$  je jasný: afinní podprostor  $\vec{p} + W$  je „rovná plocha“, která vznikla paralelním posunutím lineárního podprostoru  $W$  do bodu  $\vec{p}$ .



Pro  $d = 0, 1, 2$  budeme používat obvyklou terminologii:

- (1) 0-dimensionální afinní podprostor prostoru  $L$  je jakýkoli *bod* v  $L$ .
- (2) 1-dimensionální afinní podprostor prostoru  $L$  je jakákoli *přímka* v  $L$  (která obecně nemusí procházet počátkem).
- (3) 2-dimensionální afinní podprostor prostoru  $L$  je jakákoli *rovina* v  $L$  (která obecně nemusí procházet počátkem).

Poznamenejme, že afinní podprostor  $\vec{p} + W$  je *vždy neprázdná podmnožina* lineárního prostoru  $L$ . V afinním podprostoru  $\vec{p} + W$  totiž vždy leží přinejmenším vektor  $\vec{p}$ . Nyní ukážeme, že afinní podprostory lineárního prostoru  $L$  jsou přesně *neprázdné afinně uzavřené podmnožiny* lineárního prostoru  $L$ . Viz Příklady 1.7.4(2) a 1.7.11.

**7.1.2 Tvzení** Pro podmnožinu  $M$  lineárního prostoru  $L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1)  $M$  je afinní podprostor prostoru  $L$ .
- (2)  $M$  je neprázdná množina a platí  $M = \text{aff}(M)$ .

**DŮKAZ.** Z (1) plyne (2). Ať  $M$  je tvaru  $\vec{p} + W$  pro nějaký vektor  $\vec{p}$  z  $L$  a nějaký lineární podprostor  $W$  lineárního prostoru  $L$ . Potom  $\vec{p} \in M$ , a množina  $M$  je neprázdná. Předpokládejme, že  $\vec{m}_1 = \vec{p} + \vec{w}_1, \dots, \vec{m}_k = \vec{p} + \vec{w}_k$  leží v  $M$  a předpokládejme, že  $a_1, \dots, a_k$  jsou skaláry, pro které platí  $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ . Potom

$$\sum_{i=1}^k a_i \cdot \vec{m}_i = \sum_{i=1}^k a_i \cdot (\vec{p} + \vec{w}_i) = \vec{p} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^k a_i}_{=1} + \underbrace{\sum_{i=1}^k a_i \cdot \vec{w}_i}_{\in W} \in M$$

Ukázali jsme, že  $\text{aff}(M) \subseteq M$ . Tudíž, podle Tvzení 1.7.8, platí  $M = \text{aff}(M)$ .

Ze (2) plyne (1). Protože  $M$  je neprázdná množina, můžeme zvolit vektor  $\vec{p}$  tak, že  $\vec{p} \in M$ . Definujme

$$W = \{\vec{m} - \vec{p} \mid \vec{m} \in M\}$$

Ukážeme, že  $W$  je lineární podprostor prostoru  $L$ . Budeme postupovat podle Věty 1.6.2:

- (a) Protože  $\vec{o} = \vec{p} - \vec{p}$ , leží  $\vec{o}$  v množině  $W$ .
- (b) Ať  $\vec{x} = \vec{m} - \vec{p}$  a  $\vec{y} = \vec{n} - \vec{p}$  leží ve  $W$ . Potom  $\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$  je afinní kombinace prvků  $M$ , tudíž jde opět o prvek množiny  $M$ . Proto vektor

$$\vec{x} + \vec{y} = \underbrace{(\vec{m} + \vec{n} - \vec{p})}_{\in M} - \vec{p}$$

leží ve  $W$ .

- (c) Ať  $\vec{x} = \vec{m} - \vec{p}$  leží ve  $W$  a ať  $a$  je skalár z  $\mathbb{F}$ . Potom  $a \cdot \vec{m} + (1 - a) \cdot \vec{p}$  je afinní kombinace prvků z  $M$ , proto jde opět o prvek množiny  $M$ . Proto vektor

$$a \cdot \vec{x} = \underbrace{(a \cdot \vec{m} + (1 - a) \cdot \vec{p})}_{\in M} - \vec{p}$$

leží v množině  $W$ .

Ukázali jsme, že  $M$  je afinní podprostor tvaru  $\vec{p} + W$ . Protože naše reprezentace nezávisí na volbě vektoru  $\vec{p}$ , důkaz je u konce. ■

Jednoduchým důsledkem je, že afinní podprostor  $\pi$  obsahuje s každou dvojicí bodů i přímku, která jimi prochází. Obecný bod na přímce je totiž afinní kombinací dvou bodů přímky.

**7.1.3 Důsledek** Ať  $\pi = \vec{p} + W$  je afinní podprostor lineárního prostoru  $L$ . Potom pro jakékoli vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  z  $\pi$  a jakýkoli skalár  $a$  z  $\mathbb{F}$ , jejich afinní kombinace

$$a \cdot \vec{x} + (1 - a) \cdot \vec{y} = \vec{y} + a \cdot (\vec{x} - \vec{y})$$

leží v  $\pi$ .



**7.1.4 Poznámka** V literatuře je často definován *afinní prostor* nad obecným tělesem  $\mathbb{F}$ . Afinním podprostorem se pak rozumí podprostor afinního prostoru. Taková teorie je pak analogická teorii lineárních prostorů a jejich lineárních podprostorů. V tomto textu nebudeme teorii afinních prostorů budovat. Zájemce odkazujeme například na knihy

☞ Ladislav Bican, *Lineární algebra*, SNTL, Praha, 1979.

☞ Jacqueline Lelong-Ferrand, *Les fondements de la géométrie*, Presses Universitaires de France, 1985.

## 7.2 Vzájemná poloha afinních podprostorů

V této podkapitole budeme klasifikovat vzájemnou polohu afinních podprostorů v lineárním prostoru  $L$  nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Klasifikace bude velmi podobná klasifikaci vzájemných poloh obecných *přímek* v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^3$  nad  $\mathbb{R}$ : dvě obecné přímky v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^3$  jsou buď rovnoběžné, nebo různoběžné, nebo mimoběžné. Uvedme příklad takových dvojic přímek.

**7.2.1 Příklad** V tomto příkladě pracujeme v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^3$  nad tělesem  $\mathbb{R}$ .

- (1) Přímky  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  jsou *rovnoběžné*.

Opravdu: obě přímky mají *stejný směr*, je jím vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (2) Přímky  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  a  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  jsou *různoběžné*.

To zjistíme následujícím způsobem: přímky *nejsou* rovnoběžné: rovnost  $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  *neplatí*.

Navíc mají obě přímky *společný bod*, je jím vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- (3) Přímky  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  a  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  jsou *mimoběžné*.

To zjistíme následujícím způsobem: přímky *nejsou* rovnoběžné: rovnost  $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  *neplatí*.

Navíc obě přímky *nemají společný bod*: neexistují reálná čísla  $s, t$  tak, že

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O tom se lze snadno přesvědčit řešením příslušné soustavy rovnic pro  $s$  a  $t$ .

V prostoru  $\mathbb{R}^3$  můžeme ovšem studovat i vzájemnou polohu obecné přímky a obecné roviny, a vzájemnou polohu dvou obecných rovin.

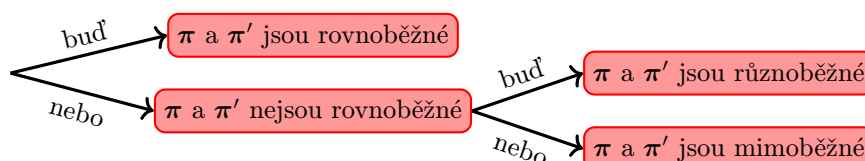
Nyní zavedeme pojmy pro vzájemnou polohu dvou afinních podprostorů obecného lineárního prostoru  $L$  nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Povšimněme si, že následující definice vlastně „kopíruje“ úvahy o vzájemné poloze přímek z Příkladu 7.2.1.

**7.2.2 Definice (Vzájemná poloha dvou afinních podprostorů)** Ať  $\pi = \vec{p} + W$  a  $\pi' = \vec{p}' + W'$  jsou dva afinní podprostory lineárního prostoru  $L$  nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Řekneme, že

- (1)  $\pi$  a  $\pi'$  jsou *rovnoběžné*, pokud platí  $W \subseteq W'$  nebo  $W' \subseteq W$ .
- (2)  $\pi$  a  $\pi'$  jsou *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a mají alespoň jeden společný bod.
- (3)  $\pi$  a  $\pi'$  jsou *mimoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a nemají žádný společný bod.

Dimensi lineárního podprostoru  $W \cap W'$  budeme říkat *stupeň rovnoběžnosti* afinních podprostorů  $\pi$  a  $\pi'$ .

**7.2.3 Poznámka** Pro dva afinní podprostory  $\pi$  a  $\pi'$  lineárního prostoru  $L$  platí:



Z tohoto dělení plyne strategie pro hledání vzájemné polohy dvou afinních podprostorů  $\pi$  a  $\pi'$  lineárního prostoru  $L$ :

- (1) Zjistíme, zda  $\pi$  a  $\pi'$  jsou rovnoběžné. Pokud ano, skončíme. Pokud ne, pokračujeme dále.
- (2) Zjistíme, zda  $\pi$  a  $\pi'$  jsou různoběžné. Pokud ano, skončíme. Pokud ne, jsou  $\pi$  a  $\pi'$  jsou mimoběžné.

Charakterisací rovnoběžnosti, různoběžnosti a mimoběžnosti dvojice afinity podprostorů lineárního prostoru se zabývá následující sada tvrzení.

**7.2.4 Tvrzení (Charakterisace disjunktních rovnoběžných afinity podprostorů)** *At  $\pi = \vec{p} + W$  a  $\pi' = \vec{p}' + W'$  jsou dva afinity podprostory prostoru  $\mathbb{R}^n$ . At  $W' \subseteq W$ . Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) Afinity podprostory  $\pi$  a  $\pi'$  jsou disjunktní.
- (2) Pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$  v  $\pi$  a jakýkoli vektor  $\vec{x}'$  v  $\pi'$  vektor  $\vec{x} - \vec{x}'$  neleží ve  $W$ .
- (3) Existuje vektor  $\vec{x}$  v  $\pi$  a existuje vektor  $\vec{x}'$  v  $\pi'$  tak, že vektor  $\vec{x} - \vec{x}'$  neleží ve  $W$ .

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Předpokládejme, že existuje vektor  $\vec{x}$  v  $\pi$  a existuje vektor  $\vec{x}'$  v  $\pi'$  tak, že vektor  $\vec{x} - \vec{x}'$  leží ve  $W$ .

Jakýkoli vektor tvaru  $\vec{y} + \vec{w}'$ , kde  $\vec{y}$  je v  $\pi'$  a  $\vec{w}'$  je ve  $W'$ , leží v  $\pi'$ . Ukážeme, že  $\vec{y} + \vec{w}'$  leží v  $\pi$ . To bude spor s tím, že plochy  $\pi$  a  $\pi'$  jsou disjunktní.

Platí

$$\vec{y} + \vec{w}' = \vec{x} + \underbrace{(\vec{y} - \vec{x}')}_{\in W' \subseteq W} + \underbrace{(\vec{x}' - \vec{x})}_{\in W} + \underbrace{\vec{w}'}_{\in W' \subseteq W} \in \pi$$

Ze (2) plyne triviálně (3).

Ze (3) plyne (1). Zvolme vektor  $\vec{x}$  v  $\pi$  a vektor  $\vec{x}'$  v  $\pi'$  tak, že  $\vec{x} - \vec{x}'$  neleží ve  $W$ . Předpokládejme, že  $\vec{y}$  je společný bod ploch  $\pi$  a  $\pi'$ . Potom

$$\vec{x} - \vec{x}' = \underbrace{(\vec{x} - \vec{y})}_{\in W} + \underbrace{(\vec{y} - \vec{x}')}_{\in W'} \in W \vee W'$$

Protože  $W' \subseteq W$ , platí  $W \vee W' = W$ . To je spor, protože  $\vec{x} - \vec{x}'$  neleží ve  $W$ . ■

**7.2.5 Tvrzení (Charakterisace různoběžných afinity podprostorů)** *At  $\pi = \vec{p} + W$  a  $\pi' = \vec{p}' + W'$  jsou dva afinity podprostory prostoru  $\mathbb{R}^n$ , které nejsou rovnoběžné. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) Afinity podprostory  $\pi$  a  $\pi'$  jsou různoběžné.
- (2) Pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$  v  $\pi$  a jakýkoli vektor  $\vec{x}'$  v  $\pi'$  vektor  $\vec{x} - \vec{x}'$  leží ve  $W \vee W'$ .
- (3) Existuje vektor  $\vec{x}$  v  $\pi$  a existuje vektor  $\vec{x}'$  v  $\pi'$  tak, že vektor  $\vec{x} - \vec{x}'$  leží ve  $W \vee W'$ .

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Ať  $\vec{y}$  je jakýkoli společný bod afinity podprostorů  $\pi$  a  $\pi'$ . Potom pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$  v  $\pi$  a jakýkoli vektor  $\vec{x}'$  v  $\pi'$  platí

$$\vec{x} - \vec{x}' = \underbrace{(\vec{x} - \vec{y})}_{\in W} + \underbrace{(\vec{y} - \vec{x}')}_{\in W'} \in W \vee W'$$

Ze (2) plyne triviálně (3).

Ze (3) plyne (1). Protože vektor  $\vec{x} - \vec{x}'$  leží ve  $W \vee W'$ , existují vektory  $\vec{w}$  ve  $W$  a  $\vec{w}'$  ve  $W'$  tak, že  $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{w} + \vec{w}'$ . Potom vektor  $\vec{x} - \vec{w} = \vec{x}' + \vec{w}'$  je společný bod afinity podprostorů  $\pi$  a  $\pi'$ . ■

**7.2.6 Tvrzení (Charakterisace mimoběžných afinity podprostorů)** *At  $\pi = \vec{p} + W$  a  $\pi' = \vec{p}' + W'$  jsou dva afinity podprostory prostoru  $\mathbb{R}^n$ , které nejsou rovnoběžné. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) Afinity podprostory  $\pi$  a  $\pi'$  jsou mimoběžné.
- (2) Vektor  $\vec{p} - \vec{p}'$  neleží ve  $W \vee W'$ .

DŮKAZ. Důkaz plyne okamžitě z Tvrzení 7.2.5. ■



## 7.3 Parametrický a rovnicový zápis afinního podprostoru lineárního prostoru $\mathbb{F}^n$

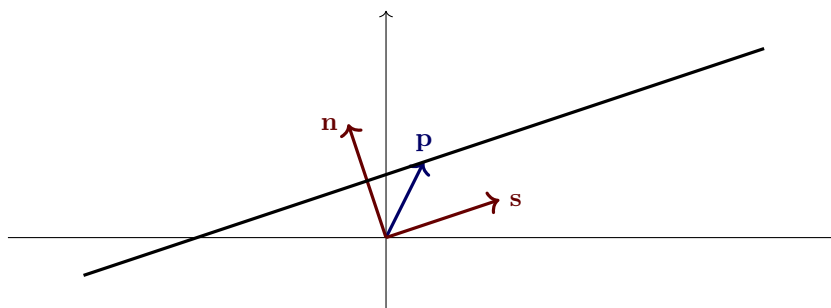
Z elementární středoškolské geometrie víme, že (například) přímku v  $\mathbb{R}^2$  lze popsat dvěma způsoby:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R} \qquad -x + 3y = 5$$

Zápisu nalevo říkáme *parametrický zápis* přímky a zápisu nalevo říkáme *rovnicový zápis* přímky. Oba typy zápisu jsme již potkali v podkapitole 6.4 při úvahách o řešitelnosti soustav lineárních rovnic a zapisovali jsme je jako

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad (-1 \ 3 \mid 5)$$

Každý z těchto zápisů má své výhody a nevýhody. Parametrický zápis nám okamžitě dává informaci o *bodu*  $\mathbf{p}$ , kterým přímka prochází a o *směrovém vektoru*  $\mathbf{s}$  zadané přímky. Obecný zápis nám (na první pohled) dává pouze informaci o *normálovém vektoru*  $\mathbf{n}$  zadané přímky: v našem případě jde o vektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .



V této podkapitole definujeme parametrický zápis a rovnicový zápis pro libovolný afinní podprostor prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Ukážeme postupy, jak pomocí těchto zápisů lze rozhodnout o vzájemné poloze dvou afinních podprostorů. Rovnicový zápis ale zvolíme tak, že z něj půjde vyčíst informaci o bodu, kterým daný afinní podprostor prochází. Povšimněme si, že v předchozím příkladu je kovektor  $\mathbf{n}^T$  přesně maticí soustavy v rovnicovém zápise  $(-1 \ 3 \mid 5)$  přímky.

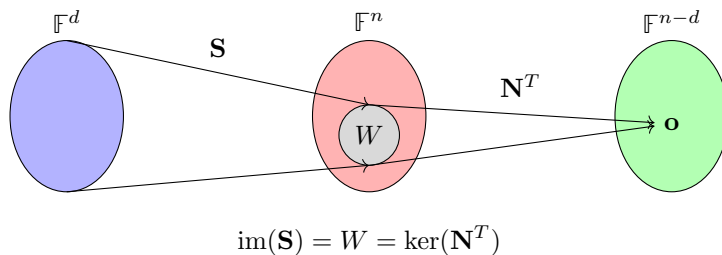
**7.3.1 Tvzení (Parametrický zápis a rovnicový zápis afinního podprostoru)** *At  $\pi = \mathbf{p} + W$  je  $d$ -dimensionální afinní podprostor prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Potom existují dvě matice  $\mathbf{S} : \mathbb{F}^d \rightarrow \mathbb{F}^n$  a  $\mathbf{N}^T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^{n-d}$  tak, že platí:*

- (1) *Platí  $\text{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$ ,  $\text{rank}(\mathbf{N}^T) = n - d$  a  $\text{rank}(\mathbf{S}) = d$ .*
- (2) *Vektor  $\mathbf{x}$  leží v  $\pi$  právě tehdy, když platí rovnost  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$  pro nějaké  $\mathbf{t}$ . Tomuto zápisu říkáme parametrický zápis afinního podprostoru  $\pi$ .*
- (3) *Vektor  $\mathbf{x}$  leží v  $\pi$  právě tehdy, když platí rovnost  $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ . Tomuto zápisu říkáme rovnicový zápis afinního podprostoru  $\pi$ .*

**DŮKAZ.** Označme jako  $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d)$  matici, která má jako sloupce jakoukoli uspořádanou bázi lineárního podprostoru  $W$ . Potom  $\mathbf{S} : \mathbb{F}^d \rightarrow \mathbb{F}^n$  a platí  $\text{rank}(\mathbf{S}) = d$ . Navíc vektor  $\mathbf{x}$  leží v  $\pi$  právě tehdy, když platí rovnost  $\mathbf{x} - \mathbf{p} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$  pro nějaké  $\mathbf{t} \in \mathbb{F}^d$ .

Podle Tvzení 6.4.8 a Poznámky 6.4.9 existuje matice  $\mathbf{N}^T$  taková, že  $W = \ker(\mathbf{N}^T)$ . Podle důkazu téhož tvrzení lze matici  $\mathbf{N}^T$  zvolit tak, že  $\mathbf{N}^T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^{n-d}$  a že platí  $\text{rank}(\mathbf{N}^T) = n - d$ . Potom vektor  $\mathbf{x}$  leží v  $\pi$  právě tehdy, když platí rovnost  $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ . ■

Následující obrázek by měl pomoci:



Zdůrazněme, že v parametrickém zápisu požadujeme, aby platila rovnost

$$\text{rank}(\mathbf{S}) = d$$

a v obecném zápisu požadujeme, aby platila rovnost

$$\text{rank}(\mathbf{N}^T) = n - d$$

**7.3.2 Poznámka** Proč píšeme rovnicový zápis ve tvaru  $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ ? Máme k tomu dva důvody:

- (1) Bod  $\mathbf{p}$  vyhovuje rovnici  $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ . To znamená, že ze zápisu  $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$  ihned vidíme, že afinity podprostor prochází bodem  $\mathbf{p}$ .
- (2) Pokud označíme jako  $\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-d})$ , pak rovnost  $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$  je ekvivalentní rovnostem

$$\mathbf{n}_1^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0, \quad \mathbf{n}_2^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{n}_{n-d}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 = 0$$

To znamená, že sloupce matice  $\mathbf{N}$  si lze přestavit jako seznam lineárně nezávislých „normál“ příslušného afinity podprostoru.

Parametrický zápis afinity podprostorů je pro řadu následujících úvah „příjemnější“ než obecný rovnicový zápis. Naštěstí víme, jak z rovnicového zápisu  $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$  parametrický zápis získat. Zápis  $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$  lze přepsat jako  $\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{p}$  a řešení soustavy rovnic

$$(\mathbf{N}^T \mid \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{p})$$

má  $\mathbf{p}$  jako partikulární řešení a prvky fundamentálního systému homogenní soustavy  $(\mathbf{N}^T \mid \mathbf{o})$  tvoří sloupce matice  $\mathbf{S}$ . Viz Příklad 6.4.5.

Obráceně: z parametrického zápisu afinity podprostoru vytvoříme jeho obecný rovnicový zápis metodami Tvzení 6.4.8 a Poznámky 6.4.9. Viz Příklady 6.4.10 a 6.4.11.

Jako příklad užitečnosti parametrického zápisu uvedeme charakterisace vzájemné polohy afinity podprostorů lineárního prostoru  $\mathbb{F}^n$ .

**7.3.3 Tvzení (Charakterisace disjunktních rovnoběžných afinity podprostorů)** *At  $\pi = \mathbf{p} + W$  a  $\pi' = \mathbf{p}' + W'$  jsou dva afinity podprostory prostoru  $\mathbb{F}^n$ . At  $\pi$  a  $\pi'$  zadány parametricky jako*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$$

*Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (a) Platí  $W' \subseteq W$ .
- (b) Platí  $\text{span}(\mathbf{s}'_1, \dots, \mathbf{s}'_{d'}) \subseteq \text{span}(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d)$ , kde  $\mathbf{S}' = (\mathbf{s}'_1, \dots, \mathbf{s}'_{d'})$  a  $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d)$ .
- (c) Simultánní soustava  $(\mathbf{S} \mid \mathbf{S}')$  má řešení.

Jestliže  $W' \subseteq W$ , potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Afinní podprostory  $\pi$  a  $\pi'$  jsou disjunktní.
- (2) Pro jakýkoli vektor  $\mathbf{x}$  v  $\pi$  a jakýkoli vektor  $\mathbf{x}'$  v  $\pi'$  soustava  $(\mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$  nemá řešení.
- (3) Existuje vektor  $\mathbf{x}$  v  $\pi$  a existuje vektor  $\mathbf{x}'$  v  $\pi'$  tak, že soustava  $(\mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$  nemá řešení.

DŮKAZ. Ekvivalence podmínek (a)–(c) plyne okamžitě z toho, že  $\text{im}(\mathbf{S}') = W' = \ker(\mathbf{N}'^T)$  a  $\text{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$ . Ekvivalence podmínek (1)–(3) plyne z Tvzení 7.2.4 a toho, že  $\text{im}(\mathbf{S}) = W$ . ■

**7.3.4 Tvzení (Charakterisace různoběžných afinních podprostorů)** At  $\pi = \mathbf{p} + W$  a  $\pi' = \mathbf{p}' + W'$  jsou dva afinní podprostory prostoru  $\mathbb{F}^n$ , které nejsou rovnoběžné. At  $\pi$  a  $\pi'$  zadány parametricky jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$$

Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Afinní podprostory  $\pi$  a  $\pi'$  jsou různoběžné.
- (2) Pro jakýkoli vektor  $\mathbf{x}$  v  $\pi$  a jakýkoli vektor  $\mathbf{x}'$  v  $\pi'$  soustava  $(\mathbf{S}', \mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$  má řešení.
- (3) Existuje vektor  $\mathbf{x}$  v  $\pi$  a existuje vektor  $\mathbf{x}'$  v  $\pi'$  tak, že soustava  $(\mathbf{S}', \mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$  má řešení.

DŮKAZ. Důkaz plyne z Tvzení 7.2.5 a toho, že  $\text{im}(\mathbf{S}') = W'$  a  $\text{im}(\mathbf{S}) = W$ . ■

**7.3.5 Tvzení (Charakterisace mimoběžných afinních podprostorů)** At  $\pi = \mathbf{p} + W$  a  $\pi' = \mathbf{p}' + W'$  jsou dva afinní podprostory prostoru  $\mathbb{F}^n$ , které nejsou rovnoběžné. At  $\pi$  a  $\pi'$  zadány parametricky jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$$

Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Afinní podprostory  $\pi$  a  $\pi'$  jsou mimoběžné.
- (2) Soustava  $(\mathbf{S}', \mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$  nemá řešení.

DŮKAZ. Důkaz plyne okamžitě z Tvzení 7.3.4. ■

**7.3.6 Příklad** Tvzení 7.3.3–7.3.5 použijeme k opětovnému zjištění vzájemné polohy dvojic přímk v  $\mathbb{R}^3$  z Příkladu 7.2.1.

- (1) Rozhodněte o vzájemné poloze přímek  $\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  a  $\pi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Obě simultánní soustavy

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

mají zjevně řešení; podle Definice 7.2.2 a části (c) Tvzení 7.3.3 jsou tedy  $\pi$  a  $\pi'$  rovnoběžné.

Jsou  $\pi$  a  $\pi'$  disjunktní? Podle Tvzení 7.3.3 máme zjistit, zda soustava rovnic

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$$

má řešení, kde jako pravou stranu soustavy jsme zvolili rozdíl

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bodů, kterými  $\pi$  a  $\pi'$  procházejí.

Soustava

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$$

evidentně řešení nemá; přímky  $\pi$  a  $\pi'$  jsou disjunktní.

- (2) Rozhodněte o vzájemné poloze přímek  $\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  a  $\pi' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Žádná ze simultánních soustav

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

řešení nemá; přímky  $\pi$  a  $\pi'$  nejsou rovnoběžné.

Protože soustava

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

má řešení, jsou přímky  $\pi$  a  $\pi'$  různoběžné. Jako pravou stranu soustavy jsme zvolili rozdíl

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bodů, kterými  $\pi$  a  $\pi'$  procházejí.

- (3) Rozhodněte o vzájemné poloze přímek  $\pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  a  $\pi' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Žádná ze simultánních soustav

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

řešení nemá; přímky  $\pi$  a  $\pi'$  nejsou rovnoběžné.

Protože soustava

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

nemá řešení, jsou přímky  $\pi$  a  $\pi'$  mimoběžné. Jako pravou stranu soustavy jsme zvolili rozdíl

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bodů, kterými  $\pi$  a  $\pi'$  procházejí,

Plnou sílu Tvzení 7.3.3–7.3.5 ovšem vychutnáme teprve v situacích, ve kterých nemáme intuici.

**7.3.7 Příklad** V  $\mathbb{R}^4$  rozhodněte o vzájemné poloze afinních podprostorů

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \pi' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Zjistíme nejprve, zda  $\pi$  a  $\pi'$  jsou rovnoběžné. Podle Definice 7.2.2 a části (c) Tvzení 7.3.3 k tomu potřebujeme, aby alespoň jedna ze simultánních soustav

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

měla řešení.

(1) Pomocí Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

Simultánní soustava

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

tedy řešení nemá.

(2) Pomocí Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_4 \\ R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - 3R_1 \end{array}$$

Ani simultánní soustava

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

tedy řešení nemá.

Ukázali jsme, že  $\pi$  a  $\pi'$  rovnoběžné nejsou.

Nyní využijeme Tvzení 7.3.4 a 7.3.5 k tomu, abychom zjistili, zda  $\pi$  a  $\pi'$  jsou různoběžné nebo mimoběžné. K tomu stačí zjistit, zda soustava

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

má řešení, kde pravou stranu soustavy jsme zvolili jako rozdíl

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bodů, kterými procházejí afinní podprostory  $\pi$  a  $\pi'$ .

O existenci řešení soustavy opět rozhodneme Gaussovou eliminací:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 3R_4 - R_3 \end{array}$$

Soustava

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

tedy řešení má. Podle Tvzení 7.3.4 jsou  $\pi$  a  $\pi'$  různoběžné.

Tvrzení 7.3.3–7.3.5 lze využít i ke klasifikaci vzájemných poloh bodů, přímek a rovin v prostorech  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$ .

### 7.3.8 Příklad (Klasifikace vzájemných poloh bodů, přímek a rovin v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ )

- (1) *Jakýkoli bod je rovnoběžný s jakýmkoli bodem, přímkou či rovinou (jak v  $\mathbb{R}^2$ , tak v  $\mathbb{R}^3$ ).*

Bod je afinní prostor tvaru  $\mathbf{p} + \{\mathbf{o}\}$ . Protože  $\{\mathbf{o}\} \subseteq W$  pro jakýkoli lineární podprostor  $\mathbb{R}^2$  nebo  $\mathbb{R}^3$ , tvrzení plyne z Definice 7.2.2.

- (2) *V  $\mathbb{R}^2$  jsou dvě přímky buď rovnoběžné nebo různoběžné.*

Podle Definice 7.2.2 stačí ukázat, že dvě přímky  $\mathbf{p} + \mathbf{s} \cdot t$  a  $\mathbf{p}' + \mathbf{s}' \cdot t'$ , které nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné, nemohou být mimoběžné. Podle Tvzení 7.3.5 by mimoběžnost takových přímek znamenala, že soustava  $(\mathbf{s}, \mathbf{s}' \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$  nemá řešení. To by nastalo pouze v případě, kdy

$$1 = \text{rank}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') < \text{rank}(\mathbf{s}, \mathbf{s}' \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}') = 2$$

V tom případě by ale přímky  $\mathbf{p} + \mathbf{s} \cdot t$  a  $\mathbf{p}' + \mathbf{s}' \cdot t'$  byly rovnoběžné. To je spor.

- (3) *V  $\mathbb{R}^3$  jsou dvě přímky buď rovnoběžné nebo různoběžné nebo mimoběžné. Dvojice mimoběžných přímek v  $\mathbb{R}^3$  má nulový stupeň rovnoběžnosti.*

Příklady rovnoběžných, různoběžných a mimoběžných dvojic přímek v  $\mathbb{R}^3$  jsou v Příkladu 7.3.6.

Pokud přímky  $\mathbf{p} + \mathbf{s} \cdot t$  a  $\mathbf{p}' + \mathbf{s}' \cdot t'$  v  $\mathbb{R}^3$  mají nenulový stupeň rovnoběžnosti, znamená to, že  $\text{span}(\mathbf{s}) = \text{span}(\mathbf{s}')$ . Pak jsou ovšem tyto přímky rovnoběžné.

- (4) *V  $\mathbb{R}^3$  jsou přímka a rovina buď rovnoběžné nebo různoběžné.*

Stačí ukázat, že přímka  $\mathbf{p} + \mathbf{s} \cdot t$  a rovina  $\mathbf{p}' + \mathbf{s}'_1 \cdot t'_1 + \mathbf{s}'_2 \cdot t'_2$ , které nejsou rovnoběžné, ani různoběžné, nemohou být mimoběžné. Podle Tvzení 7.3.5 by mimoběžnost znamenala, že soustava  $(\mathbf{s}, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2 \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$  nemá řešení. To by nastalo pouze v případech, kdy buď

$$1 = \text{rank}(\mathbf{s}, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2) < \text{rank}(\mathbf{s}, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2 \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

nebo

$$2 = \text{rank}(\mathbf{s}, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2) < \text{rank}(\mathbf{s}, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2 \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

První případ nastat nemůže, protože vektory  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  jsou lineárně nezávislé.

Ve druhém případě musí být  $\text{span}(\mathbf{s}) \subseteq \text{span}(\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2)$ . To je spor s tím, že přímka  $\mathbf{p} + \mathbf{s} \cdot t$  a rovina  $\mathbf{p}' + \mathbf{s}'_1 \cdot t'_1 + \mathbf{s}'_2 \cdot t'_2$  nejsou rovnoběžné.

- (5) *V  $\mathbb{R}^3$  jsou dvě roviny buď rovnoběžné nebo různoběžné.*

Podle Definice 7.2.2 stačí ukázat, že dvě roviny  $\mathbf{p} + \mathbf{s}_1 \cdot t_1 + \mathbf{s}_2 \cdot t_2$  a  $\mathbf{p}' + \mathbf{s}'_1 \cdot t'_1 + \mathbf{s}'_2 \cdot t'_2$ , které nejsou rovnoběžné, ani různoběžné, nemohou být mimoběžné. Podle Tvzení 7.3.5 by mimoběžnost takových rovin znamenala, že soustava  $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2 \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$  nemá řešení. To by nastalo pouze v případech, kdy buď

$$1 = \text{rank}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2) < \text{rank}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2 \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

nebo

$$2 = \text{rank}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2) < \text{rank}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2 \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

První případ nastat nemůže, protože (například) vektory  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  jsou lineárně nezávislé.

Ve druhém případě musí nastat rovnost  $\text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \text{span}(\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2)$ . To znamená, že roviny  $\mathbf{p} + \mathbf{s}_1 \cdot t_1 + \mathbf{s}_2 \cdot t_2$  a  $\mathbf{p}' + \mathbf{s}'_1 \cdot t'_1 + \mathbf{s}'_2 \cdot t'_2$  jsou rovnoběžné. To je spor.



**7.3.9 Příklad (Nenulový stupeň rovnoběžnosti mimoběžných prostorů)** Připomeňme z Definice 7.2.2, že dimenzi lineárního podprostoru  $W \cap W'$  říkáme stupeň rovnoběžnosti afinních podprostorů  $\mathbf{p} + W$  a  $\mathbf{p}' + W'$ . Protože platí  $W \cap W' \subseteq W$  a  $W \cap W' \subseteq W'$ , platí

$$\dim(W \cap W') \leq \min\{\dim(W), \dim(W')\}$$

Podle Definice 7.2.2 mají tedy dva *netriviální rovnoběžné* afinní podprostory maximální možný stupeň rovnoběžnosti. Například dvě rovnoběžné přímky v  $\mathbb{R}^2$  mají stupeň rovnoběžnosti 1. Ale i bod v  $\mathbb{R}^2$  je podle Definice 7.2.2 rovnoběžný s jakoukoli přímkou v  $\mathbb{R}^2$ . Stupeň rovnoběžnosti bodu a přímky v  $\mathbb{R}^2$  je roven 0.

I *různoběžné* afinní podprostory mohou mít *nenulový* stupeň rovnoběžnosti. Například (evidentně) různoběžné roviny

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

v  $\mathbb{R}^3$  mají stupeň rovnoběžnosti 1.

Jaký je stupeň rovnoběžnosti dvou *mimoběžných* afinních podprostorů? V Příkladu 7.3.8 jsme viděli, že dvě mimoběžné přímky v  $\mathbb{R}^3$  mají stupeň rovnoběžnosti 0. V  $\mathbb{R}^3$  již žádná další dvojice afinních podprostorů, než dvojice mimoběžných přímek, být mimoběžná nemůže.

Situace je podstatně pestřejší v případě  $\mathbb{F}^n$ , kde  $n \geq 4$ . Obecně dva mimoběžné afinní podprostory mohou mít nenulový stupeň rovnoběžnosti. Jak ukazuje následující příklad, taková situace může nastat například v  $\mathbb{R}^5$ .

Afinní podprostory

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

prostoru  $\mathbb{R}^5$  jsou (například podle Tvzení 7.3.5) mimoběžné. Protože platí

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cap \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

mají tyto mimoběžné afinní podprostory stupeň rovnoběžnosti 1.



**7.3.10 Poznámka** Pozor: v Tvzení 7.3.4 *neříkáme*, že *průnik* různoběžných afinních prostorů  $\pi$  a  $\pi'$ , zadaných parametricky jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$$

získáme *řešením* soustavy  $(\mathbf{S}', \mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$  nebo  $(\mathbf{S}', \mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ !

## 7.4 Průnik afinity podprostorů

Hledání průniku afinity podprostorů je jednoduchou aplikací řešení soustav lineárních rovnic z Kapitoly 6. Nebudeme formulovat obecná tvrzení, protože jejich formulace by byla poměrně těžkopádná. Uvedeme nyní raději tři početní příklady, které vystihují všechny možné situace.

### 7.4.1 Příklad (Hledání průniku různoběžných afinity podprostorů)

- (1) Nalezneme průnik dvou afinity podprostorů v  $\mathbb{R}^4$ , které jsou zadány parametrickými rovnicemi

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Úlohou je tedy nalézt reálná čísla  $a, b, c, d$  tak, aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Příslušná soustava rovnic v maticovém tvaru má tvar

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

která má řešení

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$$

Protože nás zajímají pouze koeficienty  $a, b$  (nebo pouze koeficienty  $c, d$ ), zjišťujeme, že  $a = b = t$ , kde  $t$  je libovolné reálné číslo. To znamená, že průnik má tvar

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Jiný tvar zápisu průniku bychom dostali, kdybychom se omezili na  $c$  a  $d$ . Platí totiž  $c = 3t$  a  $d = 2 - 3t$ , kde  $t$  je libovolné reálné číslo. Průnik lze tedy zapsat jako

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2 - 3t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

- (2) Nalezneme průnik dvou afinity podprostorů v  $\mathbb{R}^4$ , které jsou zadány obecnými rovnicemi

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Stačí vyřešit soustavu

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$



Gaussovou eliminací. Řešením je afinní podprostor tvaru

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- (3) Nalezněme průnik dvou afinních podprostorů v  $\mathbb{R}^4$ , které jsou zadány parametrickou rovnicí a obecnou rovnicí

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

Po dosazení parametrického zápisu do obecné maticové rovnice dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

To znamená, že máme vyřešit soustavu

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

Po vyřešení dostáváme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Platí tedy  $a = -2 + 3t$ ,  $b = t$ , kde  $t$  je libovolné reálné číslo. Průnik má zápis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2 + 3t) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

## Kapitola 8

# Determinant čtvercové matice

When you are solving a problem, don't worry. Now, after you have solved the problem, then that's the time to worry.

Richard Feynman, *BBC Horizon interview*

V této kapitole podrobně prozkoumáme pojem *determinantu*<sup>1</sup> pro čtvercové matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ .

Determinant zavedeme pomocí *permutací*. Permutacím konečné množiny je věnována podkapitola 8.1. Zavedeme zde i velmi užitečnou notaci *strunových diagramů* pro permutace.

Determinant definujeme v podkapitole 8.2, kde také dokážeme základní vlastnosti determinantu čtvercové matice a uvedeme nejružnější metody jak determinant počítat. Uvedeme i nejružnější *geometrické aplikace* determinantu matice. Rafinovanější metody výpočtu determinantu (pomocí *algebraických doplňků*) předvedeme v podkapitole 8.3.

Nakonec, v podkapitole 8.4, vysvětlíme, jak determinant matice využít k nalezení *inverse čtvercové matice* a k popisu řešení *čtvercových* soustav lineárních rovnic.

## 8.1 Permutace konečné množiny

**8.1.1 Definice** *Permutace* množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  je zobrazení  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , které je bijekce. Množinu všech permutací množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  označíme  $S_n$ .

**8.1.2 Příklad (Zápis permutace tabulkou)** Následující zobrazení  $\pi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\pi(1) = 2, \quad \pi(2) = 5, \quad \pi(3) = 1, \quad \pi(4) = 3, \quad \pi(5) = 4$$

je permutace množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  (jde totiž o zobrazení, které je bijekce). To znamená, že  $\pi \in S_5$ .

Místo těžkopádného výpisu permutace výčtem funkčních hodnot se často používá zápis permutace *tabulkou*. Například výše uvedená permutace  $\pi$  má tabulku

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Tuto tabulku čteme po sloupcích *odshora dolů*: každý sloupec je zápis funkční hodnoty. Například třetí sloupec tabulky pro  $\pi$  říká  $\pi(3) = 1$  (nebo:  $\pi : 3 \mapsto 1$ ).

Dalším příkladem permutace z  $S_5$  je *jednotková permutace* (také: *identická permutace*)  $id_5 : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  daná tabulkou

$$id_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>Pokud jste při čtení textu kapitoly 5 vynechali, nevadí to. Začneme s determinanty matic od začátku (ale trochu těžkopádněji, než v kapitole 5). Pojem determinantu čtvercové matice z této kapitoly ovšem nakonec samozřejmě bude totožný s výpočtem determinantu pro čtvercové matice z Příkladu 5.2.7.

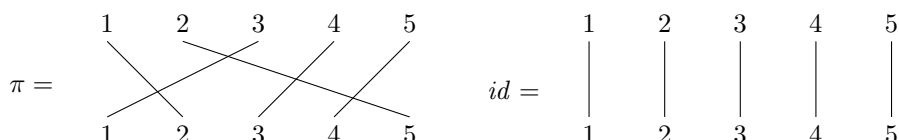
Je zřejmé, že zobrazení  $id_5$  je bijekce. V dalším nebudeme u jednotkových permutací psát dolní index, tj. budeme psát  $id$  místo  $id_n$ .

Pozor! Výše uvedené tabulky *nejdou* matice! Mělo by to být jasné i z toho, že pro zápis permutace jsme použili *hranaté* závorky. (Všechny matice v tomto textu mají závorky *kulaté*.)

V dalším textu budeme často používat pro zápis permutací *strunové diagramy*. Tento typ diagramů vysvětlíme na příkladu.



**8.1.3 Příklad (Strunové diagramy permutací)** Permutace  $\pi$  a  $id$  z Příkladu 8.1.2 můžeme pomocí strunových diagramů znázornit takto:



Strunový diagram permutace opět čteme *zeshora dolů*. Struna spojující body 2 a 5 v obrázku nalevo vede zeshora dolů a říká  $\pi(2) = 5$ .

Obecný strunový diagram pro permutaci  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  má v horním i dolním řádku vrcholy označené čísly  $1, \dots, n$ . Vrchol  $j$  z horního řádku je spojen strunou s vrcholem  $i$  na dolním řádku právě tehdy, když platí  $\pi(j) = i$ .

**8.1.4 Lemma** Množina  $S_n$  má přesně  $n!$  různých prvků.

**DŮKAZ.** Použijeme-li pro zápis permutace  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  tabulku (viz Příklad 8.1.2), ptáme se, kolik různých tabulek můžeme vytvořit. Protože první řádek tabulky permutace je neměnný (vždy v něm jsou čísla od 1 do  $n$  seřazená vzestupně), ptáme se, kolika různými způsoby lze vytvořit druhý řádek. První pozici takového řádku můžeme obsadit  $n$  různými hodnotami, druhou pozici už jen  $(n-1)$  různými hodnotami, třetí pozici už jen  $(n-2)$  různými hodnotami, atd. Druhý řádek tabulky pro permutaci můžeme tedy vytvořit

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

způsoby. ■

**8.1.5 Poznámka** Předchozí výsledek ukazuje, že s rostoucím  $n$  se počet prvků množiny  $S_n$  rychle zvětšuje. Například  $10! = 3\,628\,000$ , ale  $100!$  je řádově  $9 \cdot 10^{157}$  a  $1\,000!$  je řádově  $4 \cdot 10^{2\,567}$ .

**8.1.6 Tvzení (Grupa permutací)** Množina  $S_n$  spolu s operací skládání funkcí tvoří grupu. To znamená, že platí:

- (1) Složení permutací je opět permutace.
- (2) Skládání permutací je asociativní: pro libovolné permutace  $\pi, \rho, \sigma$  z  $S_n$  platí  $\sigma \cdot (\rho \cdot \pi) = (\sigma \cdot \rho) \cdot \pi$ .
- (3) Jednotková permutace  $id$  z  $S_n$  je vůči skládání neutrální: pro každou permutaci  $\pi$  z  $S_n$  platí  $id \cdot \pi = \pi = \pi \cdot id$ .
- (4) Každá permutace  $\pi$  z  $S_n$  má vůči skládání jednoznačně určenou inverzi: pro každou permutaci  $\pi$  z  $S_n$  existuje jediná permutace  $\sigma$  z  $S_n$  taková, že  $\sigma \cdot \pi = id = \pi \cdot \sigma$ .

**DŮKAZ.** Důkaz plyne bezprostředně z toho, že permutace jsou bijekce:

- (1) Složení bijekcí je bijekce.
- (2) Bijekce se skládají stejně jako funkce. A skládání funkcí je asociativní.
- (3) Permutace  $id$  je identická funkce. A ta je neutrální vůči skládání funkcí.

- (4) Protože  $\pi$  je bijekce, existuje k ní jednoznačně určená inverzní funkce  $\pi^{-1}$  definovaná takto:  $\pi^{-1}(i) = j$  právě tehdy, když platí  $\pi(j) = i$ . Potom platí  $\pi^{-1} \cdot \pi = id = \pi \cdot \pi^{-1}$ .

■

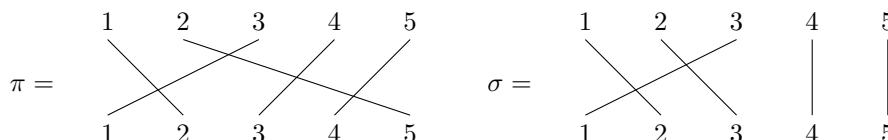
Pojem grupy je v matematice velmi důležitý. Později (viz Poznámku 17.2.3) narazíme například na *grupu isometrií*. Studium obecných grup (a jiných podobných struktur) se zabývá disciplína zvaná *universální algebra*, viz například knihy:

☞ Paul M. Cohn, *Universal algebra*, Springer-Verlag, 1981

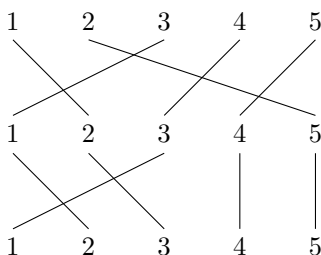
☞ Wolfgang Wechler, *Universal algebra for Computer scientists*, Springer-Verlag, 2. vydání, 2013



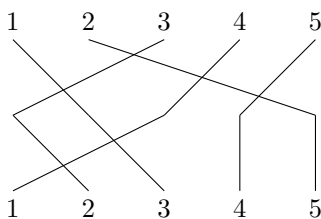
**8.1.7 Příklad (Skládání permutací a inverse permutací strunovými digramy)** Skládání permutací a inverse permutací se zvlášť snadno počítají pomocí strunových diagramů. Například pro permutace



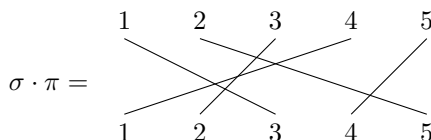
se složení  $\sigma \cdot \pi$  spočte následovně. Nejprve napíšeme strunový diagram  $\pi$  nad  $\sigma$ . To proto, že složení funkcí  $\sigma \cdot \pi$  znamená: *nejdříve* proveďte  $\pi$ , *potom* proveďte  $\sigma$ . A strunové diagramy se čtou odshora dolů. Dostaneme



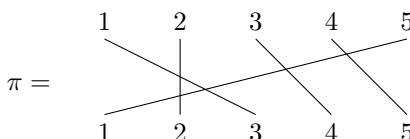
Umažeme prostřední řádek čísel 1, 2, 3, 4, 5:



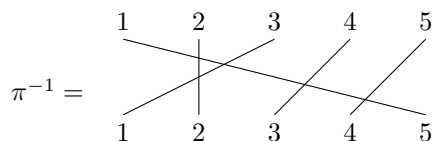
a obrázkem „škubneme“, abychom struny narovnali:



Spočítat inverzi permutace pomocí strunového diagramu je také snadné. Pro permutaci



stačí otočit strunový diagram vzhůru nohama:



Posledním pojmem, který budeme o permutacích potřebovat, je znaménko permutace.

**8.1.8 Definice** Znaménko permutace  $\pi$  je číslo  $\text{sign}(\pi)$  definované následovně:<sup>2</sup>

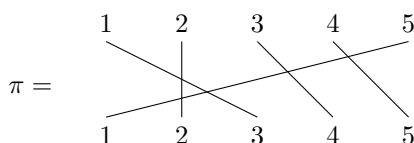
$$\text{sign}(\pi) = \begin{cases} +1, & \text{když počet situací, kdy } i < j \text{ a současně } \pi(i) > \pi(j), \text{ je sudé číslo} \\ -1, & \text{když počet situací, kdy } i < j \text{ a současně } \pi(i) > \pi(j), \text{ je liché číslo} \end{cases}$$

Permutaci se znaménkem  $+1$  říkáme *sudá*, permutaci se znaménkem  $-1$  říkáme *lichá*.



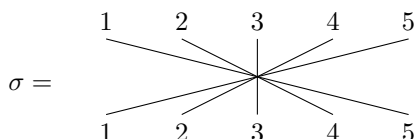
**8.1.9 Příklad (Výpočet znaménka permutace pomocí strunových diagramů)** Situace, kdy pro permutaci  $\pi$  platí  $j_1 < j_2$  a současně  $\pi(j_1) > \pi(j_2)$ , se ve strunovém diagramu pro  $\pi$  projeví jako jedno *překřížení strun*. To znamená, že k určení znaménka permutace stačí zjistit počet překřížení strun (jednomu překřížení strun se také říká *inverse v permutaci*). Je-li počet *různých* překřížení sudý, je  $\text{sign}(\pi) = +1$ , je-li počet *různých* překřížení lichý, je  $\text{sign}(\pi) = -1$ .

Například pro permutaci

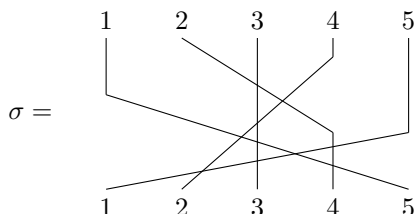


je  $\text{sign}(\pi) = -1$ , protože došlo k pěti různým překřížení strun. Permutace  $\pi$  je lichá.

Pozor: máme-li zjistit znaménko permutace



je lepší využít toho, že struny smíme „ohýbat“ a „natahovat“. Proto strunový diagram pro  $\sigma$  namalujeme tak, abychom jednotlivá překřížení jasně viděli:



Počet různých překřížení je 10, proto  $\text{sign}(\sigma) = +1$ . Permutace  $\sigma$  je sudá.

Nakonec uvedme výsledek, který nám umožní spočítat znaménka složených permutací a inverzí k permutacím. Tyto znalosti budeme potřebovat v podkapitole 8.2 pro praktický výpočet determinantů.

<sup>2</sup>Upozorňujeme, že přirozené číslo 0 je *sudé*.

**8.1.10 Tvzení Platí:**

- (1) Ať  $j_1$  a  $j_2$  jsou dvě čísla z množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ , a ať  $j_1 < j_2$ . Potom permutace  $\pi_0$ , kde

$$\pi_0(j_1) = j_2, \quad \pi_0(j_2) = j_1, \quad \pi_0(j) = j \text{ pro všechna ostatní } j$$

má znaménko  $-1$ .

- (2) Ať  $\pi$ ,  $\rho$  a  $\sigma$  jsou libovolné permutace z  $S_n$ . Potom platí  $\text{sign}(\rho \cdot \pi) = \text{sign}(\rho) \cdot \text{sign}(\pi)$  a  $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$ .

DŮKAZ.

- (1) Mezi čísly  $j_1$  a  $j_2$  je  $k$  dalších čísel  $k \geq 0$ . Struna vedoucí z  $j_1$  musí překřížit všechny struny vedoucí ze všech  $k$  čísel mezi  $j_1$  a  $j_2$ . Stejně tak struna vedoucí z  $j_2$  musí překřížit všechny struny vedoucí ze všech  $k$  čísel mezi  $j_1$  a  $j_2$ . Nakonec se musí překřížit struna vedoucí z  $j_1$  se strunou vedoucí z  $j_2$ . Proto je celkový počet různých překřížení ve strunovém diagramu pro  $\pi_0$  roven číslu  $k + k + 1 = 2k + 1$ , a to je liché číslo. Proto  $\text{sign}(\pi_0) = -1$ .

- (2) Rovnost  $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$  je triviální, protože strunový diagram pro  $\sigma^{-1}$  vznikne převrácením strunového diagramu pro  $\sigma$  vzhůru nohama. Takové převrácení ale nemění počet různých překřížení strun.

Rovnost  $\text{sign}(\rho \cdot \pi) = \text{sign}(\rho) \cdot \text{sign}(\pi)$  opět plyne z toho, jakým způsobem vypadá strunový diagram pro  $\rho \cdot \pi$ . Namalujeme totiž diagram pro  $\pi$  nad diagram pro  $\rho$ , a pak struny „natáhneme“ jako v Příkladu 8.1.7. Před natažením je počet překřížení strun v diagramu pro  $\rho \cdot \pi$  roven součtu překřížení strun v diagramech pro  $\pi$  a  $\rho$ . Každá struna, která se při natahování „narovná“, zmenší počet překřížení o sudé číslo. Lichost nebo sudost počtu různých překřížení pro permutaci  $\rho \cdot \pi$  můžeme tedy zjišťovat v ještě „nenataženém“ diagramu. Protože součet dvou přirozených čísel je lichý pouze v tom případě, kdy jedno z čísel je liché a druhé sudé, plyne z toho rovnost  $\text{sign}(\rho \cdot \pi) = \text{sign}(\rho) \cdot \text{sign}(\pi)$ . ■

## 8.2 Determinant čtvercové matice

V této podkapitole vybudujeme teorii determinantu od počátku. Abychom nemuseli neustále opakovat některé předpoklady, zavedeme následující konvence.

V této podkapitole budeme vždy předpokládat následující úmluvy:

- (1) Pracujeme nad *pevným* tělesem  $\mathbb{F}$ .
- (2) Znaménko permutace  $\pi$  (viz Definici 8.1.8) budeme chápat jako *prvek tělesa*  $\mathbb{F}$ . V každém tělese  $\mathbb{F}$  totiž čísla 1 a  $-1$  jsou.  
To znamená, že například nad tělesem  $\mathbb{Z}_2$  z Příkladu 1.2.4 platí  $\text{sign}(\pi) = 1$  pro každou permutaci  $\pi$ . V tělese  $\mathbb{Z}_2$  totiž platí rovnost  $-1 = 1$ .
- (3) Všechny matice v této podkapitole jsou čtvercové, tj. rozměrů  $n \times n$ , kde  $n \geq 1$ . Pro matici  $\mathbf{A}$  budeme používat značku  $a_{i,j}$  pro položku matice  $\mathbf{A}$  v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci. Budeme též používat sloupcový zápis matice  $\mathbf{A}$ , tj. budeme psát  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ , kde  $\mathbf{a}_1$  je první sloupec matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{a}_2$  je druhý sloupec matice  $\mathbf{A}$ , atd.  
Analogickou konvenci budeme používat pro matice  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , atd.

**8.2.1 Definice** Ať  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice rozměrů  $n \times n$  s položkami  $a_{ij}$ . Skaláru

$$\sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \quad (8.1)$$

z tělesa  $\mathbb{F}$  říkáme *determinant* matice  $\mathbf{A}$  a značíme jej  $\det(\mathbf{A})$ .

## 8.2.2 Poznámka

- (1) Definice determinantu čtvercové matice pomocí vzorce (8.1) je elementární (to jest, nevyžaduje vybudovat aparát *vnější mocniny* z Kapitoly 5). Má však jednu obrovskou nevýhodu: *není vůbec zřejmé, co determinant matice znamená*. Tento handicap se budeme snažit v dalším textu napravit.
- (2) Pro toho, kdo četl kapitolu 5. V Příkladu 5.2.7 jsme ukázali, že determinant matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ , která má položku  $a_{ij}$  v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci, lze spočítat přesně pomocí vzorce (8.1). Pokud jste četli Kapitolu 5, řada výsledků z této kapitoly vás nepřekvapí. Přesto doporučujeme číst dále a podívat se, jak se vlastnosti determinantů čtvercových matic na základě vzorce (8.1) dají odvodit.
- (3) Je-li matice  $\mathbf{A}$  zadána tabulkou, budeme často místo  $\det(\mathbf{A})$  psát

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- (4) Často také budeme používat pro  $\det(\mathbf{A})$  zápis

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

kde  $\mathbf{a}_j$  je  $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A}$ .

Pro bližší pochopení součtu (8.1) se může hodit následující intuitivní „šachová“ představa. Připomeňme, že podle pravidel šachu se dvě věže ohrožují, pokud na šachovnici stojí ve stejném řádku nebo ve stejném sloupci.

Ať čtvercová matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  má položky  $a_{ij}$ . Každou permutaci  $\pi$  z množiny  $S_n$  si můžeme představit jako *rozestavení  $n$  věží na polích v matici  $\mathbf{A}$  tak, aby se věže navzájem neohrožovaly*.

Přesněji: pro danou permutaci  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  rozestavíme věže následujícím způsobem. Do sloupce  $j$  dáme věž na řádek  $\pi(j)$ . Protože  $\pi$  je permutace, platí dvě podmínky:

- (1) Na každém řádku  $i$  je alespoň jedna věž.

Skutečně, protože  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  je surjekce, existuje sloupec  $j$  tak, že  $\pi(j) = i$ .

- (2) Ve dvou různých sloupcích nemohou být věže na stejném řádku.

Ať  $j_1$  a  $j_2$  jsou indexy různých sloupců, ve kterých jsme postavili věže na stejný řádek, tj. ať platí  $\pi(j_1) = \pi(j_2)$ . Nyní využijeme toho, že  $\pi$  je injekce. Z podmínky  $\pi(j_1) = \pi(j_2)$  tedy plyne  $j_1 = j_2$ . A to je spor.

Předchozí dvě podmínky opravdu říkají, že pokud  $n$  věží rozestavíme na matici  $\mathbf{A}$  podle permutace  $\pi$ , pak se tyto věže vzájemně neohrožují. Věží je totiž přesně  $n$  a v každém sloupci a v každém řádku je právě jedna věž.

Máme-li jedno takové rozestavení věží na matici  $\mathbf{A}$  (tj., máme-li jednu permutaci  $\pi$ ), známe jeden sčítanec skaláru  $\det(\mathbf{A})$ . Stačí spočítat součin

$$a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}$$

těch položek, na kterých stojí jednotlivé věže, a výsledek opatřit znaménkem permutace  $\pi$ .

Všechny skaláry vzniklé tímto způsobem nakonec sečteme a dostaneme tak hodnotu determinantu matice  $\mathbf{A}$ .

V následujících dvou příkladech předvedeme výpočty determinantů matic  $2 \times 2$  a  $3 \times 3$  z definice.

8.2.3 Příklad (Výpočet determinantu matice  $2 \times 2$  z definice) Spočteme determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

matice typu  $2 \times 2$  z definice. Uvidíme, že dostaneme známý vzorec.

Na množině  $\{1, 2\}$  existují pouze 2 permutace:

$$\pi_0 = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ 1 & 2 \end{array} \quad \pi_1 = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \diagdown & \diagup \\ 2 & 1 \end{array}$$

Permutace  $\pi_0$  má znaménko  $+1$ , permutace  $\pi_1$  má znaménko  $-1$ . platí tedy vzorec

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \text{sign}(\pi_0) \cdot a_{\pi_0(1),1} \cdot a_{\pi_0(2),2} + \text{sign}(\pi_1) \cdot a_{\pi_1(1),1} \cdot a_{\pi_1(2),2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

**8.2.4 Příklad (Výpočet determinantu matice  $3 \times 3$  z definice: Sarrusovo pravidlo)** Spočteme determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

matice typu  $3 \times 3$  z definice. Uvidíme, že dostaneme vzorec, často zmiňovaný jako *Sarrusovo pravidlo* pro výpočet determinantu.

Na množině  $\{1, 2, 3\}$  existuje 6 následujících permutací:

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ | & | & | \\ 1 & 2 & 3 \end{array} & \pi_2 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \diagdown & \diagup & \diagdown \\ 2 & 3 & 1 \end{array} & \pi_4 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \diagup & \diagdown & \diagup \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \\ \pi_1 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \diagup & \diagdown & | \\ 2 & 1 & 3 \end{array} & \pi_3 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ | & \diagdown & \diagup \\ 1 & 3 & 2 \end{array} & \pi_5 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \diagdown & | & \diagup \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \end{array}$$

Permutace se sudými indexy mají znaménko  $+1$ , permutace s lichými indexy mají znaménko  $-1$ .

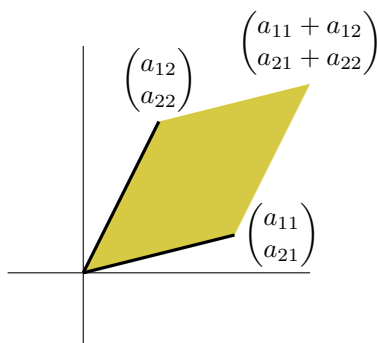
Platí tedy vzorec

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

**8.2.5 Příklad (Geometrický význam determinantu matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ )** V tomto příkladu budeme pracovat v  $\mathbb{R}^2$ . Libovolné dva vektory

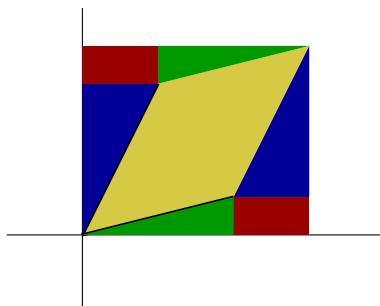
$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

určují v rovině následující rovnoběžník





Geometrickými prostředky je snadné spočítat *obsah* tohoto rovnoběžníka. Podívejte se na obrázek



Obsahy stejně vybarvených trojúhelníků a obdélníků jsou stejné.

- (1) Plocha celého strakatého obdélníka je rovna  $(a_{11} + a_{12}) \cdot (a_{21} + a_{22}) = a_{11}a_{21} + a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + a_{12}a_{22}$ .
- (2) Součet ploch modrých trojúhelníků je roven  $a_{22}a_{12}$ .
- (3) Součet ploch zelených trojúhelníků je roven  $a_{21}a_{11}$ .
- (4) Každý z červených obdélníků má plochu  $a_{12}a_{21}$ .

To znamená, že plocha rovnoběžníka musí být rovna

$$a_{11}a_{21} + a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + a_{12}a_{22} - a_{22}a_{12} - a_{21}a_{11} - 2a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

To je přesně vzorec pro výpočet determinantu matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  se sloupci  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  z Příkladu 8.2.3 (nebo z Příkladu 5.2.6)!

Věc má ovšem dva háčky. Dopustili jsme se dvou zjednodušení:

- (1) Náš čtyřúhelník byl namalován velmi sugestivně. Předpokládali jsme, že všechny položky obou vektorů  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  jsou kladné. Proto se čtyřúhelník objevil namalován v prvním kvadrantu. Obecně se čtyřúhelník daný obecnými vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  může objevit kdekoli v rovině (samozřejmě: jedním z vrcholů čtyřúhelníku musí být počátek souřadnicového systému). Plochy jednotlivých trojúhelníků a čtverců bychom pak museli počítat jinak: řadu součinů bychom museli opatřit absolutními hodnotami.
- (2) I když je čtyřúhelník namalován v prvním kvadrantu, může vzorec  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$  dát záporné číslo. O tom, že je to možné, se můžeme přesvědčit volbou

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Čtyřúhelník určený vektory  $\mathbf{b}_1$  a  $\mathbf{b}_2$  má plochu 3. Vzorec  $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$  ovšem dává číslo  $-3$ .

To lze vysvětlit následujícím způsobem: vzorec  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$  dává kladnou hodnotu právě tehdy, když  $a_{11}a_{22} > a_{21}a_{12}$ . A to nastane právě tehdy, když při procházce rovinou od vektoru  $\mathbf{e}_1$  proti směru hodinových ručiček narazíme *nejprve* na vektor  $\mathbf{a}_1$  a až *poté* na vektor  $\mathbf{a}_2$ . To je druhá sugesce, které jsme se v našem obrázku dopustili.

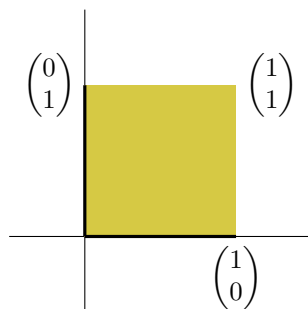
Způsob, jakým se lze problémům se znaménky vyhnout, je tedy chápat vzorec

$$P(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

jako *orientovanou* velikost plochy čtyřúhelníka určeného vektory  $\mathbf{a}_1$  a  $\mathbf{a}_2$ . Orientovaná velikost plochy pak splňuje následující podmínky:

- (1) Platí  $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ . Touto rovností zavádíme jednotku plochy a orientaci: při pohybu kolem počátku jsme zvolili směr proti směru hodinových ručiček — první je vektor  $\mathbf{e}_1$ , vektor  $\mathbf{e}_2$  je druhý. Rovnost je zřejmá

z obrázku:



- (2) Platí  $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -P(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ . Tato rovnost vystihuje orientaci: změnou pořadí vektorů  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  změníme znaménko velikosti plochy.
- (3) Výpočet hodnoty  $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  je lineární v každé proměnné, tj. pro libovolná reálná čísla  $a_1, a_2, b_1, b_2$  platí rovnosti a libovolné vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}$  platí rovnosti

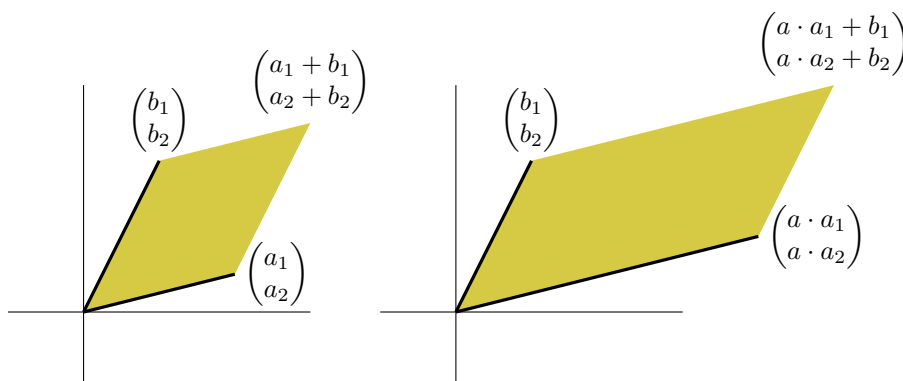
$$P(a_1 \cdot \mathbf{a}_1 + a_2 \cdot \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = a_1 \cdot P(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + a_2 \cdot P(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) \quad \text{a} \quad P(\mathbf{a}, b_1 \cdot \mathbf{b}_1 + b_2 \cdot \mathbf{b}_2) = b_1 \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + b_2 \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2)$$

Dokážeme první rovnost, druhá se dokáže analogicky.

- (a) Pro každé reálné  $a$  platí  $P(a \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) = a \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

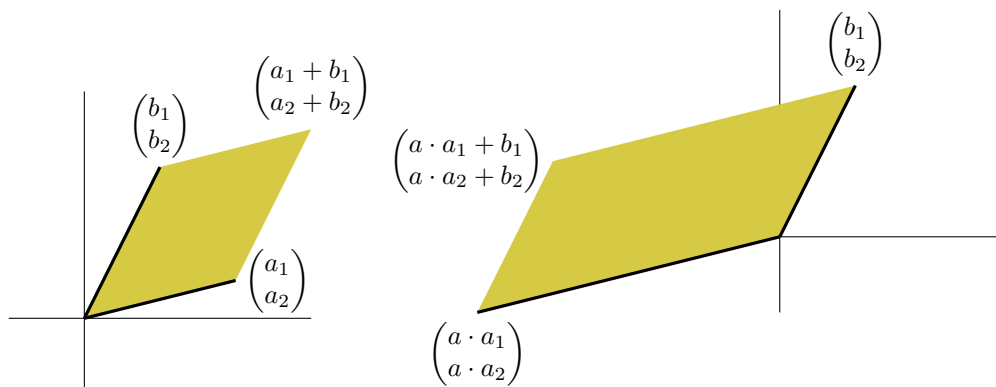
To je zřejmé pro  $a = 0$ . Pak totiž platí  $P(0 \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = 0 = 0 \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Pro  $a > 0$  platí  $P(a \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) = a \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Podívejte se na obrázek pro situaci  $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0$ :



Protože mají oba čtyřúhelníky stejnou výšku příslušnou vektorům  $\mathbf{a}$  a  $a \cdot \mathbf{a}$ , je plocha čtyřúhelníku napravo rovna  $a$ -násobku plochy čtyřúhelníku nalevo.

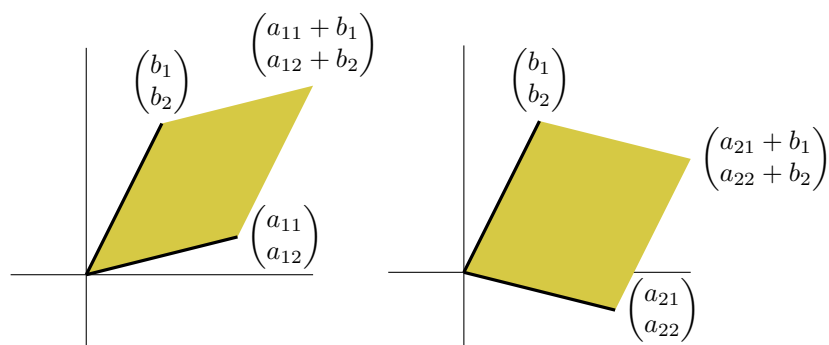
Pro  $a < 0$  platí  $P(a \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) = a \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Podívejte se na obrázek pro situaci  $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0$ :



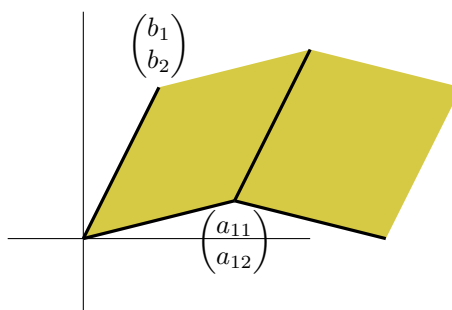
Protože mají oba čtyřúhelníky stejnou výšku příslušnou vektorům  $\mathbf{a}$  a  $a \cdot \mathbf{a}$ , je plocha čtyřúhelníku napravo rovna  $(-a)$ -násobku plochy čtyřúhelníku nalevo.

Analogicky lze postupovat, pokud platí  $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < 0$ .

(b) Ukážeme, že  $P(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$ . Plochy  $P(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})$  a  $P(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$  si znázorníme takto:

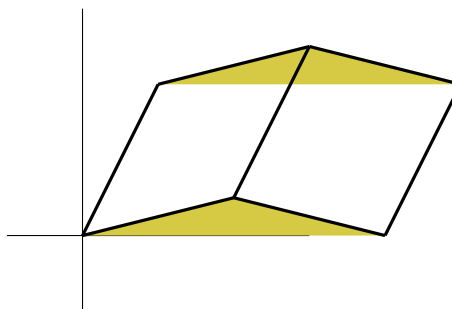


Rovnoběžným posunutím nezměníme plochu. Proto obrázek napravo můžeme posunout ve směru vektoru  $\mathbf{a}_1$  a oba čtyřúhelníky můžeme namalovat do jednoho obrázku:

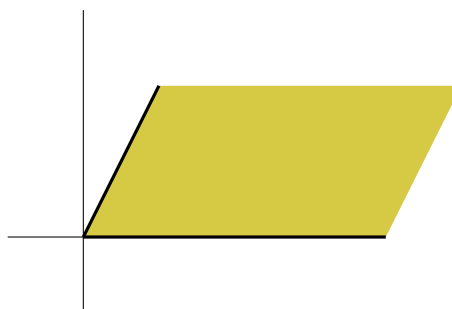


Orientovaná plocha tohoto obrazce je rovna  $P(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$ .

Protože oba trojúhelníky v následujícím obrázku



mají stejnou plochu (jsou to totiž shodné trojúhelníky), vidíme, že orientovaná plocha  $P(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$  je rovna ploše čtyřúhelníka



což je  $P(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b})$ .

Determinant čtvercové matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  zobecňuje tři podmínky pro orientovanou plochu z Příkladu 8.2.5 ve dvou aspektech:

- (1) Namísto orientovaných ploch čtyřúhelníků determinant počítá orientované objemy  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  jakýchkoli  $n$ -dimensionálních rovnoběžnostěnů určených sloupci  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  matice  $\mathbf{A}$ .
- (2) Těleso reálných čísel  $\mathbb{R}$  je nahrazeno libovolným tělesem  $\mathbb{F}$ .

Tři vlastnosti orientované plochy z Příkladu 8.2.5 v této větší obecnosti mají nyní tvar:

- (1) Platí  $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ .
- (2) Platí  $P(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = -P(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ , pokud se seznamy  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  a  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  liší pouze prohozením dvou položek.
- (3) Pro každé pevné  $j_0$  z  $\{1, 2, \dots, n\}$  a pro libovolný seznam  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$   $(n-1)$ -mnoha vektorů z  $\mathbb{F}^n$  je funkce  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, -, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$  lineární.

V Příkladu 8.2.17 ukážeme, že naše definice determinantu tyto tři vlastnosti splňuje.

Počítat determinant jakékoli matice přímo z Definice 8.2.1 je jistě možné. Pro velká  $n$  to ovšem znamená projít množinu  $S_n$  všech permutací  $n$ -prvkové množiny a u každé z nich zjistit znaménko. Protože množina  $S_n$  má  $n!$  prvků, stává se způsob výpočtu determinantu matice z definice velmi rychle neefektivním. Tvzení 8.2.9 až 8.2.16, která následují, nám dovolí provádět výpočet determinantu Gaussovou eliminační metodou. Gaussova eliminace se zdá být zvláště vhodnou metodou, protože platí následující.

**8.2.6 Tvzení** *Ať  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice, která má nuly pod hlavní diagonálou. Potom  $\det(\mathbf{A})$  je roven součinu prvků na hlavní diagonále.*

**DŮKAZ.** Ať  $\pi$  je jakákoli permutace různá od permutace  $id$ . Potom musí existovat  $j_0$  tak, že  $\pi(j_0) > j_0$  (to plyne z toho, že  $\pi$  je bijekce a množina  $\{1, \dots, n\}$  je konečná).

V případě, že  $\pi(j_0) > j_0$ , je podle předpokladu prvek  $a_{\pi(j_0), j_0}$  roven nule, protože leží pod hlavní diagonálou. To znamená, že v součtu

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}$$

je jediným nenulovým sčítancem výraz  $\text{sign}(id) \cdot a_{id(1),1} \cdot \dots \cdot a_{id(n),n} = a_{1,1} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$ . Ukázali jsme, že  $\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$ . ■

**8.2.7 Poznámka (Determinant matice v horním blokovém tvaru)** Mírným zobecněním úvah z Tvzení 8.2.6 se dá dokázat, že pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  v blokovém tvaru

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{O}_{k,n-k} & \mathbf{N} \end{array} \right)$$

kde  $\mathbf{M} : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^k$ ,  $\mathbf{N} : \mathbb{F}^{n-k} \rightarrow \mathbb{F}^{n-k}$  a  $\mathbf{O}_{k,n-k}$  je nulová matice, platí rovnost  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{M}) \cdot \det(\mathbf{N})$ .

Stačí si totiž uvědomit, že sčítance  $\text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}$  jsou nulové, jakmile  $\pi(j) > k$  pro nějaké  $j = 1, \dots, k$ . To znamená, že

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \\ &= \left( \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(k),k} \right) \cdot \left( \sum_{\rho \in S_{n-k}} \text{sign}(\rho) \cdot a_{\rho(1)+k,k+1} \cdot \dots \cdot a_{\rho(n-k)+k,n} \right) \\ &= \det(\mathbf{M}) \cdot \det(\mathbf{N}) \end{aligned}$$

protože každou permutaci  $\pi \in S_n$  můžeme jednoznačně nahradit dvojicí  $(\sigma, \rho) \in S_k \times S_{n-k}$ .

Dále dokážeme, že hodnota determinantu matice se transponováním matice nezmění.

**8.2.8 Tvzení** Pro každou čtvercovou matici  $\mathbf{A}$  platí  $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$ .

DŮKAZ. Označme jako  $b_{i,j}$  položku v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{A}^T$ . Platí tedy  $b_{i,j} = a_{j,i}$ . Podle definice determinantu je

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^T) &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot b_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot b_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{1,\pi(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi^{-1}(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi^{-1}(n),n} \\ &= \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \text{sign}(\pi^{-1}) \cdot a_{\pi^{-1}(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi^{-1}(n),n} \\ &= \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že každou permutaci z  $S_n$  si lze představit ve tvaru  $\pi^{-1}$  a že podle Tvzení 8.1.10 platí rovnost  $\text{sign}(\pi^{-1}) = \text{sign}(\pi)$ . ■

Řadu dalších tvrzení o výpočtu determinantů zformulujeme pro sloupcový zápis matic. Tvzení 8.2.8 ovšem říká, že to nevadí: jakékoli tvrzení o výpočtu determinantech zformulované pro sloupce můžeme přeformulovat pro řádky.

**8.2.9 Tvzení** At  $\pi_0$  je permutace z  $S_n$ . Potom platí

$$\text{sign}(\pi_0) \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_{\pi_0(1)}, \mathbf{a}_{\pi_0(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\pi_0(n)})$$

To jest, jestliže matice vznikla z jiné matice nějakou permutací sloupců, liší se determinanty obou matic pouze znaménkem té permutace.

DŮKAZ. Podle Definice 8.2.1 platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}_{\pi_0(1)}, \mathbf{a}_{\pi_0(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\pi_0(n)}) &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),\pi_0(1)} \cdot a_{\pi(2),\pi_0(2)} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),\pi_0(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(1)),1} \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(2)),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(n)),n} \\ &= \text{sign}(\pi_0) \cdot \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot \text{sign}(\pi_0^{-1}) \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(1)),1} \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(2)),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(n)),n} \\ &= \text{sign}(\pi_0) \cdot \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi \cdot \pi_0^{-1}) \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(1)),1} \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(2)),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(n)),n} \end{aligned}$$

Zobrazení  $\pi \mapsto \pi \cdot \pi_0^{-1}$  je bijekce z množiny  $S_n$  do množiny  $S_n$ :

(1) Jestliže  $\pi \cdot \pi_0^{-1} = \pi' \cdot \pi_0^{-1}$ , potom  $\pi = \pi \cdot \pi_0^{-1} \cdot \pi_0 = \pi' \cdot \pi_0^{-1} \cdot \pi_0 = \pi'$ .

To znamená, že zobrazení  $\pi \mapsto \pi \cdot \pi_0^{-1}$  je prosté (injektivní).

(2) Jestliže  $\sigma$  je jakákoli permutace z  $S_n$ , potom pro permutaci  $\pi = \sigma \cdot \pi_0$  platí  $\pi \cdot \pi_0^{-1} = \sigma \cdot \pi_0 \cdot \pi_0^{-1} = \sigma$ .

To znamená, že zobrazení  $\pi \mapsto \pi \cdot \pi_0^{-1}$  je na (surjektivní).

Můžeme tedy upravovat dále:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\pi_0) \cdot \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi \cdot \pi_0^{-1}) \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(1)),1} \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(2)),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(\pi_0^{-1}(n)),n} &= \\ = \operatorname{sign}(\pi_0) \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n} &= \\ = \operatorname{sign}(\pi_0) \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

A to jsme chtěli dokázat. ■

**8.2.10 Důsledek** Jestliže čtvercová matice  $\mathbf{B}$  vznikla z čtvercové matice  $\mathbf{A}$  prohozením dvou různých sloupců, potom  $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$ .

DŮKAZ. Prohození sloupců  $j_1$  a  $j_2$ , kde  $j_1 < j_2$  je realizováno permutací  $\pi_0$ , kde

$$\pi_0(j_1) = j_2, \quad \pi_0(j_2) = j_1, \quad \pi_0(j) = j \text{ pro všechna ostatní } j$$

Tato permutace má podle Tvzení 8.1.10 ve svém strunovém diagramu lichý počet překřížení, proto  $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$  podle Tvzení 8.2.9. ■

**8.2.11 Tvzení** Jsou-li dva sloupce v matici  $\mathbf{A}$  stejné, pak  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

DŮKAZ. Označme jako  $j_1$  a  $j_2$  stejné sloupce matice  $\mathbf{A}$ , ať platí  $j_1 < j_2$ . Budeme muset rozlišit dva případy:

- (1) V tělese  $\mathbb{F}$  platí  $1 + 1 \neq 0$ .

Prohodíme-li v matici  $\mathbf{A}$ , sloupce  $j_1$  a  $j_2$ , matice  $\mathbf{A}$  se nezmění. Podle Důsledku 8.2.10 platí  $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$ . To znamená, že platí  $(1 + 1) \cdot \det(\mathbf{A}) = 0$ . Protože  $1 + 1 \neq 0$ , musí platit  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

- (2) V tělese  $\mathbb{F}$  platí  $1 + 1 = 0$ .<sup>3</sup>

To znamená, že v  $\mathbb{F}$  platí  $1 = -1$  a tudíž v definici determinantu nemusíme psát znaménko permutace. Označme jako

$$P = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j_1) < \sigma(j_2)\}$$

Potom

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in P} a_{\sigma(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(j_1),j_1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(j_2),j_2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in P} a_{\sigma(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(j_2),j_1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(j_1),j_2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n} \\ &= (1 + 1) \cdot \sum_{\sigma \in P} a_{\sigma(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(j_1),j_1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(j_2),j_2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

**8.2.12 Tvzení** At  $a$  je jakýkoli skalár z tělesa  $\mathbb{F}$ , ať  $j_0$  je jakýkoli sloupcový index. Potom platí

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, a \cdot \mathbf{a}_{j_0}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) = a \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{a}_{j_0}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

To jest, jestliže matice  $\mathbf{B}$  vznikla z matice  $\mathbf{A}$  vynásobením  $j_0$ -tého sloupce matice  $\mathbf{A}$  skalárem  $a$ , potom platí  $\det(\mathbf{B}) = a \cdot \det(\mathbf{A})$ .

<sup>3</sup>Taková tělesa existují, příkladem je těleso  $\mathbb{Z}_2$  z Příkladu 1.2.4. Těleso  $\mathbb{Z}_2$  je velmi důležité pro teorii lineárních kódů.

DŮKAZ. Platí

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, a \cdot \mathbf{a}_{j_0}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) &= \\
 &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot (a \cdot a_{\pi(j_0),j_0}) \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \\
 &= a \cdot \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(j_0),j_0} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \\
 &= a \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{a}_{j_0}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)
 \end{aligned}$$

a to jsme chtěli dokázat. ■



**8.2.13 Poznámka** Pozor! Tvzení 8.2.12 neříká, že platí  $\det(a \cdot \mathbf{A}) = a \cdot \det(\mathbf{A})$ . Matice  $a \cdot \mathbf{A}$  má podle definice každý sloupec vynásobený skalárem  $a$ . To znamená, že opakovaným použitím Tvzení 8.2.12 lze pro každou matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  a každý skalár  $a$  dokázat rovnost  $\det(a \cdot \mathbf{A}) = a^n \cdot \det(\mathbf{A})$ . Této rovnosti využijeme například při studiu rotací, viz Příklad 17.2.7.

Další tvrzení říká, že pokud jakýkoli sloupec matice napíšeme jako součet dvou vektorů, pak stačí spočítat determinanty matic pro jednotlivé sčítance zvlášť a na závěr oba determinanty sečíst.

**8.2.14 Tvzení** Pro každý sloupcový index  $j_0$  a pro každé vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  platí rovnost

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{y}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

DŮKAZ. Označíme-li položky vektorů  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  jako  $x_i$  a  $y_i$ , potom platí

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) &= \\
 &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(j_0-1),j_0-1} \cdot (x_{\pi(j_0)} + y_{\pi(j_0)}) \cdot a_{\pi(j_0+1),j_0+1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \\
 &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(j_0-1),j_0-1} \cdot x_{\pi(j_0)} \cdot a_{\pi(j_0+1),j_0+1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \\
 &\quad + \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(j_0-1),j_0-1} \cdot y_{\pi(j_0)} \cdot a_{\pi(j_0+1),j_0+1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \\
 &= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{y}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)
 \end{aligned}$$

**8.2.15 Důsledek** Determinant matice je v každém sloupci lineární.

DŮKAZ. Stačí použít Tvzení 8.2.12 a 8.2.14. ■

**8.2.16 Tvzení** At' matice  $\mathbf{B}$  vznikla z matice  $\mathbf{A}$  přičtením lineární kombinace ostatních sloupců k jednomu sloupci. Potom  $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$ .

DŮKAZ. Označme jako  $j_0$  index sloupce matice  $\mathbf{A}$ , ke kterému jsme přičetli lineární kombinaci ostatních sloupců matice  $\mathbf{A}$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $j_0 = 1$  (jinak přerovnáme sloupce matice, to podle Tvzení 8.2.9 pouze změni znaménko determinantu). To znamená, že sloupcový zápis matice  $\mathbf{B}$  je

$$(\mathbf{a}_1 + \sum_{i=2}^n a_i \cdot \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

kde  $a_2, \dots, a_n$  jsou nějaké skaláry.

Podle Důsledku 8.2.15 je

$$\det(\mathbf{a}_1 + \sum_{i=2}^n a_i \cdot \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) + \sum_{i=2}^n a_i \cdot \det(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

Protože podle Tvzení 8.2.11 platí  $\det(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$  pro každé  $i = 2, \dots, n$ , je důkaz u konce. ■

**8.2.17 Příklad (Determinant splňuje vlastnosti orientovaného objemu)** Ukážeme, že determinant čtvercové matice splňuje zobecnění tří vlastností z Příkladu 8.2.5 pro orientovaný obsah čtyřúhelníka.

- (1)  $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \det(\mathbf{E}_n) = 1$  podle Tvzení 8.2.6.
- (2) Pro každé  $j_0$ , libovolné skaláry  $a, b$  a libovolné vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) = \\ = a \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) + b \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{y}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

To jest, výpočet determinantu je lineární v každé sloupcové proměnné. To říká Tvzení 8.2.15.

- (3)  $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ , pokud se seznamy vektorů  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  a  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  liší pouze prohozením dvou položek. To říká Důsledek 8.2.10.

Předchozí tvrzení se dají shrnout. Tvzení 8.2.8 říká, že při úpravách matice, ze které počítáme determinant, můžeme pracovat s řádky nebo sloupci, hodnotu determinantu to nezmění. Determinant čtvercové matice se může změnit, provádíme-li něco se sloupci nebo řádky podle následujících pravidel.

- (1) Prohodíme-li dva řádky (nebo sloupce) matice, determinant změní znaménko.  
Obecněji: promícháme-li řádky (nebo sloupce) matice nějakou permutací, determinant změní znaménko podle toho, zda daná permutace je sudá nebo lichá. To říká Tvzení 8.2.9.
- (2) Vynásobíme-li jeden řádek (nebo jeden sloupec) matice skalárem, musíme tím skalárem vynásobit i determinant. To říká Tvzení 8.2.12.
- (3) Přičteme-li k jednomu řádku (nebo jednomu sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (nebo lineární kombinaci ostatních sloupců), determinant se nezmění. To říká Tvzení 8.2.16.

Pokud jsme ukončili Gaussovu eliminaci (ať již pomocí úprav řádků nebo sloupců), je determinant matice roven součinu prvků na hlavní diagonále. To říká Tvzení 8.2.6.

**8.2.18 Příklad (Výpočet determinantu (opatrnou) Gaussovou eliminací)** Máme spočítat determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 16 & 3 \end{vmatrix}$$

Využijeme k tomu předchozí dokázaná tvrzení. Budeme postupovat Gaussovou eliminací, tj. budeme upravovat řádky. Ke každé rovnosti napíšeme odkaz na tvrzení, o které se tato rovnost opírá.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 16 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{8.2.12}{=} -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & -8 \\ -2 & 16 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R1 \\ -2R2 \\ R3 \end{matrix} \stackrel{8.2.16}{=} -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 19 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} R1 \\ R2 + 3R1 \\ R3 + R1 \end{matrix}$$

$$\stackrel{8.2.12}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & -133 & -28 \end{vmatrix} \begin{matrix} R1 \\ R2 \\ -7R3 \end{matrix} \stackrel{8.2.16}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -123 \end{vmatrix} \begin{matrix} R1 \\ R2 \\ R3 + 19R2 \end{matrix}$$

$$\stackrel{8.2.6}{=} \frac{1}{2 \cdot 7} \cdot 2 \cdot 7 \cdot (-123) = -123$$



**8.2.19 Tvzení (Determinant součinu matic)** Pro libovolné čtvercové matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  platí  $\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{A})$ .

DŮKAZ. Matice  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  má podle definice násobení matic v  $j$ -tém sloupci součin  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j$ , což je lineární kombinace

$$\sum_{k=1}^n a_{k,j} \cdot \mathbf{b}_k$$

sloupců matice  $\mathbf{B}$ .

Proto, a díky Důsledku 8.2.15, platí rovnosti

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) &= \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_n) \\ &= \det\left(\sum_{k_1=1}^n a_{k_1,1} \cdot \mathbf{b}_{k_1}, \sum_{k_2=1}^n a_{k_2,2} \cdot \mathbf{b}_{k_2}, \dots, \sum_{k_n=1}^n a_{k_n,n} \cdot \mathbf{b}_{k_n}\right) \\ &= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n (a_{k_1,1} \cdot a_{k_2,2} \cdot \dots \cdot a_{k_n,n}) \cdot \det(\mathbf{b}_{k_1}, \mathbf{b}_{k_2}, \dots, \mathbf{b}_{k_n}) \end{aligned}$$

Součet stačí provádět pouze pro takové  $n$ -tice  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , které obsahují navzájem různá čísla. Jinak by totiž platilo  $\det(\mathbf{b}_{k_1}, \mathbf{b}_{k_2}, \dots, \mathbf{b}_{k_n}) = 0$  podle Tvzení 8.2.11. To znamená, že se můžeme omezit na *permutace*  $1 \mapsto k_1, 2 \mapsto k_2, \dots, n \mapsto k_n$  a můžeme upravovat dále:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n (a_{k_1,1} \cdot a_{k_2,2} \cdot \dots \cdot a_{k_n,n}) \cdot \det(\mathbf{b}_{k_1}, \mathbf{b}_{k_2}, \dots, \mathbf{b}_{k_n}) &= \\ &= \sum_{\pi \in S_n} (a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}) \cdot \det(\mathbf{b}_{\pi(1)}, \mathbf{b}_{\pi(2)}, \dots, \mathbf{b}_{\pi(n)}) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} (a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}) \cdot \text{sign}(\pi) \cdot \det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) \\ &= \det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) \cdot \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot (a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}) \\ &= \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

protože podle Tvzení 8.2.9 platí  $\det(\mathbf{b}_{\pi(1)}, \mathbf{b}_{\pi(2)}, \dots, \mathbf{b}_{\pi(n)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ . ■

Naše počáteční úvahy o determinantech čtvercových matic zakončíme jednou jednoduchou a užitečnou aplikací determinantů v analytické geometrii. Další použití determinantů v analytické geometrii uvidíme v Příkladech 8.3.8 a 8.4.11.



**8.2.20 Příklad (Rovnice přímky procházející dvěma body)** V tomto příkladu využijeme determinant pro snadné nalezení rovnice přímky procházející dvěma body  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  v rovině.

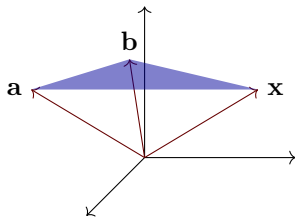
Nejprve uvažujme o trojici bodů

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

v prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde  $x$  a  $y$  jsou libovolná reálná čísla. Všimněme si, že všechny tři body  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}$  leží v rovině  $z = 1$ .

Body  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  leží na společné přímce právě tehdy, když body  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}$  leží na společné přímce, a

to nastane právě tehdy, když rovnoběžnostěn určený počátkem a body  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{x}$  má nulový objem v  $\mathbb{R}^3$ .



Hledaná rovnice přímky tedy je

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinant lze spočítat Sarrusovým pravidlem. Dostaneme tak rovnost

$$(a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y + a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

která se ale špatně pamatuje a geometrii celé věci spíš zastírá.

Příklad: rovnice přímky procházející body  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix}$  je  $\begin{vmatrix} x & 2 & 24 \\ y & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11x + 22y + 88 = 0$ .

### 8.3 Laplaceův rozvoj determinantu

Další velmi užitečnou technikou pro výpočet determinantu je výpočet rozvojem podle jednoho řádku nebo jednoho sloupce matice. Abychom tento způsob výpočtu mohli dokázat (viz Větu 8.3.3), musíme zavést následující terminologii.

**8.3.1 Definice (Algebraický doplněk posice v matici)** Ať  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  je čtvercová matice,  $n \geq 2$ . Pro pevnou dvojici  $(i_0, j_0)$  indexů ( $i_0 = 1, \dots, n$ ,  $j_0 = 1, \dots, n$ ) nazveme determinant

$$A_{i_0, j_0} = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{e}_{i_0}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

algebraickým doplňkem posice  $(i_0, j_0)$  (také: *kofaktorem* posice  $(i_0, j_0)$ ) v matici  $\mathbf{A}$ . To jest: algebraický doplněk  $A_{i_0, j_0}$  posice  $(i_0, j_0)$  je determinant matice, která vznikne z matice  $\mathbf{A}$  nahrazením  $j_0$ -tého sloupce vektorem  $\mathbf{e}_{i_0}$ .

**8.3.2 Příklad (Výpočet algebraických doplňků z definice)** Spočteme algebraické doplňky jednotlivých posic v matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & 7 & 5 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Podle Definice 8.3.1 je:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 11 & A_{1,2} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 11 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 79 & A_{1,3} &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 7 & 0 \\ 11 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -104 \\ A_{2,1} &= \begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} = -84 & A_{2,2} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \\ 11 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 60 & A_{2,3} &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \\ 11 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 48 \\ A_{3,1} &= \begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 1 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 58 & A_{3,2} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 11 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2 & A_{3,3} &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 11 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 32 \end{aligned}$$

Jednotlivé determinanty lze spočítat (například) Sarrusovým pravidlem, viz Příklad 8.2.4.

Jednoduchým důsledkem Definice 8.3.1 je následující tvrzení:

**8.3.3 Věta (Laplaceův rozvoj determinantu podle sloupce)** *At'  $j_0$  je pevný index sloupce matice  $\mathbf{A}$ . Potom platí rovnost*

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \cdot A_{i,j_0}$$

kteř se říká Laplaceův rozvoj determinantu podle  $j_0$ -tého sloupce.

DŮKAZ. Sloupec  $\mathbf{a}_{j_0}$  matice  $\mathbf{A}$  lze napsat jako lineární kombinaci  $\mathbf{a}_{j_0} = \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \cdot \mathbf{e}_i$ . Protože determinant je lineární v každé proměnné zvlášť (viz Důsledek 8.2.15), platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \cdot \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} \cdot A_{i,j_0} \end{aligned}$$

■

Abychom Větu 8.3.3 byli schopni smysluplně využít, potřebujeme dokázat následující technické tvrzení, které nám umožní algebraické doplňky počítat jako determinanty jistých *zmenšených* matic.

**8.3.4 Lemma (Praktický výpočet algebraického doplňku)** *At' matice  $\mathbf{A}$  je rozměru  $n \times n$ ,  $n \geq 2$ . Pro algebraický doplněk  $A_{i_0,j_0}$  posice  $(i_0, j_0)$  platí rovnost*

$$A_{i_0,j_0} = (-1)^{i_0+j_0} \cdot \det(\mathbf{A}_{(i_0,j_0)}) \quad (8.2)$$

kde  $\mathbf{A}_{(i_0,j_0)}$  je matice typu  $(n-1) \times (n-1)$  vzniklá tak, že z matice  $\mathbf{A}$  vyškrtneme řádek  $i_0$  a sloupec  $j_0$ .

DŮKAZ. Zvolme pevně  $i_0$  a  $j_0$ . Chceme dokázat rovnost (8.2).

Matice  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{e}_{i_0}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$  má v  $j_0$ -tém sloupci vektor  $\mathbf{e}_{i_0}$ . Proto při výpočtu jejího determinantu stačí sčítat jen přes ty permutace  $\pi$  z  $S_n$ , pro které platí  $\pi(j_0) = i_0$ . Jakmile  $\pi(j_0) \neq i_0$ , je totiž na  $\pi(j_0)$ -tém řádku v  $j_0$ -tém sloupci matice  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{e}_{i_0}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$  číslo 0. A to vynuluje příslušný sčítanec determinantu.

Označme  $P_{j_0 \mapsto i_0} = \{\pi \in S_n \mid \pi(j_0) = i_0\}$ . Víme tedy, že platí

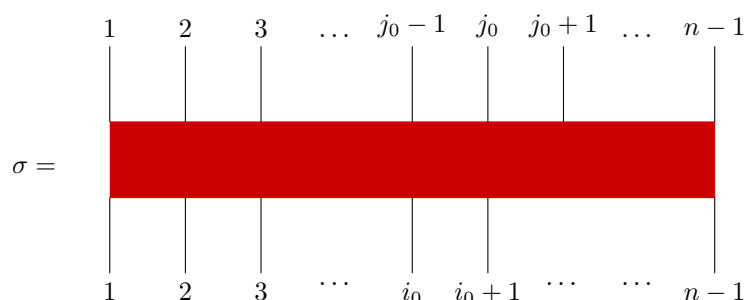
$$\begin{aligned} A_{i_0,j_0} &= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{e}_{i_0}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{\pi \in P_{j_0 \mapsto i_0}} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(j_0-1),j_0-1} \cdot 1 \cdot a_{\pi(j_0+1),j_0+1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \end{aligned}$$

Nyní sestrojíme bijekci

$$b: S_{n-1} \longrightarrow P_{j_0 \mapsto i_0}$$

která nám pomůže při dalším výpočtu.

Představme si strunový diagram *jakékoli* permutace  $\sigma$  z  $S_{n-1}$ :



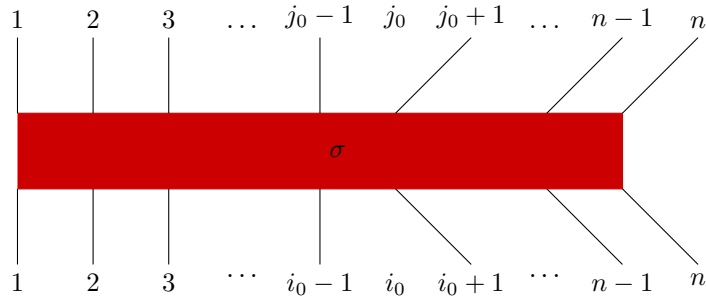
V naší úvaze na překřížení strun v diagramu pro  $\sigma$  nezáleží. Novou permutaci  $b(\sigma)$  z množiny  $P_{j_0 \mapsto i_0}$  definujeme ve třech krocích:

- (1) Vytvoříme si novou horní řadu a novou dolní řadu „úchytek“ pro struny. Obě řady očísloveme čísly 1 do  $n$ . Vzniká:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad j_0 - 1 \quad j_0 \quad j_0 + 1 \quad \dots \quad n - 1 \quad n$$

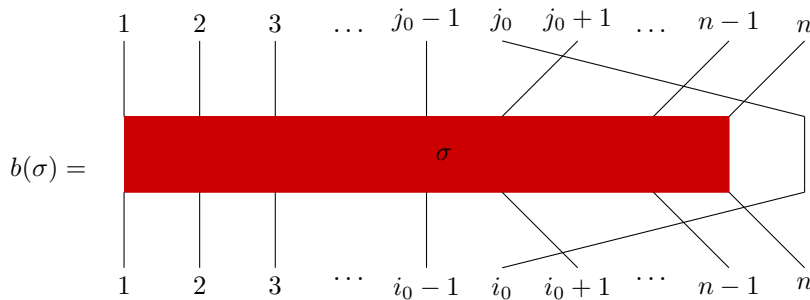
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad i_0 - 1 \quad i_0 \quad i_0 + 1 \quad \dots \quad n - 1 \quad n$$

- (2) Do vzniklých „úchytek“ nyní „napneme“ strunový diagram pro  $\sigma$  tak, že všechny horní struny pro  $\sigma$  napravo od struny  $j_0$  včetně ohneme o jednu pozici doprava a všechny dolní struny napravo od struny  $i_0$  včetně ohneme o jednu pozici doprava. Žádná nová zkřížení netvoříme. Dostaneme diagram



kde je v horní řadě volná úchytká  $j_0$  a v dolní řadě je volná úchytká  $i_0$ .

- (3) Nyní spojíme  $j_0$  strunou s  $i_0$  tak, abychom „obešli“ strunový diagram pro  $\sigma$  zprava. Výsledné permutaci z  $P_{j_0 \mapsto i_0}$  budeme říkat  $b(\sigma)$ :



Je zřejmé, že  $b$  je prosté zobrazení. K tomu, že  $b$  je surjekce si stačí uvědomit, že pro dané  $\pi$  je možné definovat  $\sigma$  tak, že z diagramu pro  $\pi$  „vyndáme“ strunu spojující  $j_0$  a  $i_0$  (a příslušně přečísloveme vrchní a spodní řádek strunového diagramu čísly od 1 do  $n - 1$ ). Takto definované  $\sigma$  splňuje  $b(\sigma) = \pi$ .

Je-li  $\sigma$  v  $S_{n-1}$ , pak z definice  $b(\sigma)$  okamžitě plyne (viz strunový diagram pro  $b(\sigma)$ , čtený shora dolů „po třetinách“)

$$\text{sign}(b(\sigma)) = (-1)^{n-i_0} \cdot \text{sign}(\sigma) \cdot (-1)^{n-j_0} = (-1)^{i_0+j_0} \cdot \text{sign}(\sigma)$$

Poslední rovnost plyne z toho, že v tělese  $\mathbb{F}$  platí

$$(-1)^{n-i_0} \cdot (-1)^{n-j_0} = (-1)^{2n-i_0-j_0} = (-1)^{2n} \cdot \left((-1)^{i_0+j_0}\right)^{-1} = 1 \cdot \left((-1)^{i_0+j_0}\right) = (-1)^{i_0+j_0}$$

Díky bijekci  $b$  můžeme psát

$$\begin{aligned}
& \sum_{\pi \in P_{j_0 \mapsto i_0}} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(j_0-1),j_0-1} \cdot 1 \cdot a_{\pi(j_0+1),j_0+1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} = \\
&= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \text{sign}(b(\sigma)) \cdot a_{b(\sigma)(1),1} \cdot \dots \cdot a_{b(\sigma)(j_0-1),j_0-1} \cdot a_{b(\sigma)(j_0+1),j_0+1} \cdot \dots \cdot a_{b(\sigma)(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} (-1)^{i_0+j_0} \cdot \text{sign}(\sigma) \cdot a_{b(\sigma)(1),1} \cdot \dots \cdot a_{b(\sigma)(j_0-1),j_0-1} \cdot a_{b(\sigma)(j_0+1),j_0+1} \cdot \dots \cdot a_{b(\sigma)(n),n} \\
&= (-1)^{i_0+j_0} \cdot \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{b(\sigma)(1),1} \cdot \dots \cdot a_{b(\sigma)(j_0-1),j_0-1} \cdot a_{b(\sigma)(j_0+1),j_0+1} \cdot \dots \cdot a_{b(\sigma)(n),n} \\
&= (-1)^{i_0+j_0} \cdot \det(\mathbf{A}_{(i_0,j_0)})
\end{aligned}$$

Dokázali jsme rovnost (8.2). Tím je důkaz ukončen. ■

Lemma 8.3.4 dává dobrý návod pro výpočet algebraického doplňku  $A_{i_0,j_0}$  posice  $(i_0, j_0)$  v matici  $\mathbf{A}$ :

V matici  $\mathbf{A}$  vyškrtněte  $i_0$ -tý řádek a  $j_0$ -tý sloupec. Z takto zmenšené matice spočítejte determinant a vynásobte jej skalárem  $(-1)^{i_0+j_0}$ .

**8.3.5 Příklad (Výpočet algebraických doplňků podle Lemmatu 8.3.4)** Spočteme algebraické doplňky posic v matici  $\mathbf{A}$  z Příkladu 8.3.2, tentokrát podle praktického návodu z Lemmatu 8.3.4. Připomeňme, že

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & 7 & 5 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Podle Lemmatu 8.3.4 je:

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= (-1)^{1+1} \cdot \det(\mathbf{A}_{(1,1)}) = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 11 \\
A_{1,2} &= (-1)^{1+2} \cdot \det(\mathbf{A}_{(1,2)}) = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} = 79 \\
A_{1,3} &= (-1)^{1+3} \cdot \det(\mathbf{A}_{(1,3)}) = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} = -104 \\
A_{2,1} &= (-1)^{2+1} \cdot \det(\mathbf{A}_{(2,1)}) = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -84 \\
A_{2,2} &= (-1)^{2+2} \cdot \det(\mathbf{A}_{(2,2)}) = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} = 60 \\
A_{2,3} &= (-1)^{2+3} \cdot \det(\mathbf{A}_{(2,3)}) = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} = 48
\end{aligned}$$

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1} \cdot \det(\mathbf{A}_{(3,1)}) = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 58$$

$$A_{3,2} = (-1)^{3+2} \cdot \det(\mathbf{A}_{(1,1)}) = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3} \cdot \det(\mathbf{A}_{(1,1)}) = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 32$$

Věta 8.3.3 spolu s Lemmatem 8.3.4 dávají *rekursivní* způsob, kterým můžeme determinanty počítat. Vybereme si jeden sloupec (nebo řádek) matice a determinant podle tohoto sloupce (nebo řádku) rozvineme. Lemma 8.3.4 pak říká, že stačí umět spočítat determinanty matic o jedničku menších rozměrů.

### 8.3.6 Příklad (Výpočet determinantu rozvojem podle sloupce (řádku)) Máme spočítat determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Pro výpočet se zdá nejrozumnějším zvolit rozvoj podle *druhého* sloupce. Proč? Ve druhém sloupci je totiž hodně nul a tudíž vidíme, že úloha se podle Věty 8.3.3 zredukuje na výpočet *dvou* determinantů rozměrů  $4 \times 4$ , které jsou algebraickými doplňky posic  $(2, 2)$  a  $(5, 2)$ :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{5+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Tak bychom mohli pokračovat: determinanty

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

opět můžeme počítat rozvojem podle nějakého řádku nebo sloupce.

Nejvýhodnější výpočet determinantu je kombinace rozvoje podle sloupce (nebo řádku) a Gaussovy eliminace řádků (nebo sloupců).

### 8.3.7 Příklad (Výpočet determinantu kombinací rozvoje podle sloupce a Gaussovy eliminace) Determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

z Příkladu 8.3.6 spočítáme kombinací metod, které jsme doposud vyvinuli. Díky tvaru prvního sloupce je rozumné začít Gaussovou eliminací:

$$\left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1 \\ R_5 \end{array}$$

Nyní si můžeme vybrat rozvoj podle prvního sloupce, podle pátého sloupce, nebo podle čtvrtého řádku. Zvolíme rozvoj podle čtvrtého řádku:

$$\left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right| = 2 \cdot (-1)^{4+5} \cdot \left| \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right|$$

Další rozvoj, tentokrát podle prvního sloupce dává:

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right| = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{array} \right|$$

Můžeme buď použít Sarrusovo pravidlo, nebo Gaussovou eliminaci, nebo rozvoj podle sloupce (nebo řádku). Zvolíme Gaussovou eliminaci:

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{array} \right| \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

a rozvoj podle prvního sloupce

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{array} \right| = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \left| \begin{array}{cc} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{array} \right| = 2 \cdot 4 = 8$$

kde poslední determinant jsme spočetli známým způsobem.

Zbývá poskládat dílčí výpočty dohromady. Dostaneme

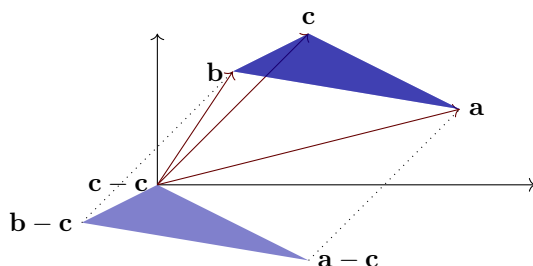
$$\left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right| = -2 \cdot 2 \cdot 8 = -32$$

Geometrickou aplikací věty o rozvoji determinantu je vzorec pro obsah trojúhelníka určeného třemi body v rovině.

**8.3.8 Příklad (Plocha trojúhelníka zadaného třemi body v rovině)** Plochu  $S$  trojúhelníka, který je zadaný třemi body  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ , lze spočítat pomocí determinantu vzorcem

$$S = \text{absolutní hodnota výrazu } \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

To lze snadno zjistit následující úvahou, která využívá Větu 8.3.3. Trojúhelník určený vektory  $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b} - \mathbf{c}$  a  $\mathbf{c} - \mathbf{c}$  (tj. počátkem) má opět plochu  $S$  (protože původní trojúhelník jsme jen paralelně posunuli tak, aby bod  $\mathbf{c}$  byl v počátku souřadnic).



Podle Příkladu 8.2.5 tedy platí

$$S = \text{absolutní hodnota výrazu } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix}$$

Podle pravidel pro počítání s determinanty platí rovnosti

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 - c_1 \\ c_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

kde poslední rovnost je rozvoj determinantu podle třetího řádku. Odtud již vzorec pro obsah bezprostředně plyne.

Příklad: spočítáme obsah trojúhelníka zadaného body  $\begin{pmatrix} -7 \\ 12 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Protože  $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -7 & 5 & 2 \\ 12 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-3)$ , je obsah trojúhelníka 1.5.

## 8.4 Řešitelnost regulárních čtvercových soustav lineárních rovnic

V této podkapitole ukážeme, že determinant matice  $\mathbf{A}$  může posloužit jako *test invertibility* matice  $\mathbf{A}$ . Tento fakt lze aplikovat na nalezení (jediného) řešení rovnic typu  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kde matice  $\mathbf{A}$  je *invertibilní* (tj. *regulární*).

Základem našich úvah o invertibilitě bude pojem *adjungované matice* k zadané matici. Připomeňte si definici algebraického doplňku z Definice 8.3.1.

**8.4.1 Definice (Adjungovaná matice)** Ať  $\mathbf{A}$  je matice typu  $n \times n$ ,  $n \geq 2$ . *Adjungovaná matice*  $\text{adj}(\mathbf{A})$  k matici  $\mathbf{A}$  je definována takto: v  $j_0$ -tém řádku a  $i_0$ -tém sloupci matice  $\text{adj}(\mathbf{A})$  je algebraický doplněk  $A_{i_0, j_0}$  posice  $(i_0, j_0)$  v matici  $\mathbf{A}$ . Krátce: matice  $\text{adj}(\mathbf{A})$  je transponovaná matice algebraických doplňků matice  $\mathbf{A}$ .

**8.4.2 Příklad (Výpočet adjungované matice)** Spočteme adjungovanou matici  $\text{adj}(\mathbf{A})$  pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & 7 & 5 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$



V Příkladu 8.3.2 (nebo v Příkladu 8.3.5) jsme jednotlivé algebraické doplňky spočetli:

$$A_{1,1} = 11 \quad A_{1,2} = 79 \quad A_{1,3} = -104 \quad A_{2,1} = -84 \quad A_{2,2} = 60 \quad A_{2,3} = 48 \quad A_{3,1} = 58 \quad A_{3,2} = 2 \quad A_{3,3} = 32$$

Matice *algebraických doplňků* tedy je

$$\begin{pmatrix} 11 & 79 & -104 \\ -84 & 60 & 48 \\ 58 & 2 & 32 \end{pmatrix}$$

To ovšem ještě není matice  $\text{adj}(\mathbf{A})$ . Matici algebraických doplňků musíme *transponovat*. To jest

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 11 & 79 & -104 \\ -84 & 60 & 48 \\ 58 & 2 & 32 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 11 & -84 & 58 \\ 79 & 60 & 2 \\ -104 & 48 & 32 \end{pmatrix}$$

Adjungovaná matice  $\text{adj}(\mathbf{A})$  v sobě skrývá determinanty „velkých částí“ matice  $\mathbf{A}$ . Očekáváme tedy, že adjungovaná matice  $\text{adj}(\mathbf{A})$  v sobě nese nějakou informaci o determinantu  $\det(\mathbf{A})$ . To říká následující tvrzení, které je jednoduchým důsledkem Věty 8.3.3: vynásobíme-li matice  $\text{adj}(\mathbf{A})$  a  $\mathbf{A}$  (v jakémkoli pořadí), pak dostaneme matici, která má na hlavní diagonále hodnotu  $\det(\mathbf{A})$  a všude jinde nuly.

**8.4.3 Věta (Cramerova věta pro adjungovanou matici)** Pro každou matici  $\mathbf{A}$  typu  $n \times n$ ,  $n \geq 2$ , platí  $\text{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{A} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})$ .

DŮKAZ. Zaměříme se na součin  $\mathbf{M} = \text{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$ . Zvolme pevně  $i_0$  a  $j_0$ . Chceme ukázat, že pro položku  $m_{i_0, j_0}$  v  $i_0$ -tém řádku a  $j_0$ -tém sloupci matice  $\mathbf{M}$  platí

$$m_{i_0, j_0} = \begin{cases} \det(\mathbf{A}), & \text{v případě } i_0 = j_0 \\ 0, & \text{v případě } i_0 \neq j_0 \end{cases}$$

Pro výpočet položky  $m_{i_0, j_0}$  je zapotřebí  $i_0$ -tý řádek matice  $\text{adj}(\mathbf{A})$  a  $j_0$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A}$ . Ovšem  $i_0$ -tý řádek matice  $\text{adj}(\mathbf{A})$  je tvořen algebraickými doplňky  $A_{1, i_0}, A_{2, i_0}, \dots, A_{n, i_0}$ . Platí tedy

$$m_{i_0, j_0} = \sum_{i=1}^n a_{i, j_0} \cdot A_{i, i_0} \quad (8.3)$$

(1) Ať  $i_0 = j_0$ . Rovnice (8.3) pro výpočet  $m_{j_0, j_0}$  má v tomto případě tvar

$$m_{j_0, j_0} = \sum_{i=1}^n a_{i, j_0} \cdot A_{i, j_0} = \det(\mathbf{A})$$

kde poslední rovnost platí díky Větě 8.3.3.

(2) Ať  $i_0 \neq j_0$ . Definujme matici

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i_0-1}, \mathbf{a}_{j_0}, \mathbf{a}_{i_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

to jest: matice  $\mathbf{B}$  má v  $i_0$ -tém sloupci  $j_0$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A}$  a všechny ostatní sloupce zůstávají stejné jako sloupce matice  $\mathbf{A}$ . Potom podle Tvrzení 8.2.11, aplikovaného na sloupce, platí  $\det(\mathbf{B}) = 0$ . Podle Věty 8.3.3 aplikované na  $i_0$ -tý sloupec matice  $\mathbf{B}$  je tedy

$$0 = \det(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n a_{i, j_0} \cdot B_{i, i_0}$$

kde jsme jako  $B_{i, i_0}$  označili algebraický doplněk posice  $(i, i_0)$  v matici  $\mathbf{B}$ . Protože platí  $B_{i, i_0} = A_{i, i_0}$  (tak jsme matici  $\mathbf{B}$  vymysleli), platí

$$0 = \det(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n a_{i, j_0} \cdot B_{i, i_0} = \sum_{i=1}^n a_{i, j_0} \cdot A_{i, i_0}$$

a to jsme chtěli dokázat.

Rovnost  $\det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{A} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})$  se dokáže analogicky. ■

**8.4.4 Důsledek (Test invertibility a inverse matice pomocí algebraických doplňků)** Čtvercová matice  $\mathbf{A}$  je invertibilní právě tehdy, když  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . V tom případě lze inverzi matice  $\mathbf{A}$  vyjádřit ve tvaru  $\mathbf{A}^{-1} = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})$ . Navíc platí  $(\det(\mathbf{A}))^{-1} = \det(\mathbf{A}^{-1})$ .

DŮKAZ. (1) Předpokládejme, že matice  $\mathbf{A}$  má inverzi  $\mathbf{A}^{-1}$ , tj. platí  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ . Podle Tvrzení 8.2.19 platí

$$1 = \det(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{A})$$

To znamená, že  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  a platí  $(\det(\mathbf{A}))^{-1} = \det(\mathbf{A}^{-1})$ .

(2) Předpokládejme, že  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . Potom z rovnosti  $\text{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n$  plyne, že

$$\left( (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \text{adj}(\mathbf{A}) \right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$$

Podle 6.1.6 to znamená, že  $\mathbf{A}$  je invertibilní a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})$$

■

**8.4.5 Příklad (Výpočet inverse matice pomocí algebraických doplňků)** Ukážeme, že matice  $\mathbf{A}$  nad  $\mathbb{R}$ , zadaná tabulkou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je invertibilní a její inverzi spočteme podle Důsledku 8.4.4. Protože  $\det(\mathbf{A}) = -13$ , inverze  $\mathbf{A}^{-1}$  existuje a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \text{adj}(\mathbf{A}) = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -1 & -16 \\ -4 & -2 & 11 \\ -13 & 0 & 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -1 & -16 \\ -4 & -2 & 11 \\ -13 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

kde matici  $\text{adj}(\mathbf{A})$  jsme spočetli analogicky Příkladu 8.4.2.

**8.4.6 Příklad (Invertibilita základních transformací roviny)** Vyšetříme invertibilitu matic základních lineárních zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$  popsanych v Příkladu 4.1.7.

(1) Projekce na osu  $x$  a projekce na osu  $y$  mají matice

$$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Protože platí  $\det(\mathbf{P}_x) = \det(\mathbf{P}_y) = 0$ , jsou obě matice  $\mathbf{P}_x$  a  $\mathbf{P}_y$  singulární (tj., nemají inverzi). To jsme čekali: ani jedno ze zobrazení  $\mathbf{P}_x$ ,  $\mathbf{P}_y$  není isomorfismus.

(2) Změna měřítka má matice

$$\mathbf{M}_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

kde  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Protože  $\det(\mathbf{M}_{a,b}) = ab \neq 0$ , má matice  $\mathbf{M}_{a,b}$  inverzi. Podle Důsledku 8.4.4 je

$$(\mathbf{M}_{a,b})^{-1} = (\det(\mathbf{M}_{a,b}))^{-1} \cdot \text{adj}(\mathbf{M}_{a,b}) = \frac{1}{ab} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}}$$

To jsme čekali: pokud zobrazení  $\mathbf{M}_{a,b}$  natahuje osy  $a$ -krát a  $b$ -krát, pak inverzní zobrazení je musí  $a$ -krát a  $b$ -krát zkrátit.

(3) Rotace kolem počátku o úhel  $\alpha$  (proti směru hodinových ručiček) má matici

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

kde  $\alpha \in [0; 2\pi)$ . Protože  $\det(\mathbf{R}_\alpha) = (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$ , má matice  $\mathbf{R}_\alpha$  inverzi. Podle Důsledku 8.4.4 je

$$(\mathbf{R}_\alpha)^{-1} = (\det(\mathbf{R}_\alpha))^{-1} \cdot \text{adj}(\mathbf{R}_\alpha) = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{-\alpha}$$

To jsme čekali: pokud zobrazení  $\mathbf{R}_\alpha$  otáčí o úhel  $\alpha$ , pak inverzní zobrazení musí otáčet o úhel  $-\alpha$ .

(4) Zkosení má matici

$$\mathbf{S}_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Protože  $\det(\mathbf{S}_{a,b}) = 1 - ab$ , je matice  $\mathbf{S}_{a,b}$  regulární právě tehdy, když  $ab \neq 1$ . V takovém případě je podle Důsledku 8.4.4

$$(\mathbf{S}_{a,b})^{-1} = (\det(\mathbf{S}_{a,b}))^{-1} \cdot \text{adj}(\mathbf{S}_{a,b}) = \frac{1}{1-ab} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

Použití Důsledku 8.4.4 pro invertování matic je někdy výhodné, někdy ne. Rozhodně je ale výhodné pro invertování matic  $2 \times 2$ . Lze dokonce zformulovat tvrzení:

Matice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  má inverzi právě tehdy, když  $ad - bc \neq 0$ . V takovém případě je

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

což okamžitě plyne z Důsledku 8.4.4.

Dalším důsledkem Věty 8.4.3 je tvrzení o řešitelnosti čtvercových regulárních soustav pomocí determinantů.

**8.4.7 Důsledek (Cramerova věta pro regulární soustavy rovnic)** *At  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  je soustava lineárních rovnic, kde  $\mathbf{A}$  je čtvercová regulární matice. Pak tato soustava má jediné řešení  $\mathbf{x}$ . Jednotlivé položky  $x_{j_0}$  tohoto řešení lze spočítat podle vzorce*

$$x_{j_0} = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

*To jest, matice  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$  má v  $j_0$ -tém sloupci vektor  $\mathbf{b}$ , jinak má stejné sloupce jako matice  $\mathbf{A}$ .*

**DŮKAZ.** Protože  $\mathbf{A}$  je regulární, má rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  jediné řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ . Podle Důsledku 8.4.4 tedy platí

$$\mathbf{x} = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \text{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}$$

Zbývá ukázat, že  $j_0$ -tá položka  $v_{j_0}$  vektoru  $\text{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}$  je  $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$ . To ale plyne z Věty 8.3.3 aplikované na  $j_0$ -tý sloupec matice  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$ :

$$v_{j_0} = \sum_{i=1}^n b_i \cdot A_{i,j_0} = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

■

**8.4.8 Příklad (Řešení soustavy lineárních rovnic pomocí Cramerovy věty)** Vyřešme soustavu lineárních rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  nad  $\mathbb{R}$ , která je zadána rozšířenou maticí

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

Protože platí

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -13$$

je matice  $\mathbf{A}$  regulární a my můžeme Důsledek 8.4.7 použít. Jednotlivé položky jediného řešení  $\mathbf{x}$  jsou:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-36}{-13} = \frac{36}{13} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-13} = -\frac{6}{13}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-13} = 0$$



**8.4.9 Příklad (Geometrie Cramerovy věty pro soustavy rovnic o dvou neznámých)** Připomeňme (viz Příklady 1.5.10 a 6.3.4), že řešení soustavy  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b})$  dvou lineárních rovnic o dvou neznámých nad  $\mathbb{R}$  lze chápat jako hledání koeficientů lineární kombinace  $x \cdot \mathbf{a}_1 + y \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$  v prostoru  $\mathbb{R}^2$ .

Předpokládejme tedy, že vektory  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  a  $\mathbf{b}$  jsou pevně dány a nás zajímá řešení soustavy  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b})$ . Jsou-li vektory  $\mathbf{a}_1$  a  $\mathbf{a}_2$  lineárně nezávislé, je řešení soustavy  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b})$  právě jedno a toto jediné řešení lze nalézt pomocí Cramerovy věty. Navíc, tento způsob hledání řešení má jasný *geometrický význam*. Postupujeme takto:

- (1) Z rovnosti  $x \cdot \mathbf{a}_1 + y \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$  plynou dvě další maticové rovnosti

$$(x \cdot \mathbf{a}_1 + y \cdot \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}_2) \quad (\mathbf{a}_1, x \cdot \mathbf{a}_1 + y \cdot \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b})$$

vzniklé „přidáním“ sloupce  $\mathbf{a}_2$  napravo a „přidáním“ sloupce  $\mathbf{a}_1$  nalevo.

- (2) Z předchozího plynou rovnosti determinantů

$$\det(x \cdot \mathbf{a}_1 + y \cdot \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2) \quad \det(\mathbf{a}_1, x \cdot \mathbf{a}_1 + y \cdot \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})$$

Po úpravě pomocí Důsledku 8.2.15 dostaneme rovnosti

$$x \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + y \cdot \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2) \quad x \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) + y \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})$$

neboli

$$x \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2) \quad y \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})$$

protože  $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = 0$  a  $\det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = 0$ .

- (3) To znamená, že platí

$$x = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \quad y = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}$$

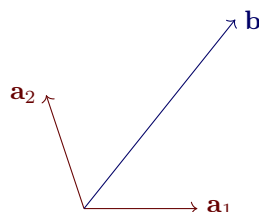
protože  $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq 0$  podle předpokladu.

A to je přesně tvrzení Důsledku 8.4.7.

Jaký je geometrický význam předchozího postupu? Výše nalezené řešení lze zapsat i ve tvaru

$$\frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \cdot \mathbf{a}_1 + \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$

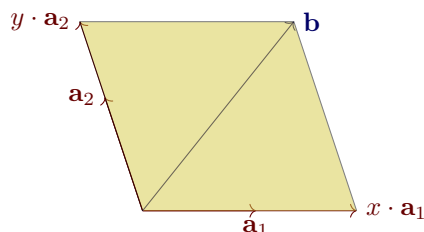
To znamená, že pro vektory



jsou čísla

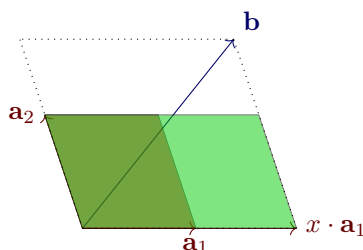
$$x = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \quad y = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}$$

přesně ty koeficienty, kterými musíme „natáhnout“ vektory  $\mathbf{a}_1$  a  $\mathbf{a}_2$  tak, aby vektor  $\mathbf{b}$  byl úhlopříčkou čtyřúhelníku

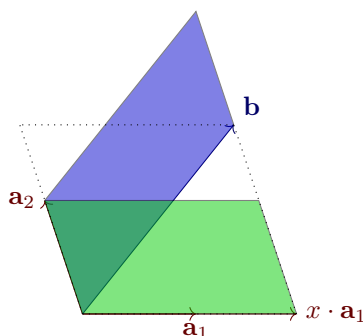


Koeficienty natažení, tj. reálná čísla  $x$  a  $y$ , jsou ale přesně podíly (orientovaných) ploch určitých čtyřúhelníků.

Vysvětlíme to pro koeficient  $x$ , pro koeficient  $y$  lze použít zcela analogickou úvahu. Číslo  $x$  je podílem orientovaných ploch  $\det(x \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  a  $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ :



Podíl  $\det(x \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  a  $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  je ale stejný jako podíl  $\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)$  a  $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ , protože plochy  $\det(x \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  a  $\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)$  jsou shodné. Poslední rovnost plyne z toho, že jde o dva čtyřúhelníky se stejnou základnou a výškou:



Podobně lze uvažovat i o geometrii řešení čtvercových regulárních soustav větších rozměrů.

Cramerova věta pro řešení čtvercových soustav s regulární maticí nemusí být početně výhodná, protože obecně vyžaduje vypočítat obrovské množství determinantů. Ukážeme, kdy použití Cramerovy věty výhodné je. Jedná se o čtvercové soustavy s parametrem.

**8.4.10 Příklad (Cramerova věta a soustavy s parametrem)** Ať soustava lineárních rovnic je zadána rozšířenou maticí

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right)$$

nad  $\mathbb{R}$ , kde  $a \in \mathbb{R}$  je parametr.

*Mohli bychom* od začátku postupovat Gaussovou eliminační metodou, brzy bychom však zjistili, že je zapotřebí výpočty větvit v závislosti na parametru  $a$ . Podobně tomu bylo v Příkladu 6.4.6. *Výhodnější* je proto následující postup (a ten je *doporučeným postupem* pro jakoukoli čtvercovou soustavu rovnic s parametrem).

- (1) Protože matice soustavy je čtvercová, můžeme pomocí determinantu zjistit, kdy má zadaná soustava právě jedno řešení. Toto řešení popíšeme pomocí Cramerovy věty.
- (2) Z části (1) dostaneme *konkrétní hodnoty* parametru  $a$ , pro které Cramerovu větu použít nemůžeme. To ale nevadí: dané hodnoty již budou konkrétní skaláry, a pro každou tuto hodnotu vyřešíme soustavu Gaussovou eliminací.

Nyní projdeme oba body:

- (1) Determinant matice soustavy je

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2 \cdot (a + 2)$$

Pro  $a \notin \{-2, 1\}$  má tedy zadaná soustava právě jedno řešení. Označíme-li položky tohoto řešení jako  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , potom podle Důsledku 8.4.7 je

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{(a - 1)^2}{(a - 1)^2 \cdot (a + 2)} = \frac{1}{a + 2}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{(a - 1)^2}{(a - 1)^2 \cdot (a + 2)} = \frac{1}{a + 2}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{(a - 1)^2}{(a - 1)^2 \cdot (a + 2)} = \frac{1}{a + 2}$$

- (2) Zbývá zjistit, jak řešení vypadá pro  $a = -2$  a  $a = 1$ .

(a) Ať  $a = -2$ . Potom Gaussovou eliminací snadno zjistíme, že máme vyřešit soustavu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Podle Frobeniovy věty řešení této soustavy neexistuje.

(b) Ať  $a = 1$ . Potom Gaussovou eliminací snadno zjistíme, že máme vyřešit soustavu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Podle Frobeniovy věty je řešení ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Jako poslední aplikaci Cramerovy věty ukážeme, jak najít rovnici kružnice procházející třemi body.

**8.4.11 Příklad (Rovnice kružnice procházející třemi body pomocí determinantu)** Ať  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  jsou tři body v rovině:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Tvrdíme:

- (1) Body  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  lze proložit (jednoznačně určenou) kružnicí právě tehdy, když  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  neleží na jedné přímce.
- (2) Pokud body  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  neleží na jedné přímce, pak rovnici kružnice, na které tyto tři body leží, lze napsat vzorcem

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Obecná *normovaná* rovnice kružnice v rovině je

$$(x^2 + y^2) + A \cdot x + B \cdot y + C = 0, \quad A^2 + B^2 - 4C > 0$$

(normovaná znamená: koeficient u  $(x^2 + y^2)$  je roven číslu 1). Opravdu: je-li  $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$  standardní zápis kružnice se středem v bodě  $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$  a poloměrem  $r > 0$ , pak výpočet  $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = x^2 - 2s_1x + s_1^2 + y^2 - 2s_2y + s_2^2$  ukazuje, že je možné volit  $A = -2s_1$ ,  $B = -2s_2$ ,  $C = s_1^2 + s_2^2 - r^2$ . Potom  $A^2 + B^2 - 4C = 4s_1^2 + 4s_2^2 - 4s_1^2 - 4s_2^2 + r^2 = r^2 > 0$ .

Obráceně: úpravami

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) + A \cdot x + B \cdot y + C &= x^2 + 2 \cdot \frac{A}{2} \cdot x + \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{B}{2} \cdot y + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2 + C \\ &= \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(C - \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

jsme našli kružnici se středem v bodě

$$\begin{pmatrix} -\frac{A}{2} \\ -\frac{B}{2} \end{pmatrix}$$

a poloměrem

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$$

Výraz pod odmocninou je kladný, protože platí  $A^2 + B^2 - 4C > 0$ .

Přístupme nyní k řešení úlohy:

- (1) Podle Příkladu 8.2.20 body **a**, **b**, **c** neleží na společné přímce právě tehdy, když platí

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Podle Tvzení 8.2.8 platí

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Tudíž soustava rovnic

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & 1 & -a_1^2 - a_2^2 \\ b_1 & b_2 & 1 & -b_1^2 - b_2^2 \\ c_1 & c_2 & 1 & -c_1^2 - c_2^2 \end{array} \right)$$

má právě jedno nenulové řešení. Označme toto řešení

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Protože  $\mathbf{x}$  je řešením soustavy, platí rovnice

$$\begin{aligned} A \cdot a_1 + B \cdot a_2 + C &= -a_1^2 - a_2^2 \\ A \cdot b_1 + B \cdot b_2 + C &= -b_1^2 - b_2^2 \\ A \cdot c_1 + B \cdot c_2 + C &= -c_1^2 - c_2^2 \end{aligned}$$

které můžeme přepsat na

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2) + A \cdot a_1 + B \cdot a_2 + C &= 0 \\ (b_1^2 + b_2^2) + A \cdot b_1 + B \cdot b_2 + C &= 0 \\ (c_1^2 + c_2^2) + A \cdot c_1 + B \cdot c_2 + C &= 0 \end{aligned}$$

Právě jsme ukázali, že body **a**, **b**, **c** leží na křivce tvaru  $(x^2 + y^2) + A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ . Zbývá ukázat, že platí  $A^2 + B^2 - 4C > 0$ .

Podle Důsledku 8.4.7 platí

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -a_1^2 - a_2^2 & a_2 & 1 \\ -b_1^2 - b_2^2 & b_2 & 1 \\ -c_1^2 - c_2^2 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}, \quad B = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_1^2 - a_2^2 & 1 \\ b_1 & -b_1^2 - b_2^2 & 1 \\ c_1 & -c_1^2 - c_2^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}, \quad C = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -a_1^2 - a_2^2 \\ b_1 & b_2 & -b_1^2 - b_2^2 \\ c_1 & c_2 & -c_1^2 - c_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

Nerovnost  $A^2 + B^2 - 4C > 0$  pak snadno plyne z výpočtu těchto determinantů.

Celkově: ukázali jsme, že body **a**, **b**, **c** v rovině neleží na společné přímce právě tehdy, když leží na jednoznačně určené kružnici.



- (2) Ať tedy body  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  neleží na jedné přímce. Ukážeme, že rovnice jednoznačně určené kružnice, na které tyto tři body leží, je

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Z části (1) víme, že rovnice kružnice je dána  $(x^2 + y^2) + A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ , kde (využitím vět o prohazování sloupců v matici a násobení sloupce nenulovým číslem) jednotlivé konstanty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  můžeme zapsat takto:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -a_1^2 - a_2^2 & a_2 & 1 \\ -b_1^2 - b_2^2 & b_2 & 1 \\ -c_1^2 - c_2^2 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_2 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_2 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}} \quad B = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_1^2 - a_2^2 & 1 \\ b_1 & -b_1^2 - b_2^2 & 1 \\ c_1 & -c_1^2 - c_2^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -a_1^2 - a_2^2 \\ b_1 & b_2 & -b_1^2 - b_2^2 \\ c_1 & c_2 & -c_1^2 - c_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 & a_2 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

Rozvojem determinantu podle prvního řádku dostáváme

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = (x^2 + y^2) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_2 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_2 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_2 & 1 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 & a_2 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Vydělme celou rovnici (nenulovým!) determinantem  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$ . Dostáváme:

$$\frac{\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}} = (x^2 + y^2) \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}} - x \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_2 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_2 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}} + y \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}} - 1 \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 & a_2 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= (x^2 + y^2) + A \cdot x + B \cdot y + C$$

$$= 0$$

A tím jsme ukázali, že

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Jako aplikaci nalezneme rovnici kružnice, na které leží body  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Protože

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

body  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  neleží na společné přímce. Rovnice hledané kružnice je

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot (x^2 + y^2) + 11 \cdot x + y + 16 = 0$$

Po znormování (tj. po vydělení číslem  $-5$ ) dostaneme rovnici

$$(x^2 + y^2) - \frac{11}{5} \cdot x - \frac{1}{5} \cdot y - \frac{16}{5} = 0$$

Hledaná kružnice tedy má střed v bodě  $\mathbf{s}$  a poloměr  $r$ , kde

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad r = \sqrt{\left(\frac{11}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{16}{5}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{442}$$

Poznamenejme na závěr, že zcela analogickým způsobem můžeme postupovat při prokládání křivek vyšších stupňů předem zadanými body.

# Kapitola 9

## Matice lineárního zobrazení

When you are put into the Vortex you are given just one momentary glimpse of the entire unimaginable infinity of creation, and somewhere in it a tiny little mark, a microscopic dot on a microscopic dot, which says, "You are here."

Douglas Adams, *The restaurant at the end of the Universe*

Množství teoretických poznatků, které jsme vybudovali v předchozích kapitolách, začneme úročit. Abstraktní teorie lineárních prostorů a lineárních zobrazení nám nedávala moc prostředků ke konkrétním výpočtům. Světlou výjimkou se zdály být výpočty s maticemi z Kapitoly 4. V této kapitole ukážeme, že to není výjimka, ale pravidlo: s obecnými lineárními zobrazeními mezi prostory konečné dimenze můžeme provádět zcela konkrétní výpočty pomocí matic (a případně determinantů matic).

Podkapitola 9.1 je věnována *maticím obecných lineárních zobrazení*. Vysvětlíme, že (do velké míry) je jedno, zda studujeme lineární zobrazení nebo jeho matici. Matice lineárního zobrazení je vždy počítána vzhledem k pevně zvoleným bázím (tj. vzhledem k pevně zvoleným souřadnicovým systémům). Co se stane, když se rozhodneme souřadnicový systém změnit? V podkapitole 9.2 ukážeme, že se zas tak moc nestane: stačí jen přepočítat souřadnice. A to se opět dá udělat pomocí matic. V podkapitole 9.3 zjistíme, jak moc se liší matice *stejného* lineárního zobrazení vzhledem k různým bázím.

Teorie, kterou v této kapitole vybudujeme, je extrémně průzračná, použijeme-li pro lineární zobrazení techniku *komutativních diagramů*. Vyplatí se znovu si projít podkapitolu 2.2.

### 9.1 Matice lineárního zobrazení

V této podkapitole zobecníme úvahy z Kapitoly 4. Ukážeme, že maticemi lze popsat *jakékoli* lineární zobrazení mezi lineárními prostory *konečné* dimenze.

**9.1.1 Tvrzení** *Ať  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$  je báze lineárního prostoru  $L_1$  nad  $\mathbb{F}$  a  $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)$  je báze lineárního prostoru  $L_2$  nad  $\mathbb{F}$ . Potom pro každé lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  existuje jediná matice  $\mathbf{A}_f : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  tak, že diagram*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}_f} & \mathbb{F}^r \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\ L_1 & \xrightarrow{f} & L_2 \end{array} \quad (9.1)$$

*komutuje.*

DŮKAZ. Podle Tvrzení 3.2.18 je lineární zobrazení  $\text{coord}_B : L_1 \rightarrow \mathbb{F}^s$  isomorfismus. To znamená, že složení

$$\mathbb{F}^s \xrightarrow{(\text{coord}_B)^{-1}} L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{\text{coord}_C} \mathbb{F}^r$$

je lineární zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$ . Podle podkapitoly 4.1 toto zobrazení jednoznačně určuje matici  $\mathbf{A}_f : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ . Potom platí

$$\mathbf{A}_f \cdot \text{coord}_B = \text{coord}_C \cdot f \cdot (\text{coord}_B)^{-1} \cdot \text{coord}_B = \text{coord}_C \cdot f$$

což znamená, že diagram (9.1) komutuje. ■

**9.1.2 Definice (Matice lineárního zobrazení vzhledem k daným uspořádaným bázím)** Ať  $B$  je uspořádaná báze lineárního prostoru  $L_1$  nad  $\mathbb{F}$  dimenze  $s$  a  $C$  je uspořádaná báze lineárního prostoru  $L_2$  nad  $\mathbb{F}$  dimenze  $r$ . Pro lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  říkáme matici  $\mathbf{A}_f : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  takové, že diagram (9.1) komutuje, *matice zobrazení  $f$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$* . Jestliže  $L_1 = L_2$  a  $B = C$  říkáme *matice zobrazení  $f$  vzhledem k bázi  $B$*  (místo vzhledem k bázím  $B$  a  $B$ ).

Nepovede-li to k nedorozumění, budeme často index  $f$  vynechávat a psát pouze  $\mathbf{A}$  místo  $\mathbf{A}_f$ .

**9.1.3 Poznámka (Každá matice je maticí nějakého abstraktního lineárního zobrazení)** Ať jsou zadány lineární prostor  $L_1$  dimenze  $s$  s uspořádanou bází  $B$  a lineární prostor  $L_2$  dimenze  $r$  s uspořádanou bází  $C$ .

Položme si následující otázku: jestliže  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  je *jákoví* matice, existuje nějaké lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  takové, že matice zobrazení  $f$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$  je přesně matice  $\mathbf{A}$ ?

Odpověď zní: ano, takové zobrazení  $f$  existuje a je jednoznačně určeno. Najdeme právě jedno lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  tak, aby diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^r \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\ L_1 & \xrightarrow{f} & L_2 \end{array}$$

komutoval. Protože  $\text{coord}_C$  je isomorfismus, můžeme definovat  $f$  jako složení

$$L_1 \xrightarrow{\text{coord}_B} \mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbb{F}^r \xrightarrow{(\text{coord}_C)^{-1}} L_2$$

Zbývá ukázat, že  $f$  je jednoznačně určeno. To je jednoduché: kdyby  $g : L_1 \rightarrow L_2$  bylo lineární zobrazení, pro které diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^r \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\ L_1 & \xrightarrow{g} & L_2 \end{array}$$

komutuje, pak platí  $g = (\text{coord}_C)^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \text{coord}_B = f$ .



**9.1.4 Poznámka** Matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^s$  byla ztotožněna s lineárním zobrazením  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ . Je evidentní, že:

*Matice lineárního zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  vzhledem ke kanonickým bázím  $K_s$  a  $K_r$  prostorů  $\mathbb{F}^s$  a  $\mathbb{F}^r$  je opět matice  $\mathbf{A}$ .*

To je jednoduché: diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^r \\ \text{coord}_{K_s} \uparrow & & \uparrow \text{coord}_{K_r} \\ \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}} & \mathbb{F}^r \end{array}$$

evidentně komutuje, protože zobrazení  $\text{coord}_{K_s}$  a  $\text{coord}_{K_r}$  jsou identity.

Zdůrazněme, že položky matice lineárního zobrazení *závisí na volbě bází*. V dalším příkladu ukážeme dvě *různé* matice *téhož* lineárního zobrazení. V Příkladu 9.1.5 také uvidíme jednoduchou a elegantní metodu, jak matici lineárního zobrazení vzhledem k daným bázím nalézt.

Upozorňujeme znovu, že je podstatný rozdíl mezi šipkou tvaru

$\longrightarrow$  (zobrazení),

a šipkou tvaru

$\mapsto$  (přirazení funkční hodnoty).

### 9.1.5 Příklad (Matice integrování polynomů) Zobrazení

$$\mathbf{int} : p(x) \mapsto \int_{-1}^1 p(x) dx$$

je lineární zobrazení z prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$  (viz Příklad 1.2.11) do prostoru  $\mathbb{R}$ .

Ukážeme, jak spočítat matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem k různým bázím prostorů  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$  a  $\mathbb{R}$ .

- (1) Najdeme matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  zobrazení  $\mathbf{int}$  vzhledem k uspořádaným bázím  $B = (1, x, x^2, x^3)$  (to je báze prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ ) a  $K_1 = (1)$  (to je kanonická báze prostoru  $\mathbb{R}$ ).

Čtverec

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{R} \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_{K_1} \\ \mathbb{R}^{\leq 3}[x] & \xrightarrow{\mathbf{int}} & \mathbb{R} \end{array}$$

musí být komutativní. Proto se musí lineární zobrazení  $\mathbf{A} \cdot \text{coord}_B$  a  $\text{coord}_{K_1} \cdot \mathbf{int}$  shodovat na všech prvcích báze  $B$ .

- (a) Shoda na prvním vektoru 1 báze  $B$ .

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & 2 \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_{K_1} \\ 1 & \xrightarrow{\mathbf{int}} & 2 \end{array}$$

- (b) Shoda na druhém vektoru  $x$  báze  $B$ .

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & 0 \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_{K_1} \\ x & \xrightarrow{\mathbf{int}} & 0 \end{array}$$

(c) Shoda na třetím vektoru  $x^2$  báze  $B$ .

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \frac{2}{3} \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_{K_1} \\ x^2 & \xrightarrow{\text{int}} & \frac{2}{3} \end{array}$$

(d) Shoda na čtvrtém vektoru  $x^3$  báze  $B$ .

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & 0 \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_{K_1} \\ x^3 & \xrightarrow{\text{int}} & 0 \end{array}$$

Proto platí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Například pro polynom  $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x + 3$  platí

$$\text{coord}_B(p(x)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tudíž součin

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

ukazuje, že  $\text{coord}_{K_1}(\text{int}(p(x))) = 4$ . Protože  $\text{coord}_{K_1}$  je identické zobrazení, platí  $\text{int}(p(x)) = 4$ .

- (2) Najdeme matici  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  zobrazení  $\text{int}$  vzhledem k uspořádaným bázím  $C = (1, x-1, x^2-1, x^3-1)$  (to je báze prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ ) a  $D = (2)$  (to je báze prostoru  $\mathbb{R}$ ).

Čtverec

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \mathbb{R} \\ \uparrow \text{coord}_C & & \uparrow \text{coord}_D \\ \mathbb{R}^{\leq 3}[x] & \xrightarrow{\text{int}} & \mathbb{R} \end{array}$$

musí být komutativní. Proto se musí lineární zobrazení  $\mathbf{B} \cdot \text{coord}_C$  a  $\text{coord}_D \cdot \text{int}$  shodovat na všech prvcích báze  $C$ .

(a) Shoda na prvním vektoru 1 báze  $C$ .

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{B}} & 1 \\ \uparrow \text{coord}_C & & \uparrow \text{coord}_D \\ 1 & \xrightarrow{\text{int}} & 2 \end{array}$$

(b) Shoda na druhém vektoru  $x - 1$  báze  $C$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & -1 \\
 \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_D \\
 x - 1 & \xrightarrow{\text{int}} & -2
 \end{array}$$

(c) Shoda na třetím vektoru  $x^2 - 1$  báze  $C$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & -\frac{2}{3} \\
 \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_D \\
 x^2 - 1 & \xrightarrow{\text{int}} & \frac{2}{3} - 2
 \end{array}$$

(d) Shoda na čtvrtém vektoru  $x^3 - 1$  báze  $C$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & -1 \\
 \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_D \\
 x^3 - 1 & \xrightarrow{\text{int}} & -2
 \end{array}$$

Proto platí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Například pro polynom  $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x - 8$  platí

$$\text{coord}_B(p(x)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

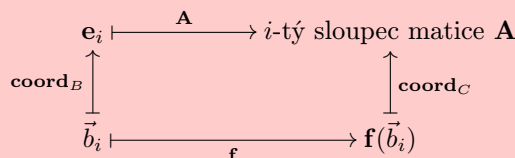
Tudíž platí

$$\text{coord}_D(\text{int}(p(x))) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -8$$

Příklad 9.1.5 ukazuje *obecnou metodu* pro nalezení matice  $\mathbf{A}$  lineárního zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  vzhledem k uspořádaným bázím  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$  a  $C$ :

Do  $i$ -tého sloupce matice  $\mathbf{A}$  napišme souřadnice vektoru  $\mathbf{f}(\vec{b}_i)$  vzhledem k bázi  $C$ .

Opravdu, diagram (9.1) totiž na vektoru  $\vec{b}_i$  nabývá tvaru:



protože souřadnice  $i$ -tého vektoru (jakékoli) báze  $B$  vzhledem k  $B$  je vždy vektor  $\mathbf{e}_i$  a  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$  je vždy  $i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A}$ .

Ukažme ještě jeden příklad výpočtu matice lineárního zobrazení.

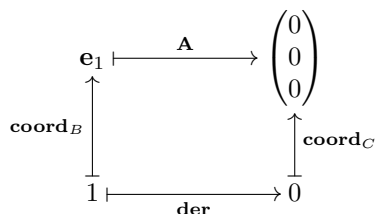
**9.1.6 Příklad (Matice zobrazení pro derivování polynomů)** Zobrazení  $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ , kde  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$  je prostor reálných polynomů v neurčité  $x$  stupně nejvýše 3 a  $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$  je prostor reálných polynomů v neurčité  $x$  stupně nejvýše 2 (viz Příklad 1.2.11) je definováno takto:

$$\mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad \text{kde } a, b, c \text{ jsou reálná čísla}$$

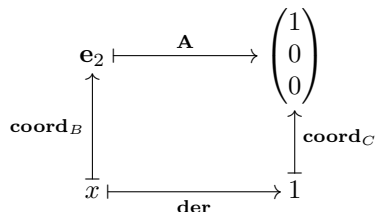
Je snadné se přesvědčit, že zobrazení  $\mathbf{der}$  je lineární.

Spočítáme matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zobrazení  $\mathbf{der}$  vzhledem k uspořádané bázi  $B = (1, x, x^2, x^3)$  prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$  a uspořádané bázi  $C = (1, x, x^2)$  prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ . Budeme postupovat stejně jako v Příkladu 9.1.5. To jest, využijeme diagram (9.1) a budeme požadovat shodu dvou lineárních zobrazení na prvcích uspořádané báze  $B = (1, x, x^2, x^3)$  prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ .

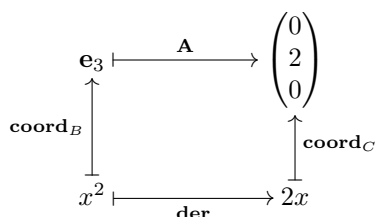
(1) Shoda na prvním vektoru báze  $B$ :



(2) Shoda na druhém vektoru báze  $B$ :



(3) Shoda na třetím vektoru báze  $B$ :





(4) Shoda na čtvrtém vektoru báze  $B$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_4 & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\ x^3 & \xrightarrow{\text{der}} & 3x^2 \end{array}$$

Ukázali jsme, že matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení **der** vzhledem k uspořádané bázi  $B = (1, x, x^2, x^3)$  prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$  a uspořádané bázi  $C = (1, x, x^2)$  prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ .

Z lineárních zobrazení lze vytvářet *nová* lineární zobrazení dvěma způsoby:

- (1) Skládáním zobrazení.
- (2) Sčítáním dvou lineárních zobrazení a vynásobením lineárního zobrazení skalárem.

Ukážeme nyní, že nově vzniklá lineární zobrazení mají matice, které se dají spočítat z matic původních lineárních zobrazení (sice součinem matic, součtem matic a vynásobením matice skalárem).

### 9.1.7 Tvrzení (Matice identity a matice složeného zobrazení)

- (1) Ať  $\dim(L) = n$  a ať  $B$  je uspořádaná báze prostoru  $L$ . Potom matice identického zobrazení  $\text{id} : L \rightarrow L$  vzhledem k bázi  $B$  je jednotková matice  $\mathbf{E}_n : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ .
- (2) Ať lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  má matici  $\mathbf{A}$  vzhledem k uspořádaným bázím  $B$  a  $C$ , ať lineární zobrazení  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$  má matici  $\mathbf{B}$  vzhledem k uspořádaným bázím  $C$  a  $D$ . Potom lineární zobrazení  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_3$  má matici  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  vzhledem k bázím  $B$  a  $D$ .

DŮKAZ. Důkaz okamžitě plyne z analýzy diagramu (9.1).

- (1) Diagram matice  $\mathbf{A}$  zobrazení  $\text{id} : L \rightarrow L$  vzhledem k bázi  $B$  má tvar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^n \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_B \\ L & \xrightarrow{\text{id}} & L \end{array}$$

Označíme-li jednotlivé vektory báze  $B$  jako  $\vec{b}_i$ , potom musí pro každé  $i = 1, \dots, n$  platit

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_i & \xrightarrow{\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i} & \mathbf{e}_i \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_B \\ \vec{b}_i & \xrightarrow{\text{id}} & \vec{b}_i \end{array}$$

Protože  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$  je  $i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A}$ , má matice  $\mathbf{A}$  v  $i$ -tém sloupci vektor  $\mathbf{e}_i$ . To znamená, že  $\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ .

- (2) Označme  $\dim(L_1) = s$ ,  $\dim(L_2) = t$ ,  $\dim(L_3) = r$ . Diagramy pro matice zobrazení  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}$  mají tvar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^t \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\ L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{F}^t & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \mathbb{F}^r \\ \text{coord}_C \uparrow & & \uparrow \text{coord}_D \\ L_2 & \xrightarrow{\mathbf{g}} & L_3 \end{array}$$

Všimněme si šipky pro zobrazení  $\text{coord}_C$ . Ta je pro oba komutativní diagramy společná. Proto můžeme oba diagramy za zobrazení  $\text{coord}_C$  „slepit“, viz Poznámku 2.2.2. Dostaneme opět komutativní diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^t & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \mathbb{F}^r \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C & & \uparrow \text{coord}_D \\ L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_2 & \xrightarrow{\mathbf{g}} & L_3 \end{array}$$

který můžeme přepsat i takto:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^t & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \mathbb{F}^r \\ \uparrow \text{coord}_B & & & & \uparrow \text{coord}_D \\ L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_2 & \xrightarrow{\mathbf{g}} & L_3 \end{array}$$

Poslední diagram ovšem říká, že matice lineárního zobrazení  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$  vzhledem k bázím  $B$  a  $D$  je matice  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ . ■

### 9.1.8 Tvzení (Matice součtu lineárních zobrazení a lineárního zobrazení násobeného skalárem)

Ať lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  má matici  $\mathbf{A}$  vzhledem k uspořádaným bázím  $B$  a  $C$ , ať  $\mathbf{g} : L_1 \rightarrow L_2$  má matici  $\mathbf{B}$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ . Potom platí:

- (1) Lineární zobrazení  $\mathbf{f} + \mathbf{g} : L_1 \rightarrow L_2$  má matici  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ .
- (2) Lineární zobrazení  $a \cdot \mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  má matici  $a \cdot \mathbf{A}$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ .

DŮKAZ. Opět budeme analyzovat diagram (9.1). Označme uspořádanou bázi  $B$  jako  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$ .

- (1) Označme jako  $\mathbf{C}$  matici zobrazení  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ . Chceme ukázat, že  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

Pro každý vektor  $\vec{b}_i$  platí:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_i & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \text{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_i)) \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C \\ \vec{b}_i & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbf{f}(\vec{b}_i) \end{array} & & \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_i & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \text{coord}_C(\mathbf{g}(\vec{b}_i)) \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C \\ \vec{b}_i & \xrightarrow{\mathbf{g}} & \mathbf{g}(\vec{b}_i) \end{array} \end{array}$$

a

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_i & \xrightarrow{\mathbf{C}} & \text{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_i)) + \text{coord}_C(\mathbf{g}(\vec{b}_i)) \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C \\ \vec{b}_i & \xrightarrow{\mathbf{f} + \mathbf{g}} & \mathbf{f}(\vec{b}_i) + \mathbf{g}(\vec{b}_i) \end{array}$$

kde v posledním obrázku jsme využili, že  $\text{coord}_C$  je lineární zobrazení.

To znamená, že  $i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{C}$  je roven součtu  $i$ -tých sloupců matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ . Dokázali jsme, že  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

- (2) Označme jako  $\mathbf{C}$  matici zobrazení  $a \cdot \mathbf{f}$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ . Chceme ukázat, že  $\mathbf{C} = a \cdot \mathbf{A}$ .

Pro každý vektor  $\vec{b}_i$  platí:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_i & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \text{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_i)) \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C \\ \vec{b}_i & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbf{f}(\vec{b}_i) \end{array} & & \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_i & \xrightarrow{\mathbf{C}} & a \cdot \text{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_i)) \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C \\ \vec{b}_i & \xrightarrow{a \cdot \mathbf{f}} & a \cdot \mathbf{f}(\vec{b}_i) \end{array} \end{array}$$

kde v obrázku napravo jsme využili, že  $\text{coord}_C$  je lineární zobrazení.

To znamená, že  $i$ -tý sloupec matice  $C$  je roven  $a$ -násobku  $i$ -tého sloupce matice  $A$ . Dokázali jsme, že  $C = a \cdot A$ . ■

Dalším výsledkem bude tvrzení o matici *direktního součtu* lineárních zobrazení. Připomeňme nejprve Definice 1.6.13, 2.2.7 a Příklad 4.3.6, popisující direktní součet matic.

**9.1.9 Tvrzení (Matice direktního součtu lineárních zobrazení)** *At  $L_1 = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$  a  $L_2 = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$  a at lineární zobrazení  $f_1 : W_1 \rightarrow V_1, \dots, f_k : W_k \rightarrow V_k$  mají matice  $A_1, \dots, A_k$  vzhledem k bázím  $B_1$  a  $C_1, \dots, B_k$  a  $C_k$ . Potom lineární zobrazení  $f = f_1 \oplus \dots \oplus f_k$  má matici  $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$  vzhledem k bázím  $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$  a  $C = C_1 \cup \dots \cup C_k$ .*

DŮKAZ. Protože  $B_1, \dots, B_k$  jsou báze podprostorů  $W_1, \dots, W_k$ , je  $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$  báze prostoru  $L_1$ , viz Definici 1.6.13. Stejně tak je  $C = C_1 \cup \dots \cup C_k$  báze prostoru  $L_2$ . Matice  $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$  je pak maticí zobrazení  $f = f_1 \oplus \dots \oplus f_k$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$  z Definice 2.2.7 a díky Příkladu 4.3.6. ■

Připomeňme, že v Definici 2.3.1 jsme zavedli speciální typy lineárních zobrazení: monomorfismy, epimorfismy a isomorfismy. Zjistíme nyní, jak souvisí tyto speciální vlastnosti lineárních zobrazení s vlastnostmi jejich matic.

**9.1.10 Tvrzení (Matice speciálních typů lineárních zobrazení)** *At  $\dim(L_1) = s$  a  $\dim(L_2) = r$ .*

- (1) *Zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je monomorfismus právě tehdy, když jeho matice  $A : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  (vzhledem k jakýmkoli bázím) je monomorfismus.*
- (2) *Zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je epimorfismus právě tehdy, když jeho matice  $A : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  (vzhledem k jakýmkoli bázím) je epimorfismus.*
- (3) *At  $s = r = n$ . Zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je isomorfismus právě tehdy, když jeho matice  $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  (vzhledem k jakýmkoli bázím) je isomorfismus (také: je invertibilní, je regulární).*

DŮKAZ. Všechna tři tvrzení plynou bezprostředně z analýzy diagramu (9.1) a z Tvrzení 2.3.3. Označme jako  $B$  bázi  $L_1$  a jako  $C$  bázi  $L_2$ .

- (1) Rovnost  $A = \text{coord}_C \cdot f \cdot \text{coord}_B^{-1}$  ukazuje, že  $A$  je monomorfismus, jakmile  $f$  je monomorfismus. A rovnost  $f = \text{coord}_C^{-1} \cdot A \cdot \text{coord}_B$  ukazuje, že  $f$  je monomorfismus, jakmile  $A$  je monomorfismus.
- (2) Rovnost  $A = \text{coord}_C \cdot f \cdot \text{coord}_B^{-1}$  ukazuje, že  $A$  je epimorfismus, jakmile  $f$  je epimorfismus. A rovnost  $f = \text{coord}_C^{-1} \cdot A \cdot \text{coord}_B$  ukazuje, že  $f$  je epimorfismus, jakmile  $A$  je epimorfismus.
- (3) Toto tvrzení plyne okamžitě z (1) a (2). ■

O maticích isomorfismů lze říci ještě o něco více.

**9.1.11 Tvrzení (Matice inverse isomorfismu)** *At  $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je matice isomorfismu  $f : L_1 \rightarrow L_2$  vzhledem k uspořádaným bázím  $B$  (báze prostoru  $L_1$ ) a  $C$  (báze prostoru  $L_2$ ). Potom  $A$  je isomorfismus a  $A^{-1}$  je matice lineárního zobrazení  $f^{-1} : L_2 \rightarrow L_1$  vzhledem k uspořádaným bázím  $C$  a  $B$ .*

DŮKAZ. Podle Tvrzení 9.1.10 je  $A$  isomorfismus. Označme jako  $B$  matici lineárního zobrazení  $f^{-1} : L_2 \rightarrow L_1$  vzhledem k uspořádaným bázím  $C$  a  $B$ .

Potom diagramy

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{F}^n \\
 \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\
 L_1 & \xrightarrow{f} & L_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{F}^n \\
 \text{coord}_C \uparrow & & \uparrow \text{coord}_B \\
 L_2 & \xrightarrow{f^{-1}} & L_1
 \end{array}$$

jsou komutativní. Slepme je (viz Poznámku 2.2.2) dvěma různými způsoby na komutativní diagramy

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \mathbb{F}^n \\
 \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C \\
 L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_2 & \xrightarrow{\mathbf{f}^{-1}} & L_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^n \\
 \uparrow \text{coord}_C & & \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C \\
 L_2 & \xrightarrow{\mathbf{f}^{-1}} & L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_2
 \end{array}$$

Diagram nalevo podle Tvzení 9.1.7 říká  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ , protože  $\mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{f} = \text{id}_{L_1}$ , a diagram napravo podle Tvzení 9.1.7 říká  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}_n$ , protože  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^{-1} = \text{id}_{L_2}$ . To znamená, že platí  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ . ■

**9.1.12 Příklad (Matice kanonického zobrazení do druhého duálu)** Ať  $L$  má konečnou dimenzi. Definujeme zobrazení<sup>1</sup>  $\mathbf{i}$  z  $L$  do  $(L^*)^*$  takto:  $\mathbf{i}(\vec{x}) : L^* \rightarrow \mathbb{F}$  přiřazuje každé lineární formě  $\mathbf{h} : L \rightarrow \mathbb{F}$  z prostoru  $L^*$  hodnotu  $\mathbf{h}(\vec{x})$ .

Je zřejmé, že zobrazení  $\mathbf{i}$  je lineární. Ukážeme, že  $\mathbf{i}$  je isomorfismus. Protože  $L$  a  $(L^*)^*$  mají stejnou dimenzi, stačí podle Důsledku 3.3.8 ukázat, že  $\mathbf{i}$  je monomorfismus.

Předpokládejme tedy, že platí  $\mathbf{i}(\vec{x}) = \mathbf{o}$  a  $\vec{x} \neq \vec{o}$ . Množinu  $\{\vec{x}\}$  lze podle Důsledku 3.2.15 rozšířit na bázi  $B$  prostoru  $L$ . Pro prvek  $\vec{x}^*$  duální báze  $B^*$  platí  $\vec{x}^*(\vec{x}) = 1$ . To je spor s tím, že  $\mathbf{i}(\vec{x}) = \mathbf{o}$ .

Podle Tvzení 3.5.1 platí  $\dim(L) = \dim(L^*) = \dim((L^*)^*)$ . Tvrdíme, že matice zobrazení  $\mathbf{i}$  vzhledem k bázím  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  a  $(B^*)^* = ((\vec{b}_1^*)^*, \dots, (\vec{b}_n^*)^*)$  je jednotková matice  $\mathbf{E}_n$ , tedy, že diagram

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{E}_n} & \mathbb{F}^n \\
 \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_{(B^*)^*} \\
 L & \xrightarrow{\mathbf{i}} & (L^*)^*
 \end{array}$$

je komutativní. K tomu stačí ukázat, že každé  $\mathbf{i}(\vec{b}_{j_0})$  je prvkem  $(\vec{b}_{j_0}^*)^*$  báze  $(B^*)^*$ . To je ale zřejmé z rovností

$$\mathbf{i}(\vec{b}_{j_0})(\vec{b}_i^*) = \vec{b}_i^*(\vec{b}_{j_0}) = \delta_{ij_0}$$

a z definice duální báze z důkazu Tvzení 3.5.1.

Posledním výsledkem této podkapitoly je určení matice *duálního* lineárního zobrazení. Matice duálního zobrazení vznikne *transpozicí* původní matice.

**9.1.13 Tvzení (Matice duálního zobrazení vzhledem k duálním bázím)** Ať  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$  je uspořádaná báze lineárního prostoru  $L_1$  a ať  $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)$  je uspořádaná báze lineárního prostoru  $L_2$ . Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  je matice lineárního zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ . Potom matice  $\mathbf{A}^T : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^s$  je matice duálního zobrazení  $\mathbf{f}^* : L_2^* \rightarrow L_1^*$  vzhledem k duálním uspořádaným bázím  $C^*$  a  $B^*$ .

**DŮKAZ.** Podle předpokladu je diagram

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^r \\
 \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C \\
 L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_2
 \end{array}$$

komutativní. Označme jako  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^s$  matici zobrazení  $\mathbf{f}^* : L_2^* \rightarrow L_1^*$  vzhledem k duálním bázím  $C^*$  a  $B^*$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}^r & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \mathbb{F}^s \\
 \uparrow \text{coord}_{C^*} & & \uparrow \text{coord}_{B^*} \\
 L_2^* & \xrightarrow{\mathbf{f}^*} & L_1^*
 \end{array}$$

<sup>1</sup>Prostoru  $(L^*)^*$  říkáme z pochopitelných důvodů *druhý duál* prostoru  $L$ , zobrazení  $\mathbf{i}$  pak říkáme *kanonické zobrazení* z prostoru do druhého duálu.

Potřebujeme ukázat, že pro každé  $i_0 \in \{1, \dots, r\}$  a každé  $j_0 \in \{1, \dots, s\}$  platí rovnost

$$a_{i_0 j_0} = b_{j_0 i_0}$$

Platí rovnosti

$$\begin{pmatrix} b_{1i_0} \\ b_{2i_0} \\ \vdots \\ b_{si_0} \end{pmatrix} = \mathbf{coord}_{B^*}(\mathbf{f}^*(\vec{c}_{i_0}^*)) \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} a_{1j_0} \\ a_{2j_0} \\ \vdots \\ a_{rj_0} \end{pmatrix} = \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_{j_0}))$$

které vyjadřují rovnosti

$$\mathbf{f}^*(\vec{c}_{i_0}^*) = \sum_{j=1}^s b_{ji_0} \cdot \vec{b}_j^* \quad \text{a} \quad \mathbf{f}(\vec{b}_{j_0}) = \sum_{i=1}^r a_{ij_0} \cdot \vec{c}_i$$

Tudíž (z definice duální báze) platí rovnosti

$$(\mathbf{f}^*(\vec{c}_{j_0}^*))(\vec{b}_{i_0}) = \sum_{i=1}^s b_{ji_0} \cdot \vec{b}_i^*(\vec{b}_{i_0}) = b_{j_0 i_0} \quad \text{a} \quad \vec{c}_{i_0}^*(\mathbf{f}(\vec{b}_{j_0})) = \sum_{i=1}^r a_{ij_0} \cdot \vec{c}_{i_0}^*(\vec{c}_i) = a_{i_0 j_0}$$

■



**9.1.14 Poznámka (Duální zobrazení k matici)** Podle Poznámky 9.1.4 je matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  maticí lineárního zobrazení zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  vzhledem ke *kanonickým* bázím  $K_s$  a  $K_r$  prostorů  $\mathbb{F}^s$  a  $\mathbb{F}^r$ .

Jak vypadá duální zobrazení  $\mathbf{A}^* : (\mathbb{F}^r)^* \rightarrow (\mathbb{F}^s)^*$ ? Především je nutné poznamenat, že prostor  $(\mathbb{F}^r)^*$  *není totožný* s prostorem  $\mathbb{F}^r$ . Prostor  $(\mathbb{F}^r)^*$  je prostor *lineárních forem* na  $\mathbb{F}^r$ . To znamená, že typický prvek  $\mathbf{h}$  prostoru  $(\mathbb{F}^r)^*$  je lineární zobrazení z  $\mathbb{F}^r$  do  $\mathbb{F}$ . Neboli vektory v  $(\mathbb{F}^r)^*$  jsou matice (také: *kovektory*, viz podkapitolu 4.4) tvaru

$$\mathbf{h} = (h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_r)$$

Podobné pozorování platí pro prvky prostoru  $(\mathbb{F}^s)^*$ .

Z Poznámky 4.4.4 víme, že duální báze  $K_r^*$  prostoru  $(\mathbb{F}^r)^*$  je tvořena kovektory  $\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \dots, \mathbf{e}_r^T$ . Lineární forma  $\mathbf{h} = (h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_r)$  z  $(\mathbb{F}^r)^*$  má tedy vzhledem k bázi  $K_r^*$  souřadnice

$$\mathbf{coord}_{K_r^*}(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_r \end{pmatrix}$$

Diagram pro matici lineárního zobrazení  $\mathbf{A}^* : (\mathbb{F}^r)^* \rightarrow (\mathbb{F}^s)^*$  vzhledem k bázím  $K_r^*$  a  $K_s^*$  tedy podle Tvzení 9.1.13 na prvku  $\mathbf{e}_i^T$  báze  $K_r^*$  vypadá takto:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_i & \xrightarrow{\mathbf{A}^T} & i\text{-tý sloupec } \mathbf{A}^T \\ \uparrow \mathbf{coord}_{K_r^*} & & \uparrow \mathbf{coord}_{K_s^*} \\ \mathbf{e}_i^T & \xrightarrow{\mathbf{A}^*} & \mathbf{A}^*(\mathbf{e}_i^T) \end{array}$$

To znamená, že souřadnice kovektoru  $\mathbf{A}^*(\mathbf{e}_i^T)$  tvoří  $i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{A}^T$ , neboli kovektor  $\mathbf{A}^*(\mathbf{e}_i^T)$  je  $i$ -tý *řádek* matice  $\mathbf{A}$ , neboli platí

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{e}_i^T) = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{A}$$

To ale znamená, že duální zobrazení  $\mathbf{A}^* : (\mathbb{F}^r)^* \rightarrow (\mathbb{F}^s)^*$  lze opět popsat součinem matic, *ale v opačném pořadí* než pro lineární zobrazení  $\mathbf{A}$ . Přesněji: duální zobrazení  $\mathbf{A}^* : (\mathbb{F}^r)^* \rightarrow (\mathbb{F}^s)^*$  je popsáno

$$\mathbf{A}^* : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{h} \cdot \mathbf{A}$$

pro každý kovektor  $\mathbf{h}$  v  $(\mathbb{F}^r)^*$ . To je přesně lineární zobrazení z Příkladu 4.4.5.

**9.1.15 Důsledek** Ať  $f : L_1 \rightarrow L_2$  má matici  $\mathbf{A}$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ , a ať  $g : L_2 \rightarrow L_3$  má matici  $\mathbf{B}$  vzhledem k bázím  $C$  a  $D$ . Potom duální zobrazení  $(g \cdot f)^* : L_3^* \rightarrow L_1^*$  má vzhledem k duálním bázím  $D^*$  a  $B^*$  matici  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$ .

DŮKAZ. Podle Tvzení 9.1.7 a 9.1.13 má duální zobrazení  $(g \cdot f)^* : L_3^* \rightarrow L_1^*$  vzhledem k duálním bázím  $D^*$  a  $B^*$  matici  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T$ . Ovšem podle 6.1.5 platí rovnost  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$ . ■

Výsledky této podkapitoly se dají shrnout do sloganu:

*Cokoli chcete dělat s lineárním zobrazením, můžete stejně tak dobře dělat s maticí tohoto lineárního zobrazení.*

Trochu obšírněji:

- (1) Skládání lineárních zobrazení odpovídá násobení jejich matic.
- (2) Sčítání lineárních zobrazení odpovídá sčítání jejich matic.
- (3) Skalární násobek lineárního zobrazení odpovídá skalárnímu násobku jeho matice.
- (4) Direktní součet lineárních zobrazení odpovídá direktnímu součtu jejich matic.
- (5) Lineární zobrazení je monomorfismus/epimorfismus/isomorfismus právě tehdy, když stejnou vlastnost má jeho matice.
- (6) Matice inverse k isomorfismu je inverse matice původního zobrazení.
- (7) Matice duálního zobrazení je transponovaná matice k matici původního zobrazení.

## 9.2 Matice transformace souřadnic



**9.2.1 Příklad (Matice rotace vzhledem k netradiční bázi  $\mathbb{R}^2$ )** V Příkladu 4.1.7 jsme se dozvěděli, že matice

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

kde  $\alpha \in [0; 2\pi)$ , je maticí rotace o úhel  $\alpha$  (otáčíme proti směru hodinových ručiček). Podle Poznámky 9.1.4 je  $\mathbf{R}_\alpha$  maticí rotace vzhledem ke *kanonické* uspořádané bázi  $K_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

Z nějakých důvodů (které mohou mít velký praktický význam) se rozhodneme studovat *totéž* lineární zobrazení (tj. rotaci o úhel  $\alpha$ ), ale v *jiném* souřadnicovém systému v  $\mathbb{R}^2$ . Například bychom mohli chtít pracovat se souřadnicovým systémem  $B = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  z následujícího obrázku:

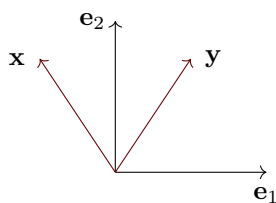


Diagram (9.1) nám dává návod, jak matici  $\mathbf{A}$  zobrazení  $\mathbf{R}_\alpha$  vzhledem k nové bázi nalézt. Diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_B \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (9.2)$$

musí být komutativní a stačí nyní porovnat hodnoty na vektorech  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  z báze  $B$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \text{coord}_B(\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}) \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_B \\ \mathbf{x} & \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} & \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_2 & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \text{coord}_B(\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y}) \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_B \\ \mathbf{y} & \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} & \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \end{array}$$

To je jistě možné udělat, my však chceme postupovat *konceptněji*. Možná má báze  $B = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  pro nás velký význam, a my budeme chtít nalézt matice zobrazení vzhledem  $B$  pro velkou řadu lineárních zobrazení.

Matice  $\mathbf{R}_\alpha$  je podle Poznámky 9.1.4 maticí vzhledem ke kanonické bázi  $K_2$ . Proto komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \text{coord}_{K_2} & & \uparrow \text{coord}_{K_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

a my k němu můžeme z obou stran „nalepit“ (viz Poznámku 2.2.2) komutativní diagramy

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_{K_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \text{coord}_{K_2} & & \uparrow \text{coord}_B \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

kde jsme jako  $\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$  označili matici identity vzhledem k bázím  $B$  a  $K_2$  a jako  $\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}$  jsme označili matici identity vzhledem k bázím  $K_2$  a  $B$ .

Po slepení dostaneme komutativní diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_{K_2} & & \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_B \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

což je přesně diagram (9.2)! Protože matice lineárního zobrazení je jednoznačně určena, musí platit rovnost

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$$

Tento způsob výpočtu má evidentní výhodu: matice  $\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}$  a  $\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$  si spočteme předem, a pokud nás někdo požádá o matici  $\mathbf{B}$  lineárního zobrazení  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vzhledem k nové bázi  $B$ , můžeme psát

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$$

Situace bude dokonce v tomto případě ještě o něco jednodušší: komutativní diagramy

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_{K_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \text{coord}_{K_2} & & \uparrow \text{coord}_B \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

můžeme také „slepit“, dokonce dvěma různými způsoby. Dostaneme dva komutativní diagramy

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}} & \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_{K_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}} & \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \text{coord}_{K_2} & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \text{coord}_{K_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

kteřé podle Tvzení 9.1.7 říkají, že platí

$$\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2} = \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{T}_{B \mapsto K_2} \cdot \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} = \mathbf{E}_2$$

protože matice lineárního zobrazení je určena jednoznačně. To ale znamená, že platí

$$(\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B})^{-1} = \mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$$

a my můžeme pro hledanou matici  $\mathbf{B}$  psát

$$\mathbf{B} = (\mathbf{T}_{B \mapsto K_2})^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{B} = \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \mathbf{M} \cdot (\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B})^{-1}$$

Úvahy z Příkladu 9.2.1 nyní zobecníme na jakákoli lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ .

**9.2.2 Definice (Matice transformace souřadnic)** Ať  $B$  a  $C$  jsou uspořádané báze prostoru  $L$  dimenze  $n$ . Matice  $\mathbf{T}_{B \mapsto C} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  zobrazení  $\text{id} : L \longrightarrow L$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$  říkáme *matice transformace souřadnic z báze  $B$  do báze  $C$* . To jest, pro matici  $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$  diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B \mapsto C}} & \mathbb{F}^n \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\ L & \xrightarrow{\text{id}} & L \end{array} \quad (9.3)$$

komutuje.

Matice  $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$  transformace souřadnic z uspořádané báze  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  do uspořádané báze  $C$  je matice *velmi speciálního* lineárního zobrazení vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ , totiž identity. Z toho okamžitě vyplývá, jak matici  $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$  nalézt:

Do  $i$ -tého sloupce matice  $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$  napíšeme souřadnice vektoru  $\vec{b}_i$  vzhledem k bázi  $C$ .

Opravdu, diagram (9.1) totiž na vektoru  $\vec{b}_i$  nabývá tvaru:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_i & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B \mapsto C}} & i\text{-tý sloupec matice } \mathbf{T}_{B \mapsto C} \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\ \vec{b}_i & \xrightarrow{\text{id}} & \vec{b}_i \end{array}$$

protože souřadnice  $i$ -tého vektoru (jakékoli) báze  $B$  vzhledem k  $B$  je vždy vektor  $\mathbf{e}_i$  a  $\mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{e}_i$  je vždy  $i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ .

Poznamenejme ještě, že matice  $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$  *přepočítává souřadnice* z báze  $B$  do báze  $C$ , tj. pro každý vektor  $\vec{v}$  platí rovnost

$$\text{coord}_C(\vec{v}) = \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \text{coord}_B(\vec{v})$$

To je důsledek diagramu (9.1).

**9.2.3 Poznámka (Každou regulární matici je možné považovat za matici transformace souřadnic)** Ať  $\mathbf{T} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  je regulární matice, označme pro každé  $i = 1, \dots, n$  jako  $\mathbf{t}_i = \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i$  její  $i$ -tý sloupec. Například podle shrnutí vlastností matic v Odstavci 6.1.6 je  $\text{rank}(\mathbf{T}) = n$ . Proto  $T = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)$  je uspořádaná báze prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Matice  $\mathbf{T}$  je pak přímo podle Definice 9.2.2 rovna matici  $\mathbf{T}_{T \mapsto K_n}$ .

Úvahy z Příkladu 9.2.1 nyní můžeme zformulovat zcela abstraktně: to jest, vysvětlíme, jakým způsobem se změni matice lineárního zobrazení, když se rozhodneme změnit báze jednotlivých prostorů.



**9.2.4 Tvrzení (Matice téhož zobrazení vzhledem k jiným bázím)** *At  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární zobrazení,  $\dim(L_1) = s$ ,  $\dim(L_2) = r$ . At  $f$  má matici  $A : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ . Potom  $f$  má matici*

$$\mathbf{T}_{C \mapsto C'} \cdot A \cdot \mathbf{T}_{B' \mapsto B}$$

*vzhledem k bázím  $B'$  a  $C'$ .*

DŮKAZ. Protože diagramy

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B' \mapsto B}} & \mathbb{F}^s & & \mathbb{F}^s & \xrightarrow{A} & \mathbb{F}^r & & \mathbb{F}^r & \xrightarrow{\mathbf{T}_{C \mapsto C'}} & \mathbb{F}^r \\ \text{coord}_{B'} \uparrow & & \text{coord}_B \uparrow & & \text{coord}_B \uparrow & & \text{coord}_C \uparrow & & \text{coord}_C \uparrow & & \text{coord}_{C'} \uparrow \\ L_1 & \xrightarrow{\text{id}} & L_1 & & L_1 & \xrightarrow{f} & L_2 & & L_2 & \xrightarrow{\text{id}} & L_2 \end{array}$$

komutují, komutuje i diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B' \mapsto B}} & \mathbb{F}^s & \xrightarrow{A} & \mathbb{F}^r & \xrightarrow{\mathbf{T}_{C \mapsto C'}} & \mathbb{F}^r \\ \text{coord}_{B'} \uparrow & & & & & & \text{coord}_{C'} \uparrow \\ L_1 & \xrightarrow{\text{id}} & L_1 & \xrightarrow{f} & L_2 & \xrightarrow{\text{id}} & L_2 \end{array}$$

vzniklý jejich slepením. To jsme chtěli dokázat. ■

Abychom mohli začít počítat příklady, zformulujeme nejprve užitečné (a jednoduché) vlastnosti matic transformace souřadnic.

**9.2.5 Tvrzení (Základní vlastnosti matic transformace souřadnic)** *At  $L$  je lineární prostor dimenze  $n$ . Potom platí:*

- (1)  $\mathbf{T}_{B \mapsto B} = \mathbf{E}_n$  pro jakoukoli uspořádanou bázi  $B$  prostoru  $L$ .
- (2)  $\mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto C} = \mathbf{T}_{B \mapsto D}$  pro jakékoli uspořádané báze  $B, C$  a  $D$  prostoru  $L$ .
- (3) Pro jakékoli uspořádané báze  $B$  a  $C$  prostoru  $L$  je matice  $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$  isomorfismus (nebo: invertibilní, regulární) a platí  $\mathbf{T}_{B \mapsto C}^{-1} = \mathbf{T}_{C \mapsto B}$ .

DŮKAZ. Všechny tři vlastnosti jsou jednoduchým důsledkem Tvrzení 9.1.7 a 9.1.11 a toho, že  $\text{id} : L \rightarrow L$  je isomorfismus, pro který platí  $\text{id}^{-1} = \text{id}$ .

- (1) Rovnost  $\mathbf{T}_{B \mapsto B} = \mathbf{E}_n$  platí pro jakoukoli uspořádanou bázi  $B$  prostoru  $L$  přímo podle Tvrzení 9.1.7.
- (2) At  $B, C$  a  $D$  jsou uspořádané báze prostoru  $L$ . Potom jsou diagramy

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B \mapsto C}} & \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{T}_{C \mapsto D}} & \mathbb{F}^n \\ \text{coord}_B \uparrow & & \text{coord}_C \uparrow & & \text{coord}_C \uparrow & & \text{coord}_D \uparrow \\ L & \xrightarrow{\text{id}} & L & & L & \xrightarrow{\text{id}} & L \end{array}$$

komutativní. Slepením vznikne komutativní diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B \mapsto C}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{T}_{C \mapsto D}} & \mathbb{F}^n \\ \text{coord}_B \uparrow & & & & \text{coord}_D \uparrow \\ L & \xrightarrow{\text{id}} & L & \xrightarrow{\text{id}} & L \end{array}$$

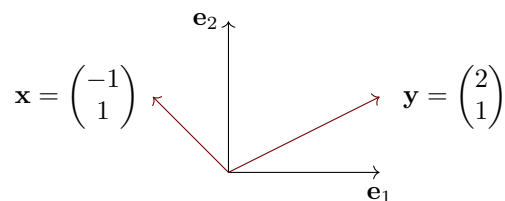
který dokazuje rovnost  $\mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto C} = \mathbf{T}_{B \mapsto D}$ .

- (3) Ať  $B$  a  $C$  jsou uspořádané báze prostoru  $L$ . Potom  $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$  je isomorfismus podle Tvzení 9.1.10. Podle Tvzení 9.1.11 platí rovnost  $\mathbf{T}_{B \mapsto C}^{-1} = \mathbf{T}_{C \mapsto B}$ , protože  $\text{id} : L \rightarrow L$  je isomorfismus, pro který platí  $\text{id}^{-1} = \text{id}$ . ■

**9.2.6 Důsledek** Ať  $f : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení,  $\dim(L) = n$ . Jestliže  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je matice zobrazení  $f$  vzhledem k bázi  $B$ , potom matice  $(\mathbf{T}_{B' \mapsto B})^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B' \mapsto B}$  je matice zobrazení  $f$  vzhledem k bázi  $B'$ .

DŮKAZ. Podle Tvzení 9.2.4 platí, že matice zobrazení  $f$  vzhledem k bázi  $B'$  je  $\mathbf{T}_{B \mapsto B'} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B' \mapsto B}$ . Podle Tvzení 9.2.5 platí  $\mathbf{T}_{B \mapsto B'} = (\mathbf{T}_{B' \mapsto B})^{-1}$ . ■

**9.2.7 Příklad (Matice transformací roviny v netradiční bázi)** Všechna základní lineární zobrazení z Příkladu 4.1.7 chceme vyjádřit v uspořádané bázi  $B = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , kde



Je-li  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  matice jakéhokoli zobrazení vzhledem ke kanonické bázi  $K_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , pak podle Tvzení 9.2.4 hledáme matice tvaru

$$\mathbf{M}' = \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$$

Spočítat matici  $\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$  je ale velmi snadné: podle definice máme do  $i$ -tého sloupce matice  $\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$  napsat souřadnice  $i$ -tého vektoru báze  $B$  vzhledem k bázi  $K_2$ . Proto platí

$$\mathbf{T}_{B \mapsto K_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podle Tvzení 9.2.5 je

$$\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} = (\mathbf{T}_{B \mapsto K_2})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proto je matice

$$\mathbf{M}' = \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

maticí zobrazení vzhledem k bázi  $B$ .

- (1) Projekce na osu  $x$  má vzhledem k bázi  $B$  matici

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}_x \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pozor: s touto informací je třeba umět zacházet. Například výpočet

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

neznamená, že projekce vektoru  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  na osu  $x$  je vektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Tento výpočet znamená, že projekce na osu  $x$  vektoru  $\mathbf{v}$ , který má souřadnice  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  vzhledem k bázi  $B$  je vektor, který má vzhledem k bázi  $B$  souřadnice  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(2) Projekce na osu  $y$  má vzhledem k bázi  $B$  matici

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}_y \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Změna měřítka má vzhledem k bázi  $B$  matici

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M}_{a,b} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -a+2b & -2a+2b \\ -a+b & 2a+b \end{pmatrix}$$

(4) Rotace o úhel  $\alpha$  má vzhledem k bázi  $B$  matici

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cos \alpha - \sin \alpha & 5 \sin \alpha \\ -2 \sin \alpha & 3 \cos \alpha + \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5) Zkosení má matici

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S}_{a,b} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2a-b+3 & 4a-b \\ -a+b & 2a+b+3 \end{pmatrix}$$

Příklad 9.2.7 ukázal *praktický trik*:

Pokud známe matici  $\mathbf{T}_{B \rightarrow C}$ , je často nejjednodušší spočítat matici  $\mathbf{T}_{C \rightarrow B}$  jako inverzi matice  $\mathbf{T}_{B \rightarrow C}$ .

Toho se často využívá, pokud matici  $\mathbf{T}_{B \rightarrow C}$  umíme velmi rychle najít. Mírné zobecnění tohoto triku je:

Ať  $B_{easy}$  je báze s vlastností: pro každou bázi  $B$  je snadné (rychlé) najít matici  $\mathbf{T}_{B \rightarrow B_{easy}}$ .

Potom pro nalezení matice  $\mathbf{T}_{B \rightarrow C}$  můžeme využít vzorce

$$\mathbf{T}_{B \rightarrow C} = \mathbf{T}_{B_{easy} \rightarrow C} \cdot \mathbf{T}_{B \rightarrow B_{easy}} = (\mathbf{T}_{C \rightarrow B_{easy}})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B \rightarrow B_{easy}}$$

z Tvzení 9.2.5.

**9.2.8 Příklad (Matice derivování polynomů vzhledem k netradičním bázím)** V Příkladu 9.1.6 jsme ukázali, že lineární zobrazení  $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ , kde

$$\mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad \text{kde } a, b, c \text{ jsou reálná čísla}$$

má matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

vzhledem k uspořádané bázi  $B = (1, x, x^2, x^3)$  prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$  a uspořádané bázi  $C = (1, x, x^2)$  prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ .

Spočítáme matici  $\mathbf{B}$  zobrazení  $\mathbf{der}$  vzhledem k uspořádaným bázím  $B' = (1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3)$  a  $C$ .

Podle Tvzení 9.2.4 platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_{C \rightarrow C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B' \rightarrow B}$$

Matice  $\mathbf{A}$  známe. Stačí tedy spočítat matice transformace souřadnic  $\mathbf{T}_{B' \rightarrow B}$  a  $\mathbf{T}_{C \rightarrow C}$ .

(1) Výpočet matice  $\mathbf{T}_{B' \rightarrow B}$  provedeme již nám dobře známým způsobem. Diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B' \rightarrow B}} & \mathbb{R}^3 \\ \text{coord}_{B'} \uparrow & & \uparrow \text{coord}_B \\ \mathbb{R}^{\leq 3}[x] & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \end{array}$$

musí komutovat, a my jej projdeme na jednotlivých prvcích báze  $B'$  prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ . Dostaneme tak požadavky

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B' \mapsto B}} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \text{coord}_{B'} & & \uparrow \text{coord}_B \\ 1 & \xrightarrow{\text{id}} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_2 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B' \mapsto B}} & \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \text{coord}_{B'} & & \uparrow \text{coord}_B \\ x-2 & \xrightarrow{\text{id}} & x-2 \end{array}$$

a

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_3 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B' \mapsto B}} & \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \text{coord}_{B'} & & \uparrow \text{coord}_B \\ (x-2)^2 & \xrightarrow{\text{id}} & (x-2)^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_4 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B' \mapsto B}} & \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \text{coord}_{B'} & & \uparrow \text{coord}_B \\ (x-2)^3 & \xrightarrow{\text{id}} & (x-2)^3 \end{array}$$

Proto platí

$$\mathbf{T}_{B' \mapsto B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Výpočet matice  $\mathbf{T}_{C \mapsto C}$  je jednoduchý. Podle Tvzení 9.2.5 je

$$\mathbf{T}_{C \mapsto C} = \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Celkově tedy platí, že matice

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_{C \mapsto C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B' \mapsto B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je matice zobrazení  $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$  vzhledem k uspořádaným bázím  $B' = (1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3)$  a  $C = (1, x, x^2)$ .

Dobře, k čemu je to ale dobré? V řadě úvah (například) v numerické matematice je pro výpočty příjemné pracovat s polynomy vyjádřenými vzhledem k bázi  $B'$ . Takovému vyjádření se říká *rozvoj polynomu se středem v bodě 2*. Například polynom  $p(x) = 2x^3 - 19x^2 + 57x - 50$  má následující rozvoj se středem v bodě 2:

$$p(x) = 2(x-2)^3 - 7(x-2)^2 + 5(x-2) + 4$$

To ovšem znamená, že platí

$$\text{coord}_{B'}(p(x)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Chceme-li derivovat polynomy zapsané v rozvoji se středem v bodě 2, je pro nás matice  $\mathbf{B}$  to pravé. Výpočet

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ -38 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ukazuje, že

$$\text{der}(2(x-2)^3 - 7(x-2)^2 + 5(x-2) + 4) = 6x^2 - 38x + 57$$

### 9.2.9 Příklad (Matice transformace souřadnic a rozvoj polynomu se středem v bodě 2) Výsledek

$$\text{der}(2(x-2)^3 - 7(x-2)^2 + 5(x-2) + 4) = 6x^2 - 38x + 57$$

z Příkladu 9.2.8 nás nemohl překvapit: věděli jsme, že  $p(x) = 2(x-2)^3 - 7(x-2)^2 + 5(x-2) + 4 = 2x^3 - 19x^2 + 57x - 50$ . Jak postupovat, když chceme rozvinout *jakýkoli* polynom  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  se středem v bodě 2?

Tuto úlohu můžeme v naší terminologii přeformulovat následovně: známe-li souřadnice polynomu  $p(x)$  v prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$  vzhledem k uspořádané bázi  $B = (1, x, x^2, x^3)$ , jak zjistit jeho souřadnice vzhledem k uspořádané bázi  $B' = (1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3)$ ?

Protože diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mathbf{T}_{B \mapsto B'}} & \mathbb{R}^3 \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_{B'} \\ \mathbb{R}^{\leq 3}[x] & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \end{array}$$

musí komutovat, stačilo by najít matici  $\mathbf{T}_{B \mapsto B'}$ . Podle Tvzení 9.2.5 platí

$$\mathbf{T}_{B \mapsto B'} = (\mathbf{T}_{B' \mapsto B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro obecný polynom  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  stupně nejvýše 3 platí

$$\text{coord}_{B'}(p(x)) = \mathbf{T}_{B \mapsto B'} \cdot \text{coord}_B(p(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + 2c + 4b + 8a \\ c + 4b + 8a \\ b + 6a \\ a \end{pmatrix}$$

To znamená, že rozvoj obecného polynomu  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  stupně nejvýše 3 se středem v bodě 2 je

$$p(x) = a(x-2)^3 + (b+6a)(x-2)^2 + (c+4b+8a)(x-2) + (d+2c+4b+8a)$$

Pro polynom  $p(x) = 2x^3 - 19x^2 + 57x - 50$  z Příkladu 9.2.8 dává tento vzorec nám již dobře známý výsledek  $p(x) = 2(x-2)^3 - 7(x-2)^2 + 5(x-2) + 4$ .

## 9.3 Ekvivalence a podobnost matic

V příkladech z podkapitoly 9.2 jsme viděli, že *jedno* lineární zobrazení může mít *různé* matice vzhledem k různým bázím. V této podkapitole vysvětlíme, jakým způsobem tyto různé matice *jednoho* lineárního zobrazení spolu souvisí. Tvzení 9.2.4 nám dává návod. Víme, že platí

*Ať  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární zobrazení,  $\dim(L_1) = s$ ,  $\dim(L_2) = r$ . Ať  $f$  má matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ . Potom  $f$  má matice  $\mathbf{T}_{C \mapsto C'} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B' \mapsto B}$  vzhledem k bázím  $B'$  a  $C'$ .*

a z Tvzení 9.2.5 víme, že obě matice  $\mathbf{T}_{B' \mapsto B}$  a  $\mathbf{T}_{C \mapsto C'}$  jsou invertibilní.

Proto zavedeme tento pojem:

**9.3.1 Definice (Ekvivalentní matice)** Řekneme, že matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  jsou *ekvivalentní*, když platí rovnost

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$$

pro nějaké invertibilní matice  $\mathbf{T} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^s$  a  $\mathbf{S} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$ . Tento fakt značíme  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ .

Z Tvzení 9.2.4 tedy okamžitě plyne, že všechny matice jednoho lineárního zobrazení jsou navzájem ekvivalentní.

Ukážeme nyní, že relace  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$  má plné právo se zvat ekvivalencí (tj. ukážeme, že jde o *reflexivní*, *symetrickou* a *transitivní* binární relaci — to přesně říkají podmínky (1), (2) a (3) Tvzení 9.3.2).

**9.3.2 Tvzení (Vlastnosti relace  $\equiv$ )** *At  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ ,  $\mathbf{C} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  jsou jakékoli matice. Potom platí:*

- (1)  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$ .
- (2) Jestliže  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ , potom  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}$ .
- (3) Jestliže  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$  a současně  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{C}$ , potom  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{C}$ .

**DŮKAZ.** Budeme využívat toho, že součin invertibilních matic je opět invertibilní, a že inverse invertibilní matice je opět invertibilní. To plyne z Tvzení 2.3.3 a 2.3.4 a z toho, že matice je invertibilní právě tehdy, když je isomorfismus (viz Poznámku 4.1.11).

- (1) Protože můžeme psát  $\mathbf{A} = \mathbf{E}_r \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_s$  a protože obě matice  $\mathbf{E}_s$  a  $\mathbf{E}_r$  jsou invertibilní, vztah  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$  platí.
- (2) Předpokládejme, že platí  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ . To znamená, že  $\mathbf{B} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$  pro invertibilní matice  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{S}$ . Potom platí

$$\mathbf{A} = (\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1}) = \mathbf{S}^{-1} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

Takže platí  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}$ .

- (3) Předpokládejme, že platí  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$  a současně  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{C}$ . To znamená, že  $\mathbf{B} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$  a  $\mathbf{C} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}$  pro nějaké invertibilní matice  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{U}$ . Potom platí

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{V})$$

Takže platí  $\mathbf{C} \equiv \mathbf{A}$ . ■

Zbývá zjistit, jak se navzájem liší matice lineárního zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , počítané k různým bázím. Důsledek 9.2.6 říká:

*At  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení,  $\dim(L) = n$ . Jestliže  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je matice zobrazení  $\mathbf{f}$  vzhledem k bázi  $B$ , potom matice  $(\mathbf{T}_{B' \rightarrow B})^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B' \rightarrow B}$  je matice zobrazení  $\mathbf{f}$  vzhledem k bázi  $B'$ .*

A to nás vede k následující definici:

**9.3.3 Definice (Podobnost matic)** Řekneme, že matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  jsou *podobné*, když platí rovnost

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$$

pro nějakou invertibilní matici  $\mathbf{T} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ . Tento fakt značíme  $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ .

Podobnost matic je opět relací ekvivalence, tj. platí

**9.3.4 Tvzení (Vlastnosti relace  $\approx$ )** *At  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ,  $\mathbf{C} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  jsou jakékoli matice. Potom platí:*

- (1)  $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}$ .
- (2) Jestliže  $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ , potom  $\mathbf{B} \approx \mathbf{A}$ .
- (3) Jestliže  $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$  a současně  $\mathbf{B} \approx \mathbf{C}$ , potom  $\mathbf{A} \approx \mathbf{C}$ .

DŮKAZ. Důkaz je zcela analogický důkazu Tvzení 9.3.2 a nebudeme jej uvádět. ■

K podobnosti matic se vrátíme v Kapitole 10 při studiu vlastních hodnot lineárních zobrazení. Zmiňme na závěr ještě jednu jednoduchou, ale důležitou vlastnost podobnosti matic.

### 9.3.5 Tvzení Podobné matice mají stejný determinant.

DŮKAZ. Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  jsou podobné matice. To znamená, že platí  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$  pro nějakou invertibilní matici  $\mathbf{T} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ . Podle Tvzení 8.2.19 a Důsledku 8.4.4 (nebo podle Tvzení 5.2.9) platí:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{T}) = (\det(\mathbf{T}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{T}) = \\ &= (\det(\mathbf{T}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{T}) \cdot \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

a to jsme chtěli dokázat. ■

Tvzení 9.3.5 má opět dobrý geometrický význam. Podobné matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  můžeme považovat za matice *jednoho* zobrazení z  $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  vypočítané k *různým* bázím prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Determinant vyjadřuje kolikrát se změnil orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného souřadnicovými osami po aplikaci zobrazení  $\mathbf{M}$  na jednotlivé osy. Protože platí  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ , ukázali jsme, že orientovaný objem je invariantní na změnu souřadnicového systému.

Tvzení 9.3.5 také dovoluje definovat determinant pro libovolné lineární zobrazení (srovnejte s Definicí 5.2.2).

**9.3.6 Definice (Determinant lineárního zobrazení)** *Determinant lineárního zobrazení*  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je determinant matice  $\mathbf{f}$  vzhledem k jakékoli bázi prostoru  $L$ .

## Kapitola 10

# Vlastní hodnoty lineárních zobrazení

Almost every combination of the adjectives proper, latent, characteristic, eigen and secular, with the nouns root, number and value, has been used in the literature for what we call a proper value.

Paul R. Halmos: *Finite dimensional vector spaces*, 1958

Hledání vlastních hodnot a vlastních vektorů lineárních zobrazení lze zformulovat geometricky takto:

Pro dané lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  hledáme směry, ve kterých se  $f$  chová jako změna měřítka.

Tyto směry pak jsou vlastní vektory. Vlastní hodnoty, příslušné vlastním vektorům, pak jsou faktory, kterými měníme v daném směru měřítko.

Nalezneme-li vlastní vektory a vlastní hodnoty lineárního zobrazení, dostáváme tak podrobný geometrický popis daného lineárního zobrazení. Velmi často totiž budeme moci nalézt nový souřadnicový systém, ve kterém danému lineárnímu zobrazení dobře porozumíme.

Vlastní hodnoty lineárních zobrazení však mají i neočekávané aplikace. Přečtěte si článek

☞ Kurt Bryan a Anna Leise, [The \\$ 25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google](#), *SIAM Rev.* 48.3 (2006), 569–581

nebo Dodatek [F](#): dozvíte se, jak jsou vlastní hodnoty využívány v algoritmu PageRank.

V podkapitole [10.1](#) ukážeme geometrii *problému diagonalisace* nad  $\mathbb{R}$  a zformulujeme problém diagonalisace nad obecným tělesem  $\mathbb{F}$ .

Protože problém diagonalisace vyžaduje řešení *polynomiálních rovnic* nad tělesem  $\mathbb{F}$ , věnujeme podkapitolu [10.2](#) základům teorie polynomů nad tělesem. Dokážeme větu o dělení polynomu polynomem a odvodíme tvar kořenového rozkladu polynomu.

Hledání vlastních hodnot a vlastních vektorů lineárních zobrazení je věnována podkapitola [10.3](#). V podkapitole [10.4](#) pak zformulujeme větu, která umožní rozpoznat, kdy je dané lineární zobrazení diagonalisovatelné.

## 10.1 Problém diagonalisace

Připomeňme z Příkladu [4.1.7](#) lineární zobrazení  $M_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  změny měřítka s maticí

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

kde  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Zobrazení  $M_{a,b}$  má příjemnou vlastnost:

Existují dva směry (sice směr osy  $x$  a směr osy  $y$ ), ve kterých se zobrazení  $M_{a,b}$  chová jako dvě velmi jednoduchá lineární zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto a \cdot \mathbf{x}$  a  $\mathbf{x} \mapsto b \cdot \mathbf{x}$ .



To je způsobeno tím, že matice  $\mathbf{M}_{a,b}$  je příkladem *diagonální* matice, to jest, všechny položky matice  $\mathbf{M}_{a,b}$  jsou nulové, *kromě položek na hlavní diagonále*.

Obecné matici  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  říkáme *diagonální*, pokud všechny položky matice  $\mathbf{M}$ , které jsou mimo hlavní diagonálu, jsou nulové. Viz Problém 10.1.3.

Podle výsledků podkapitoly 9.3 víme, že zadává-li matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineární zobrazení vzhledem ke kanonické bázi  $K_2$ , pak matice tvaru  $\mathbf{T}_{K_2 \rightarrow B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B \rightarrow K_2}$  zadávají totéž zobrazení, ale vzhledem k bázi  $B$ . Je-li matice  $\mathbf{T}_{K_2 \rightarrow B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B \rightarrow K_2}$  diagonální, pak v bázi  $B$  se lineární zobrazení  $\mathbf{A}$  jeví jako změna měřítka (nebo vynásobení nulovou maticí) ve směrech souřadnicových os báze  $B$ .

Otázka zní, zda takovou bázi je možno vždy nalézt. Tomuto problému říkáme *problém diagonalisace* matice  $\mathbf{A}$  a v této podkapitole tento problém a návod k jeho řešení zformulujeme obecně.

Začneme dvěma příklady.

**10.1.1 Příklad (Diagonalisace matice)** Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Efekt lineárního zobrazení  $\mathbf{A}$  na obecný vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Z toho je vidět, že platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \mathbf{e}_1$$

To znamená, že lineární zobrazení vektor  $\mathbf{e}_1$  „natáhlo“ třikrát. Obecněji: zobrazení  $\mathbf{A}$  natahuje třikrát každý vektor tvaru  $a \cdot \mathbf{e}_1$  (tj., každý vektor na ose  $x$ ), kde  $a$  je reálné číslo, protože platí

$$\mathbf{A} \cdot (a \cdot \mathbf{e}_1) = a \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1) = a \cdot (3 \cdot \mathbf{e}_1) = 3 \cdot (a \cdot \mathbf{e}_1)$$

To znamená, že zobrazení  $\mathbf{A}$  se ve směru určeném vektorem  $\mathbf{e}_1$  chová jako homotetie  $\mathbf{x} \mapsto 3 \cdot \mathbf{x}$ .

Existují i nějaké jiné *nenulové* vektory, v jejichž směrech se  $\mathbf{A}$  chová jako homotetie?

Abychom tento problém vyřešili, zformulujeme jej přesně. Hledáme všechna reálná čísla  $\lambda$  s vlastností: existuje *nenulový* vektor  $\mathbf{v}$  takový, že platí rovnost  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ . Ještě jiná formulace je následující. Hledáme všechna reálná čísla  $\lambda$  s vlastností: existuje *nenulový* vektor  $\mathbf{v}$  takový, že platí rovnost  $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Poslední úlohu již vyřešit umíme: hledáme všechna  $\lambda$  tak, aby homogenní soustava s maticí  $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2$  měla netriviální řešení. To ovšem nastane právě tehdy, když  $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) = 0$ .

To znamená, že hledaná čísla  $\lambda$  jsou přesně všechna řešení rovnice  $\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) = 0$ . Naštěstí takovou rovnici umíme zapsat a vyřešit:

$$\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = (3-x) \cdot (2-x) = 0$$

Všechna řešení jsou tedy  $\lambda_1 = 3$  a  $\lambda_2 = 2$ .

Hodnotu  $\lambda_1 = 3$  již známe: netriviálním řešením homogenní rovnice s maticí  $\mathbf{A} - 3 \cdot \mathbf{E}_2$  je například vektor  $\mathbf{e}_1$ . Chceme-li najít netriviální řešení homogenní soustavy s maticí  $\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{E}_2$ , postupujeme standardně: zapíšeme si rozšířenou matici této soustavy

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a je vidět, že netriviálním řešením je například vektor

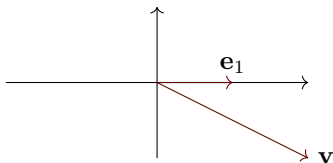
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Opravdu: ve směru určeném vektorem  $\mathbf{v}$  se zobrazení  $\mathbf{A}$  chová jako homotetie  $\mathbf{x} \mapsto 2 \cdot \mathbf{x}$ , protože platí rovnosti

$$\mathbf{A} \cdot (a \cdot \mathbf{v}) = a \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = a \cdot (2 \cdot \mathbf{v}) = 2 \cdot (a \cdot \mathbf{v})$$

pro všechna reálná čísla  $a$ .

Protože vektory  $\mathbf{e}_1$  a  $\mathbf{v}$  jsou lineárně nezávislé, určují souřadnicový systém



Očekáváme, že když změníme souřadnice na  $B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{v})$ , bude zobrazení  $\mathbf{A}$  vzhledem k bázi  $B$  pouhou změnou měřítka s maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi  $B$ .

Matice transformace souřadnic  $\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$  a  $\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}$  jsou

$$\mathbf{T}_{B \mapsto K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} = (\mathbf{T}_{B \mapsto K_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zobrazení  $\mathbf{A}$  má vzhledem k bázi  $B$  matici

$$\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

přesně, jak jsme očekávali.

**10.1.2 Příklad (matice, kterou nelze diagonalisovat)** Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ukážeme, že *neexistuje* reálné číslo  $\lambda$  a nenulový vektor  $\mathbf{v}$  z  $\mathbb{R}^2$  s vlastností  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ .

Hledané  $\lambda$  musí (podle podobných úvah jako v Příkladu 10.1.1) být kořenem rovnice

$$\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = 0$$

Rovnice  $x^2 + 1$  však v reálném oboru žádné řešení nemá.

Nyní již můžeme zformulovat problém diagonalisace obecné matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ . Připomeňme si z Definice 9.3.3 podobnost matic:  $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$  platí, když  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou matice *téhož* lineárního zobrazení vzhledem k *různým* bázím.



**10.1.3 Problém diagonalisace matic** Pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  hledáme *diagonální* matici

$$D(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$$

takovou, že platí  $\mathbf{A} \approx D(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$ . Matice  $D(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$  má v  $j$ -tém sloupci vektor  $\lambda_j \cdot \mathbf{e}_j$ , kde  $\lambda_j$  je skalár z tělesa  $\mathbb{F}$ . Neboli:  $D(\lambda_1; \dots; \lambda_n) = (\lambda_1) \oplus \dots \oplus (\lambda_n)$ , viz Příklad 4.3.6.

## 10.2 Okruh polynomů nad tělesem

V Příkladu 10.1.1 jsme viděli, že při problému diagonalisace matice budeme potřebovat umět řešit rovnice tvaru  $p(x) = 0$ , kde  $p(x)$  je polynom. To je (i v oboru komplexních čísel) poměrně komplikovaný problém. V této podkaptiole se proto podíváme detailně na množinu  $\mathbb{F}[x]$  (viz Příklad 1.2.10) všech polynomů s koeficienty z tělesa  $\mathbb{F}$  a v neurčité  $x$ . Zejména se zaměříme na *kořeny* polynomů a na *kořenové rozklady* polynomů. Připomeňme znovu definici polynomu.

**10.2.1 Definice (Polynom)** Ať  $\mathbb{F}$  je těleso. *Polynom v neurčité  $x$  nad tělesem  $\mathbb{F}$*  je buď 0 nebo výraz  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , kde  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  jsou prvky tělesa  $\mathbb{F}$  (takzvané *koeficienty* polynomu),  $a_n \neq 0$  (koeficientu  $a_n$  říkáme *vedoucí koeficient* polynomu).

**10.2.2 Definice (Hodnota polynomu)** Každý polynom  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  z  $\mathbb{F}[x]$  určuje funkci z  $\mathbb{F}$  do  $\mathbb{F}$  definovanou následovně

$$a \mapsto a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_0$$

Této funkci, vyhodnocené ve skaláru  $a$ , budeme říkat *hodnota* polynomu  $p(x)$  v bodě  $a$  a značit  $p(a)$ .



**10.2.3 Poznámka** Pozor! *Neříkáme*, že polynom je svými hodnotami jednoznačně určen. Například polynomy  $p(x) = x^2 + 1$ ,  $q(x) = x + 1$  ze  $\mathbb{Z}_2[x]$  jsou různé (jde o dva *různé výrazy*), ale jejich hodnoty jsou stejné:

$$p(0) = q(0) = 1, \quad p(1) = q(1) = 0$$

Uvidíme později (viz Důsledek 10.2.18), že když má  $\mathbb{F}$  nekonečně mnoho prvků, tak každý polynom z  $\mathbb{F}[x]$  je svými hodnotami určen jednoznačně. To je důvod, proč se v mnohých knihách (například) reálné nebo komplexní polynomy zavádějí jako funkce. Tělesa  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  mají totiž nekonečně mnoho prvků.

**10.2.4 Příklad (Hornerovo schéma)** Pro výpočet hodnoty polynomu z  $\mathbb{F}[x]$  v nějakém bodě se často používá takzvané *Hornerovo schéma*.

Chceme-li například zjistit hodnotu polynomu  $p(x) = -2x^4 + 3x^2 + 5x - 7$  z  $\mathbb{R}[x]$  v bodě 3, má příslušné Hornerovo schéma tvar

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ & -6 & -18 & -45 & -120 \\ \hline & -2 & -6 & -15 & -40 & -127 \end{array} \right.$$

Tvrdíme, že  $p(3) = -127$  (tj., hodnota úplně napravo na posledním řádku tabulky). Tvorbu Hornerova schématu vysvětlíme:

- (1) Do záhlaví tabulky zapíšeme koeficienty polynomu  $p(x)$  u jednotlivých mocnin, vlevo od tabulky zapíšeme hodnotu, ve které chceme polynom počítat:

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ \hline \end{array} \right.$$

- (2) Vedoucí koeficient  $-2$  opíšeme do posledního řádku tabulky:

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ \hline & & & & -2 \end{array} \right.$$

- (3) Spočítáme  $(-2) \cdot 3$  a výsledek zapíšeme do prostředního řádku tabulky:

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ & -6 & & & \\ \hline & & -2 & & \end{array} \right.$$

- (4) Sečteme  $0 + (-6)$  a výsledek zapíšeme do posledního řádku tabulky:

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ & -6 & & & \\ \hline & & -2 & -6 & \end{array} \right.$$

- (5) Spočítáme  $(-6) \cdot 3$  a výsledek zapíšeme do prostředního řádku tabulky:

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ & -6 & -18 & & \\ \hline & & -2 & -6 & \end{array} \right.$$

- (6) Sečteme  $3 + (-18)$  a výsledek zapíšeme do posledního řádku tabulky:

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ & -6 & -18 & & \\ \hline & & -2 & -6 & -15 \end{array} \right.$$

- (7) Spočítáme  $(-15) \cdot 3$  a výsledek zapíšeme do prostředního řádku tabulky:

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ & -6 & -18 & -45 & \\ \hline & & -2 & -6 & -15 \end{array} \right.$$

- (8) Sečteme  $5 + (-45)$  a výsledek zapíšeme do posledního řádku tabulky:

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ & -6 & -18 & -45 & \\ \hline & & -2 & -6 & -15 & -40 \end{array} \right.$$

- (9) Spočítáme  $(-40) \cdot 3$  a výsledek zapíšeme do prostředního řádku tabulky:

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ & -6 & -18 & -45 & -120 \\ \hline & & -2 & -6 & -15 & -40 \end{array} \right.$$

- (10) Sečteme  $-7 + (-120)$  a výsledek zapíšeme do posledního řádku tabulky:

$$x = 3 \left| \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 3 & 5 & -7 \\ & -6 & -18 & -45 & -120 \\ \hline & & -2 & -6 & -15 & -40 & -127 \end{array} \right.$$

Tvorba tabulky končí: hodnota  $p(3) = -127$ .

Hornerovo schéma využívá *rekursivní* zápis polynomu. V našem případě jde o zápis

$$p(x) = (((((-2))x + 0)x + 3)x + 5)x - 7)$$

Jednotlivé kroky vyplňování dolního řádku Hornerova schématu pak odpovídají vyhodnocení jednotlivých závorek. K dalšímu využití Hornerova schématu se ještě vrátíme v Příkladu 10.2.22.

Polynomy z  $\mathbb{F}[x]$  lze mezi sebou násobit.

**10.2.5 Definice (Násobení polynomů)** Pro polynomy

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0 \cdot x^0 \quad \text{a} \quad q(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + b_0 \cdot x^0$$

kde je (bez újmy na obecnosti)  $m > n$ , definujeme

$$p(x) \cdot q(x) = a_n \cdot b_m \cdot x^{n+m} + \cdots + \left( \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) \cdot x^k + \cdots + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \cdot x + a_0 \cdot b_0 \cdot x^0$$

**10.2.6 Příklad (Násobení polynomů)** Polynomy násobíme standardním algoritmem, známým z  $\mathbb{R}[x]$ . Nad obecným tělesem  $\mathbb{F}$  jen počítáme s koeficienty v tělese  $\mathbb{F}$ .

(1) Vynásobte polynomy  $p(x) = 2x - 1$  a  $q(x) = 3x^2 - 4x + 3$  v  $\mathbb{R}[x]$ .

$$\begin{aligned} (2x - 10) \cdot (3x^2 - 4x + 3) &= 2x \cdot (3x^2 - 4x + 3) - 10 \cdot (3x^2 - 4x + 3) \\ &= 6x^3 - 8x^2 + 6x - 30x^2 + 40x - 30 \\ &= 6x^3 - 38x^2 + 46x - 30 \end{aligned}$$

(2) Vynásobte polynomy  $p(x) = 2x - 10$  a  $q(x) = 3x^2 - 4x + 3$  v  $\mathbb{Z}_7[x]$ .

$$\begin{aligned} (2x - 10) \cdot (3x^2 - 4x + 3) &= 2x \cdot (3x^2 - 4x + 3) - 10 \cdot (3x^2 - 4x + 3) \\ &= 6x^3 - 8x^2 + 6x - 30x^2 + 40x - 30 \\ &= 6x^3 - 38x^2 + 46x - 30 \\ &= 6x^3 + 4x^2 + 4x + 5 \end{aligned}$$

protože  $-38 = 4$ ,  $46 = 4$ ,  $-30 = 5$  v  $\mathbb{Z}_7$ .

**10.2.7 Definice (Stupeň polynomu)** *Stupeň polynomu*  $p(x)$  z  $\mathbb{F}[x]$  je definován následovně:

$$\deg(p(x)) = \begin{cases} n, & \text{je-li } p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0 \cdot x^0, a_n \neq 0 \\ -\infty & \text{je-li } p(x) = 0 \end{cases}$$

Stupeň polynomu je podle Definice 10.2.7 buď *přirozené číslo* nebo *symbol*  $-\infty$ . Symbol  $-\infty$  *není* číslo (ani přirozené, ani celé). Přesto budeme chtít se symbolem  $-\infty$  sčítat přirozená čísla. Zavedeme tedy následující konvence:

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) + n = n + (-\infty) = -\infty$$

kde  $n$  je libovolné přirozené číslo. Dále zavedeme konvence o počítání maxim:

$$\max(-\infty, -\infty) = -\infty, \quad \max(-\infty, n) = n$$

kde  $n$  je libovolné přirozené číslo.

Výše uvedené konvence nám umožní zjistit stupně součtu a součinu dvou polynomů.

**10.2.8 Lemma** Pro všechny polynomy  $p(x)$ ,  $q(x)$  nad  $\mathbb{F}$  platí rovnosti

$$\deg(p(x) + q(x)) \leq \max(\deg(p(x)), \deg(q(x))) \quad \deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$$

DŮKAZ. Oba vzorce triviálně platí, když alespoň jeden z polynomů  $p(x)$  a  $q(x)$  je nulový — připomeňte si konvence o symbolu  $-\infty$ . Můžeme tedy předpokládat, že ani jeden z polynomů  $p(x)$ ,  $q(x)$  nulový není. Označme jako  $a_n$  a  $b_m$  vedoucí koeficienty těchto polynomů. Tj., předpokládejme, že  $\deg(p(x)) = n$  a  $\deg(q(x)) = m$ .

- (1) Je-li  $m = n$ , pak mohou nastat dva případy. V případě, že  $a_n + b_m = 0$ , pak  $\deg(p(x) + q(x)) < n$  a vzorec  $\deg(p(x) + q(x)) \leq \max(\deg(p(x)), \deg(q(x)))$  platí. V případě, že  $a_n + b_m \neq 0$ , pak  $\deg(p(x) + q(x)) = n$  a vzorec  $\deg(p(x) + q(x)) \leq \max(\deg(p(x)), \deg(q(x)))$  opět platí.

Je-li  $m > n$ , je  $b_m$  vedoucím koeficientem polynomu  $p(x) + q(x)$ . Proto  $\deg(p(x) + q(x)) = m$  a vzorec  $\deg(p(x) + q(x)) \leq \max(\deg(p(x)), \deg(q(x)))$  opět platí.

- (2) Vedoucí koeficient polynomu  $p(x) \cdot q(x)$  je  $a_n \cdot b_m \neq 0$  ( $\mathbb{F}$  je těleso). Tudíž  $p(x) \cdot q(x)$  je polynom stupně  $n + m$ .

■

Polynom lze dělit jiným polynomem se zbytkem. Výpočet se děje rekursivním algoritmem. Připomeňme si tento algoritmus pro známý případ polynomů nad tělesem  $\mathbb{R}$ .

**10.2.9 Příklad (Dělení polynomu polynomem nad  $\mathbb{R}$ )** Jsou dány polynomy  $a(x) = 2x^3 - 4x + 1$ ,  $b(x) = 3x + 2$  v  $\mathbb{R}[x]$ . Máme vydělit polynom  $a(x)$  polynomem  $b(x)$  se zbytkem.

Chceme tedy najít polynomy  $q(x)$  (takzvaný *kvocient*) a  $r(x)$  (takzvaný *zbytek*), aby platila rovnice

$$a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$$

které říkáme *rovnice dělení se zbytkem*. Polynomy  $q(x)$  a  $r(x)$  nalezneme rekursivně:

- (1) Vydělíme vedoucí koeficienty, tj. spočteme  $\frac{2}{3}$  a to je vedoucí koeficient první aproximace:  $\frac{2}{3} \cdot x^{3-1} = \frac{2}{3}x^2$ .
- (2) Vynásobíme  $(3x + 2) \cdot \frac{2}{3}x^2 = 2x^3 + \frac{4}{3}x^2$  a spočítáme korekci  $(2x^3 - 4x + 1) - (2x^3 + \frac{4}{3}x^2) = -\frac{4}{3}x^2 - 4x + 1$ .
- (3) Nyní máme počítat  $(-\frac{4}{3}x^2 - 4x + 1) : (3x + 2)$ . Pokračujeme rychleji. Aproximace:  $-\frac{4}{9}x$ , korekce:  $-\frac{28}{9}x + 1$ .
- (4) Počítáme  $(-\frac{28}{9}x + 1) : (3x + 2)$ . Aproximace:  $-\frac{28}{27}$ , korekce:  $\frac{83}{27}$ . Algoritmus zastavujeme, protože  $\deg(\frac{83}{27}) < \deg(3x + 2)$ .

Tudíž  $q(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{28}{27}$ ,  $r(x) = \frac{83}{27}$ . Rovnice dělení se zbytkem má tvar

$$(2x^3 - 4x + 1) = \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{28}{27}\right) \cdot (3x + 2) + \frac{83}{27}$$

Předchozí výpočty často zapisujeme následovně:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 4x + 1) : (3x + 2) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{28}{27} + \frac{\frac{83}{27}}{3x + 2} \\ \underline{-2x^3 - \frac{4}{3}x^2} \phantom{+ 1} \\ -\frac{4}{3}x^2 - 4x \phantom{+ 1} \\ \underline{\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{9}x} \phantom{+ 1} \\ -\frac{28}{9}x + 1 \phantom{+ 1} \\ \underline{\frac{28}{9}x + \frac{56}{27}} \phantom{+ 1} \\ \frac{83}{27} \end{array}$$

**10.2.10 Věta (Věta o dělení se zbytkem)** Ať  $\mathbb{F}$  je těleso. Ať  $a(x)$  a  $b(x)$  jsou dva nenulové polynomy v  $\mathbb{F}[x]$ . Pak existují jednoznačně určené polynomy  $q(x)$ ,  $r(x)$  tak, že  $\deg(r(x)) < \deg(b(x))$  a platí rovnost  $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ .

**DŮKAZ.** Budeme postupovat obdobně jako při důkazu standardního tvrzení o dělení se zbytkem v oboru celých čísel. Nejprve ukážeme existenci a potom jednoznačnost polynomů  $q(x)$ ,  $r(x)$ .

Při důkazu existence budeme postupovat indukcí podle  $\deg(a(x))$ . Povšimněme si, že v případě nerovnosti  $\deg(a(x)) < \deg(b(x))$  je existence  $q(x)$  a  $r(x)$  triviální, stačí položit  $q(x) = 0$  a  $r(x) = a(x)$ . Předpokládejme proto, že nastává situace  $n = \deg(a(x)) \geq \deg(b(x)) = m$ .

- (1) Ať  $\deg(a(x)) = 0$ . Pak je, díky našemu předpokladu,  $\deg(b(x)) = 0$ , takže  $b(x) = b_0 \neq 0$ . Definujeme  $r(x) = 0$  a  $q(x) = a(x) \cdot (b_0)^{-1}$ .
- (2) Ať  $a(x)$  je polynom stupně  $n$ . Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny polynomy  $a'(x)$ , kde  $0 \leq \deg(a'(x)) < n$ .

Definujeme

$$a'(x) = a(x) - (a_n \cdot b_m^{-1}) \cdot x^{n-m} \cdot b(x)$$

Pak je  $\deg(a'(x)) < n$ , protože koeficient u  $x^n$  je nula. Podle indukčního předpokladu je  $a'(x) = b(x) \cdot q'(x) + r'(x)$  pro nějaké polynomy  $q'(x)$  a  $r'(x)$ , kde  $\deg(r'(x)) < \deg(b(x))$ . Pak platí

$$\begin{aligned} a(x) &= a'(x) + (a_n \cdot b_m^{-1}) \cdot x^{n-m} \cdot b(x) \\ &= b(x) \cdot q'(x) + r'(x) + (a_n \cdot b_m^{-1}) \cdot x^{n-m} \cdot b(x) \\ &= b(x) \cdot (q'(x) + (a_n \cdot b_m^{-1}) \cdot x^{n-m}) + r'(x) \end{aligned}$$

Definujeme  $q(x) = (q'(x) + (a_n \cdot b_m^{-1}) \cdot x^{n-m})$  a  $r(x) = r'(x)$ .

Abychom ukázali jednoznačnost, předpokládejme, že platí

$$a(x) = b(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) = b(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)$$

Potom je  $b(x) \cdot (q_1(x) - q_2(x)) = r_2(x) - r_1(x)$ . Ať jsou polynomy  $q_1(x)$  a  $q_2(x)$  různé. Potom je podle Lemmatu 10.2.8  $\deg(b(x) \cdot (q_1(x) - q_2(x))) \geq \deg(b(x))$ . Protože platí  $\deg(r_2(x) - r_1(x)) < \deg(b(x))$ , došli jsme ke sporu. Proto jsou si  $q_1(x)$  a  $q_2(x)$  rovny, stejně jako  $r_1(x)$  a  $r_2(x)$ . ■

Algoritmus pro dělení z Příkladu 10.2.9 se v obecném tělese nemění. To přesně říká Věta 10.2.10. Jediným rozdílem je to, že zlomky nahradíme inversemi.

**10.2.11 Příklad** Jsou dány polynomy  $a(x) = 2x^3 - 4x + 1$ ,  $b(x) = 3x + 2$  v  $\mathbb{Z}_5[x]$ . Nalezněte  $q(x)$  a  $r(x)$ . ( $\mathbb{Z}_5$  je těleso, viz Příklad 1.2.4.)

Podíl  $(2x^3 - 4x + 1) : (3x + 2)$  počítáme následovně (všechny výpočty jsou v  $\mathbb{Z}_5$ ):

- (1) „Vydělíme“ vedoucí koeficienty, tj. spočítáme  $2 \cdot 3^{-1} = 2 \cdot 2 = 4$  a to je vedoucí koeficient první aproximace:  $4 \cdot x^{3-1} = 4x^2$ .
- (2) Spočteme  $(3x + 2) \cdot 4x^2 = 2x^3 + 3x^2$  a pak spočteme korekci  $(2x^3 - 4x + 1) - (2x^3 + 3x^2) = -3x^2 - 4x + 1 = 2x^2 + x + 1$ .
- (3) Máme spočítat  $(2x^2 + x + 1) : (3x + 2)$ . Pokračujeme rychleji. Aproximace:  $2 \cdot 3^{-1} \cdot x = 4x$ , korekce:  $(2x^2 + x + 1) - (2x^2 + 8x) = -7x + 1 = 3x + 1$ .
- (4) Počítáme  $(3x + 1) : (3x + 2)$ . Aproximace:  $3 \cdot 3^{-1} = 1$ , korekce:  $-1 = 4$ . Algoritmus zastavujeme, protože platí  $\deg(4) < \deg(3x + 2)$ .

Tudíž  $q(x) = 4x^2 + 4x + 1$  a  $r(x) = 4$ . Rovnice dělení se zbytkem má tvar

$$(2x^3 - 4x + 1) = (4x^2 + 4x + 1) \cdot (3x + 2) + 4$$

v  $\mathbb{Z}_5[x]$ .

**10.2.12 Definice (Kořen polynomu)** Prvek  $a \in \mathbb{F}$  je *kořen* polynomu  $p(x)$ , pokud platí rovnost  $p(a) = 0$ .

**10.2.13 Tvzení** *At  $\mathbb{F}$  je těleso a  $a$  je prvek  $\mathbb{F}$ . Hodnota  $p(a)$  je zbytek po dělení  $p(x)$  polynomem  $x - a$ . Takže  $a$  je kořen polynomu  $p(x)$  právě tehdy, když lze psát  $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$  pro nějaký polynom  $q(x)$ . Polynomu  $(x - a)$  říkáme kořenový faktor (příslušný kořenu  $a$ ).*

DŮKAZ. Podle Věty 10.2.10 o dělení se zbytkem je  $p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$ . Protože  $\deg(x - a) = 1$ , je  $\deg(r(x)) < 1$ . Tudíž  $r(x)$  je prvek  $\mathbb{F}$ , řekněme  $r$ . Pokud spočteme hodnoty obou stran v  $a$ , pak dostaneme rovnost  $p(a) = r$ . Druhé tvrzení je triviální. ■

Tvrzení 10.2.13 lze pro kořen polynomu aplikovat opakovaně. Tudíž dostáváme následující důležitý fakt:

**10.2.14 Důsledek (Násobnost kořene)** *Je-li skalár  $a$  z  $\mathbb{F}$  kořenem polynomu  $p(x)$  z  $\mathbb{F}[x]$ , pak existuje největší přirozené číslo  $k$  s vlastností*

$$p(x) = (x - a)^k \cdot q(x)$$

kde  $q(a) \neq 0$ . Tomuto největšímu číslu  $k$  říkáme násobnost  $a$  jako kořene polynomu  $p(x)$  a značíme jej  $\text{ord}(a, p(x))$ .

**10.2.15 Důsledek** *Polynom  $p(x)$  stupně  $n \geq 0$  má v tělese  $\mathbb{F}$  nanejvýš  $n$  různých kořenů.*

DŮKAZ. Postupujeme indukcí podle  $n$ .

- (1) Pro  $n = 0$  je  $p(x) = a \neq 0$ . Tudíž  $p(x)$  nemá žádný kořen.
- (2) Předpokládejme, že každý polynom stupně  $k < n$  má nanejvýš  $k$  různých kořenů. Vezmeme polynom  $p(x)$  stupně  $n$ .

Nejprve ukážeme, že z našich předpokladů plyne, že  $p(x)$  nemůže mít nekonečný počet kořenů. Předpokládejme opak: ať  $a_1, a_2, \dots$  je nekonečný seznam všech kořenů  $p(x)$ .

Vezmeme  $a_1$  a uvažujeme o rovnici  $p(x) = (x - a_1) \cdot q(x)$  (používáme Tvzení 10.2.13). Pak platí  $\deg(q(x)) = k < n$  a podle indukčního předpokladu existuje nanejvýš  $k$  různých kořenů polynomu  $q(x)$ . Ukážeme, že všechny zbylé prvky  $a_2, a_3, \dots$  jsou kořeny polynomu  $q(x)$ . Skutečně, protože pro všechna  $i \geq 2$  platí  $0 = p(a_i) = (a_i - a_1) \cdot q(a_i)$ , je  $q(a_i) = 0$ . Využili jsme toho, že  $a_i - a_1 \neq 0$  pro všechna  $i \geq 2$  a toho, že  $\mathbb{F}$  je těleso. Ukázali jsme, že polynom  $q(x)$  má nekonečně mnoho kořenů, to je spor.

Takže polynom  $p(x)$  má konečný počet kořenů. Ať  $a_1, \dots, a_s$  je jejich úplný výčet. Stejnou argumentací jako výše lze ukázat, že  $a_2, \dots, a_s$  jsou kořeny polynomu  $q(x)$ , tudíž, podle indukčního předpokladu platí  $s - 1 \leq k < n$ . Dokázali jsme, že  $s \leq k + 1 \leq n$ . ■

**10.2.16 Poznámka** Polynomy lze definovat i nad obecnějšími strukturami než jsou tělesa. Lze tak definovat množinu polynomů  $\mathbb{K}[x]$ , kde  $\mathbb{K}$  je komutativní okruh s jednotkou (tj.  $\mathbb{K}$  je „těleso, ve kterém nemusí platit axiom invertibility“, viz Poznámku 1.2.16). Teorie stupňů polynomů, kořenů polynomů a kořenových rozkladů polynomů nad obecným komutativním okruhem je značně barvitější než teorie polynomů nad tělesem. Například množina zbytků po dělení číslem 8 tvoří (spolu s operacemi sčítání a násobení modulo 8) komutativní okruh s jednotkou, značený  $\mathbb{Z}_8$ . Polynom  $p(x) = x^2 - 1$  z množiny  $\mathbb{Z}_8[x]$  má stupeň 2 a kořeny 1, 3, 5, 7:

$$\begin{aligned} p(1) &= 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0, & p(3) &= 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8 = 0, \\ p(5) &= 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24 = 0, & p(7) &= 7^2 - 1 = 49 - 1 = 48 = 0 \end{aligned}$$

O polynomech nad obecným komutativním okruhem se lze dočíst například v knize

☞ Nicolas Bourbaki, *Algebra I: Chapters 1–3*, Springer-Verlag, 2. vydání, 1998

Něco málo o polynomech nad *nekomutativním* okruhem budeme nuceni říci v podkapitole 11.2.



**10.2.17 Poznámka** Připomeňme známý fakt z algebry, že v  $\mathbb{C}[x]$  má polynom  $p(x)$  stupně  $n \geq 1$  přesně  $n$  kořenů (pokud počítáme i jejich násobnosti). Tomuto výsledku se říká *Fundamentální věta algebry*.<sup>1</sup>

Nad jinými tělesy lze nalézt polynomy stupně  $n$ , které (dokonce i s násobnostmi) mají méně než  $n$  různých kořenů. Nejjednodušším příkladem je polynom

$$x^2 + x + 1 \quad \text{v } \mathbb{Z}_2[x]$$

stupně 2, který v  $\mathbb{Z}_2$  žádný kořen nemá. Uvažujme o „kvadratické rovnici“  $x^2 + x + 1 = 0$ . Je snadné zjistit, že rovnice nemá v  $\mathbb{Z}_2$  řešení. Na kořen jsou totiž pouze dva kandidáti a oba selhávají:  $0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$  a  $1^2 + 1 + 1 = 1 \neq 0$ .

Jiným příkladem je polynom

$$x^2 + 1 \quad \text{v } \mathbb{R}[x]$$

stupně 2, který v  $\mathbb{R}$  žádný kořen nemá.

Nyní již můžeme vysvětlit, že rozdíl mezi polynomy jako výrazy a polynomy jako funkcemi zmizí, pokud má těleso  $\mathbb{F}$  nekonečný počet prvků. (To vysvětluje, proč se v matematické analýze polynomy nad  $\mathbb{R}$  často definují jako funkce.)

**10.2.18 Důsledek** V tělese  $\mathbb{F}$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1)  $\mathbb{F}$  má nekonečný počet prvků.
- (2) Nad  $\mathbb{F}$  není zapotřebí rozlišovat mezi polynomy jako výrazy a polynomy jako funkcemi.

**DŮKAZ.** Z (1) plyne (2): víme, že pokud  $p(x)$  a  $q(x)$  jsou jako polynomy totožné, jsou totožné i jako funkce. Naopak, předpokládejme, že  $p(a) = q(a)$  platí pro všechna  $a \in \mathbb{F}$  (tj.  $p(x)$  a  $q(x)$  jsou totožné jako funkce). Vezmeme polynom  $h(x) = p(x) - q(x)$ . Chceme ukázat, že  $h(x)$  je nulový polynom. Předpokládejme, že ne. Pak je  $h(x)$  polynom stupně  $\geq 0$  s nekonečným počtem různých kořenů. To je spor.

Ze (2) plyne (1). To plyne okamžitě z toho, že polynom stupně  $n$  lze ztotožnit s vektorem jeho koeficientů. ■

Důsledek 10.2.14 říká, že pokud nalezneme všechny kořeny  $a_1, \dots, a_r$  polynomu  $p(x)$ , pak můžeme psát

$$p(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot (x - a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - a_r)^{k_r} \cdot q(x)$$

kde  $k_i = \text{ord}(a_i, p(x))$  a polynom  $q(x)$  již nemá kořen v  $\mathbb{F}$ . Hledání všech kořenů polynomů je ovšem obecně obtížná úloha. Zbytek této podkapitoly věnujeme některým metodám hledání kořenů polynomů nad  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ .



**10.2.19 Poznámka** Známý vzorec

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pro řešení reálných rovnic tvaru  $ax^2 + bx + c = 0$  má obdobu i pro rovnice třetího a čtvrtého stupně. Podobné obecné vzorce pro hledání kořenů reálných polynomů pátého a vyššího stupně však *neexistují* (tj., je dokázáno, že *nemohou existovat*). Více se lze dočíst například v knize

☞ B. L. van der Waerden, *Algebra*, Springer-Verlag 2003

Pokud hledáme kořeny polynomu s *celočíslnými* koeficienty, lze použít následující metodu, která nám umožnuje říci, která racionální čísla mohou být kořeny.

<sup>1</sup>Obvykle se Fundamentální věta algebry dokazuje prostředky matematické analýzy v komplexním oboru. Pro důkaz Fundamentální věty algebry metodami *lineární* algebry odkazujeme na článek Keith Conrad, *The Fundamental theorem of algebra via linear algebra*.

**10.2.20 Lemma (Racionální kořeny reálných polynomů s celočíselnými koeficienty)** *At  $n \geq 1$  a at  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  je polynom, kde koeficienty  $a_n, \dots, a_0$  jsou celá čísla. At  $p(\frac{a}{b}) = 0$  pro racionální číslo  $\frac{a}{b}$ , kde čísla  $a$  a  $b$  jsou nesoudělná. Potom číslo  $a$  dělí číslo  $a_0$  beze zbytku a číslo  $b$  dělí číslo  $a_n$  beze zbytku.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že  $p(\frac{a}{b}) = a_n (\frac{a}{b})^n + a_{n-1} (\frac{a}{b})^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  pro racionální číslo  $\frac{a}{b}$ , kde čísla  $a$  a  $b$  jsou nesoudělná. Vynásobením této rovnosti číslem  $b^n$  dostaneme

$$a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} b + \dots + a_0 b^n = 0$$

Potom v oboru celých čísel platí rovnost

$$a \cdot (a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} b + \dots + a_1 b^{n-1}) = -a_0 b^n$$

a odtud plyne, že číslo  $a$  dělí číslo  $a_0$  beze zbytku, protože čísla  $a$  a  $b$  jsou nesoudělná.

Analogickou úpravou dostáváme rovnost

$$(a_{n-1} a^{n-2} + a_{n-2} a^{n-3} b + \dots + a_0 b^{n-1}) \cdot b = -a_n a^n$$

a odtud plyne, že číslo  $b$  dělí číslo  $a_n$  beze zbytku, protože čísla  $a$  a  $b$  jsou nesoudělná. ■

**10.2.21 Příklad** S využitím Lemmatu 10.2.20 nalezneme pro následující polynomy jejich rozklady na kořenové faktory.

- (1) Polynom  $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 23x - 12$  může mít jako racionální kořeny jen čísla  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}$  a  $\pm \frac{3}{2}$ . K výpočtu hodnot polynomu využijeme Hornerovo schéma:

$$\begin{array}{lcl} x = 1 & \left| \begin{array}{rrrr} 2 & 3 & -23 & -12 \\ & 2 & 5 & -18 \\ \hline & 2 & 5 & -18 & -30 \end{array} \right. & x = -1 & \left| \begin{array}{rrrr} 2 & 3 & -23 & -12 \\ & -2 & -1 & 24 \\ \hline & 2 & 1 & -24 & 12 \end{array} \right. \\ \\ x = 2 & \left| \begin{array}{rrrr} 2 & 3 & -23 & -12 \\ & 4 & 14 & -18 \\ \hline & 2 & 7 & -9 & -30 \end{array} \right. & x = -2 & \left| \begin{array}{rrrr} 2 & 3 & -23 & -12 \\ & -4 & 2 & 42 \\ \hline & 2 & -1 & -21 & 30 \end{array} \right. \\ \\ x = 3 & \left| \begin{array}{rrrr} 2 & 3 & -23 & -12 \\ & 6 & 27 & 12 \\ \hline & 2 & 9 & 4 & 0 \end{array} \right. & x = -3 & \left| \begin{array}{rrrr} 2 & 3 & -23 & -12 \\ & -6 & 9 & 42 \\ \hline & 2 & -3 & -14 & 30 \end{array} \right. \end{array}$$

Ukázali jsme, že  $p(3) = 0$ . Vydělíme polynom  $p(x)$  kořenovým faktorem  $(x - 3)$ :

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 3x^2 - 23x - 12) : (x - 3) = 2x^2 + 9x + 4 \\ \underline{-2x^3 + 6x^2} \phantom{- 23x - 12} \\ 9x^2 - 23x \phantom{- 12} \\ \underline{-9x^2 + 27x} \phantom{- 12} \\ 4x - 12 \phantom{- 12} \\ \underline{-4x + 12} \\ 0 \end{array}$$

Kořeny polynomu  $2x^2 + 9x + 4$  můžeme najít obvyklým způsobem (tj. vyřešením kvadratické rovnice): kořeny jsou  $-\frac{1}{2}$  a  $-4$ . Celkový kořenový rozklad je

$$2x^3 + 3x^2 - 23x - 12 = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$$

- (2) Polynom  $p(x) = x^3 - 2x + 4$  může mít jako racionální kořeny jen čísla 1, -1, 2, -2, 4 a -4. K výpočtu hodnot polynomu využijeme Hornerovo schéma:

$$\begin{array}{cc}
 x = 1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right. & x = -1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 5 \end{array} \right. \\
 \\
 x = 2 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 8 \end{array} \right. & x = -2 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right. \\
 \\
 x = 4 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ & 4 & 16 & 56 \\ \hline & 1 & 4 & 14 & 60 \end{array} \right. & x = -4 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ & -4 & 16 & -56 \\ \hline & 1 & -4 & 14 & -52 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Ukázali jsme, že  $p(-2) = 0$ . Tedy číslo -2 je jediný racionální kořen polynomu  $p(x)$ . Ostatní kořeny nalezneme vydělením kořenového faktoru  $(x + 2)$ :

$$\begin{array}{r}
 ( \begin{array}{r} x^3 \\ -x^3 - 2x^2 \end{array} - 2x + 4 ) : (x + 2) = x^2 - 2x + 2 \\
 \hline
 \begin{array}{r} -2x^2 - 2x \\ 2x^2 + 4x \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 2x + 4 \\ -2x - 4 \end{array} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

To znamená, že  $p(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)$  a nám stačí vyřešit kvadratickou rovnici  $x^2 - 2x + 2 = 0$ . Další kořeny jsou  $1 + i$  a  $1 - i$ . Rozklad na kořenové faktory *v oboru komplexních čísel* tedy je

$$p(x) = (x + 2) \cdot (x - 1 - i) \cdot (x - 1 + i)$$

V *oboru reálných čísel* nelze  $p(x)$  úplně na kořenové faktory rozložit, protože čísla  $1 + i$  a  $1 - i$  nejsou reálná.



**10.2.22 Příklad (Využití Hornerova schématu pro dělení polynomu kořenovým faktorem)** Hornerovo schéma pro výpočet hodnoty polynomu se dá využít i pro rychlé dělení polynomu kořenovým faktorem. Například pro polynom  $p(x) = 3x^3 - x^2 + 7x - 6$  z  $\mathbb{R}[x]$  dává příslušné Hornerovo schéma výpočet

$$x = 2 \left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 7 & -6 \\ & 6 & 10 & 34 \\ \hline & 3 & 5 & 17 & 28 \end{array} \right.$$

jehož *poslední řádek*, kromě informace  $p(2) = 28$ , v sobě nese i informaci o rovnosti

$$p(x) = (x - 2) \cdot (3x^2 + 5x + 17) + 28$$

O tom, že je to pravda, se lze v tomto případě přesvědčit:

$$\begin{array}{r}
 ( \begin{array}{r} 3x^3 - x^2 + 7x - 6 \\ -3x^3 + 6x^2 \end{array} : (x - 2) = 3x^2 + 5x + 17 + \frac{28}{x - 2} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 5x^2 + 7x \\ -5x^2 + 10x \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 17x - 6 \\ -17x + 34 \end{array} \\
 \hline
 28
 \end{array}$$

Věc ale platí *zcela obecně*. To jest, poslední řádek Hornerova schématu můžeme číst i takto:

*Skaláry v posledním řádku Hornerova schématu pro polynom  $p(x)$  v bodě  $a$  (čtena zleva doprava) udávají koeficienty polynomu  $q(x)$ , skalár nejvíce vpravo označme jako  $r$ . Potom platí  $p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$ .*

To je jednoduché ukázat: čísla v posledním řádku Hornerova schématu jsou přesně čísla z algoritmu dělení polynomu polynomem se zbytkem, který je popsán v důkazu Věty 10.2.10.

## 10.3 Vlastní vektory a vlastní hodnoty

V této podkapitole se budeme věnovat nalezení směrů, ve kterých se lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  chová jako změna měřítka. Půjde o zobecnění úvah pro matice z podkapitoly 10.1.

**10.3.1 Definice (Vlastní hodnota a vlastní vektor)** Nenulový vektor  $\vec{v}$  nazveme *vlastním vektorem* lineárního zobrazení  $f : L \rightarrow L$ , pokud existuje takový skalár  $\lambda$  z tělesa  $\mathbb{F}$ , že platí rovnost

$$f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$$

Skaláru  $\lambda$  říkáme *vlastní hodnota* příslušná vlastnímu vektoru  $\vec{v}$ .

**10.3.2 Poznámka** Je-li lineární zobrazení z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$  reprezentováno maticí  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ , mluvíme také o *vlastním vektoru  $\mathbf{x}$  matice  $\mathbf{A}$* . Je-li skalár  $\lambda$  vlastní hodnotou příslušnou vektoru  $\mathbf{x}$ , je splněna rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ .

**10.3.3 Definice (Vlastní prostor)** Prostoru  $\ker(f - \lambda \cdot \text{id})$  říkáme *vlastní prostor* příslušný hodnotě  $\lambda$ . Značíme jej  $\text{eigen}(\lambda, f)$ .

Vlastní vektor  $\vec{v}$  lineárního zobrazení  $f$ , který je příslušný vlastní hodnotě  $\lambda$ , je *nenulový*. Proto si vektor  $\vec{v}$  můžeme představit jako *směr*, ve kterém lineární zobrazení  $f$  „natahuje“  $\lambda$ -krát. Nic ovšem předem nezabráňuje tomu, aby směrů, ve kterých  $f$  „natahuje“  $\lambda$ -krát, nebylo více. Lineární prostor  $\text{eigen}(\lambda, f)$  je podprostor prostoru  $L$ , který obsahuje *všechny* směry, ve kterých  $f$  „natahuje“  $\lambda$ -krát.

Nejprve uveďme příklad vlastních hodnot lineárního zobrazení, který má velký význam v teorii diferenciálních rovnic. Upozorňujeme, že jde o příklad situace, kdy lineární prostor  $L$  nemá konečnou dimenzi.

**10.3.4 Příklad (Vlastní hodnoty derivace reálných funkcí)** Ať  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  je lineární prostor (nad  $\mathbb{R}$ ) všech funkcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ , které mají libovolně mnoho derivací.

Zobrazení  $\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  je lineární. A platí:

- (1)  $\frac{d}{dx}(e^{\lambda x}) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ . Tudíž každé  $\lambda \in \mathbb{R}$  je vlastní hodnotou  $\frac{d}{dx}$ . Funkce  $e^{\lambda x}$  je nenulovým vlastním vektorem příslušným hodnotě  $\lambda$ .
- (2) Ať  $f(x)$  je libovolný vektor v  $\text{eigen}(\lambda, \frac{d}{dx})$ . Platí tedy:  $\frac{d}{dx}f(x) = \lambda \cdot f(x)$ . Potom platí:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x) \cdot e^{-\lambda x}) &= e^{-\lambda x} \cdot \frac{d}{dx}f(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}e^{-\lambda x} = \\ &= e^{-\lambda x} \cdot \lambda \cdot f(x) - \lambda \cdot f(x) \cdot e^{-\lambda x} = 0. \end{aligned}$$

Proto  $f(x) = c \cdot e^{\lambda x}$ . Neboli  $\text{eigen}(\lambda, \frac{d}{dx}) = \text{span}(e^{\lambda x})$ . Takže  $\dim(\text{eigen}(\lambda, \frac{d}{dx})) = 1$ , pro každé  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Pro prostory *konečné* dimenze nám Tvzení 9.1.10 umožňuje problém vlastních hodnot lineárního zobrazení plně převést na problém hledání vlastních hodnot matic.

**10.3.5 Tvzení** Ať  $L$  je lineární prostor dimenze  $n$ . Potom pro lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) *Skalár  $\lambda$  je vlastní hodnotou lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ .*
- (2) *Skalár  $\lambda$  je vlastní hodnotou matice  $\mathbf{A}$ , která reprezentuje  $\mathbf{f}$  (vzhledem k jakékoli bázi prostoru  $L$ ).*

DŮKAZ. Podle definice je  $\lambda$  vlastní hodnota lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  právě tehdy, když lineární zobrazení  $\mathbf{f} - \lambda \cdot \text{id}$  není monomorfismus. Podle Tvzení 9.1.10 to nastane právě tehdy, když matice  $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_n$  není monomorfismus, kde  $\mathbf{A}$  je jakákoli matice lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ . ■

V dalším budeme předpokládat, že  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení, kde prostor  $L$  má konečnou dimenzi. Podle Tvzení 10.3.5 stačí umět nalézt vlastní hodnoty a vlastní vektory matic  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ . To je ale snadný úkol:

**10.3.6 Tvzení** *Skalár  $\lambda$  je vlastní hodnotou matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  právě tehdy, když platí  $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_n) = 0$ .*

DŮKAZ. Použijte Důsledek 8.4.4. ■

**10.3.7 Definice (Charakteristický polynom matice)** Polynomu  $\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_n)$  říkáme *charakteristický polynom* matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ . Značíme jej  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ .

**10.3.8 Poznámka (Charakteristický polynom lineárního zobrazení)** Připomeňme z podkapitoly 9.3, že jakékoli dvě matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  stejného lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  jsou si podobné (tj.  $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ ). Podobnost matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  znamená, že lze psát

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$$

pro nějakou regulární matici  $\mathbf{T} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ . Platí následující rovnosti

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - x \cdot \mathbf{E}_n) &= \det(\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \cdot x \cdot \mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{T}^{-1} \cdot (\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_n) \cdot \mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{T}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_n) \cdot \det(\mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_n) \end{aligned}$$

To znamená, že  $\text{char}_{\mathbf{B}}(x) = \text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ , jakmile platí  $\mathbf{B} \approx \mathbf{A}$ .

Můžeme tedy definovat *charakteristický polynom* lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  jako  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ , kde  $\mathbf{A}$  je *jakákoli* matice lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ . Charakteristický polynom lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  budeme značit  $\text{char}_{\mathbf{f}}(x)$ .

Vlastní hodnoty matice jsou podle Tvzení 10.3.6 kořeny jejího charakteristického polynomu. Dvě podobné matice mají stejný charakteristický polynom podle předchozí poznámky. Opačná implikace neplatí, jak ukazuje následující příklad.

**10.3.9 Příklad (Matice mohou mít stejný charakteristický polynom, přestože si nejsou podobné)**

Ukážeme, že pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  platí:

- (1)  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \text{char}_{\mathbf{B}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$ , tudíž vlastní hodnoty  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$  matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou stejné (včetně násobností).
- (2)  $\dim(\text{eigen}(3, \mathbf{A})) = 2 \neq 1 = \dim(\text{eigen}(3, \mathbf{B}))$ ,  $\dim(\text{eigen}(2, \mathbf{A})) = \dim(\text{eigen}(2, \mathbf{B})) = 1$ , proto  $\mathbf{A} \not\approx \mathbf{B}$ .

Obě tvrzení se dokážou snadno:

(1) Charakteristické polynomy se spočítají jako jisté determinanty.

$$\begin{aligned}\text{char}_{\mathbf{A}}(x) &= \det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} 5-x & -2 & 2 \\ -1 & 4-x & -1 \\ -4 & 4 & -1-x \end{vmatrix} = -(x-3)^2 \cdot (x-2) \\ \text{char}_{\mathbf{B}}(x) &= \det(\mathbf{B} - x \cdot \mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} 2-x & 4 & -3 \\ -1 & 10-x & -6 \\ -1 & 8 & -4-x \end{vmatrix} = -(x-3)^2 \cdot (x-2)\end{aligned}$$

(2) Nalezení vlastních prostorů matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  znamená popis jader lineárních zobrazení tvaru  $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_3$  a  $\mathbf{B} - \lambda \cdot \mathbf{E}_3$ . K tomu je nejjednodušší využít popisu řešení homogenních soustav lineárních rovnic z Kapitoly 6.

Pro dvojnásobnou vlastní hodnotu  $\lambda_1 = 3$  platí:

$$\text{eigen}(3, \mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{eigen}(3, \mathbf{B}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

A pro jednonásobnou vlastní hodnotu  $\lambda_2 = 2$  platí:

$$\text{eigen}(2, \mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \quad \text{eigen}(2, \mathbf{B}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

Tedy:  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  mají *stejně vlastní hodnoty* (i s násobnostmi), ale *různé vlastní podprostory*. Nemůže tedy platit  $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ .

**10.3.10 Tvzení** Charakteristický polynom matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  má stupeň  $n$ . Obráceně: libovolný polynom tvaru  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  je charakteristickým polynomem nějaké matice.

DŮKAZ. Protože  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_n)$ , stačí použít definici determinantu (Definice 8.2.1). V jednotlivých sčítancích determinantu  $\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_n)$  se vyskytuje maximálně  $n$  členů obsahujících  $x$ .

Pokud je zadán polynom  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ , definujeme matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 \cdot (-1)^n & -a_1 \cdot (-1)^n & -a_2 \cdot (-1)^n & -a_3 \cdot (-1)^n & \dots & -a_{n-2} \cdot (-1)^n & -a_{n-1} \cdot (-1)^n \end{pmatrix}$$

To jest, matice  $\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_n$ , vypsána po položkách, je:

$$\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -x & 1 \\ -a_0 \cdot (-1)^n & -a_1 \cdot (-1)^n & -a_2 \cdot (-1)^n & \dots & -a_{n-2} \cdot (-1)^n & (-a_{n-1} - x) \cdot (-1)^n \end{pmatrix}$$

Potom determinant  $\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_n)$  počítaný rozvojem podle posledního řádku je

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_n) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \\ &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0\end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen. ■

**10.3.11 Důsledek** Lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , kde  $\dim(L) = n$ , má nejvýše  $n$  různých vlastních hodnot.

DŮKAZ. Skalár  $\lambda$  je vlastní hodnotou  $\mathbf{f}$  právě tehdy, když je vlastní hodnotou (jakékoli) matice  $\mathbf{A}$  lineárního zobrazení. Podle předpokladů je  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ , to znamená, že  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  má stupeň  $n$ . Vlastní hodnoty zobrazení  $\mathbf{f}$  jsou kořeny polynomu  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ . Podle Důsledku 10.2.15 má polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  nejvýše  $n$  různých kořenů. ■

**10.3.12 Příklad (Sestavení matice s předem známými vlastními hodnotami)** Chceme sestavit matici nad tělesem  $\mathbb{R}$ , která má následující vlastní hodnoty:

$$-3 \text{ (násobnosti 1), } 2 \text{ (násobnosti 3), } 4 \text{ (násobnosti 1)}$$

Charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  hledané matice  $\mathbf{A}$  je

$$\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = (x + 3) \cdot (x - 2)^3 \cdot (x - 4) = x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 12x^2 - 136x + 96$$

Podle Tvzení 10.3.10 je hledaná matice  $\mathbf{A}$  dána například následovně:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-1)^5 \cdot (-96) & (-1)^5 \cdot 136 & (-1)^5 \cdot (-12) & (-1)^5 \cdot (-6) & (-1)^5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 96 & -136 & 12 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

**10.3.13 Tvzení (Charakteristický polynom matice v horním blokovém tvaru)** Předpokládejme, že matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je zapsána v blokovém tvaru

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{O}_{k,n-k} & \mathbf{N} \end{array} \right)$$

kde  $\mathbf{N} : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^k$  a  $\mathbf{M} : \mathbb{F}^{n-k} \rightarrow \mathbb{F}^{n-k}$ . Potom platí rovnost  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \text{char}_{\mathbf{M}}(x) \cdot \text{char}_{\mathbf{N}}(x)$ .

DŮKAZ. Plyne okamžitě z Poznámky 8.2.7. ■

**10.3.14 Tvzení** Ať  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení,  $\dim(L) = n$ . Potom pro každou vlastní hodnotu  $\lambda$  zobrazení  $\mathbf{f}$  platí nerovnost  $\dim(\text{eigen}(\lambda, \mathbf{f})) \leq \text{ord}(\lambda, \text{char}_{\mathbf{f}}(x))$ .

DŮKAZ. Předpokládejme, že  $\dim(\text{eigen}(\lambda, \mathbf{f})) = r$ . Zvolme bázi  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r)$  prostoru  $\text{eigen}(\lambda, \mathbf{f})$  a doplňme ji na bázi  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r, \vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_n)$  celého prostoru  $L$ . Potom matice  $\mathbf{A}$  lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  vzhledem k bázi  $B$  má blokový tvar

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} \lambda \cdot \mathbf{E}_r & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{O}_{r,n-r} & \mathbf{N} \end{array} \right)$$

Podle Tvzení 10.3.13 je  $\text{char}_{\mathbf{f}}(x) = \text{char}_{\mathbf{A}}(x) = (\lambda - x)^r \cdot \text{char}_{\mathbf{N}}(x)$ . To znamená, že  $r \leq \text{ord}(\lambda, \text{char}_{\mathbf{f}}(x))$ . ■

## 10.4 Diagonalisovatelnost lineárních zobrazení

V této podkapitole charakterizujeme diagonalisovatelná lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , kde  $L$  má konečnou dimenzi. Ukážeme, že jsou to přesně ta zobrazení, které mají diagonální matici vzhledem k nějaké bázi. Navíc tuto bázi lze zvolit z vlastních vektorů lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ . Zobecníme tak Příklad 10.1.1.

**10.4.1 Definice (Diagonalisovatelné lineární zobrazení)** Řekneme, že lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , kde  $L$  má konečnou dimenzi, je *diagonalisovatelné*, pokud matice zobrazení  $\mathbf{f}$  je podobná diagonální matici.

Nejprve zformulujeme primitivní kritérium diagonalisovatelnosti lineárních zobrazení.

**10.4.2 Tvzení** *At  $f : L \rightarrow L$  je jakékoli lineární zobrazení,  $\dim(L) = n$ . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1)  $f$  je diagonalisovatelné zobrazení.
- (2) Existuje uspořádaná báze  $B$  prostoru  $L$  sestávající z vlastních vektorů zobrazení  $f$ .

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Označme jako  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  bázi prostoru  $L$ , vzhledem ke které má zobrazení  $f$  diagonální matici  $D(a_1, \dots, a_n)$ . Ukážeme, že každý vektor  $\vec{b}_i$  je vlastním vektorem zobrazení  $f$ .

Podle Definice 9.1.2 je diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{D(a_1, \dots, a_n)} & \mathbb{F}^n \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_B \\ L & \xrightarrow{f} & L \end{array}$$

komutativní. To znamená, že pro vektor  $\vec{b}_i$  platí

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_i & \xrightarrow{D(a_1, \dots, a_n)} & a_i \cdot \mathbf{e}_i = \text{coord}_B(f(\vec{b}_i)) \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_B \\ \vec{b}_i & \xrightarrow{f} & f(\vec{b}_i) \end{array}$$

protože  $i$ -tý sloupec diagonální matice  $D(a_1, \dots, a_n)$  je  $a_i \cdot \mathbf{e}_i$ . Protože  $a_i \cdot \mathbf{e}_i = \text{coord}_B(a_i \cdot \vec{b}_i)$ , ukázali jsme platnost rovnosti  $\text{coord}_B(f(\vec{b}_i)) = \text{coord}_B(a_i \cdot \vec{b}_i)$ . Protože  $\text{coord}_B$  je isomorfismus, ukázali jsme tím, že platí rovnost  $f(\vec{b}_i) = a_i \cdot \vec{b}_i$ .

Ze (2) plyne (1) triviálně. ■

Nyní ukážeme, že každý systém vlastních vektorů, které přísluší různým vlastním hodnotám, je lineárně nezávislý.

**10.4.3 Tvzení** *At  $f : L \rightarrow L$  je jakékoli lineární zobrazení. Každý systém vlastních vektorů příslušných různým vlastním hodnotám lineárního zobrazení  $f$  je lineárně nezávislý.*

DŮKAZ. Ať  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  jsou navzájem různé vlastní hodnoty lineárního zobrazení  $f$  a ať  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  jsou příslušné vlastní vektory. Ukážeme, že vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  jsou lineárně nezávislé. Budeme postupovat indukcí podle  $n \geq 1$ .

- (1)  $n = 1$ . V tomto případě není co dokazovat: vektor  $\vec{v}_1$  je nenulový, tudíž  $\{\vec{v}_1\}$  je lineárně nezávislá množina.
- (2) Ať  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$  jsou navzájem různé vlastní hodnoty lineárního zobrazení  $f$  a ať  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}$  jsou příslušné vlastní vektory. Budeme předpokládat, že vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  jsou lineárně nezávislé.

Ať  $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot \vec{v}_i = \vec{o}$ . Potom

$$\begin{aligned} \vec{o} &= (f - \lambda_{n+1} \cdot \text{id}) \left( \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot \vec{v}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot (f - \lambda_{n+1} \cdot \text{id})(\vec{v}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot (\lambda_i - \lambda_{n+1}) \cdot \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot (\lambda_i - \lambda_{n+1}) \cdot \vec{v}_i \end{aligned}$$



Podle indukčního předpokladu pro každé  $i = 1, \dots, n$  platí  $a_i \cdot (\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ . Protože  $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$  pro každé  $i = 1, \dots, n$ , ukázali jsme, že  $a_i = 0$  každé pro  $i = 1, \dots, n$ . To znamená, že musí platit  $a_{n+1} \cdot \vec{v}_{n+1} = \vec{o}$ . Protože  $\vec{v}_{n+1}$  je nenulový vektor, platí i  $a_{n+1} = 0$ . ■

**10.4.4 Důsledek** *At  $\lambda, \lambda'$  jsou dvě různé vlastní hodnoty lineárního zobrazení  $f : L \rightarrow L$ ,  $\dim(L) = n$ . Potom platí  $\text{eigen}(\lambda, f) \cap \text{eigen}(\lambda', f) = \{\vec{o}\}$ .*

DŮKAZ. Označme jako  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$  bázi prostoru  $\text{eigen}(\lambda, f)$  a jako  $(\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_{k'})$  bázi prostoru  $\text{eigen}(\lambda', f)$ . Ať  $\vec{v}$  je vektor v  $\text{eigen}(\lambda, f) \cap \text{eigen}(\lambda', f)$ . Potom existují lineární kombinace

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i = \sum_{j=1}^{n'} a'_j \cdot \vec{b}'_j$$

a proto

$$\vec{o} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i - \sum_{j=1}^{n'} a'_j \cdot \vec{b}'_j$$

Protože množina  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k, \vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_{k'}\}$  je lineárně nezávislá, platí  $a_i = 0$  pro všechna  $i$  a  $a'_j = 0$  pro všechna  $j$ . Proto platí  $\vec{v} = \vec{o}$ . ■

**10.4.5 Důsledek** *At  $f : L \rightarrow L$  je jakékoli lineární zobrazení,  $\dim(L) = n$ . Jestliže  $\text{char}_f(x)$  má  $n$  různých kořenů, potom je  $f$  diagonalisovatelné lineární zobrazení.*

DŮKAZ. Podle Tvzení 10.4.2 stačí ukázat, že existuje báze prostoru  $L$ , která sestává z vlastních vektorů zobrazení  $f$ . Označme jako  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  různé kořeny charakteristického polynomu  $\text{char}_f(x)$ . Protože  $\dim(L) = n$ , platí  $\deg(\text{char}_f(x)) = n$ . Podle Důsledku 10.2.15 jsou  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  všechny kořeny polynomu  $\text{char}_f(x)$ . Podle Tvzení 10.4.3 jsou příslušné vlastní vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  lineárně nezávislé. Protože  $\dim(L) = n$ , je  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  báze prostoru  $L$ . ■

**10.4.6 Poznámka** Podmínka z Důsledku 10.4.5 není nutnou podmínkou pro diagonalisovatelnost. Jednotková matice  $\mathbf{E}_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je samozřejmě diagonalisovatelné zobrazení. Přesto  $\text{char}_{\mathbf{E}_3}(x)$  má pouze jeden kořen 1 (násobnosti 3).

**10.4.7 Poznámka** Diagonální matice  $D(a_1, \dots, a_n)$  má jako charakteristický polynom  $\text{char}_{D(a_1, \dots, a_n)}(x)$  součin  $\prod_{i=1}^n (a_i - x)$ . To znamená, že polynom  $\text{char}_{D(a_1, \dots, a_n)}(x)$  lze v  $\mathbb{F}[x]$  rozložit na součin lineárních faktorů. Obrácená implikace však neplatí. Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  má charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = (1 - x)^2$ . Jediná diagonální matice  $D(a_1, a_2)$ , které by mohla matice  $\mathbf{A}$  být podobná, je jednotková matice  $\mathbf{E}_2$ . Důvodem je to, že na diagonále matice  $D(a_1, a_2)$  musí být vlastní hodnoty matice  $\mathbf{A}$ . Kdyby existovala regulární matice  $\mathbf{T}$ , pro kterou  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$ , potom by platilo  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}$ . A to je spor.

**10.4.8 Věta (Kritérium diagonalisovatelnosti lineárních zobrazení)** *At  $f : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení,  $\dim(L) = n$ . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1)  $f$  je diagonalisovatelné.

- (2) Charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{f}}(x)$  zobrazení  $\mathbf{f}$  lze nad  $\mathbb{F}$  rozložit na lineární faktory a pro každý kořen  $\lambda$  polynomu  $\text{char}_{\mathbf{f}}(x)$  platí rovnost

$$\dim(\text{eigen}(\lambda, \mathbf{f})) = \text{ord}(\lambda, \text{char}_{\mathbf{f}}(x))$$

Označme jako  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  množinu všech různých vlastních hodnot zobrazení  $\mathbf{f}$ . Pak podmínky (1) a (2) jsou dále ekvivalentní s podmínkami:

$$(3) \sum_{i=1}^r \dim(\text{eigen}(\lambda_i, \mathbf{f})) = n.$$

$$(4) \text{eigen}(\lambda_1, \mathbf{f}) \oplus \text{eigen}(\lambda_2, \mathbf{f}) \oplus \dots \oplus \text{eigen}(\lambda_r, \mathbf{f}) = L.$$

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Podle Tvzení 10.4.2 existuje báze  $B$  prostoru  $L$ , která sestává z vlastních vektorů zobrazení  $\mathbf{f}$ . Navíc, matice  $\mathbf{A}$  zobrazení  $\mathbf{f}$  vzhledem k bázi  $B$  má tvar

$$D(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1\text{-krát}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{k_2\text{-krát}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{k_r\text{-krát}})$$

kde  $k_i = \dim(\text{eigen}(\lambda_i, \mathbf{f}))$ . Podle Tvzení 10.3.13 je

$$\text{char}_{\mathbf{f}}(x) = (\lambda_1 - x)^{k_1} \cdot (\lambda_2 - x)^{k_2} \cdot \dots \cdot (\lambda_r - x)^{k_r}$$

Ukázali jsme, že podmínka (2) platí.

Ze (2) plyne (3). Platí-li podmínka (2), potom  $\dim(L) = n = \sum_{i=1}^r \text{ord}(\lambda_i, \text{char}_{\mathbf{f}}(x))$ , kde jsme jako  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  označili všechny různé vlastní hodnoty zobrazení  $\mathbf{f}$ . Protože předpokládáme, že pro každé  $\lambda_i$  platí  $\dim(\text{eigen}(\lambda_i, \mathbf{f})) = \text{ord}(\lambda_i, \text{char}_{\mathbf{f}}(x))$ , ukázali jsme, že  $\sum_{i=1}^r \dim(\text{eigen}(\lambda_i, \mathbf{f})) = n$ .

Ze (3) plyne (4). Označme jako  $B_i = (\vec{b}_1^i, \dots, \vec{b}_{k_i}^i)$  bázi prostoru  $\text{eigen}(\lambda_i, \mathbf{f})$ . Podle předpokladu (3) je  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ . Podle Důsledku 10.4.4 platí  $\text{eigen}(\lambda_i, \mathbf{f}) \cap \text{eigen}(\lambda_j, \mathbf{f}) = \{\vec{0}\}$  pro  $i \neq j$ . Proto je

$$B = (\vec{b}_1^1, \dots, \vec{b}_{k_1}^1, \vec{b}_1^2, \dots, \vec{b}_{k_2}^2, \dots, \vec{b}_1^r, \dots, \vec{b}_{k_r}^r)$$

báze prostoru  $L$ . To znamená, že platí  $\text{eigen}(\lambda_1, \mathbf{f}) \vee \text{eigen}(\lambda_2, \mathbf{f}) \vee \dots \vee \text{eigen}(\lambda_r, \mathbf{f}) = L$ .

Ze (4) plyne (1). Označme jako  $B_i = (\vec{b}_1^i, \dots, \vec{b}_{k_i}^i)$  bázi prostoru  $\text{eigen}(\lambda_i, \mathbf{f})$ . Díky podmínce (4) je

$$B = (\vec{b}_1^1, \dots, \vec{b}_{k_1}^1, \vec{b}_1^2, \dots, \vec{b}_{k_2}^2, \dots, \vec{b}_1^r, \dots, \vec{b}_{k_r}^r)$$

báze prostoru  $L$ , která sestává z vlastních vektorů zobrazení  $\mathbf{f}$ . Podmínka (1) plyne z Tvzení 10.4.2. ■

#### 10.4.9 Příklad Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  z Příkladu 10.3.9 jsme ukázali, že platí  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$  a

$$\text{eigen}(3, \mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{eigen}(2, \mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

To znamená, že charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  lze v  $\mathbb{R}[x]$  rozložit na součin lineárních faktorů a platí rovnosti

$$\dim(\text{eigen}(3, \mathbf{A})) = \text{ord}(3, \text{char}_{\mathbf{A}}(x)) = 2 \quad \dim(\text{eigen}(2, \mathbf{A})) = \text{ord}(2, \text{char}_{\mathbf{A}}(x)) = 1$$

Podle Věty 10.4.8 je tedy matice  $\mathbf{A}$  diagonalisovatelná.

Sloupce matice

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi prostoru  $\mathbb{R}^3$ , složenou z vlastních vektorů. Označme jednotlivé sloupce matice  $\mathbf{T}$  jako  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  a  $\mathbf{t}_3$ . Potom platí rovnosti

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_1 = 3 \cdot \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_2 = 3 \cdot \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_3 = 2 \cdot \mathbf{t}_3$$

Proto platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot D(3, 3, 2)$$

neboli

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = D(3, 3, 2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

#### 10.4.10 Příklad Charakteristický polynom matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  z Příkladu 10.3.9 je  $\text{char}_{\mathbf{B}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$ . Lze jej tedy v  $\mathbb{R}[x]$  rozložit na součin lineárních faktorů. Protože platí

$$1 = \dim(\text{eigen}(3, \mathbf{B})) \neq \text{ord}(3, \text{char}_{\mathbf{B}}(x)) = 2 \quad \dim(\text{eigen}(2, \mathbf{B})) = \text{ord}(2, \text{char}_{\mathbf{B}}(x)) = 1$$

není matice  $\mathbf{B}$  podle Věty 10.4.8 diagonalisovatelná.

Nutnou podmínkou pro diagonalisovatelnost reálné matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je existence pouze *reálných* kořenů charakteristického polynomu  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ . Co dělat, když charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  má komplexní *nereálné* kořeny?

Protože matice  $\mathbf{A}$  je reálná, *nemůžeme* říci, že komplexní nereálný kořen  $\lambda$  charakteristického polynomu je vlastní hodnotou matice  $\mathbf{A}$ . Ke komplexnímu (nereálnému) číslu  $\lambda$  totiž neexistuje *reálný* vlastní vektor, případně vektory.

To znamená, že lineární zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  nemusí mít směry, ve kterých by  $\mathbf{A}$  bylo změnou měřítka. V následujícím tvrzení ukážeme, že přesto lze něco říci: lineární zobrazení  $\mathbf{A}$  je jistá kombinace změny měřítka a *rotace* kolem počátku. Tvrzení zformulujeme pro matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , podobnou úvahu však lze reprodukovat pro vyšší dimenze.

**10.4.11 Tvrzení (Geometrický význam komplexního kořene charakteristického polynomu)** *At matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  má nereálný komplexní kořen charakteristického polynomu. Potom matice  $\mathbf{A}$  je podobná rotaci, následované změnou měřítka.*

**DŮKAZ.** Předpokládejme, že charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  nad  $\mathbb{R}$  má komplexní kořen  $\lambda = a + bi$ , kde  $b \neq 0$ . Protože polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  je *reálný* polynom druhého stupně, musí být kořenem polynomu  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  i komplexně sdružené číslo  $\bar{\lambda} = a - bi$ .

Ukážeme, že matice  $\mathbf{A}$  je podobná matici

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

kde  $\alpha$  je *argument* komplexního čísla  $\lambda$ . To jest,  $\alpha$  je takový úhel z intervalu  $[0; 2\pi)$ , pro který platí

$$\lambda = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Postupujeme následovně:

- (1) Chápejme na chvíli matici  $\mathbf{A}$  jako *komplexní*, tj., jako lineární zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Potom matice  $\mathbf{A}$  má vlastní hodnotu  $\lambda = a + bi$  a příslušný *komplexní* vlastní vektor má tvar

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

kde čísla  $v_1, v_2, w_1, w_2$  jsou reálná. Protože matice  $\mathbf{A}$  má reálné položky, je vektor

$$\begin{pmatrix} v_1 - iw_1 \\ v_2 - iw_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

vlastním vektorem příslušným vlastní hodnotě  $\bar{\lambda} = a - bi$ . Podle Tvzení 10.4.3 tvoří vektory

$$\begin{pmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_1 - iw_1 \\ v_2 - iw_2 \end{pmatrix}$$

bázi prostoru  $\mathbb{C}^2$ . Proto platí

$$\begin{aligned} 0 &\neq \begin{vmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} iw_1 & v_1 \\ iw_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 & -iw_1 \\ v_2 & -iw_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} iw_1 & -iw_1 \\ iw_2 & -iw_2 \end{vmatrix} \\ &= -2i \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že determinant je v každém sloupci lineární. To znamená, že

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

a matice

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

je tudíž regulární.

- (2) Protože matice  $\mathbf{A}$  má reálné položky, platí rovnosti

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

kde  $\lambda = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ .

Celkově jsme ukázali, že platí

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

■

**10.4.12 Příklad** Matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , zadaná po položkách jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 2x + 2$  s kořeny  $\lambda_1 = 1 + i$  a  $\lambda_2 = 1 - i$ . Podle Tvzení 10.4.11 je matice  $\mathbf{A}$  podobná matici

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

protože  $1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ .

Zobrazení  $\mathbf{A}$  je tedy rotací (proti směru hodinových ručiček) o úhel  $\frac{\pi}{4}$  kolem počátku, následovanou změnou měřítka s faktorem  $\sqrt{2}$ .

# Kapitola 11

## Jordanův tvar

If a person tells me that he has been to the worst places I have no right to judge him, but if he tells me that it was his superior wisdom that enabled him to go there, then I know he is a fraud.

Ludwig Wittgenstein, *rozhovor*, 1930

Řadu čtvercových matic diagonalisovat *nelze*. V této kapitole ukážeme, že lze (za jistých okolností) každou čtvercovou matici považovat za matici, která se od diagonální matice „příliš neliší“. Co tím myslíme, uvedeme na příkladu matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$ , kterou nelze diagonalisovat. Charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$  matice  $\mathbf{M}$  je roven  $(x-2)^3 \cdot (x-5)$ . Matice  $\mathbf{M}$  má tudíž vlastní hodnoty  $\lambda_1 = 2$  násobnosti 3,  $\lambda_2 = 5$  násobnosti 1, a platí

$$\ker(\mathbf{M} - 2\mathbf{E}_4) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(\mathbf{M} - 5\mathbf{E}_4) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Proto platí nerovnost

$$1 = \dim(\text{eigen}(2, \mathbf{M})) \neq \text{ord}(2, \text{char}_{\mathbf{M}}(x)) = 3$$

a podle Věty 10.4.8 matici  $\mathbf{M}$  diagonalisovat nelze.

Je ale triviálně vidět, že  $\mathbf{M}$  lze zapsat jako součet *diagonální* matice a „zbytku“, který označíme  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{=D(2;2;2;5)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{N}}$$

Matice  $\mathbf{N} = (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o})$  má následující vlastnost:

$$\mathbf{N}^3 = \mathbf{N}^2 \cdot (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}) = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{o}, \mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{o}) = (\mathbf{o}, \mathbf{o}, \mathbf{o}, \mathbf{o}) = \mathbf{O}_{4,4}$$

To znamená, že matice  $\mathbf{M}$  se od diagonální matice  $D(2;2;2;5)$  liší o matici  $\mathbf{N}$ , která „brzy zmizí“, jakmile ji budeme umocňovat. Navíc platí rovnost

$$\mathbf{N} \cdot D(2;2;2;5) = D(2;2;2;5) \cdot \mathbf{N}$$

Zápisu  $D(2;2;2;5) + \mathbf{N}$  budeme říkat *Jordanův tvar* matice  $\mathbf{M}$ .

Kvůli důkazům tvrzení budeme pracovat mírně obecněji: v této kapitole budeme počítat Jordanův tvar pro obecná *lineární zobrazení*  $f : L \rightarrow L$ , kde  $L$  je lineární prostor konečné dimenze nad tělesem  $\mathbb{F}$ . Speciálním případem pak je Jordanův tvar *matic*  $M : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ .

Způsob podání důkazu existence a jednoznačnosti Jordanova tvaru v této kapitole byl velmi inspirován knihami

- ☞ Paul R. Halmos, *Finite-dimensional vector spaces*, D. Van Nostrand Inc., New York, 1958.
- ☞ Jim Hefferon, *Linear algebra*.
- ☞ Morris W. Hirsch a Stephen Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press Inc., 1974.
- ☞ Carl D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM Publishers, 2001.

V posledních třech knihách se lze dozvědět i o praktických aplikacích Jordanova tvaru. V tomto textu dvě aplikace Jordanova tvaru matic ukážeme v Dodatcích N a O.

Lineárním zobrazením  $n : L \rightarrow L$ , pro které existuje  $k$  tak, že platí  $n^k = \mathbf{o}$  (tj., lineárním zobrazením, která umocňováním „zmizí“), se říká *nilpotentní*. Nilpotentní zobrazení budeme studovat a charakterisovat v podkapitole 11.1.

V podkapitole 11.2 ukážeme, jak lze lineární zobrazení dosazovat do polynomu. Odvodíme důležitý výsledek: *každé lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  je kořenem svého charakteristického polynomu*.

V podkapitole 11.3 ukážeme *existenci a jednoznačnost Jordanova tvaru pro nilpotentní zobrazení* a v podkapitole 11.4 odvodíme (za určitých podmínek na charakteristický polynom) *existenci a jednoznačnost Jordanova tvaru pro jakékoli lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$* . Jordanův tvar je „the next best thing“ k diagonalisaci: v případě nedagonalisovatelnosti nám Jordanův tvar ukáže geometrii zadaného lineárního zobrazení.

Nakonec, v podkapitole 11.5 Jordanův tvar ještě mírně zobecníme na takzvaný *Jordanův-Chevalleyho tvar* lineárního zobrazení.

**Upozornění:** teoretické odvození existence Jordanova tvaru je poměrně náročné. Na koncích podkapitol 11.3 a 11.4 jsou v rámečcích uvedena shrnutí praktických početních postupů.

## 11.1 Nilpotentní lineární zobrazení

V této podkapitole se zaměříme na úvahy o *mocninách* lineárních zobrazení  $f : L \rightarrow L$ . Z odstavce 6.1.4 připomeňme, že pro matici  $M : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  definujeme jednotlivé mocniny následovně

$$M^0 = E_n, \quad M^{k+1} = M \cdot M^k, \quad k \geq 0$$

a mocniny lineárního zobrazení  $f : L \rightarrow L$  definujeme analogicky:

$$f^0 = \text{id}, \quad f^{k+1} = f \cdot f^k, \quad k \geq 0$$

Příklad matice  $(2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rozměrů  $1 \times 1$  ukazuje, že posloupnost mocnin lineárního zobrazení může obsahovat *nekonečný* počet lineárních zobrazení (v tomto případě jde o navzájem různé matice  $(2^k) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rozměrů  $1 \times 1$ , kde  $k \geq 0$ ). Přesto se ale v jakékoli posloupnosti tvaru  $f^k$ ,  $k \geq 0$ , vždy zastaví výpočet jádra a obrazu jednotlivých zobrazení  $f^k$ .

**11.1.1 Příklad (Jádro a obraz mocnin čtvercových matic)** Pro několik čtvercových matic  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  spočítáme mocniny  $M^0, M^1, M^2, \dots$  a ukážeme, že posloupnost těchto mocnin má od jistého indexu počínaje konstantní jádro a obraz.

(1) Pro

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

platí

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), & \ker(\mathbf{M}) &= \text{span}(\mathbf{o}), & \text{im}(\mathbf{M}) &= \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{M}^2 &= (\mathbf{M}\mathbf{e}_1, \mathbf{M}\mathbf{e}_1 + \mathbf{M}\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), & \ker(\mathbf{M}^2) &= \text{span}(\mathbf{o}), & \text{im}(\mathbf{M}^2) &= \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{M}^3 &= (\mathbf{M}\mathbf{e}_1, 2\mathbf{M}\mathbf{e}_1 + \mathbf{M}\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) & \ker(\mathbf{M}^2) &= \text{span}(\mathbf{o}), & \text{im}(\mathbf{M}^2) &= \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{M}^k &= (\mathbf{e}_1, k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), & \ker(\mathbf{M}^k) &= \text{span}(\mathbf{o}), & \text{im}(\mathbf{M}^k) &= \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad \text{pro } k \geq 4 \end{aligned}$$

(2) Pro

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

platí

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{o}), & \ker(\mathbf{M}) &= \text{span}(\mathbf{e}_3), & \text{im}(\mathbf{M}) &= \text{span}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{M}^2 &= (\mathbf{M}\mathbf{e}_2, \mathbf{M}\mathbf{e}_3, \mathbf{M}\mathbf{o}) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{o}, \mathbf{o}), & \ker(\mathbf{M}^2) &= \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), & \text{im}(\mathbf{M}^2) &= \text{span}(\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{M}^3 &= (\mathbf{M}\mathbf{e}_3, \mathbf{M}\mathbf{o}, \mathbf{M}\mathbf{o}) = (\mathbf{o}, \mathbf{o}, \mathbf{o}) & \ker(\mathbf{M}^2) &= \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), & \text{im}(\mathbf{M}^2) &= \text{span}(\mathbf{o}) \\ \mathbf{M}^k &= (\mathbf{M}\mathbf{o}, \mathbf{M}\mathbf{o}, \mathbf{M}\mathbf{o}) = (\mathbf{o}, \mathbf{o}, \mathbf{o}), & \ker(\mathbf{M}^k) &= \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), & \text{im}(\mathbf{M}^k) &= \text{span}(\mathbf{o}), \quad \text{pro } k \geq 4 \end{aligned}$$

Předchozí příklad nebyl náhoda. Jádro a obraz obecného lineárního zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  se po několika iteracích *vždy* stabilisují.

**11.1.2 Tvzení** *At  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení, kde  $L$  má konečnou dimenzi. Potom platí:*

$$\begin{aligned} \{\vec{o}\} &= \ker(\mathbf{f}^0) \subseteq \ker(\mathbf{f}^1) \subseteq \ker(\mathbf{f}^2) \subseteq \ker(\mathbf{f}^3) \subseteq \dots \subseteq \ker(\mathbf{f}^k) \subseteq \ker(\mathbf{f}^{k+1}) \subseteq \dots \\ L &= \text{im}(\mathbf{f}^0) \supseteq \text{im}(\mathbf{f}^1) \supseteq \text{im}(\mathbf{f}^2) \supseteq \text{im}(\mathbf{f}^3) \supseteq \dots \supseteq \text{im}(\mathbf{f}^k) \supseteq \text{im}(\mathbf{f}^{k+1}) \supseteq \dots \end{aligned}$$

*Navíc: existuje nejmenší  $k_0$  takové, že*

$$\ker(\mathbf{f}^{k_0}) = \ker(\mathbf{f}^k) \quad \text{a} \quad \text{im}(\mathbf{f}^{k_0}) = \text{im}(\mathbf{f}^k)$$

*pro všechna  $k \geq k_0$ . A pro toto  $k_0$  platí  $k_0 \leq n$ .*

**DŮKAZ.** Dokážeme část tvrzení o jádrech; část o obrazech se dokáže analogicky.

Protože  $\mathbf{f}^0 = \text{id}$ , platí  $\ker(\mathbf{f}^0) = \{\vec{o}\}$  a tudíž platí i  $\ker(\mathbf{f}^0) \subseteq \ker(\mathbf{f}^1)$ . Předpokládejme, že  $k \geq 0$ . Ukážeme, že platí  $\ker(\mathbf{f}^k) \subseteq \ker(\mathbf{f}^{k+1})$ . Zvolme vektor  $\vec{x}$  z  $\ker(\mathbf{f}^k)$ . To znamená, že platí  $\mathbf{f}^k(\vec{x}) = \vec{o}$ . Tudíž  $\mathbf{f}^{k+1}(\vec{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}^k(\vec{x})) = \mathbf{f}(\vec{o}) = \vec{o}$ .

Označme  $\dim(L) = n$ . Musí tedy platit  $d_k = \dim(\ker(\mathbf{f}^k)) \leq n$ . Tudíž máme shora omezenou neklesající posloupnost

$$0 = d_0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_k \leq d_{k+1} \leq \dots \leq n$$

přirozených čísel. Musí tedy existovat nejmenší  $k_0$  tak, že rovnost  $d_{k_0} = d_k$  platí pro všechna  $k \geq k_0$ . To ale znamená, že pro všechna  $k \geq k_0$  platí rovnost  $\ker(\mathbf{f}^{k_0}) = \ker(\mathbf{f}^k)$ .

Dokážeme-li analogicky tvrzení o obrazech, je jasné, že lze zvolit společnou nejmenší hodnotu  $k_0 \leq n$  tak, aby rovnosti

$$\ker(\mathbf{f}^{k_0}) = \ker(\mathbf{f}^k) \quad \text{a} \quad \text{im}(\mathbf{f}^{k_0}) = \text{im}(\mathbf{f}^k)$$

platily pro všechna  $k \geq k_0$ . ■

**11.1.3 Definice (Zobecněné jádro a zobecněný obraz)** Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , kde  $L$  má konečnou dimenzi, definujeme

(1) *zobecněné jádro* lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  jako množinu  $\ker_\infty(\mathbf{f}) = \ker(\mathbf{f}^{k_0})$ ,

(2) *zobecněný obraz* lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  jako množinu  $\text{im}_\infty(\mathbf{f}) = \text{im}(\mathbf{f}^{k_0})$ ,

kde  $k_0$  je číslo z Tvzení 11.1.2.

Připomeňme Větu 3.3.6 o dimenzi jádra a obrazu: pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  platí

$$\dim(\ker(\mathbf{f})) + \dim(\text{im}(\mathbf{f})) = \dim(L)$$

Analogická rovnost platí pro zobecněné jádro a zobecněný obraz lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ . Ve skutečnosti dokážeme trochu víc: *každý* vektor  $\vec{x}$  z  $L$  lze jednoznačně zapsat jako součet vektoru z  $\ker_\infty(\mathbf{f})$  a vektoru z  $\text{im}_\infty(\mathbf{f})$ . Než tvrzení zformulujeme, připomeňme si značení pro direktní součet podprostorů a zobrazení z Definice 1.6.13 a Definice 2.2.7.

**11.1.4 Tvzení** *At  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení, kde  $L$  má konečnou dimenzi. Potom platí:*

- (1) *Množiny  $\ker_\infty(\mathbf{f})$  a  $\text{im}_\infty(\mathbf{f})$  jsou lineární podprostory prostoru  $L$ .*
- (2) *Platí rovnost  $L = \ker_\infty(\mathbf{f}) \oplus \text{im}_\infty(\mathbf{f})$ .*
- (3) *Pro libovolný vektor  $\vec{x}$  z  $\ker_\infty(\mathbf{f})$  je vektor  $\mathbf{f}(\vec{x})$  opět z  $\ker_\infty(\mathbf{f})$ . Pro zobrazení*

$$\mathbf{f}_{\text{nil}} : \ker_\infty(\mathbf{f}) \rightarrow \ker_\infty(\mathbf{f}), \quad \vec{x} \mapsto \mathbf{f}(\vec{x})$$

*existuje  $k \geq 0$  tak, že  $\mathbf{f}_{\text{nil}}^k = \mathbf{o}$ .*

- (4) *Pro libovolný vektor  $\vec{x}$  z  $\text{im}_\infty(\mathbf{f})$  je vektor  $\mathbf{f}(\vec{x})$  opět z  $\text{im}_\infty(\mathbf{f})$ . Zobrazení*

$$\mathbf{f}_{\text{invert}} : \text{im}_\infty(\mathbf{f}) \rightarrow \text{im}_\infty(\mathbf{f}), \quad \vec{x} \mapsto \mathbf{f}(\vec{x})$$

*je invertibilní.*

*Předchozí podmínky charakterizují podprostory  $\ker_\infty(\mathbf{f})$  a  $\text{im}_\infty(\mathbf{f})$ . To znamená: Jestliže  $N$  a  $I$  jsou lineární podprostory prostoru  $L$ , jestliže platí  $L = N \oplus I$ , a pokud existují zobrazení*

$$\mathbf{n} : N \rightarrow N, \quad \vec{x} \mapsto \mathbf{f}(\vec{x}) \quad \mathbf{i} : I \rightarrow I, \quad \vec{y} \mapsto \mathbf{f}(\vec{y})$$

*tak, že  $\mathbf{n}^k = \mathbf{o}$  pro nějaké  $k$  a  $\mathbf{i}$  je invertibilní, potom  $N = \ker_\infty(\mathbf{f})$ ,  $I = \text{im}_\infty(\mathbf{f})$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{f}_{\text{nil}}$  a  $\mathbf{i} = \mathbf{f}_{\text{invert}}$ .*

**DŮKAZ.** Zvolme  $k_0$  tak, že  $\ker_\infty(\mathbf{f}) = \ker(\mathbf{f}^{k_0})$  a  $\text{im}_\infty(\mathbf{f}) = \text{im}(\mathbf{f}^{k_0})$ .

- (1) Protože  $\ker_\infty(\mathbf{f}) = \ker(\mathbf{f}^{k_0})$  a  $\text{im}_\infty(\mathbf{f}) = \text{im}(\mathbf{f}^{k_0})$ , jsou  $\ker_\infty(\mathbf{f})$  a  $\text{im}_\infty(\mathbf{f})$  jsou lineární podprostory prostoru  $L$ .
- (2) Dokážeme rovnost  $L = \ker_\infty(\mathbf{f}) \oplus \text{im}_\infty(\mathbf{f})$ . Podle Definice 1.6.13 musíme ukázat následující dvě podmínky:
  - (i)  $L = \ker_\infty(\mathbf{f}) \vee \text{im}_\infty(\mathbf{f})$ .

Podle Věty 3.3.6 platí

$$\dim(\ker_\infty(\mathbf{f})) + \dim(\text{im}_\infty(\mathbf{f})) = \dim(\ker(\mathbf{f}^{k_0})) + \dim(\text{im}(\mathbf{f}^{k_0})) = \dim(L)$$

To znamená, že platí  $L = \ker_\infty(\mathbf{f}) \vee \text{im}_\infty(\mathbf{f})$ .

- (ii)  $\{\vec{o}\} = \ker_\infty(\mathbf{f}) \cap \text{im}_\infty(\mathbf{f})$ .

Nejprve si uvědomme, že lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  lze zúžit na lineární zobrazení

$$\mathbf{f}_{\text{invert}} : \text{im}_\infty(\mathbf{f}) \rightarrow \text{im}_\infty(\mathbf{f}), \quad \vec{y} \mapsto \mathbf{f}(\vec{y})$$

Opravdu:  $\vec{y} = \mathbf{f}^{k_0}(\vec{x})$  pro nějaký vektor  $\vec{x}$ . Potom  $\mathbf{f}(\vec{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}^{k_0}(\vec{x})) = \mathbf{f}^{k_0}(\mathbf{f}(\vec{x}))$ . To znamená, že  $\mathbf{f}(\vec{y})$  leží v  $\text{im}_\infty(\mathbf{f})$ .

Lineární zobrazení  $\mathbf{f}_{\text{invert}}$  je epimorfismus, a podle Důsledku 3.3.8 je  $\mathbf{f}_{\text{invert}}$  tudíž monomorfismus.

Zvolme vektor  $\vec{x} \in \ker_\infty(\mathbf{f}) \cap \text{im}_\infty(\mathbf{f})$ . Potom  $\mathbf{f}^{k_0}(\vec{x}) = \mathbf{f}_{\text{invert}}(\vec{x}) = \vec{o}$ . Protože  $\mathbf{f}_{\text{invert}}$  je monomorfismus, je  $\vec{x} = \vec{o}$ . To jsme chtěli dokázat.



- (3) Pro libovolný vektor  $\vec{x}$  z  $\ker_\infty(\mathbf{f})$  je vektor  $\mathbf{f}(\vec{x})$  opět v  $\ker_\infty(\mathbf{f})$ . Opravdu: pokud  $\mathbf{f}^{k_0}(\vec{x}) = \vec{o}$ , je  $\mathbf{f}^{k_0}(\mathbf{f}(\vec{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{f}^{k_0}(\vec{x})) = \vec{o}$ .

Dále ukážeme, že  $\mathbf{f}_{\text{nil}}^{k_0} = \mathbf{o}$ . Pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$  z  $\ker_\infty(\mathbf{f})$  platí, že  $\mathbf{f}_{\text{nil}}^{k_0}(\vec{x}) = \mathbf{f}^{k_0}(\vec{x}) = \vec{o}$ .

- (4) V části (ii) jsme dokázali, že  $\mathbf{f}_{\text{invert}}$  je epimorfismus. Tudíž, podle Důsledku 3.3.8, je  $\mathbf{f}_{\text{invert}}$  isomorfismus. Nakonec dokážeme poslední část tvrzení. Podle předpokladů ale platí  $N \subseteq \ker_\infty(\mathbf{f})$  a  $I \subseteq \text{im}_\infty(\mathbf{f})$ . Protože  $L = N \oplus I$ , musí platit  $N = \ker_\infty(\mathbf{f})$ ,  $I = \text{im}_\infty(\mathbf{f})$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{f}_{\text{nil}}$  a  $\mathbf{i} = \mathbf{f}_{\text{invert}}$ . ■

Než vysvětlíme význam Tvzení 11.1.4, zavedeme dva pojmy, které nám usnadní vyjadřování.

**11.1.5 Definice (Nilpotentní zobrazení a index nilpotence)** Lineárnímu zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , pro které existuje přirozené číslo  $k$  tak, že platí  $\mathbf{f}^k = \mathbf{o}$ , říkáme *nilpotentní*. Pro nilpotentní zobrazení  $\mathbf{n}$  označíme jako  $\text{nil}(\mathbf{n})$  nejmenší přirozené číslo  $k$ , pro které rovnost  $\mathbf{n}^k = \mathbf{o}$  platí. Číslo  $\text{nil}(\mathbf{n})$  říkáme *index nilpotence* zobrazení  $\mathbf{n}$ .

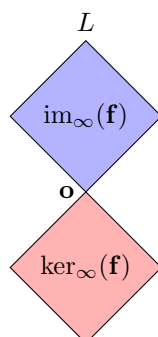
Dobrým *sloganem* pro nilpotentní lineární zobrazení je:

*Nilpotentní lineární zobrazení je „téměř“ nulové lineární zobrazení. Index nilpotence uvádí, jak moc je nilpotentní zobrazení „vzdáleno“ od nulového lineárního zobrazení.*

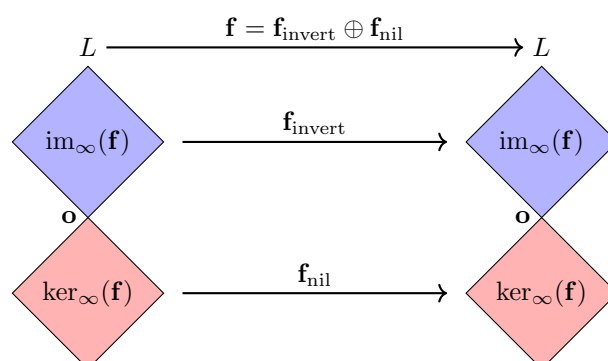
**11.1.6 Definice (Invariantní podprostor)** Ať  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení. Řekneme, že lineární podprostor  $W$  prostoru  $L$  je  *$\mathbf{f}$ -invariantní*, pokud  $\mathbf{f}(\vec{x})$  leží ve  $W$  pro každý vektor  $\vec{x}$  z  $W$ .



**11.1.7 Poznámka (Význam Tvzení 11.1.4)** V Tvzení 11.1.4 jsme dokázali, že každé lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  lze jednoznačně rozložit na součet *invertibilního* a *nilpotentního* zobrazení. Přesněji: prostor  $L$  lze „rozbít“



na dvě  *$\mathbf{f}$ -invariantní* části  $\ker_\infty(\mathbf{f})$  a  $\text{im}_\infty(\mathbf{f})$ . Tudíž lze *jednoznačně* „rozbít“ i zobrazení  $\mathbf{f}$



na *invertibilní* a *nilpotentní* část. To jest: platí  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{invert}} \oplus \mathbf{f}_{\text{nil}}$ , viz Definici 2.2.7.

Dalším důležitým důsledkem Tvzení 11.1.4 je „rozbít“ determinantu lineárního zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ .

**11.1.8 Důsledek** Pro lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  platí  $\det(f) = \det(f_{\text{invert}}) \cdot \det(f_{\text{nil}})$ .

DŮKAZ. Podle Tvzení 9.1.9 a 11.1.4 existuje uspořádaná báze  $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$  prostoru  $L$ , vzhledem ke které má  $f$  matici

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{O}_1 \\ \hline \mathbf{O}_2 & \mathbf{N} \end{array} \right) = \mathbf{I} \oplus \mathbf{N}$$

kde  $\mathbf{I}$  je matice zobrazení  $f_{\text{invert}}$  vzhledem k bázi  $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$  prostoru  $\text{im}_\infty(f)$ ,  $\mathbf{N}$  je matice zobrazení  $f_{\text{nil}}$  vzhledem k bázi  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$  prostoru  $\text{ker}_\infty(f)$  a  $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$  jsou nulové matice příslušných rozměrů. Podle Poznámky 8.2.7 platí

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{N} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{I}) \cdot \det(\mathbf{N})$$

a podle Definice 9.3.6 platí  $\det(f) = \det(f_{\text{invert}}) \cdot \det(f_{\text{nil}})$ . ■

Invertibilním zobrazením (alespoň invertibilním maticím  $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ) již rozumíme. Ve zbytku této podkapitoly podáme charakterisaci nilpotentních zobrazení. V podkapitole 11.4 pak tuto charakterisaci spojíme s naším porozuměním invertibilním zobrazením.

### 11.1.9 Příklad (Nilpotentní matice a jejich řetězce)

(1) Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z úvodu této kapitoly je nilpotentní, platí  $\text{nil}(\mathbf{N}) = 3$ .

Pojďme „stopovat“ cestu vektorů kanonické báze při postupné aplikaci matice  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{o}$$

Všechny čtyři báze vektory se nakonec zobrazí na nulový vektor, protože matice  $\mathbf{N}$  je nilpotentní. Navíc  $\text{nil}(\mathbf{N})$  je zjevně rovna největší z délek jednotlivých řetězců, tj.  $\text{nil}(\mathbf{N})$  je maximální z čísel 1, 2, 3, 1.

(2) Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  je nilpotentní: její  $\mathbf{N}$ -řetězce jsou

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{o} & \\ \mathbf{e}_2 & \mapsto & \mathbf{e}_1 & \mapsto \mathbf{o} \\ \mathbf{e}_3 & \mapsto & 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o} \end{array}$$

a proto platí  $\text{nil}(\mathbf{N}) = 3$ .

Pojem řetězce pro nilpotentní matici z Příkladu 11.1.9 nyní zobecníme pro pojem řetězce libovolného lineárního zobrazení.

**11.1.10 Definice** Ať  $f : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení. Seznamu  $(f^{k-1}(\vec{v}), f^{k-2}(\vec{v}), \dots, f^1(\vec{v}), f^0(\vec{v}))$ , kde  $f^k(\vec{v}) = \vec{o}$ , říkáme **f-řetězec délky k vytvořený vektorem  $\vec{v}$** .

**11.1.11 Tvzení** Ať  $n : L \rightarrow L$  je nilpotentní lineární zobrazení. Ať  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je báze prostoru  $L$ , která vznikla zřetěžením  $n$ -řetězců. Potom délka nejdelšího  $n$ -řetězce v bázi  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je rovna  $\text{nil}(\mathbf{n})$ .

DŮKAZ. Označme jako  $k$  délku nejdelšího  $\mathbf{n}$ -řetězce  $(\mathbf{n}^{k-1}(\vec{v}), \mathbf{n}^{k-2}(\vec{v}), \dots, \mathbf{n}^1(\vec{v}), \mathbf{n}^0(\vec{v}))$  v bázi  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ . Potom platí nerovnost  $k \leq \text{nil}(\mathbf{n})$ , protože  $\mathbf{n}^{\text{nil}(\mathbf{n})} = \mathbf{o}$ .

Ať platí  $k < \text{nil}(\mathbf{n})$ , odvodíme spor. Protože  $k < \text{nil}(\mathbf{n})$ , existuje vektor  $\vec{x}$ , pro který platí  $\mathbf{n}^k(\vec{x}) \neq \vec{o}$ . Vyjádříme-li  $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \vec{b}_j$ , potom platí

$$\vec{o} \neq \mathbf{n}^k(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \underbrace{\mathbf{n}^k(\vec{b}_j)}_{=\vec{o}} = \vec{o}$$

a to je spor. ■

V podkapitole 11.3 dokážeme, že pro každé nilpotentní lineární zobrazení  $\mathbf{n} : L \rightarrow L$  existuje báze vzniklá zřetěžením  $\mathbf{n}$ -řetězců. Nejprve si ale ukážeme důležitý příklad.



### 11.1.12 Příklad Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  je nilpotentní:

$$\begin{array}{c} \mathbf{e}_4 \searrow \\ \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{o} \\ \mathbf{e}_5 \nearrow \end{array} \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}$$

Platí  $\text{nil}(\mathbf{N}) = 2$ . Výše uvedené  $\mathbf{N}$ -řetězce však nejsou disjunktní a proto jejich zřetěžením nemůže vzniknout báze prostoru  $\mathbb{R}^5$ .

Existuje báze  $\mathbb{R}^5$  složená z  $\mathbf{N}$ -řetězců? Pokud ano, musí mít tvar  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$  a musí obsahovat alespoň jeden  $\mathbf{N}$ -řetězec délky 2. Protože bazových vektorů je 5, musí nastat právě jeden ze dvou případů:

- (1) Báze  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$  obsahuje právě jeden  $\mathbf{N}$ -řetězec délky 2. To znamená, že  $\dim(\ker(\mathbf{N})) = 4$ , protože čtyři vektory báze jsou zobrazením  $\mathbf{N}$  poslány na vektor  $\mathbf{o}$ .
- (2) Báze  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$  obsahuje právě dva  $\mathbf{N}$ -řetězce délky 2. To znamená, že  $\dim(\ker(\mathbf{N})) = 3$ , protože tři vektory báze jsou zobrazením  $\mathbf{N}$  poslány na vektor  $\mathbf{o}$ .

Protože  $\dim(\ker(\mathbf{N})) = 3$ , můžeme první případ vyloučit. Budeme tedy hledat bázi  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$ , která dá  $\mathbf{N}$ -řetězec

$$\mathbf{b}_5 \mapsto \mathbf{b}_4 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{b}_3 \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{o}$$

Vzhledem k této bázi bude mít matice  $\mathbf{N}$  tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pokud zakreslíme bloky odpovídající jednotlivým  $\mathbf{N}$ -řetězcům, pak  $\mathbf{N}$  má vzhledem k bázi  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$  tvar

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (11.1)$$

To znamená, že vzhledem k bázi  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$  má matice  $\mathbf{N}$  diagonálně blokový tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{B}_3 \end{pmatrix}$$

kde matice  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$  jsou nilpotentní a mají velmi speciální tvar: na hlavní diagonále mají 0 a těsně nad hlavní diagonálou mají 1.

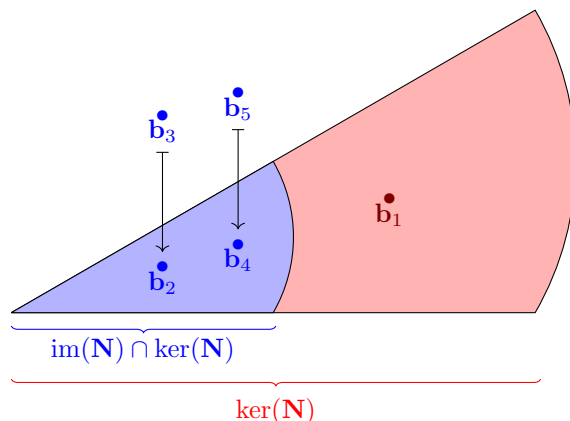
Jak ale bázi  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$  najít? Podle tvaru

$$\mathbf{b}_5 \mapsto \mathbf{b}_4 \mapsto \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_3 \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{0}$$

$\mathbf{N}$ -řetězce musí platit:

- (1) Vektory  $\mathbf{b}_4$  a  $\mathbf{b}_2$  musí být lineárně nezávislé a ležet v  $\ker(\mathbf{N}) \cap \operatorname{im}(\mathbf{N})$ .
- (2) Vektor  $\mathbf{b}_1$  musí ležet v  $\ker(\mathbf{N})$  a vektory  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_2$  musí být lineárně nezávislé.
- (3) Vektory  $\mathbf{b}_5$  a  $\mathbf{b}_3$  musí být lineárně nezávislé a musí platit rovnosti  $\mathbf{N}\mathbf{b}_5 = \mathbf{b}_4$  a  $\mathbf{N}\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2$ .

Tuto situaci lze znázornit následujícím obrázkem:



K problému nalezení báze  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$  se vrátíme v Příkladu 11.3.2.

Povídání o nilpotentních lineárních zobrazeních zakončíme tvrzením, že pojmy nilpotence matice a indexu nilpotence matice jsou pro podobné matice stejné a že nilpotentní lineární zobrazení má nilpotentní matici (vzhledem k jakýmkoli bázím). Pro podobnost matic, viz Definici 9.3.3.

### 11.1.13 Lemma

- (1) Ať  $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ,  $\mathbf{N} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  jsou podobné matice. Pak  $\mathbf{N}$  je nilpotentní právě tehdy, když  $\mathbf{M}$  je nilpotentní. Navíc v takovém případě platí  $\operatorname{nil}(\mathbf{N}) = \operatorname{nil}(\mathbf{M})$ .
- (2) Ať  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení, kde  $L$  má konečnou dimenzi, a ať  $\mathbf{M}$  je matice zobrazení  $\mathbf{f}$  vzhledem k bázím  $B$  a  $C$ . Pak  $\mathbf{f}$  je nilpotentní právě tehdy, když  $\mathbf{M}$  je nilpotentní. Navíc v takovém případě platí  $\operatorname{nil}(\mathbf{f}) = \operatorname{nil}(\mathbf{M})$ .

DŮKAZ.

- (1) Ať  $\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{T}$  pro regulární matici  $\mathbf{T}$ . Potom pro každé  $k$  platí

$$\mathbf{M}^k = \underbrace{(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdots (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{T})}_{k\text{-krát}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{N}^k\mathbf{T} \quad \text{a} \quad \mathbf{N}^k = \underbrace{(\mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}) \cdots (\mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1})}_{k\text{-krát}} = (\mathbf{T}\mathbf{M}^k\mathbf{T}^{-1})$$

Ukázali jsme, že  $\mathbf{M}^k = \mathbf{O}_{n,n}$  právě tehdy, když  $\mathbf{N}^k = \mathbf{O}_{n,n}$ . To znamená, že  $\mathbf{M}$  je nilpotentní právě tehdy, když je  $\mathbf{N}$  nilpotentní. Navíc platí  $\operatorname{nil}(\mathbf{M}) = \operatorname{nil}(\mathbf{N})$ .

(2) Označme  $\dim(L) = n$ . Potom je, podle předpokladu, diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{M}} & \mathbb{F}^n \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\ L & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L \end{array}$$

komutativní. Tudiž, podle Tvzení 9.1.7, je pro každé  $k \geq 0$  i diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{M}^k} & \mathbb{F}^n \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\ L & \xrightarrow{\mathbf{f}^k} & L \end{array}$$

komutativní. Obě zobrazení  $\text{coord}_B$ ,  $\text{coord}_C$  jsou isomorfismy. Tudiž  $\mathbf{f}^k = \mathbf{o}$  platí právě tehdy, když platí  $\mathbf{M}^k = \mathbf{O}_{n,n}$ . To znamená, že  $\mathbf{f}$  je nilpotentní právě tehdy, když  $\mathbf{M}$  je nilpotentní. Navíc platí  $\text{nil}(\mathbf{f}) = \text{nil}(\mathbf{M})$ . ■

## 11.2 Minimální polynom lineárního zobrazení

Připomeňme, že v Definici 10.2.1 jsme zavedli polynom nad tělesem  $\mathbb{F}$  jako *výraz*. Navíc jsme úzkostlivě dbali na terminologii: v polynomu  $p(x)$  jsme znaku  $x$  říkali *neurčitá*. Je to proto, abychom za  $x$  mohli dosazovat. V Definici 10.2.2 jsme za  $x$  dosazovali prvky tělesa  $\mathbb{F}$ . Nyní budeme za  $x$  dosazovat prvky lineárního prostoru  $\text{Lin}(L, L)$ , tj. za  $x$  budeme dosazovat *lineární zobrazení z  $L$  do  $L$* . Odvodíme tak důležitou Větu 11.2.11, kterou budeme moci použít v podkapitole 11.4 pro hledání Jordanova tvaru libovolného lineárního zobrazení.

**11.2.1 Příklad** Pro matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a polynom  $p(x) = x^2 - 4x + 1$  nad  $\mathbb{R}$  spočteme

$$\begin{aligned} p(\mathbf{M}) &= \mathbf{M}^2 - 4\mathbf{M}^1 + 1\mathbf{M}^0 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vidíme, že  $p(\mathbf{M}) = \mathbf{O}_{2,2}$ . Budeme říkat, že matice  $\mathbf{M}$  je *kořenem* polynomu  $p(x)$ . Později uvidíme, že nejde o náhodu: polynom  $p(x)$  je totiž charakteristický polynom matice  $\mathbf{M}$ , viz Definici 10.3.7 a čtvercová matice je vždy kořenem svého charakteristického polynomu, viz Větu 11.2.11.

**11.2.2 Definice (Hodnota polynomu v lineárním zobrazení)** Pro polynom  $p(x)$  nad  $\mathbb{F}$  a lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  definujeme

$$p(\mathbf{f}) = \begin{cases} \mathbf{o}, & \text{je-li } p(x) = 0, \\ a_n \mathbf{f}^n + \cdots + a_1 \mathbf{f} + a_0 \text{id}, & \text{je-li } p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{cases}$$

V případě, že  $p(\mathbf{f}) = \mathbf{o}$ , říkáme, že lineární zobrazení  $\mathbf{f}$  je *kořenem* polynomu  $p(x)$ .

**11.2.3 Lemma** *At  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení, kde  $L$  má konečnou dimenzi. Pak existuje nenulový polynom  $p(x)$  nad  $\mathbb{F}$  takový, že  $p(\mathbf{f}) = \mathbf{o}$ .*

DŮKAZ. Z Tvzení 4.3.4 víme, že  $\dim(\text{Lin}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n)) = n^2$ . Analogicky lze dokázat, že  $\dim(\text{Lin}(L, L)) = n^2$ , jestliže  $\dim(L) = n$ .

Proto musí seznam  $(\mathbf{f}^{n^2}, \mathbf{f}^{n^2-1}, \dots, \mathbf{f}^1, \mathbf{f}^0)$  vektorů v prostoru  $\text{Lin}(L, L)$  délky  $(n^2 + 1)$  být lineárně závislý. To znamená, že existuje netriviální nulová kombinace

$$a_{n^2} \cdot \mathbf{f}^{n^2} + a_{n^2-1} \cdot \mathbf{f}^{n^2-1} + \dots + a_1 \cdot \mathbf{f}^1 + a_0 \cdot \mathbf{f}^0 = \mathbf{o}$$

neboli: lineární zobrazení  $\mathbf{f}$  je kořenem výrazu  $p(x) = a_{n^2}x^{n^2} + a_{n^2-1}x^{n^2-1} + \dots + a_1x^1 + a_0$ . Je jasné, že (po případném odstranění členů s nulovými koeficienty) je výraz  $p(x)$  polynom. ■

**11.2.4 Definice** *Minimální polynom lineárního zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , kde  $L$  má konečnou dimenzi, je polynom tvaru  $m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0$  nejmenšího možného stupně  $k \geq 1$ , pro který platí  $m(\mathbf{f}) = \mathbf{o}$ .*

Pozor: minimální polynom  $m(x)$  lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  musí mít (kromě požadavků  $m(\mathbf{f}) = \mathbf{o}$  a minimality stupně) *koeficient u nejvyšší mocniny roven 1*.

To jest, vedoucí koeficient minimálního polynomu (viz Definici 10.2.1) je roven 1.

**11.2.5 Příklad** Minimální polynom matice  $\mathbf{O}_{n,n} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je polynom  $m(x) = x$ . Minimální polynom matice  $\mathbf{E}_n : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je polynom  $m(x) = x - 1$ .

**11.2.6 Tvzení** *Minimální polynom existuje pro každé lineární zobrazení a je určen jednoznačně.*

DŮKAZ. Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  existuje podle Lemmatu 11.2.3 nenulový polynom  $p(x)$  tak, že  $p(\mathbf{f}) = \mathbf{o}$ . Proto je množina

$$\{n \mid n \geq 1 \text{ a existuje } p(x) \text{ tak, že } \deg(p(x)) = n \text{ a } p(\mathbf{f}) = \mathbf{o}\}$$

neprázdná množina přirozených čísel. To znamená, že existuje její minimum  $n_0 \geq 1$ . Označme jako  $p_0(x)$  polynom, pro který platí  $\deg(p_0(x)) = n_0$  a  $p_0(\mathbf{f}) = \mathbf{o}$ . Dále označme jako  $a_{n_0}$  vedoucí koeficient polynomu  $p_{n_0}(x)$ . Polynom  $(a_{n_0})^{-1} \cdot p_0(x)$  má stupeň  $n_0$ , jeho vedoucí koeficient je 1 a zobrazení  $\mathbf{f}$  je jeho kořenem. Jinými slovy:  $(a_{n_0})^{-1} \cdot p_0(x)$  je minimálním polynomem zobrazení  $\mathbf{f}$ .

Ukážeme, že minimální polynom zobrazení  $\mathbf{f}$  je určen jednoznačně. Předpokládejme, že  $p_0(x)$  a  $q_0(x)$  jsou polynomy s vedoucími koeficienty rovnými 1, a pro které platí  $\deg(p_0(x)) = n_0$  a  $p_0(\mathbf{f}) = \mathbf{o}$ , a  $\deg(q_0(x)) = n_0$  a  $q_0(\mathbf{f}) = \mathbf{o}$ .

Označme  $d(x) = p_0(x) - q_0(x)$ . Evidentně platí  $\deg(q_0(x)) < n_0$ . Ukážeme, že polynom  $d(x)$  je nulový. Kdyby vedoucí koeficient  $d$  polynomu  $d(x)$  byl nenulový, potom polynom  $d^{-1} \cdot d(x)$  má stupeň menší než  $n_0$ , jeho vedoucí koeficient je 1 a zobrazení  $\mathbf{f}$  je jeho kořenem. To je spor s definicí čísla  $n_0$ . Proto platí  $d(x) = p_0(x) - q_0(x)$ , neboli  $p_0(x) = q_0(x)$ . ■

Připomeňme Definici 10.2.1 polynomu nad tělesem  $\mathbb{F}$  a Poznámku 10.2.16: pro základní operace s polynomy (sčítání a násobení) bylo třeba umět koeficienty polynomů sčítat a násobit mezi sebou. Stačí tedy, aby koeficienty polynomů byly prvky struktury, kde je definováno rozumné sčítání a násobení. Takovým strukturám se říká *okruh s jednotkou*, buď *komutativní* (pokud je násobení komutativní) nebo *nekomutativní* (pokud násobení komutativní není), viz Poznámku 1.2.16.

Příkladem *nekomutativního okruhu s jednotkou* je

$$\text{Lin}(L, L)$$

kde lineární prostor má konečnou dimenzi.

- (1) Sčítání v  $\text{Lin}(L, L)$  je sčítání lineárních zobrazení. Toto sčítání je komutativní, asociativní a má neutrální prvek  $\mathbf{o}$  (nulové lineární zobrazení). Každý prvek z  $\text{Lin}(L, L)$  má opačný prvek vzhledem ke sčítání.
- (2) Násobení v  $\text{Lin}(L, L)$  je skládání lineárních zobrazení. Toto násobení obecně *není* komutativní, je asociativní a má neutrální prvek  $\mathbf{id}$  (identické lineární zobrazení).
- (3) Sčítání a násobení v  $\text{Lin}(L, L)$  jsou spolu provázány distributivními zákony.

V  $\text{Lin}(L, L)$  obecně *neplatí* axiom invertibility (existuje nenulové zobrazení, které není invertibilní). Proto  $\text{Lin}(L, L)$  obecně *není* „nekomutativní těleso“.

Přesto lze vybudovat „uspokojivou“ teorii polynomů nad okruhem  $\text{Lin}(L, L)$ . Z této teorie zmíníme jen absolutně nutné základy, pro více informací odkazujeme například na knihu

☞ Paul M. Cohn, *Algebra*, Vol. 1, John Wiley & Sons, 1982.

**11.2.7 Definice (Polynom nad  $\text{Lin}(L, L)$ )** Ať  $L$  je lineární prostor konečné dimenze nad tělesem  $\mathbb{F}$ . *Polynom v neurčité  $x$  nad  $\text{Lin}(L, L)$*  je buď nulové zobrazení  $\mathbf{o}$  nebo výraz

$$\mathbf{f}_n x^n + \mathbf{f}_{n-1} x^{n-1} + \dots + \mathbf{f}_0$$

kde  $(\mathbf{f}_n, \dots, \mathbf{f}_0)$  je seznam lineárních zobrazení z  $L$  do  $L$  (jde o seznam *koeficientů* polynomu), a kde  $\mathbf{f}_n$  je invertibilní.

Množinu všech polynomů v neurčité  $x$  nad  $\text{Lin}(L, L)$  označíme  $\text{Lin}(L, L)[x]$ .

Definice 11.2.7 kopíruje Definici 10.2.1. Ať

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{a}_n x^n + \mathbf{a}_{n-1} x^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_0$$

a

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{b}_m x^m + \mathbf{b}_{m-1} x^{m-1} + \dots + \mathbf{b}_0$$

jsou polynomy z  $\text{Lin}(L, L)[x]$ . Ať platí  $n \geq m$ . Podobně jako v podkapitole 10.2 lze definovat součet

$$\mathbf{a}(x) + \mathbf{b}(x) = \mathbf{a}_n x^n + \dots + \mathbf{a}_{m+1} x^{m+1} + (\mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m) x^m + (\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{b}_{n-1}) x^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_0$$

a součin

$$\mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{b}(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i+j=k} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j \right) x^k$$

polynomů z  $\text{Lin}(L, L)[x]$  a *hodnotu* polynomu  $\mathbf{a}(x)$  v lineárním zobrazení  $\mathbf{x}$  jako lineární zobrazení

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_n \mathbf{x}^n + \mathbf{a}_{n-1} \mathbf{x}^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_0$$

Více teorie potřebovat nebudeme.

**11.2.8 Příklad** Příkladem polynomů z  $\text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)[x]$  jsou

$$\mathbf{p}(x) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}(x) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(x) &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \left( \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot x + \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x) \cdot \mathbf{q}(x) &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot x^3 + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot x \\ &\quad + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -13 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x^3 + \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{q}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$



**11.2.9 Příklad** Při dosazování do polynomů nad  $\text{Lin}(L, L)$  musíme být opatrní. Například: pro polynom  $\mathbf{c}(x) = \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{b}(x)$  z  $\text{Lin}(L, L)[x]$  nemusí pro  $\mathbf{x}$  z  $\text{Lin}(L, L)$  platit rovnost  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x})$ .

Zvolme

$$\mathbf{a}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Potom

$$\mathbf{c}(x) = \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x$$

Pro

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{c}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ale

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dosazení lineárního zobrazení  $\mathbf{x} : L \rightarrow L$  do součinu dvou polynomů z  $\text{Lin}(L, L)[x]$  bude hrát důležitou roli v hlavním výsledku této podkapitoly, ve Větě 11.2.11. Zformulujeme tedy podmínky, za kterých lze do součinu dosadit „obvyklým“ způsobem.

**11.2.10 Lemma** At  $\mathbf{a}(x) = \mathbf{a}_n x^n + \mathbf{a}_{n-1} x^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_0$  a  $\mathbf{b}(x) = \mathbf{b}_m x^m + \mathbf{b}_{m-1} x^{m-1} + \dots + \mathbf{b}_0$  jsou polynomy z  $\text{Lin}(L, L)[x]$ . Označme

$$\mathbf{c}(x) = \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{b}(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i+j=k} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j \right) x^k$$

At  $\mathbf{x}$  je prvek z  $\text{Lin}(L, L)$ , pro který platí  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{x}$  pro všechna  $j = 1, \dots, m$ . Potom  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x})$ .



DŮKAZ. Protože  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{x}$  pro všechna  $j = 1, \dots, m$ , platí rovnosti  $\mathbf{x}^i \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{x}^i$  pro všechna  $j = 1, \dots, m$  a všechna  $i = 1, \dots, n$ . Takže platí

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i+j=k} \mathbf{a}_i \mathbf{x}^i \mathbf{b}_j \mathbf{x}^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i+j=k} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j \mathbf{x}^{i+j} \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i+j=k} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j \right) \mathbf{x}^k = \mathbf{c}(\mathbf{x})$$

a to jsme chtěli dokázat. ■

**11.2.11 Věta (Cayley-Hamilton)** *At'  $\dim(L) = n$  a at'  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení. Potom  $\text{char}_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}) = \mathbf{o}$ .*

DŮKAZ. At'  $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je matice zobrazení  $\mathbf{f}$  vzhledem k jakékoli bázi. Ukážeme, že platí  $\text{char}_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}) = \mathbf{O}_{n,n}$ .  
Připomeňme, že  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x) = \det(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_n)$  a že tudíž podle Věty 8.4.3 platí rovnost

$$\text{char}_{\mathbf{M}}(x) \cdot \mathbf{E}_n = \text{adj}(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_n) \cdot (\mathbf{M} - x\mathbf{E}_n)$$

Protože  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x) \cdot \mathbf{E}_n$ ,  $\text{adj}(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_n)$  i  $(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_n)$  jsou polynomy z  $\text{Lin}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n)$ , můžeme označit

$$\underbrace{\text{char}_{\mathbf{M}}(x) \cdot \mathbf{E}_n}_{=\mathbf{c}(x)} = \underbrace{\text{adj}(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_n)}_{=\mathbf{a}(x)} \cdot \underbrace{(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_n)}_{=\mathbf{b}(x)}$$

Matice  $\mathbf{M}$  navíc komutuje s každým koeficientem polynomu  $\mathbf{b}(x) = \mathbf{M} - x\mathbf{E}_n$ , tj. platí  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}$  a  $\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_n$ . Podle Lemmatu 11.2.10 tedy platí

$$\mathbf{c}(\mathbf{M}) = \mathbf{a}(\mathbf{M}) \cdot \underbrace{\mathbf{b}(\mathbf{M})}_{=\mathbf{O}_{n,n}} = \mathbf{O}_{n,n}$$

To znamená, že  $\text{char}_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}) = \mathbf{O}_{n,n}$ . ■



**11.2.12 Poznámka** Proč jsme Větu 11.2.11 dokazovali tak složitě? Proč jsme nepoužili následující „důkaz“?

Protože  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x) = \det(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_n)$ , je  $\text{char}_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{O}_{n,n}) = 0$ .

Předchozí argument je totiž *naprosto špatně*. Rovnost  $\det(\mathbf{O}_{n,n}) = 0$  dává skalár. My chceme ukázat, že  $\text{char}_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})$  je *nulová matice*. Navíc: za neurčitou  $x$  *nelze* v  $\det(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_n)$  matici  $\mathbf{M}$  dosadit. Například, pro

$$\det(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_2) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 3 & 4-x \end{pmatrix}$$

by to znamenalo počítat determinant z „matice“

$$\begin{pmatrix} 2 - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 1 \\ 3 & 4 - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

**11.2.13 Důsledek** *At'  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení. Označme jako  $m(x)$  minimální polynom lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ .*

- (1) *At'  $a(x)$  je polynom z  $\mathbb{F}[x]$  a at' platí  $a(\mathbf{f}) = \mathbf{o}$ . Potom  $a(x)$  je dělitelný polynomem  $m(x)$ . Speciálně: charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{f}}(x)$  je dělitelný minimálním polynomem  $m(x)$ .*
- (2) *Jestliže  $\text{char}_{\mathbf{f}}(\lambda) = 0$  pro  $\lambda \in \mathbb{F}$ , potom  $m(\lambda) = 0$ .*

(3) Jestliže

$$\text{char}_{\mathbf{f}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$$

potom

$$m(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_p)^{n_p}$$

kde  $1 \leq n_i \leq m_i$  pro  $i = 1, \dots, p$ .

DŮKAZ.

- (1) Podle Věty 10.2.10 lze psát  $a(x) = m(x) \cdot q(x) + r(x)$ , kde  $\deg(r(x)) < \deg(m(x))$ . To znamená, že platí rovnosti

$$\mathbf{o} = a(\mathbf{f}) = \underbrace{m(\mathbf{f})}_{=\mathbf{o}} \cdot q(\mathbf{f}) + r(\mathbf{f}) = r(\mathbf{f})$$

Protože  $m(x)$  je minimální polynom lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ , musí platit  $r(x) = 0$ .

- (2) Ať  $\text{char}_{\mathbf{f}}(\lambda) = 0$ . To znamená, že  $\lambda$  je vlastní hodnota zobrazení  $\mathbf{f}$  a existuje tedy příslušný vlastní vektor  $\vec{v}$ :

$$\mathbf{f}(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$$

Potom pro každé  $i \geq 1$  platí rovnost

$$\mathbf{f}^i(\vec{v}) = \lambda^i \cdot \vec{v}$$

To znamená, že pro minimální polynom  $m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0$  platí

$$\vec{o} = \mathbf{o}(\vec{v}) = m(\mathbf{f})(\vec{v}) = (\mathbf{f}^k + a_{k-1}\mathbf{f}^{k-1} + \dots + a_0\mathbf{id})(\vec{v}) = (\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0) \cdot \vec{v} = m(\lambda) \cdot \vec{v}$$

Protože  $\vec{v}$  je nenulový vektor, platí  $m(\lambda) = 0$ .

- (3) Důkaz plyne okamžitě z částí (1) a (2). ■

## 11.3 Jordanův tvar lineárních nilpotentních zobrazení

Důsledek 11.2.13 nám umožní dokázat, nilpotentní zobrazení jsou přesně ta, která mají jedinou vlastní hodnotu 0. Z tohoto faktu odvodíme existenci a jednoznačnost *Jordanova tvaru* pro nilpotentní zobrazení.

**11.3.1 Tvzení** *At  $L$  má dimenzi alespoň 1. Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) Zobrazení  $\mathbf{f}$  je nilpotentní.
- (2) Zobrazení  $\mathbf{f}$  má jedinou vlastní hodnotu 0.

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Označme jako  $m(x)$  minimální polynom lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ . Jestliže  $\mathbf{f}^k = \mathbf{o}$  pro nějaké  $k$ , potom  $\mathbf{f}$  je kořenem polynomu  $x^k$ . Podle Důsledku 11.2.13 musí tedy minimální polynom  $m(x)$  dělit polynom  $x^k$ . To znamená, že  $m(x)$  má pouze 0 jako své kořeny. Opět podle Důsledku 11.2.13 má  $\text{char}_{\mathbf{f}}(x)$  pouze 0 jako své kořeny.

Ze (2) plyne (1). Podle předpokladu platí  $\text{char}_{\mathbf{f}}(x) = x^n$ , kde  $n = \dim(L)$ . Podle Věty 11.2.11 platí  $\mathbf{f}^n = \mathbf{o}$ . Tedy  $\mathbf{f}$  je nilpotentní. ■

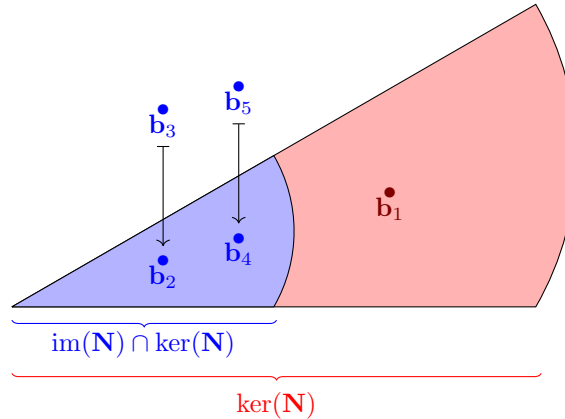
**11.3.2 Příklad** Nalezneme bázi prostoru  $\mathbb{R}^5$  pro nilpotentní matici

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z Příkladu 11.1.12. Co všechno o matici  $\mathbf{N}$  víme?

- (1) Podle Příkladu 11.1.12 platí  $\text{nil}(\mathbf{N}) = 2$ , neboli  $\text{im}(\mathbf{N}^2) = \{\mathbf{o}\}$ .
- (2) Podle Tvzení 11.3.1 víme, že 0 je jediná vlastní hodnota matice  $\mathbf{N}$ . Násobnost této vlastní hodnoty je 5. Protože  $\text{eigen}(0, \mathbf{N}) = \ker(\mathbf{N})$  a protože  $\dim \ker(\mathbf{N})$  je 3, není podle Věty 10.4.8 matice  $\mathbf{N}$  diagonalizovatelná.

Obrázek



z Příkladu 11.1.12 nám radí, jak postupovat: utvoříme si řetězec

$$\{\mathbf{o}\} = \underbrace{\text{im}(\mathbf{N}^2) \cap \ker(\mathbf{N})}_{=W_2} \subseteq \underbrace{\text{im}(\mathbf{N}^1) \cap \ker(\mathbf{N})}_{=W_1} \subseteq \underbrace{\text{im}(\mathbf{N}^0) \cap \ker(\mathbf{N})}_{=W_0} = \ker(\mathbf{N})$$

lineárních podprostorů prostoru  $\ker(\mathbf{N})$ .

Jednotlivé podprostory mají podle Tvzení 3.3.12 následující dimenze:

$$\begin{aligned} \dim(W_2) &= \text{rank}(\mathbf{N}^2) - \text{rank}(\mathbf{N}^3) = (5 - \text{def}(\mathbf{N}^2)) - (5 - \text{def}(\mathbf{N}^3)) = \text{def}(\mathbf{N}^3) - \text{def}(\mathbf{N}^2) = 5 - 5 = 0 \\ \dim(W_1) &= \text{rank}(\mathbf{N}^1) - \text{rank}(\mathbf{N}^2) = (5 - \text{def}(\mathbf{N}^1)) - (5 - \text{def}(\mathbf{N}^2)) = \text{def}(\mathbf{N}^2) - \text{def}(\mathbf{N}^1) = 5 - 3 = 2 \\ \dim(W_0) &= \text{rank}(\mathbf{N}^0) - \text{rank}(\mathbf{N}^1) = (5 - \text{def}(\mathbf{N}^0)) - (5 - \text{def}(\mathbf{N}^1)) = \text{def}(\mathbf{N}^1) - \text{def}(\mathbf{N}^0) = 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$

což je ve shodě s našimi úvahami o  $\mathbf{N}$ -řetězcích z Příkladu 11.1.12.

Nejprve nalezneme bázi  $\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$  prostoru  $W_1$  a tu pak rozšíříme o vektor  $\mathbf{b}_1$  na bázi prostoru  $W_0 = \ker(\mathbf{N})$ . Nakonec nad každým prvkem báze  $\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$  vztyčíme  $\mathbf{N}$ -řetězec délky 2. Samozřejmě: na závěr budeme muset ověřit, že seznam  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$  je lineárně nezávislý.

Šlo by postupovat rekursivně? Ano: podprostor  $\text{im}(\mathbf{N})$  je  $\mathbf{N}$ -invariantní. A pro nové zobrazení

$$\mathbf{N}' : \text{im}(\mathbf{N}) \longrightarrow \text{im}(\mathbf{N}), \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}$$

platí  $\text{nil}(\mathbf{N}') = 1$ . Příslušný řetězec podprostorů pak je

$$\{\mathbf{o}\} = \underbrace{\text{im}(\mathbf{N}'^1) \cap \ker(\mathbf{N}')}_{=W'_1} \subseteq \underbrace{\text{im}(\mathbf{N}'^0) \cap \ker(\mathbf{N}')}_{=W'_0} = \ker(\mathbf{N}')$$

a nám stačí nalézt bázi prostoru  $\ker(\mathbf{N}')$ .

Protože  $\text{im}(\mathbf{N}) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ , je  $L' = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  a  $\mathbf{N}' : L' \longrightarrow L'$  je dáno hodnotami  $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}$ ,  $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{o}$ . Báze prostoru  $L'$ , složená z  $\mathbf{N}'$ -řetězců tedy je

$$B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$$

tyto řetězce jsou dva a délka každého z nich je 1. To je v pořádku: víme, že  $\text{nil}(\mathbf{N}') = \text{nil}(\mathbf{N}) - 1 = 2 - 1 = 1$ . Potom seznam

$$C = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$$

tj., seznam *prvních* prvků každého  $\mathbf{N}'$ -řetězce, je báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}) \cap \ker(\mathbf{N})$ .

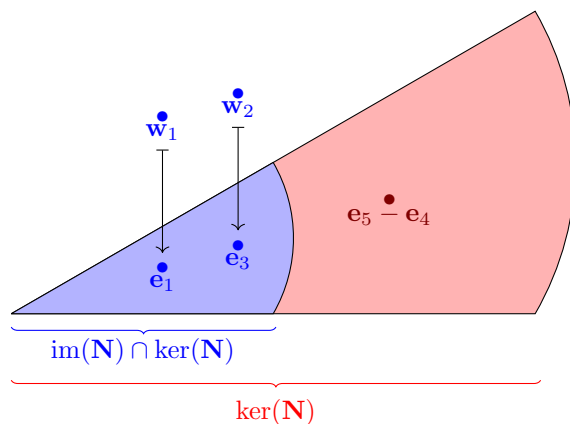
Protože<sup>1</sup>  $\ker(\mathbf{N}) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_4)$ , je

$$D = \underbrace{(\mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_4)}_{=D'} \underbrace{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)}_{=B}$$

Hledaná báze bude tedy tvaru

$$(\mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{w}_2)$$

kde  $\mathbf{N}\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1$  a  $\mathbf{N}\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_3$ . Tuto situaci lze znázornit následujícím obrázkem:



Stačí zvolit  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_2$  a  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_4$ . To znamená, že báze

$$B = (\mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$$

je hledaná báze prostoru  $\mathbb{R}^5$ , složená z  $\mathbf{N}$ -řetězců.

Vzhledem k bázi  $B$  má matice  $\mathbf{N}$  tvar

$$\mathbf{T}_{K_5 \rightarrow B} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_{B \rightarrow K_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nebo — v blokovém tvaru —

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Přesně tento tvar jsme v Příkladu 11.1.12 předpovídali.

Úvahy z předchozího příkladu nyní zformulujeme obecně.

**11.3.3 Věta** *Ať  $\mathbf{n} : L \rightarrow L$  je nilpotentní lineární zobrazení,  $\dim(L) = n$ . Potom existuje báze  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  prostoru  $L$ , která vznikla zřetěžením  $\mathbf{n}$ -řetězců. Počet a délka  $\mathbf{n}$ -řetězců v bázi  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  jsou určeny jednoznačně.*

**DŮKAZ.** Budeme postupovat indukcí podle  $k = \text{nil}(\mathbf{n})$ .

(1) Jestliže  $k = 1$ , pak  $\mathbf{n} = \mathbf{o}$ . Jakákoli báze  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  prostoru  $L$  je pak složena z  $\mathbf{n}$ -řetězců

$$\vec{b}_n \mapsto \vec{o}, \quad \vec{b}_{n-1} \mapsto \vec{o}, \quad \dots, \quad \vec{b}_1 \mapsto \vec{o}$$

délky 1.

<sup>1</sup>Stačí vyřešit homogenní soustavu  $(\mathbf{N} \mid \mathbf{o})$ .

- (2) Předpokládejme, že jakékoli nilpotentní lineární zobrazení  $\mathbf{n}' : L' \rightarrow L'$ , kde  $\text{nil}(\mathbf{n}') = k$ , dává bázi prostoru  $L'$  složenou zřetězením  $\mathbf{n}'$ -řetězců.

Jestliže  $\text{nil}(\mathbf{n}) = k + 1$ , definujeme  $L' = \text{im}(\mathbf{n})$ . Pak pro  $\mathbf{n}' : L' \rightarrow L'$ ,  $\vec{x} \mapsto \mathbf{n}(\vec{x})$ , platí  $\text{nil}(\mathbf{n}') = k$ . Označme jako

$$B = (\underbrace{\mathbf{n}'^{h_1-1}(\vec{v}_1), \mathbf{n}'^{h_1-2}(\vec{v}_1), \dots, \mathbf{n}'^1(\vec{v}_1), \mathbf{n}'^0(\vec{v}_1)}_{1. \text{ řetězec}, \dots, \underbrace{\mathbf{n}'^{h_i-1}(\vec{v}_i), \mathbf{n}'^{h_i-2}(\vec{v}_i), \dots, \mathbf{n}'^1(\vec{v}_i), \mathbf{n}'^0(\vec{v}_i)}_{i\text{-tý řetězec})$$

uspořádanou bázi prostoru  $L'$ , složenou z  $\mathbf{n}'$ -řetězců.

Seznam vektorů

$$C = (\mathbf{n}'^{h_1-1}(\vec{v}_1), \mathbf{n}'^{h_2-1}(\vec{v}_2), \dots, \mathbf{n}'^{h_i-1}(\vec{v}_i))$$

tvoří evidentně bázi prostoru  $\text{im}(\mathbf{n}) \cap \ker(\mathbf{n})$ . Bázi  $C$  lze rozšířit o seznam  $D'$  na bázi  $D$  prostoru  $\ker(\mathbf{n})$  a seznam  $(D', B)$  tvoří bázi prostoru  $\text{im}(\mathbf{n}) \vee \ker(\mathbf{n})$ . Protože platí

$$\dim(\text{im}(\mathbf{n}) \vee \ker(\mathbf{n})) = \dim(\text{im}(\mathbf{n})) + \dim(\ker(\mathbf{n})) - \dim(\text{im}(\mathbf{n}) \cap \ker(\mathbf{n})) = \dim(L) - i$$

stačí rozšířit seznam  $(D', B)$  o  $i$  lineárně nezávislých vektorů na bázi prostoru  $L$ . Vektory  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i$  jsou z prostoru  $\text{im}(\mathbf{n})$ . Proto existují vektory  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_i$  tak, že  $\mathbf{n}(\vec{w}_1) = \vec{v}_1, \dots, \mathbf{n}(\vec{w}_i) = \vec{v}_i$ . Potom seznam

$$(D', \underbrace{\mathbf{n}^{h_1}(\vec{w}_1), \mathbf{n}^{h_1-1}(\vec{w}_1), \dots, \mathbf{n}^1(\vec{w}_1), \mathbf{n}^0(\vec{w}_1)}_{1. \text{ řetězec}, \dots, \underbrace{\mathbf{n}^{h_i}(\vec{w}_i), \mathbf{n}^{h_i-1}(\vec{w}_i), \dots, \mathbf{n}^1(\vec{w}_i), \mathbf{n}^0(\vec{w}_i)}_{i\text{-tý řetězec})$$

je lineárně nezávislý, a proto tvoří hledanou bázi prostoru  $L$ . ■



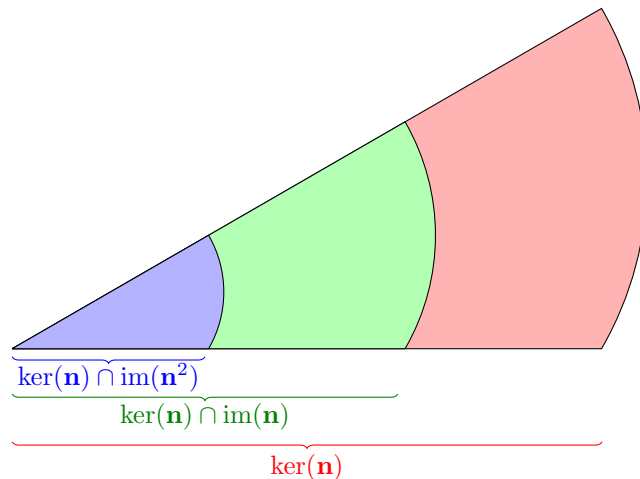
**11.3.4 Poznámka (Intuitivní význam Věty 11.3.3)** Hledání báze nilpotentního zobrazení z důkazu Věty 11.3.3 je poměrně jednoduché, pokud si namalujeme obrázek. Pro přehlednost vysvětlíme, jak důkaz pracuje pro nilpotentní zobrazení  $\mathbf{n} : L \rightarrow L$  s indexem nilpotence  $\text{nil}(\mathbf{n}) = 3$ .

Nejprve zakreslíme jádro  $\ker(\mathbf{n})$ . Toto jádro je lineární podprostor prostoru  $L$ . Budeme postupně hledat bázi prostoru  $\ker(\mathbf{n})$ . Podprostor  $\ker(\mathbf{n})$  si rozdělíme na podprostory

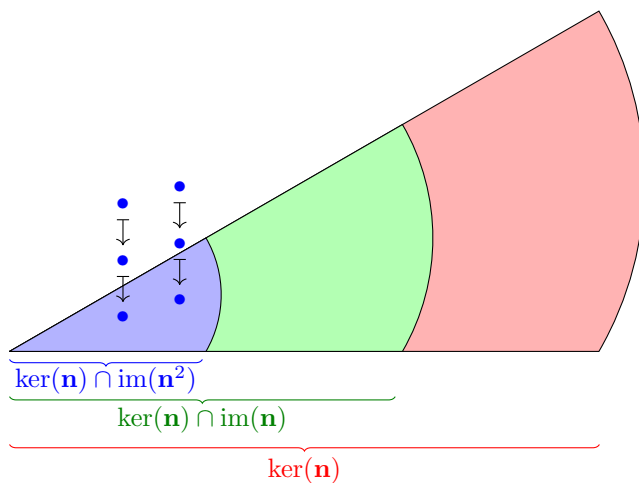
$$\{\vec{o}\} = \underbrace{\ker(\mathbf{n}) \cap \text{im}(\mathbf{n}^3)}_{=W_3} \subseteq \underbrace{\ker(\mathbf{n}) \cap \text{im}(\mathbf{n}^2)}_{=W_2} \subseteq \underbrace{\ker(\mathbf{n}) \cap \text{im}(\mathbf{n}^1)}_{=W_1} \subseteq \underbrace{\ker(\mathbf{n}) \cap \text{im}(\mathbf{n}^0)}_{=W_0} = \ker(\mathbf{n})$$

kde první rovnost platí, protože  $\mathbf{n}^3 = \mathbf{o}$ . Jednotlivé podprostory mají podle Tvzení 3.3.12 následující dimenze:

$$\begin{aligned} \dim(W_3) &= \text{def}(\mathbf{n}^4) - \text{def}(\mathbf{n}^3) = 0 \\ \dim(W_2) &= \text{def}(\mathbf{n}^3) - \text{def}(\mathbf{n}^2) \\ \dim(W_1) &= \text{def}(\mathbf{n}^2) - \text{def}(\mathbf{n}^1) \\ \dim(W_0) &= \text{def}(\mathbf{n}^1) - \text{def}(\mathbf{n}^0) = \text{def}(\mathbf{n}^1) \end{aligned}$$

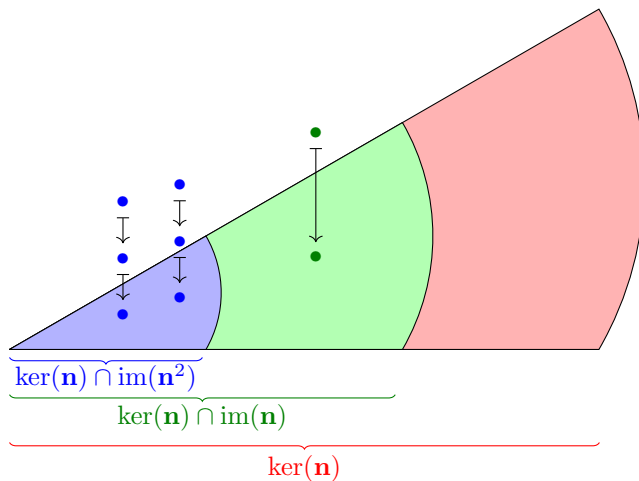


Důkaz Věty 11.3.3 nám dává návod: začněme od báze podprostoru  $\ker(\mathbf{n}) \cap \operatorname{im}(\mathbf{n}^2)$ . Každý prvek této báze je prvním prvkem  $\mathbf{n}$ -řetězce délky 3:



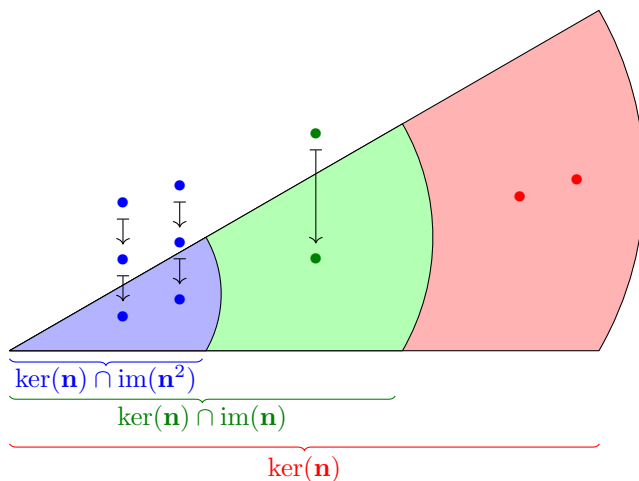
kde předpokládáme, že  $\dim(\ker(\mathbf{n}) \cap \operatorname{im}(\mathbf{n}^2)) = 2$ .

Poté seznam rozšíříme na bázi podprostoru  $\ker(\mathbf{n}) \cap \operatorname{im}(\mathbf{n})$ . Každý prvkem rozšíření je prvním prvkem  $\mathbf{n}$ -řetězce délky 2:



kde předpokládáme, že  $\dim(\ker(\mathbf{n}) \cap \operatorname{im}(\mathbf{n})) = 1$ .

Nakonec seznam rozšíříme na bázi  $\ker(\mathbf{n})$ :



kde předpokládáme, že  $\dim(\ker(\mathbf{n})) = 5$ .

Předchozí výpočty nám nyní dovolí podat kanonický tvar nilpotentních matic a nilpotentních lineárních zobrazení. Tomuto tvaru říkáme *Jordanův tvar* povšimněme si, že jde o *blokově diagonální tvar*, viz Příklad 4.3.6. Jednotlivé bloky mají navíc velmi jednoduchou strukturu.

### 11.3.5 Důsledek (Existence Jordanova tvaru nilpotentní matice a nilpotentního zobrazení)

(1) Každá nilpotentní matice  $\mathbf{N} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je podobná nilpotentní matici tvaru<sup>2</sup>

$$\mathbf{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{N}_t \quad (11.2)$$

kde  $t = \text{def}(\mathbf{N})$  a bloky  $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_t$  jsou čtvercové matice tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (11.3)$$

Navíc platí:

- (a) Největší blok má rozměry  $\text{nil}(\mathbf{N}) \times \text{nil}(\mathbf{N})$ .
- (b) Počet bloků rozměrů  $i \times i$  je roven číslu

$$2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$$

kde  $d_i = \text{def}(\mathbf{N}^i)$ .

- (c) Matice  $\mathbf{P}$ , pro kterou platí rovnost

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P} = \mathbf{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{N}_t$$

má blokový tvar  $(\mathbf{P}_1 \mid \dots \mid \mathbf{P}_t)$ , kde sloupce  $\mathbf{P}_i$  jsou  $\mathbf{N}$ -řetězce délky  $i + 1$  nad vektory z báze  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t)$  prostoru  $\ker(\mathbf{N})$ .

(2) Každé nilpotentní zobrazení má vzhledem k nějaké bázi nilpotentní matici ve tvaru (11.2).

DŮKAZ. Důkaz hlavního tvrzení (1) okamžitě plyne z Věty 11.3.3. Dokážeme nyní tvrzení (a)–(c). Označme nejprve  $k = \text{nil}(\mathbf{N})$  a pro každé  $i = 0, \dots, k$  utvořme prostor

$$W_i = \ker(\mathbf{N}) \cap \text{im}(\mathbf{N}^i)$$

a povšimněme si, že platí

$$\{\mathbf{o}\} = W_k \subseteq W_{k-1} \subseteq \dots \subseteq W_1 \subseteq W_0 = \ker(\mathbf{N})$$

Podle Tvrzení 3.3.12 platí

$$\dim(W_i) = \text{def}(\mathbf{N}^{i+1}) - \text{def}(\mathbf{N}^i)$$

pro  $i = 0, \dots, k$ .

- (a) Největší blok v (11.2) má rozměry délky největšího  $\mathbf{N}$ -řetězce; má tedy podle Tvrzení 11.1.11 rozměry  $\text{nil}(\mathbf{N}) \times \text{nil}(\mathbf{N})$ .
- (b) Počet bloků rozměrů  $i \times i$  je roven počtu  $\mathbf{N}$ -řetězců délky  $i$ . Každý takový řetězec je roven počtu prvků v bázi prostoru  $W_{i-1}$ , které nejsou v bázi prostoru  $W_i$ . Takových řetězců je přesně

$$\dim(W_{i-1}) - \dim(W_i) = (\text{def}(\mathbf{N}^i) - \text{def}(\mathbf{N}^{i-1})) - (\text{def}(\mathbf{N}^{i+1}) - \text{def}(\mathbf{N}^i)) = 2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$$

<sup>2</sup>To znamená: nilpotentní matice je podobná matici, která má na hlavní diagonále jisté čtvercové bloky a všude jinde nuly. Každý blok  $\mathbf{N}_i$  má všude nuly, kromě jedniček těsně nad hlavní diagonálou. Podívejte se na nilpotentní matici (11.1).

(c) Důkaz plyne z Poznámky 11.3.4.

Důkaz části (2) plyne z části (1) a z Lemmatu 11.1.13. ■

**11.3.6 Definice (Jordanův tvar nilpotentní matice)** Tvaru (11.2) říkáme *Jordanův tvar nilpotentní matice*  $\mathbf{N}$ . Maticím tvaru (11.3) říkáme *Jordanovy buňky*. Bázi, ve které má nilpotentní matice Jordanův tvar, říkáme *Jordanova báze*.

Pro nalezení Jordanovy báze nutné umět efektivně najít báze prostorů tvaru  $\text{im}(\mathbf{N}^i) \cap \ker(\mathbf{N})$  pro nejruznější  $i \geq 0$ . Pro  $i = 0$  to znamená nalézt bázi prostoru  $\ker(\mathbf{N})$ , a to je snadné metodami Kapitoly 6. Pro  $i > 0$  lze bázi prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^i) \cap \ker(\mathbf{N})$  snadno nalézt aplikací Tvzení 3.3.12. Postup zformulujeme jako zvláštní lemma.



**11.3.7 Lemma (Nalezení báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^i) \cap \ker(\mathbf{N})$ )** Ať  $i$  je pevné přirozené číslo, ať  $\mathbf{N} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je jakákoli čtvercová matice. Ať  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$  je matice, která má jako sloupce bázi prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^i)$  a ať  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$  je báze prostoru  $\ker(\mathbf{N}\mathbf{X})$ . Potom seznam

$$(\mathbf{X}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{X}\mathbf{v}_s)$$

je báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^i) \cap \ker(\mathbf{N})$ .

DŮKAZ. Povšimněme si, že platí rovnosti

$$\text{im}(\mathbf{X}) = \text{im}(\mathbf{N}^i), \quad \text{def}(\mathbf{X}) = 0$$

protože  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$  je matice, která má jako sloupce bázi prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^i)$ .

Ukážeme, že  $\mathbf{X}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{X}\mathbf{v}_s$  leží v prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^i) \cap \ker(\mathbf{N})$ .

- (1) Vektory  $\mathbf{X}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{X}\mathbf{v}_s$  jsou evidentně z prostoru  $\text{im}(\mathbf{X})$ . Protože  $\text{im}(\mathbf{X}) = \text{im}(\mathbf{N}^i)$ , jsou vektory  $\mathbf{X}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{X}\mathbf{v}_s$  z prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^i)$ .
- (2) Podle definice seznamu  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$  platí rovnosti  $\mathbf{N}\mathbf{X}\mathbf{v}_1 = \mathbf{o}, \dots, \mathbf{N}\mathbf{X}\mathbf{v}_s = \mathbf{o}$ . To znamená, že vektory  $\mathbf{X}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{X}\mathbf{v}_s$  jsou z prostoru  $\ker(\mathbf{N})$ .

Celkově: vektory  $\mathbf{X}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{X}\mathbf{v}_s$  leží v prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^i) \cap \ker(\mathbf{N})$ .

Dále ukážeme, že seznam  $(\mathbf{X}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{X}\mathbf{v}_s)$  je lineárně nezávislý v prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^i) \cap \ker(\mathbf{N})$  a že obsahuje přesně  $\dim(\text{im}(\mathbf{N}^i) \cap \ker(\mathbf{N}))$  prvků. Podle Důsledku 3.2.15 tím ukážeme, že  $(\mathbf{X}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{X}\mathbf{v}_s)$  je báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^i) \cap \ker(\mathbf{N})$ .

Označme jako  $\mathbf{V}$  matici se sloupcovým zápisem  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$ . Podle Tvzení 3.3.12 platí rovnost

$$\text{rank}(\mathbf{X}\mathbf{V}) = \text{rank}(\mathbf{V}) - \underbrace{\dim(\ker(\mathbf{X}) \cap \text{im}(\mathbf{V}))}_{=0} = \text{rank}(\mathbf{V}) = s$$

protože  $\text{def}(\mathbf{X}) = 0$  a  $\text{rank}(\mathbf{V}) = s$ . Rovnost  $\text{rank}(\mathbf{X}\mathbf{V}) = s$  znamená, že seznam  $(\mathbf{X}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{X}\mathbf{v}_s)$  je lineárně nezávislý.

Podle Tvzení 3.3.12 platí rovnost

$$s = \text{def}(\mathbf{N}\mathbf{X}) = \underbrace{\text{def}(\mathbf{X})}_{=0} + \dim(\ker(\mathbf{N}) \cap \text{im}(\mathbf{X})) = \dim(\ker(\mathbf{N}) \cap \text{im}(\mathbf{X}))$$

Protože  $\dim(\ker(\mathbf{N}) \cap \text{im}(\mathbf{X})) = \dim(\text{im}(\mathbf{N}^i) \cap \ker(\mathbf{N}))$ , je důkaz u konce. ■

### 11.3.8 Příklad Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  je nilpotentní.<sup>3</sup> Najdeme její Jordanův tvar a Jordanovu bázi.

<sup>3</sup>Snadno se přesvědčíme, že  $\mathbf{N}^3 = \mathbf{O}_{5,5}$ .



(1) Nalezení Jordanova tvaru je snadné.

Protože  $\text{def}(\mathbf{N}) = 3$ , bude Jordanův tvar obsahovat tři Jordanovy buňky. Utvoříme si tabulku

| $i$ | $d_i = \text{def}(\mathbf{N}^i)$ | počet buněk rozměrů $i \times i$ je: $2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$ |
|-----|----------------------------------|---|
| 0   | 0                                | —   |
| 1   | 3                                | 2   |
| 2   | 4                                | 0   |
| 3   | 5                                | 1   |
| 4   | 5                                | —   |

Tudíž Jordanův tvar matice  $\mathbf{N}$  má jeden blok rozměrů  $3 \times 3$  a dva bloky rozměrů  $1 \times 1$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(2) Nalezení Jordanovy báze matice  $\mathbf{N}$ .

Protože  $\text{nil}(\mathbf{N}) = 3$ , zajímají nás podprostory

$$\{\mathbf{o}\} = \underbrace{\ker(\mathbf{N}) \cap \text{im}(\mathbf{N}^3)}_{=W_3} \subseteq \underbrace{\ker(\mathbf{N}) \cap \text{im}(\mathbf{N}^2)}_{=W_2} \subseteq \underbrace{\ker(\mathbf{N}) \cap \text{im}(\mathbf{N}^1)}_{=W_1} \subseteq \underbrace{\ker(\mathbf{N}) \cap \text{im}(\mathbf{N}^0)}_{=W_0} = \ker(\mathbf{N})$$

kde první rovnost platí, protože  $\mathbf{N}^3 = \mathbf{O}_{5,5}$ . Jednotlivé podprostory mají podle Tvzení 3.3.12 a výše uvedené tabulky následující dimenze:

$$\begin{aligned} \dim(W_3) &= \text{def}(\mathbf{N}^4) - \text{def}(\mathbf{N}^3) = 0 \\ \dim(W_2) &= \text{def}(\mathbf{N}^3) - \text{def}(\mathbf{N}^2) = 1 \\ \dim(W_1) &= \text{def}(\mathbf{N}^2) - \text{def}(\mathbf{N}^1) = 1 \\ \dim(W_0) &= \text{def}(\mathbf{N}^1) - \text{def}(\mathbf{N}^0) = \text{def}(\mathbf{N}^1) = 3 \end{aligned}$$

Stačí tedy najít jeden  $\mathbf{N}$ -řetězec délky 3 a dva  $\mathbf{N}$ -řetězce délky 1 (což přesně odpovídá velikosti Jordanových buněk).

K nalezení báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^2) \cap \ker(\mathbf{N})$  použijeme Lemma 11.3.7 (zachováme i značení tohoto lemmatu):<sup>4</sup>

(a) Protože

$$\mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má prostor  $\text{im}(\mathbf{N}^2)$  bázi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a my můžeme za matici  $\mathbf{X}$  tedy zvolit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<sup>4</sup>Příklad je tak jednoduchý, že by šlo samozřejmě postupovat i přímým výpočtem.

(b) Protože

$$\mathbf{NX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je seznam

$$((1))$$

bázi prostoru  $\ker(\mathbf{NX})$ .

(c) Proto je seznam

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

bázi prostoru  $\operatorname{im}(\mathbf{N}^2) \cap \ker(\mathbf{N})$ .

Pro nalezení  $\mathbf{N}$ -řetězce délky 3 stačí nalézt řešení dvou soustav: jakékoli řešení řešení  $\mathbf{b}$  soustavy  $(\mathbf{N} \mid \mathbf{e}_1)$  a jakékoli řešení  $\mathbf{v}$  soustavy  $(\mathbf{N} \mid \mathbf{b})$ . Soustava

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

má jako řešení například vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustava

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

má jako řešení například vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dostáváme tedy  $\mathbf{N}$ -řetězec

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{v} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{N}^2\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$$

Nyní máme vektor  $\mathbf{e}_1$  doplnit do báze prostoru  $\ker(\mathbf{N})$ . Protože

$$\ker(\mathbf{N}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{k}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{k}_2}\right)$$

můžeme jako matici  $\mathbf{P}$  volit matici

$$(\mathbf{N}^2\mathbf{v}, \mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Následující výpočty ukazují, *proč* naše výpočty opravdu fungují: Jordanův tvar matice  $\mathbf{N}$  má sloupcový zápis  $(\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}, \mathbf{o})$  a rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} &= \mathbf{N} \cdot (\mathbf{N}^2\mathbf{v}, \mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\ &= (\mathbf{N}^3\mathbf{v}, \mathbf{N}^2\mathbf{v}, \mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{N}\mathbf{k}_1, \mathbf{N}\mathbf{k}_2) \\ &= (\mathbf{o}, \mathbf{N}^2\mathbf{v}, \mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{o}, \mathbf{o}) \\ &= (\mathbf{P}\mathbf{o}, \mathbf{P}\mathbf{e}_1, \mathbf{P}\mathbf{e}_2, \mathbf{P}\mathbf{o}, \mathbf{P}\mathbf{o}) \\ &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}, \mathbf{o}) \end{aligned}$$

ukazují, že platí požadovaná rovnost

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} = \underbrace{(\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{o}, \mathbf{o})}_{\text{Jordanův tvar matice } \mathbf{N}}$$

### Praktický návod pro nalezení Jordanova tvaru nilpotentní matice $\mathbf{N} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$

Z Věty 11.3.3 a z Poznámky 11.3.4 lze dát praktický návod pro hledání Jordanova tvaru nilpotentní matice  $\mathbf{N} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ . Postupujeme takto:

(1) Označíme jako  $k = \text{nil}(\mathbf{N})$ .

(2) Označíme

$$d_i = \text{def}(\mathbf{N}^i)$$

pro  $i = 0, \dots, k+1$ . Poznamenejme, že  $d_{k+1} = d_k$ .

(3) Počet Jordanových bloků buněk rozměrů  $i \times i$  je roven číslu

$$2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$$

pro  $i = 1, \dots, k$ .

(4) Jordanův tvar napíšeme jako blokově diagonální matici, která má na hlavní diagonále Jordanovy buňky.

**Praktický návod pro nalezení Jordanovy báze nilpotentní matice  $\mathbf{N} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$** 

Máme-li již spočtena čísla  $d_i = \dim(\ker(\mathbf{N}^i))$ ,  $i = 0, \dots, k+1$  (kde  $k = \text{nil}(\mathbf{N})$ ), postupujeme následovně:

- (1) Utvoříme prostory

$$W_i = \ker(\mathbf{N}) \cap \text{im}(\mathbf{N}^i)$$

pro  $i = 0, \dots, k$ , pro které platí

$$\{\mathbf{o}\} = W_k \subseteq W_{k-1} \subseteq \dots \subseteq W_1 \subseteq W_0 = \ker(\mathbf{N})$$

- (2) V prostoru  $W_{k-1}$  nalezneme  $\dim(W_{k-1})$  lineárně nezávislých vektorů a nad každým vytvoříme  $\mathbf{N}$ -řetězec délky  $k$ . K nalezení báze prostoru  $W_{k-1}$  použijeme Lemma 11.3.7.

- (3) Doplníme nalezené vektory z  $W_{k-1}$  o

$$\dim(W_{k-2}) - \dim(W_{k-1}) = 2d_{k-1} - d_{k-2} - d_k$$

vektorů na bázi prostoru  $W_{k-2}$  a nad každým novým vektorem vytvoříme  $\mathbf{N}$ -řetězec délky  $k-1$ . K nalezení báze prostoru  $W_{k-2}$  použijeme Lemma 11.3.7.

- (4) Obecně: pro  $i \geq 2$  doplníme nalezené vektory z  $W_{i-1}$  o

$$\dim(W_{i-2}) - \dim(W_{i-1}) = 2d_{i-1} - d_{i-2} - d_i$$

vektorů na bázi prostoru  $W_{i-2}$  a nad každým novým vektorem vytvoříme  $\mathbf{N}$ -řetězec délky  $i-1$ . K nalezení báze prostoru  $W_{i-2}$  použijeme Lemma 11.3.7.

- (5) Takto postupujeme až k prostoru  $W_0 = \ker(\mathbf{N})$ .

- (6) Zřetězením nalezených  $\mathbf{N}$ -řetězců získáme Jordanovu bázi matice  $\mathbf{N}$ .

## 11.4 Jordanův tvar lineárních zobrazení

V této podkapitole zúročíme existenci Jordanova tvaru nilpotentních matic z Důsledku 11.3.5 a podáme důkaz existence Jordanova tvaru pro *libovolnou* čtvercovou matici. Přesněji, ukážeme, že každé lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , kde charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{f}}(x)$  zobrazení  $\mathbf{f}$  má tvar

$$\text{char}_{\mathbf{f}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$$

má vzhledem ke vhodné bázi blokově diagonální matici

$$\mathbf{B}_1(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_p(\lambda_p)$$

kde bloky  $\mathbf{B}_1(\lambda_1), \dots, \mathbf{B}_p(\lambda_p)$  jsou čtvercové matice rozměrů  $m_i \times m_i$  takové, že

$$\mathbf{B}_i(\lambda_i) = \lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i}$$

jsou nilpotentní matice (a tudíž mají blokový tvar z Důsledku 11.3.5). Tvar nilpotentního zobrazení je pak speciálním případem výše uvedeného tvaru.

**11.4.1 Lemma** *At  $L$  má dimenzi alespoň 1 a at  $\lambda$  je z  $\mathbb{F}$ . Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) Zobrazení  $\mathbf{f} - \lambda \cdot \text{id}$  je nilpotentní.
- (2) Zobrazení  $\mathbf{f}$  má jedinou vlastní hodnotu  $\lambda$ .

**DŮKAZ.** Podle Tvzení 11.3.1 je  $\mathbf{f} - \lambda \cdot \mathbf{id}$  nilpotentní právě tehdy, když  $\mathbf{f} - \lambda \cdot \mathbf{id}$  má jedinou vlastní hodnotu 0. To nastane právě tehdy, když  $\lambda$  je jediná vlastní hodnota zobrazení  $\mathbf{f}$ . ■

**11.4.2 Příklad** Předpokládejme, že lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  má jedinou vlastní hodnotu 2. Potom existuje báze  $B$ , ve které má  $\mathbf{f}$  matici jednoho ze čtyř následujících typů:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

To plyne okamžitě z Lemmatu 11.4.1 a Důsledku 11.3.5: zobrazení  $\mathbf{f} - 2 \cdot \mathbf{id} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je totiž nilpotentní a tudíž má vzhledem k nějaké bázi  $B$  matici jednoho ze čtyř typů<sup>5</sup>

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pomocí blokového tvaru můžeme jednotlivé typy matic zobrazení  $\mathbf{f}$  rozlišit velikostí a umístěním bloků:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Druhá a třetí matice jsou evidentně (až na pořadí souřadnicových os) totožné.

Nyní zformulujeme větu o existenci Jordanova rozkladu, zatím pro obecná lineární zobrazení.

**11.4.3 Věta (Existence Jordanova tvaru lineárního zobrazení)** *At  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení a at*

$$\text{char}_{\mathbf{f}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$$

*je rozklad charakteristického polynomu na kořenové faktory. Potom platí:*

- (1) *Lineární zobrazení  $\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id}$  je nilpotentní na  $\ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})$ ,  $i = 1, \dots, p$ .*
- (2) *Prostor  $\ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})$  je  $\mathbf{f}$ -invariantní pro všechna  $i = 1, \dots, p$ .*
- (3) *Platí  $\dim(\ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})) = m_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ .*
- (4) *Platí  $L = \ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_1 \cdot \mathbf{id}) \oplus \dots \oplus \ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_p \cdot \mathbf{id})$ .*

**DŮKAZ.** Podle Tvzení 11.1.4 je zobrazení  $\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id}$  invertibilní na  $\text{im}_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})$  a nilpotentní na  $\ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Speciálně: dokázali jsme podmínku (1).

Dále, protože  $\ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})$  je lineární podprostor a protože pro každý vektor  $\vec{x} \in \ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})$  platí rovnost

$$\mathbf{f}(\vec{x}) = \underbrace{(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})(\vec{x})}_{\in \ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})} + \underbrace{\lambda_i \vec{x}}_{\in \ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})}$$

ukázali jsme, že  $\mathbf{f}(\vec{x})$  leží v  $\ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})$ . Neboli: dokázali jsme podmínku (2).

Protože platí  $L = \ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id}) \oplus \text{im}_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})$ , platí podle Důsledku 11.1.8

$$0 = \det(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id}) = \det((\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})_{\text{nil}}) \cdot \underbrace{\det((\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})_{\text{invert}})}_{\neq 0}$$

protože  $(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})_{\text{invert}}$  je na  $\text{im}_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})$  invertibilní. To znamená, že  $\det((\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})_{\text{nil}}) = 0$  a  $\lambda_i$  je jediná  $m_i$ -násobná vlastní hodnota zobrazení  $(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})_{\text{nil}} : \ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id}) \rightarrow \ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})$ . To znamená, že  $\dim(\ker_{\infty}(\mathbf{f} - \lambda_i \cdot \mathbf{id})) = m_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Dokázali jsme podmínku (3).

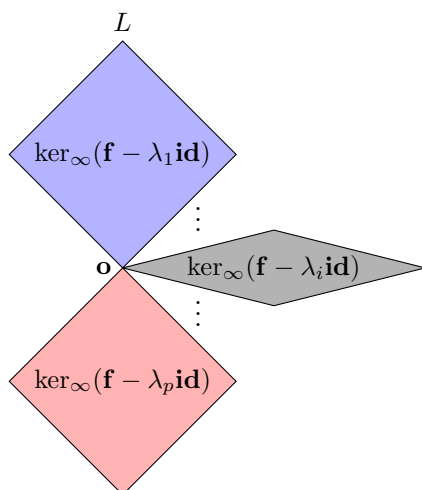
<sup>5</sup>Podle Tvzení 9.2.5 má totiž zobrazení  $\mathbf{id} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vzhledem k jakékoli bázi  $B$  matici  $\mathbf{T}_{B \rightarrow B} = \mathbf{E}_3$ .

Podmínka (4) plyne z rovnosti  $\dim(L) = m_1 + \dots + m_p$ . ■



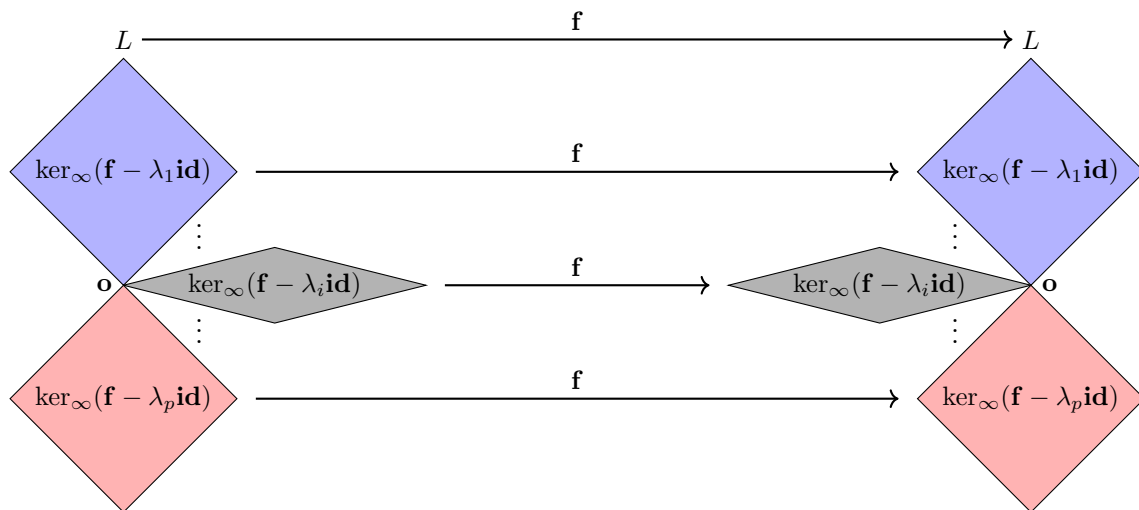
**11.4.4 Poznámka (Význam Věty 11.4.3)** Dokázali jsme, že každé lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$ , jehož charakteristický polynom lze rozložit na kořeny  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  s násobnostmi  $m_1, \dots, m_p$  v tělese  $\mathbb{F}$ , lze jednoznačně rozložit na součet zobrazení, která se od nilpotentních zobrazení liší o násobek identity.

Přesněji: prostor  $L$  lze „rozbít“



na  $p$  různých  $f$ -invariantních podprostorů  $\ker_\infty(f - \lambda_1 \text{id}), \dots, \ker_\infty(f - \lambda_p \text{id})$  s dimensemi postupně  $m_1, \dots, m_p$ .

Tudíž lze *jednoznačně* „rozbít“ i zobrazení  $f$



kde  $f - \lambda_i \text{id}$  na prostoru  $\ker_\infty(f - \lambda_i \text{id})$  je nilpotentní.

Předchozí poznámka, spolu s charakterisací nilpotentních zobrazení z Důsledku 11.3.5 nám umožní podat charakterisaci matic lineárních zobrazení:

**11.4.5 Důsledek (Existence Jordanova tvaru lineárního zobrazení)** Ať  $f : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení a ať

$$\text{char}_f(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$$

je rozklad charakteristického polynomu na kořenové faktory. Potom existuje báze  $B$  prostoru  $L$ , ve které má  $f$  matici tvaru

$$\mathbf{B}_1(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_p(\lambda_p) \quad (11.4)$$

kde  $i$ -tý blok  $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$  má rozměry  $m_i \times m_i$  a tvar

$$\mathbf{B}_i(\lambda_i) = \mathbf{N}_i + \lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i} \quad (11.5)$$

kde  $\mathbf{N}_i$  je Jordanův tvar nilpotentní matice z Důsledku 11.3.5.

DŮKAZ. Důkaz okamžitě plyne z Věty 11.4.3 a Důsledku 11.3.5: zobrazení  $\mathbf{f} - \lambda_i \mathbf{id}$  je na  $\ker_\infty(\mathbf{f} - \lambda_i \mathbf{id})$  nilpotentní a tudíž má matici, jejíž blokový tvar v nějaké bázi je popsán v Důsledku 11.3.5. To znamená, že zobrazení  $\mathbf{f}$  má v téže bázi matici tvaru (11.4). ■

**11.4.6 Definice (Jordanův tvar lineárního zobrazení a Jordanova báze)** Tvaru (11.4) říkáme *Jordanův tvar lineárního zobrazení*. Maticím  $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$  tvaru (11.5) říkáme *Jordanovy segmenty* (příslušné hodnotám  $\lambda_i$ ). Bázi  $B$ , ve které má lineární zobrazení Jordanův tvar, říkáme *Jordanova báze*.

**11.4.7 Poznámka** Větu o Jordanově rozkladu lineárního zobrazení (Důsledek 11.4.5) pro lineární zobrazení  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lze snadno modifikovat tak, abychom vždy „zůstali“ v reálném oboru. Myšlenka je následující: ať v charakteristickém polynomu

$$\text{char}_{\mathbf{M}}(x) = a \cdot \underbrace{(x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}}_{\text{reálné kořeny}} \cdot \underbrace{(x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_p)^{n_p} \cdot (x - \bar{\alpha}_1)^{n_1} \cdots (x - \bar{\alpha}_p)^{n_p}}_{\text{nereálné kořeny ve dvojicích}}$$

rozloženém v  $\mathbb{C}[x]$  na kořenové faktory, jsou kořeny  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  reálné a kořeny  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  komplexní, ale nereálné. Využili jsme toho, že  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$  má reálné koeficienty a proto ke každému jeho nereálnému kořenu je (i s násobností) komplexně sdružené číslo opět kořenem polynomu  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$ .

Potom existuje báze  $B$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  taková, že vzhledem k bázi  $B$  lze  $\mathbf{M}$  psát v blokově diagonálním tvaru

$$\mathbf{B}_1(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_k(\lambda_k) \oplus \mathbf{B}_1(\alpha_1) \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_p(\alpha_p)$$

kde:

- (1)  $\mathbf{B}_1(\lambda_1), \dots, \mathbf{B}_k(\lambda_k)$  jsou Jordanovy segmenty příslušné reálným vlastním hodnotám  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .
- (2)  $\mathbf{B}_1(\alpha_1), \dots, \mathbf{B}_p(\alpha_p)$  jsou segmenty tvaru

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}(\alpha) & \mathbf{E}_2 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}(\alpha) & \mathbf{E}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{D}(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{kde} \quad \mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad \alpha = a + ib$$

Důkaz tohoto tvrzení je jednoduchý a využívá podobného triku jako Tvrzení 10.4.11. Pro plný důkaz odkazujeme například na knihu

☞ Morris W. Hirsch a Stephen Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press Inc., 1974.

Tohoto „reálného Jordanova tvaru“ budeme využívat v Dodatku O.

**11.4.8 Příklad** Znění Důsledku 11.4.5 je sice jednoduché, ale na první přčtení mnoho neříká. Podrobně popíšeme, jak může vypadat Jordanův tvar lineárního zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ , které má vlastní hodnoty  $\lambda_1 = 5$  násobnosti 3 a  $\lambda_2 = 7$  násobnosti 2.

- (1) Existence dvou různých vlastních hodnot znamená, že Jordanův tvar je složen ze dvou Jordanových segmentů

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_3(5) & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{B}_2(7) \end{array} \right) \quad \text{nebo} \quad \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_2(7) & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{B}_3(5) \end{array} \right)$$

Obě matice se liší pouze pořadím segmentů  $\mathbf{B}_3(5)$  a  $\mathbf{B}_2(7)$ .

- (2) Segment  $\mathbf{B}_3(5)$  má rozměry  $3 \times 3$ , protože násobnost vlastní hodnoty 5 je 3. Přesný tvar segmentu  $\mathbf{B}_3(5)$  plyne z analýzy Jordanova tvaru nilpotentní matice  $\mathbf{B}_3(5) - 5 \cdot \mathbf{E}_3$  na  $\ker_\infty(\mathbf{M} - 5 \cdot \mathbf{E}_5)$ . Jordanův segment  $\mathbf{B}_3(5)$  je tedy jednoho ze čtyř následujících typů:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Úvaha je stejná jako v Příkladu 11.4.2.

- (3) Segment  $\mathbf{B}_2(7)$  má rozměry  $2 \times 2$ , protože násobnost vlastní hodnoty 7 je 2. Segment  $\mathbf{B}_2(7)$  má rozměry  $2 \times 2$ , protože násobnost vlastní hodnoty 7 je 2. Přesný tvar segmentu  $\mathbf{B}_2(7)$  plyne z analýzy Jordanova tvaru nilpotentní matice  $\mathbf{B}_2(7) - 7 \cdot \mathbf{E}_2$  na  $\ker_\infty(\mathbf{M} - 7 \cdot \mathbf{E}_5)$ . Jordanův segment  $\mathbf{B}_2(7)$  je tedy jednoho ze dvou následujících typů:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Úvaha je stejná jako v Příkladu 11.4.2.

Nyní spočteme několik Jordanových tvarů reálných matic.

**11.4.9 Příklad (Jordanův tvar a Jordanova báze v případě jediné vlastní hodnoty)** Nalezněte Jordanův tvar a Jordanovu bázi matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$ .

- (1) Nejprve zjistíme vlastní hodnoty matice  $\mathbf{M}$ :

$$\det(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ -1 & -2 & -2-x \end{vmatrix} = -(x-1)^3$$

Matice  $\mathbf{M}$  má jedinou vlastní hodnotu 1 násobnosti 3. Jordanův tvar matice  $\mathbf{M}$  bude obsahovat jediný Jordanův segment rozměrů  $3 \times 3$ , příslušný vlastní hodnotě 1.

- (2) Matice  $\mathbf{N} = \mathbf{M} - 1 \cdot \mathbf{E}_3$  je podle Lemmatu 11.4.1 nilpotentní. Protože

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} - 1 \cdot \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

stačí najít bázi z  $\mathbf{N}$ -řetězců. Budeme postupovat stejně jako v Příkladu 11.3.2.

- (a) Zjistíme index nilpotence  $\text{nil}(\mathbf{N})$  matice  $\mathbf{N} = \mathbf{M} - 1 \cdot \mathbf{E}_3$ . K tomu si sestavíme následující tabulku:

| $i$ | $d_i = \text{def}(\mathbf{N}^i)$ | počet buněk rozměrů $i \times i$ je: $2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$ |
|-----|----------------------------------|---|
| 0   | 0                                | —   |
| 1   | 2                                | 1   |
| 2   | 3                                | 1   |
| 3   | 3                                | —   |

To znamená, že  $\text{nil}(\mathbf{M} - 1 \cdot \mathbf{E}_3) = 2$  a Jordanův tvar nilpotentní matice  $\mathbf{N} = \mathbf{M} - 1 \cdot \mathbf{E}_3$  v Jordanově bázi  $(\mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  má (až na pořadí buněk) tvar

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

kde  $\mathbf{N}^2\mathbf{v} = \mathbf{o}$  a  $\mathbf{N}\mathbf{k} = \mathbf{o}$ .



(b) Jordanův tvar matice  $\mathbf{M} = \mathbf{N} + 1 \cdot \mathbf{E}_3$  v bázi  $(\mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  je

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \mathbf{E}_3 + (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{o})$$

(3) Zbývá nalézt Jordanovu bázi  $(\mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  matice  $\mathbf{M}$ .

(a) Nejprve nalezneme bázi prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}) \cap (\ker(\mathbf{N}))$ . Budeme postupovat podle Lemmatu 11.3.7 (zachováme i značení tohoto lemmatu).

Protože

$$\ker(\mathbf{N}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{im}(\mathbf{N}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

volíme

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Dále

$$\ker(\mathbf{N}\mathbf{X}) = \text{span}((1))$$

a proto

$$\text{im}(\mathbf{N}) \cap (\ker(\mathbf{N})) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

To znamená, že lze volit

$$\mathbf{N}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a vektor  $\mathbf{v}$  nalezneme vyřešením soustavy

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

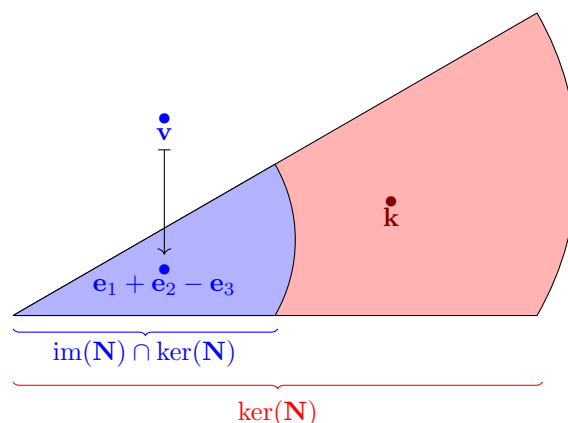
Řešením soustavy je (například) vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jako vektor  $\mathbf{k}$  ležící v  $\ker(\mathbf{N})$  zvolíme

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Naše volby lze znázornit následujícím obrázkem:



Celkově tedy pro matici

$$\mathbf{P} = (\mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

platí rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot (\mathbf{E}_3 + (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{o})) &= \mathbf{P} + (\mathbf{P}\mathbf{o}, \mathbf{P}\mathbf{e}_1, \mathbf{P}\mathbf{o}) \\ &= \mathbf{P} + (\mathbf{o}, \mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{o}) \\ &= (\mathbf{N}^2\mathbf{v}, \mathbf{N}\mathbf{v} + \mathbf{v}, \mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{N} + \mathbf{E}_3) \cdot (\mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{M} \cdot (\mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

To znamená, že platí rovnost

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{E}_3+(\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{o})} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{M}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{P}=(\mathbf{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{k})}$$

kterou jsme požadovali.

#### 11.4.10 Příklad (Jordanův tvar a Jordanova báze v případě více vlastních hodnot) Pro matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$ , pro kterou platí  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x) = (x-2)^4(x+1)^2$ , nalezneme její Jordanův tvar a Jordankovu bázi.

Jordanův tvar matice  $\mathbf{M}$  bude obsahovat dva Jordanovy segmenty: segment  $\mathbf{B}_4(2)$  rozměrů  $4 \times 4$  příslušný k vlastní hodnotě 2 algebraické násobnosti 4 a segment  $\mathbf{B}_2(-1)$  rozměrů  $2 \times 2$  příslušný k vlastní hodnotě  $-1$  algebraické násobnosti 2.

Pro každou vlastní hodnotu sestavíme obvyklou tabulku:

- (1) Tabulka pro vlastní hodnotu 2, tj. pro  $\mathbf{N} = \mathbf{M} - 2 \cdot \mathbf{E}_6$

| $i$ | $d_i = \text{def}(\mathbf{N}^i)$ | počet buněk rozměrů $i \times i$ je: $2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$ |
|-----|----------------------------------|---|
| 0   | 0                                | —   |
| 1   | 2                                | 1   |
| 2   | 3                                | 0   |
| 3   | 4                                | 1   |
| 4   | 4                                | —   |

To znamená, že  $\mathbf{B}_4(2)$  má tvar

$$\mathbf{B}_4(2) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

- (2) Tabulka pro vlastní hodnotu  $-1$ , tj. pro  $\mathbf{N} = \mathbf{M} - (-1) \cdot \mathbf{E}_6$

| $i$ | $d_i = \text{def}(\mathbf{N}^i)$ | počet buněk rozměrů $i \times i$ je: $2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$ |
|-----|----------------------------------|---|
| 0   | 0                                | —   |
| 1   | 2                                | 2   |
| 2   | 2                                | —   |

To znamená, že  $\mathbf{B}_2(-1)$  má tvar

$$\mathbf{B}_2(-1) = \left( \begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right)$$

Celkově: Jordanův tvar matice  $\mathbf{M}$  je

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \parallel \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \parallel \left( \begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right)$$

Nyní nalezeneme Jordanovu bázi matice  $\mathbf{M}$ .

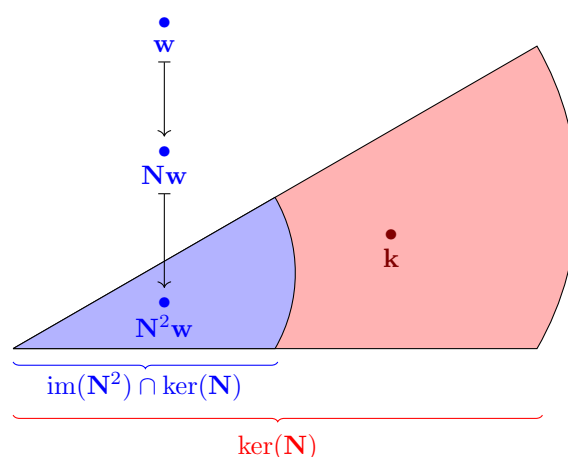
(1) Pro vlastní hodnotu 2 násobnosti 4 je je příslušná nilpotentní matice

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} - 2 \cdot \mathbf{E}_6 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

a

$$\ker(\mathbf{N}) = \text{span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Část Jordanovy báze, příslušné vlastní hodnotě 2, máme najít ve tvaru



protože

$$\begin{aligned} \dim(W_3) &= \dim(\text{im}(\mathbf{N}^3) \cap \ker(\mathbf{N})) = \text{def}(\mathbf{N}^4) - \text{def}(\mathbf{N}^3) = 0 \\ \dim(W_2) &= \dim(\text{im}(\mathbf{N}^2) \cap \ker(\mathbf{N})) = \text{def}(\mathbf{N}^3) - \text{def}(\mathbf{N}^2) = 1 \\ \dim(W_1) &= \dim(\text{im}(\mathbf{N}^1) \cap \ker(\mathbf{N})) = \text{def}(\mathbf{N}^1) - \text{def}(\mathbf{N}^1) = 1 \\ \dim(W_0) &= \dim(\text{im}(\mathbf{N}^0) \cap \ker(\mathbf{N})) = \text{def}(\mathbf{N}^1) - \text{def}(\mathbf{N}^0) = 2 \end{aligned}$$

K nalezení báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^2) \cap \ker(\mathbf{N})$  využijeme Lemma 11.3.7 (zachováme i značení tohoto lemmatu):

(a) Platí

$$\text{im}(\mathbf{N}^2) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

a proto volíme

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Protože

$$\ker(\mathbf{N}\mathbf{X}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

je vektor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jediným prvkem báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^2) \cap \ker(\mathbf{N})$ .

Nyní nalezneme  $\mathbf{N}$ -řetězec

$$\mathbf{w} \mapsto \mathbf{N}\mathbf{w} \mapsto \mathbf{N}^2\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To znamená, že máme vyřešit dvě soustavy lineárních rovnic. Soustava

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 3 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -12 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -7 & 1 \end{array} \right)$$

má jako řešení (například) vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a zbývá vyřešit soustavu  $(\mathbf{N} \mid \mathbf{b})$ :

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 3 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -12 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

Řešením této soustavy je (například) vektor

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Celkově: získali jsme  $\mathbf{N}$ -řetězec

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{N}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v prostoru  $\text{im}(\mathbf{N}^2) \cap \ker(\mathbf{N})$ .

Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nyní doplníme vektorem  $\mathbf{k}$  na bázi prostoru  $\ker(\mathbf{N})$ . Zvolíme (například) vektor

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Část Jordanovy báze pro vlastní hodnotu 2 je tedy seznam

$$\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(2) Pro vlastní hodnotu  $-1$  násobnosti 2 je příslušná nilpotentní matice

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} - (-1) \cdot \mathbf{E}_6 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 3 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

a

$$\ker(\mathbf{N}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Protože část Jordanovy báze, která přísluší vlastní hodnotě  $-1$ , je tvořena  $\mathbf{N}$ -řetězcí délky 1, je hotovo. Seznam

$$\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Je část Jordanovy báze pro vlastní hodnotu  $-1$ .

Nyní obě části spojíme: pro matici

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

platí rovnost

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Předchozí příklady ukazují, že nalezení Jordanovy báze je výpočetně poměrně náročné. Pokud máme nalézt pouze Jordanův tvar matice, je situace daleko jednodušší.

#### 11.4.11 Příklad (Pouze Jordanův tvar matice) Nalezneme Jordanův tvar matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 13 & -8 & 6 & 2 & 9 \\ -2 & 14 & -7 & 4 & 2 & 10 \\ 1 & -18 & 11 & -11 & 2 & -6 \\ -1 & 19 & -11 & 10 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$ , která má charakteristický polynom

$$\text{char}_{\mathbf{M}}(x) = (x+1)^5 \cdot (x-2)$$

Jordanův tvar matice  $\mathbf{M}$  bude obsahovat dva Jordanovy segmenty: segment  $\mathbf{B}_5(-1)$  rozměrů  $5 \times 5$  a segment  $\mathbf{B}_1(2)$  rozměrů  $1 \times 1$ . Protože platí

$$\mathbf{B}_1(2) = (2)$$

(jiná možnost totiž není), stačí se zaměřit na Jordanův segment  $\mathbf{B}_5(-1)$  rozměrů  $5 \times 5$ .

Sestavíme nám známou tabulku:

| $i$ | $d_i = \text{def}(\mathbf{N}^i)$ | počet buněk rozměrů $i \times i$ je: $2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$ |
|-----|----------------------------------|---|
| 0   | 0                                | —   |
| 1   | 2                                | 0   |
| 2   | 4                                | 1   |
| 3   | 5                                | 1   |
| 4   | 5                                | —   |

Jordanův segment  $\mathbf{B}_5(-1)$  tedy má tvar

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Celkově: Jordanův tvar matice  $\mathbf{M}$  je

$$\left( \begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

#### Praktický návod pro nalezení Jordanova tvaru čtvercové matice $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$

Díky Důsledku 11.4.5 a podkapitole 11.3 lze dát praktický návod pro hledání Jordanova tvaru a Jordanovy báze obecné matice  $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ . Postupujeme takto:

- (1) Spočteme charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$  matice  $\mathbf{M}$ .
  - (a) Pokud  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$  nelze v  $\mathbb{F}[x]$  rozložit na součin kořenových faktorů, výpočet končíme. Jordanův tvar matice  $\mathbf{M}$  neexistuje.
  - (b) Pokud  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$  v  $\mathbb{F}[x]$ , Jordanův tvar matice  $\mathbf{M}$  existuje a my postupujeme podle dalších bodů.

#### Praktický návod pro nalezení Jordanova tvaru čtvercové matice $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ (pokrač.)

- (2) Jordanův tvar bude mít  $p$  Jordanových segmentů  $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Segment  $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$  má rozměry  $m_i \times m_i$ .
- (3) Pro nalezení  $i$ -tého segmentu  $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$  postupujeme následovně:
  - (a) Utvoříme nilpotentní matici  $\mathbf{M} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}_n$ . a nalezneme její Jordanův tvar  $\mathbf{N}_i$  metodami podkapitoly 11.3.
  - (b) Platí  $\mathbf{B}_i(\lambda_i) = \lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i} + \mathbf{N}_i$ .
- (4) Z Jordanových segmentů utvoříme Jordanův tvar matice  $\mathbf{M}$  jakožto blokově diagonální matici.

#### Praktický návod pro nalezení Jordanovy báze čtvercové matice $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$

Předpokládejme, že je již nalezeno  $p$  Jordanových segmentů  $\mathbf{B}_i(\lambda_i) = \lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i} + \mathbf{N}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

Pro nalezení  $i$ -tého segmentu Jordanovy báze postupujeme metodami podkapitoly 11.3, aplikovanými na matici  $\mathbf{N}_i$ .

V podkapitole 11.5 Jordanův tvar mírně zobecníme. Využijeme k tomu přeformulování Jordanova tvaru matice. Jordanův tvar matice je totiž součtem diagonální matice a nilpotentní matice. Tato dvojice matic

má ještě další vlastnost: *diagonální matice a nilpotentní matice z Jordanova tvaru spolu komutují*. Poslední podmínka není samozřejmá, jak ukazuje následující příklad.

**11.4.12 Příklad (Diagonální a nilpotentní matice spolu nemusí komutovat)** Například pro matice

$$D(1; 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  platí

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D(1; 2) \cdot \mathbf{N} \neq \mathbf{N} \cdot D(1; 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordanovy tvary matic ale našťastí dávají situace součtů diagonálních a nilpotentních matic, které spolu komutují. Tohoto faktu využijeme v příští podkapitole k zobecnění Jordanova tvaru. Následujícího tvrzení ale *především* využijeme v Dodatcích **N** a **O**.

**11.4.13 Důsledek** *At matice  $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  má v  $\mathbb{F}[x]$  rozklad*

$$\text{char}_{\mathbf{M}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$$

*charakteristického polynomu na kořenové faktory. Potom Jordanův tvar*

$$\mathbf{B}_1(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_p(\lambda_p)$$

*matice  $\mathbf{M}$  lze psát ve tvaru součtu*

$$D(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1\text{-krát}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p\text{-krát}}) + \mathbf{N}$$

*diagonální matice a nilpotentní matice. Navíc: matice  $D(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1\text{-krát}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p\text{-krát}})$  a  $\mathbf{N}$  spolu komutují.*

**DŮKAZ.** Podle důkazů Věty **11.4.3** a Důsledku **11.4.5** víme, že Jordanovy segmenty  $\mathbf{B}_1(\lambda_1), \dots, \mathbf{B}_p(\lambda_p)$  jsou čtvercové matice rozměrů  $m_i \times m_i$  takové, že

$$\mathbf{B}_i(\lambda_i) = \mathbf{N}_i + \lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i}$$

kde  $\mathbf{N}_i$  je Jordanův tvar nilpotentní matice z Důsledku **11.3.5**. Matice  $\mathbf{N}_i$  a  $\lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i}$  spolu evidentně komutují. Proto spolu komutují i matice

$$D(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1\text{-krát}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p\text{-krát}}) = \lambda_1 \cdot \mathbf{E}_{m_1} \oplus \dots \oplus \lambda_p \cdot \mathbf{E}_{m_p}$$

a

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{N}_p$$

Matice  $\mathbf{N}$  je navíc evidentně nilpotentní a součet

$$D(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1\text{-krát}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p\text{-krát}}) + \mathbf{N}$$

je přesně Jordanův tvar matice  $\mathbf{M}$ . ■

**11.4.14 Příklad** Jordanův tvar

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 13 & -8 & 6 & 2 & 9 \\ -2 & 14 & -7 & 4 & 2 & 10 \\ 1 & -18 & 11 & -11 & 2 & -6 \\ -1 & 19 & -11 & 10 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

z Příkladu 11.4.11 lze psát ve tvaru

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{diagonální matice}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotentní matice}}$$

Podle Důsledku 11.4.13 spolu tyto matice komutují.

## 11.5 Jordanův-Chevalleyho tvar lineárních zobrazení

Tuto podkapitulu lze vynechat. Výsledky v ní uvedené nebudeme v dalším textu nikde potřebovat. Navíc: podrobné důkazy následujících tvrzení by vyžadovaly hlubší znalosti z teorie těles. Uvedeme tedy jen podstatné definice a znění vět. Pro detaily odkazujeme na citovanou literaturu. Výbornými zdroji dalších informací jsou knihy:

- ☞ Beata Bajorska, *On Jordan-Chevalley decomposition*, Zeszyty naukowe politechniki ślaskiej, 2011.
- ☞ Paul M. Cohn, *Algebra* Vol. 1, John Wiley & Sons, 1974.
- ☞ Paul M. Cohn, *Algebra* Vol. 2, John Wiley & Sons, 1989.
- ☞ Kenneth Hoffmann a Ray Kunze, *Linear algebra*, Prentice-Hall Inc., 1971.
- ☞ James E. Humphreys, *Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, 1980.

Věta 11.4.3 má poměrně omezený obor použití: pro nalezení Jordanova tvaru zobrazení  $\mathbf{f}$  totiž potřebujeme, aby šlo charakteristický polynom zobrazení  $\mathbf{f}$  rozložit na kořenové faktory. Takový rozklad ale k dispozici vždy nemáme. Například matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  má charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x) = x^2 + 1$ , který v  $\mathbb{R}[x]$  rozložit na kořenové faktory nelze.

Proto v této podkapitole uvedeme zobecnění Jordanova tvaru na tvar, který nad „rozumnými“ tělesy existuje vždy. Tato „rozumná“ tělesa zahrnují všechna konečná tělesa a tělesa  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ . Abychom mohli o takových tělesech mluvit, zavedeme několik pojmů z teorie těles.

**11.5.1 Definice (Algebraicky uzavřené těleso)** Těleso  $\mathbb{F}$  je *algebraicky uzavřené*, pokud každý polynom  $p(x)$  z  $\mathbb{F}[x]$  má kořen v  $\mathbb{F}$ .

K libovolnému lineárnímu zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , kde  $L$  je lineární prostor nad algebraicky uzavřeným tělesem, lze tedy podle Věty 11.4.3 najít jeho Jordanův tvar. V algebraicky uzavřeném tělese totiž můžeme jakýkoli polynom rozložit na součin kořenových faktorů. Jak ukazují následující příklady, algebraická uzavřenost tělesa je ale „poměrně výjimečná“ vlastnost.

### 11.5.2 Příklad

- (1) Těleso komplexních čísel  $\mathbb{C}$  je algebraicky uzavřené.<sup>6</sup>
- (2) Žádné uspořádané těleso  $\mathbb{F}$  není podle Věty 1.3.10 algebraicky uzavřené: v uspořádaném tělese  $\mathbb{F}$  nemá (například) polynom  $x^2 + 1$  kořen.

Speciálně: tělesa  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R}$  nejsou algebraicky uzavřená.

- (3) Žádné těleso  $\mathbb{Z}_p$ , kde  $p$  je prvočíslo, není algebraicky uzavřené.

V  $\mathbb{Z}_p[x]$  totiž existuje  $(p^2 - p)/2$  polynomů stupně 2, které mají u  $x^2$  koeficient 1 a které nelze v  $\mathbb{Z}_p[x]$  rozložit na součin kořenových faktorů. Viz například Kapitulu II knihy

☞ Neal Koblitz, *A course in number theory and cryptography*, Springer-Verlag, 1994.

Protože pro jakékoli prvočíslo  $p$  platí nerovnost  $(p^2 - p)/2 \geq 1$ , existuje v  $\mathbb{Z}_p[x]$  alespoň jeden polynom (dokonce stupně 2), který v  $\mathbb{Z}_p$  nemá kořen.

Zobecnění Jordanova tvaru lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  bude mít dva aspekty:

- (1) Požadavek rozkladu polynomu  $\text{char}_{\mathbf{f}}(x)$  na kořenové faktory v  $\mathbb{F}[x]$  bude nahrazen jistým požadavkem na těleso  $\mathbb{F}$ . Přesněji: budeme chtít, aby  $\mathbb{F}$  bylo *perfektní těleso*, viz Definici 11.5.6.
- (2) K formulaci Jordanova-Chevalleyho tvaru lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  využijeme Důsledek 11.4.13: zachováme nilpotentní část a diagonalisovatelnost nahradíme *polojednoduchostí*, viz Definici 11.5.8.

**11.5.3 Definice (Charakteristika tělesa)** Nejmenšímu kladnému číslu  $n$ , pro které v tělese  $\mathbb{F}$  platí rovnost

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-krát}} = 0$$

říkáme *charakteristika tělesa*  $\mathbb{F}$ . V případě, že takové kladné číslo  $n$  neexistuje, říkáme, že *charakteristika tělesa*  $\mathbb{F}$  je 0.

#### 11.5.4 Příklad

- (1) Tělesa  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  mají charakteristiku 0.
- (2) Tělesa tvaru  $\mathbb{Z}_p$ , kde  $p$  je prvočíslo, mají charakteristiku  $p$ .

Následující jednoduché tvrzení ukazuje, že těleso může mít buď charakteristiku 0 nebo prvočíselnou charakteristiku.

**11.5.5 Lemma** Každé těleso má buď charakteristiku 0 nebo  $p$ , kde  $p$  je nějaké prvočíslo.

**DŮKAZ.** Ať  $\mathbb{F}$  je jakékoli těleso konečné kladné charakteristiky  $n$ . Podle Lemmatu 1.3.2 v  $\mathbb{F}$  platí  $1 \neq 0$ , takže  $\mathbb{F}$  nemůže mít charakteristiku 1. Předpokládejme, že platí  $n = ab$ , kde  $1 < a < n$  a  $1 < b < n$ . Potom z rovností

$$0 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-krát}} = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{a\text{-krát}} \cdot \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{b\text{-krát}}$$

a z Lemmatu 1.3.4 plyne, že

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a\text{-krát}} = 0 \quad \text{nebo} \quad \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{b\text{-krát}} = 0$$

To je spor s definicí charakteristiky tělesa. Těleso kladné charakteristiky tedy musí mít charakteristiku prvočíselnou. ■

<sup>6</sup>Tomuto tvrzení se říká *Fundamentální věta algebry*. Pro důkaz Fundamentální věty algebry metodami lineární algebry odkazujeme na článek Keith Conrad, *The Fundamental theorem of algebra via linear algebra*.

**11.5.6 Definice (Perfektní těleso)** Těleso  $\mathbb{F}$  je *perfektní*, pokud buď  $\mathbb{F}$  má charakteristiku 0 nebo pokud (v případě, kdy  $\mathbb{F}$  má prvočíselnou charakteristiku  $p$ ) je každý prvek  $z \in \mathbb{F}$  tvaru  $a^p$ .

Téměř každé „prakticky používané“ těleso je perfektní, jak ukazují následující příklady.

### 11.5.7 Příklad

- (1) Každé těleso charakteristiky 0 je perfektní (tj., například tělesa  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  jsou perfektní).
- (2) Každé konečné těleso je perfektní.
- (3) Každé algebraicky uzavřené těleso je perfektní.
- (4) Těleso  $\mathbb{Z}_2(x)$  racionálních funkcí nad  $\mathbb{Z}_2$  perfektní není. Viz například kapitolu 3 knihy

☞ Paul M. Cohn, *Algebra* Vol. 2, John Wiley & Sons, 1989.

Nyní již můžeme zformulovat pojem, kterým ve Větě 11.5.11 nad perfektními tělesy nahradíme diagonalizovatelnost z Důsledku 11.4.13.

**11.5.8 Definice (Polojednoduché lineární zobrazení)** Lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  je *polojednoduché*, pokud pro každý  $f$ -invariantní podprostor  $W$  existuje  $f$ -invariantní podprostor  $V$  tak, že  $L = W \oplus V$ .

**11.5.9 Poznámka** Terminologie Definice 11.5.8 naznačuje, že existují i *jednoduchá* lineární zobrazení. Je tomu tak: lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  je *jednoduché*, pokud jediné  $f$ -invariantní podprostory  $L$  jsou  $\{0\}$  a  $L$ .

To znamená, že lineární zobrazení  $f$  je polojednoduché právě tehdy, když jej lze rozložit na direktní součet jednoduchých lineárních zobrazení.

**11.5.10 Tvzení** Pro lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$ , kde lineární prostor je nad tělesem  $\mathbb{F}$ , platí:

- (1) At' charakteristický polynom  $\text{char}_f(x)$  lze rozložit v  $\mathbb{F}[x]$  na kořenové faktory. Potom  $f$  je polojednoduché zobrazení právě tehdy, když  $f$  je diagonalizovatelné.
- (2) At' minimální polynom zobrazení  $f$  nelze v  $\mathbb{F}[x]$  rozložit na součin polynomů menších stupňů. Potom je  $f$  polojednoduché lineární zobrazení.

**11.5.11 Věta (Jordanův-Chevalleyho tvar lineárního zobrazení)** At'  $\mathbb{F}$  je perfektní těleso a at'  $L$  je lineární prostor konečné dimenze nad  $\mathbb{F}$ . Potom každé lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  lze psát jednoznačně ve tvaru

$$f = f_{\text{simple}} + f_{\text{nil}}$$

kde  $f_{\text{nil}} \cdot f_{\text{simple}} = f_{\text{simple}} \cdot f_{\text{nil}}$ , a kde  $f_{\text{simple}}$  je polojednoduché lineární zobrazení a  $f_{\text{nil}}$  je nilpotentní zobrazení. Součtu  $f = f_{\text{simple}} + f_{\text{nil}}$  říkáme Jordanův-Chevalleyho tvar lineárního zobrazení  $f$ .

Tvrzení 11.5.10 ukazuje, že Věta 11.5.11 je „rozumným“ zobecněním Jordanova tvaru lineárního zobrazení. Poznamenejme ještě, že perfektnost tělesa je *nutnou* podmínkou pro existenci Jordanova-Chevalleyho tvaru každého lineárního zobrazení. Přesněji: pro těleso  $\mathbb{F}$ , které *není* perfektní, lze zkonstruovat lineární prostor  $L$  nad  $\mathbb{F}$  a lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$ , které nemá Jordanův-Chevalleyho tvar.

Uvedeme nyní dva příklady Jordanova-Chevalleyho rozkladu matic. Příklady pocházejí z textu

☞ Beata Bajorska, *On Jordan-Chevalley decomposition*, Zeszyty naukowe politechniki ślaskiej, 2011.

### 11.5.12 Příklad At'

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice nad  $\mathbb{Z}_3$ .

Charakteristický polynom

$$\text{char}_M(x) = -x^3 + 2 + x$$

nelze v  $\mathbb{Z}_3[x]$  rozložit na součin  $a(x) \cdot b(x)$  polynomů menších stupňů. Jeden z polynomů  $a(x)$ ,  $b(x)$  by totiž musel být lineární, a to by znamenalo, že  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$  má v  $\mathbb{Z}_3$  kořen. To ale není možné, protože  $\text{char}_{\mathbf{M}}(0) = \text{char}_{\mathbf{M}}(1) = \text{char}_{\mathbf{M}}(2) = 2$ . Protože minimální polynom zobrazení musí podle Důsledku 11.2.13 dělit  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$ , je  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$  minimální polynom matice  $\mathbf{M}$ .

Proto je  $\mathbf{M}$  podle Tvzení 11.5.10 polojednoduchá matice a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je Jordanův-Chevalleyho tvar matice  $\mathbf{M}$ .

### 11.5.13 Příklad Matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  lze zapsat v blokovém tvaru takto:

$$\mathbf{M} = \left( \begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 9 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

Charakteristický polynom

$$\text{char}_{\mathbf{M}_1}(x) = (x-1)^2 + 1$$

bloku

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nelze v  $\mathbb{R}[x]$  rozložit na součin  $a(x) \cdot b(x)$  polynomů menších stupňů. Protože minimální polynom zobrazení musí podle Důsledku 11.2.13 dělit  $\text{char}_{\mathbf{M}_1}(x)$ , je  $\text{char}_{\mathbf{M}_1}(x)$  minimální polynom matice  $\mathbf{M}_1$ .

Proto je  $\mathbf{M}_1$  podle Tvzení 11.5.10 polojednoduchá matice a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je Jordanův-Chevalleyho tvar matice  $\mathbf{M}_1$ .

Druhý blok

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je polojednoduchá matice, protože je v horním diagonálním tvaru a na diagonále má navzájem různá čísla. Proto je součet

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordanův-Chevalleyho rozklad matice  $\mathbf{M}_2$ .

Pro třetí blok

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

nalezneme Jordanův tvar

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

metodami podkapitoly 11.4.

Celkově tedy je součet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordanův-Chevalleyho tvar matice  $\mathbf{M}$ .

# Kapitola 12

## Skalární součin

Καὶ πᾶσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἰσας ἀλλήλαις εἶναι.

*čtvrtý postulát Eukleidovy geometrie*

V této kapitole se budeme věnovat *skalárnímu součinu* v lineárních prostorech nad tělesem *reálných* čísel. Po zavedení skalárního součinu v podkapitole 12.1 ukážeme v 12.2 jakým způsobem skalární součin vytváří pojmy *velikosti* a *vzdálenosti* vektorů a *úhlu* mezi vektory.

Podkapitola 12.3 je věnována popisu obecných skalárních součinů v prostorech s konečnou dimensí. Obecný popis skalárního součinu zúročíme v podkapitole 12.4: tam vysvětlíme popis *ortogonálních projekcí* na lineární podprostor a proces *ortogonalisace* báze lineárních prostorů. V podkapitole 12.5 zavedeme pojem *ortogonálního doplňku* lineárního podprostoru. Ortogonální doplňky využijeme v Dodatku B a, v obecnější podobě, v Kapitole 15 a Dodatku I.

Závěrem, v 12.6, zmíníme několik poznámek o skalárních součinech v prostorech nad tělesem *komplexních* čísel.

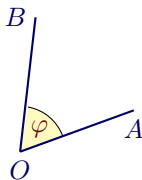
### 12.1 Reálný skalární součin

Skalární součin pro lineární prostor nad tělesem reálných čísel je zobecněním následujícího dobře známého příkladu skalárního součinu v prostoru orientovaných úseček.

**12.1.1 Příklad (Skalární součin v prostoru orientovaných úseček)** Připomeňme si z Příkladu 1.1.1 lineární prostor orientovaných úseček. Pro dvě orientované úsečky  $OA$  a  $OB$  *nenulové* délky, definujeme jejich *skalární součin* předpisem

$$\langle OA \mid OB \rangle = \|OA\| \cdot \|OB\| \cdot \cos \varphi \quad (12.1)$$

kde  $\varphi$  je úhel z uzavřeného intervalu  $[0; \pi]$ , který tyto úsečky svírají.



Má-li alespoň jedna z úseček  $OA$ ,  $OB$  délku nula, definujeme

$$\langle OA \mid OB \rangle = 0 \quad (12.2)$$

Dokážeme nyní, že zobrazení

$$(OA, OB) \mapsto \langle OA \mid OB \rangle$$

splňuje následující tři podmínky:

(1) Skalární součin je *lineární ve druhé souřadnici*. To znamená, že platí rovnosti

$$\langle OA | a \cdot OB \rangle = a \cdot \langle OA | OB \rangle, \quad \langle OA | OB + OC \rangle = \langle OA | OB \rangle + \langle OA | OC \rangle$$

pro libovolné orientované úsečky  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  a libovolné reálné číslo  $a$ .

Rovnost  $\langle OA | a \cdot OB \rangle = a \cdot \langle OA | OB \rangle$  dokážeme rozбором případů:

- (a) Jestliže alespoň jedna z úseček  $OA$ ,  $OB$  má délku nula, platí  $\langle OA | a \cdot OB \rangle = 0 = a \cdot 0 = a \cdot \langle OA | OB \rangle$  podle (12.2).
- (b) Jsou-li obě úsečky  $OA$ ,  $OB$  nenulové délky, použijeme rovnost (12.1). Pro  $a > 0$  lze zjistit pouhým dosazením, že

$$\langle OA | a \cdot OB \rangle = \|OA\| \cdot \|a \cdot OB\| \cdot \cos \varphi = a \cdot \|OA\| \cdot \|OB\| \cdot \cos \varphi = a \cdot \langle OA | OB \rangle$$

platí.

V případě  $a < 0$  provedeme jednoduchou úvahu: svírají-li úsečky  $OA$ ,  $OB$  úhel  $\varphi$ , potom úsečky  $OA$  a  $a \cdot OB$  svírají úhel  $\pi - \varphi$ . Potom platí rovnosti

$$\begin{aligned} a \cdot \langle OA | OB \rangle &= a \cdot \|OA\| \cdot \|OB\| \cdot \cos \varphi = -a \cdot \|OA\| \cdot \|OB\| \cdot (-\cos \varphi) \\ &= \|OA\| \cdot \|a \cdot OB\| \cdot \cos(\pi - \varphi) = \langle OA | a \cdot OB \rangle \end{aligned}$$

kde jsme využili toho,  $\|a \cdot OB\| = |a| \cdot \|OB\| = -a \cdot \|OB\|$  (protože  $a < 0$ ) a toho, že  $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$ .

Zbývá případ  $a = 0$ . Ten je jednoduchý:

$$\langle OA | 0 \cdot OB \rangle = 0 = 0 \cdot \langle OA | OB \rangle$$

Rovnost  $\langle OA | OB + OC \rangle = \langle OA | OB \rangle + \langle OA | OC \rangle$  dokážeme rozбором případů:

- (a) Jestliže má úsečka  $OA$  nulovou délku, potom podle (12.2) platí:

$$\langle OA | OB + OC \rangle = 0 = 0 + 0 = \langle OA | OB \rangle + \langle OA | OC \rangle$$

- (b) Předpokládejme, že úsečka  $OA$  má nenulovou délku. Potom, pro libovolnou orientovanou úsečku  $OB$  je součin  $\|OB\| \cdot \cos \varphi$  přesně kolmý průmět bodu  $B$  na přímku zadanou úsečkou  $OA$ .

To ale znamená, že platí rovnosti

$$\frac{\langle OA | OB \rangle}{\|OA\|} = \text{kolmý průmět bodu } B \text{ na } OA, \quad \frac{\langle OA | OC \rangle}{\|OA\|} = \text{kolmý průmět bodu } C \text{ na } OA$$

potom ale platí

$$\frac{\langle OA | OB + OC \rangle}{\|OA\|} = \text{kolmý průmět koncového bodu úsečky } OB + OC \text{ na } OA$$

Proto platí rovnost

$$\frac{\langle OA | OB \rangle}{\|OA\|} + \frac{\langle OA | OC \rangle}{\|OA\|} = \frac{\langle OA | OB + OC \rangle}{\|OA\|}$$

a tudíž i rovnost  $\langle OA | OB + OC \rangle = \langle OA | OB \rangle + \langle OA | OC \rangle$ .

(2) Skalární součin je *symetrický*, tj. platí rovnost  $\langle OA | OB \rangle = \langle OB | OA \rangle$  pro libovolné dvě orientované úsečky  $OA$ ,  $OB$ .

Mají-li obě úsečky  $OA$ ,  $OB$  nenulovou délku, pak rovnost  $\langle OA | OB \rangle = \langle OB | OA \rangle$  plyne okamžitě z (12.1). Jestliže alespoň jedna z úseček  $OA$ ,  $OB$  má délku nula, potom rovnost  $\langle OA | OB \rangle = \langle OB | OA \rangle$  plyne z (12.2).

- (3) Skalární součin je *pozitivně definitní*. To jest, pro každou orientovanou úsečku  $OA$  platí  $\langle OA | OA \rangle \geq 0$  a rovnost  $\langle OA | OA \rangle = 0$  platí právě tehdy, když má úsečka  $OA$  délku nula.

V případě, že úsečka  $OA$  má nenulovou délku, pak platí  $\langle OA | OA \rangle = \|OA\|^2 \cdot \cos 0 = \|OA\|^2 > 0$  (z toho plyne i fakt, že jestliže  $\langle OA | OA \rangle = 0$  pak  $OA$  má nulovou délku). Pokud má úsečka  $OA$  délku nula, pak  $\langle OA | OA \rangle = 0$  podle (12.2).

**12.1.2 Definice** Ať  $L$  je lineární prostor nad tělesem  $\mathbb{R}$ . Funkci  $\langle - | - \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje následující tři podmínky

- (1) *Linearita ve druhé souřadnici*. Pro každý vektor  $\vec{v}$  je funkce  $\langle \vec{v} | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$  lineární.
- (2) *Symetrie* (také: *komutativita*). Pro libovolné vektory  $\vec{v}, \vec{w}$  platí  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$ .
- (3) *Positivní definitnost*. Pro libovolný vektor  $\vec{v}$  platí  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$ . Rovnost  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0$  právě tehdy, když  $\vec{v} = \vec{0}$ .

říkáme *skalární součin* v  $L$ .

Poznamenejme, že díky symetrii a linearitě ve druhé souřadnici, je skalární součin  $\langle - | - \rangle$  lineární i v první souřadnici. Skalární součin je tak příkladem *bilineární formy* na lineárním prostoru  $L$  nad  $\mathbb{R}$  — viz Definici 15.1.1.

Skalární součin jsme definovali velmi abstraktně jako funkci  $\langle - | - \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje výše uvedené tři axiomy. Výhodou je obrovská obecnost pojmů, které nám tato definice umožní studovat. Ještě obecnější „skalární součiny“ budeme potřebovat v Dodatku P. Obecnějším „skalárním součinem“ je věnována Kapitola 16.

### 12.1.3 Příklad (Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ ) Pro vektory

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^n$  je předpis

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i$$

zřejmě skalární součin v  $\mathbb{R}^n$  (říkáme mu *standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^n$* ). Pomocí maticového násobení můžeme tento skalární součin zapsat následovně:  $\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{w}$ . S využitím jednotkové matice  $\mathbf{E}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  můžeme dokonce psát  $\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{w}$ .

Například v  $\mathbb{R}^3$  vypadá standardní skalární součin takto:

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

### 12.1.4 Příklad (Nezvyklý skalární součin v $\mathbb{R}^2$ ) Pro vektory

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^2$  definujeme  $\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = 5v_1w_1 + 11v_1w_2 + 11v_2w_1 + 25v_2w_2$ . Je snadné přímo z definice ověřit, že jsme definovali skalární součin v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^2$ .

Je zajímavé zjistit, že náš nezvyklý skalární součin je zadán symetrickou čtvercovou maticí

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$$



podobně jako standardní skalární součin v prostoru  $\mathbb{R}^n$  je zadán jednotkovou maticí  $\mathbf{E}_n$ . Přesněji: platí

$$\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{w}$$

Pro matici  $\mathbf{G}$  platí následující:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a — jak uvidíme v Tvzení 12.3.8 — tato vlastnost je pro matice, které určují netradiční skalární součiny v  $\mathbb{R}^n$ , typická. Více so o obecných skalárních součinech dozvíme v odstavci 12.3.

**12.1.5 Příklad (Skalární součin v lineárním prostoru spojitých funkcí)** Připomeňme si z Příkladu 1.1.10 lineární prostor  $C((a; b); \mathbb{R})$  funkcí spojitých na *otevřeném* intervalu  $(a; b)$ . V tomto příkladu budeme pracovat s lineárním prostorem  $C([a; b]; \mathbb{R})$  funkcí, spojitých na *neprázdném uzavřeném* intervalu  $[a; b]$  (tím myslíme funkce spojitě v každém vnitřním bodě intervalu  $[a; b]$  a spojitě v  $a$  zprava a v  $b$  zleva). Operace v  $C([a; b]; \mathbb{R})$  jsou definovány stejně jako v lineárním prostoru  $C((a; b); \mathbb{R})$ .

Tvrdíme, že vzorec

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx$$

zadává skalární součin na lineárním prostoru  $C([a; b]; \mathbb{R})$ . Protože funkce  $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$  je opět na uzavřeném intervalu  $[a; b]$  spojitá, integrál  $\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx$  existuje a je to reálné číslo.

Ověření tří vlastností skalárního z Definice 12.1.2 je opět snadné, musíme však využít znalostí z integrálního počtu.

- (1) Linearita ve druhé souřadnici.

Rovnosti

$$\begin{aligned} \langle f \mid a_1 \cdot g_1 + a_2 \cdot g_2 \rangle &= \int_a^b f(x) \cdot (a_1 \cdot g_1(x) + a_2 \cdot g_2(x)) \, dx \\ &= a_1 \cdot \int_a^b f(x) \cdot g_1(x) \, dx + a_2 \cdot \int_a^b f(x) \cdot g_2(x) \, dx \\ &= a_1 \cdot \langle f \mid g_1 \rangle + a_2 \cdot \langle f \mid g_2 \rangle \end{aligned}$$

platí (prostřední rovnost je linearita určitého integrálu).

- (2) Symetrie plyne triviálně z komutativity násobení reálných čísel:

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = \int_a^b g(x) \cdot f(x) \, dx = \langle g \mid f \rangle$$

- (3) Positivní definitnost.

Protože spojitá funkce  $x \mapsto f(x) \cdot f(x)$  je nezáporná, platí

$$\langle f \mid f \rangle = \int_a^b f(x) \cdot f(x) \, dx \geq \int_a^b 0 \, dx = 0$$

kde prostřední nerovnost je monotonie určitého integrálu.

Rovnost  $\langle 0 \mid 0 \rangle = 0$  platí, protože

$$\langle 0 \mid 0 \rangle = \int_a^b 0 \cdot 0 \, dx = 0$$

Zbývá ukázat, že z rovnosti  $\langle f \mid f \rangle = 0$  plyne, že  $f(x) = 0$  pro každé  $x$ .

Předpokládejme, že  $f(x_0) \neq 0$  pro nějaké  $x_0$  z uzavřeného intervalu  $[a; b]$ . Předpokládejme pro jednoduchost, že  $x_0$  je vnitřní bod intervalu  $[a; b]$  (jestliže  $x_0$  je jeden z krajních bodů, postupujeme analogicky, pouze uzavřené okolí budeme muset nahradit jednostranným uzavřeným okolím). Potom je spojitá funkce  $x \mapsto f(x) \cdot f(x)$  kladná na nějakém *uzavřeném* okolí  $[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \subseteq [a; b]$ . Protože funkce  $x \mapsto f(x) \cdot f(x)$

je spojitá na uzavřeném intervalu  $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ , nabývá na tomto intervalu svého (kladného) minima  $m$ . Z monotonie integrálu plynou nerovnosti

$$0 < m \cdot 2\delta = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} m \, dx \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) \cdot f(x) \, dx$$

a proto musí platit

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f | f \rangle \\ &= \int_a^b f(x) \cdot f(x) \, dx \\ &= \int_a^{x_0-\delta} f(x) \cdot f(x) \, dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) \cdot f(x) \, dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) \cdot f(x) \, dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) \cdot f(x) \, dx \\ &> 0 \end{aligned}$$

kde třetí rovnost platí díky aditivitě integrálu vzhledem k oboru integrace a předposlední nerovnost platí díky nerovnostem

$$\int_a^{x_0-\delta} f(x) \cdot f(x) \, dx \geq 0 \quad \int_{x_0+\delta}^b f(x) \cdot f(x) \, dx \geq 0$$

Odvodili jsme spor. Tudíž musí platit  $f(x) = 0$  pro všechna  $x$  z intervalu  $[a; b]$ .

**12.1.6 Poznámka** Příklad 12.1.5 lze zobecnit: pro spojitou funkci  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  lze definovat integrál

$$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x)$$

jako limitu *Riemannových-Stieltjesových* součtů

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \cdot (\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i))$$

kde  $x_i \leq c_i \leq x_{i+1}$ , vzatou přes všechna dělení  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  intervalu  $[a; b]$  taková, že  $\max_i (x_{i+1} - x_i)$  konverguje k nule.

Jakmile  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  a jakmile *váhová funkce*  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  je *rostoucí* a má spojitou derivaci na  $[a; b]$ , potom platí

$$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \cdot \alpha'(x) \, dx$$

Mnohem více se o Riemannově-Stieltjesově integrálu lze dočíst například v knihách

☞ Edwin Hewitt a Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 3. vydání, 1975.

☞ Vojtěch Jarník, *Integrální počet II*, Academia, 1984.

nebo v podkapitole D.2.

Pokud má  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  má *kladnou* spojitou derivaci na  $[a; b]$ , potom rovnost

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot \alpha'(x) \, dx$$

zadáva skalární součin na  $C([a; b]; \mathbb{R})$ . Důkaz je analogický Příkladu 12.1.5.

My na skalární součin vzhledem k Riemannovu-Stieltjesovu integrálu narazíme v Dodatku D při studiu *ortogonálních aproximací* funkcí.

Ukážeme nyní velmi užitečný fakt: jakýkoli skalární součin na prostoru  $\mathbb{R}^r$  vytváří skalární součin na prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^r)$  všech reálných matic s  $r$  řádky a  $s$  sloupci.

**12.1.7 Tvzení (Skalární součin matic)** *At  $\langle - | - \rangle_r$  je jakýkoli skalární součin v prostoru  $\mathbb{R}^r$ . Pro libovolné matice  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  a  $\mathbf{Y} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  se sloupcovými zápisy  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ ,  $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s)$  definujeme*

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i=1}^s \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{y}_i \rangle_r$$

*Potom  $\langle - | - \rangle$  je skalární součin na prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^r)$  všech reálných matic s  $r$  řádky a  $s$  sloupci.*

**DŮKAZ.** Ověříme pro  $\langle - | - \rangle$  tři vlastnosti z Definice 12.1.2.

(1) Pro jakékoli matice  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ ,  $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s)$  platí rovnost  $\langle \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{Y} | \mathbf{X} \rangle$ , protože

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i=1}^s \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{y}_i \rangle_r = \sum_{i=1}^s \langle \mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i \rangle_r = \langle \mathbf{Y} | \mathbf{X} \rangle$$

(2) Pro jakékoli matice  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ ,  $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s)$ ,  $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_s)$  a jakákoli reálná čísla  $a, b$  platí rovnost  $\langle \mathbf{X} | a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z} \rangle = a\langle \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle + b\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} \rangle$ , protože

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X} | a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z} \rangle &= \sum_{i=1}^s \langle \mathbf{x}_i | a\mathbf{y}_i + b\mathbf{z}_i \rangle_r \\ &= \sum_{i=1}^s a\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{y}_i \rangle_r + b\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i \rangle_r \\ &= a \sum_{i=1}^s \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{y}_i \rangle_r + b \sum_{i=1}^s \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i \rangle_r \\ &= a\langle \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle + b\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} \rangle \end{aligned}$$

(3) Pro jakoukoli matici  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$  platí nerovnost  $\langle \mathbf{X} | \mathbf{X} \rangle \geq 0$  a rovnost platí právě tehdy, když  $\mathbf{X} = \mathbf{O}_{s,r}$ .

Platí totiž

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{X} \rangle = \sum_{i=1}^s \underbrace{\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_i \rangle_r}_{\geq 0} \geq 0$$

Jestliže  $\langle \mathbf{X} | \mathbf{X} \rangle = 0$ , musí platit  $\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_i \rangle_r = 0$  pro všechna  $i$ . To znamená, že  $\mathbf{X} = \mathbf{O}_{s,r}$ . Rovnost  $\langle \mathbf{O}_{r,s} | \mathbf{O}_{s,r} \rangle = 0$  platí triviálně. ■

Z Tvzení 12.1.7 plyne, že standardní skalární součin v prostoru  $\mathbb{R}^r$  vytváří skalární součin v prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^r)$ . Tomuto skalárním součinu dáme jméno.

**12.1.8 Definice (Frobeniův skalární součin)** Skalárnímu součinu v prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^r)$ , který je vytvořen standardním skalárním součinem v  $\mathbb{R}^r$ , říkáme *Frobeniův skalární součin* a značíme jej  $\langle - | - \rangle_F$ .

**12.1.9 Příklad (Výpočet Frobeniova skalárního součinu)** Ať  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  a  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s)$  jsou dvě matice s  $r$  řádky a  $s$  sloupci. Položku matice  $\mathbf{A}$ , resp.  $\mathbf{B}$ , v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci označíme  $a_{ij}$ , resp.  $b_{ij}$ .

Potom

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle_F = \sum_{j=1}^s \mathbf{a}_j^T \cdot \mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r a_{ij} \cdot b_{ij}$$

a

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\langle \mathbf{A} | \mathbf{A} \rangle_F} = \sqrt{\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r a_{ij}^2}$$

Například

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle_F = 1 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 35$$

Prvním netriviálním výsledkem o skalárním součinu je nerovnost (12.3) z následujícího tvrzení. Přesto, že tato nerovnost působí jako rozmar přírody, uvidíme v Poznámce 12.2.4, že jde o velmi důležitý fakt.

**12.1.10 Lemma (Cauchy-Schwarz-Bunjakovski)** Pro libovolné vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  platí nerovnost

$$|\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle} \quad (12.3)$$

Rovnost platí právě tehdy, když  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  jsou lineárně závislé.

**DŮKAZ.** Nejprve si uvědomme, že pro každý vektor  $\vec{v}$  platí nerovnost  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$ . Obě odmocniny v nerovnosti (12.3) tedy dávají smysl.

Z vlastností skalárního součinu pro libovolné  $a$  v  $\mathbb{R}$  platí:

$$0 \leq \langle a\vec{v} + \vec{w} | a\vec{v} + \vec{w} \rangle = a^2 \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle + 2a \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle + \langle \vec{w} | \vec{w} \rangle$$

Označíme-li  $A = \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$ ,  $B = 2 \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$  a  $C = \langle \vec{w} | \vec{w} \rangle$ , ukázali jsme, že nerovnost  $Aa^2 + Ba + C \geq 0$  platí pro každé reálné  $a$ . Proto pro diskriminant platí  $B^2 - 4AC \leq 0$ . Nerovnost  $B^2 - 4AC \leq 0$  lze přepsat na  $B^2 \leq 4AC$ , což je nerovnost

$$4 \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle^2 \leq 4 \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \cdot \langle \vec{w} | \vec{w} \rangle$$

Z ní okamžitě (odmocněním) plyne požadovaná nerovnost (12.3).

Rovnost v (12.3) platí právě tehdy, když  $B^2 = 4AC$ . Neboli právě tehdy, když existuje jediné  $a$  takové, že

$$\langle a\vec{v} + \vec{w} | a\vec{v} + \vec{w} \rangle = a^2 \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle + 2a \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle + \langle \vec{w} | \vec{w} \rangle = 0$$

Podle vlastností skalárního součinu to nastane právě tehdy, když existuje jediné  $a$  tak, že  $\vec{w} = -a\vec{v}$ . ■

## 12.2 Norma, metrika a úhel mezi vektory

Ukážeme, že každý skalární součin umožňuje definovat pojem *velikosti* (také: *normy*) vektoru a *vzdálenosti* dvou vektorů. Pojmy norma a vzdálenost budeme opět definovat abstraktně.

**12.2.1 Definice** Ať  $L$  je lineární prostor.

(1) Funkci  $\|-\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje následující tři podmínky

- (a)  $\|\vec{v}\| \geq 0$  pro všechny vektory  $\vec{v}$ , rovnost platí pouze pro  $\vec{v} = \vec{o}$ .
- (b)  $\|a\vec{v}\| = |a| \cdot \|\vec{v}\|$ .
- (c)  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ .

říkáme *norma* na lineárním prostoru  $L$ . Zápis  $\|\vec{v}\|$  čteme *norma vektoru  $\vec{v}$*  (také: *velikost vektoru  $\vec{v}$* ).

(2) Funkci  $d : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje následující tři podmínky

- (a)  $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0$  pro všechny vektory  $\vec{v}, \vec{w}$ , rovnost platí pouze pro  $\vec{v} = \vec{w}$ .
- (b)  $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$  pro všechny vektory  $\vec{v}, \vec{w}$ .
- (c)  $d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{u}) + d(\vec{u}, \vec{w})$  pro všechny vektory  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ .

říkáme *metrika* na lineárním prostoru  $L$ . Zápis  $d(\vec{v}, \vec{w})$  čteme *vzdálenost vektorů  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$*  (také: *vzdálenost vektoru  $\vec{v}$  od vektoru  $\vec{w}$* ).

**12.2.2 Poznámka** Definice 12.2.1 je značně abstraktní. Pokusíme se vysvětlit, co jednotlivé vlastnosti normy a metriky znamenají intuitivně.

- (1) Norma zobecňuje pojem délky. Proto musí platit  $\|\vec{v}\| \geq 0$  (délka vektoru není záporná). Pouze nulový vektor  $\vec{0}$  má délku nula, všechny ostatní vektory musí mít kladnou délku. Délka vektoru  $a \cdot \vec{v}$  je „orientovaný  $a$ -násobek“ délky vektoru  $\vec{a}$ . To znamená, že

$$\|a \cdot \vec{v}\| \begin{cases} a \cdot \|\vec{v}\|, & \text{jestliže } a \geq 0 \\ -a \cdot \|\vec{v}\|, & \text{jestliže } a < 0 \end{cases}$$

neboli  $\|a \cdot \vec{v}\| = |a| \cdot \|\vec{v}\|$ . Nakonec, součet délek vektorů  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  nemůže být menší než délka vektoru  $\vec{v} + \vec{w}$ .

- (2) Metrika zobecňuje pojem vzdálenosti. Proto musí být vzdálenost dvou vektorů vždy alespoň nula. A vektor sám od sebe má vzdálenost nula. Vzdálenost je symetrická (je jedno, jestli měříme vzdálenost  $\vec{v}$  od  $\vec{w}$  nebo vzdálenost  $\vec{w}$  od  $\vec{v}$ ). Nakonec, vzdálenost vektoru  $\vec{v}$  od  $\vec{w}$  nemůže být větší než vzdálenost  $\vec{v}$  od  $\vec{w}$  „měřená objíždkou přes vektor  $\vec{u}$ “.

### 12.2.3 Tvrzení (Skalární součin indukuje normu) *At $L$ je prostor se skalárním součinem. Potom*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$$

*určuje normu na lineárním prostoru  $L$ .*

DŮKAZ. Podle definice skalárního součinu je vždy  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$ , odmocnina tedy má smysl. Ukážeme nyní tři vlastnosti z Definice 12.2.1:

- (1) Protože druhá odmocnina je vždy nezáporné číslo, platí  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} \geq 0$ . Protože  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0$  právě tehdy, když  $\vec{v} = \vec{0}$ , platí  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} = 0$  právě tehdy, když  $\vec{v} = \vec{0}$ .
- (2) Využijeme vlastností skalárního součinu, a dostaneme tak rovnosti

$$\|a \cdot \vec{v}\| = \sqrt{\langle a \cdot \vec{v} | a \cdot \vec{v} \rangle} = \sqrt{a^2 \cdot \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} = |a| \cdot \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} = |a| \cdot \|\vec{v}\|$$

- (3) Použijeme vlastností skalárního součinu a nerovnost (12.3):

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} + \vec{w} | \vec{v} + \vec{w} \rangle &= \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle + 2 \cdot \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle + \langle \vec{w} | \vec{w} \rangle \\ &\leq \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle + 2 \cdot \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle} + \langle \vec{w} | \vec{w} \rangle \\ &= \left( \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} + \sqrt{\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle} \right)^2 \end{aligned}$$

Z výše uvedeného dostaneme odmocněním nerovnost  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ .

Důkaz je hotov: vzorec  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$  určuje normu na lineárním prostoru  $L$ . ■

**12.2.4 Poznámka (Geometrický význam nerovnosti Cauchy-Schwarz-Bunyakovski)** Tvrzení 12.2.3 nám umožňuje přepsat nerovnost (12.3) do čitelnější podoby: pro libovolné vektory  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  platí nerovnost

$$|\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \quad (12.4)$$

a rovnost platí právě tehdy, jsou-li vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  lineárně závislé.

Předpokládejme, že  $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \neq 0$ , tj. předpokládejme, že *oba* vektory  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  jsou nenulové. Pak lze nerovnost (12.4) zapsat takto:

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \leq 1$$

kde některá z rovností platí právě tehdy, jsou-li vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  lineárně závislé. Každé číslo z uzavřeného intervalu  $[-1; 1]$  lze jednoznačně zapsat ve tvaru  $\cos \varphi$  pro jednoznačně určený úhel  $\varphi \in [0; \pi]$ . Nerovnost (12.4) tedy můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

pro jednoznačně určený úhel  $\varphi \in [0; \pi]$ .

Pro nenulové vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  tedy roznásobením dostaneme rovnost

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \varphi$$

která platí i v případě, kdy  $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| = 0$  (v tomto případě ovšem číslo  $\varphi$  není jednoznačně určeno).

Dostáváme tedy abstraktní analogii rovnosti (12.1) z prostoru orientovaných úseček! A to je geometrický význam nerovnosti Cauchy-Schwarz-Bunyakovski.

### 12.2.5 Definice (Úhel mezi vektory a kolmost vektorů)

- (1) Ať  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  jsou nenulové vektory. Jednoznačně určenému úhlu  $\varphi \in [0; \pi]$ , pro který platí rovnost

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \varphi$$

říkáme *úhel mezi vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$* .

- (2) Řekneme, že dva vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  jsou na sebe kolmé (také: vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  jsou navzájem ortogonální), pokud platí  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0$ .



**12.2.6 Poznámka** Povšimněme si, že v Definici 12.2.5 jsme *neřekli*, že dva vektory jsou na sebe kolmé, pokud svírají úhel  $\pi/2$ . To je možná na první pohled zvláštní, proto definici kolmosti nyní podrobně vysvětlíme:

- (1) Dva nenulové vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  jsou na sebe kolmé právě tehdy, když svírají úhel  $\pi/2$ .

To plyne okamžitě z rovnosti  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \varphi$ . Protože vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  jsou nenulové, platí  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0$  právě tehdy, když platí  $\cos \varphi = 0$ .

- (2) Dva nenulové vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  jsou lineárně závislé právě tehdy, když svírají úhel 0 nebo  $\pi$ .

- (a) V případě, kdy  $\vec{w} = a \cdot \vec{v}$  pro  $a > 0$ , je

$$a \cdot \|\vec{v}\|^2 = a \cdot \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | a \cdot \vec{v} \rangle = a \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \varphi$$

tudíž  $\cos \varphi = 1$ , proto  $\varphi = 0$ .

V případě, kdy  $\vec{w} = a \cdot \vec{v}$  pro  $a < 0$ , je

$$a \cdot \|\vec{v}\|^2 = a \cdot \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | a \cdot \vec{v} \rangle = -a \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \varphi$$

tudíž  $\cos \varphi = -1$ , proto  $\varphi = \pi$ .

- (b) V případě, kdy  $\varphi = 0$ , je  $\cos \varphi = 1$ , a proto platí

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle}$$

a v nerovnici (12.3) platí rovnost. Proto jsou vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  lineárně závislé.

V případě, kdy  $\varphi = \pi$ , je  $\cos \varphi = -1$ , a proto platí

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = -\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| = -\sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle}$$

a v nerovnici (12.3) platí rovnost. Proto jsou vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  lineárně závislé.

- (3) Nulový vektor  $\vec{o}$  je kolmý na jakýkoli vektor  $\vec{v}$ .

K tomu stačí využít vlastností skalárního součinu. Protože zobrazení  $\langle \vec{v} | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$  je lineární, respektuje nulový vektor. To znamená, že platí  $\langle \vec{v} | \vec{o} \rangle = 0$ .

- (4) Je-li vektor  $\vec{w}$  kolmý sám na sebe, potom platí  $\vec{w} = \vec{o}$ .

Opravdu: z rovnosti  $\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle = 0$  a z vlastností normy plyne, že  $\vec{w} = \vec{o}$ .

Definice kolmosti se tedy pro nenulové vektory shoduje s intuitivní definicí kolmosti pomocí sevřeného úhlu. Protože ale budeme pracovat i s nulovým vektorem, definovali jsme kolmost pomocí skalárního součinu.

### 12.2.7 Příklad

- (1) V prostoru  $\mathbb{R}^3$  se standardním skalárním součinem zjistíme úhel mezi nenulovými vektory

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Protože platí

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$$

jsou oba vektory na sebe navzájem kolmé. (Nakreslete si obrázek vektorů  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{w}$ .)

- (2) V prostoru  $\mathbb{R}^3$  se standardním skalárním součinem nalezneme úhel mezi nenulovými vektory

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Protože platí  $\|\mathbf{v}\| = 1$ ,  $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{2}$  a  $\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \rangle = 1$ , musí pro hledaný úhel  $\varphi$  platit rovnost

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Hledaný úhel tedy je  $\varphi = \pi/4$ . (Nakreslete si obrázek vektorů  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{w}$ .)

- (3) V prostoru  $C([-\pi/2; \pi/2]; \mathbb{R})$  spojitých funkcí se skalárním součinem z Příkladu 12.1.5 jsou funkce  $\cos$  a  $\sin$  na sebe navzájem kolmé, protože platí

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cdot \sin x \, dx = \left[ \frac{1}{2} \cdot \sin^2 x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

- (4) V prostoru  $C([0; 1]; \mathbb{R})$  spojitých funkcí se skalárním součinem z Příkladu 12.1.5 nalezneme úhel, který spolu svírají nenulové vektory

$$f : x \mapsto \sqrt{5}x^2, \quad g : x \mapsto 3$$

Spočtěme nejprve normy vektorů  $f$  a  $g$ :

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 \sqrt{5}x^2 \cdot \sqrt{5}x^2 \, dx} = \sqrt{\left[ x^5 \right]_0^1} = 1$$

a

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^1 3 \cdot 3 \, dx} = \sqrt{\left[ 9x \right]_0^1} = 3$$

Skalární součin vektorů  $f$  a  $g$  je

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 \sqrt{5}x^2 \cdot 3 \, dx = \left[ \sqrt{5}x^3 \right]_0^1 = \sqrt{5}$$

Protože platí  $\langle f \mid g \rangle = \|f\| \cdot \|g\| \cdot \cos \varphi$ , musí platit rovnost

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

To znamená, že funkce  $f$  a  $g$  spolu v prostoru  $C([0; 1]; \mathbb{R})$  svírají úhel  $\arccos(\sqrt{5}/3)$  (přibližně 42 stupňů).

Připomeňme, že v Definici 12.1.8 jsme zavedli Frobeniův skalární součin  $\langle - | - \rangle_F$  na prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^r)$  všech reálných matic s  $r$  řádky a  $s$  sloupci. Norma na  $\text{Lin}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^r)$ , kterou vytváří Frobeniův součin podle Tvzení 12.2.3, bude hrát důležitou roli v podkapitole 14.2. Proto této normě dáme jméno.

**12.2.8 Definice (Frobeniova norma matice)** Příslušné normě v prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^r)$  říkáme *Frobeniova norma* a značíme ji  $\| - \|_F$ .

### 12.2.9 Příklad

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\|_F = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-2)^2 + 0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{67}$$

**12.2.10 Lemma (Pythagorova věta a kosinová věta)** V lineárním prostoru se skalárním součinem platí

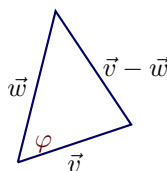
- (1) Rovnost  $\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$  platí právě tehdy, když  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0$ .
- (2) Pro nenulové vektory  $\vec{v}, \vec{w}$  platí rovnost  $\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \varphi$ , kde  $\varphi$  je úhel sevřený vektory  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$ .

DŮKAZ. Podle vlastností skalárního součinu platí rovnosti:

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \langle \vec{v} - \vec{w} | \vec{v} - \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$$

a z toho okamžitě tvrzení (1) a (2) plynou. ■

**12.2.11 Poznámka** Lemma 12.2.10 je zobecněním dobře známých vět z planimetrie. Vektory  $\vec{v}, \vec{w}$  a  $\vec{v} - \vec{w}$  si máme představit jako tři strany trojúhelníka



kde strany  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  svírají úhel  $\varphi$ . Tvzení Lemmatu 12.2.10 je pak známá *kosinová věta*:

Druhá mocnina strany trojúhelníka je rovna součtu druhých mocnin zbývajících dvou stran, zmenšeného o dvojnásobný součin jejich délek násobený kosinem úhlu jimi sevřeného.

**12.2.12 Tvzení (Norma indukuje metriku)** At  $\| - \| : L \rightarrow \mathbb{R}$  je norma na lineárním prostoru. Potom

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$$

určuje metriku na lineárním prostoru  $L$ .

DŮKAZ. Uážeme tři vlastnosti metriky z Definice 12.2.1:

- (1) Norma je vždy nezáporné číslo, proto platí  $d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| \geq 0$ . Dále z vlastnosti normy plyne, že  $d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| = 0$  nastane právě tehdy, když  $\vec{v} - \vec{w}$  je nulový vektor, tj. právě tehdy, když  $\vec{v} = \vec{w}$ .
- (2) Z vlastnosti normy plynou rovnosti

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| = \|(-1) \cdot (\vec{w} - \vec{v})\| = |-1| \cdot \|\vec{w} - \vec{v}\| = d(\vec{w}, \vec{v})$$

- (3) Opět využijeme vlastnosti normy

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| = \|(\vec{v} - \vec{u}) + (\vec{u} - \vec{w})\| \leq \|\vec{v} - \vec{u}\| + \|\vec{u} - \vec{w}\| = d(\vec{v}, \vec{u}) + d(\vec{u}, \vec{w})$$



Důkaz je u konce. ■

Tuto podkapitolu uzavřeme vyjasněním vztahů mezi skalárním součinem, normou a metrikou. Podle Tvzení 12.2.3 vytváří skalární součin normu a podle Tvzení 12.2.12 norma vytváří metriku. Jak ukazují následující dva příklady, žádnou z těchto implikací nelze obrátit.

**12.2.13 Příklad (Z existence metriky neplyne existence normy)** Ukážeme, že na lineárním prostoru  $\mathbb{R}$  je

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{když } x = y \\ 1, & \text{jindy} \end{cases}$$

metrika, která nevznikla z žádné normy na  $\mathbb{R}$ .

(1) Funkce  $d$  je metrika na  $\mathbb{R}$ .

Evidentně platí  $d(x, y) \geq 0$  a  $d(x, y) = 0$  právě tehdy, když  $x = y$ . Dále  $d(x, y) = d(y, x)$ . Zbývá dokázat nerovnost  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ . Jediná potíž by mohla nastat, kdyby pro nějaká  $x, y, z$  platilo  $d(x, y) + d(y, z) = 0$  a současně  $d(x, z) = 1$ . První rovnost ale znamená  $x = y = z$  a druhá  $x \neq z$ . To je spor, trojúhelníková rovnost platí.

(2) Kdyby na  $\mathbb{R}$  existovala norma  $\| \cdot \|$  taková, že  $d(x, y) = \|x - y\|$ , musela by pro každé reálné číslo  $x$  platit  $d(x, 0) = \|x\|$ .

Ukážeme, že funkce  $x \mapsto d(x, 0)$  norma není, protože obecně neplatí  $|a| \cdot d(x, 0) = d(ax, 0)$ . Stačí zvolit například  $a = 2, x = 2$ . Potom

$$|a| \cdot d(x, 0) = 2 \quad d(ax, 0) = 1$$

**12.2.14 Příklad (Z existence normy neplyne existence skalárního součinu)** Ukážeme, že na lineárním prostoru  $\mathbb{R}^2$  je

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

norma, která nevznikla z žádného skalárního součinu. Této normě na  $\mathbb{R}^2$  říkáme 1-norma.

(1) Ukážeme, že  $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + |x_2|$  je norma na  $\mathbb{R}^2$ .

Evidentně platí  $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 \geq 0$  a  $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = 0$  právě tehdy, když  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dále platí

$$\|a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |ax_1| + |ax_2| = |a| \cdot (|x_1| + |x_2|) = |a| \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1$$

Nerovnost  $\left\| \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 + \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1$  plyne z obyčejné trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu reálného čísla:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 + \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1$$

(2) Nejprve si uvědomme, že v každém lineárním prostoru  $L$  se skalárním součinem platí takzvaná *rovnooběžníková rovnost*:

$$\begin{aligned} \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= \langle \vec{v} - \vec{w} | \vec{v} - \vec{w} \rangle + \langle \vec{v} + \vec{w} | \vec{v} + \vec{w} \rangle \\ &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle \\ &= 2(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2) \end{aligned}$$

Kdyby norma  $\left\| \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + |x_2|$  na  $\mathbb{R}^2$  vznikla ze skalárního součinu, muselo by tedy platit

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1^2 + \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1^2 = 2\left(\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1^2 + \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1^2\right)$$

neboli

$$(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)^2 + (|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|)^2 = 2(|x_1| + |x_2|)^2 + 2(|y_1| + |y_2|)^2$$

pro libovolná reálná čísla  $x_1, x_2, y_1, y_2$ . Výše uvedená rovnost ovšem například pro  $x_1 = 1, x_2 = 3, y_1 = 2, y_2 = 4$  neplatí.

Zobecnění 1-normy z Příkladu 12.2.14 na prostory tvaru  $\mathbb{R}^n$  bude důležité pro studium algoritmu PageRank v Dodatku F. Viz také Příklad 13.1.2(2).

**12.2.15 Poznámka (Koule a sféry v lineárním prostoru s metrikou)** V jakémkoli lineárním prostoru  $L$  s metrikou  $d$  můžeme mluvit o *koulích* a *sférách*. Přesněji: množina

$$\text{Ball}_t(\vec{w}) = \{\vec{v} \in L \mid d(\vec{w}, \vec{v}) \leq t\}$$

je *koule* se středem ve vektoru  $\vec{w}$  a poloměrem  $t$  a množina

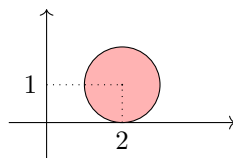
$$\text{Sphere}_t(\vec{w}) = \{\vec{v} \in L \mid d(\vec{w}, \vec{v}) = t\}$$

je *sféra* se středem ve vektoru  $\vec{w}$  a poloměrem  $t$ .

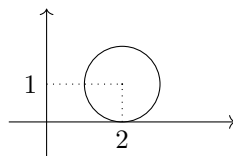
Pro metriku v  $\mathbb{R}^2$  danou standardním skalárním součinem, tj. pro

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

je následující obrázek obrázkem koule se středem v bodě  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  a poloměrem 1:



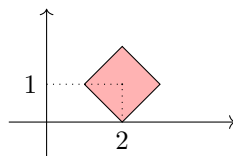
a následující obrázek je obrázkem sféry se středem v bodě  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  a poloměrem 1:



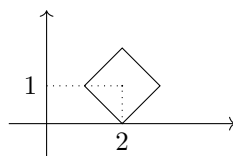
Změnou metriky se obrázek koule a sféry může změnit dost radikálně. Pro metriku v  $\mathbb{R}^2$

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

která *nevznikla* z žádného skalárního součinu, je následující obrázek obrázkem koule se středem v bodě  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  a poloměrem 1:



a následující obrázek je obrázkem sféry se středem v bodě  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  a poloměrem 1:



Jednotková koule a sféra se středem v počátku mají v každém lineárním prostoru s *normou* očekávané vlastnosti:

**12.2.16 Tvrzení (Vlastnosti jednotkové koule a sféry v prostoru s normou)** *At  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{R}$  s normou  $\| \cdot \|$ . Potom platí:*

- (1) *Jednotková sféra  $\text{Sphere}_1(\vec{o})$  má s každou přímkou  $\text{span}(\vec{s})$  přesně dva různé průsečíky.*
- (2) *Jednotková koule  $\text{Ball}_1(\vec{o})$  je symetrická podle počátku: jestliže  $\vec{x}$  leží v  $\text{Ball}_1(\vec{o})$ , potom  $-\vec{x}$  leží v  $\text{Ball}_1(\vec{o})$ .*
- (3) *Jednotková koule  $\text{Ball}_1(\vec{o})$  je konvexní:<sup>1</sup> jestliže vektory  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  leží v  $\text{Ball}_1(\vec{o})$ , potom  $t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$  leží v  $\text{Ball}_1(\vec{o})$  pro každé  $t \in [0; 1]$ .*

DŮKAZ.

- (1) Rovnice  $\|a\vec{s}\| = 1$  má přesně dvě řešení:  $a = 1/\|\vec{s}\|$  a  $a = -1/\|\vec{s}\|$ . Platí totiž  $\|a\vec{s}\| = |a| \cdot \|\vec{s}\|$ .
- (2) Jestliže  $\vec{x}$  leží v  $\text{Ball}_1(\vec{o})$ , potom  $\|\vec{x}\| \leq 1$ . To znamená, že  $\|-\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \leq 1$ .
- (3) Jestliže platí  $\|\vec{a}\| \leq 1$  a  $\|\vec{b}\| \leq 1$ , potom  $\|t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\| \leq \|t\vec{a}\| + \|(1-t)\vec{b}\| = t \cdot \|\vec{a}\| + (1-t) \cdot \|\vec{b}\| \leq t + (1-t) = 1$ .

■

## 12.3 Obecný tvar skalárního součinu v prostoru konečné dimenze

V této podkapitole ukážeme, že skalární součiny na prostorech konečné dimenze úzce souvisí s pozitivně definitními maticemi. Přesněji: ukážeme, že každý skalární součin na lineárním prostoru konečné dimenze je zadán pozitivně definitní maticí a že jinak skalární součin vzniknout nemůže.

**12.3.1 Definice** Čtvercové matici  $\mathbf{G}$  nad  $\mathbb{R}$  říkáme *pozitivně definitní*, pokud existuje matice  $\mathbf{R}$  s lineárně nezávislými sloupci taková, že platí  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ .



**12.3.2 Poznámka** V některé literatuře se pozitivní definitnost definuje pro obecné (tj. ne nutně symetrické) čtvercové matice. V našem pojetí je každá pozitivně definitní matice *automaticky symetrická*, protože podle 6.1.5 platí rovnost

$$\mathbf{G}^T = (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R})^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{G}$$

**12.3.3 Poznámka (Pozitivní definitnost zobecňuje kladnost čísla)** Matice  $\mathbf{G}$  rozměrů  $1 \times 1$  nad  $\mathbb{R}$  je reálné číslo  $g$ . Pokud  $g > 0$ , ukážeme, že  $\mathbf{G}$  je pozitivně definitní matice. Za matici  $\mathbf{R}$  totiž můžeme zvolit matici rozměrů  $1 \times 1$  s položkou  $r = \sqrt{g} > 0$ . Potom jistě platí  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ . Tudíž matice  $\mathbf{G} = (g)$ , kde  $g > 0$ , je pozitivně definitní.

Obráceně, pokud matice  $\mathbf{G} = (g)$  je pozitivně definitní, musí matice  $\mathbf{R}$  mít jeden sloupec a (řekněme)  $n$  řádků:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Potom z rovnosti  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$  a z toho, že sloupec matice  $\mathbf{R}$  musí být nenulový vektor, plyne nerovnost  $g = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 > 0$ .

<sup>1</sup>Pro definici konvexní množiny viz Příklad 1.7.11. Studium obecných konvexních množin je věnován Dodatek J.

Pozor: netvrdíme, že všechny položky matice  $\mathbf{R}$  musí být pozitivní. Netvrdíme ani, že matice  $\mathbf{R}$  je maticí  $\mathbf{G}$  určena jednoznačně. Například platí rovnosti

$$(12) = \begin{pmatrix} \sqrt{12} \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{12} \\ 0 \end{pmatrix} = (\sqrt{12})^T \cdot (\sqrt{12})$$

**12.3.4 Tvzení (Charakterisace pozitivně definitních matic)** Pro matici  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Matice  $\mathbf{G}$  je pozitivně definitní.
- (2) Matice  $\mathbf{G}$  je symetrická a pro každý vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  platí  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ , rovnost platí pouze pro  $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ .
- (3) Matice  $\mathbf{G}$  je symetrická a všechny kořeny charakteristického polynomu  $\text{char}_{\mathbf{G}}(x) = \det(\mathbf{G} - x \cdot \mathbf{E}_n)$  jsou reálné a kladné.
- (4) Matice  $\mathbf{G} = (g_{ij})$  je symetrická. Navíc determinanty všech čtvercových matic tvaru  $\mathbf{G}_k = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ , kde  $k = 1, \dots, n$ , jsou kladné.

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Pokud  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ , potom  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}\|^2 \geq 0$ . Protože  $\mathbf{R}$  má lineárně nezávislé sloupce, platí podle Tvzení 4.1.10 rovnost  $\ker(\mathbf{R}) = \{\mathbf{o}\}$ . Proto  $\|\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}\|^2 = 0$  právě tehdy, když  $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ .

Ze (2) plyne (3). Nejprve ukážeme, že jakýkoli kořen polynomu  $\text{char}_{\mathbf{G}}(x)$  je reálný. Předpokládejme tedy, že  $\lambda \in \mathbb{C}$  je kořen polynomu  $\text{char}_{\mathbf{G}}(x)$ . Potom  $\lambda$  je vlastní hodnota lineárního zobrazení  $\mathbf{G}$  jakožto lineárního zobrazení z  $\mathbb{C}^n$  do  $\mathbb{C}^n$ . To je možné udělat, protože každé reálné číslo můžeme považovat za komplexní. Dále označme jako  $\mathbf{v}$  příslušný vlastní vektor z prostoru z  $\mathbb{C}^n$ . Pro další výpočty označme

$$\lambda = \alpha + i \cdot \beta, \quad \mathbf{v} = \mathbf{a} + i \cdot \mathbf{b}$$

kde  $i$  je imaginární jednotka,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou reálná čísla a  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  jsou vektory z  $\mathbb{C}^n$  s pouze reálnými složkami.

Potom rovnost  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$  je ekvivalentní rovnosti  $\mathbf{G} \cdot (\mathbf{a} + i \cdot \mathbf{b}) = (\alpha + i \cdot \beta) \cdot (\mathbf{a} + i \cdot \mathbf{b})$ . Po úpravách dostaneme dvě rovnosti

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a} - \beta \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{G} \cdot \mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{b} + \beta \cdot \mathbf{a}$$

v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Z nich plynou rovnosti

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} - \beta \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b} &= (\alpha \cdot \mathbf{a} - \beta \cdot \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}^T \cdot (\alpha \cdot \mathbf{b} + \beta \cdot \mathbf{a}) \\ &= \alpha \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} + \beta \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že  $\mathbf{G}$  je symetrická matice.

Po odečtení  $\alpha \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$  a převodu  $\beta \cdot \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b}$  na jednu stranu tak dostáváme rovnost

$$0 = \beta \cdot (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b})$$

Protože vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  mají reálné složky, platí  $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b} > 0$ . Ukázali jsme, že  $\beta = 0$ .

Nyní víme, že všechny kořeny polynomu  $\text{char}_{\mathbf{G}}(x)$  jsou reálné. Protože každý kořen polynomu  $\text{char}_{\mathbf{G}}(x)$  je vlastní hodnota lineárního zobrazení  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , existuje pro vlastní hodnotu  $\lambda$  reálný vlastní vektor  $\mathbf{v}$ . Potom platí

$$0 < \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \cdot \lambda \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}$$

Protože  $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ , platí  $\lambda > 0$ . Ukázali jsme, že libovolný kořen polynomu  $\text{char}_{\mathbf{G}}(x)$  je kladný.

Ze (3) plyne (4). Každá z matic  $\mathbf{G}_k$  je symetrická. Dále ukážeme, že  $\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{y} \geq 0$  pro všechna  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ , rovnost platí pouze pro  $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ . To jest: ukážeme, že každá z matic  $\mathbf{G}_k$  splňuje podmínku (2). Pro vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

definujeme vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

z  $\mathbb{R}^n$ . Je zřejmé, že  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  v  $\mathbb{R}^k$  právě tehdy, když  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  v  $\mathbb{R}^n$ . Protože platí

$$\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$$

ukázali jsme, že každá z matic  $\mathbf{G}_k$  splňuje podmínku (2). Takže pro každou z matic  $\mathbf{G}_k$  má polynom  $\text{char}_{\mathbf{G}_k}(x)$  všechny kořeny reálné a kladné (protože už jsme ukázali, že z podmínky (2) plyne podmínka (3)).

Protože platí rovnost  $\det(\mathbf{G}_k) = \text{char}_{\mathbf{G}_k}(0)$ , je  $\det(\mathbf{G}_k)$  roven absolutnímu členu polynomu  $\text{char}_{\mathbf{G}_k}(x)$ . Absolutní člen každého polynomu je ale roven součinu všech kořenů tohoto polynomu. To znamená, že  $\det(\mathbf{G}_k)$  musí být kladné číslo, protože polynom  $\text{char}_{\mathbf{G}_k}(x)$  má všechny kořeny reálné a kladné.

Ze (4) plyne (2). Tvrzení je triviální v případě  $n = 1$ . Předpokládejme tedy, že  $n \geq 2$ .

Stačí najít uspořádanou bázi  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  s vlastností

$$\mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_j = 0, \text{ jestliže } i \neq j \quad \text{a} \quad \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_i > 0$$

Potom totiž pro obecný vektor  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbf{b}_i$  platí

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot x_j \cdot \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_i \geq 0$$

a je zjevné, že rovnost platí pouze pro nulový vektor.

Bázi  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  definujeme takto:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} G_{21} \\ G_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} G_{31} \\ G_{32} \\ G_{33} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{b}_n = \begin{pmatrix} G_{n1} \\ G_{n2} \\ G_{n3} \\ G_{n4} \\ \vdots \\ G_{nn} \end{pmatrix}$$

kde  $G_{kj}$  je algebraický doplněk posice  $(k, j)$  v matici  $\mathbf{G}_k$ , kde  $k = 2, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Protože předpokládáme, že  $\det(\mathbf{G}_k) > 0$  pro všechna  $k = 1, \dots, n$ , platí  $G_{jj} > 0$  pro všechna  $j = 2, \dots, n$ . Opravdu, podle Lemmatu 8.3.4 platí rovnost  $G_{jj} = (-1)^{j+j} \cdot \det(\mathbf{G}_{j-1}) = \det(\mathbf{G}_{j-1})$ . Proto jsou vektory  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  lineárně nezávislé a  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  je báze prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

Součin  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_j$  je podle Věty 8.3.3 roven vektoru

$$\text{pro } j = 1: \begin{pmatrix} g_{11} \cdot g_{11} \\ g_{11} \cdot g_{21} \\ \vdots \\ g_{11} \cdot g_{n1} \end{pmatrix} \quad \text{pro } j > 1: \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \det(\mathbf{G}_j) \\ a_{j+1} \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

kde  $a_{j+1}, \dots, a_n$  jsou nějaká reálná čísla.

Proto platí

$$\mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_j \begin{cases} = 0, & \text{jestliže } i < j \\ = g_{11}^3 > 0, & \text{jestliže } i = j = 1 \\ = G_{ii} \cdot \det(\mathbf{G}_i) = \det(\mathbf{G}_{i-1}) \cdot \det(\mathbf{G}_i) > 0, & \text{jestliže } i = j > 1 \end{cases}$$

kde jsme použili Větu 8.3.3 (o rozvoji determinantu, aplikovanou na řádky) a Tvzení 8.2.11 (o nulovosti determinantu matice se dvěma stejnými řádky).

Ze (2) plyne (1). Ukážeme, že existuje dokonce regulární matice  $\mathbf{R}$  tak, že  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ . Budeme postupovat indukcí podle  $n \geq 1$ .

(a)  $n = 1$ . Podle předpokladů je  $\mathbf{G} = (g_{11})$  a  $g_{11} > 0$ . Potom  $\mathbf{G} = (\sqrt{g_{11}})^T \cdot (\sqrt{g_{11}})$ .

(b) Ať  $n + 1 \geq 2$  je pevné přirozené číslo. Ať matice  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  splňuje podmínku (2).

Předpokládejme, že každou matici  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  splňující podmínku (2) lze psát ve tvaru  $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}$ , kde  $\mathbf{P}$  je regulární matice.

Matice  $\mathbf{G}$  si napíšeme v blokovém tvaru

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{12}^T & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix}$$

kde  $\mathbf{G}_{22} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{G}_{12} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Definujme matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  předpisem

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}_{22} - \frac{1}{g_{11}} \cdot \mathbf{G}_{12}^T \cdot \mathbf{G}_{12}$$

Kdybychom ukázali, že matice  $\mathbf{M}$  splňuje podmínku (2), byl by důkaz hotov. Podle indukčního předpokladu by totiž existovala regulární matice  $\mathbf{P}$  taková, že  $\mathbf{M} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}$ . Pak bychom mohli psát rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} g_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{12}^T & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{M} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{P} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{P} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{O} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je matice samých nul a matice

$$\begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

je evidentně regulární.

Dokážeme, že matice  $\mathbf{M}$  splňuje podmínku (2). Zbývá tedy dokázat dvě věci:

(b1) Matice  $\mathbf{M}$  je symetrická.

To je triviální, protože  $\mathbf{G}_{22}$  je symetrická matice a platí rovnost

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}_{22} - \frac{1}{g_{11}} \cdot \mathbf{G}_{12}^T \cdot \mathbf{G}_{12}$$

(b2) Nerovnost  $\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{y} \geq 0$  platí pro každý vektor  $\mathbf{y}$  v  $\mathbb{R}^n$  a že rovnost platí pouze pro nulový vektor.

Kdybychom ukázali, že podmínku (b2) splňuje matice

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{M} \end{pmatrix}$$

odvodili bychom, že  $\mathbf{M}$  splňuje podmínku (b2) podobným trikem, jako když jsme dokazovali, že ze (3) plyne (4).

Protože matice

$$\begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}$$

je evidentně regulární, z toho, že matice  $\mathbf{G}$  splňuje podmínku (2) a z rovnosti

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{M} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}$$

plyne, že

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{M} \end{pmatrix}$$

splňuje podmínku (b2).

Důkaz indukci je u konce; ze (2) plyne (1). ■

**12.3.5 Poznámka (Choleskyho faktorizace pozitivně definitní matice)** Povšimněme si, že jsme v důkazu Tvzení 12.3.4 dokázali, že pro matici  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Matice  $\mathbf{G}$  je pozitivně definitní.
- (2) Existuje *regulární* matice  $\mathbf{R} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  v horním blokovém tvaru taková, že  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ .

Rovnici  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ , kde  $\mathbf{R}$  je regulární matice v horním blokovém tvaru, se říká *Choleskyho faktorizace* pozitivně definitní matice  $\mathbf{G}$ . V důkazu Tvzení 12.3.4 jsme navíc podali rekursivní návod, jak Choleskyho faktorizaci najít.

**12.3.6 Příklad (Choleskyho faktorizace)** Pro matici

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 27 \end{pmatrix}$$

nad  $\mathbb{R}$  platí (ve značení Tvzení 12.3.4) rovnosti

$$\det(\mathbf{G}_1) = 1, \quad \det(\mathbf{G}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 4, \quad \det(\mathbf{G}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 27 \end{vmatrix} = 36$$

Matice  $\mathbf{G}$  je tedy podle Tvzení 12.3.4 pozitivně definitní. Nalezneme Choleskyho faktorizaci  $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$  matice  $\mathbf{G}$ .

Podle důkazu Tvzení 12.3.4 má hledaná matice  $\mathbf{R}$  tvar

$$\mathbf{R} = \left( \begin{array}{c|cc} \sqrt{1} & \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot 2 & \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot 3 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{P}_1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{P}_1 \end{array} \right)$$

kde pro matici  $\mathbf{P}_1$  platí rovnosti

$$\mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 27 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 3) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Matice  $\mathbf{P}_1$  nalezneme opět metodou z důkazu Tvzení 12.3.4:

$$\mathbf{P}_1 = \left( \begin{array}{c|c} \sqrt{4} & \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot 6 \\ 0 & \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{P}_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ 0 & \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{P}_2 \end{array} \right)$$

kde pro matici  $\mathbf{P}_2$  platí rovnosti

$$\mathbf{P}_2^T \cdot \mathbf{P}_2 = 18 - \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 6 = 9$$

To znamená, že

$$\mathbf{P}_2 = (\sqrt{9}) = (3), \quad \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Choleskyho faktorizace matice  $\mathbf{G}$  je

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**12.3.7 Příklad (Positivně definitní matice vytvářejí skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ )** Ať  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je pozitivně definitní matice. Ukážeme z definice, že funkce

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$$

je skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ .

- (1) Linearita ve druhé souřadnici.

To plyne triviálně z vlastností maticového násobení: pro pevné  $\mathbf{x}$  je zobrazení  $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$  lineární.

- (2) Symetrie.

Využijeme toho, že matice  $\mathbf{G}$  musí být symetrická (je totiž pozitivně definitní). Potom platí rovnosti

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} \rangle_n = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle_n$$

kde jsme jako  $\langle - | - \rangle_n$  označili standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ . Protože standardní skalární součin symetrický je, platí rovnosti

$$\langle \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle_n = \langle \mathbf{y} | \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \rangle_n = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$$

To ale celkově znamená rovnost

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$$

kterou jsme chtěli dokázat.

- (3) Positivní definitnost skalárního součinu je přesně podmínka (2) Tvzení 12.3.4.

**12.3.8 Tvzení (Obecný tvar skalárního součinu v  $\mathbb{R}^n$ )** Libovolný skalární součin  $\langle - | - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^n$  je nutně zadán předpisem

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$$

kde  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je pozitivně definitní matice.

DŮKAZ. Předpokládejme, že je zadán  $\langle - | - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Definujme  $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle$  a výslednou matici označme  $\mathbf{G}$ . Potom pro  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{e}_i$  a  $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n b_j \cdot \mathbf{e}_j$  platí

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot b_j \cdot \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot b_j \cdot g_{ij} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$$

Matice  $\mathbf{G}$  je evidentně symetrická, protože z vlastnosti skalárního součinu platí  $\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_j | \mathbf{e}_i \rangle$  pro každé  $i$  a  $j$ .

Zbývá ukázat, že  $\mathbf{G}$  je pozitivně definitní matice. Pro každý vektor  $\mathbf{x}$  platí  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle$ . Protože  $\langle - | - \rangle$  je skalární součin, je matice  $\mathbf{G}$  pozitivně definitní podle podmínky (2) z Tvzení 12.3.4. ■



**12.3.9 Definice (Metrický tensor)** Positivně definitní matici  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  z Tvzení 12.3.8 říkáme *metrický tensor*<sup>2</sup> skalárního součinu  $\langle - | - \rangle$  v  $\mathbb{R}^n$ .

**12.3.10 Příklad (K čemu jsou netradiční skalární součiny?)** Matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

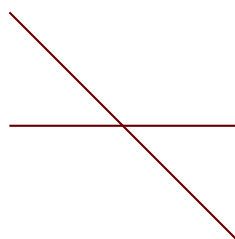
je evidentně positivně definitní (použijte třeba podmínku (4) Tvzení 12.3.4) a je tudíž metrickým tensorem skalárního součinu  $\langle - | - \rangle$  v  $\mathbb{R}^2$ . Vzhledem k tomuto skalárnímu součinu jsou vektory

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

na sebe navzájem kolmé, protože platí

$$\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2 \rangle = \mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_2 = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Proto se v prostoru  $\mathbb{R}^2$ , vybaveném skalárním součinem s metrickým tensorem  $\mathbf{G}$ , můžeme dívat na bázi  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  jako na *pravoúhlý systém souřadnic* v  $\mathbb{R}^2$ .



K tomuto skalárnímu součinu se vrátíme v Příkladech 12.4.7 a 12.4.20.

**12.3.11 Poznámka (Metrický tensor obecného skalárního součinu)** Díky symetrii a linearitě ve druhé souřadnici zadává skalární součin  $\langle - | - \rangle$  na prostoru  $L$  *lineární* zobrazení

$$\mathbf{g} : L \rightarrow L^*, \quad \vec{v} \mapsto \langle \vec{v} | - \rangle$$

Předpokládáme-li, že  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je uspořádaná báze prostoru  $L$  a že  $B^* = (\vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_n^*)$  je příslušná uspořádaná duální báze prostoru  $L^*$ , potom matice  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineárního zobrazení  $\mathbf{g} : L \rightarrow L^*$  vzhledem k bázím  $B$  a  $B^*$  splňuje

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{G}} & \mathbb{R}^n \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_{B^*} \\ L & \xrightarrow{\mathbf{g}} & L^* \end{array}$$

Označme  $j_0$ -tý sloupec matice  $\mathbf{G}$  jako

$$\begin{pmatrix} g_{1j_0} \\ g_{2j_0} \\ \vdots \\ g_{nj_0} \end{pmatrix}$$

Tento sloupec tvoří souřadnice lineární formy  $\langle \vec{b}_{j_0} | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$  vzhledem k bázi  $B^*$ . To znamená, že musí platit rovnost

$$\langle \vec{b}_{j_0} | - \rangle = \sum_{i=1}^n g_{ij_0} \cdot \vec{b}_i^*$$

<sup>2</sup>Také: *Gramova matice*, viz podkapitolu B.1.

Pro pevné  $i_0$  tedy (podle definice duální báze) platí

$$\langle \vec{b}_{j_0} | \vec{b}_{i_0} \rangle = \left( \langle \vec{b}_{j_0} | - \rangle \right) (\vec{b}_{i_0}) = \left( \sum_{i=1}^n g_{ij_0} \cdot \vec{b}_i^* \right) (\vec{b}_{i_0}) = \sum_{i=1}^n g_{ij_0} \cdot \vec{b}_i^* (\vec{b}_{i_0}) = g_{i_0 j_0}$$

**12.3.12 Definice** Ať  $L$  je lineární prostor se skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$  a uspořádanou bází  $B$ . Matici  $\mathbf{G}$  lineárního zobrazení  $\mathbf{g} : L \rightarrow L^*$ ,  $\mathbf{g}(\vec{v}) = \langle - | \vec{v} \rangle$ , vzhledem k bázím  $B$  a  $B^*$  říkáme *metrický tensor* (také: *Gramova matice*) skalárního součinu  $\langle - | - \rangle$  (vzhledem k bázi  $B$ ).

**12.3.13 Tvzení** Ať  $L$  je lineární prostor konečné dimenze. Potom platí:

- (1) Metrický tensor libovolného skalárního součinu na  $L$  je pozitivně definitní matice.
- (2) Každý skalární součin  $\langle - | - \rangle$  na  $L$  je nutně zadán předpisem

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = (\mathbf{coord}_B(\vec{v}))^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{w})$$

kde  $B$  je nějaká uspořádaná báze prostoru  $L$  a  $\mathbf{G}$  je metrický tensor skalárního součinu  $\langle - | - \rangle$ .

DŮKAZ. Označme dimenzi prostoru  $L$  jako  $n$  a vyberme nějakou uspořádanou bázi  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  prostoru  $L$ .

(1) Metrický tensor skalárního součinu  $\langle - | - \rangle$  vzhledem k uspořádané bázi  $B$  je podle Definice 12.3.12 matice  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , která má položky  $g_{ij} = \langle \vec{b}_j | \vec{b}_i \rangle$ . Matice  $\mathbf{G}$  je evidentně symetrická. Z definice  $\mathbf{G}$  dále plyne rovnost

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle$$

kde  $\vec{x}$  je ten jediný vektor v  $L$ , pro který platí  $\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{x}$ . Protože  $\langle - | - \rangle$  je skalární součin, platí pro matici  $\mathbf{G}$  podmínka (2) Tvzení 12.3.4. Proto je matice  $\mathbf{G}$  pozitivně definitní.

(2) Rovnost  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = (\mathbf{coord}_B(\vec{v}))^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{w})$  je definice metrického tensoru  $\mathbf{G}$ . ■



**12.3.14 Poznámka** Platí-li axiom výběru (viz 3.6.1), pak na každém lineárním prostoru  $L$  nad  $\mathbb{R}$  lze zadat nějaký skalární součin.

- (1) Nejprve ukážeme, že na každém lineárním prostoru  $I$ -souřadnic  $\mathbb{R}^{(I)}$  lze zadat skalární součin.

Definujeme

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \sum_{i \in I} \mathbf{u}(i) \cdot \mathbf{v}(i)$$

(protože  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou  $I$ -souřadnice, sčítáme přes konečnou množinu). Axiomy pro skalární součin lze ověřit stejným způsobem jako pro standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ .

- (2) Předpokládejme, že  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je isomorfismus lineárních prostorů. Předpokládejme, že  $\langle - | - \rangle_2$  je skalární součin na prostoru  $L_2$ . Potom na prostoru  $L_1$  zadává předpis

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle_1 = \langle \mathbf{f}(\vec{u}) | \mathbf{f}(\vec{v}) \rangle_2$$

skalární součin. To je triviální.

- (3) Ať  $L$  je libovolný lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ . Předpokládejme, že platí axiom výběru.

Podle Věty 3.6.3 má lineární prostor  $L$  nějakou bázi  $B$  a podle Důsledku 3.6.6 tedy platí, že  $\mathbf{coord}_B : L \rightarrow \mathbb{R}^{(B)}$  je isomorfismus. Protože na  $\mathbb{R}^{(B)}$  lze definovat skalární součin, vytváří podle předchozího zobrazení  $\mathbf{coord}_B$  skalární součin na prostoru  $L$ .

Studium skalárních součinů na prostorech nekonečné dimenze se intenzivně zabývá *funkcionální analýza*. Doporučujeme knihy

Edwin Hewitt a Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 3. vydání, 1975.

☞ Kôzaku Yosida, *Functional analysis*, Springer-Verlag, 6. vydání, 1980.

nebo podkapitolu 13.3.

**12.3.15 Poznámka** V aplikacích jsou důležité i „skalární součiny“ na lineárních prostorech, které *nejdou* pozitivně definitní, tedy takové funkce  $\langle - | - \rangle$ , pro které nerovnost  $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$  obecně neplatí. Jedním takovým příkladem je Lorentzova metrika prostoročasu Hermanna Minkowského. Lorentzova metrika prostoročasu má metrický tensor

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kteřý očividně není pozitivně definitní. „Skalární součin“ dvou vektorů v Minkowského prostoročasu se tedy počítá takto

$$\left\langle \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = (t \ x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -tt' + xx' + yy' + zz'$$

Lineární prostory s Lorentzovou metrikou jsou velmi důležité ve speciální teorii relativity. Více v Dodatku P.

## 12.4 Ortogonální projekce, ortogonální rejekce a ortogonalisace

**12.4.1 Definice (Ortogonální projekce a ortogonální rejekce)** Ať  $W$  je podprostor lineárního prostoru  $L$  se skalárním součinem. Ať  $\vec{v}$  je libovolný vektor v prostoru  $L$ . Vektoru

$$\text{proj}_W(\vec{v})$$

s následujícími dvěma vlastnostmi

- (1) Vektor  $\text{proj}_W(\vec{v})$  leží v podprostoru  $W$ .
- (2) Vektor  $\vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})$  je kolmý na každý vektor podprostoru  $W$ .

říkáme *ortogonální projekce* vektoru  $\vec{v}$  na podprostor  $W$ . Vektoru  $\vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})$  říkáme *ortogonální rejekce* vektoru  $\vec{v}$  podprostorem  $W$  a značíme jej  $\text{rej}_W(\vec{v})$ .

**12.4.2 Poznámka** Několik důležitých poznámek:

- (1) Podmínky (1) a (2) z Definice 12.4.1 určují vektory  $\text{proj}_W(\vec{v})$  a  $\text{rej}_W(\vec{v})$  jednoznačně. Předpokládejme totiž, že je dán pevně vektor  $\vec{v}$  a že existují vektory  $\vec{v}_1$  a  $\vec{v}_2$ , které oba splňují podmínky (1) a (2). Ukážeme, že  $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|^2 = 0$ . Z toho plyne rovnost  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ . Nejprve si uvědomme, že z podmínek (1) a (2) plynou rovnosti

$$\langle \vec{v} - \vec{v}_i | \vec{v}_j \rangle = \langle \vec{v} | \vec{v}_j \rangle - \langle \vec{v}_i | \vec{v}_j \rangle = 0$$

pro všechna  $i, j$  z množiny  $\{1, 2\}$ . Takže

$$\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2 | \vec{v}_2 \rangle$$

Potom platí

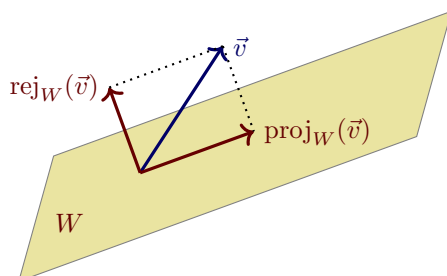
$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|^2 &= \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 - 2 \cdot \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle \\ &= \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_1 \rangle + \langle \vec{v}_2 | \vec{v}_2 \rangle - 2 \cdot \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

a to jsme chtěli dokázat.

- (2) Ortogonální projekce na podprostor a ortogonální rejekce podprostorem určují *ortogonální rozklad* vektoru. Přesněji: pro každý vektor  $\vec{v}$  platí rovnost

$$\vec{v} = \text{proj}_W(\vec{v}) + (\vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})) = \text{proj}_W(\vec{v}) + \text{rej}_W(\vec{v})$$

a protože  $\text{proj}_W(\vec{v})$  leží v podprostoru  $W$ , jsou vektory  $\text{proj}_W(\vec{v})$  a  $\text{rej}_W(\vec{v})$  na sebe navzájem kolmé.



- (3) Pro ověření podmínky (2) z Definice 12.4.1 stačí ověřit, že vektor  $\text{rej}_W(\vec{v}) = \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})$  je kolmý na každý vektor báze  $B$  podprostoru  $W$ .

To plyne ihned z vlastnosti skalárního součinu: každý vektor  $\vec{w}$  z podprostoru  $W$  lze napsat jako lineární kombinaci

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \vec{b}_i$$

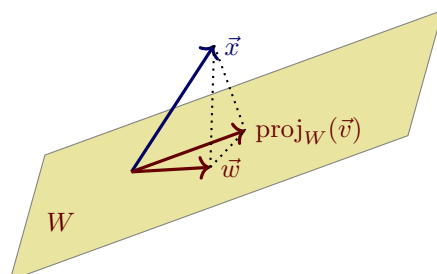
kde  $\vec{b}_i$  jsou prvky báze  $B$ . Potom platí

$$\begin{aligned} \langle \text{rej}_W(\vec{v}) \mid \vec{w} \rangle &= \langle \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v}) \mid \vec{w} \rangle = \\ &= \langle \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v}) \mid \sum_{i=1}^k a_i \cdot \vec{b}_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \cdot \langle \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v}) \mid \vec{b}_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \cdot 0 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (4) Ortogonální rejekce je „nejkratší ze všech rejekcí“. Přesněji: pro jakýkoli vektor  $\vec{v}$  a jakýkoli vektor  $\vec{w}$  z  $W$  platí nerovnost

$$\|\text{rej}_W(\vec{v})\|^2 \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|^2$$

To plyne okamžitě z Pythagorovy věty: vzniká pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami  $\text{proj}_W(\vec{v}) - \vec{w}$  a  $\text{rej}_W(\vec{v})$ , a s přeponou  $\vec{v} - \vec{w}$ .



Díky Pythagorově větě (Lemma 12.2.10) tedy platí nerovnost

$$\|\text{rej}_W(\vec{v})\|^2 \leq \|\text{rej}_W(\vec{v})\|^2 + \underbrace{\|\text{proj}_W(\vec{v}) - \vec{w}\|^2}_{\geq 0} = \|\vec{v} - \vec{w}\|^2$$

pro jakýkoli vektor  $\vec{w}$  z lineárního podprostoru  $W$ . Tuto nerovnost budeme podstatným způsobem využívat v Dodatku C při vysvětlení *metody nejmenších čtverců*.

Zatím jsme neukázali, že ortogonální projekce a ortogonální rejeckce pro každý vektor existují. Uvidíme, že je tomu tak a že zobrazení  $\vec{v} \mapsto \text{proj}_W(\vec{v})$  a  $\vec{v} \mapsto \text{rej}_W(\vec{v})$  jsou dokonce lineární.

Nejprve ukážeme, jak lze počítat ortogonální projekce na libovolný lineární podprostor prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Využijeme k tomu jednoduché úvahy o násobení matic. Připomeňme, že podle Tvzení 12.3.8 lze *každý* skalární součin v  $\mathbb{R}^n$  zapsat pomocí metrického tensoru  $\mathbf{G}$  následovně:

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{w}$$

Ortogonální projekce a ortogonální rejeckce pro každý vektor existují i pro obecný lineární prostor  $L$  nad  $\mathbb{R}$  se skalárním součinem — jak je spočíst se dozvíme v Důsledku 12.4.15.

**12.4.3 Tvzení (Maticový zápis ortogonální projekce v  $\mathbb{R}^n$  s obecným skalárním součinem)** *At  $W$  je podprostor dimenze  $k > 0$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  se skalárním součinem, a at podprostor  $W$  je zadán jako  $\text{im}(\mathbf{A})$ , kde sloupce matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  tvoří jakoukoli bázi  $W$ . Dále předpokládejme, že skalární součin je zadán metrickým tensorem  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Potom pro každý vektor  $\mathbf{v}$  v prostoru  $\mathbb{R}^n$  platí*

$$\text{proj}_W(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} \quad (12.5)$$

*Speciálně: pokud je skalární součin v  $\mathbb{R}^n$  standardní, počítá se ortogonální projekce vektoru  $\mathbf{v}$  na podprostor tvaru  $\text{im}(\mathbf{A})$  vzorcem*

$$\text{proj}_W(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{v} \quad (12.6)$$

**DŮKAZ.** Nejprve ukážeme, že matice  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}$  ve vzorci (12.5) opravdu má inverzi.

Protože metrický tensor  $\mathbf{G}$  je pozitivně definitní matice, lze podle Definice 12.3.1 psát  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$  pro nějakou matici  $\mathbf{R} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^t$  s lineárně nezávislými sloupci. To ale znamená, že zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{R} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^t$  jsou monomorfismy (viz Tvzení 4.1.10). Potom složené zobrazení  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^t$  je opět monomorfismus. Takže matice  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^t$  má také lineárně nezávislé sloupce (opět použijeme Tvzení 4.1.10).

Protože platí rovnosti

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{A})^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}$$

je matice  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}$  pozitivně definitní. A každá pozitivně definitní matice inverzi má podle Tvzení 12.3.4.

Zvolme pevný vektor  $\mathbf{v}$  v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Ukážeme, že vektor

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}$$

splňuje obě podmínky z Definice 12.4.1. Protože ortogonální projekce je těmito podmínkami určena jednoznačně, dokážeme tím rovnost (12.5).

- (1) Vektor  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}$  leží v  $\text{im}(\mathbf{A})$ . Je totiž tvaru  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  pro  $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}$ .
- (2) Obecný vektor z podprostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$  má tvar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  pro nějaké  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^k$ . Abychom dokázali druhou podmínku z Definice 12.4.1, musíme tedy ukázat, že pro každé  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^k$  platí rovnost

$$\langle \mathbf{v} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} | \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \rangle = 0$$

Podle vlastností skalárního součinu stačí pro každé  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^k$  ukázat rovnost

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} | \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \rangle$$

Označme jako  $\langle - | - \rangle_n$  a  $\langle - | - \rangle_k$  standardní skalární součiny v  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^k$ . Potom pro každé  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^k$  a každé  $\mathbf{y}$  v  $\mathbb{R}^n$  platí rovnost

$$\langle \mathbf{y} | \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \rangle_n = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle_k$$

a tuto rovnost nyní využijeme.

Platí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} | \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} | \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \rangle_n \\ &= \langle \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle_k \\ &= \langle \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle_k \\ &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \rangle_n \\ &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

kde předposlední rovnost platí díky rovnosti  $\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$ .

Musíme ještě dokázat, že vzorec (12.5) je nezávislý na volbě báze podprostoru  $W$ , a tím i na volbě matice  $\mathbf{A}$ , pro kterou platí  $\text{im}(\mathbf{A}) = W$ . Předpokládejme tedy, že matice  $\mathbf{B}$  má lineárně nezávislé sloupce a že platí  $\text{im}(\mathbf{B}) = W$ . Potom existuje regulární matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  taková, že  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}$ . Protože matice  $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{B}$  je regulární (použijte předchozí část důkazu na matici  $\mathbf{B}$  místo matice  $\mathbf{A}$ ) a protože matice  $\mathbf{M}$  je regulární podle předpokladu, platí rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \cdot (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{G} \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot (\mathbf{M}^T)^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{G} \\ &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{G} \end{aligned}$$

a to jsme chtěli dokázat.

Vzorec (12.6) je opravdu speciálním případem obecného vzorce (12.5). Metrický tensor standardního skalárního součinu v  $\mathbb{R}^n$  je totiž jednotková matice  $\mathbf{E}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . ■



**12.4.4 Poznámka** Tvrzení 12.4.3 má jednoduchý důsledek: ortogonální projekce na lineární podprostor  $W$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  je *lineární* zobrazení. Vzorec (12.5) říká, že matici tohoto zobrazení vzhledem ke standardním bázím lze zapsat jako součin

$$\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \quad (12.7)$$

kde sloupce matice  $\mathbf{A}$  tvoří (jakoukoli) bázi podprostoru  $W$ .

V případě standardního skalárního součinu v  $\mathbb{R}^n$  je metrický tensor roven jednotkové matici a matice ortogonální projekce má jednodušší tvar

$$\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \quad (12.8)$$

kde sloupce matice  $\mathbf{A}$  tvoří (jakoukoli) bázi podprostoru  $W$ .

Matice ortogonálních projekcí využijeme při vysvětlování *metody nejmenších čtverců* v Dodatku C.

**12.4.5 Příklad** V prostoru  $\mathbb{R}^3$  se standardním skalárním součinem spočítáme matice ortogonálních projekcí na jednotlivé roviny určené standardními souřadnicovými osami v  $\mathbb{R}^3$ . Připomeňme, že standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^3$  má metrický tensor

$$\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rovnici (12.7) pro matici ortogonální projekce tedy můžeme zjednodušit na

$$\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$$

kde sloupce matice  $\mathbf{A}$  tvoří (jakákoli) báze prostoru  $W$ .

(1) Ortogonální projekce na rovinu  $x, y$ .

V tomto případě je  $W = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . Protože platí  $W = \text{im}(\mathbf{A})$ , kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{P}_{\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Ortogonální projekce na rovinu  $y, z$ .

V tomto případě je  $W = \text{span}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Protože platí  $W = \text{im}(\mathbf{A})$ , kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je

$$P_{\text{span}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Ortogonální projekce na rovinu  $x, z$ .

V tomto případě je  $W = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ . Protože platí  $W = \text{im}(\mathbf{A})$ , kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je

$$P_{\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**12.4.6 Příklad** V prostoru  $\mathbb{R}^3$  se standardním skalárním součinem spočítáme ortogonální projekci na přímku procházející počátkem a bodem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Každá přímka v  $\mathbb{R}^3$  procházející počátkem je lineární podprostor  $\mathbb{R}^3$  dimenze 1. Takže i naše přímka je lineární podprostor  $W$  tvaru  $\text{im}(\mathbf{A})$ , kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a rovnice (12.7) má tvar

$$P_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

protože metrický tensor standardního skalárního součinu je jednotková matice.

**12.4.7 Příklad (K čemu jsou ortogonální projekce pro exotické skalární součiny?)** Připomeňme, že pro skalární součin v  $\mathbb{R}^2$  s metrickým tensorem

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou na sebe vektory

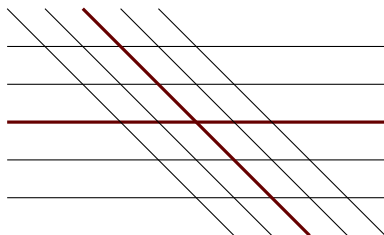
$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

navzájem kolmé, viz Příklad 12.3.10.

Protože se na bázi  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  můžeme dívat jako na pravoúhlý systém souřadnic v  $\mathbb{R}^2$ , očekáváme, že ortogonální projekce vektoru  $\mathbf{b}_2$  na lineární podprostor  $W = \text{span}(\mathbf{b}_1)$  je vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

protože promítáme ve směru jedné pravoúhlé osy na druhou. Podívejme se na „pravoúhlou mřížku“ v  $\mathbb{R}^2$  pro náš skalární součin:



Dokážeme, že naše očekávání je správné. Nejdříve spočteme matici  $\mathbf{P}_W$  ortogonální projekce na  $W$  podle vzorce (12.7):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_W &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left( (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

kde matice  $\mathbf{A}$  má jediný sloupec  $\mathbf{b}_1$  (vektor  $\mathbf{b}_1$  tvoří bázi prostoru  $W = \text{span}(\mathbf{b}_1)$ ).

Protože platí

$$\mathbf{P}_W \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je ortogonální projekce vektoru  $\mathbf{b}_2$  na  $\text{span}(\mathbf{b}_1)$  skutečně počátek souřadnic.

Spočteme nyní ortogonální projekci na  $W$  pro libovolný vektor  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^2$ . Protože  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  tvoří bázi prostoru  $\mathbb{R}^2$ , existují jednoznačně určená reálná čísla  $x_1, x_2$  tak, že platí

$$\mathbf{x} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Očekáváme, že ortogonální projekce vektoru  $\mathbf{x}$  na  $\text{span}(\mathbf{b}_1)$  je vektor

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To je pravda:

$$\mathbf{P}_W \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left( x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že ortogonální projekce pro nestandardní skalární součiny nám umožňují počítat „projekce v daném směru“. K úvaze tohoto typu se ještě vrátíme v plné obecnosti v Tvzení 12.4.19.

Předchozí výpočty nám dovolují charakterisovat matice ortogonálních projekcí v prostoru  $\mathbb{R}^n$  s obecným skalárním součinem zcela *abstraktně*.

**12.4.8 Tvzení (Charakterisace ortogonálních projekcí v  $\mathbb{R}^n$  s obecným skalárním součinem)** *At' prostor  $\mathbb{R}^n$  je vybaven skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$  s metrickým tensorem  $\mathbf{G}$ . Pro matici  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) *V  $\mathbb{R}^n$  existuje lineární podprostor  $W$  dimenze  $k > 0$  takový, že  $\mathbf{P}$  je matice ortogonální projekce na podprostor  $W$ .*
- (2) *Matice má hodnotu  $k > 0$  a splňuje rovnosti  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  a  $\langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{y} \rangle$  pro všechny vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z prostoru  $\mathbb{R}^n$ .*



(3) Matice má hodnotu  $k > 0$  a splňuje rovnosti  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  a  $\mathbf{P}^T = \mathbf{G} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^{-1}$ .

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Matice ortogonální projekce na lineární podprostor  $W$  dimenze  $k$  má podle (12.7) tvar

$$\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}$$

kde  $\mathbf{G}$  je metrický tensor skalárního součinu  $\langle - | - \rangle$  a kde sloupce matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  tvoří nějakou bázi lineárního podprostoru  $W$ .

Protože  $\text{im}(\mathbf{P}_W) = W$ , platí  $\text{rank}(\mathbf{P}_W) = \dim(\text{im}(\mathbf{P}_W)) = \dim(W) = k$ .

Rovnost  $\mathbf{P}_W^2 = \mathbf{P}_W$  plyne okamžitě z rovností

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_W \cdot \mathbf{P}_W &= \left( \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \right) \cdot \left( \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \right) \\ &= \mathbf{A} \cdot \left( (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \right) \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \\ &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \\ &= \mathbf{P}_W \end{aligned}$$

Zbývá ukázat rovnost  $\langle \mathbf{P}_W \cdot \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{P}_W \cdot \mathbf{y} \rangle$  pro všechny vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

V následujících rovnostech využíváme fakt, že matice  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1}$  je symetrická, protože matice  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}$  je zjevně symetrická, a že metrický tensor  $\mathbf{G}$  je symetrická matice:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_W \cdot \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{P}_W^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \left( (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \right)^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \left( \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \right) \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{P}_W \cdot \mathbf{y} \\ &= \langle \mathbf{y} | \mathbf{P}_W \cdot \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Podmínky (2) a (3) jsou ekvivalentní. Stačí ukázat, že z rovností  $\langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{y} \rangle$  pro všechny vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z prostoru  $\mathbb{R}^n$  plyne rovnost  $\mathbf{P}^T = \mathbf{G} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^{-1}$ .

Volbou  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$  a  $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$  ale dostaneme rovnosti

$$\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j$$

pro všechna  $i, j$ , neboli  $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{G} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{P}$ . Proto  $\mathbf{P}^T = \mathbf{G} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^{-1}$ .

Ze (2) plyne (1). Definujme lineární podprostor  $W$  jako  $\text{im}(\mathbf{P})$ . Protože hodnota  $\mathbf{P}$  je  $k$ , má lineární podprostor  $W$  dimenzi  $k$ . Podle Definice 12.4.1 stačí ukázat, že každý vektor tvaru  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}$  leží ve  $W$  a že libovolné dva vektory tvaru  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{w}$  a  $\mathbf{v} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}$  jsou na sebe navzájem kolmé.

První podmínka je triviální, protože  $W = \text{im}(\mathbf{P})$ . Pro druhou podmínku stačí použít rovnosti

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

kde druhá rovnost platí, protože platí  $\langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} \rangle$  a třetí rovnost platí, protože platí  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ . ■



#### 12.4.9 Důsledek (Charakterisace ortogonálních projekcí v $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem)

Ať je prostor  $\mathbb{R}^n$  vybaven standardním skalárním součinem. Potom jsou pro matici  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Matice  $\mathbf{P}$  je matice ortogonální projekce na lineární podprostor  $W$  dimenze  $k > 0$ .  
 (2) Matice  $\mathbf{P}$  je symetrická, má hodnotu  $k > 0$ , a platí  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ .

DŮKAZ. Standardní skalární součin  $\langle - | - \rangle$  v  $\mathbb{R}^n$  má metrický tensor  $\mathbf{E}_n$ , tedy platí  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ . Stačí použít Tvzení 12.4.8: rovnost  $\mathbf{P}^T = \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_n^{-1}$  platí právě tehdy, když  $\mathbf{P}$  je symetrická matice. ■

**12.4.10 Příklad** Ukážeme, že matice

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je matice ortogonální projekce v prostoru  $\mathbb{R}^3$  se standardním skalárním součinem. Nalezneme také lineární podprostor  $W$ , na který matice  $\mathbf{P}$  projekci počítá.

Matice  $\mathbf{P}$  je evidentně symetrická a výpočet

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ukazuje, že platí  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ . Podle Důsledku 12.4.9 je matice  $\mathbf{P}$  ortogonální projekce na lineární podprostor tvaru  $\text{im}(\mathbf{P})$ .

Zbývá zjistit, jak podprostor  $\text{im}(\mathbf{P})$  vypadá. K tomu použijeme GEM na matici  $3\mathbf{P}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ 2R_2 - R_1 \\ 2R_3 - R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_2 \end{matrix}$$

To znamená, že  $\dim(\text{im}(\mathbf{P})) = \text{rank}(\mathbf{P}) = \text{rank}(3\mathbf{P}) = 2$  a matice  $\mathbf{P}$  je tedy podle Důsledku 12.4.9 ortogonální projekce na podprostor dimenze 2, tj. na rovinu. Protože matice  $\mathbf{P}$  je symetrická, tvoří vektory

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

bázi roviny  $\text{im}(\mathbf{P})$ . Chceme-li najít „klasický“ popis této roviny, stačí najít homogenní soustavu lineárních rovnic takovou, aby vektory  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{w}$  tvořily její fundamentální systém. Takovou soustavou je například rovnice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{neboli} \quad -x + y + z = 0$$

Stačí postupovat podle Tvzení 6.4.8 a najít fundamentální systém homogenní soustavy

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Ve zbytku této pokapitoly zformulujeme několik výsledků opět pro obecné lineární prostory s konečnou dimensí. Nejprve ukážeme, že ortogonální projekci na lineární podprostor  $W$  lze počítat snadno, pokud známe *ortogonální bázi* tohoto podprostoru.

**12.4.11 Definice (Ortogonální báze)** Uspořádanou bázi  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  lineárního prostoru se skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$  nazveme *ortogonální*, pokud platí  $\langle \vec{b}_i | \vec{b}_j \rangle = 0$  pro všechna  $i \neq j$ .

**12.4.12 Tvzení (Výpočet ortogonální projekce na podprostor s ortogonální bází)** Ať  $W$  je podprostor lineárního prostoru  $L$  se skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$  a ať  $W$  má dimenzi  $k > 0$ . Pro každý vektor  $\vec{v}$  platí:

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i$$

kde  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$  je jakákoli ortogonální báze podprostoru  $W$ .

DŮKAZ. Protože vektor

$$\sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i$$

je lineární kombinací vektorů  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ , je první požadavek z Definice 12.4.1 splněn. Dále musíme ukázat, že pro každé  $i_0$  z množiny  $\{1, 2, \dots, k\}$  platí rovnost

$$\langle \vec{v} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i | \vec{u}_{i_0} \rangle = 0$$

K tomu využijeme vlastností skalárního součinu:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i | \vec{u}_{i_0} \rangle &= \langle \vec{v} | \vec{u}_{i_0} \rangle - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \langle \vec{u}_i | \vec{u}_{i_0} \rangle \\ &= \langle \vec{v} | \vec{u}_{i_0} \rangle - \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{v} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

kde v předposlední rovnosti jsme využili toho, že  $\langle \vec{u}_i | \vec{u}_{i_0} \rangle = 0$  pro  $i \neq i_0$  (protože báze  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$  je ortogonální).

Zbývá dokázat nezávislost vektoru  $\text{proj}_W(\vec{v})$  na volbě ortogonální báze  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$  prostoru  $W$ . Předpokládejme tedy, že  $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$  je další ortogonální báze prostoru  $W$ . Máme, pro libovolný vektor  $\vec{v}$ , ukázat rovnost

$$\sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{w}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{w}_i | \vec{w}_i \rangle} \cdot \vec{w}_i$$

K tomu stačí ukázat, že platí rovnost

$$\langle \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{w}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{w}_i | \vec{w}_i \rangle} \cdot \vec{w}_i | \vec{u}_{i_0} \rangle = 0$$

pro každé  $i_0$ :

$$\begin{aligned} \langle \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{w}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{w}_i | \vec{w}_i \rangle} \cdot \vec{w}_i | \vec{u}_{i_0} \rangle &= \langle \left( \vec{v} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i \right) - \left( \vec{v} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{w}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{w}_i | \vec{w}_i \rangle} \cdot \vec{w}_i \right) | \vec{u}_{i_0} \rangle \\ &= \langle \vec{v} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i | \vec{u}_{i_0} \rangle - \langle \vec{v} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{w}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{w}_i | \vec{w}_i \rangle} \cdot \vec{w}_i | \vec{u}_{i_0} \rangle \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

**12.4.13 Poznámka** *Libovolná báze  $(\vec{u})$  podprostoru  $W$  dimenze 1 je vždy ortogonální. To znamená, že pro  $W = \text{span}(\vec{u})$  platí*

$$\text{proj}_{\text{span}(\vec{u})}(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle} \cdot \vec{u}$$

Často píšeme  $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$  namísto  $\text{proj}_{\text{span}(\vec{u})}(\vec{v})$ .

Následující výsledek umožňuje ze zadané konečné báze  $B$  lineárního prostoru vytvořit *ortogonální* bázi. Tento proces ortogonalisace báze  $B$  je tvořen postupnými ortogonálními rejeckami jednotlivých souřadnicových os báze  $B$ .

**12.4.14 Věta (Ortogonalisace: Gram-Schmidt)** *Ať  $L$  je lineární prostor a  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je jeho báze. Potom existuje ortogonální báze  $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$  prostoru  $L$  tak, že pro každé  $k = 1, \dots, n$  platí rovnost  $\text{span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k) = \text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)$ .*

DŮKAZ. Definujeme

$$\vec{c}_1 := \vec{b}_1 \quad \text{a} \quad \vec{c}_{k+1} := \text{rej}_{\text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)}(\vec{b}_{k+1}) \quad \text{pro } k = 1, \dots, n-1$$

Ukážeme, že pro každé  $k = 1, \dots, n$  platí  $\text{span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k) = \text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)$  a že množina  $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$  je množina ortogonálních vektorů.

- (1) Pro  $k = 1$  je  $\text{span}(\vec{b}_1) = \text{span}(\vec{c}_1)$  a podmínka pro ortogonalitu množiny vektorů  $\{\vec{c}_1\}$  je prázdná.
- (2) Předpokládejme, že jsme pro pevné  $1 < k < n$  již dokázali, že  $\text{span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k) = \text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)$  a že množina  $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$  je množina ortogonálních vektorů.

Protože  $\vec{c}_{k+1} = \text{rej}_{\text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)}(\vec{b}_{k+1}) = \vec{b}_{k+1} - \text{proj}_{\text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)}(\vec{b}_{k+1})$ , je vektor  $\vec{c}_{k+1}$  lineární kombinací vektorů  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k$ ,  $\vec{b}_{k+1}$  a vektor  $\vec{b}_{k+1}$  je lineární kombinací vektorů  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k, \vec{c}_{k+1}$ . Proto platí

$$\text{span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k, \vec{b}_{k+1}) = \text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k, \vec{b}_{k+1}) = \text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k, \vec{c}_{k+1})$$

Nyní ukážeme, že množina  $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k, \vec{c}_{k+1}\}$  je množina ortogonálních vektorů. Spočítáme skalární součin vektoru  $\vec{c}_{k+1}$  s libovolným vektorem  $\vec{c}_j$ , kde  $1 \leq j \leq k$ :

$$\langle \vec{c}_{k+1} | \vec{c}_j \rangle = \langle \text{rej}_{\text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)}(\vec{b}_{k+1}) | \vec{c}_j \rangle = 0$$

kde poslední rovnost plyne z druhé části Poznámky 12.4.2. ■

**12.4.15 Důsledek** *At  $W$  je jakýkoli lineární podprostor lineárního prostoru  $L$  konečné dimenze se skalárním součinem. Pak lze definovat zobrazení  $\vec{v} \mapsto \text{proj}_W(\vec{v})$  a  $\vec{v} \mapsto \text{rej}_W(\vec{v})$  a tato zobrazení jsou lineární zobrazení z  $L$  do  $L$ .*

DŮKAZ. Ať  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$  je jakákoli uspořádaná báze podprostoru  $W$ . Pomocí Věty 12.4.14 lze nalézt uspořádanou ortogonální bázi  $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)$  prostoru  $W$ . Potom podle Tvzení 12.4.12 dává vzorec

$$\sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{c}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{c}_i | \vec{c}_i \rangle} \cdot \vec{c}_i$$

hodnotu ortogonální projekce  $\text{proj}_W(\vec{v})$  vektoru  $\vec{v}$  na podprostor  $W$ . Podle téhož vzorce je evidentní, že zobrazení  $\vec{v} \mapsto \text{proj}_W(\vec{v})$  je lineární. Protože  $\text{rej}_W(\vec{v}) = \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})$ , lze definovat zobrazení  $\vec{v} \mapsto \text{rej}_W(\vec{v})$ , které je (opět evidentně) lineární. ■

#### 12.4.16 Příklad Vektory

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé v  $\mathbb{R}^4$ . Příslušnou bázi  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  podprostoru  $W$  dimenze 3 označíme  $B$ .

Báze  $B$  není ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v  $\mathbb{R}^4$ . Bázi  $B$  nyní ortogonalisujeme. Výsledné vektory v nové (ortogonální) bázi označíme  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ . Budeme postupovat metodou z Věty 12.4.14.

- (1) První vektor:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) Druhý vektor: spočteme

$$\text{rej}_{\text{span}\{\mathbf{c}_1\}}(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_2 - \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{c}_1\}}(\mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

. Použijeme nyní *užitečnou trik*: protože skalární násobek nemění ortogonalitu, položíme

$$\mathbf{c}_2 = 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Tím se zbavíme pozdějších nepříjemných výpočtů se zlomky.

(3) Třetí vektor: spočteme

$$\text{rej}_{\text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}}(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_3 - \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}}(\mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opět se zbavíme zlomků:

$$\mathbf{c}_3 = 3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet je u konce: seznam  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  je hledaná ortogonální báze.

**12.4.17 Příklad (Legendrovy polynomy)** Víme, že polynomy  $1, x, x^2$  a  $x^3$  jsou lineárně nezávislé v lineárním prostoru  $C([-1; 1], \mathbb{R})$  všech spojitých funkcí na uzavřeném intervalu  $[-1; 1]$ .

Označme  $W = \text{span}(1, x, x^2, x^3)$ . Bázi  $B = (1, x, x^2, x^3)$  prostoru  $W$  ortogonalisujeme procesem z Věty 12.4.14. Pro novou bázi  $C = (p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x))$  platí:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= \text{rej}_{\text{span}\{p_0(x)\}}(x) = \\ &= x - \text{proj}_{\text{span}\{p_0(x)\}}(x) = x - \frac{\langle x | p_0(x) \rangle}{\langle p_0(x) | p_0(x) \rangle} \cdot p_0(x) = \\ &= x - \frac{\int_{-1}^1 x \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx} \cdot 1 = x - \frac{0}{2} \cdot 1 = x \\ p_2(x) &= \text{rej}_{\text{span}\{p_0(x), p_1(x)\}}(x^2) = \\ &= x^2 - \text{proj}_{\text{span}\{p_0(x), p_1(x)\}}(x^2) = x^2 - \frac{\langle x^2 | p_0(x) \rangle}{\langle p_0(x) | p_0(x) \rangle} \cdot p_0(x) - \frac{\langle x^2 | p_1(x) \rangle}{\langle p_1(x) | p_1(x) \rangle} \cdot p_1(x) = \\ &= x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot x \, dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x \, dx} \cdot x = \\ &= x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot 1 - \frac{0}{\frac{2}{3}} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= \text{rej}_{\text{span}\{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}}(x^3) = \\
&= x^3 - \text{proj}_{\text{span}\{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}}(x^3) = \\
&= x^3 - \frac{\langle x^3 | p_0(x) \rangle}{\langle p_0(x) | p_0(x) \rangle} \cdot p_0(x) - \frac{\langle x^3 | p_1(x) \rangle}{\langle p_1(x) | p_1(x) \rangle} \cdot p_1(x) - \frac{\langle x^3 | p_2(x) \rangle}{\langle p_2(x) | p_2(x) \rangle} \cdot p_2(x) = \\
&= x^3 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot x \, dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x \, dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) \, dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3}) \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) \, dx} \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) = \\
&= x^3 - \frac{0}{2} \cdot 1 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} \cdot x - \frac{0}{\frac{2}{5} - \frac{4}{3} + \frac{2}{3}} \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) = x^3 - \frac{3}{5} \cdot x
\end{aligned}$$

Polynomům  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$ ,  $p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ ,  $p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} \cdot x$  říkáme *Legendrovy polynomy* stupně maximálně tři. Legendrovy polynomy vyšších stupňů získáme ortogonalisací báze  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ . Lze dokázat, že Legendrovy polynomy  $p_k(x)$  stupně  $k$  má tvar

$$p_k(x) = \frac{k!}{(2k)!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} ((x^2 - 1)^k)$$

pro přirozená  $k$ . Viz například knihy

- ☞ Francesco G. Tricomi, *Vorlesungen über Orthogonalreihen*, Springer-Verlag, 1955.
- ☞ Vojtěch Jarník, *Integrovní počet II*, Academia, 1984.
- ☞ Gabor Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc., 1975.

K Legendrovým polynomům se ještě vrátíme v Příkladu D.5.2.

**12.4.18 Poznámka (Ortonormalisace)** Každou *ortogonální* bázi lze *ortonormalisovat*. Jestliže jsme našli ortogonální bázi  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  lineárního prostoru  $L$  se skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$ , lze každý z vektorů *normalisovat*, tj. vytvoříme seznam  $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ :

$$\vec{c}_i = \frac{1}{\|\vec{b}_i\|} \cdot \vec{b}_i$$

Potom  $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$  je *ortonormální báze* lineárního prostoru  $L$  se skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$ . To znamená, že platí

$$\langle \vec{c}_i | \vec{c}_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } i \neq j \\ 1, & \text{jestliže } i = j \end{cases}$$

Výše uvedené rovnosti plynou okamžitě z vlastností skalárního součinu.

V Příkladu 12.3.10 jsme viděli, že netriviální skalární součiny v  $\mathbb{R}^n$  umožňují považovat za navzájem kolmé ty vektory, které ve standardním skalárním součinu v  $\mathbb{R}^n$  navzájem nejsou. V Příkladu 12.4.7 jsme pak tohoto faktu využili pro výpočty ortogonálních projekcí, které jsou „ve skutečnosti šikmými projekcemi“. Následující výsledek nám umožní zkonstruovat skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ , pro který budou předem zadané vektory tvořit *ortonormální* bázi.

**12.4.19 Tvzení (Jak vyrobit skalární součin, je-li dána ortonormální báze)** Ať  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  je jakákoli báze lineárního prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Označme jako  $\mathbf{B}$  matici, která má v  $i$ -tém sloupci vektor  $\mathbf{b}_i$ . Potom matice

$$\mathbf{G} = (\mathbf{B}^{-1})^T \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

je *metrický tensor* skalárního součinu v  $\mathbb{R}^n$ , pro který je báze  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  *ortonormální*.

**DŮKAZ.** Nejprve si všimněme, že matice  $\mathbf{B}$  je regulární, protože má lineárně nezávislé sloupce. Tudíž i matice  $\mathbf{B}^{-1}$  má lineárně nezávislé sloupce a matice  $\mathbf{G} = (\mathbf{B}^{-1})^T \cdot \mathbf{B}^{-1}$  je tudíž pozitivně definitní. Označme jako  $\langle - | - \rangle$  skalární součin zadaný metrickým tensorem  $\mathbf{G}$ .

Protože pro každé  $i$  platí  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i$ , platí i  $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$  pro každé  $i$ .

Nyní ukážeme, že báze  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  je ortonormální pro skalární součin  $\langle - | - \rangle$ :

$$\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j \rangle = \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_i^T \cdot (\mathbf{B}^{-1})^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b}_j = (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b}_i)^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{pro } i \neq j \\ 1, & \text{pro } i = j \end{cases}$$

■

**12.4.20 Příklad** Nalezneme výpočtem (nikoli hádáním jako v Příkladu 12.3.10) takový skalární součin v  $\mathbb{R}^2$ , pro který tvoří vektory

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ortonormální bázi. Použijeme k tomu Tvzení 12.4.19.

Utvoříme matici  $\mathbf{B}$  se sloupci  $\mathbf{b}_1$  a  $\mathbf{b}_2$  a spočteme (například pomocí Důsledku 8.4.4)

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metrický tensor hledaného skalárního součinu  $\langle - | - \rangle$  má tvar

$$\mathbf{G} = (\mathbf{B}^{-1})^T \cdot \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Přesvědčíme se, že báze  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  je ve skalárním součinu  $\langle - | - \rangle$  skutečně ortonormální:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_1 \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\ \langle \mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_2 \rangle &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\ \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2 \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

## 12.5 Ortogonální doplněk lineárního podprostoru

Ortogonální doplněk lineárního podprostoru  $W$  je množina všech vektorů, které jsou kolmé na všechny vektory podprostoru  $W$ . Pojem ortogonálního doplňku (vzhledem ke skalárnímu součinu) použijeme v Dodatku B a dále jej zobecníme v Kapitole 15.

**12.5.1 Definice (Ortogonální doplněk lineárního podprostoru)** Ať  $W$  je lineární podprostor prostoru  $L$  se skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$ . Potom *ortogonální doplněk* podprostoru  $W$  je množina

$$W^\perp = \{ \vec{x} \in L \mid \langle \vec{w} | \vec{x} \rangle = 0 \text{ pro všechna } \vec{w} \text{ z } W \}$$

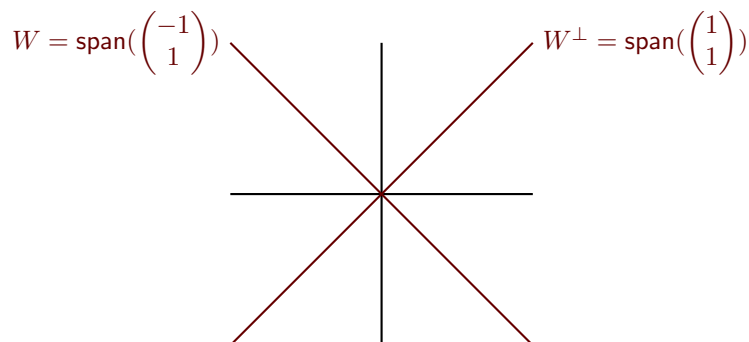
**12.5.2 Příklad** V lineárním prostoru  $\mathbb{R}^2$  se standardním skalárním součinem  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$  mají pojmy kolmosti a ortogonálního doplňku podprostoru intuitivní význam. Například pro

$$W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

je

$$W^\perp = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

viz obrázek



**12.5.3 Tvrzení (Vlastnosti ortogonálního doplňku v prostoru se skalárním součinem)** *Ať  $W$  je lineární podprostor prostoru  $L$  se skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$ . Potom platí:*

- (1)  $W^\perp$  je lineární podprostor prostoru  $L$ .
- (2) Ať  $L$  má konečnou dimenzi. Potom platí rovnost  $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(L)$ .
- (3) Platí rovnosti  $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$  a  $W \vee W^\perp = L$ , tj. platí  $W \oplus W^\perp = L$ . Navíc  $\text{rej}_W(-) = \text{proj}_{W^\perp}(-)$ .
- (4) Platí  $(W^\perp)^\perp = W$ .
- (5) Ať  $W'$  je další lineární podprostor prostoru  $L$ . Jestliže  $W' \subseteq W$ , potom  $W^\perp \subseteq W'^\perp$ .
- (6) Jestliže  $W'$  je další lineární podprostor prostoru  $L$ , potom platí  $(W \vee W')^\perp = W^\perp \cap W'^\perp$ .

DŮKAZ.

- (1) Podle Definice 12.1.2 platí, že zobrazení  $\langle \vec{x} | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$  je lineární pro jakékoli  $\vec{x}$ . Proto je, pro jakýkoli vektor  $\vec{w}$  z  $W$ , podle Tvrzení 2.3.12  $\ker(\langle \vec{w} | - \rangle)$  lineární podprostor prostoru  $L$ . Definice 12.5.1 říká, že

$$W^\perp = \bigcap_{\vec{w} \in W} \ker(\langle \vec{w} | - \rangle)$$

a tudíž  $W^\perp$  je lineární podprostor prostoru  $L$  podle Tvrzení 1.6.7.

- (2) Označme jako  $n = \dim(L)$  a označme jako  $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$  ortogonální uspořádanou bázi  $W$ . Tuto bázi lze podle Důsledku 3.2.15 a Věty 12.4.14 rošířit na ortogonální bázi  $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n)$  prostoru  $L$ . Ale uspořádaná báze  $(\vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n)$  je bázi prostoru  $W^\perp$ .

To znamená, že platí  $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(L)$ .

- (3) Rovnosti  $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$  a  $W \vee W^\perp = L$  plynou okamžitě z části (2) důkazu. Protože  $W \oplus W^\perp = L$  a protože každý vektor z  $W^\perp$  je kolmý na každý vektor z  $W$ , platí  $\text{rej}_W(-) = \text{proj}_{W^\perp}(-)$ .
- (4) Zjevně platí  $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ , protože každý vektor z  $W$  je kolmý na jakýkoli vektor z  $W^\perp$ . Podle druhé části důkazu platí  $\dim((W^\perp)^\perp) = \dim(W)$ . Rovnost  $(W^\perp)^\perp = W$  pak plyne z Tvrzení 3.3.1.
- (5) Jestliže  $\vec{x}$  je z  $W^\perp$ , pak je kolmý na každý vektor z  $W$ . Protože  $W' \subseteq W$ , znamená to, že  $\vec{x}$  je kolmý na každý vektor z  $W'$ .
- (6) Protože  $W' \subseteq W \vee W'$  a  $W \subseteq W \vee W'$ , podle části (5) platí  $(W \vee W')^\perp \subseteq W'^\perp$  a  $(W \vee W')^\perp \subseteq W^\perp$ . To znamená, že platí  $(W \vee W')^\perp \subseteq W^\perp \cap W'^\perp$ .

Pokud  $\vec{x}$  je vektor z  $W^\perp \cap W'^\perp$ , potom  $\langle \vec{v} | \vec{x} \rangle = 0$  pro každý vektor  $\vec{v}$  z  $W \vee W'$ , protože podle Lemmatu 1.6.11 lze psát  $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}'$  pro nějaký vektor  $\vec{w}$  z  $W$  a nějaký vektor  $\vec{w}'$  z  $W'$ .

■

Víme, že pro každou matici  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  jsou  $\ker(\mathbf{X})$  a  $\text{im}(\mathbf{X})$  lineární podprostory. Ukážeme, nyní, že transpozice matic souvisí s ortogonálními doplňky vzhledem ke *standardnímu* skalárnímu součinu.



**12.5.4 Tvzení** Uvažujme standardní skalární součin na prostorech  $\mathbb{R}^s$  a  $\mathbb{R}^r$ . Ať pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  platí  $W = \ker(\mathbf{A})$ . Potom  $W^\perp = \text{im}(\mathbf{A}^T)$ .

DŮKAZ. Protože pro každý vektor  $\mathbf{w}$  z  $W$  a každý vektor  $\mathbf{x}$  platí rovnost  $\langle \mathbf{w} | \mathbf{A}^T \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{A} \mathbf{w} | \mathbf{x} \rangle = 0$ , platí  $\text{im}(\mathbf{A}^T) \subseteq W^\perp$ .

Protože  $\text{def}(\mathbf{A}) = \dim(W)$  a protože  $\text{def}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{A}) = s$ , platí  $\dim(W) + \text{rank}(\mathbf{A}^T) = s$ . Podle Tvzení 12.5.3 to znamená, že  $\text{rank}(\mathbf{A}^T) = \dim(W^\perp)$ . Neboli musí platit rovnost  $\text{im}(\mathbf{A}^T) = W^\perp$ . ■



**12.5.5 Poznámka** Je-li zadán podprostor  $W$  lineárního prostoru  $L$ , lze spočítat  $W^\perp$  nějakým rychlým způsobem? V podkapitole B.2 uvidíme, že je to možné v  $\mathbb{R}^n$  se standardním skalárním součinem pro podprostory  $W$  dimenze  $n - 1$ . Jestliže  $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-1})$  je uspořádaná báze prostoru  $W$ , potom  $W^\perp$  je lineární obal vektorového součinu  $\times(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-1})$ , viz Tvzení B.2.4.

V případě obecného prostoru  $L$  a obecného podprostoru  $W$  lze použít *Hodgeův komplement*, viz Poznámku B.2.5.

## 12.6 Poznámky ke komplexnímu skalárnímu součinu

Skalární součin lze definovat i pro lineární prostory nad tělesem  $\mathbb{C}$  komplexních čísel. Definice komplexního skalárního součinu je ale o něco komplikovanější, než definice reálného skalárního součinu.

**12.6.1 Definice** Ať  $\mathbf{L}$  je lineární prostor nad tělesem  $\mathbb{C}$ . Funkci  $\langle - | - \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$ , která splňuje následující tři podmínky

- (1) *Linearita ve druhé souřadnici*. Pro každý vektor  $\vec{v}$  je funkce  $\langle \vec{v} | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{C}$  lineární.
- (2) *Samoadjungovanost*. Pro libovolné vektory  $\vec{v}, \vec{w}$  platí  $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w} | \vec{v} \rangle}$ .
- (3) *Positivní definitnost*. Pro libovolný vektor  $\vec{v}$  platí  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$ . Rovnost  $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0$  právě tehdy, když  $\vec{v} = \vec{0}$ .

říkáme *skalární součin* v  $\mathbf{L}$ .

**12.6.2 Příklad** Standardní skalární součin v  $\mathbb{C}^n$  je dán následujícím způsobem: pro vektory

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{C}^n$  je  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} \cdot y_i$ . To lze také zapsat jako  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\dagger \cdot \mathbf{y}$ .

**12.6.3 Příklad** Skalární součin z Příkladu 12.1.5 lze snadno přenést na prostor  $C([a; b]; \mathbb{C})$  komplexních funkcí spojitých na uzavřeném intervalu  $[a; b]$  reálných čísel. Přesněji: definujeme

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} \cdot g(x) \, dx$$

Požadovaná rovnost  $\langle f | g \rangle = \overline{\langle g | f \rangle}$  plyne snadno z výpočtu integrálu komplexní funkce reálné proměnné:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \text{Re}(f(x)) \, dx + i \cdot \int_a^b \text{Im}(f(x)) \, dx$$

Skalární součiny v prostorech  $\mathbb{R}^n$  jsou dány pozitivně definitními maticemi, viz Tvzení 12.3.8. Pro lineární prostory nad  $\mathbb{C}$  je třeba „zjemnit“ definici transponované matice takto:

**12.6.4 Definice** Pro matici  $\mathbf{A}$ , která má  $r$  řádků a  $s$  sloupců, definujeme matici  $\mathbf{A}^\dagger$ , která má  $s$  řádků a  $r$  sloupců a na posici  $(i, j)$  má prvek  $\overline{a_{ji}}$ . Matici  $\mathbf{A}^\dagger$  říkáme *konjugovaná* (také: *Hermítovsky sdružená*) matice k matici  $\mathbf{A}$ .

**12.6.5 Příklad** Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 - i & 3 + 3i \\ -i & 4 + 2i \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{pmatrix} 2 + i & i \\ 3 - 3i & 4 - 2i \end{pmatrix}$$

Pak lze definovat pozitivně definitní *komplexní* matice  $\mathbf{G}$  jako matice tvaru  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^\dagger \cdot \mathbf{R}$ , kde  $\mathbf{R}$  má lineárně nezávislé sloupce. Pro lineární prostory nad  $\mathbb{C}$  pak obdržíme podobné výsledky jako v případě lineárních prostorů nad  $\mathbb{R}$ . Více v tomto základním textu o komplexních skalárních součinech neřekneme. Odkazujeme například na knihu

☞ Sheldon Axler, *Linear algebra done right*, Springer-Verlag, 1997

nebo Dodatek [Q](#).

## Kapitola 13

# Banachovy a Hilbertovy prostory

However, I have refused to distort the main ideas of analysis by presenting them in too specialized a form, and thereby obscuring their power and generality. It gives a false impression, for example, if differential geometry is restricted to two or three dimensions, or if integration is restricted to Lebesgue measure, on the pretext of making these subjects more accessible or “intuitive”.

Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis*

Lineární algebra získá velmi na síle, pokud je propojena s matematickou analýzou. Takovému propojení se říká *funkcionální analýza*. Protože se snažíme o samostatnost tohoto textu, uvedeme v této kapitole základní pojmy funkcionální analýzy. Pro další podrobnosti odkazujeme na příslušnou literaturu.

V podkapitole 13.1 zavedeme pojem *Banachova prostoru*. Jedná se o lineární prostor, který je vybaven normou a který má „podobné“ vlastnosti jako reálná osa. Pojem Banachova prostoru nám umožní zavést důležité pojmy (*konvergence* a *spojitosti reálných vektorových funkcí*).

Poté v podkapitole 13.2 zavedeme *exponenciální funkci*, nejen pro reálná čísla, ale také pro *čtvercové reálné matice*. Exponenciála matice souvisí s řešením soustav diferenciálních rovnic (viz Dodatek O) a při jejím výpočtu využijeme Jordanův tvar matic z Kapitoly 11.

Nakonec v podkapitole 13.3 zavedeme pojem *Hilbertova prostoru*. Jedná se o Banachův prostor, který je vybaven skalárním součinem. Teorie Hilbertových prostorů je velmi bohatá a její krása vynikne zvláště pro prostory *nekonečné dimenze*. Výjimečně tedy v této podkapitole budeme studovat i lineární prostory nekonečné dimenze. To nám umožní abstraktně pochopit teorii *Fourierových řad*, kterou použijeme například v Dodatku D.

**Upozornění:** protože tento text *není* současně textem z matematické analýzy, budeme předpokládat znalost *základních* pojmů kalkulu jedné reálné proměnné: limitu, spojitost, derivaci a integrál reálných funkcí jedné reálné proměnné. Dobrymi referencemi jsou knihy

- ☞ Tom M. Apostol, *Mathematical analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- ☞ Edwin Hewitt a Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 3. vydání, 1975.
- ☞ Vojtěch Jarník, *Diferenciální počet I*, Academia, 1974.
- ☞ Vojtěch Jarník, *Integrální počet I*, Academia, 1984.
- ☞ Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Inc., 1976.

Některá fakta tak v našem textu plně *nedokážeme*. Na takových místech je vždy odkaz na literaturu, kde lze příslušné důkazy najít.

V této kapitole jsou všechny lineární prostory uvažovány nad tělesem  $\mathbb{R}$ . Teorii lze vybudovat i pro lineární prostory nad  $\mathbb{C}$ , viz doplňující literaturu.

## 13.1 Základy topologie normovaného lineárního prostoru $\mathbb{R}^n$

Základními pojmy matematické analýzy jedné proměnné jsou otázky konvergence (posloupností), spojitosti a derivace funkce jedné reálné proměnné. Všechny tyto pojmy souvisí s pojmem *limity*. Intuitivně lze pojem limity vyjádřit sloganem: hodnoty (posloupnosti, funkce, atd.) „se přibližují“ k jiné hodnotě „nade všechny meze“. Pojmy v úvozovkách naznačují, že budeme muset pracovat v prostředí, které nám umožňuje měřit vzdálenost mezi body. Takovým prostředím je *metrický prostor*. V našich aplikacích nás budou zajímat velmi speciální metrické prostory: takzvané *normované lineární prostory*. Tento pojem známe z Definice 12.2.1, připomeňme jej:

**13.1.1 Definice (Normovaný lineární prostor)** Ať  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ . Dvojici  $(L, \|\cdot\|)$ , kde

$$\|\cdot\| : L \longrightarrow \mathbb{R}$$

je funkce splňující následující tři podmínky

- (1)  $\|\vec{v}\| \geq 0$  pro všechny vektory  $\vec{v}$ , rovnost platí pouze pro  $\vec{v} = \vec{0}$ .
- (2)  $\|a\vec{v}\| = |a| \cdot \|\vec{v}\|$ .
- (3)  $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ .

říkáme *normovaný lineární prostor*. Funkci  $\|\cdot\|$  pak říkáme *norma* na lineárním prostoru  $X$ .

Připomeňme některé normované lineární prostory.

### 13.1.2 Příklad (Příklady známých normovaných lineárních prostorů nad $\mathbb{R}$ )

- (1) Lineární prostor  $\mathbb{R}^n$  nad  $\mathbb{R}$  s normou

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

vytvořenou standardním skalárním součinem je normovaný lineární prostor.

Obecněji: každý lineární prostor se skalárním součinem lze považovat za normovaný lineární prostor. Norma je vytvořena skalárním součinem. Viz Tvzení 12.2.3.

- (2) Lineární prostor  $\mathbb{R}^n$  nad  $\mathbb{R}$  je vybaven 1-normou<sup>1</sup>

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

Příklad 12.2.14 ukazuje, že  $\mathbb{R}^2$  s 1-normou je příkladem normovaného lineárního prostoru, jehož norma nevznikla ze skalárního součinu.

Na normované lineární prostory lze snadno přenést všechny pojmy známe z kalkulu funkcí jedné reálné proměnné. Slogan je jednoduchý: místo absolutních hodnot pište normu. Několik takových definic a tvrzení nyní zformulujeme.

**13.1.3 Definice (Limita posloupnosti)** Ať  $(L, \|\cdot\|)$  je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost  $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}$  vektorů z  $L$  konverguje k vektoru  $\vec{x}$ , pokud platí následující:

Pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0$  tak, že nerovnost  $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon$  platí pro všechna  $n \geq n_0$ .

<sup>1</sup>Je snadné ukázat, že  $\|\cdot\|_1$  splňuje požadavky na normu vektoru z Definice 12.2.1. Jediným mírně netriviálním požadavkem je trojúhelníková nerovnost  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|_1 \leq \|\mathbf{v}\|_1 + \|\mathbf{w}\|_1$ . Po rozepsání do položek máme tedy ukázat nerovnost

$$\sum_{i=1}^n |v_i + w_i| \leq \sum_{i=1}^n |v_i| + \sum_{i=1}^n |w_i|$$

pro všechna reálná čísla  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ . To je ale dobře známá trojúhelníková nerovnost pro absolutní hodnotu reálných čísel, viz například Poznámku F.2.4.

Tento fakt značíme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ .



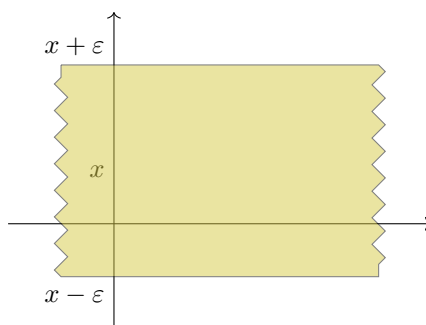
**13.1.4 Poznámka** Porovnejme Definici 13.1.3 s obvyklou definicí konvergence posloupnosti  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$  reálných čísel:

Rovnost  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$  platí právě tehdy, když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0$  tak, že nerovnost  $|x_n - x| < \varepsilon$  platí pro všechna  $n \geq n_0$ .

Tato podmínka se liší od Definice 13.1.3 pouze tím, že norma v normovaném lineárním prostoru  $L$  je nahrazena absolutní hodnotou reálných čísel. To ale znamená, že „klasická“ definice limity posloupnosti reálných čísel je pouhou instancí Definice 13.1.3: při „klasické“ definici limity posloupnosti pracujeme v normovaném lineárním prostoru  $(\mathbb{R}, | - |)$ .

Pochopitelně, intuitivní představu o vztahu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$  z normovaného lineárního prostoru  $(\mathbb{R}, | - |)$  lze přenést do libovolného normovaného prostoru  $(L, \| - \|)$ . Jaká je ale intuice pro „klasický“ pojem  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ ?

Volbou čísla  $\varepsilon > 0$  volíme „toleranci nepřesnosti“, které se hodláme dopustit při „náhradě“ hodnoty  $x$  hodnotami posloupnosti  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ . Přesněji: volbou  $\varepsilon > 0$  volíme „pás“



poloměru  $\varepsilon$  kolem hodnoty  $x$  a od určitého  $n_0$  počínaje se všechny členy  $x_n$  posloupnosti musí do tohoto pásu „vejít“.

Tudíž  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$  znamená: ať „pás“ kolem  $x$  zvolíme jakkoli, pak se do tohoto pásu od určitého indexu počínaje všechny členy posloupnosti „vejdou“.

Stejný slogan lze vyslovit pro platnost vztahu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$  v normovaném lineárním prostoru  $(L, \| - \|)$ . Jedinou změnou je, že volený „pás“ kolem bodu  $\vec{x}$  z  $L$  měříme normou  $\| - \|$ .

Každá konvergentní posloupnost splňuje určitou podmínku, které se říká *cauchyovskost* posloupnosti.

**13.1.5 Lemma (Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská)** Pokud v normovaném lineárním prostoru  $(L, \| - \|)$  platí  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ , pak posloupnost  $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}$  vektorů z  $L$  splňuje následující podmínku:

Pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0$  tak, že nerovnost  $\|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \varepsilon$  platí pro všechna  $n \geq n_0$  a všechna  $m \geq n_0$ .

Posloupnosti, která výše uvedenou podmínku splňuje, se říká *cauchyovská*.

**DŮKAZ.** Zvolme  $\varepsilon > 0$ . Protože  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ , existuje  $n_0$  tak, že nerovnost  $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon/2$  platí pro všechna  $n \geq n_0$ . Proto nerovnosti

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{x}_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

platí pro všechna  $n \geq n_0$  a všechna  $m \geq n_0$ . ■

Opak Lemmatu 13.1.5 neplatí: v normovaném lineárním prostoru se může stát, že cauchyovská posloupnost konvergentní není.

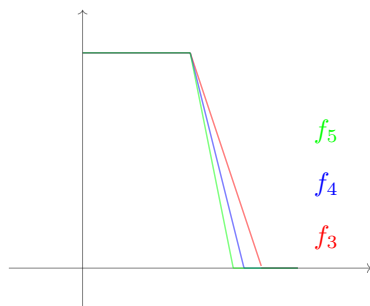
**13.1.6 Příklad** Ať  $C([0; 1]; \mathbb{R})$  je lineární prostor všech reálných funkcí spojitých na uzavřeném intervalu  $[0; 1]$ . Z vlastností určitého integrálu je snadné ověřit, že vzorec

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$$

definuje normu na  $C([0; 1]; \mathbb{R})$ . Posloupnost  $\{f_n\}_{n=3}^{+\infty}$  spojitých funkcí, kde

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (1 - 2t)n/2 + 1, & 1/2 \leq t \leq 1/2 + 1/n \\ 0, & 1/2 + 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

je cauchyovská, ale není konvergentní.



Limita posloupnosti  $\{f_n\}_{n=3}^{+\infty}$  by totiž byla nespojitá funkce.

Předchozí příklad motivuje následující definici.

**13.1.7 Definice (Úplný normovaný lineární prostor — Banachův prostor)** Řekneme, že normovaný lineární prostor je *úplný*, pokud v něm každá cauchyovská posloupnost má limitu. Místo úplný normovaný lineární prostor budeme říkat *Banachův prostor*.

### 13.1.8 Příklad

- (1) Normovaný lineární prostor  $(\mathbb{R}, | - |)$  je úplný (jinými slovy:  $(\mathbb{R}, | - |)$  je Banachův prostor). Toto tvrzení se dokazuje v kalkulu jedné proměnné. Jde o důsledek důležité vlastnosti množiny reálných čísel, takzvané *věty o infimu*:

*Ať  $M$  je neprázdná množina reálných čísel. Ať existuje dolní odhad pro  $M$ , tj. ať existuje reálné číslo  $x$  s vlastností  $x \leq m$  pro všechna  $m$  z  $M$ . Potom  $\inf M$  existuje.*

Viz také Poznámku B.3.2.

- (2) Normovaný lineární prostor  $(\mathbb{R}^n, \| - \|_1)$ , kde  $\| - \|_1$  je 1-norma (viz Příklad 13.1.2(2)), je Banachův.

Ať je posloupnost

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix} \quad k \geq 0$$

v 1-normě cauchyovská. Pak lze snadno ukázat, že každá z posloupností

$$\{x_{1,k}\}_{k=1}^{+\infty}, \quad \dots, \quad \{x_{n,k}\}_{k=1}^{+\infty}$$

je cauchyovská v Banachově prostoru  $(\mathbb{R}, | - |)$  a tudíž má limitu. Definujeme-li

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{1,k} \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n,k} \end{pmatrix}$$

pak v  $(\mathbb{R}^n, \| - \|_1)$  platí  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ .

- (3) Množina  $C([0; 1]; \mathbb{R})$  s normou z Příkladu 13.1.6 není Banachův prostor.

(4) Množina

$$C_0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ je spojitá a existuje } n \text{ tak, že } f(x) = 0, \text{ jakmile } |x| \geq n\}$$

je lineární prostor nad  $\mathbb{R}$  (důkaz je podobný jako v Příkladu 1.1.10). Na  $C_0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  lze zavést normu

$$\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

protože každá funkce z  $C_0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  nabývá svého maxima. Potom lze snadno ukázat, že  $(C_0(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \|\cdot\|)$  není Banachův prostor.

Definice konvergentní posloupnosti v normovaném lineárním prostoru značně záleží na normě. To může situaci poměrně komplikovat: vždyť na lineárním prostoru  $\mathbb{R}^n$  nad  $\mathbb{R}$  existují (přínejmenším) dvě různé normy:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad \text{a} \quad \|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

Uvidíme, že nejde o žádnou tragédii: v Tvzení 13.1.13 ukážeme, že na  $\mathbb{R}^n$  jsou všechny normy „stejně“, co se týče limit posloupností. Nejprve ale musíme zavést několik pojmů a dokázat řadu pomocných tvrzení.

**13.1.9 Definice (Ekvivalentní normy)** Ať  $\|\cdot\|$  a  $\|\cdot\|'$  jsou dvě normy na lineárním prostoru  $L$ . Řekneme, že normy  $\|\cdot\|$  a  $\|\cdot\|'$  jsou *ekvivalentní*, pokud existují dvě kladná reálná čísla  $M$  a  $M'$  tak, že platí nerovnosti

$$\|\vec{x}\| \leq M \cdot \|\vec{x}\|' \quad \text{a} \quad \|\vec{x}\|' \leq M' \cdot \|\vec{x}\|$$

pro všechny vektory  $\vec{x}$  z  $L$ .

**13.1.10 Lemma** Ať normy  $\|\cdot\|$  a  $\|\cdot\|'$  na lineárním prostoru  $L$  jsou ekvivalentní. Potom

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{x}_n = \vec{x} \quad \text{platí v } (L, \|\cdot\|)$$

nastane právě tehdy, když

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{x}_n = \vec{x} \quad \text{platí v } (L, \|\cdot\|')$$

DŮKAZ. Ať  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$  platí  $(L, \|\cdot\|)$ . Protože pro všechna  $n$  platí

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}\|' \leq M' \cdot \|\vec{x}_n - \vec{x}\|$$

platí i  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$  v  $(L, \|\cdot\|')$ . Obrácená implikace se dokáže analogicky. ■

Dalším důležitým pojmem je *spojitost* funkce mezi lineárními normovanými prostory. Opět jde o variantu dobře známé definice (slogan: nahraďte absolutní hodnoty normami).

**13.1.11 Definice (Spojitost funkce)** Ať  $(L_1, \|\cdot\|_1)$  a  $(L_2, \|\cdot\|_2)$  jsou normované lineární prostory. Řekneme, že funkce (ne nutně lineární!)  $f : L_1 \longrightarrow L_2$  je *spojitá v bodě*  $\vec{x}_0$ , pokud platí:

Pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že z nerovnosti  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_1 < \delta$  plyne nerovnost  $\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\|_2 < \varepsilon$ .

Řekneme, že  $f$  je *spojitá*, pokud je spojitá v každém bodě.

Spojitést *lineárního* zobrazení se dá zjistit poměrně snadno. To říká následující tvrzení.

**13.1.12 Lemma** Ať  $(L_1, \|\cdot\|_1)$  a  $(L_2, \|\cdot\|_2)$  jsou normované lineární prostory a ať  $f : L_1 \longrightarrow L_2$  je lineární zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (1) Zobrazení  $f$  je spojité.
- (2) Zobrazení  $f$  je spojité v bodě  $\vec{o}$ .

(3) Existuje reálné číslo  $M$  tak, že  $\|\mathbf{f}(\vec{x})\|_2 \leq M$  platí pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$ , pro který platí  $\|\vec{x}\|_1 \leq 1$ .

(4) Existuje reálné číslo  $M$  tak, že nerovnost  $\|\mathbf{f}(\vec{x})\|_2 \leq M \cdot \|\vec{x}\|_1$  platí pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$ .

DŮKAZ. Z (1) plyne (2) triviálně.

Ze (2) plyne (3). Protože zobrazení  $\mathbf{f}$  je spojitě v bodě  $\vec{o}$ , pro  $\varepsilon = 1$  existuje  $\delta > 0$  tak, že z nerovnosti  $\|\vec{x}\|_1 \leq \delta/2 < \delta$  plyne nerovnost  $\|\mathbf{f}(\vec{x})\|_2 < 1$ , tedy i nerovnost  $\|\mathbf{f}(\vec{x})\|_2 \leq 1$ .

Tvrdíme, že hledaná konstanta  $M$  je rovna číslu  $2/\delta$ . Jestliže  $\|\vec{x}\|_1 \leq 1$ ,  $\|\delta/2 \cdot \vec{x}\|_1 \leq \delta/2$ , a tudíž

$$\delta/2 \cdot \|\mathbf{f}(\vec{x})\|_2 = \|\delta/2 \cdot \mathbf{f}(\vec{x})\|_2 = \|\mathbf{f}(\delta/2 \cdot \vec{x})\|_2 \leq 1$$

neboli  $\|\mathbf{f}(\vec{x})\|_2 \leq 2/\delta$ .

Ze (3) plyne (4). Tvrdíme, že konstanta  $M$  pro bod (4) je stejná jako pro bod (3). Jestliže  $\vec{x} = \vec{o}$ , není co dokazovat, protože pak  $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o}$ . Jestliže  $\vec{x} \neq \vec{o}$ , pak platí nerovnost

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_1} \right\|_1 \leq 1$$

a tudíž, podle bodu (3), platí nerovnost

$$\left\| \mathbf{f}\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_1}\right) \right\|_2 \leq M$$

neboli

$$\|\mathbf{f}(\vec{x})\|_2 \leq M \cdot \|\vec{x}\|_1$$

Ze (4) plyne (1). Z podmínky (4) okamžitě plyne, že  $\mathbf{f}$  je spojitá: platí totiž nerovnosti

$$\|\mathbf{f}(\vec{x}) - \mathbf{f}(\vec{y})\|_2 = \|\mathbf{f}(\vec{x} - \vec{y})\|_2 \leq M \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|_1$$

■

Nyní již můžeme dokázat důležitý fakt.

**13.1.13 Tvzení** Na prostoru  $\mathbb{R}^n$  nad  $\mathbb{R}$  jsou všechny normy ekvivalentní. Normovaný lineární prostor  $\mathbb{R}^n$  je tedy vždy Banachův.

DŮKAZ. Připomeňme Příklad 13.1.2(2): pro vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

jsme definovali 1-normu  $\|\mathbf{v}\|_1$  vektoru  $\mathbf{v}$  předpisem

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

Ukážeme, že jakákoli norma  $\|\cdot\|$  na  $\mathbb{R}^n$  je ekvivalentní  $\|\cdot\|_1$ .

(a) Nejprve ukážeme, že funkce  $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$  z normovaného lineárního prostoru  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  do normovaného lineárního prostoru  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  je spojitá.

Platí

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbf{e}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|\mathbf{e}_i\| \leq \underbrace{\max_{i=1, \dots, n} \|\mathbf{e}_i\|}_{=A} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| = A \cdot \|\mathbf{x}\|_1$$

A tudíž pro libovolná  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  platí

$$\left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \right| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq A \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$$

Neboli: funkce  $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$  je spojitá.



(b) Víme, že každá spojitá reálná funkce na množině

$$\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$$

nabývá svého maxima a minima.<sup>2</sup>

Tento fakt budeme aplikovat na spojitou funkci  $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ . Tudíž existuje konstanta  $a > 0$ , pro kterou platí  $a \leq \|\mathbf{x}\|$  pro každé  $\mathbf{x}$ , kde  $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ . Neboli, pro každé  $\mathbf{x}$  platí nerovnost  $a \cdot \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|$ .

Ukázali jsme, že normy  $\|\cdot\|$  a  $\|\cdot\|_1$  v  $\mathbb{R}^n$  and  $\mathbb{R}$  jsou ekvivalentní. ■

Předchozí tvrzení je velmi důležité: v dalším budeme uvažovat o obecné normě na  $\mathbb{R}^n$ ; víme, že z hlediska konvergence posloupností je jedno, jak konkrétně tato norma vypadá. Dalším praktickým důsledkem je to, že *jakékoli* lineární zobrazení z Banachova prostoru  $\mathbb{R}^n$  je vždy spojitě.

**13.1.14 Důsledek** *At  $(L, \|\cdot\|)$  je normovaný lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ . Potom jakékoli lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow L$  je spojitě. Speciálně: jakákoli matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitě zobrazení.*

DŮKAZ. Podle Tvrzení 13.1.13 stačí vzít na  $\mathbb{R}^n$  1-normu  $\|\cdot\|_1$ . Normu na  $L$  budeme značit  $\|\cdot\|$ . Potom pro jakýkoli vektor  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \mathbf{e}_j$  z prostoru  $\mathbb{R}^n$  platí

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| &= \left\| \mathbf{f}\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot \mathbf{e}_j\right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^n x_j \cdot \mathbf{f}(\mathbf{e}_j) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|x_j \cdot \mathbf{f}(\mathbf{e}_j)\| \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|\mathbf{f}(\mathbf{e}_j)\| \\ &\leq \underbrace{\max_{j=1, \dots, n} \|\mathbf{f}(\mathbf{e}_j)\|}_{=M} \cdot \sum_{j=1}^n |x_j| \\ &= M \cdot \sum_{j=1}^n |x_j| \\ &= M \cdot \|\mathbf{x}\|_1 \end{aligned}$$

a spojitost  $\mathbf{f}$  plyne z Tvrzení 13.1.12. ■

Důsledek 13.1.14 a část (3) Tvrzení 13.1.12 nám umožňují pro každou matici definovat reálné číslo  $\|\mathbf{A}\|$  následovně:

**13.1.15 Definice (Norma čtvercové matice)** Pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definujeme

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|_1 \leq 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1$$

a budeme mu říkat *norma matice*.

**13.1.16 Tvrzení (Banachův prostor čtvercových matic)** *Přiřazení  $\mathbf{A} \mapsto \|\mathbf{A}\|$  definuje normu na  $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , pro kterou navíc platí nerovnost*

$$\|\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{B}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$$

*Prostor  $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  s touto normou je Banachův.*

<sup>2</sup>Důkaz tohoto faktu by vyžadoval hlubší studium topologických vlastností normovaného lineárního prostoru  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ . Zájemce odkazujeme například na Kapitulu 4 knihy Lynn H. Loomis a Shlomo Sternberg, *Advanced calculus*, Jones and Bartlett Publishers, 1990.

DŮKAZ. Ověřit, že  $\| - \|$  je norma na  $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , je snadné. Protože pro jakýkoli vektor  $\mathbf{x}$  z prostoru  $\mathbb{R}^n$  podle Tvzení 13.1.12 platí

$$\|\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{B}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_1$$

platí nerovnost  $\|\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{B}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$ .

Jestliže  $\{\mathbf{A}_n\}_{n=1}^{+\infty}$  je cauchyovská posloupnost v prostoru  $(\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \| - \|)$ , potom je pro jakýkoli vektor  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{R}^n$  posloupnost  $\{\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{x}\}_{n=1}^{+\infty}$  cauchyovská v Banachově prostoru  $(\mathbb{R}^n, \| - \|_1)$ . Takže můžeme definovat

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{x}$$

Potom platí

$$\mathbf{A} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{A}_n$$

v prostoru  $(\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \| - \|)$ . ■

Vyložená teorie není tak hrůzná, jak se zdá. Napišeme několik sloganů, které shrnou výsledky této podkapitoly:

- (1) Snažili jsme se přenést základy matematické analýzy funkcí jedné proměnné na prostory tvaru  $\mathbb{R}^n$ .  
Pro definice limity posloupnosti a spojitosti reálné funkce jedné proměnné je důležité, že *lineární prostor*  $\mathbb{R}$  je vybaven *normou*  $| - |$  (absolutní hodnota reálného čísla).  
Pojmy limity posloupnosti a spojitosti reálné funkce jedné proměnné má tedy smysl zobecnit na lineární prostory *vybavené normou*. Takovým prostorům říkáme *normované lineární prostory*.  
Při zobecňování definic postupujeme takto: v „klasické“ definici nahradíme absolutní hodnotu normou.
- (2) Reálná čísla s absolutní hodnotou mají důležitou vlastnost: *každá cauchyovská posloupnost reálných čísel má limitu*.  
Takové tvrzení v obecném normovaném lineárním prostoru neplatí. Normovaným lineárním prostorům, kde každá cauchyovská posloupnost má limitu, říkáme *Banachovy*.  
Příkladem Banachova prostoru je lineární prostor tvaru  $\mathbb{R}^n$  nad  $\mathbb{R}$  s *libovolnou* normou.
- (3) Lineární prostor  $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  všech čtvercových matic lze také vybavit normou a tento prostor se pak stává Banachovým prostorem.  
V Banachově prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  se tedy můžeme chovat (co se týče limit posloupností) stejně, jako v množině reálných čísel.  
Lze tedy mluvit o limitách posloupnosti čtvercových matic, o konvergenci nekonečných řad matic, atd.  
Tomu bude věnována podkapitola 13.2.

Podkapitola 13.1 byla věnována naprostým základům matematické analýzy v normovaných lineárních prostorech. Pro další informace odkazujeme na citovanou literaturu.



**13.1.17 Poznámka (Banachovy prostory nad  $\mathbb{C}$ )** Jistě jste si všimli, že naprosto stejně by šlo postupovat pro normované lineární prostory nad  $\mathbb{C}$ . Příkladem Banachova prostoru nad  $\mathbb{C}$  je prostor  $\mathbb{C}^n$  s některou z norem

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} \quad \|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

## 13.2 Nekonečné řady a exponenciála čtvercové matice

V základech matematické analýzy jedné reálné proměnné se dokazuje, že nekonečná řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (13.1)$$

konverguje pro libovolné *komplexní* číslo  $x$ . Skutečně: protože pro libovolné  $x$  platí

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = |x| \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

konverguje řada podle podílového kritéria konvergence. Tento fakt umožňuje následující definici.

**13.2.1 Definice** Pro jakékoli komplexní číslo  $x$  definujeme

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

a funkci  $x \mapsto e^x$  říkáme *exponenciála*.

Exponenciála má řadu známých a důležitých vlastností. Shrňme je (bez důkazu).

**13.2.2 Tvzení (Základní vlastnosti exponenciály)** Jestliže  $x = a + ib$  je komplexní číslo, potom

$$e^x = e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$$

Pro všechna komplexní  $x, y$  platí rovnosti

$$e^0 = 1, \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Pro reálná  $x$  platí nerovnost

$$e^x > 0$$

a pro reálná  $x$  je funkce  $x \mapsto e^x$  je spojitá na  $\mathbb{R}$  a má jako derivaci opět funkci  $x \mapsto e^x$ .

Více informací o exponenciále lze získat například z knih

☞ Vojtěch Jarník, *Diferenciální počet I*, Academia, 1974.

☞ Gordon J. McLelland, *On the shoulders of giants: A course in single variable calculus*, University of New South Wales, 2002.

Protože konvergentní nekonečná řada je limitou svých částečných součtů, lze definovat konvergenci řady v jakémkoli lineárním prostoru s normou. Nebudeme budovat teorii konvergence nekonečných řad. Zavedeme jen základní pojmy, které zobecňují konvergenci a absolutní konvergenci nekonečných řad, známou z kalkulu jedné proměnné.

**13.2.3 Definice (Konvergence a absolutní konvergence)** Ať  $(L, \|\cdot\|)$  je normovaný lineární prostor. Řekneme, že řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \vec{x}_k$$

(1) *Konverguje*, pokud existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \vec{x}_k$$

posloupnosti částečných součtů této řady v  $(L, \|\cdot\|)$ .

(2) *Konverguje absolutně*, pokud konverguje řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|\vec{x}_k\|$$

v Banachově prostoru  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

**13.2.4 Poznámka** Existují příklady řad, které jsou konvergentní, ale *nejdou* absolutně konvergentní. Příkladem je konvergentní<sup>3</sup> řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

v Banachově prostoru  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , která není absolutně konvergentní: řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}$$

je dobře známá divergentní harmonická řada.

Absolutně konvergentní řady jsou „dobré“ nekonečné řady. Platí pro ně totiž celá řada důležitých tvrzení, které budeme v dalším využívat.

**13.2.5 Tvrzení** *Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru  $(L, \|\cdot\|)$  je konvergentní. Speciálně: jestliže řada*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{A}_k$$

*konverguje absolutně v Banachově prostoru  $(\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ , potom rovnost*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{A}_k$$

*definuje matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

DŮKAZ. Ať řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \vec{x}_k$$

konverguje absolutně. Označme jako

$$\vec{s}_n = \sum_{k=0}^n \vec{x}_k$$

posloupnost částečných součtů zadané řady a jako

$$s_n = \sum_{k=0}^n \|\vec{x}_k\|$$

posloupnost částečných součtů konvergentní řady

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|\vec{x}_k\|$$

Stačí ukázat, že posloupnost  $\{\vec{s}_n\}_{n=1}^{+\infty}$  je cauchyovská, protože předpokládáme, že prostor  $(L, \|\cdot\|)$  je Banachův. Pro  $n \geq m$  platí

$$\|\vec{s}_n - \vec{s}_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n \vec{x}_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|\vec{x}_k\| = s_n - s_m$$

<sup>3</sup>Využijte známé věty: pro  $a_{k+1} \geq a_k \geq \dots \geq 0$  řada  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot a_k$  reálných čísel konverguje právě tehdy, když platí  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$ .

Protože posloupnost  $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$  je konvergentní, je i cauchyovská. Tudíž je cauchyovská i posloupnost  $\{\vec{s}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ . Protože prostor  $(L, \|\cdot\|)$  je Banachův, posloupnost  $\{\vec{s}_n\}_{n=1}^{+\infty}$  konverguje. Proto konverguje i řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \vec{x}_k$$

Tvrzení o absolutně konvergentních řadách čtvercových matic plyne z předchozí části důkazu a z Tvrzení 13.1.16. ■

Vybudované teorie využijeme pro studium následující absolutně konvergentní řady. Porovnejte ji s řadou (13.1).

**13.2.6 Tvrzení** Pro jakoukoli čtvercovou matici  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{X}^k}{k!}$$

konverguje absolutně a definuje tudíž lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$ .

DŮKAZ. Podle Tvrzení 13.1.16 platí nerovnost  $\|\mathbf{X}^k\| \leq \|\mathbf{X}\|^k$  pro každé  $k \geq 0$ . Protože platí nerovnost

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{\mathbf{X}^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|\mathbf{X}\|^k}{k!}$$

a řada napravo konverguje (její součet je reálné číslo  $e^{\|\mathbf{X}\|}$ ), konverguje i řada nalevo. Podle Tvrzení 13.2.5 řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{X}^k}{k!}$$

definuje lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$ . ■

**13.2.7 Definice (Exponenciála čtvercové matice)** Pro jakoukoli reálnou čtvercovou matici  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  definujeme lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$  rovností

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{X}^k}{k!}$$

a funkci  $\mathbf{X} \mapsto \exp(\mathbf{X})$  budeme říkat *exponenciála matic*.

Abychom ospravedlnili terminologii, dokážeme pro funkci  $\mathbf{X} \mapsto \exp(\mathbf{X})$  analogii Tvrzení 13.2.2.

**13.2.8 Tvrzení (Základní vlastnosti exponenciály matic)** Platí:

- (1)  $\exp(\mathbf{O}_{n,n}) = \mathbf{E}_n$ .
- (2) Jestliže  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}$ , potom  $\mathbf{X} \cdot \exp(\mathbf{Y}) = \exp(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X}$ .
- (3) Jestliže  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}$ , potom  $\exp(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \exp(\mathbf{X}) \cdot \exp(\mathbf{Y}) = \exp(\mathbf{Y}) \cdot \exp(\mathbf{X})$ .
- (4) Matice  $\exp(\mathbf{X})$  je vždy regulární. Platí  $(\exp(\mathbf{X}))^{-1} = \exp(-\mathbf{X})$ .

DŮKAZ.

(1) Protože platí

$$\mathbf{O}_{n,n}^k = \begin{cases} \mathbf{E}_n, & \text{pro } k = 0 \\ \mathbf{O}_{n,n}, & \text{pro } k \geq 1 \end{cases}$$

je posloupnost částečných součtů řady

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{O}_{n,n}^k}{k!}$$

konstantně rovna jednotkové matici  $\mathbf{E}_n$ . Proto platí  $\exp(\mathbf{O}_{n,n}) = \mathbf{E}_n$ .

(2) Ať platí  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}$ . Potom platí  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}^k = \mathbf{Y}^k \cdot \mathbf{X}$  pro všechna  $k \geq 0$ . Tudiž platí rovnosti

$$\mathbf{X} \cdot \exp(\mathbf{Y}) = \mathbf{X} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{Y}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{X} \mathbf{Y}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{Y}^k \mathbf{X}}{k!} = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{Y}^k}{k!} \right) \cdot \mathbf{X} = \exp(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X}$$

(3) Podle binomické věty platí pro každé  $k \geq 0$  rovnost

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^k = k! \cdot \sum_{i+j=k} \frac{\mathbf{X}^i \mathbf{Y}^j}{i! \cdot j!}$$

kde jsme využili toho, že platí  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}$ .

Proto platí rovnosti

$$\exp(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{\mathbf{X}^i \mathbf{Y}^j}{i! \cdot j!} = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{X}^i}{i!} \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{Y}^j}{j!} \right) = \exp(\mathbf{X}) \cdot \exp(\mathbf{Y})$$

a rovnosti

$$\exp(\mathbf{X}) \cdot \exp(\mathbf{Y}) = \exp(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \exp(\mathbf{Y} + \mathbf{X}) = \exp(\mathbf{Y}) \cdot \exp(\mathbf{X})$$

(4) Protože platí  $\mathbf{X} \cdot (-\mathbf{X}) = (-\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X}$ , platí podle částí (1) a (3) rovnosti

$$\mathbf{E}_n = \exp(\mathbf{O}_{n,n}) = \exp(\mathbf{X} - \mathbf{X}) = \exp(\mathbf{X}) \cdot \exp(-\mathbf{X})$$

Podle Důsledku 3.3.10 platí  $(\exp(\mathbf{X}))^{-1} = \exp(-\mathbf{X})$ .

■

**13.2.9 Poznámka** Tvzení 13.2.2 a 13.2.8 jsou si opravdu podobná. Upozorníme na důležitý rozdíl: rovnost

$$\exp(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \exp(\mathbf{X}) \cdot \exp(\mathbf{Y})$$

obecně *neplatí*. Protipříkladem jsou například matice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}$$

Opravdu: protože pro  $k \geq 2$  je  $\mathbf{X}^k = \mathbf{Y}^k = \mathbf{O}_{2,2}$ , platí

$$\exp(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^0 + \mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \exp(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^0 + \mathbf{Y}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \exp(\mathbf{X}) \cdot \exp(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Platí ale

$$\exp(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cosh(1) & -\sinh(1) \\ -\sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix}$$

jak ukážeme v Příkladu 13.2.12(1).

Tytěž matice  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}$  ukazují, že ani rovnost

$$\mathbf{X} \cdot \exp(\mathbf{Y}) = \exp(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X}$$

neplatí obecně:

$$\mathbf{X} \cdot \exp(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X}$$

Poznamenejme, že *nemáme* analogii nerovnosti  $\exp(x) > 0$ . Víme, že matice  $\exp(\mathbf{X})$  je vždy regulární. Nerovnost  $\exp(\mathbf{X}) > 0$  *nedává v tomto kontextu smysl*. Jistou náhražkou je Věta [O.2.23](#), viz Poznámku [O.2.25](#).

Platí i fakt, že funkce  $\mathbf{X} \mapsto \exp(\mathbf{X})$  je spojitá a její derivace je opět funkce  $\mathbf{X} \mapsto \exp(\mathbf{X})$ . To ale dokazovat nebudeme. Odkazujeme například na knihu

☞ Henri Cartan, *Calcul différentiel*, Herman, 1967.

Exponenciála matice je invariantní na změnu souřadnic. Přesněji: dokážeme, že podobné matice mají podobné exponenciály.

**13.2.10 Tvzení** *At  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou podobné čtvercové matice. Potom jsou i matice  $\exp(\mathbf{A})$  a  $\exp(\mathbf{B})$  podobné. Navíc: jestliže  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$ , potom  $\exp(\mathbf{B}) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \exp(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{T}$ .*

DŮKAZ. Pro každé  $n \geq 0$  platí rovnosti

$$\sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{B}^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T})^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{T}}{k!} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \left( \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right) \cdot \mathbf{T}$$

takže platí i rovnosti

$$\exp(\mathbf{B}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{B}^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{T}^{-1} \cdot \left( \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \exp(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{T}$$

■

**13.2.11 Důsledek** *Jestliže  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot D(\lambda_1; \dots; \lambda_n) \cdot \mathbf{T}$ , potom  $\exp(\mathbf{B}) = \mathbf{T}^{-1} \cdot D(e^{\lambda_1}; \dots; e^{\lambda_n}) \cdot \mathbf{T}$ .*

DŮKAZ. Rovnost

$$\exp(D(\lambda_1; \dots; \lambda_n)) = D(e^{\lambda_1}; \dots; e^{\lambda_n})$$

plyne okamžitě z Definice [13.2.7](#). Zbytek plyne z Tvzení [13.2.10](#).

■

### 13.2.12 Příklad (Příklady výpočtu exponenciály matic)

(1) Pro matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

platí

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Proto podle Tvzení 13.2.10 platí<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (e^{-1} + e^1)/2 & (e^{-1} - e^1)/2 \\ (e^{-1} - e^1)/2 & (e^{-1} + e^1)/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(1) & -\sinh(1) \\ -\sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) Ukážeme, že platí

$$\exp\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = e^a \cdot \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

Definujme komplexní číslo  $\alpha = a + bi$ . Potom pro každé  $k \geq 0$  platí

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha^k) & -\operatorname{Im}(\alpha^k) \\ \operatorname{Im}(\alpha^k) & \operatorname{Re}(\alpha^k) \end{pmatrix}$$

Takže platí

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha^k/k!) & -\operatorname{Im}(\alpha^k/k!) \\ \operatorname{Im}(\alpha^k/k!) & \operatorname{Re}(\alpha^k/k!) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k/k!\right) & -\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k/k!\right) \\ \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k/k!\right) & \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k/k!\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(e^\alpha) & -\operatorname{Im}(e^\alpha) \\ \operatorname{Im}(e^\alpha) & \operatorname{Re}(e^\alpha) \end{pmatrix} \\ &= e^a \cdot \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kde jsme využili rovností

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^\alpha = e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$$

pro  $\alpha = a + bi$ .

(3) Ukážeme, že platí

$$\exp\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = e^a \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podle Důsledku 11.4.13 je součet

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordanův tvar. Navíc platí

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>4</sup>Připomeňme *hyperbolický kosinus*  $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$  a *hyperbolický sinus*  $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ . Obě funkce jsou definovány pro všechna reálná  $x$ .



Protože

$$\exp\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

platí podle části (3) Tvzení 13.2.8

$$\exp\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^a \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Analogicky, tj. s využitím Důsledku 11.4.13 a části (3) Tvzení 13.2.8 platí rovnosti

$$\begin{aligned} \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} e^{ta} & 0 \\ 0 & e^{tb} \end{pmatrix} \\ \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) &= e^{ta} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) &= e^{ta} \cdot \begin{pmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kde  $t$  je libovolné reálné číslo.

V podkapitole O.2 uvidíme, že pro řešení *soustav diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty* bude nutné umět spočítat exponenciálu jistých reálných čtvercových matic.

Exponenciálu reálné čtvercové matice je snadné spočítat, známe-li její Jordanův tvar, viz následující Tvzení 13.2.13.

Protože ale Jordanův tvar čtvercové matice nemusí obecně existovat, budeme si muset v takových případech pomoci *trikem*, viz Tvzení 13.2.14 a Poznámku 11.4.7.

**13.2.13 Tvzení** *At  $\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1} \cdot (D(\lambda_1; \dots; \lambda_n) + \mathbf{N}) \cdot \mathbf{T}$  je Jordanův tvar matice, at  $\text{nil}(\mathbf{N}) = k$ . Potom*

$$\exp(\mathbf{M}) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \left( D(e^{\lambda_1}; \dots; e^{\lambda_n}) \cdot \left( \mathbf{E}_n + \mathbf{N} + \frac{\mathbf{N}^2}{2} + \dots + \frac{\mathbf{N}^{k-1}}{(k-1)!} \right) \right) \cdot \mathbf{T}$$

DŮKAZ. Podle Tvzení 13.2.10 stačí spočítat exponenciálu Jordanova tvaru

$$D(\lambda_1; \dots; \lambda_n) + \mathbf{N}$$

Podle Důsledku 11.4.13 platí rovnost  $D(\lambda_1; \dots; \lambda_n) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot D(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$ . Tudíž podle Tvzení 13.2.8 platí

$$\exp(D(\lambda_1; \dots; \lambda_n) + \mathbf{N}) = \exp(D(\lambda_1; \dots; \lambda_n)) \cdot \exp(\mathbf{N}) = D(e^{\lambda_1}; \dots; e^{\lambda_n}) \cdot \left( \mathbf{E}_n + \mathbf{N} + \frac{\mathbf{N}^2}{2} + \dots + \frac{\mathbf{N}^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

■

Pokud charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$  reálné matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  nelze v  $\mathbb{R}[x]$  rozložit na kořenové faktory, pak Jordanův tvar matice  $\mathbf{M}$  *neexistuje*, viz Důsledek 11.4.5. Pro matici  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lze najít exponenciálu podobným trikem jako v Tvzení 10.4.11. Pro případ výpočtu exponenciály obecné matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , která *nemá* reálný Jordanův tvar, odkazujeme na Poznámku 11.4.7.

**13.2.14 Tvzení** *Předpokládejme, že charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$  matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  nad  $\mathbb{R}$  má komplexní kořen  $\lambda = a + bi$ , kde  $b \neq 0$ . Potom*

$$\exp(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \cdot e^a \cdot \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

kde

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

je komplexní vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě  $\lambda$ .

DŮKAZ. V důkazu Tvzení 10.4.11 jsme ukázali, že platí rovnost

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Podle Tvzení 13.2.10 a Příkladu 13.2.12 platí

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \exp(\mathbf{M}) \cdot \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = e^a \cdot \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

■

**13.2.15 Příklad** Spočteme  $\exp(\mathbf{M})$  pro reálnou matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Protože  $\text{char}_{\mathbf{M}}(x) = (-2 - x)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5 = (x - (-2 + i))(x - (-2 - i))$  v  $\mathbb{C}[x]$ , nemá matice  $\mathbf{M}$  reálný Jordanův tvar. Vybereme<sup>5</sup> si komplexní vlastní hodnotu  $\lambda = -2 + i$  a najdeme komplexní vlastní vektor řešením soustavy  $(\mathbf{A} - (-2 + i) \cdot \mathbf{E}_2 \mid \mathbf{o})$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ iR_1 + R_2 \end{array}$$

To znamená, že komplexní vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě  $\lambda = -2 + i$  má tvar

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podle Tvzení 13.2.14 platí

$$\exp(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = e^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

### 13.3 Separabilní Hilbertovy prostory a abstraktní Fourierovy řady

Každý lineární prostor  $L$  nad  $\mathbb{R}$ , který je vybaven skalárním součinem  $\langle - \mid - \rangle$ , je vybaven i normou

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}$$

Viz Tvzení 12.2.3. V této podkapitole nás budou zajímat lineární prostory se skalárním součinem, které jsou ve vytvořené normě úplné. Budeme jim říkat *Hilbertovy prostory* a zajímavé aplikace těchto prostorů budou nekonečné dimenze.

Pro další studium lze doporučit některou z knih

- ☞ Avner Friedman, *Foundations of modern analysis*, Dover Publications, 1982.
- ☞ Leonard V. Kantorovich a Gleb P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, 1982.
- ☞ Alois Kufner, *Geometrie Hilbertova prostoru*, SNTL, 1985.

**13.3.1 Definice** Ať  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{R}$  se skalárním součinem  $\langle - \mid - \rangle$ . Řekneme, že  $L$  je *Hilbertův prostor*, pokud je úplný (to jest, Banachův) v normě  $\| - \|$  vytvořené skalárním součinem  $\langle - \mid - \rangle$ .

Definice 13.3.1 je velmi obecná: v inženýrské praxi se lze často omezit pouze na speciální Hilbertovy prostory, kterým říkáme *separabilní*. Jak uvidíme, separabilní Hilbertovy prostory „nemají příliš velikou dimenzi“. Co znamená „nebyt příliš velkou množinou“ ovšem musíme vysvětlit.

Připomněme si definici konečné množiny z Poznámky 1.2.12:

<sup>5</sup>Pro vlastní hodnotu  $-2 - i$  by výpočet probíhal analogicky.

Řekneme, že množina  $M$  je konečná, pokud existuje přirozené číslo  $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$  a bijektivní zobrazení  $b : n \rightarrow M$ .

Konečné množiny jistě jsou „nepříliš veliké“. V hierarchii „velikosti“ množin budeme muset ale postoupit o stupeň výše. O následujícím pojmu se lze podrobněji dočíst například v knihách

☞ Bohuslav Balcar a Petr Štěpánek, *Teorie množin* (2. vydání), Academia, Praha, 2005.

☞ Thomas Jech, *Set theory* (3. vydání), Springer Monographs in Mathematics, 2006.

**13.3.2 Definice** Řekneme, že množina  $M$  je *spočetná*, pokud existuje bijektivní zobrazení  $b : \mathbb{N} \rightarrow M$ . Množina  $M$  je *nejvýše spočetná*, pokud je buď konečná nebo spočetná.

**13.3.3 Poznámka (Indexovací schémata)** Je-li  $M$  konečná množina, pak existuje bijektivní zobrazení  $b : n \rightarrow M$  pro nějaké přirozené číslo  $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . To znamená, že lze psát

$$M = \{b(k) \mid k \in n\}$$

neboli

$$M = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$$

kde  $x_k = b(k)$  pro  $k \in n$ . Bijektivní zobrazení  $b : n \rightarrow M$  tedy je *indexovacím schématem* všech prvků množiny  $M$ .

Ukážeme, že stejný princip lze zformulovat i pro spočetné množiny. Připomeňme, že  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  je množina všech přirozených čísel. Bijekce  $b : \mathbb{N} \rightarrow M$  tedy *indexuje* prvky množiny  $M$  přirozenými čísly. To znamená, že pro spočetnou množinu  $M$  lze psát

$$M = \{b(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

neboli

$$M = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$$

kde  $x_k = b(k)$  pro  $n \in \mathbb{N}$ . Bijektivní zobrazení  $b : \mathbb{N} \rightarrow M$  tedy je opět *indexovacím schématem* všech prvků množiny  $M$ .

### 13.3.4 Příklad

- (1) Množina  $\mathbb{N}$  je spočetná. Například identické zobrazení  $\text{id} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je požadovaná bijekce. Indexovací schéma  $\text{id}$  tedy říká, že například přirozené číslo 23 513 má index 23 513, protože  $\text{id}(23\,513) = 23\,513$ . To jest, přirozené číslo 23 513 je „23 513-té v pořadí, určeném bijekcí  $\text{id}$ “.
- (2) Množina  $\mathbb{Z}$  všech celých čísel je spočetná. Například zobrazení

$$b(k) = \begin{cases} k/2, & \text{je-li } k \text{ sudé} \\ -(k+1)/2, & \text{je-li } k \text{ liché} \end{cases}$$

je bijekce. Indexovací schéma  $b$  tedy říká, že celé číslo  $-23\,513$  má index 47 025, protože

$$b(47\,025) = -23\,513$$

To jest, celé číslo 23 513 je „47 025-té v pořadí, určeném bijekcí  $b$ “.

- (3) Množina  $\mathbb{R}$  všech reálných čísel spočetná není. Tento fakt nebudeme dokazovat, podrobnosti lze nalézt například v knihách

☞ Bohuslav Balcar a Petr Štěpánek, *Teorie množin* (2. vydání), Academia, Praha, 2005.

☞ Thomas Jech, *Set theory* (3. vydání), Springer Monographs in Mathematics, 2006.

**13.3.5 Definice** Řekneme, že Hilbertův prostor  $L$  nad  $\mathbb{R}$  je *separabilní*, pokud existuje nejvýše spočetná množina  $B$  nenulových vektorů z  $L$  s následujícími vlastnostmi:

- (1) Množina  $B$  je *ortonormální*, tj. pro libovolnou dvojici  $\vec{b}, \vec{b}'$  různých vektorů platí  $\langle \vec{b} | \vec{b}' \rangle = 0$  a  $\|\vec{b}\| = 1$ .
- (2) Množina  $\text{span}(B)$  je *hustá* v  $L$ , tj. pro každý vektor  $\vec{x}$  a každé číslo  $\varepsilon > 0$  existuje vektor  $\vec{v}$  ze  $\text{span}(B)$  tak, že

$$\|\vec{x} - \vec{v}\| < \varepsilon$$

Množině  $B$  s oběma výše uvedenými vlastnostmi říkáme *úplná ortonormální množina* v  $L$ .

*Slogan* pro separabilní Hilbertův prostor  $L$ .

V  $L$  existuje konečná nebo spočetná množina vektorů  $B$  s následujícími dvěma vlastnostmi:

- (1) Různé prvky množiny  $B$  jsou na sebe navzájem kolmé a každý z těchto vektorů má normu jedna.
- (2) Rovnost  $\text{span}(B) = L$  nemusí platit. Platí ale něco podobného: každý vektor  $\vec{x}$  má ve svém libovolně malém okolí nějaký prvek  $\text{span}(B)$ .
- To znamená, že prvky  $\text{span}(B)$  jsou „hustě rozloženy“ po  $L$ .

### 13.3.6 Příklad (Příklady separabilních Hilbertových prostorů)

- (1) Prostor  $\mathbb{R}^n$  (s jakýmkoli skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$ ) je separabilní Hilbertův prostor.

Podle Tvzení 13.1.13 je  $\mathbb{R}^n$  se skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$  Hilbertův prostor.

Označme jako  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle - | - \rangle$ . Taková báze existuje díky Větě 12.4.14: stačí ortogonalizovat a poté normalizovat jakoukoli bázi prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Pak  $B$  je ortonormální množina. Protože platí  $\text{span}(B) = \mathbb{R}^n$ , je množina  $\text{span}(B)$  hustá v  $\mathbb{R}^n$ .

- (2) Ukážeme příklad teoreticky důležitého separabilního Hilbertova prostoru.

Označme jako  $\ell^2$  množinu všech posloupností  $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$  takových, že řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2$$

je konvergentní.

- (a) Množina  $\ell^2$  spolu s operacemi

$$(a_k)_{k=0}^{+\infty} + (b_k)_{k=0}^{+\infty} = (a_k + b_k)_{k=0}^{+\infty}, \quad a \cdot (a_k)_{k=0}^{+\infty} = (a \cdot a_k)_{k=0}^{+\infty}$$

je lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ .

Stačí ukázat, že  $\ell^2$  je lineární podprostor lineárního prostoru  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  reálných posloupností z Příkladu 1.1.9. Budeme postupovat podle Věty 1.6.2.

- (i) Posloupnost  $(0)_{k=0}^{+\infty}$  samých nul leží v  $\ell^2$ .
- (ii) Ať  $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$  a  $(b_k)_{k=0}^{+\infty}$  jsou posloupnosti z  $\ell^2$ . Potom  $(a_k + b_k)_{k=0}^{+\infty}$  je posloupnost z  $\ell^2$ .
- (iii) Ať  $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$  je posloupnost z  $\ell^2$  a  $a \in \mathbb{R}$ . Protože pak řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^2 \cdot a_k^2$$

je konvergentní, je posloupnost  $(a \cdot a_k)_{k=0}^{+\infty}$  prvkem  $\ell^2$ .

- (b) Lineární prostor  $\ell^2$  lze vybavit skalárním součinem

$$\langle (a_k)_{k=0}^{+\infty} | (b_k)_{k=0}^{+\infty} \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot b_k$$

(c) Norma vytvořená výše uvedeným skalárním součinem je

$$\|(a_k)_{k=0}^{+\infty}\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2}$$

V této normě je prostor  $\ell^2$  úplný. Toto tvrzení dokázat nebudeme, viz například knihu

☞ Leonard V. Kantorovich a Gleb P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, 1982.

(d) Hilbertův prostor  $\ell^2$  je separabilní.

Jako množinu  $B$  zvolíme spočetnou množinu  $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , kde posloupnost  $e_n$  má na  $n$ -tém místě jedničku, jinak má posloupnost  $e_n$  samé nuly.

- (i) Pro  $n \neq m$  platí  $\langle e_n \mid e_m \rangle = 0$ . Dále platí  $\|e_n\| = 1$  pro všechna  $n$ .
- (ii) Ať  $\vec{x} = (a_k)_{k=0}^{+\infty}$  je posloupnost z  $\ell^2$  a ať  $\varepsilon > 0$  je libovolné reálné číslo. Protože řada  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2$  je konvergentní, existuje  $n$  tak, že

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k^2 \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 - \sum_{k=0}^n a_k^2 \right| < \varepsilon^2$$

Posloupnost  $\vec{v} = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$  (tj. nuly od  $(n+1)$ -ní posice) je evidentně ve  $\text{span}(B)$ . Potom

$$\|\vec{x} - \vec{v}\| = \sqrt{\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 - \sum_{k=0}^n a_k^2 \right|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Celkově jsme ukázali, že  $\ell^2$  je separabilní Hilbertův prostor.

(3) Další důležitý příklad separabilního Hilbertova prostoru uvidíme v podkapitole D.2.

V Definici 13.3.5 jsme vyžadovali, aby v separabilním Hilbertově prostoru existovala nejvýše spočetná úplná ortonormální množina. Je jasné, že lze požadovat pouze *ortogonalitu*; poté lze totiž jednotlivé prvky ortogonální množiny *normovat*.

**13.3.7 Definice** Ať  $L$  je lineární prostor se skalárním součinem  $\langle - \mid - \rangle$ . Řekneme, že množina  $M$  nenulových vektorů je *ortogonální*, pokud pro libovolné dva různé vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  z  $M$  platí  $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$ .

**13.3.8 Lemma** Ať  $L$  je lineární prostor se skalárním součinem  $\langle - \mid - \rangle$ . Je-li  $M$  ortogonální množina, pak  $M$  je lineárně nezávislá.

DŮKAZ. Zvolme navzájem různé vektory  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  z množiny  $M$  a předpokládejme, že platí

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i = \vec{o}$$

Ukážeme, že pro libovolné  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  platí  $a_{i_0} = 0$ . Platí

$$0 = \langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{o} \rangle = \langle \vec{x}_{i_0} \mid \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{x}_i \rangle = a_{i_0} \cdot \langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{x}_{i_0} \rangle$$

kde poslední rovnost platí díky ortogonalitě vektorů z množiny  $M$ . Protože musí platit  $\langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{x}_{i_0} \rangle \neq 0$  (vektory z množiny  $M$  jsou totiž nenulové), platí  $a_{i_0} = 0$ . ■

Nyní zavedeme důležitý pojem *Fourierovy řady*.

**13.3.9 Definice (Formální Fourierova řada)** Ať  $L$  je separabilní Hilbertův prostor, ať  $B = \{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots\}$  je příslušná úplná ortonormální množina. Pro vektor  $\vec{x}$  říkáme zápisu

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

formální Fourierova řada vektoru  $\vec{x}$ . V této souvislosti říkáme reálnému číslu  $\langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle$   $k$ -tý Fourierův koeficient vektoru  $\vec{x}$ .



### 13.3.10 Poznámka Zápis

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

je třeba chápat následovně:

- (1) Je-li úplná ortonormální množina *konečná*, tj., pokud  $B = \{\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_n\}$ , je formální Fourierova řada *konečný součet*

$$\sum_{k=0}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

Fourierovu řadu lze tedy v tomto případě *sečíst* (konečný součet vektorů je opět vektor). Pro Fourierovy řady v konečné dimenzi, viz Poznámku 13.3.15.

- (2) Je-li úplná ortonormální množina *nekonečná*, tj., pokud  $B = \{\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_k, \dots\}$ , je formální Fourierova řada *pouhý zápis*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

Jak uvidíme v Důsledku 13.3.13, formální Fourierova řada *vždy konverguje v normě* příslušného Hilbertova prostoru.

**13.3.11 Tvzení ( $n$ -tý částečný součet Fourierovy řady)** Ať  $L$  je separabilní Hilbertův prostor, ať  $B = \{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots\}$  je příslušná úplná ortonormální množina. Potom pro každé  $n$  platí: vektor

$$\sum_{k=0}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

je ortogonální projekce vektoru  $\vec{x}$  na podprostor  $\text{span}(\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_n)$ .

DŮKAZ. Důkaz plyne okamžitě z Tvzení 12.4.12. ■

Následující jednoduchý důsledek říká, že posloupnost Fourierových koeficientů libovolného vektoru patří do separabilního Hilbertova prostoru  $\ell^2$  z Příkladu 13.3.6.

**13.3.12 Tvzení (Besselova nerovnost)** Ať  $L$  je separabilní Hilbertův prostor, ať  $B = \{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots\}$  je příslušná úplná ortonormální množina. Ať

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

je formální Fourierova řada vektoru  $\vec{x}$ . Potom platí

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2$$

DŮKAZ. Označíme-li

$$\vec{s}_n = \sum_{k=0}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

potom platí  $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{s}_n\|^2 + \|\vec{s}_n\|^2$  podle Tvzení 13.3.11 a podle Pythagorovy věty (Lemma 12.2.10). To znamená, že platí

$$\sum_{k=0}^n |\langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle|^2 = \|\vec{s}_n\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2$$

Tudíž nekonečná řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle|^2$$

reálných čísel má shora omezenou neklesající posloupnost částečných součtů. Proto je tato nekonečná řada konvergentní a platí

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2$$

■

Besselova nerovnost má řadu důležitých důsledků. Prvním z nich je fakt, že jakákoli formální Fourierova řada konverguje v normě příslušného Hilbertova prostoru.

**13.3.13 Důsledek** *At  $L$  je separabilní Hilbertův prostor, at  $B = \{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots\}$  je příslušná úplná ortonormální množina. Potom pro každý vektor  $\vec{x}$  platí: formální Fourierova řada*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

konverguje v normě Hilbertova prostoru  $L$ .

DŮKAZ. Stačí ukázat, že posloupnost  $\|\vec{s}_n\|^2$  je cauchyovská, kde

$$\vec{s}_n = \sum_{k=0}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

je  $n$ -tý částečný součet formální Fourierovy řady vektoru  $\vec{x}$ . To ale ihned plyne z rovnosti

$$\|\vec{s}_{n+p} - \vec{s}_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |\langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle|^2$$

a z Tvzení 13.3.12.

■

Dalším důsledkem Besselovy nerovnosti je způsob výpočtu skalárního součinu: stačí spočítat skalární součin Fourierových koeficientů v Hilbertově prostoru  $\ell^2$ .

**13.3.14 Důsledek (Parsevalova rovnost)** *At  $L$  je separabilní Hilbertův prostor, at  $B = \{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots\}$  je příslušná úplná ortonormální množina. Potom pro každou dvojici vektorů  $\vec{x}, \vec{y}$  platí rovnost*

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_k | \vec{y} \rangle$$

DŮKAZ. Podle Důsledku 13.3.13 platí rovnosti<sup>6</sup>

$$\vec{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k \quad \vec{y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \langle \vec{b}_k | \vec{y} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

Tudíž

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_k | \vec{y} \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_k | \vec{y} \rangle$$

■



**13.3.15 Poznámka (Fourierovy řady v konečné dimenzi)** Předchozí výsledky z teorie formálních Fourierových řad mají průzračný tvar v případě, kdy Hilbertův prostor  $L$  má *konečnou* dimenzi.

V této poznámce tak budeme předpokládat, že  $L$  je Hilbertův prostor s ortonormální bází  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ .

(1) Pro vektor  $\vec{x}$  říkáme zápisu

$$\sum_{k=1}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

*formální Fourierova řada* vektoru  $\vec{x}$ . V této souvislosti říkáme reálnému číslu  $\langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle$  *k-tý Fourierův koeficient* vektoru  $\vec{x}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

(2) V případě  $\dim(L) = n$  lze každý vektor  $\vec{x}$  z  $L$  „rozvinout“ do Fourierovy řady, tj., každý vektor  $\vec{x}$  z  $L$  platí rovnost

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

To dokážeme snadno: zvolme libovolný vektor  $\vec{x}$  z  $L$ . Protože  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  je báze  $L$ , existují jednoznačně určená reálná čísla  $r_1, \dots, r_n$  tak, že platí

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n r_k \cdot \vec{b}_k$$

Potom pro jakékoli  $k_0$  z množiny  $\{1, \dots, n\}$  platí

$$\langle \vec{b}_{k_0} | \vec{x} \rangle = \langle \vec{b}_{k_0} | \sum_{k=1}^n r_k \cdot \vec{b}_k \rangle = \sum_{k=1}^n r_k \cdot \underbrace{\langle \vec{b}_{k_0} | \vec{b}_k \rangle}_{=\delta_{k_0,k}} = r_{k_0}$$

a to jsme chtěli dokázat.

(3) *Besselova nerovnost* má v případě  $\dim(L) = n$  tvar *rovnosti*

$$\sum_{k=1}^n |\langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle|^2 = \|\vec{x}\|^2$$

Podle předchozího totiž víme, že

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k$$

a proto platí

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k \middle| \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_j | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_j | \vec{x} \rangle \cdot \underbrace{\langle \vec{b}_k | \vec{b}_j \rangle}_{=\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n |\langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle|^2$$

<sup>6</sup>Pozor! Obě rovnosti je třeba chápat ve smyslu normy.



(4) *Parsevalova rovnost* má pro vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  tvar

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{k=0}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_k | \vec{y} \rangle$$

a dokáže se takto:

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_k \mid \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_j | \vec{y} \rangle \cdot \vec{b}_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_j | \vec{y} \rangle \cdot \underbrace{\langle \vec{b}_k | \vec{b}_j \rangle}_{=\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n \langle \vec{b}_k | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_k | \vec{y} \rangle$$

## Kapitola 14

# Věta o hlavních osách a SVD rozklad matice

In addition to the straight lines, circles, planes and spheres with which every student of Euclid is familiar, the Greeks knew the properties of the curves given by cutting a cone with a plane — the ellipse, parabola and hyperbola. Kepler discovered by analysis of astronomical observations, and Newton proved mathematically on the basis of the inverse square law of gravitational attraction, that the planets move in ellipses. The geometry of ancient Greece thus became the cornerstone of modern astronomy.

John Lighton Synge, *Kandelman's Krim*

V podkapitole 14.1 ukážeme jednu aplikaci skalárního součinu: dokážeme větu o hlavních osách, která umožňuje (například) klasifikaci kuželoseček v prostoru  $\mathbb{R}^2$ .

Velmi podstatným důsledkem věty o hlavních osách je existence SVD rozkladu obecné matice. SVD rozkladům je věnována podkapitola 14.2. V podkapitole 14.3 pak ukážeme, jakým způsobem lze SVD matice použít k její aproximaci maticí nižší hodnosti. Na závěr, v podkapitole 14.4, ukážeme, že pro každou matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  existuje matice  $\mathbf{A}^+ : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ , která se „chová velmi podobně jako inverzní matice“.

### 14.1 Věta o hlavních osách

V této podkapitole budeme pracovat v lineárním prostoru  $L$  dimenze  $n$ , který je vybavený skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$ . Naším hlavním výsledkem je věta o hlavních osách (Důsledek 14.1.5). Vysvětlíme tuto větu na příkladu.



**14.1.1 Příklad (Hlavní osy kuželosečky)** V tomto příkladu pracujeme v  $\mathbb{R}^2$  se standardním skalárním součinem. Ať  $\mathbf{A}$  je matice  $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$  nad  $\mathbb{R}$ . Pro každý vektor  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  v  $\mathbb{R}^2$  dává maticový součin  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  reálné číslo:

$$(x_1 \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

Součin  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  tedy určuje křivku stupně 2 v  $\mathbb{R}^2$ ; například rovnice  $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 50$  vypadá jako rovnice kuželosečky. Je to elipsa? Parabola? Hyperbola? Nebo vůbec o kuželosečku nejde?

Odpověď nám dá matice transformace souřadnic do ortonormální báze prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Pokud totiž nalezneme ortonormální bázi  $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  takovou, že platí rovnost

$$\mathbf{T}_{K_2 \rightarrow B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B \rightarrow K_2} = D(a, b)$$

kde  $D(a, b)$  je diagonální matice, budeme znát odpověď na položenou otázku. Proč? Platí totiž

$$\mathbf{T}_{B \rightarrow K_2} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$$

Podle Tvzení 9.2.5 platí  $\mathbf{T}_{K_2 \rightarrow B} = (\mathbf{T}_{B \rightarrow K_2})^{-1}$ . Protože báze  $B$  je ortonormální, platí podle Věty 17.2.2 rovnost  $(\mathbf{T}_{B \rightarrow K_2})^{-1} = (\mathbf{T}_{B \rightarrow K_2})^T$ . Celkově by tedy platila rovnost

$$(\mathbf{T}_{B \rightarrow K_2})^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B \rightarrow K_2} = D(a, b)$$

To ale znamená, že v souřadnicovém systému  $B$  by levá strana  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  křivky stupně 2 měla tvar  $au^2 + bv^2$ , kde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Opravdu: stačí spočítat

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto K_2})^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \cdot D(a, b) \cdot \mathbf{u} = au^2 + bv^2$$

A o kvalitě křivky tvaru  $au^2 + bv^2 = 50$  umíme rozhodnout na základě hodnot reálných čísel  $a$  a  $b$ :

- (1) Jsou-li obě čísla  $a, b$  kladná, určuje rovnice  $au^2 + bv^2 = 50$  elipsu.
- (2) Je-li jedno z čísel  $a, b$  kladné a druhé záporné, určuje rovnice  $au^2 + bv^2 = 50$  hyperbolu.
- (3) Je-li jedno z čísel  $a, b$  nulové a druhé kladné, určuje rovnice  $au^2 + bv^2 = 50$  dvě rovnoběžné přímky.
- (4) Ve všech ostatních případech určuje rovnice  $au^2 + bv^2 = 50$  prázdnou množinu.

Matici  $\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$  nalezneme metodou z podkapitoly 10.4.

$$\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 5-x & -2 \\ -2 & 5-x \end{vmatrix} = (5-x) \cdot (5-x) - 4 = x^2 - 10x + 21$$

Vlastní hodnoty matice  $\mathbf{A}$  jsou tedy kořeny  $\lambda_1 = 7$  a  $\lambda_2 = 3$  rovnice  $x^2 - 10x + 21 = 0$ .

- (1) Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě  $\lambda_1 = 7$ .

Vyřešíme soustavu  $(\mathbf{A} - 7 \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ , neboli  $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Nenulové řešení je například  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (2) Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě  $\lambda_1 = 3$ .

Vyřešíme soustavu  $(\mathbf{A} - 3 \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{t}_2 = \mathbf{o}$ , neboli  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Nenulové řešení je například  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Vektory  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  jsou lineárně nezávislé, proto  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^2$ . Tato báze je *ortogonální*, protože platí rovnost  $\langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$ . Hledaná báze  $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  tedy vznikne *ortonormalisací* báze  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  podle Poznámky 12.4.18:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

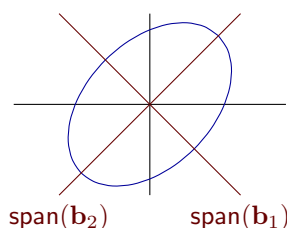
Proto

$$\mathbf{T}_{B \mapsto K_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{T}_{B \mapsto K_2})^{-1} = (\mathbf{T}_{B \mapsto K_2})^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

a tudíž

$$(\mathbf{T}_{B \mapsto K_2})^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

V nových souřadnicích  $B$  matice  $\mathbf{A}$  určuje elipsu  $7u^2 + 3v^2 = 50$ , přímky  $\text{span}(\mathbf{b}_1)$  a  $\text{span}(\mathbf{b}_2)$  jsou její hlavní osy.



Věta o hlavních osách, kterou zformulujeme a dokážeme v Důsledku 14.1.5, je jen abstrakcí Příkladu 14.1.1. Přesněji: ukážeme, že hlavní osy lze nalézt pro každý „kvadratický výraz“  $\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle$ , jakmile matice  $\mathbf{A}$  je „symetrická“ vzhledem k obecnému skalárnímu součinu  $\langle - \mid - \rangle$  na  $\mathbb{R}^n$ . Této symetrii budeme říkat *samoadjungovanost* vzhledem ke skalárnímu součinu.

**14.1.2 Definice (Samoadjungované lineární zobrazení)** Řekneme, že lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je (vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle - \mid - \rangle$ ) *samoadjungované*, když pro všechny vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  platí rovnost  $\langle \mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \mid \mathbf{f}(\vec{y}) \rangle$ .

**14.1.3 Poznámka** Pojem lineárního zobrazení, samoadjungovaného vzhledem ke skalárnímu součinu, zobecňuje pojem *symetrické* matice. Opravdu, v Důsledku 12.4.9 jsme dokázali, že pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a *standardní* skalární součin  $\langle - \mid - \rangle$  rovnost  $\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \rangle$  platí právě tehdy, když matice  $\mathbf{A}$  je symetrická.

**14.1.4 Věta (Vlastní hodnoty samoadjungovaného zobrazení)** Ať  $\dim(L) = n, n \geq 1$  a ať  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení, samoadjungované vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle - \mid - \rangle$ . Potom platí:

- (1) Každá vlastní hodnota zobrazení  $\mathbf{f}$  je reálné číslo.
- (2) Vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám zobrazení  $\mathbf{f}$  jsou na sebe navzájem kolmé.

DŮKAZ. Při důkazu využijeme toho, že podle Tvzení 12.2.3 a 12.2.12 skalární součin  $\langle - \mid - \rangle$  indukce metriku  $d$  na prostoru  $L$ , kde

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\langle \vec{x} - \vec{y} \mid \vec{x} - \vec{y} \rangle}$$

Toho využijeme pro definici jisté *spojité* funkce  $F : L \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , tj. funkce, která pro každý vektor  $\vec{v}$  z množiny  $L \setminus \{\vec{0}\}$  splňuje<sup>1</sup>

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{x} \in L \setminus \{\vec{0}\} (d(\vec{x}, \vec{v}) < \delta \Rightarrow |F(\vec{x}) - F(\vec{v})| < \varepsilon)$$

Ať  $\mathbf{g} : L \rightarrow L$  je *jakékoli* lineární zobrazení. Podle výše uvedené definice a vlastností skalárního součinu je snadné ověřit, že zobrazení z  $L$  do  $\mathbb{R}$ , dané předpisem  $\vec{x} \mapsto \langle \mathbf{g}(\vec{x}) \mid \vec{x} \rangle$ , je spojitě.

- (1) Budeme postupovat indukcí podle  $n \geq 1$ .

- (a)  $n = 1$ .

V Příkladu 3.4.2 jsme ukázali, že  $\mathbf{f}$  má nutně tvar  $\mathbf{f}(\vec{x}) = a \cdot \vec{x}$  pro jednoznačně určený skalár  $a$ . To znamená, že  $a$  je jediná reálná vlastní hodnota zobrazení  $\mathbf{f}$ .

- (b)  $n + 1 \geq 1$ .

Ať  $\dim(L) = n + 1$ . Předpokládejme, že pro každý lineární prostor  $L'$  dimenze  $n$  se skalárním součinem  $\langle - \mid - \rangle'$  má každé lineární zobrazení  $\mathbf{f}' : L' \rightarrow L'$ , které je samoadjungované vzhledem ke  $\langle - \mid - \rangle'$ , všechny vlastní hodnoty reálné.

Nyní nalezneme jeden vlastní vektor  $\vec{v}_0$  a jednu reálnou vlastní hodnotu  $\lambda_0$  lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ .

Pro  $\vec{x} \neq \vec{0}$  definujeme

$$F(\vec{x}) = \frac{\langle \mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \rangle}{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}$$

Zobrazení  $F : L \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě, protože jde o podíl dvou spojitých zobrazení z  $L \setminus \{\vec{0}\}$  do  $\mathbb{R}$  zadaných předpisy  $\vec{x} \mapsto \langle \mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \rangle$  a  $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle$ .

Díky vlastnostem skalárního součinu platí pro každé nenulové reálné  $a$  rovnosti

$$F(a \cdot \vec{x}) = \frac{\langle \mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) \mid a \cdot \vec{x} \rangle}{\langle a \cdot \vec{x} \mid a \cdot \vec{x} \rangle} = \frac{a^2 \cdot \langle \mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \rangle}{a^2 \cdot \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \rangle}{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} = F(\vec{x})$$

To znamená, že zobrazení  $F$  je plně určeno svými hodnotami na množině  $S = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ . Množina  $S$  je evidentně omezená a uzavřená v  $L$ . Spojité zobrazení  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$  tedy nabývá svého

<sup>1</sup>Tato definice spojitosti je bezprostředním zobecněním spojitosti pro reálné funkce jedné reálné proměnné. Pro více informací odkazujeme například na podkapitolu 13.1.

minima: existuje  $\vec{v}_0$  tak, že  $F(\vec{v}_0) \leq F(\vec{x})$  pro všechny vektory  $\vec{x}$  z  $S$ . Tudíž platí  $F(\vec{v}_0) \leq F(\vec{x})$  pro všechny vektory  $\vec{x}$  z  $L \setminus \{\vec{o}\}$ .

Zvolme *pevný* nenulový vektor  $\vec{x}$  z  $L$ . Definujme funkce z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  následovně (u funkce  $u$  využíváme, že  $\mathbf{f}$  je samoadjungované vzhledem ke  $\langle - | - \rangle$ )

$$\begin{aligned} u(t) &= \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0 + t \cdot \vec{x}) | \vec{v}_0 + t \cdot \vec{x} \rangle \\ &= t^2 \cdot \langle \mathbf{f}(\vec{x}) | \vec{x} \rangle + t \cdot \langle \vec{v}_0 | \mathbf{f}(\vec{x}) \rangle + t \cdot \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{x} \rangle + \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{v}_0 \rangle \\ &= t^2 \cdot \langle \mathbf{f}(\vec{x}) | \vec{x} \rangle + 2t \cdot \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{x} \rangle + \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{v}_0 \rangle \\ v(t) &= \langle \vec{v}_0 + t \cdot \vec{x} | \vec{v}_0 + t \cdot \vec{x} \rangle \\ &= t^2 \cdot \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + 2t \cdot \langle \vec{v}_0 | \vec{x} \rangle + \langle \vec{v}_0 | \vec{v}_0 \rangle \end{aligned}$$

Protože  $v(0) = \langle \vec{v}_0 | \vec{v}_0 \rangle = 1 \neq 0$ , je spojitá funkce  $v(t)$  nenulová na nějakém okolí bodu  $t = 0$ . Tudíž můžeme na tomto okolí definovat funkci

$$f(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$$

která nabývá svého minima v bodě  $t = 0$ , protože platí

$$F(\vec{v}_0) = \frac{u(0)}{v(0)}$$

Protože funkce  $u$  i  $v$  mají derivaci v bodě  $t = 0$ , platí podle věty o derivaci podílu

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{u'(0) \cdot v(0) - u(0) \cdot v'(0)}{(v(0))^2} \\ &= \frac{2 \cdot \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{v}_0 | \vec{v}_0 \rangle - 2 \cdot \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{v}_0 \rangle \cdot \langle \vec{v}_0 | \vec{x} \rangle}{(\langle \vec{v}_0 | \vec{v}_0 \rangle)^2} \\ &= 2 \cdot \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{x} \rangle - 2 \cdot \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{v}_0 \rangle \cdot \langle \vec{v}_0 | \vec{x} \rangle \\ &= 2 \cdot \left( \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{x} \rangle - \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{v}_0 \rangle \cdot \langle \vec{v}_0 | \vec{x} \rangle \right) \\ &= 2 \cdot \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) - \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{v}_0 \rangle \cdot \vec{v}_0 | \vec{x} \rangle \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že  $\langle \vec{v}_0 | \vec{v}_0 \rangle = 1$ .

Protože  $f$  má v bodě  $t = 0$  minimum, platí  $f'(0) = 0$ . Proto platí

$$\langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) - \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{v}_0 \rangle \cdot \vec{v}_0 | \vec{x} \rangle = 0$$

Protože vektor  $\vec{x}$  byl libovolný, platí rovnost

$$\mathbf{f}(\vec{v}_0) - \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{v}_0 \rangle \cdot \vec{v}_0 = \vec{o}$$

neboli

$$\mathbf{f}(\vec{v}_0) = \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{v}_0 \rangle \cdot \vec{v}_0$$

Ukázali jsme, že  $\vec{v}_0$  je vlastní vektor lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$  s vlastní hodnotou  $\lambda_0 = \langle \mathbf{f}(\vec{v}_0) | \vec{v}_0 \rangle$ .

Doplňme nalezený vektor  $\vec{v}_0$  na *ortogonální* bázi  $B = (\vec{v}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  prostoru  $L$ . Definujme  $L' = \text{span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  a na něm skalární součin

$$\langle \vec{x}' | \vec{y}' \rangle' = \langle \vec{x}' | \vec{y}' \rangle$$

Protože báze  $B$  je ortogonální, lze definovat lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L' \rightarrow L'$  předpisem  $\mathbf{f}'(\vec{x}') = \mathbf{f}(\vec{x}')$ . Zobrazení  $\mathbf{f}'$  je samoadjungované vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle - | - \rangle'$  a podle indukčního předpokladu má všechny vlastní hodnoty reálné.

Tudíž má i zobrazení  $\mathbf{f}$  všechny vlastní hodnoty reálné.

- (2) Ať  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  jsou dvě různé vlastní hodnoty zobrazení  $\mathbf{f}$  s příslušnými vlastními vektory  $\vec{v}_1$  a  $\vec{v}_2$ . Chceme ukázat rovnost  $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = 0$ .

Platí

$$\lambda_1 \cdot \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = \langle \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{f}(\vec{v}_1) | \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1 | \mathbf{f}(\vec{v}_2) \rangle = \langle \vec{v}_1 | \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \rangle = \lambda_2 \cdot \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle$$

kde jsme využili samoadjungovanost zobrazení  $\mathbf{f}$ . To znamená, že

$$\lambda_1 \cdot \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle - \lambda_2 \cdot \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = 0$$

Protože  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , je  $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = 0$ . ■

**14.1.5 Důsledek (Věta o hlavních osách)** Ať  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{R}$  dimenze  $n$ , vybavený skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$ . Ať  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení samoadjungované vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle - | - \rangle$ . Potom existuje ortonormální báze prostoru  $L$ , která sestává z vlastních vektorů zobrazení  $\mathbf{f}$ .

**DŮKAZ.** Budeme postupovat indukcí podle  $n \geq 1$ .

- (1)  $n = 1$ . Podle Příkladu 3.4.2 je jakékoli lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  dáno předpisem  $\mathbf{f}(\vec{x}) = a \cdot \vec{x}$  pro jednoznačně určený reálný skalár  $a$ . Takové zobrazení je samoadjungované vzhledem ke skalárnímu součinu, protože pro všechny vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  platí rovnosti  $\langle a \cdot \vec{x} | \vec{y} \rangle = a \cdot \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | a \cdot \vec{x} \rangle$ . Jakýkoli vektor  $\vec{v}$  s normou 1 je vlastním vektorem zobrazení  $\mathbf{f}$  (příslušným vlastní hodnotě  $a$ ) a je ortonormální bází prostoru  $L$ .
- (2)  $n + 1 \geq 1$ . Ať  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{R}$  dimenze  $n + 1$ , vybavený skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$ . Ať  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  je lineární zobrazení samoadjungované vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle - | - \rangle$ . Předpokládejme, že tvrzení platí pro samoadjungovaná zobrazení lineárních prostorů dimenze  $n$ .

Podle Věty 14.1.4 existuje reálná vlastní hodnota  $\lambda$  lineárního zobrazení  $\mathbf{f}$ . Zvolme příslušný vlastní vektor  $\vec{v}$  s normou 1. Prostor  $L'$  definujeme jako

$$\{\vec{x} \in L \mid \langle \vec{v} | \vec{x} \rangle = 0\}$$

Z vlastností skalárního součinu plyne, že  $L'$  je lineární podprostor prostoru  $L$ . Navíc platí, že  $\dim(L') = n$ . Doplníme-li totiž vektor  $\vec{v}$  na *jakoukoli* ortogonální bázi  $(\vec{v}, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  prostoru  $L$ , pak  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je báze lineárního prostoru  $L'$ . Nyní definujeme pro libovolné vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  z prostoru  $L'$

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle' = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$$

Je jasné, že  $\langle - | - \rangle'$  je skalární součin na  $L'$ . Připomeňme, že platí  $\mathbf{f}(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$ . Protože  $\mathbf{f}$  je samoadjungované vzhledem ke  $\langle - | - \rangle$ , platí pro každý vektor  $\vec{x}$  z  $L'$  rovnosti

$$\langle \vec{v} | \mathbf{f}(\vec{x}) \rangle = \langle \mathbf{f}(\vec{v}) | \vec{x} \rangle = \langle \lambda \cdot \vec{v} | \vec{x} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{v} | \vec{x} \rangle = 0$$

Tudíž můžeme definovat lineární zobrazení

$$\mathbf{f}' : L' \rightarrow L', \quad \vec{x} \mapsto \mathbf{f}(\vec{x})$$

které je očividně samoadjungované vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle - | - \rangle'$ .

Podle indukčního předpokladu existuje ortonormální báze  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  prostoru  $L'$ , která sestává z vlastních vektorů zobrazení  $\mathbf{f}'$ .

Potom  $(\vec{v}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  je ortonormální báze prostoru  $L$ , která sestává z vlastních vektorů zobrazení  $\mathbf{f}$ . ■

Podle Tvzení 10.4.2 a Důsledku 14.1.5 je tedy každé samoadjungované lineární zobrazení na prostoru konečné dimenze se skalárním součinem diagonalizovatelné. Důležitost Důsledku 14.1.5 tkví v tom, že diagonalizovatelnost lze realizovat přechodem k ortonormální bázi. Vektorům této ortonormální báze se říká *hlavní osy*. Jde totiž o přímé zobecnění geometrických úvah z Příkladu 14.1.1.

**14.1.6 Příklad (Klasifikace regulárních kvadrik v  $\mathbb{R}^2$ )** V tomto příkladu předpokládáme, že  $\langle - | - \rangle$  je jakýkoli skalární součin v  $\mathbb{R}^2$ . Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je regulární matice, která je samoadjungovaná vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle - | - \rangle$ ,  $\mathbf{b}$  je libovolný vektor v  $\mathbb{R}^2$  a  $c$  je libovolné reálné číslo.

Potom je možné sestavit obecný „kvadratický výraz“

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b} | \mathbf{x} \rangle + c \quad (14.1)$$

který určuje *křivku* v rovině

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b} | \mathbf{x} \rangle + c = 0\} \quad (14.2)$$

které se říká *regulární kvadrika* (regulární proto, že matice  $\mathbf{A}$  je regulární). V tomto příkladu využijeme Důsledek 14.1.5 ke *klasifikaci* regulárních kvadrik.

Nejprve výraz (14.1) upravíme tak, abychom se zbavili lineárního členu (jde o zobecnění známé úpravy kvadratického trojčlenu  $ax^2 + bx + c$  na úplný čtverec). Protože matice  $\mathbf{A}$  je regulární, existuje jediný vektor  $\mathbf{x}_0$  s vlastností

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{b}$$

Potom můžeme spočítat

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) | \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle &= \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{x}_0 \rangle - \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 | \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 | \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x} | \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 \rangle - \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 | \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 | \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x} | -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{b} \rangle - \langle -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{b} | \mathbf{x} \rangle + \langle -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{b} | \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b} | \mathbf{x} \rangle - \frac{1}{2} \cdot \langle \mathbf{b} | \mathbf{x}_0 \rangle \end{aligned}$$

kde jsme využili vlastností skalárního součinu, definice  $\mathbf{x}_0$  a toho, že  $\mathbf{A}$  je samoadjungovaná vzhledem k  $\langle - | - \rangle$ .

To znamená, že výraz (14.1) můžeme přepsat na

$$\langle \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) | \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + c + \frac{1}{2} \cdot \langle \mathbf{b} | \mathbf{x}_0 \rangle \quad (14.3)$$

ve kterém se již lineární člen nevyskytuje (jak  $c$  tak  $\langle \mathbf{b} | \mathbf{x}_0 \rangle$  na  $\mathbf{x}$  nezávisí, jsou to reálná čísla).

Stačí tedy umět klasifikovat kvadriky tvaru

$$\{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}' | \mathbf{x}' \rangle + d = 0\} \quad (14.4)$$

kde  $d$  je reálné číslo. Obecnou kvadriku (14.2) pak dostaneme substitucemi  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0$  a  $c = d - \frac{1}{2} \cdot \langle \mathbf{b} | \mathbf{x}_0 \rangle$ , kde  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{b}$ . To je důvod, proč vektoru  $\mathbf{x}_0$  říkáme *střed* regulární kvadriky (14.2). Naše „úprava na čtverec“ totiž znamenala *posunutí* počátku souřadnic do bodu  $\mathbf{x}_0$ .

Podle Důsledku 14.1.5 existuje ortonormální báze  $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ , ve které je matice  $\mathbf{A}$  diagonální, řekněme  $D(a, b)$ . Protože matice  $\mathbf{A}$  je regulární, jsou obě vlastní hodnoty  $a$  a  $b$  nenulové. To znamená, že v nové bázi  $B$  máme klasifikovat křivky tvaru

$$K = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid au_1^2 + bu_2^2 + d = 0\} \quad (14.5)$$

kde  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ . Je zjevné, že jde o nějaké kuželosečky. Hlavní osy těchto kuželoseček jsou navzájem kolmé přímky  $\mathbf{x}_0 + \text{span}(\mathbf{b}_1)$  a  $\mathbf{x}_0 + \text{span}(\mathbf{b}_2)$ . Klasifikaci křivek (14.5) provedeme rozlišením znamének čísel  $a$ ,  $b$  a  $d$ .

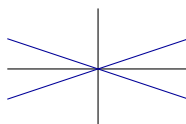
(1) V případě, kdy  $d = 0$ , je možné křivku

$$\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid au_1^2 + bu_2^2 = 0\}$$

popsat buď jako bod  $\mathbf{o}$  (v případě, že  $a$  i  $b$  mají stejná znaménka), nebo (v případě, kdy  $a$  a  $b$  mají různá znaménka) jako dvojici přímek, které se protínají v počátku:

$$u_2 = \pm \frac{b}{a} \cdot u_1$$

Obrázek:



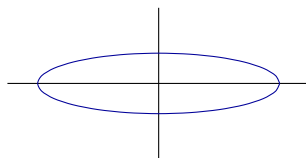
(2) V případě, kdy  $d \neq 0$ , je možné vhodnou změnou měřítka křivku  $K$  popsat jako

$$K = \{\mathbf{u}' \in \mathbb{R}^2 \mid a'u_1'^2 + b'u_2'^2 = 1\}$$

(a) Ať  $a' > 0$  a  $b' > 0$ . Křivka  $K$  je elipsa s normalisovanou rovnicí

$$\left(u_1'\sqrt{a'}\right)^2 + \left(u_2'\sqrt{b'}\right)^2 = 1$$

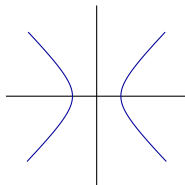
Obrázek:



(b) Ať  $a' > 0$  a  $b' < 0$ . Křivka  $K$  je hyperbola s normalisovanou rovnicí

$$\left(u_1'\sqrt{a'}\right)^2 - \left(u_2'\sqrt{-b'}\right)^2 = 1$$

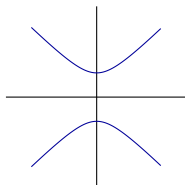
Obrázek:



(c) Ať  $a' < 0$  a  $b' > 0$ . Křivka  $K$  je hyperbola s normalisovanou rovnicí

$$-\left(u_1'\sqrt{-a'}\right)^2 + \left(u_2'\sqrt{b'}\right)^2 = 1$$

Obrázek:



**14.1.7 Poznámka** Připomeňme, že jsme klasifikovali pouze regulární kvadriky, a to jen v prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Pro obecnou klasifikaci kvadrik (zahrnující například i klasifikaci parabol) odkazujeme na knihy

☞ Ladislav Bican, *Lineární algebra*, SNTL, 1979

☞ Werner H. Greub, *Linear algebra*, Springer-Verlag, 1967

**14.1.8 Příklad (Zjištění kvality kvadriky v  $\mathbb{R}^2$ )** V prostoru  $\mathbb{R}^2$  se standardním skalárním součinem rozhodněte, jakou kvadriku určuje rovnice

$$4x_1x_2 - 4x_1 + 8x_2 - 16 = 0$$

Přepsáním do maticového tvaru  $\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b} \mid \mathbf{x} \rangle + c = 0$  dostáváme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad c = -16$$

Zjišťujeme, že jde o regulární kvadriku, protože  $\det(\mathbf{A}) = -4 \neq 0$ . Střed této regulární kvadriky je v bodě

$$\mathbf{x}_0 = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



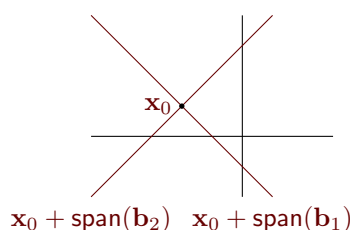
Protože  $\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) = x^2 - 4$ , jsou vlastní hodnoty matice  $\mathbf{A}$  čísla 2 a  $-2$ . Ortonormální báze  $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  příslušná vlastním hodnotám 2 a  $-2$  je tvořena vektory

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

a hlavní osy kvadriky jsou přímky

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right)$$

Na obrázku hlavní osy zakreslíme takto:



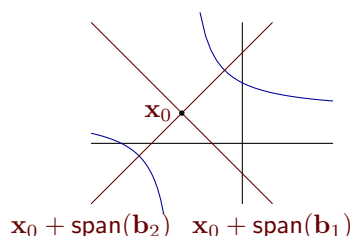
Zbývá spočítat

$$d = c + \frac{1}{2} \cdot \langle \mathbf{b} \mid \mathbf{x}_0 \rangle = -16 + \frac{1}{2} \cdot 16 = -8$$

To znamená, že v souřadnicovém systému  $B$  máme zjistit, jak vypadá křivka  $2u_1^2 - 2u_2^2 = 8$ . Jde o rovnici hyperboly

$$\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{u_2}{2}\right)^2 = 1$$

Celkový obrázek je



## 14.2 SVD rozklad matice

V této podkapitole ukážeme, že jakoukoli matici  $\mathbf{M}$  lze psát jako součin tří speciálních matic. Tomuto součinu říkáme *SVD rozklad* matice  $\mathbf{M}$  (anglicky: *singular value decomposition*). SVD rozklad má celou řadu aplikací: jednu z nich ukážeme v podkapitole 14.3, další pak v Dodatcích C a G.

Připomeňme, že pro jakoukoli matici  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  je  $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$  symetrická matice. Podle Důsledku 14.1.5 existuje tudíž vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v  $\mathbb{R}^s$  ortonormální báze  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$  prostoru  $\mathbb{R}^s$  tvořená vlastními vektory matice  $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M}$ . Proto platí rovnosti

$$\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_i\|^2 = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_i)^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \cdot \underbrace{\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M}}_{=\lambda_i \cdot \mathbf{v}_i} \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \cdot \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \cdot \underbrace{\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{v}_i}_{=1} = \lambda_i$$

kde  $\lambda_i$  je vlastní hodnota matice  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$  příslušná vektoru  $\mathbf{v}_i$ . To znamená, že pro každou vlastní hodnotu  $\lambda_i$  matice  $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M}$ , s příslušným vektorem  $\mathbf{v}_i$  z ortonormální báze vlastních vektorů, platí

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{a} \quad \|\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_i\| = \sqrt{\lambda_i}$$

Předchozí úvahy dovolují zavést následující pojem:

**14.2.1 Definice (Singulární hodnoty matice)** Ať  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  je jakákoli matice. *Singulární hodnota* matice  $\mathbf{M}$  je  $\sigma = \sqrt{\lambda}$ , kde  $\lambda$  je nenulová vlastní hodnota matice  $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M}$ . Budeme předpokládat, že všechny singulární hodnoty matice  $\mathbf{M}$  jsou uspořádány do nerostoucí posloupnosti:  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_s > 0$ .

**14.2.2 Poznámka (Geometrický význam singulárních hodnot)** Ať  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  má singulární hodnoty  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_s > 0$  a ať příslušná ortonormální báze z vlastních vektorů matice  $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M}$  je  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$ . Potom platí:

- (1)  $\sigma_1$  je maximální hodnota  $\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}\|$  pro  $\|\mathbf{x}\| = 1$ . Toto maximum je nabyto vektorem  $\mathbf{v}_1$ , protože  $\|\mathbf{v}_1\| = 1$  a  $\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_1\| = \sigma_1$ .
- (2)  $\sigma_2$  je maximální hodnota  $\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}\|$  pro  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , které jsou kolmé k  $\mathbf{v}_1$ . Toto maximum je nabyto vektorem  $\mathbf{v}_2$ , protože  $\|\mathbf{v}_2\| = 1$ ,  $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = 0$  a  $\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_2\| = \sigma_2$ .
- (3)  $\sigma_3$  je maximální hodnota  $\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}\|$  pro  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , které jsou kolmé k  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$ . Toto maximum je nabyto vektorem  $\mathbf{v}_3$ , protože  $\|\mathbf{v}_3\| = 1$ ,  $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle = 0$  a  $\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_3\| = \sigma_3$ .
- (4) A tak dále.

Představme si ortonormální bázi  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$  jako pravoúhlý osový kříž, jehož vektory leží na povrchu jednotkové koule v prostoru  $\mathbb{R}^s$ . Potom vektory  $\mathbf{M}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{M}\mathbf{v}_s$  tvoří osy elipsoidu v  $\mathbb{R}^r$  s délkami  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_s > 0$ .

Okamžitou aplikací geometrického významu singulárních hodnot matice je zjištění její hodnoty.

**14.2.3 Lemma** Ať matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  má pouze  $h$  singulárních hodnot. Potom  $\text{rank}(\mathbf{M}) = h$ .

DŮKAZ. Předpokládejme, že nenulové vlastní hodnoty matice  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$  jsou seřazeny nerostoucím způsobem, tj., že platí nerovnosti  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_h > \lambda_{h+1} = \dots = \lambda_s = 0$ . Dále předpokládejme, že  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$  je příslušná ortonormální báze vlastních vektorů. Pro  $i \neq j$  platí

$$(\mathbf{M}\mathbf{v}_i)^T (\mathbf{M}\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_i^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i^T \lambda_j \mathbf{v}_j = 0$$

To znamená, že množina  $\{\mathbf{M}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{M}\mathbf{v}_s\}$  je ortogonální. Navíc  $\mathbf{M}\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$  právě tehdy, když  $1 \leq i \leq h$ . Protože  $\text{im}(\mathbf{M}) = \text{span}(\{\mathbf{M}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{M}\mathbf{v}_h\})$ , platí  $\text{rank}(\mathbf{M}) = h$ . ■

**14.2.4 Věta (Plný SVD rozklad matice)** Ať  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  je jakákoli matice. Pak existují tři matice  $\mathbf{V} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $\mathbf{U} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  takové, že platí:

- (1)  $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ .
- (2) Matice  $\mathbf{V}$  je ortogonální, tj. platí  $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$ .
- (3) Matice  $\mathbf{U}$  je ortogonální, tj. platí  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ .
- (4) Matice  $\mathbf{S}$  má na diagonále singulární hodnoty matice  $\mathbf{M}$ . Všechny ostatní položky matice  $\mathbf{S}$  jsou nulové.

Zápisu  $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$  říkáme SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$ .

DŮKAZ. Označme jako  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$  ortonormální bázi příslušnou vlastním hodnotám  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s \geq 0$  matice  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ . Dále jako  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_h > 0$  označme singulární hodnoty matice  $\mathbf{M}$ . Pro  $i = 1, \dots, h$  definujeme

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{M}\mathbf{v}_i}{\sigma_i}$$

Povšimněme si, že pro  $i, j \in \{1, \dots, h\}$  platí

$$\mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{u}_j = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_j}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\lambda_j \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j}{\sigma_i \sigma_j} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j \\ 0, & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

S využitím Lemmatu 14.2.3 to znamená, že  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h)$  je ortonormální báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{M})$ . Další vektory  $\mathbf{u}_{h+1}, \dots, \mathbf{u}_r$  zvolíme tak, aby  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$  byla uspořádaná ortonormální báze prostoru  $\mathbb{R}^r$ .

Nyní definujeme matice  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s), \quad \mathbf{S} = (\sigma_1 \mathbf{e}_1, \dots, \sigma_h \mathbf{e}_h, \underbrace{\mathbf{o}, \dots, \mathbf{o}}_{(s-h)\text{-krát}}), \quad \mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$$

Potom evidentně platí podmínka (4). Protože sloupce matice  $\mathbf{V}$  jsou tvořeny ortonormální bází prostoru  $\mathbb{R}^s$ , platí  $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{E}_s$ . To dokazuje podmínku (2). Podmínka (3) se dokáže analogicky.

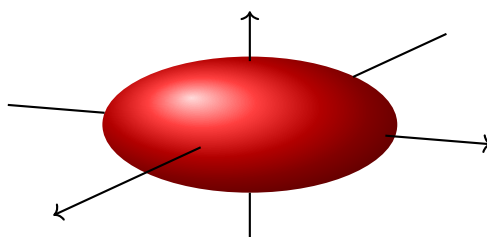
Zbývá dokázat rovnost  $\mathbf{M} = \mathbf{USV}^T$ . Protože  $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ , stačí ukázat rovnost  $\mathbf{US} = \mathbf{MV}$ . Podle definice matic  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{V}$  platí

$$\mathbf{US} = (\sigma_1 \mathbf{u}_1, \dots, \sigma_h \mathbf{u}_h, \underbrace{\mathbf{o}, \dots, \mathbf{o}}_{(s-h)\text{-krát}}), \quad \mathbf{MV} = (\mathbf{Mv}_1, \dots, \mathbf{Mv}_s) = (\sigma_1 \mathbf{u}_1, \dots, \sigma_h \mathbf{u}_h, \underbrace{\mathbf{o}, \dots, \mathbf{o}}_{(s-h)\text{-krát}})$$

■



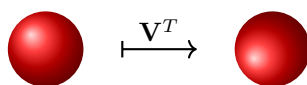
**14.2.5 Poznámka (Geometrie plného SVD rozkladu  $\mathbf{M} = \mathbf{USV}^T$ )** V plném SVD rozkladu  $\mathbf{M} = \mathbf{USV}^T$  jsou matice  $\mathbf{V}^T$  a  $\mathbf{U}$  nové ortonormální báze prostorů  $\mathbb{R}^s$  a  $\mathbb{R}^r$ , vzhledem k nimž se  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  jeví jako změna měřítka  $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ . To znamená, že existují ortonormální báze prostorů  $\mathbb{R}^s$  a  $\mathbb{R}^r$ , ve kterých lineární zobrazení  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  zobrazí jednotkovou kouli  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$  z prostoru  $\mathbb{R}^s$  (viz Poznámku 12.2.15) na elipsoid



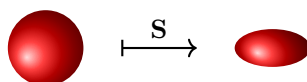
v prostoru  $\mathbb{R}^r$ . Elipsoid je případně v některé ose degenerovaný.

Geometrický význam ortogonálních matic budeme podrobně studovat v podkapitole 15.4, viz například Tvzení 15.4.16. Pro následující nám však stačí pouze slogan: ortogonální matice je „v podstatě“ rotace (přesněji: jde buď o rotaci nebo o jisté zrcadlení — takovému zobrazení se říká *nevlastní rotace*). Obraz jednotkové koule v  $\mathbb{R}^s$  při zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Mx}$  tedy lze rozložit na tři fáze:

- (1) Rotace (případně nevlastní)  $\mathbf{V}^T : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ :



- (2) Změna měřítka (případně i s degenerací)  $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ :



- (3) Rotace (případně nevlastní)  $\mathbf{U} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ :



Plný SVD rozklad matice budeme v dalším často nahrazovat *redukovaným* SVD rozkladem, viz Poznámku 14.2.7. Zatím spočteme dva příklady plného SVD rozkladu.

**14.2.6 Příklad (Nalezení plného SVD rozkladu matice)**

(1) Nalezneme plný SVD rozklad matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Budeme postupovat podle Věty 14.2.4.

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice  $\mathbf{M}$  má dvě singulární hodnoty  $\sigma_1 = 3$ ,  $\sigma_2 = 1$ . Matice  $\mathbf{V}$  je matice  $\mathbf{E}_3$  a matice  $\mathbf{U}$  je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

To znamená, že plný SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$  je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

(2) Nalezneme plný SVD rozklad matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Budeme postupovat podle Věty 14.2.4.

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 200 & 40 & 140 \\ 40 & 80 & 100 \\ 140 & 100 & 170 \end{pmatrix}$$

Matice  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$  má charakteristický polynom

$$\begin{aligned} \text{char}_{\mathbf{M}^T \mathbf{M}}(x) &= (200 - x) \cdot (80 - x) \cdot (170 - x) + 40 \cdot 100 \cdot 140 + 40 \cdot 100 \cdot 140 \\ &\quad - 140 \cdot 140 \cdot (80 - x) - 40 \cdot 40 \cdot (170 - x) - 100 \cdot 100 \cdot (200 - x) \\ &= -x \cdot (x - 360) \cdot (x - 90) \end{aligned}$$

Matice  $\mathbf{M}$  má dvě singulární hodnoty  $\sigma_1 = 6\sqrt{10}$ ,  $\sigma_2 = 3\sqrt{10}$ . Matice  $\mathbf{V}$  je matice

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

a matice  $\mathbf{U}$  je matice

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

To znamená, že plný SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$  je

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

**14.2.7 Poznámka (Redukovaný SVD rozklad matice)** Maticový součin  $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$  v plném SVD rozkladu matice  $\mathbf{M}$  hodnosti  $h$  lze psát ve tvaru

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^h \sigma_i \cdot \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T \quad (14.6)$$

kde  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$  je prvních  $h$  sloupců matice  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h$  je prvních  $h$  sloupců matice  $\mathbf{V}$ . Rovnost (14.6) je pouhým přepsáním rovnosti  $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ , kde využíváme faktu, že  $\mathbf{S}$  má na hlavní diagonále singulární čísla matice  $\mathbf{M}$  a ostatní položky matice  $\mathbf{M}$  jsou rovny nule.

Označíme-li  $\mathbf{U}_h = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h)$  a  $\mathbf{V}_h = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$  a  $\mathbf{S}_h = (\sigma_1 \mathbf{e}_1, \dots, \sigma_h \mathbf{e}_h)$ , lze rovnost (14.6) přepsat jako

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}_h \mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T \quad (14.7)$$

Rovnost (14.7) má velkou výhodu: matice  $\mathbf{S}_h$  je *čtvercová* a *regulární*. Jakékoli z rovností (14.6) a (14.7) říkáme *redukovaný SVD rozklad* matice  $\mathbf{M}$ .

#### 14.2.8 Příklad (Nalezení redukovaného SVD rozkladu matice)

(1) Nalezneme redukovaný SVD rozklad matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podle Příkladu 14.2.6 je plný SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$  roven součinu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proto je redukovaný SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$  roven

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0 \ 0) + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

(2) Nalezneme redukovaný SVD rozklad matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Podle Příkladu 14.2.6 je plný SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$  roven součinu

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

Proto je redukovaný SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$  roven

$$6/\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot (2/3 \ 1/3 \ 2/3) + 3/\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot (-2/3 \ 2/3 \ 1/3)$$

nebo

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}^T$$

### 14.3 Aproximace matice pomocí SVD rozkladu

Redukovaný SVD rozklad matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  z Poznámky 14.2.7 lze použít k *aproximacím*  $\mathbf{M}_k$  matice  $\mathbf{M}$ . Přesněji: pro jakékoli přirozené číslo  $k \leq \text{rank}(\mathbf{M})$  lze definovat

$$\mathbf{M}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T \quad (14.8)$$

Neboli: matice  $\mathbf{M}_k$  je  $k$ -tý částečný součet redukovaného SVD rozkladu (14.6) matice  $\mathbf{M}$ .

Ukážeme, že aproximace  $\mathbf{M}_k : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  matice  $\mathbf{M}$  jsou v jistém smyslu nejlepší možné: matice  $\mathbf{M}_k$  mají hodnot  $k$  a pro každou matici  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  hodnot  $k$  platí nerovnost  $\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F \leq \|\mathbf{M} - \mathbf{X}\|_F$ , kde  $\|\cdot\|_F$  je Frobeniova norma na prostoru  $\text{Lin}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^r)$ , viz Definici 12.2.8. Tento výsledek pochází z článku

☞ Carl Eckart a Gale Young, The approximation of one matrix by another of lower rank, *Psychometrika* 1.3 (1936), 211–218.

Uvidíme, že aproximace  $\mathbf{M}_k$  umožní podstatným způsobem *zmenšit* dimenze lineárních prostorů, se kterými pracujeme. To oceníme při nejružnějších úvahách o *kompresi dat*, viz Dodatek G.

Rovnost (14.8) lze přepsat podobně jako v Poznámce 14.2.7. Přesněji: platí rovnost

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T \quad (14.9)$$

kde  $\mathbf{U}_k = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ ,  $\mathbf{V}_k = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$  a  $\mathbf{S}_k = (\sigma_1 \mathbf{e}_1, \dots, \sigma_k \mathbf{e}_k)$ .

### 14.3.1 Příklad (Nalezení aproximace SVD rozkladu matice)

(1) Nalezneme všechny aproximace SVD rozkladu matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podle Příkladu 14.2.6 je plný SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$  roven součinu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Protože matice  $\mathbf{M}$  má pouze dvě singulární hodnoty, budou aproximace pouze dvě:

$$\mathbf{M}_1 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{M}_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0 \ 0) + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}$$

(2) Nalezneme všechny aproximace SVD rozkladu matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Podle Příkladu 14.2.6 je plný SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$  roven součinu

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

Protože matice  $\mathbf{M}$  má pouze dvě singulární hodnoty, budou aproximace pouze dvě:

$$\mathbf{M}_1 = 6/\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot (2/3 \ 1/3 \ 2/3) = 1/5 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{M}_2 = 6/\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot (2/3 \ 1/3 \ 2/3) + 3/\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot (-2/3 \ 2/3 \ 1/3) = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{M}$$

Než budeme moci dokázat hlavní výsledek této podkapitoly — Větu 14.3.3 — musíme prohloubit naše znalosti o Frobeniově skalárním součinu, zavedeném v Definici 12.1.8.

**14.3.2 Tvrzení (Základní vlastnosti Frobeniova skalárního součinu)** *At  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  a  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  jsou libovolné matice. Potom platí následující rovnosti:*

(1) *Platí rovnost  $\langle \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \rangle_F = \langle \mathbf{A}^T \mid \mathbf{B}^T \rangle_F$ .*

- (2) Pro libovolnou matici  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  platí rovnosti  $\langle \mathbf{X}\mathbf{A} \mid \mathbf{B} \rangle_F = \langle \mathbf{A} \mid \mathbf{X}^T \mathbf{B} \rangle_F$ .
- (3) Pro libovolnou matici  $\mathbf{Y} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$  platí rovnosti  $\langle \mathbf{A}\mathbf{Y} \mid \mathbf{B} \rangle_F = \langle \mathbf{A} \mid \mathbf{B}\mathbf{Y}^T \rangle_F$ .
- (4) Ať matice  $\mathbf{U} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  a  $\mathbf{V} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$  jsou ortogonální, tj. ať platí  $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$  a  $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ . Pak platí rovnost  $\langle \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}^T \mid \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V}^T \rangle_F = \langle \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \rangle_F$ .
- (5) Je-li  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$  plný SVD rozklad matice  $\mathbf{A}$ , potom  $\|\mathbf{A}\|_F = \|\mathbf{S}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_h^2}$ , kde  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_h$  jsou singulární hodnoty matice  $\mathbf{A}$ .

DŮKAZ.

- (1) Označme jako  $a_{ij}$  a  $b_{ij}$  položky matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci. Potom platí

$$\langle \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \rangle_F = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r a_{ij} b_{ij} = \langle \mathbf{A}^T \mid \mathbf{B}^T \rangle_F$$

- (2) Označme jako  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  a  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s)$  sloupcové zápisy matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ . Platí

$$\langle \mathbf{X}\mathbf{A} \mid \mathbf{B} \rangle_F = \sum_{j=1}^s (\mathbf{X}\mathbf{a}_j)^T \mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^s \mathbf{a}_j^T \mathbf{X}^T \mathbf{b}_j = \langle \mathbf{A} \mid \mathbf{X}^T \mathbf{B} \rangle_F$$

- (3) Platí

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{Y} \mid \mathbf{B} \rangle_F = \langle (\mathbf{A}\mathbf{Y})^T \mid \mathbf{B}^T \rangle_F = \langle \mathbf{Y}^T \mathbf{A}^T \mid \mathbf{B}^T \rangle_F = \langle \mathbf{A}^T \mid \mathbf{Y}\mathbf{B}^T \rangle_F = \langle \mathbf{A}^T \mid (\mathbf{B}\mathbf{Y}^T)^T \rangle_F = \langle \mathbf{A} \mid \mathbf{B}\mathbf{Y}^T \rangle_F$$

kde jsme použili části (1) a (2).

- (4) Podle předchozího platí

$$\langle \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}^T \mid \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V}^T \rangle_F = \langle \mathbf{A}\mathbf{V}^T \mid \mathbf{U}^T \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V}^T \rangle_F = \langle \mathbf{A}\mathbf{V}^T \mid \mathbf{B}\mathbf{V}^T \rangle_F = \langle \mathbf{A} \mid \mathbf{B}\mathbf{V}^T \mathbf{V} \rangle_F = \langle \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \rangle_F$$

kde jsme využili toho, že  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  jsou ortogonální matice.

- (5) Platí

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = \langle \mathbf{A} \mid \mathbf{A} \rangle_F = \langle \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \mid \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \rangle_F = \langle \mathbf{S} \mid \mathbf{S} \rangle_F = \|\mathbf{S}\|_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_h^2$$

protože matice  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  jsou ortogonální. ■

**14.3.3 Věta (Věta o nejlepší aproximaci maticí nižší hodnosti)** Ať matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  má redukovaný SVD rozklad

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^h \sigma_i \cdot \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T$$

Označme, pro  $k = 1, \dots, h$ , jako

$$\mathbf{M}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \cdot \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T$$

$k$ -tý částečný součet redukovaného SVD rozkladu. Potom platí:

- (1) Hodnost matice  $\mathbf{M}_k$  je  $k$ .
- (2) Pro jakoukoli matici  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  hodnosti nejvýše  $k$  platí  $\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F^2 \leq \|\mathbf{M} - \mathbf{X}\|_F^2$ .

DŮKAZ. Označme jako  $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$  plný SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$  a jako  $\mathbf{M}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T$ .

- (1) Platí  $\text{rank}(\mathbf{M}_k) = \text{rank}(\mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T) = \text{rank}(\mathbf{S}_k) = k$ .

(2) Ať  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  je jakákoli matice hodnosti nejvýše  $k$ . Potom platí

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{X}\|_F^2 = \|\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T - \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{X}\mathbf{V}\mathbf{V}^T\|_F^2 = \|\mathbf{S} - \mathbf{U}^T\mathbf{X}\mathbf{V}\|_F^2$$

kde v první rovnosti jsme využili  $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$ ,  $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$  a ve druhé rovnosti jsme využili podmínku (4) Tvzení 14.3.2.

Označme jako  $y_{ij}$  položku matice  $\mathbf{U}^T\mathbf{X}\mathbf{V}$  v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci. Potom platí

$$\|\mathbf{S} - \mathbf{U}^T\mathbf{X}\mathbf{V}\|_F^2 = \sum_{i=1}^h |\sigma_i - y_{ii}|^2 + \sum_{i \neq j} |y_{ij}|^2 \geq \sum_{i=1}^h |\sigma_i - y_{ii}|^2 \geq \sum_{i=k+1}^h |\sigma_i - y_{ii}|^2$$

Z poslední nerovnosti plyne, že výraz  $\|\mathbf{M} - \mathbf{X}\|_F^2$  nabývá nejmenší hodnoty pro  $\mathbf{X} = \mathbf{M}_k$ . ■

Při náhradě matice  $\mathbf{M}$  maticí  $\mathbf{M}_k$  dojde ke změně, kterou můžeme číselně vyjádřit relativní změnou matice.

**14.3.4 Definice (Relativní změna matice)** Ať  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  je matice hodnosti  $h$  se singulárními hodnotami  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_h > 0$ . Podílu

$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \sqrt{\frac{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_h^2}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_h^2}}$$

kde  $k \leq h$ , budeme říkat *relativní změna matice  $\mathbf{M}$  při nahrazení maticí  $\mathbf{M}_k$* .

**14.3.5 Příklad** Nalezneme relativní změny matic z Příkladu 14.3.1.

(1) Matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

má singulární hodnoty  $\sigma_1 = 3$  a  $\sigma_2 = 1$ . Proto

$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_1\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.316 \quad \frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_2\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \sqrt{\frac{0}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 0$$

(2) Matice

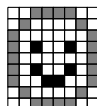
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

má singulární hodnoty  $\sigma_1 = 6\sqrt{10}$  a  $\sigma_2 = 3\sqrt{10}$ . Proto

$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_1\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0.141 \quad \frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_2\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \sqrt{\frac{0}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 0$$

Jako praktickou ukázkou náhrady matice  $\mathbf{M}$  maticemi  $\mathbf{M}_k$  ukážeme velmi jednoduchou kompresi obrázků.

**14.3.6 Příklad (Komprese obrázku)** Předpokládejme, že je zadán obrázek  $9 \times 8$  „pixelů“ ve třech odstínech černě:





Obrázek lze zadat maticí

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kde 0 = bílá, 1/2 = šedá, 1 = černá.

Plný SVD rozklad matice  $\mathbf{M}$  má tvar  $\mathbf{USV}^T$ , kde matice  $\mathbf{S}$  je zaokrouhlena na exponenciální formát se dvěma desetinnými místy:<sup>2</sup>

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2.57 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.63 \cdot 10^{-16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.65 \cdot 10^{-17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.16 \cdot 10^{-17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.80 \cdot 10^{-17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro praktické účely k aproximaci matice  $\mathbf{M}$  metodami podkapitoly 14.3 stačí použít první čtyři singulární hodnoty matice  $\mathbf{M}$ , protože pátá až osmá singulární hodnota je prakticky rovna nule. Obrázky pro první čtyři aproximace matice  $\mathbf{M}$  vypadají takto:



Relativní změny matice  $\mathbf{M}$  (viz Definici 14.3.4) jsou následující:

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_1\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} &\approx \sqrt{\frac{1.61^2 + 1.13^2 + 1.00^2}{2.57^2 + 1.61^2 + 1.13^2 + 1.00^2}} \approx 0.65 \\ \frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_2\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} &\approx \sqrt{\frac{1.13^2 + 1.00^2}{2.57^2 + 1.61^2 + 1.13^2 + 1.00^2}} \approx 0.45 \\ \frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_3\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} &\approx \sqrt{\frac{1.00^2}{2.57^2 + 1.61^2 + 1.13^2 + 1.00^2}} \approx 0.30 \\ \frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_4\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} &\approx \sqrt{\frac{0}{2.57^2 + 1.61^2 + 1.13^2 + 1.00^2}} = 0.00 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Vypočteno programem Maple 16. Nemáte-li k profesionálním programům přístup, pak doporučujeme například maticový kalkulátor <http://www.bluebit.gr/matrix-calculator/>, který SVD rozklad umí spočítat.

I když Příklad 14.3.6 ukázal, jak vytvořit ztrátovou kompresi obrázku, *nejedná se o používanou metodu*. Běžně používané metody ztrátových kompresí (obrazu, hudby) jsou daleko sofistikovanější: využívají sníženou citlivost lidského zraku a sluchu k některým frekvencím. K určení frekvencí se většinou používá nějaké formy *diskrétní Fourierovy transformace* (také: *DFT*) nebo *diskrétní kosinové transformace* (také: *DCT*). Více informací lze nalézt například v knihách

☞ K. Ramamohan Rao a Peter C. L. Yip, *Discrete cosine transform: Algorithms, advantages, applications*, Academic Press, 1990.

☞ K. Ramamohan Rao, Do Nyeon Kim a Jae Jeong Hwang, *Fast Fourier transform: Algorithms and applications*, Springer-Verlag, 2010.

nebo v Dodatku H.

Vlastnosti Frobeniova skalárního součinu nám umožňují napsat SVD rozklad matice ještě v jednom tvaru, a sice jako lineární kombinaci jistých ortogonálních projekcí.

**14.3.7 Tvzení (Spektrální tvar SVD rozkladu matice)** *At matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  má redukovaný SVD rozklad*

$$\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^h \sigma_i \cdot \underbrace{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T}_{=\mathbf{P}_i}$$

Potom platí:

- (1) Matice  $\mathbf{P}_i : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $i = 1, \dots, h$ , tvoří ortonormální množinu vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle - | - \rangle_F$ .
- (2) Pro každou singulární hodnotu  $\sigma_i$  matice  $\mathbf{M}$  platí  $\sigma_i = \langle \mathbf{M} | \mathbf{P}_i \rangle_F$ .

Celkově tedy lze psát rovnost

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^h \langle \mathbf{M} | \mathbf{P}_i \rangle_F \cdot \mathbf{P}_i$$

které říkáme spektrální tvar SVD rozkladu matice  $\mathbf{M}$ .

DŮKAZ. Připomeňme, že  $k$ -tý sloupec matice  $\mathbf{P}_i$  je  $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{e}_k$ .

- (1) Pro jakákoli  $i, j$  z množiny  $\{1, \dots, h\}$  platí

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_i | \mathbf{P}_j \rangle_F &= \sum_{k=1}^s (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{e}_k)^T \cdot (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{e}_k) \\ &= \sum_{k=1}^s (\mathbf{e}_k^T \cdot \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_i^T) \cdot (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{e}_k) \\ &= \sum_{k=1}^s \mathbf{e}_k^T \cdot \mathbf{v}_i \cdot \underbrace{\mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{u}_j}_{=\delta_{ij}} \cdot \mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{e}_k \\ &= \delta_{ij} \cdot \sum_{k=1}^s \mathbf{e}_k^T \cdot \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j^T \cdot \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s$  jsou ortonormální.

Pro  $i \neq j$  tedy platí  $\langle \mathbf{P}_i | \mathbf{P}_j \rangle_F = 0$ . Pro  $i = j$  platí

$$\langle \mathbf{P}_i | \mathbf{P}_i \rangle_F = \sum_{k=1}^s \mathbf{e}_k^T \cdot \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^s \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{e}_k \rangle^2$$

kde jsme jako  $\langle - | - \rangle$  označili standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^s$ . Protože  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$  je ortonormální báze prostoru  $\mathbb{R}^s$ , platí

$$\sum_{k=1}^s \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{e}_k \rangle^2 = \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1$$

takže  $\langle \mathbf{P}_i | \mathbf{P}_i \rangle_F = 1$ .

(2) Víme, že platí rovnost  $\mathbf{M} = \sum_{k=1}^h \sigma_k \cdot \mathbf{P}_k$ . Proto

$$\langle \mathbf{M} | \mathbf{P}_i \rangle_F = \sum_{k=1}^h \sigma_k \cdot \underbrace{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{P}_i \rangle_F}_{=\delta_{ki}} = \sigma_i$$

■

## 14.4 Mooreova-Penroseova pseudoinverse obecné matice

V této podkapitole ukážeme, že k obecné *obdélníkové* matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  existuje jednoznačně určená *pseudoinverse*  $\mathbf{A}^+ : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ . Pseudoinverzi matice lze (například) využít pro zobecnění metody nejmenších čtverců, viz Dodatek C. Výpočet pseudoinverse matice je poměrně komplikovaný. Využijeme k tomu existenci *singulárního rozkladu matice* (také: *singular value decomposition* nebo *SVD rozkladu matice*) z podkapitoly 14.2.

Připomeňme (viz Poznámku 4.1.11), že invertibilitu matice jsme definovali *pouze* pro čtvercové matice. Nelze tedy očekávat, že pro pseudoinverzi obdélníkové matice budou platit rovnosti z Tvzení 2.3.4.

Pseudoinverse matice byla poprvé popsána v článku

☞ Eliakim H. Moore, On the reciprocal of the general algebraic matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.* 26 (1920), 394–395

a znovu objevena v článcích

☞ Roger Penrose, A generalised inverse for matrices, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 51 (1955), 406–413

☞ Roger Penrose, On the best approximate solution of linear matrix equations, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 52 (1956), 17–19

proto se jí v literatuře říká *Mooreova-Penroseova pseudoinverse* (také jen: *pseudoinverse*) matice.

**14.4.1 Tvzení (Pokud pseudoinverse existuje, je jednoznačně určena)** *At  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  je matice. Potom existuje nanejvýš jedna matice  $\mathbf{A}^+ : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ , která splňuje následující čtyři podmínky*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+, \quad (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \quad (14.10)$$

*Matici  $\mathbf{A}^+$ , která tyto čtyři podmínky splňuje, říkáme pseudoinverse matice  $\mathbf{A}$ .*

**DŮKAZ.** Předpokládejme, že podmínky (14.10) jsou splněny dvěma maticemi  $\mathbf{A}_1^+$  a  $\mathbf{A}_2^+$ . Ukážeme, že  $\mathbf{A}_1^+ = \mathbf{A}_2^+$ , a to provedeme v několika krocích:

(1) Platí  $\mathbf{A}\mathbf{A}_1^+ = \mathbf{A}\mathbf{A}_2^+$ .

Označme  $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}\mathbf{A}_2^+$ . Stačí ukázat, že  $\mathbf{M} = \mathbf{O}_{r,r}$ . Matice  $\mathbf{M}$  je evidentně symetrická (je totiž rozdílem dvou symetrických matic). Dále platí rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 &= (\mathbf{A}\mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}\mathbf{A}_2^+)(\mathbf{A}\mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}\mathbf{A}_2^+) \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}\mathbf{A}_2^+)\mathbf{A}(\mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+) \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{A}_1^+\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}_2^+\mathbf{A})(\mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{A})(\mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+) \\ &= \mathbf{O}_{s,r}(\mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_2^+) \\ &= \mathbf{O}_{r,r} \end{aligned}$$

Pro  $j$ -tý sloupec  $\mathbf{m}_j$  matice  $\mathbf{M}$  platí  $\mathbf{m}_j = \mathbf{M}\mathbf{e}_j$ . Potom  $\|\mathbf{m}_j\|^2 = \|\mathbf{M}\mathbf{e}_j\|^2 = \mathbf{e}_j^T \underbrace{\mathbf{M}^T \mathbf{M}}_{=\mathbf{M}^2} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^T \mathbf{O}_{r,r} \mathbf{e}_j = 0$ .

Tudíž  $\mathbf{M} = \mathbf{O}_{r,r}$ .

(2) Platí  $\mathbf{A}_1^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A}$ .

Označme  $\mathbf{M} = \mathbf{A}_1^+ \mathbf{A} - \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A}$ . Analogickými úvahami jako v předchozí části lze dokázat, že  $\mathbf{M} = \mathbf{O}_{s,s}$ .

(3) Platí  $\mathbf{A}_1^+ = \mathbf{A}_2^+$ .

Podle podmínek (14.10) a podle předchozího platí rovnosti  $\mathbf{A}_1^+ = \mathbf{A}_1^+ \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{A}_1^+}_{=\mathbf{A} \mathbf{A}_2^+} = \underbrace{\mathbf{A}_1^+ \mathbf{A}}_{=\mathbf{A}_2^+ \mathbf{A}} \mathbf{A}_2^+ = \mathbf{A}_2^+ \mathbf{A} \mathbf{A}_2^+ = \mathbf{A}_2^+$ .

■

Tvrzení 14.4.1 lze použít pro popis pseudoinversí některých matic. Pro „kandidáta“ na pseudoinverzi  $\mathbf{A}^+$  totiž stačí ověřit podmínky (14.10).

#### 14.4.2 Příklad (Pseudoinverse některých matic)

(1) Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je regulární matice. Potom  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$ .

Opravdu: platí rovnosti

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}, \quad (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A})^T = \mathbf{E}_n = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{E}_n = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}$$

(2) Ať  $\mathbf{O}_{s,r} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ . Potom  $(\mathbf{O}_{s,r})^+ = \mathbf{O}_{r,s}$ .

Opravdu: platí rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{s,r} \mathbf{O}_{r,s} \mathbf{O}_{s,r} &= \mathbf{O}_{s,r}, \\ \mathbf{O}_{r,s} \mathbf{O}_{s,r} \mathbf{O}_{r,s} &= \mathbf{O}_{r,s}, \\ (\mathbf{O}_{r,s} \mathbf{O}_{s,r})^T &= \mathbf{O}_{s,s} = \mathbf{O}_{r,s} \mathbf{O}_{s,r}, \\ (\mathbf{O}_{s,r} \mathbf{O}_{r,s})^T &= \mathbf{O}_{r,r} = \mathbf{O}_{s,r} \mathbf{O}_{r,s} \end{aligned}$$

(3) Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  má hodnot  $k$ . Potom  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ .

Opravdu: platí rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= \mathbf{A}, \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T, \\ ((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A})^T &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \\ (\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \end{aligned}$$

Následující tvrzení bude mít velký význam pro intuitivní představu, jak hledat pseudoinverzi obecné matice. Viz Poznámku 14.4.4.

**14.4.3 Tvrzení (Další vlastnosti pseudoinversí)** Předpokládejme, že matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  má pseudoinverzi  $\mathbf{A}^+ : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ . Potom platí:

- (1) Matice  $\mathbf{A}^+$  má jako pseudoinverzi matici  $\mathbf{A}$ .
- (2) Matice  $\mathbf{P}_s : \mathbb{E}_s - \mathbf{A}^+ \mathbf{A}$  je ortogonální projekce na podprostor  $\ker(\mathbf{A})$ . Navíc platí  $\ker(\mathbf{P}_s) = \text{im}(\mathbf{A}^+)$ .
- (3) Matice  $\mathbf{P}_r : \mathbb{E}_r - \mathbf{A} \mathbf{A}^+$  je ortogonální projekce na podprostor  $\ker(\mathbf{A}^+)$ . Navíc platí  $\ker(\mathbf{P}_r) = \text{im}(\mathbf{A})$ .
- (4) Platí  $\ker(\mathbf{A}) \perp \text{im}(\mathbf{A}^+) = \mathbb{R}^s$ . To jest, platí  $\ker(\mathbf{A}) \oplus \text{im}(\mathbf{A}^+) = \mathbb{R}^s$  (viz Definici 1.6.13) a každý vektor z podprostoru  $\ker(\mathbf{A})$  je kolmý na každý vektor z podprostoru  $\text{im}(\mathbf{A}^+)$ .
- (5) Platí  $\ker(\mathbf{A}^+) \perp \text{im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^r$ . To jest, platí  $\ker(\mathbf{A}^+) \oplus \text{im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^r$  (viz Definici 1.6.13) a každý vektor z podprostoru  $\ker(\mathbf{A}^+)$  je kolmý na každý vektor z podprostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$ .

DŮKAZ.

(1) Tvrzení plyne okamžitě z rovností (14.10).

(2) Matice  $\mathbf{P}_s$  je symetrická, protože  $\mathbf{E}_s$  a  $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$  jsou symetrické matice. Protože

$$\mathbf{P}_s^2 = (\mathbf{E}_s - \mathbf{A}^+\mathbf{A})(\mathbf{E}_s - \mathbf{A}^+\mathbf{A}) = \mathbf{E}_s - 2\mathbf{A}^+\mathbf{A} + \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{E}_s - 2\mathbf{A}^+\mathbf{A} + \mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{E}_s - \mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{P}_s$$

je  $\mathbf{P}_s$  matice ortogonální projekce podle Důsledku 12.4.9. Ukážeme nyní, že platí rovnosti  $\text{im}(\mathbf{P}_s) = \ker(\mathbf{A})$  a  $\ker(\mathbf{P}_s) = \text{im}(\mathbf{A}^+)$ .

(a) Rovnost  $\text{im}(\mathbf{P}_s) = \ker(\mathbf{A})$ .

Protože  $\mathbf{A}\mathbf{P}_s = \mathbf{A}(\mathbf{E}_s - \mathbf{A}^+\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{O}_{s,s}$ , platí  $\text{im}(\mathbf{P}_s) \subseteq \ker(\mathbf{A})$ .

Dokážeme  $\ker(\mathbf{A}) \subseteq \text{im}(\mathbf{P}_s)$ . Zvolme libovolné  $\mathbf{x}$  v  $\ker(\mathbf{A})$ . Potom  $\mathbf{P}_s\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ . To znamená, že  $\mathbf{x}$  leží v  $\text{im}(\mathbf{P}_s)$ .

(b) Rovnost  $\ker(\mathbf{P}_s) = \text{im}(\mathbf{A}^+)$ .

Dokážeme  $\ker(\mathbf{P}_s) \subseteq \text{im}(\mathbf{A}^+)$ . Zvolme libovolné  $\mathbf{x}$  v  $\ker(\mathbf{P}_s)$ . Potom  $\mathbf{P}_s\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ , což znamená, že  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{x}$ . Ukázali jsme, že  $\mathbf{x}$  leží v  $\text{im}(\mathbf{A}^+)$ .

Dokážeme  $\text{im}(\mathbf{A}^+) \subseteq \ker(\mathbf{P}_s)$ . Zvolme libovolné  $\mathbf{x}$  v  $\text{im}(\mathbf{A}^+)$ . To znamená, že  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{u}$  pro nějaké  $\mathbf{u}$ . Potom  $\mathbf{P}_s\mathbf{x} = (\mathbf{E}_s - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{x} = (\mathbf{E}_s - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{A}^+\mathbf{u} = \mathbf{A}^+\mathbf{u} - \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{u} = \mathbf{A}^+\mathbf{u} - \mathbf{A}^+\mathbf{u} = \mathbf{o}$ . To znamená, že  $\mathbf{x}$  leží v  $\ker(\mathbf{P}_s)$ .

(3) Toto tvrzení plyne okamžitě z části (2) záměnou  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{A}^+$ .

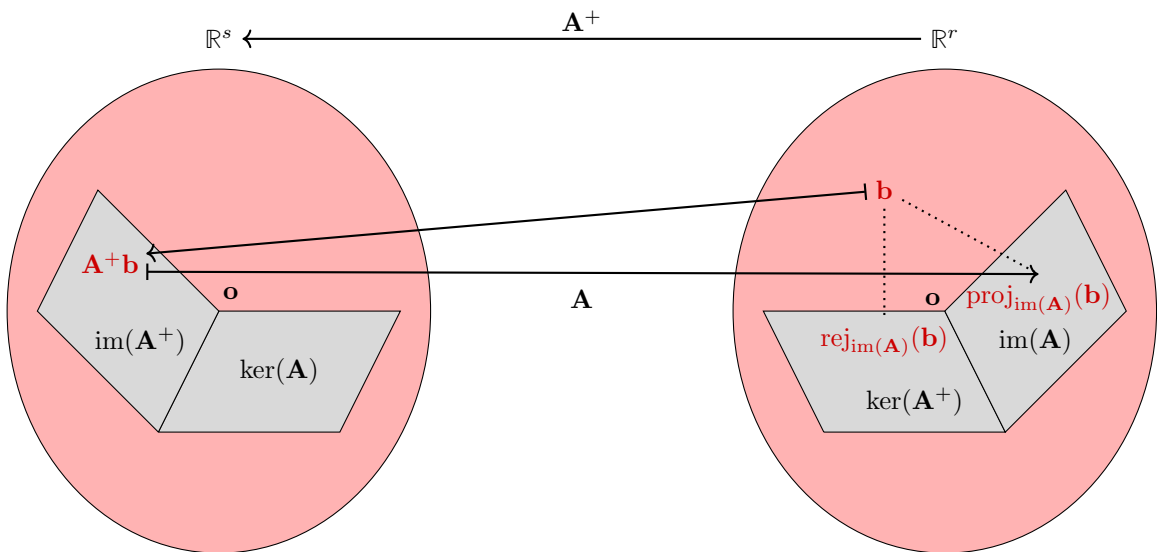
(4) Protože  $\mathbf{P}_s$  je ortogonální projekce, platí  $\ker(\mathbf{P}_s) \perp \text{im}(\mathbf{P}_s) = \mathbb{R}^s$ . To ale podle bodu (2) znamená, že  $\ker(\mathbf{A}) \perp \text{im}(\mathbf{A}^+) = \mathbb{R}^s$ .

(5) Toto tvrzení plyne okamžitě z části (4) záměnou  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{A}^+$ .

■



**14.4.4 Poznámka (Intuice pro hledání pseudoinverse obecné matice)** I když je hledání pseudoinverse matice složitý proces, myšlenka je, díky Tvrzení 14.4.3, poměrně jednoduchá. Pokusíme se ji vyložit na vztahu obrazů a jader matic  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  a  $\mathbf{A}^+ : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ .



(1) Podprostor  $\ker(\mathbf{A}^+)$  volíme tak, aby každý vektor podprostoru  $\ker(\mathbf{A}^+)$  byl *kolmý* na každý vektor podprostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$ . Navíc požadujeme platnost vztahu  $\ker(\mathbf{A}^+) \oplus \text{im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^s$ .

- (2) Podprostor  $\text{im}(\mathbf{A}^+)$  volíme tak, aby každý vektor podprostoru  $\text{im}(\mathbf{A}^+)$  byl *kolmý* na každý vektor podprostoru  $\text{ker}(\mathbf{A})$ . Navíc požadujeme platnost vztahu  $\text{ker}(\mathbf{A}) \oplus \text{im}(\mathbf{A}^+) = \mathbb{R}^s$ .
- (3) Pro vektor  $\mathbf{b}$  provedeme *ortogonální rozklad*  $\mathbf{b} = \text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) + \text{rej}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$  vektoru  $\mathbf{b}$ . Protože  $\text{rej}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$  leží v  $\text{ker}(\mathbf{A}^+)$ , musí platit  $\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^+\text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$ . Definujeme tedy  $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$  jako takový vektor  $\mathbf{x}$ , pro který platí  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$ .

Je otázka, zda výše uvedené volby jsou vůbec možné a zda dávají korektní definici pseudoinverse. Uvidíme, že to možné je a že jde pouze o bezprostřední aplikaci Věty 14.2.4 o plném SVD rozkladu matice.

**14.4.5 Důsledek (Existence pseudoinverse)** *At  $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$  je plný SVD rozklad matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ . Potom platí:*

- (1) *Matice*

$$\mathbf{S}^+ = \left( \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{e}_1, \dots, \frac{1}{\sigma_h} \mathbf{e}_h, \underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{(r-h)\text{-krát}} \right)$$

*je pseudoinverse matice  $\mathbf{S}$ .*

- (2) *Matice*

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{VS}^+\mathbf{U}^T$$

*je pseudoinverse matice  $\mathbf{A}$ .*

DŮKAZ.

- (1) Podle Tvzení 14.4.1 stačí pro  $\mathbf{S}^+$  ověřit podmínky (14.10). Rovnosti  $\mathbf{SS}^+\mathbf{S} = \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}^+\mathbf{SS}^+ = \mathbf{S}^+$  platí triviálně. Matice  $\mathbf{S}^+\mathbf{S}$  a  $\mathbf{SS}^+$  jsou symetrické.
- (2) Podle Tvzení 14.4.1 stačí ověřit podmínky (14.10) pro  $\mathbf{A}^+$ . Využijeme platnosti rovností  $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{E}_r$ ,  $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{E}_s$ , a toho, že  $\mathbf{S}^+$  je pseudoinverse matice  $\mathbf{S}$ .
- (a) Platí  $\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T\mathbf{VS}^+\mathbf{U}^T\mathbf{USV}^T = \mathbf{USS}^+\mathbf{SV}^T = \mathbf{USV}^T = \mathbf{A}$ .
- (b) Platí  $\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{VS}^+\mathbf{U}^T\mathbf{USV}^T\mathbf{VS}^+\mathbf{U}^T = \mathbf{VS}^+\mathbf{SS}^+\mathbf{U}^T = \mathbf{VS}^+\mathbf{U}^T = \mathbf{A}^+$ .
- (c) Platí  $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{VS}^+\mathbf{U}^T\mathbf{USV}^T = \mathbf{VS}^+\mathbf{SV}^T$ , což je symetrická matice.
- (d) Platí  $\mathbf{AA}^+ = \mathbf{USV}^T\mathbf{VS}^+\mathbf{U}^T = \mathbf{USS}^+\mathbf{U}^T$ , což je symetrická matice.

■

#### 14.4.6 Příklad (Nalezení pseudoinverse)

- (1) Nalezneme  $\mathbf{A}^+$  pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podle Příkladu 14.2.6 je plný SVD rozklad matice  $\mathbf{A}$  roven

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a proto

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Nalezneme  $\mathbf{A}^+$  pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Podle Příkladu 14.2.6 je plný SVD rozklad matice  $\mathbf{A}$  roven

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

a proto

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/(6\sqrt{10}) & 0 \\ 0 & 1/(3\sqrt{10}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{180} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 7 & 13 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$



**14.4.7 Příklad (Pseudoinverse je numericky velmi nestabilní)** I když pseudoinverse existuje pro jakoukoli matici, je pseudoinverse pojem numericky *velmi* nestabilní. Jako příklad může posloužit matice

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

kde  $t$  je reálný parametr. Potom  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(0)$ ,<sup>3</sup> ale

$$(\mathbf{A}(t))^+ = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}, & \text{jestliže } t \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{jestliže } t = 0. \end{cases}$$

To znamená, že  $\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{A}(t))^+$  dokonce neexistuje.

<sup>3</sup>Tímto tvrzením se myslí  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(0)\| = 0$ , kde norma matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je definována jako  $\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|_1 \leq 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$ . Viz Definici 13.1.15 a Tvrzení 13.1.16.

## Kapitola 15

# Ortogonalita vzhledem k bilineární formě

I know, my dear Watson, that you share my love of all that is bizarre and outside the conventions and humdrum routine of everyday life.

Sherlock Holmes, *The Red-Headed League*

Skalární součin  $\langle - | - \rangle$  na lineárním prostoru  $L$  nad  $\mathbb{R}$  je speciální funkce z  $L \times L$  do  $\mathbb{R}$ , která je (mimo jiné) lineární v každé souřadnici zvlášť. Pro lineární prostory  $L$  nad obecným tělesem se takovým funkcím říká *bilineární* forma na  $L$ . Lineární prostor vybavený bilineární formou se tak stává prostorem s velmi obecným „skalárním součinem“. Podkapitolu 15.1 proto věnujeme podrobnému studiu obecných *bilineárních forem* na lineárním prostoru. Popis bilineárních forem na prostorech konečné dimenze pomocí *matic bilineárních forem* podáme v podkapitole 15.2.

Skalární součin jsme využívali ke studiu *ortogonality* (tj. *kolmosti*) vektorů. Ortogonalitě vzhledem k obecné bilineární formě se budeme věnovat v podkapitole 15.3. Uvidíme, že „rozumné“ geometrické požadavky na ortogonalitu si vynutí na příslušné bilineární formě přísná omezení. Přesněji: uvidíme, že „rozumná“ geometrie může být buď *ortogonální* nebo *symplektická*.

- (1) *Ortogonální geometrie* je velmi podobná geometrii prostorů se skalárním součinem: příslušný prostor je vybaven hodnotami, které simulují hodnoty čtverce normy vektoru.
- (2) *Symplektická geometrie* není na první pohled příliš názorná: v symplektickém prostoru je každý vektor „kolmý“ sám na sebe. Charakterisaci symplektických geometrií podáme později: v kapitole 16 zjistíme, že jde o jistý typ *hyperbolické* geometrie.

V podkapitole 15.4 se budeme věnovat základním vlastnostem, které jsou společné pro ortogonální a symplektickou geometrii. Vybudujeme tak základní teorii *geometrických prostorů* a jejich *morfismů*. Na tyto výsledky navážeme v Kapitole 16.

Vynikajícími zdroji dalších informací o ortogonálních a symplektických geometriích jsou knihy

☞ Emil Artin, *Geometric algebra*, Interscience Publishers, London 1957

☞ Falko Lorenz, *Lineare Algebra* Bd II, Spektrum Akademische Verlag, 4. vydání, 2003

Budeme-li v této kapitole mluvit o obecném tělese  $\mathbb{F}$ , budeme *vždy* předpokládat, že v  $\mathbb{F}$  platí  $1 \neq -1$ . Z našich úvah je tak v této kapitole zcela vyloučeno například těleso  $\mathbb{Z}_2$ .

### 15.1 Lineární prostory s bilineární formou

Zobecnění skalárního součinu na prostoru  $L$  nad  $\mathbb{R}$  je pojem bilineární formy na lineárním prostoru nad obecným tělesem  $\mathbb{F}$ . Připomínáme ale, že v tělese  $\mathbb{F}$  požadujeme platnost nerovnosti  $1 \neq -1$ .



**15.1.1 Definice (Bilineární forma)** Zadat bilineární formu na lineárním prostoru  $L$  nad  $\mathbb{F}$  znamená zadat funkci dvou proměnných

$$\gamma(-, -) : L \times L \longrightarrow \mathbb{F}$$

kteřá je lineární v každé proměnné zvlášť. To znamená, že platí rovnosti

$$\gamma(\vec{x}, a\vec{y}_1 + b\vec{y}_2) = a\gamma(\vec{x}, \vec{y}_1) + b\gamma(\vec{x}, \vec{y}_2) \quad \gamma(a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2, \vec{y}) = a\gamma(\vec{x}_1, \vec{y}) + b\gamma(\vec{x}_2, \vec{y})$$

pro libovolné vektory  $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{y}_1, \vec{y}_2$ , a libovolné skaláry  $a, b$  z tělesa  $\mathbb{F}$ .

Bilinearita je zřejmě „minimálním požadavkem“, které chceme od „skalárního součinu“. Z toho plyne doporučení: zápis  $\gamma(\vec{x}, \vec{y})$  si představujte jako „součin“ vektorů  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$ . Hodnota tohoto „součinu“ je skalár z tělesa  $\mathbb{F}$ . Pozor:  $\gamma(\vec{x}, \vec{y})$  je ovšem daleko *obecnější* konstrukce než skalární součin vektorů  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$ . Především nejsme omezeni tím, že těleso skalárů je těleso reálných čísel. Za další: nemusí obecně platit rovnost  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma(\vec{y}, \vec{x})$ .

**15.1.2 Příklad (Bilinearita neznamená linearitu)** Zobrazení  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  z  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  zadává bilineární formu  $\gamma$  na lineárním prostoru  $\mathbb{R}$ . Platí totiž rovnosti

$$\gamma(x, a \cdot y_1 + b \cdot y_2) = x \cdot (a \cdot y_1 + b \cdot y_2) = a \cdot (x \cdot y_1) + b \cdot (x \cdot y_2) = a \cdot \gamma(x, y_1) + b \cdot \gamma(x, y_2)$$

a

$$\gamma(a \cdot x_1 + b \cdot x_2, y) = (a \cdot x_1 + b \cdot x_2) \cdot y = a \cdot (x_1 \cdot y) + b \cdot (x_2 \cdot y) = a \cdot \gamma(x_1, y) + b \cdot \gamma(x_2, y)$$

Zobrazení  $\gamma : (x, y) \mapsto x \cdot y$  ale *není lineárním zobrazením* z lineárního prostoru  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  do lineárního prostoru  $\mathbb{R}$ . Linearita  $\gamma$  by znamenala platnost rovnosti

$$\gamma(a \cdot (x_1, y_1) + b \cdot (x_2, y_2)) = a \cdot \gamma(x_1, y_1) + b \cdot \gamma(x_2, y_2)$$

Tato rovnost obecně neplatí, například

$$64 = \gamma(8, 8) = \gamma(2 \cdot (1, 1) + 3 \cdot (2, 2)) \neq 2 \cdot \gamma(1, 1) + 3 \cdot \gamma(2, 2) = 14$$

**15.1.3 Příklad (Příklady bilineárních forem na prostorech tvaru  $\mathbb{F}^n$ )**

(1) Jakýkoli skalární součin  $\langle - | - \rangle$  na  $\mathbb{R}^2$  je bilineární forma na  $\mathbb{R}^2$ . Například předpis

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$$

zadává skalární součin na  $\mathbb{R}^2$ , protože matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní (například podle Tvzení 12.3.4).

Podle Definice 12.1.2 je funkce

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| - \right\rangle : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

lineární. Protože skalární součin je symetrický, je lineární i funkce

$$\langle - | \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Takže  $\langle - | - \rangle$  je bilineární forma na prostoru  $\mathbb{R}^2$ .

(2) Předpis

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 4x_2y_2$$

nezadává skalární součin na  $\mathbb{R}^2$ , protože matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

není pozitivně definitní (použijte Tvzení 12.3.4). Obě funkce

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, -\right) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \gamma\left(-, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

však lineární jsou. Opravdu, pro pevné  $\mathbf{x}$  platí

$$\gamma(\mathbf{x}, a\mathbf{y}_1 + b\mathbf{y}_2) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot (a\mathbf{y}_1 + b\mathbf{y}_2) = a \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}_1 + b \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}_2 = a \cdot \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + b \cdot \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$$

a pro pevné  $\mathbf{y}$  platí

$$\gamma(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2)^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} = a \cdot \mathbf{x}_1^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} + b \cdot \mathbf{x}_2^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} = a \cdot \gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + b \cdot \gamma(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$$

(3) Předchozí úvahy jdou zobecnit: pro libovolnou matici  $\mathbf{G} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$  zadává předpis

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$$

bilineární formu na  $\mathbb{F}^n$ . K důkazu bilinearity  $\gamma$  totiž využíváme pouze vlastnosti maticového násobení.

Zadat bilineární formu na  $L$  můžeme i tak, že zadáme lineární zobrazení z  $L$  do duálního prostoru  $L^*$  (viz Značení 2.5.1).

**15.1.4 Tvzení** Pro zobrazení  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \gamma(\vec{x}, \vec{y})$  z  $L \times L$  do  $\mathbb{F}$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Zobrazení  $\gamma$  je bilineární forma na  $L$ .
- (2) Zobrazení  $\gamma_{right} : \vec{y} \mapsto \gamma(-, \vec{y})$  je lineární zobrazení z  $L$  do duálního prostoru  $L^*$ .
- (3) Zobrazení  $\gamma_{left} : \vec{x} \mapsto \gamma(\vec{x}, -)$  je lineární zobrazení z  $L$  do duálního prostoru  $L^*$ .

**DŮKAZ.** Ukážeme, že (1) je ekvivalentní (2), ekvivalence podmínek (1) a (3) se dokáže analogicky. Předpokládejme, že platí (1). Potom pro pevné  $\vec{y}$  je  $\gamma(-, \vec{y})$  lineárním zobrazením z  $L$  do  $\mathbb{F}$ , protože podle Definice 15.1.1 platí rovnost  $\gamma(a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2, \vec{y}) = a\gamma(\vec{x}_1, \vec{y}) + b\gamma(\vec{x}_2, \vec{y})$ . Přiřazení  $\gamma_{right} : \vec{y} \mapsto \gamma(-, \vec{y})$  tedy definuje funkci z  $L$  do duálního prostoru  $L^*$ . Zbývá ukázat, že  $\gamma_{right}$  je lineární. To ale přesně říká rovnost  $\gamma(\vec{x}, a\vec{y}_1 + b\vec{y}_2) = a\gamma(\vec{x}, \vec{y}_1) + b\gamma(\vec{x}, \vec{y}_2)$  z Definice 15.1.1.

Ze (2) plyne (1): stačí obrátit všechny úvahy z předchozí části důkazu. ■

Tvzení 15.1.4 lze do jisté míry obrátit. Přesněji: platí následující.

**15.1.5 Lemma** At  $L$  je lineární prostor a  $\mathbf{f} : L \longrightarrow L^*$  je lineární zobrazení. Pak existují dvě jednoznačně určené bilineární formy  $\beta$  a  $\gamma$  na  $L$  takové, že  $\beta_{left} = \gamma_{right} = \mathbf{f}$ .

**DŮKAZ.** Stačí definovat

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{f}(\vec{x})(\vec{y}) = \gamma(\vec{y}, \vec{x})$$

Protože  $\mathbf{f}$  je lineární, jsou obě zobrazení  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \beta(\vec{x}, \vec{y})$ ,  $(\vec{y}, \vec{x}) \mapsto \beta(\vec{y}, \vec{x})$  bilineární. Navíc platí rovnosti  $\beta_{left} = \gamma_{right} = \mathbf{f}$ . Nakonec je zřejmé, že formy  $\beta$  a  $\gamma$  jsou určeny jednoznačně. Když totiž  $\beta'_{left} = \mathbf{f}$  pro nějakou bilineární formu  $\beta'$ , potom musí platit  $\beta'(\vec{x}, -) = \mathbf{f}(\vec{x})$  pro všechny vektory  $\vec{x}$ . To znamená, že pro všechny vektory  $\vec{y}$  platí rovnost  $\beta'(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{f}(\vec{x})(\vec{y}) = \beta(\vec{x}, \vec{y})$ . Jednoznačnost formy  $\gamma$  se ukáže analogicky. ■

**15.1.6 Tvzení** *At  $\gamma$  je bilineární forma na  $L$ . Potom platí:*

- (1)  $\gamma^T$  je bilineární forma na  $L$ , kde  $\gamma^T(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma(\vec{y}, \vec{x})$ .
- (2) Jsou-li  $\mathbf{f} : L' \rightarrow L$  a  $\mathbf{g} : L' \rightarrow L$  lineární zobrazení, potom předpis  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{g}(\vec{y}))$  zadává bilineární formu na  $L'$ .

DŮKAZ.

- (1) To je triviální: pro libovolná  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  platí rovnosti  $\gamma^T(\vec{x}, -) = \gamma(-, \vec{x})$  a  $\gamma^T(-, \vec{y}) = \gamma(\vec{y}, -)$ .
- (2) Pro pevný vektor  $\vec{x}$  platí rovnosti

$$\gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{g}(a\vec{y}_1 + b\vec{y}_2)) = \gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), a\mathbf{g}(\vec{y}_1) + b\mathbf{g}(\vec{y}_2)) = a\gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{g}(\vec{y}_1)) + b\gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{g}(\vec{y}_2))$$

protože  $\mathbf{g}$  je lineární a  $\gamma$  bilineární.

Z analogických důvodů platí rovnosti

$$\gamma(\mathbf{f}(a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2), \mathbf{g}(\vec{y})) = \gamma(a\mathbf{f}(\vec{x}_1) + b\mathbf{f}(\vec{x}_2), \mathbf{g}(\vec{y})) = a\gamma(\mathbf{f}(\vec{x}_1), \mathbf{g}(\vec{y})) + b\gamma(\mathbf{f}(\vec{x}_2), \mathbf{g}(\vec{y}))$$

pro pevný vektor  $\vec{y}$ .

■

**15.1.7 Poznámka** Bilinearitu formy  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{g}(\vec{y}))$  bychom mohli ověřit i jinak. Složení

$$L' \xrightarrow{\mathbf{g}} L \xrightarrow{\gamma_{right}} L^* \xrightarrow{\mathbf{f}^*} (L')^*$$

je lineární zobrazení. Toto zobrazení je ale přesně zobrazení  $\beta_{right}$ , když označíme  $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{g}(\vec{y}))$ .

Tento pohled na bilinearitu uplatníme například v Tvzení 15.4.13 při studiu morfismů geometrických prostorů. Přesněji, budeme studovat speciální případ  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{f}(\vec{y}))$ , tj. složení

$$L' \xrightarrow{\mathbf{f}} L \xrightarrow{\gamma_{right}} L^* \xrightarrow{\mathbf{f}^*} (L')^*$$

kde  $\mathbf{f}$  je lineární zobrazení.

**15.1.8 Definice** Bilineární forma  $\gamma$  na  $L$  je *nedegenerovaná*, když obě lineární zobrazení  $\gamma_{right} : L \rightarrow L^*$  a  $\gamma_{left} : L \rightarrow L^*$  jsou monomorfismy.

Nedegenerovanost bilineární formy  $\gamma$  lze přepsat do elementární řeči takto:  $\gamma$  je nedegenerovaná, když platí následující dvě podmínky:

- (1)  $\gamma(\vec{x}_0, \vec{y}) = 0$  pro všechna  $\vec{y}$  právě tehdy, když  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ .
- (2)  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}_0) = 0$  pro všechna  $\vec{x}$  právě tehdy, když  $\vec{y}_0 = \vec{0}$ .

Bilineární formy budeme od podkapitoly 15.3 dále používat ke studiu velmi obecné definici kolmosti. Pokud řekneme, že vektor  $\vec{x}$  je kolmý na vektor  $\vec{y}$ , když platí  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ , je možné nedegenerovanost bilineární formy  $\gamma$  chápat intuitivně takto:

Nulový vektor je jediný, který je kolmý na všechny všechny vektory, a *současně* je jediný, na který jsou kolmé všechny vektory.

Tvrzení 15.1.11, které následuje, nám říká, že v prostorech konečné dimenze stačí pro nedegenerovanost použít *pouze jednu* z výše uvedených podmínek. Pozor! Výše uvedené formulace jsou pouze slogany. Věta 15.3.1 nám řekne, pro jaké bilineární formy  $\gamma$  má pojem *kolmost* rozumný smysl.

**15.1.9 Příklad (Nedegenerovanost skalárního součinu)** Ať  $\langle - | - \rangle$  je jakýkoli skalární součin na lineárním prostoru  $L$  konečné dimenze nad  $\mathbb{R}$ . Ukážeme, že přímo z Definice 12.1.2 (tj. z definice skalárního součinu) plyne nedegenerovanost skalárního součinu  $\langle - | - \rangle$ .

Protože skalární součin lineární v každé souřadnici, platí pro libovolné vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  rovnosti  $\langle \vec{x} | \vec{o} \rangle = 0$  a  $\langle \vec{o} | \vec{y} \rangle = 0$ .

Předpokládejme, že  $\langle \vec{x}_0 | \vec{y} \rangle = 0$  pro jakýkoli vektor  $\vec{y}$ . Speciálně platí  $\langle \vec{x}_0 | \vec{x}_0 \rangle = 0$ . Proto  $\vec{x}_0 = \vec{o}$ . Protože skalární součin je symetrický, je důkaz hotov.

**15.1.10 Lemma (Nedegenerovanost bilineární formy lze rozpoznat na bázi)** Ať lineární prostor  $L$  má bázi  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ . Pro lineární formu  $\gamma$  na  $L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) Forma  $\gamma$  je nedegenerovaná.

(2) Platí následující dvě podmínky:

(a) Rovnost  $\gamma(\vec{x}_0, \vec{b}_i) = 0$  platí pro všechna  $i$  právě tehdy, když  $\vec{x}_0 = \vec{o}$ .

(b) Rovnost  $\gamma(\vec{b}_i, \vec{y}_0) = 0$  platí pro všechna  $i$  právě tehdy, když  $\vec{y}_0 = \vec{o}$ .

DŮKAZ. Z podmínky (2) plyne triviálně podmínka (1). Předpokládejme, že platí podmínka (1). Musíme ukázat, že platí podmínky (a) a (b). Ukážeme platnost podmínky (a), platnost podmínky (b) se dokáže analogicky. Předpokládejme, že  $\gamma(\vec{x}_0, \vec{b}_i) = 0$  pro všechna  $i$ . Zvolme jakýkoli vektor  $\vec{y}$ . Protože  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je báze  $L$ , platí  $\vec{y} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i$  pro nějaké skaláry  $a_1, \dots, a_n$ . Potom z bilinearity  $\gamma$  dostáváme rovnosti:

$$\gamma(\vec{x}_0, \vec{y}) = \gamma(\vec{x}_0, \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \underbrace{\gamma(\vec{x}_0, \vec{b}_i)}_{=0} = 0$$

Podle podmínky (1) platí  $\vec{x}_0 = \vec{o}$ . ■

**15.1.11 Tvzení** Ať prostor  $L$  má konečnou dimenzi. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) Lineární zobrazení  $\gamma_{right} : L \rightarrow L^*$  je monomorfismus.

(2) Lineární zobrazení  $\gamma_{right} : L \rightarrow L^*$  je izomorfismus.

(3) Lineární zobrazení  $\gamma_{left} : L \rightarrow L^*$  je monomorfismus.

(4) Lineární zobrazení  $\gamma_{left} : L \rightarrow L^*$  je izomorfismus.

DŮKAZ. Protože prostor  $L$  má konečnou dimenzi, platí podle Tvzení 3.5.1 rovnost  $\dim(L) = \dim(L^*)$ . Podle Důsledku 3.3.8 jsou tedy podmínky (1) a (2) ekvivalentní. Podle téhož důsledku jsou ekvivalentní podmínky (3) a (4). Stačí tedy ukázat ekvivalenci podmínek (2) a (4).

Ukážeme, že ze (2) plyne (4). Připomeňme isomorfismus  $\mathbf{i} : L \rightarrow (L^*)^*$  z Příkladu 9.1.12:  $\mathbf{i}(\vec{x}) : L^* \rightarrow \mathbb{F}$  přiřazuje každé lineární formě  $\mathbf{h} : L \rightarrow \mathbb{F}$  z prostoru  $L^*$  hodnotu  $\mathbf{h}(\vec{x})$ . Stačí ukázat, že trojúhelník

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\gamma_{left}} & L^* \\ & \searrow \mathbf{i} & \nearrow (\gamma_{right})^* \\ & (L^*)^* & \end{array}$$

je komutativní. Pak je totiž  $\gamma_{left}$  složení dvou isomorfismů:  $\mathbf{i}$  a  $(\gamma_{right})^*$  (toto zobrazení je isomorfismus, protože je duálním zobrazením k isomorfismu).

Zvolme tedy libovolný vektor  $\vec{x}$  z  $L$ . Máme dokázat rovnost

$$\gamma(\vec{x}, -) = (\gamma_{right})^*(\mathbf{i}(\vec{x}))$$

Protože podle definice duálního zobrazení platí  $(\gamma_{right})^*(\mathbf{i}(\vec{x})) = \mathbf{i}(\vec{x}) \cdot \gamma_{right}$ , platí pro libovolný vektor  $\vec{y}$  rovnost  $\mathbf{i}(\vec{x})(\gamma_{right}(\vec{y})) = \gamma(\vec{x}, \vec{y})$ .

To, že ze (4) plyne (2), se dokáže analogicky: trojúhelník

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\gamma_{right}} & L^* \\ & \searrow i & \nearrow (\gamma_{left})^* \\ & (L^*)^* & \end{array}$$

je komutativní. ■

**15.1.12 Důsledek** Pro bilineární formu  $\gamma$  na prostoru  $L$  konečné dimenze jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Forma  $\gamma$  je nedegenerovaná.
- (2) Každá lineární forma na  $L$  je tvaru  $\gamma(\vec{x}_0, -)$  pro jednoznačně určený nenulový vektor  $\vec{x}_0$  z  $L$ .
- (3) Každá lineární forma na  $L$  je tvaru  $\gamma(-, \vec{y}_0)$  pro jednoznačně určený nenulový vektor  $\vec{y}_0$  z  $L$ .

DŮKAZ. Podmínka (2) říká, že  $\gamma_{left}$  je isomorfismus, podmínka (3) říká, že  $\gamma_{right}$  je isomorfismus. Každá z těchto podmínek je ekvivalentní podmínce (1) podle Tvzení 15.1.11. ■

**15.1.13 Definice** Nadrovina v lineárním prostoru  $L$  dimenze  $n$  je jakýkoli lineární podprostor  $H$  prostoru  $L$ , pro který platí  $\dim(H) = n - 1$ .

**15.1.14 Tvzení (Charakterisace nadrovin)** Ať  $H$  je lineární podprostor lineárního prostoru  $L$  dimenze  $n$ . Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:


- (1)  $H$  je nadrovina v  $L$ .
- (2) Existuje nenulová lineární forma  $\mathbf{h} : L \rightarrow \mathbb{F}$  taková, že  $H = \ker(\mathbf{h})$ . Forma  $\mathbf{h}$  je určena jednoznačně až na nenulový skalární násobek, tj. jestliže  $H = \ker(\mathbf{h}_1) = \ker(\mathbf{h}_2)$ , potom existuje nenulový skalár  $a$  tak, že  $\mathbf{h}_1 = a \cdot \mathbf{h}_2$ .

Je-li na prostoru  $L$  zadána nedegenerovaná bilineární forma  $\gamma$ , pak jsou výše uvedené podmínky ekvivalentní následujícím dvěma dalším:

- (3) Existuje nenulový vektor  $\vec{x}_0$  z  $L$  tak, že  $H = \ker(\gamma(\vec{x}_0, -))$ . Vektor  $\vec{x}_0$  je určen jednoznačně až na nenulový skalární násobek, tj. jestliže  $H = \ker(\gamma(\vec{x}_1, -)) = \ker(\gamma(\vec{x}_2, -))$ , potom existuje nenulový skalár  $a$  tak, že  $\vec{x}_1 = a \cdot \vec{x}_2$ .
- (4) Existuje nenulový vektor  $\vec{y}_0$  z  $L$  tak, že  $H = \ker(\gamma(-, \vec{y}_0))$ . Vektor  $\vec{y}_0$  je určen jednoznačně až na nenulový skalární násobek, tj. jestliže  $H = \ker(\gamma(-, \vec{y}_1)) = \ker(\gamma(-, \vec{y}_2))$ , potom existuje nenulový skalár  $a$  tak, že  $\vec{y}_1 = a \cdot \vec{y}_2$ .

DŮKAZ. Ze (2) plyne (1) podle Věty 3.3.6:  $n = \dim(\ker(\mathbf{h})) + \dim(\text{im}(\mathbf{h})) = \dim(H) + 1$ . Obráceně: ať platí (1). Zvolme jakoukoli bázi  $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1})$  prostoru  $H$  a doplňme ji na bázi  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1}, \vec{b})$  prostoru  $L$ . Označme jako  $\mathbf{h} : L \rightarrow \mathbb{F}$  lineární formu  $\vec{b}^*$  z duální báze  $B^*$  k bázi  $B$ . Potom (viz důkaz Tvzení 3.5.1) platí  $\mathbf{h}(\vec{b}_i) = 0$  pro všechna  $i = 1, \dots, n-1$ , tedy  $\mathbf{h}(\vec{x}) = 0$  pro všechna  $\vec{x}$  z  $H$ . Ukázali jsme, že  $H \subseteq \ker(\mathbf{h})$ . Protože  $\mathbf{h}(\vec{b}) = 1$  (opět podle důkazu Tvzení 3.5.1), je  $\mathbf{h}$  nenulová lineární forma. Tudíž  $\dim(\ker(\mathbf{h})) = n - 1$ . Z toho plyne, že  $H = \ker(\mathbf{h})$ . Předpokládejme, že  $H = \ker(\mathbf{h}_1) = \ker(\mathbf{h}_2)$ , pro nenulové formy  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ . Potom  $\mathbf{h}_1(\vec{b}) \neq 0$  a  $\mathbf{h}_2(\vec{b}) \neq 0$ , a proto existuje nenulový skalár  $a$  tak, že  $\mathbf{h}_1(\vec{b}) = a \cdot \mathbf{h}_2(\vec{b})$ . Z toho okamžitě plyne, že  $\mathbf{h}_1(\vec{x}) = a \cdot \mathbf{h}_2(\vec{x})$  pro všechny vektory  $\vec{x}$  z  $L$ .

Jestliže  $\gamma$  je nedegenerovaná bilineární forma na  $L$ , potom ekvivalence jakékoli z podmínek (3) a (4) s podmínkou (2) plyne z Důsledku 15.1.12. ■

 **15.1.15 Poznámka** Z důkazu Tvzení 15.1.11 jsme se dozvěděli, že trojúhelníky

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\gamma_{\text{left}}} & L^* \\ & \searrow \text{i} & \nearrow (\gamma_{\text{right}})^* \\ & (L^*)^* & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\gamma_{\text{right}}} & L^* \\ & \searrow \text{i} & \nearrow (\gamma_{\text{left}})^* \\ & (L^*)^* & \end{array}$$

jsou komutativní pro *jakoukoli* bilineární formu  $\gamma$ . Protože zobrazení  $\text{i}$  je isomorfismus, plynou z toho pro jakoukoli bilineární formu  $\gamma$  pomocí Věty 3.3.6 a Důsledku 3.5.6 rovnosti

$$\text{def}(\gamma_{\text{left}}) = \text{def}(\gamma_{\text{right}}) \quad \text{rank}(\gamma_{\text{left}}) = \text{rank}(\gamma_{\text{right}})$$

protože platí  $\dim(L) = \dim(L^*) = \dim((L^*)^*)$ . Výše uvedené rovnosti obecně *neznamenají*, že platí  $\ker(\gamma_{\text{left}}) = \ker(\gamma_{\text{right}})$ . Viz také Lemma 15.4.3.

**15.1.16 Příklad (Rovnost  $\ker(\gamma_{\text{left}}) = \ker(\gamma_{\text{right}})$  nemusí platit)** Ať  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$  je bilineární forma na  $\mathbb{R}^2$ , kde

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom

$$\gamma_{\text{left}}\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 \end{pmatrix} \quad \gamma_{\text{right}}\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tudíž  $\ker(\gamma_{\text{left}}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  a  $\ker(\gamma_{\text{right}}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

**15.1.17 Tvzení** Ať  $\gamma$  je nedegenerovaná bilineární forma na lineárním prostoru  $L$ . Potom pro libovolnou bilineární formu  $\beta$  na lineárním prostoru  $L$  existují jednoznačně určená lineární zobrazení  $\beta^{\mathbf{f}} : L \rightarrow L$  a  $\mathbf{f}^{\beta} : L \rightarrow L$  taková, že pro všechna  $\vec{x}, \vec{y}$  platí rovnosti  $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma(\beta^{\mathbf{f}}(\vec{x}), \vec{y}) = \gamma(\vec{x}, \mathbf{f}^{\beta}(\vec{y}))$ .

DŮKAZ. Hledaná lineární zobrazení  $\beta^{\mathbf{f}}$  a  $\mathbf{f}^{\beta}$  mají učinit následující trojúhelníky

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\beta^{\mathbf{f}}} & L \\ & \searrow \beta_{\text{left}} & \nearrow \gamma_{\text{left}} \\ & L^* & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\mathbf{f}^{\beta}} & L \\ & \searrow \beta_{\text{right}} & \nearrow \gamma_{\text{right}} \\ & L^* & \end{array}$$

komutativními. Protože podle Tvzení 15.1.11 jsou  $\gamma_{\text{left}}$  a  $\gamma_{\text{right}}$  isomorfismy, taková jednoznačně určená lineární zobrazení skutečně existují:  $\beta^{\mathbf{f}} = (\gamma_{\text{left}})^{-1} \cdot \beta_{\text{left}}$  a  $\mathbf{f}^{\beta} = (\gamma_{\text{right}})^{-1} \cdot \beta_{\text{right}}$ . ■

**15.1.18 Definice (Pravý a levý adjunkt vzhledem k bilineární formě)** Ať  $\gamma$  je bilineární forma na  $L$ . Pro lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  definujeme:

- (1) *Levý adjunkt* k  $\mathbf{f}$  (vzhledem ke  $\gamma$ ) je lineární zobrazení  $\mathbf{f}^l : L \rightarrow L$ , pro které platí rovnost  $\gamma(\mathbf{f}^l(\vec{x}), \vec{y}) = \gamma(\vec{x}, \mathbf{f}(\vec{y}))$  pro všechna  $\vec{x}, \vec{y}$ .
- (2) *Pravý adjunkt* k  $\mathbf{f}$  (vzhledem ke  $\gamma$ ) je lineární zobrazení  $\mathbf{f}^r : L \rightarrow L$ , pro které platí rovnost  $\gamma(\vec{x}, \mathbf{f}^r(\vec{y})) = \gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \vec{y})$  pro všechna  $\vec{x}, \vec{y}$ .

Následující příklad ukazuje, že pravý a levý adjunkt lineárního zobrazení zobecňuje pojem transpozice matice.

**15.1.19 Příklad (Pravý a levý adjunkt vzhledem k nedegenerované bilineární formě na  $\mathbb{F}^n$ )** Ať  $\gamma$  je nedegenerovaná bilineární forma na  $\mathbb{F}^n$  vytvořená maticí  $\mathbf{G}$ . To znamená, že platí  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$ . Podle Tvzení 15.1.11 nedegenerovanost formy  $\gamma$  znamená přesně to, že matice  $\mathbf{G}$  je regulární.

Potom pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  platí:

- (1) Levý adjunkt  $\mathbf{A}^l : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  vzhledem ke  $\gamma$  je matice  $\mathbf{A}^l = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}^{-1})^T$ .

To plyne z rovností

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \quad \gamma(\mathbf{A}^l \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{A}^l)^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$$

Speciálně: je-li  $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$ , platí  $\mathbf{A}^l = \mathbf{A}^T$ .

- (2) Pravý adjunkt  $\mathbf{A}^r : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  vzhledem ke  $\gamma$  je matice  $\mathbf{A}^r = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}$ .

To plyne z rovností

$$\gamma(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} \quad \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{A}^r \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}^r \cdot \mathbf{y}$$

Speciálně: je-li  $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$ , platí  $\mathbf{A}^r = \mathbf{A}^T$ .

**15.1.20 Tvzení** *At  $\gamma$  je nedegenerovaná bilineární forma na  $L$ . Potom má každé lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  jednoznačně určený levý a pravý adjunkt. Navíc pro libovolná lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$  a  $\mathbf{g} : L \rightarrow L$  platí rovnosti  $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})^l = \mathbf{g}^l \cdot \mathbf{f}^l$  a  $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})^r = \mathbf{f}^r \cdot \mathbf{g}^r$ , a  $(\mathbf{f}^l)^r = \mathbf{f}$  a  $(\mathbf{f}^r)^l = \mathbf{f}$ .*

DŮKAZ. Ukážeme existenci a jednoznačnost levého adjunktu k zobrazení  $\mathbf{f}$ , existence a jednoznačnost pravého adjunktu se dokáže analogicky. Podle Tvzení 15.1.6 je předpisem  $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma(\vec{x}, \mathbf{f}(\vec{y}))$  zadána bilineární forma na  $L$ . Podle Tvzení 15.1.17 existuje jednoznačně určené lineární zobrazení  ${}^\beta\mathbf{f}$ , pro které platí  $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma({}^\beta\mathbf{f}(\vec{x}), \vec{y})$ . To ale přesně znamená, že  ${}^\beta\mathbf{f}$  je hledaný levý adjunkt k zobrazení  $\mathbf{f}$ .

Rovnosti  $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})^l = \mathbf{g}^l \cdot \mathbf{f}^l$  a  $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})^r = \mathbf{f}^r \cdot \mathbf{g}^r$ , a  $(\mathbf{f}^l)^r = \mathbf{f}$  a  $(\mathbf{f}^r)^l = \mathbf{f}$  plynou okamžitě z Tvzení 15.1.17. ■

Na závěr této podkapitoly ukážeme, že každou bilineární formu lze jednoznačným způsobem rozložit na součet bilineárních forem dvou speciálních typů: na symetrickou a symplektickou. Symetrické a symplektické bilineární formy budou hrát důležitou roli při studiu ortogonalit vektorů vzhledem k bilineární formě v podkapitole 15.3.

**15.1.21 Definice (Symetrická a symplektická bilineární forma)** At  $L$  je lineární prostor.

- (1) Bilineární formě  $\gamma$  na  $L$ , která splňuje rovnost  $\gamma = \gamma^T$ , říkáme *symetrická*.

- (2) Bilineární formě  $\gamma$  na  $L$ , která splňuje rovnost  $\gamma = -\gamma^T$ , říkáme *symplektická*.

**15.1.22 Lemma** *Každou bilineární formu na lineárním prostoru lze jednoznačným způsobem zapsat jako součet symetrické a symplektické bilineární formy.*

DŮKAZ. Pro obecnou bilineární formu  $\gamma$  na lineárním prostoru  $L$  definujeme

$$\gamma_1(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(\gamma(\vec{x}, \vec{y}) + \gamma(\vec{y}, \vec{x})) \quad \gamma_2(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(\gamma(\vec{x}, \vec{y}) - \gamma(\vec{y}, \vec{x}))$$

Potom je zřejmé, že  $\gamma_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \gamma^T)$  a  $\gamma_2 = \frac{1}{2}(\gamma - \gamma^T)$  jsou bilineární formy na  $L$ ,  $\gamma_1$  je symetrická,  $\gamma_2$  je symplektická, a platí rovnost  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ .

Předpokládejme, že  $\gamma = \beta_1 + \beta_2$ , kde  $\beta_1$  je symetrická bilineární forma a  $\beta_2$  je symplektická bilineární forma. Platí tedy rovnosti  $\gamma^T = \beta_1^T + \beta_2^T = \beta_1 - \beta_2$ . Potom je  $\beta_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \gamma^T) = \gamma_1$  a  $\beta_2 = \frac{1}{2}(\gamma - \gamma^T) = \gamma_2$ . Opět jsme využili toho, že v  $\mathbb{F}$  platí  $-1 \neq 1$ , neboli  $2 \neq 0$  v  $\mathbb{F}$ . ■

**15.1.23 Lemma** *Bilineární forma  $\gamma$  na  $L$  je symplektická právě tehdy, když pro všechny vektory  $\vec{x}$  z prostoru  $L$  platí rovnost  $\gamma(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ .*

DŮKAZ. Jestliže  $\gamma = -\gamma^T$ , potom pro každý vektor  $\vec{x}$  platí rovnost  $\gamma(\vec{x}, \vec{x}) = -\gamma(\vec{x}, \vec{x})$ , neboli  $2\gamma(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ . Tudíž  $\gamma(\vec{x}, \vec{x}) = 0$  pro všechny vektory  $\vec{x}$  z prostoru  $L$ . Využili jsme toho, že v tělese  $\mathbb{F}$  platí  $1 \neq -1$ , neboli  $2 \neq 0$ .

Obráceně: ať  $\gamma(\vec{x}, \vec{x}) = 0$  pro všechny vektory  $\vec{x}$  z prostoru  $L$ . Potom pro libovolné vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  platí

$$0 = \gamma(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) = \gamma(\vec{x}, \vec{x}) - \gamma(\vec{x}, \vec{y}) - \gamma(\vec{y}, \vec{x}) + \gamma(\vec{y}, \vec{y}) = -\gamma(\vec{x}, \vec{y}) - \gamma(\vec{y}, \vec{x})$$

To znamená, že pro všechny vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  platí  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = -\gamma(\vec{y}, \vec{x})$ , neboli  $\gamma = -\gamma^T$ . ■

## 15.2 Matice bilineárních forem

Výsledky této podkapitoly jsou jednoduchou aplikací výsledků z Kapitoly 9. Ukážeme, že bilineární formy na prostoru  $L$  konečné dimenze lze „nahradit“ jejich maticemi vzhledem k pevné bázi prostoru  $L$ . Podobně jako v Kapitole 9 uvidíme, že vlastnosti bilineárních forem se jednoduchým způsobem přenášejí na vlastnosti jejich matic.

**15.2.1 Definice (Matice bilineární formy)** Ať  $\gamma$  je bilineární forma na lineárním prostoru  $L$  s uspořádanou bází  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ . Matici  $\mathbf{G} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ , která má v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci hodnotu  $\gamma(\vec{b}_i, \vec{b}_j)$  říkáme *matice bilineární formy  $\gamma$*  (vzhledem k bázi  $B$ ).

Připomeňme z Tvzení 15.1.4 značení  $\gamma_{right}$  pro lineární zobrazení  $\vec{y} \mapsto \gamma(-, \vec{y})$ .

**15.2.2 Tvzení** Matice bilineární formy  $\gamma$  na  $L$  vzhledem k bázi  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  je totéž jako matice lineárního zobrazení  $\gamma_{right} : L \rightarrow L^*$  vzhledem k bázím  $B$  a  $B^*$ .

DŮKAZ. Zvolme pevně vektor  $\vec{b}_j$  z báze  $B$ . Připomeňme, že  $\gamma_{right}(\vec{b}_j)$  je lineární forma  $\gamma(-, \vec{b}_j) : L \rightarrow \mathbb{F}$ .

Z definice duální báze  $B^* = (\vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_n^*)$  platí pro libovolné  $i_0$  rovnost

$$\sum_{i=1}^n \gamma(\vec{b}_i, \vec{b}_j) \cdot \vec{b}_i^*(\vec{b}_{i_0}) = \gamma(\vec{b}_{i_0}, \vec{b}_j)$$

V duální bázi  $B^*$  má tedy lineární forma  $\gamma(-, \vec{b}_j)$  souřadnice

$$\text{coord}_{B^*}(\gamma(-, \vec{b}_j)) = \begin{pmatrix} \gamma(\vec{b}_1, \vec{b}_j) \\ \gamma(\vec{b}_2, \vec{b}_j) \\ \vdots \\ \gamma(\vec{b}_n, \vec{b}_j) \end{pmatrix}$$

Předchozí výpočty znamenají přesně to, že diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{G}} & \mathbb{F}^n \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_{B^*} \\ L & \xrightarrow{\gamma_{right}} & L^* \end{array}$$

je komutativní, a to jsme chtěli dokázat. ■

**15.2.3 Příklad** Ať bilineární forma  $\gamma$  na  $\mathbb{F}^n$  je zadána maticí  $\mathbf{G}$  stejně jako v Příkladu 15.1.3, tj. ať  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$ .

Potom matice  $\mathbf{G}$  má nutně v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci hodnotu  $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_j = \gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ . To znamená, že matice  $\mathbf{G}$  je maticí bilineární formy  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$  vzhledem ke kanonické bázi  $K_n$  prostoru  $\mathbb{F}^n$ .

**15.2.4 Tvzení** Ať bilineární forma  $\gamma$  na prostoru  $L$  má matice  $\mathbf{G}$  vzhledem k uspořádané bázi  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  prostoru  $L$ . Potom matice formy  $\gamma$  vzhledem k uspořádané bázi  $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$  má tvar  $(\mathbf{T}_{C \mapsto B})^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B}$ .

DŮKAZ. Stačí pohlédnout na komutativní diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{T}_{C \mapsto B}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{G}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{(\mathbf{T}_{C \mapsto B})^T} & \mathbb{F}^n \\ \text{coord}_C \uparrow & & \text{coord}_B \uparrow & & \text{coord}_{B^*} \uparrow & & \uparrow \text{coord}_{C^*} \\ L & \xrightarrow{\text{id}} & L & \xrightarrow{\gamma_{right}} & L^* & \xrightarrow{\text{id}^*} & L^* \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & \gamma_{right} & & & & \end{array}$$



kde jsme využili Tvzení 9.1.13 a rovnosti  $\text{id}^* = \text{id}$ . ■

**15.2.5 Poznámka** Podobně jako v podkapitole 9.3 bychom mohli zavést *podobnost* matic bilineárních forem: dvě matice  $\mathbf{G}_1$  a  $\mathbf{G}_2$  stejných rozměrů jsou si podobné (jako matice bilineárních forem), pokud existuje regulární matice  $\mathbf{T}$  taková, že platí  $\mathbf{G}_2 = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{T}$ .

Poslední rovnost totiž vyjadřuje fakt, že  $\mathbf{G}_1$  a  $\mathbf{G}_2$  jsou matice *téže* bilineární formy vzhledem k různým bázím.

I pro bilineární formy platí slogan: *cokoli uděláte s bilineární formou, můžete stejně tak dobře udělat s její maticí* (vzhledem k jakékoli bázi). Přesněji, platí následující tvrzení.

**15.2.6 Tvzení** *At  $\mathbf{G}$  je matice bilineární formy  $\gamma$  vzhledem k jakékoli bázi  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  prostoru  $L$ . Potom platí:*

- (1) *Forma  $\gamma$  je nedegenerovaná právě tehdy, když  $\mathbf{G}$  je regulární matice.*
- (2) *Matice formy  $\gamma^T$  vzhledem k bázi  $B$  je  $\mathbf{G}^T$ .*
- (3) *Mají-li lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L' \rightarrow L$  a  $\mathbf{g} : L' \rightarrow L$  matice  $\mathbf{A}_\mathbf{f}$  a  $\mathbf{A}_\mathbf{g}$  vzhledem k bázím  $B' = (\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_s)$  a  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ , potom lineární forma  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{g}(\vec{y}))$  na  $L'$  má matici  $(\mathbf{A}_\mathbf{f})^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{g}$  vzhledem k bázi  $B'$ .*
- (4) *Forma  $\gamma$  je symetrická právě tehdy, když  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$ , tj. když matice  $\mathbf{G}$  je symetrická.*
- (5) *Forma  $\gamma$  je symplektická právě tehdy, když  $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$ , tj. když matice  $\mathbf{G}$  je antisymetrická.*

DŮKAZ.

- (1) To plyne okamžitě z Tvzení 15.1.11 a z Tvzení 9.1.10.
- (2) Připomeňme lineární zobrazení  $\mathbf{i} : L \rightarrow (L^*)^*$  z Příkladu 9.1.12:  $\mathbf{i}(\vec{x})$  přiřazuje lineární formě  $\mathbf{h}$  hodnotu  $\mathbf{h}(\vec{x})$ . Podívejme se na diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{E}_n} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{G}^T} & \mathbb{F}^n \\
 \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_{(B^*)^*} & & \uparrow \text{coord}_{B^*} \\
 L & \xrightarrow{\mathbf{i}} & (L^*)^* & \xrightarrow{(\gamma_{\text{right}})^*} & L^* \\
 & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\
 & & (\gamma^T)_{\text{right}} & & 
 \end{array}$$

Čtverec nalevo komutuje podle Příkladu 9.1.12, čtverec napravo komutuje podle Tvzení 9.1.13. Podle důkazu Tvzení 15.1.11 platí  $\gamma_{\text{left}} = (\gamma_{\text{right}})^* \cdot \mathbf{i}$ . Ale  $\gamma_{\text{left}} = (\gamma^T)_{\text{right}}$ . Celý diagram je tedy komutativní, a to jsme měli dokázat.

- (3) Označme bilineární formu  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{g}(\vec{y}))$  jako  $\beta$ . Potom je diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}_\mathbf{g}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\mathbf{G}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{(\mathbf{A}_\mathbf{f})^T} & \mathbb{F}^s \\
 \uparrow \text{coord}_{B'} & & \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_{B^*} & & \uparrow \text{coord}_{(B')^*} \\
 L & \xrightarrow{\mathbf{g}} & L & \xrightarrow{\gamma_{\text{right}}} & L^* & \xrightarrow{\mathbf{f}^*} & L^* \\
 & \searrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & \beta_{\text{right}} & & & & 
 \end{array}$$

komutativní.



Rozumný pojem kolmosti vektorů by měl být symetrický: je-li vektor  $\vec{x}$  kolmý na vektor  $\vec{y}$ , pak je vektor  $\vec{y}$  kolmý na vektor  $\vec{x}$ . Následující výsledek ukazuje, že takový pojem kolmosti si na bilineární formě  $\gamma$  vynutí určitá omezení.

**15.3.1 Věta** Pro bilineární formu  $\gamma$  na lineárním prostoru  $L$  nad  $\mathbb{F}$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Pro libovolné vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  platí: jestliže  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ , potom  $\gamma(\vec{y}, \vec{x}) = 0$ .
- (2) Platí buď  $\gamma = \gamma^T$  nebo  $\gamma = -\gamma^T$ , tj. bilineární forma  $\gamma$  je buď symetrická nebo symplektická.

DŮKAZ. Protože z podmínky (2) plyne triviálně podmínka (1), stačí ukázat, že z (1) plyne (2). Předpokládejme tedy, že platí podmínka (1). Dokážeme, že pak platí podmínka (2). Důkaz rozdělíme na několik částí.

- (a) Pro libovolné vektory  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  platí rovnost

$$\gamma(\vec{a}, \vec{c})\gamma(\vec{b}, \vec{a}) - \gamma(\vec{a}, \vec{b})\gamma(\vec{c}, \vec{a}) = 0 \quad (15.1)$$

Platí totiž rovnosti

$$\gamma(\vec{a}, \gamma(\vec{a}, \vec{c})\vec{b} - \gamma(\vec{a}, \vec{b})\vec{c}) = \gamma(\vec{a}, \vec{c})\gamma(\vec{a}, \vec{b}) - \gamma(\vec{a}, \vec{b})\gamma(\vec{a}, \vec{c}) = 0$$

protože forma  $\gamma$  je bilineární a násobení v tělese  $\mathbb{F}$  je komutativní. Podle podmínky (1) tedy platí

$$\gamma(\gamma(\vec{a}, \vec{c})\vec{b} - \gamma(\vec{a}, \vec{b})\vec{c}, \vec{a}) = 0$$

a odtud rovnost (15.1) plyne s využitím bilinearity formy  $\gamma$ .

- (b) Pro libovolné vektory  $\vec{a}, \vec{b}$  platí

$$\text{jestliže } \gamma(\vec{a}, \vec{b}) \neq \gamma(\vec{b}, \vec{a}), \text{ potom } \gamma(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \text{ a současně } \gamma(\vec{b}, \vec{b}) = 0 \quad (15.2)$$

Rovnost (15.1) má po dosazení  $\vec{c} = \vec{a}$  tvar  $\gamma(\vec{a}, \vec{a})\gamma(\vec{b}, \vec{a}) - \gamma(\vec{a}, \vec{b})\gamma(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ . To znamená, že platí rovnost  $\gamma(\vec{a}, \vec{a})(\gamma(\vec{b}, \vec{a}) - \gamma(\vec{a}, \vec{b})) = 0$ . Je-li  $\gamma(\vec{a}, \vec{b}) \neq \gamma(\vec{b}, \vec{a})$ , potom musí platit  $\gamma(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ .

Rovnost  $\gamma(\vec{b}, \vec{b}) = 0$  se dokáže analogicky: dosadte  $\vec{c} = \vec{b}$  do rovnosti (15.1).

- (c) Předpokládejme, že forma  $\gamma$  není symetrická. Ukážeme, že pak  $\gamma$  je nutně symplektická. Podle Lemmatu 15.1.23 stačí ukázat, že platí  $\gamma(\vec{x}, \vec{x}) = 0$  pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$ . Zvolme tedy libovolný vektor  $\vec{x}$ .

Protože  $\gamma$  není symetrická forma, existují dva vektory  $\vec{a}, \vec{b}$  takové, že  $\gamma(\vec{a}, \vec{b}) \neq \gamma(\vec{b}, \vec{a})$ . Povšimněme si, že podle (15.2) musí platit  $\gamma(\vec{a}, \vec{a}) = \gamma(\vec{b}, \vec{b}) = 0$ . Dále může nastat jeden ze dvou případů:

- (i)  $\gamma(\vec{a}, \vec{x}) \neq \gamma(\vec{x}, \vec{a})$ . Podle (15.2) platí  $\gamma(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ .
- (ii)  $\gamma(\vec{a}, \vec{x}) = \gamma(\vec{x}, \vec{a})$ . Podle (15.1) platí  $\gamma(\vec{a}, \vec{x})\gamma(\vec{b}, \vec{a}) - \gamma(\vec{a}, \vec{b})\gamma(\vec{x}, \vec{a}) = 0$ . To znamená, že platí rovnost  $\gamma(\vec{a}, \vec{x})(\gamma(\vec{b}, \vec{a}) - \gamma(\vec{a}, \vec{b})) = 0$ . Protože  $\gamma(\vec{a}, \vec{b}) \neq \gamma(\vec{b}, \vec{a})$ , musí platit  $\gamma(\vec{a}, \vec{x}) = \gamma(\vec{x}, \vec{a}) = 0$ .

Kdyby platilo  $\gamma(\vec{b}, \vec{x}) \neq \gamma(\vec{x}, \vec{b})$ , potom bychom dokázali  $\gamma(\vec{x}, \vec{x}) = 0$  stejně jako v části (i). Můžeme tedy předpokládat, že  $\gamma(\vec{b}, \vec{x}) = \gamma(\vec{x}, \vec{b})$  a analogicky předchozímu tak musí platit rovnost  $\gamma(\vec{b}, \vec{x}) = \gamma(\vec{x}, \vec{b}) = 0$ .

Tudíž platí  $\gamma(\vec{a} + \vec{x}, \vec{b}) = \gamma(\vec{a}, \vec{b}) \neq \gamma(\vec{b}, \vec{a}) = \gamma(\vec{b}, \vec{a} + \vec{x})$  a podle (15.2) je  $\gamma(\vec{a} + \vec{x}, \vec{a} + \vec{x}) = 0$ . Díky bilinearitě  $\gamma$  tedy platí  $\gamma(\vec{a}, \vec{a}) + 2\gamma(\vec{a}, \vec{x}) + \gamma(\vec{x}, \vec{x}) = \gamma(\vec{a} + \vec{x}, \vec{a} + \vec{x}) = 0$ .

■

Mají-li mít naše další úvahy geometrickou povahu, měl by pojem kolmosti vzhledem k bilineární formě  $\gamma$  na lineárním prostoru  $L$  být symetrický. Věta 15.3.1 nás pak nutí rozlišovat *dva zásadně různé* typy geometrií:

- (1) *Ortogonální geometrie*: bilineární forma  $\gamma$  na  $L$  je symetrická.

V ortogonální geometrii je tedy „skalární součin“  $\gamma$  symetrický: pro jakékoli vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  z  $L$  platí rovnost  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma(\vec{y}, \vec{x})$ .

- (2) *Symplektická geometrie*: bilineární forma  $\gamma$  na  $L$  je sympletická.

V symplektické geometrii je každý vektor  $\vec{x}$  z  $L$  „kolmý sám na sebe“, protože platí rovnost  $\gamma(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ .

Ortogonální geometrie a symplektická geometrie se navzájem vylučují. Přesněji: bilineární formy, které jsou symetrické a symetrické současně, jsou nutně triviální.

**15.3.2 Lemma** *Ať  $\gamma$  je bilineární forma na prostoru  $L$ , která je symetrická a symplektická současně. Potom je  $\gamma$  nulová.*

DŮKAZ. Zvolme libovolné vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  z  $L$ . Potom díky předpokladům platí rovnosti

$$0 = \gamma(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = \underbrace{\gamma(\vec{x}, \vec{x})}_{=0} + \gamma(\vec{x}, \vec{y}) + \gamma(\vec{y}, \vec{x}) + \underbrace{\gamma(\vec{y}, \vec{y})}_{=0} = 2\gamma(\vec{x}, \vec{y})$$

Protože  $-1 \neq 1$  v  $\mathbb{F}$ , je  $2 \neq 0$ . Tudíž  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ . ■

## 15.4 Geometrické prostory a jejich morfismy

**15.4.1 Definice (Geometrický prostor)** Dvojici  $(L, \gamma)$ , kde  $L$  je lineární prostor konečné dimenze a  $\gamma$  je buď symetrická nebo symplektická bilineární forma na  $L$ , budeme říkat *geometrický prostor*. Geometrickému prostoru  $(L, \gamma)$  budeme říkat *nedegenerovaný*, pokud je forma  $\gamma$  nedegenerovaná. V opačném případě budeme mluvit o *degenerovaném* geometrickém prostoru.

### 15.4.2 Příklad (Příklady geometrických prostorů)

- (1) Jakýkoli prostor  $L$  nad  $\mathbb{R}$  konečné dimenze se skalárním součinem je příkladem *nedegenerovaného* geometrického prostoru, protože skalární součin je *nedegenerovaná* a *symetrická* bilineární forma.
- (2) Příkladem *nedegenerovaného* geometrického prostoru, kde forma  $\gamma$  je sympletická, je  $\mathbb{R}^2$  nad  $\mathbb{R}$  s formou  $\gamma$ , která má matici

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem ke kanonické bázi  $K_2$ . Matice  $\mathbf{G}$  je totiž regulární (a proto je  $\gamma$  *nedegenerovaná*) a platí  $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$  (a proto je  $\gamma$  *sympletická*).

- (3) Příkladem *degenerovaného* geometrického prostoru, kde forma  $\gamma$  je sympletická, je  $\mathbb{R}^3$  nad  $\mathbb{R}$  s formou  $\gamma$ , která má matici

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem ke kanonické bázi  $K_3$ . Matice  $\mathbf{G}$  je totiž singulární (a proto je  $\gamma$  *degenerovaná*) a platí  $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$  (a proto je  $\gamma$  *sympletická*).

V Poznámce 15.1.15 jsme ukázali, že pro *jakoukoli* bilineární formu  $\gamma$  platí rovnost  $\text{def}(\gamma_{\text{left}}) = \text{def}(\gamma_{\text{right}})$  a v Příkladu 15.1.16 jsme viděli, že rovnost  $\ker(\gamma_{\text{left}}) = \ker(\gamma_{\text{right}})$  obecně neplatí. V geometrických prostorech tuto rovnost dokázat lze.

**15.4.3 Lemma** *Ať  $(L, \gamma)$  je geometrický prostor. Potom platí rovnost  $\ker(\gamma_{\text{left}}) = \ker(\gamma_{\text{right}})$ .*

DŮKAZ. Protože  $(L, \gamma)$  je geometrický prostor, podle podmínky (1) Věty 15.3.1 platí pro libovolné vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  rovnost  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0$  právě tehdy, když platí rovnost  $\gamma(\vec{y}, \vec{x}) = 0$ . Z toho okamžitě plyne  $\ker(\gamma_{\text{left}}) = \ker(\gamma_{\text{right}})$ . ■

Pro geometrický prostor  $(L, \gamma)$  udává podprostor  $\ker(\gamma_{\text{right}})$  (nebo s ním shodný podprostor  $\ker(\gamma_{\text{left}})$ ) míru *nede degenerovanosti* formy  $\gamma$ . Forma  $\gamma$  je nede degenerovaná právě tehdy, když  $\ker(\gamma_{\text{right}})$  je nejmenší možný podprostor, tj. když  $\ker(\gamma_{\text{right}}) = \{\vec{0}\}$ . Podprostor  $\ker(\gamma_{\text{right}})$  bude hrát v dalších úvahách důležitou roli, proto tomuto podprostoru dáme zvláštní jméno.

**15.4.4 Definice (Radikál geometrického prostoru)** Lineárnímu podprostoru<sup>1</sup>  $\ker(\gamma_{\text{right}})$  geometrického prostoru  $(L, \gamma)$  říkáme *radikál* prostoru  $(L, \gamma)$  a značíme jej  $\text{rad}(L, \gamma)$ . Nepovede-li to k nedorozumění, budeme často psát pouze  $\text{rad}(\gamma)$  místo  $\text{rad}(L, \gamma)$ .



**15.4.5 Poznámka (Výpočet radikálu lineárního podprostoru)** Ať  $W$  je lineární podprostor geometrického prostoru  $(L, \gamma)$ . Připomeňme značení z Definice 2.5.6: pro množinu lineárních forem  $\{\mathbf{h}_i \mid i \in I\}$  značíme

$$\{\mathbf{h}_i \mid i \in I\}^\perp = \{\vec{v} \mid \text{pro všechna } i \in I \text{ platí rovnost } \mathbf{h}_i(\vec{v}) = 0\}$$

Namísto těžkopádného  $\{\gamma(-, \vec{x}) \mid \text{vektor } \vec{x} \text{ je z } W\}^\perp$  budeme psát pouze  $W^\perp$ , tj. zavádíme jednodušší značení

$$W^\perp = \{\vec{v} \mid \text{pro všechna } \vec{x} \text{ z } W \text{ platí rovnost } \gamma(\vec{v}, \vec{x}) = 0\}$$

Speciálně platí  $\text{rad}(\gamma) = L^\perp = L \cap L^\perp$  a  $\text{rad}(\gamma_W) = W \cap W^\perp$ , kde  $\gamma_W$  je restrikce  $\gamma$  na podprostor  $W$ .

Radikály lineárních podprostorů geometrického prostoru  $(L, \gamma)$  nám v dalších úvahách umožní detailní popis lineárních zobrazení  $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ , která „zachovávají vzdálenosti“ (popis *grup isometrií*, viz Definici 15.4.11 a Věty 16.2.5 a 16.4.5). Zavedeme proto ortogonální rozklad lineárního prostoru na lineární podprostory. Jde o „vylepšení“ pojmu direktního rozkladu  $L = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$  na podprostory z Definice 1.6.13.

**15.4.6 Definice (Ortogonální rozklad geometrického prostoru)** Ať  $(L, \gamma)$  je geometrický prostor a ať  $W_1, \dots, W_k$  jsou lineární podprostory  $L$ . Jsou-li splněny dvě následující podmínky

- (1)  $L = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ .
- (2) Jestliže  $\vec{x}$  je z  $W_i$ ,  $\vec{y}$  je z  $W_j$  a  $i \neq j$ , potom  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ .

říkáme, že  $W_1, \dots, W_k$  tvoří *ortogonální rozklad*  $(L, \gamma)$  a tento fakt značíme  $L = W_1 \perp \dots \perp W_k$ .

Ortogonální rozklad prostoru na podprostory je tedy takovým direktním rozkladem prostoru na podprostory, kde jednotlivé podprostory jsou na sebe navzájem „kolmé“.

**15.4.7 Příklad** Geometrický prostor  $(\mathbb{R}^3, \langle - \mid - \rangle)$ , kde  $\langle - \mid - \rangle$  je standardní skalární součin, má ortogonální rozklad

$$\mathbb{R}^3 = \text{span}(\mathbf{e}_1) \perp \text{span}(\mathbf{e}_2) \perp \text{span}(\mathbf{e}_3)$$

Tento ortogonální rozklad je standardním rozkladem prostoru  $(\mathbb{R}^3, \langle - \mid - \rangle)$  na pravoúhlý systém souřadnic.

Direktní rozklad

$$\mathbb{R}^3 = \text{span}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \oplus \text{span}(\mathbf{e}_2) \oplus \text{span}(\mathbf{e}_3)$$

není ortogonální, protože  $\langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_2 \rangle = 1 \neq 0$ . Prostory  $\text{span}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$  a  $\text{span}(\mathbf{e}_2)$  tedy nejsou na sebe navzájem kolmé.

**15.4.8 Tvzení** Ať  $(L, \gamma)$  je geometrický prostor,  $L = W_1 \perp \dots \perp W_k$ . Označme jako  $\gamma_{W_i}$  restrikci  $\gamma$  na  $W_i$ . Potom platí rovnost  $\text{rad}(\gamma) = \text{rad}(\gamma_{W_1}) \oplus \dots \oplus \text{rad}(\gamma_{W_k})$ . Tudíž  $(L, \gamma)$  je nede degenerovaný právě tehdy, když každý geometrický prostor  $(W_i, \gamma_{W_i})$  je nede degenerovaný.

<sup>1</sup>Nebo podprostoru  $\ker(\gamma_{\text{left}})$ , což je podle Lemmatu 15.4.3 totéž jako  $\ker(\gamma_{\text{right}})$ .

DŮKAZ. Nejprve ukážeme, že platí rovnost  $\text{rad}(\gamma) = \text{rad}(\gamma_{W_1}) \oplus \dots \oplus \text{rad}(\gamma_{W_k})$ .

- (1) Rovnost  $\text{rad}(\gamma) = \text{rad}(\gamma_{W_1}) \vee \dots \vee \text{rad}(\gamma_{W_k})$ .

Inkluse  $\text{rad}(\gamma_{W_1}) \vee \dots \vee \text{rad}(\gamma_{W_k}) \subseteq \text{rad}(\gamma)$  je triviální, protože pro všechna  $i$  platí  $\text{rad}(\gamma_{W_i}) \subseteq \text{rad}(\gamma)$ .

Předpokládejme, že  $\vec{x}$  je v  $\text{rad}(\gamma)$ . Protože  $L = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ , lze podle Lemmatu 1.6.12 vektor  $\vec{x}$  zapsat jednoznačně jako  $\vec{x} = \vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k$ , kde  $\vec{w}_i$  je z  $W_i$ . Ukážeme, že  $\vec{w}_i$  je v  $\text{rad}(\gamma_{W_i})$  pro všechna  $i$ . Z toho plyne  $\text{rad}(\gamma) \subseteq \text{rad}(\gamma_{W_1}) \vee \dots \vee \text{rad}(\gamma_{W_k})$ .

Zvolme pevně  $i$  a libovolné  $\vec{v}$  z  $W_i$ . Víme, že

$$0 = \gamma(\vec{x}, \vec{v}) = \gamma(\vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k, \vec{v}) = \underbrace{\gamma(\vec{w}_1, \vec{v})}_{=0} + \dots + \underbrace{\gamma(\vec{w}_{i-1}, \vec{v})}_{=0} + \gamma(\vec{w}_i, \vec{v}) + \underbrace{\gamma(\vec{w}_{i+1}, \vec{v})}_{=0} + \dots + \underbrace{\gamma(\vec{w}_k, \vec{v})}_{=0}$$

kde vyznačené hodnoty jsou nulové, protože  $L = W_1 \perp \dots \perp W_k$ . Ukázali jsme, že  $\vec{w}_i$  je v  $\text{rad}(\gamma_{W_i})$  pro všechna  $i$ .

- (2) Rovnost  $\text{rad}(\gamma_{W_1}) \cap \dots \cap \text{rad}(\gamma_{W_k}) = \{\vec{0}\}$ .

Protože  $\text{rad}(\gamma_{W_i}) \subseteq W_i$  pro každé  $i$ , je  $\text{rad}(\gamma_{W_1}) \cap \dots \cap \text{rad}(\gamma_{W_k}) \subseteq W_1 \cap \dots \cap W_k = \{\vec{0}\}$ . Inkluse  $\{\vec{0}\} \subseteq \text{rad}(\gamma_{W_1}) \cap \dots \cap \text{rad}(\gamma_{W_k})$  platí triviálně.

Poslední tvrzení je triviální: geometrický prostor je nedegenerovaný právě tehdy, když jeho radikál je triviální lineární prostor. ■

**15.4.9 Tvrzení** *Ať  $(L, \gamma)$  je nedegenerovaný geometrický prostor. Potom platí:*

- (1) *Pro libovolný podprostor  $W$  prostoru  $L$  platí rovnosti  $W = (W^\perp)^\perp$ ,  $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(L)$  a  $\text{rad}(\gamma_W) = \text{rad}(\gamma_{W^\perp})$ .*
- (2) *Podprostor  $(W, \gamma_W)$  je nedegenerovaný právě tehdy, když podprostor  $(W^\perp, \gamma_{W^\perp})$  je nedegenerovaný. V tom případě platí  $L = W \perp W^\perp$ .*
- (3) *Jestliže  $L = W \perp V$ , potom  $(W, \gamma_W)$  a  $(V, \gamma_V)$  jsou nedegenerované prostory a  $V = W^\perp$ .*

DŮKAZ.

- (1) Rovnost  $W = (W^\perp)^\perp$  plyne okamžitě z definice  $W^\perp$ , viz Poznámku 15.4.5, a toho, že  $\gamma$  je nedegenerovaná bilineární forma.  
Rovnost  $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(L)$  plyne z Lemmatu 3.5.5.  
Rovnost  $\text{rad}(\gamma_W) = \text{rad}(\gamma_{W^\perp})$  plyne z Poznámky 15.4.5 a toho, že  $W = (W^\perp)^\perp$  následovně:  $\text{rad}(\gamma_W) = W \cap W^\perp = (W^\perp)^\perp \cap W^\perp = \text{rad}(\gamma_{W^\perp})$ .
- (2) Podle bodu (1) je  $\text{rad}(\gamma_W) = \text{rad}(\gamma_{W^\perp})$ , tudíž podprostor  $(W, \gamma_W)$  je nedegenerovaný právě tehdy, když podprostor  $(W^\perp, \gamma_{W^\perp})$  je nedegenerovaný.  
V nedegenerovaném případě platí  $\text{rad}(\gamma_W) = W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$ . Navíc platí rovnost  $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(L)$ , viz bod (1). To znamená, že  $L = W \oplus W^\perp$ . Rovnost  $L = W \perp W^\perp$  je pak okamžitým důsledkem definice  $W^\perp$ .
- (3) Ať  $L = W \perp V$ . Podle Tvrzení 15.4.8 je  $\text{rad}(\gamma) = \text{rad}(\gamma_W) \oplus \text{rad}(\gamma_V)$ . Protože  $(L, \gamma)$  je nedegenerovaný, jsou nedegenerované i prostory  $(W, \gamma_W)$  a  $(V, \gamma_V)$ .  
Protože  $L = W \perp V$ , platí  $V \subseteq W^\perp$ . Ale  $\dim(L) = \dim(W) + \dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$ . Proto  $\dim(V) = \dim(W^\perp)$ . Tedy  $V = W^\perp$ . ■

Tvrzení 15.4.9 umožňuje zobecnit pojem *ortogonální projekce* a *ortogonální rejeckce* (viz Definici 12.4.1) na nedegenerované geometrické prostory. Existuje však omezení: prostor, na který projekci počítáme, musí být *nedegenerovaný*.

**15.4.10 Důsledek (Ortogonalní projekce a orthogonalní rejeckce)** Ať  $(L, \gamma)$  je nedegenerovaný geometrický prostor. Potom pro každý nedegenerovaný podprostor  $(W, \gamma_W)$  existuje orthogonalní projekce  $\vec{v} \mapsto \text{proj}_W(\vec{v})$  a orthogonalní rejeckce  $\vec{v} \mapsto \text{rej}_W(\vec{v})$ . To jest: každý vektor  $\vec{v}$  lze jednoznačně psát jako součet

$$\vec{v} = \text{proj}_W(\vec{v}) + \text{rej}_W(\vec{v})$$

kde  $\text{proj}_W(\vec{v})$  je ve  $W$  a  $\text{rej}_W(\vec{v})$  je ve  $W^\perp$ .

**DŮKAZ.** Důkaz plyne okamžitě z Tvzení 15.4.9; platí totiž  $L = W \perp W^\perp$ , protože  $(W, \gamma_W)$  je podle předpokladů nedegenerovaný. ■

V podkapitolách 16.2 a 16.4 nás budou zajímat lineární zobrazení geometrických prostorů, která „zachovávají skalární součin“. Několika základním vlastnostem takových zobrazení věnujeme zbytek této podkapitoly.

**15.4.11 Definice (Morfismy geometrických prostorů a isometrie)** Ať  $(L, \gamma)$  a  $(L', \gamma')$  jsou geometrické prostory. Lineárnímu zobrazení  $\mathbf{f} : L' \rightarrow L$  říkáme *morfismus* z geometrického prostoru  $(L', \gamma')$  do geometrického prostoru  $(L, \gamma)$ , když pro jakékoli vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  z  $L'$  platí rovnost  $\gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{f}(\vec{y})) = \gamma'(\vec{x}, \vec{y})$ . Fakt, že  $\mathbf{f}$  je morfismus  $(L', \gamma')$  do  $(L, \gamma)$  budeme značit  $\mathbf{f} : (L', \gamma') \rightarrow (L, \gamma)$ .

Homomorfismům z  $(L, \gamma)$  do  $(L, \gamma)$  říkáme *isometrie* geometrického prostoru  $(L, \gamma)$  (také: *isometrie* vzhledem ke  $\gamma$ ).

**15.4.12 Poznámka (Ortogonalní rozklad morfismu)** Značení  $W_1 \perp \dots \perp W_k$  pro orthogonalní rozklad geometrického prostoru rozšíříme přirozeným způsobem na morfismy geometrických prostorů.

Přesněji: jsou-li  $(L', \gamma')$  a  $(L, \gamma)$  geometrické prostory s orthogonalními rozklady  $L' = W'_1 \perp \dots \perp W'_k$  a  $L = W_1 \perp \dots \perp W_k$ , a jsou-li  $\mathbf{f}_1 : (W'_1, \gamma'_{W'_1}) \rightarrow (W_1, \gamma_{W_1}), \dots, \mathbf{f}_k : (W'_k, \gamma'_{W'_k}) \rightarrow (W_k, \gamma_{W_k})$  morfismy příslušných geometrických prostorů, pak značkou

$$\mathbf{f}_1 \perp \dots \perp \mathbf{f}_k$$

označíme to lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L' \rightarrow L$ , které má na každém podprostoru  $W_i$  stejné hodnoty jako  $\mathbf{f}_i$ .

Z definice je zřejmé, že  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 \perp \dots \perp \mathbf{f}_k$  je geometrický morfismus  $\mathbf{f} : (L', \gamma') \rightarrow (L, \gamma)$ , protože platí rovnosti

$$\gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{f}(\vec{y})) = \gamma_{W_i}(\mathbf{f}_i(\vec{x}), \mathbf{f}_i(\vec{y})) = \gamma'_{W'_i}(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma'(\vec{x}, \vec{y})$$

jakmile  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  jsou z  $W'_i$ , a rovnosti

$$0 = \gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{f}(\vec{y})) = \gamma'(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

jakmile  $\vec{x}$  je z  $W_i$  a  $\vec{y}$  je z  $W_j$  pro  $i \neq j$ .

#### 15.4.13 Tvzení (Základní vlastnosti morfismů geometrických prostorů)

- (1) Složení morfismů geometrických prostorů je opět morfismus geometrických prostorů.
- (2) Identita na geometrickém prostoru je morfismus, tedy isometrie.
- (3) Každý morfismus nedegenerovaných geometrických prostorů je monomorfismus.
- (4) Každá isometrie na nedegenerovaném geometrickém prostoru je isomorfismus.

**DŮKAZ.**

- (1) Ať  $\mathbf{f} : (L'', \gamma'') \rightarrow (L', \gamma')$  a  $\mathbf{g} : (L', \gamma') \rightarrow (L, \gamma)$ . Potom  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} : (L'', \gamma'') \rightarrow (L, \gamma)$ , protože pro všechna  $\vec{x}, \vec{y}$  z  $L''$  platí rovnosti

$$\gamma(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{x})), \mathbf{g}(\mathbf{f}(\vec{y}))) = \gamma'(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{f}(\vec{y})) = \gamma''(\vec{x}, \vec{y})$$

- (2) Ať  $(L, \gamma)$  je geometrický prostor. Identita  $\text{id} : L \rightarrow L$  je evidentně morfismus, protože pro všechna  $\vec{x}, \vec{y}$  z  $L$  platí rovnost  $\gamma(\text{id}(\vec{x}), \text{id}(\vec{y})) = \gamma(\vec{x}, \vec{y})$ .



(3) Ať  $\mathbf{f} : (L', \gamma') \longrightarrow (L, \gamma)$ , kde  $(L', \gamma')$  a  $(L, \gamma)$  jsou nedegenerované. Potom je diagram

$$\begin{array}{ccccccc} L' & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L & \xrightarrow{\gamma_{right}} & L^* & \xrightarrow{\mathbf{f}^*} & (L')^* \\ & \searrow & & & & & \nearrow \\ & & & \gamma'_{right} & & & \end{array}$$

komutativní, viz Poznámku 15.1.7. Protože forma  $\gamma'$  je nedegenerovaná, je  $\gamma'_{right}$  monomorfismus. Takže  $\mathbf{f}$  musí být monomorfismus.

(4) Ať  $\mathbf{f} : (L, \gamma) \longrightarrow (L, \gamma)$ , kde  $(L, \gamma)$  je nedegenerovaný. Podle předchozího bodu je  $\mathbf{f}$  monomorfismus. Protože  $L$  má konečnou dimenzi, je  $\mathbf{f}$  isomorfismus podle Důsledku 3.3.8. ■

**15.4.14 Příklad (Rotace v  $\mathbb{R}^2$  je isometrie vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu)** Ať je na  $\mathbb{R}^2$  zadán standardní skalární součin  $\langle - | - \rangle$ . Dvojice  $(\mathbb{R}^2, \langle - | - \rangle)$  tvoří nedegenerovaný geometrický prostor.

Rotace kolem počátku o úhel  $\alpha$  proti směru hodinových ručiček má matici

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

vzhledem ke standardní bázi  $K_2$  prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Ukážeme, že  $\mathbf{R}_\alpha$  je isometrie. K tomu si stačí uvědomit, že platí  $\mathbf{R}_\alpha^{-1} = \mathbf{R}_\alpha^T$  (použijte například Důsledek 8.4.4). Proto pro libovolná  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z  $\mathbb{R}^2$  platí rovnosti

$$\langle \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} | \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \rangle = (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \underbrace{\mathbf{R}_\alpha^T \cdot \mathbf{R}_\alpha}_{=\mathbf{E}_2} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$$

Speciálně pro jakákoli  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  platí rovnost  $\langle \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} - \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} | \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} - \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y} | \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$ , a tudíž platí rovnost

$$d(\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}, \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

kde  $d$  je metrika vytvořená skalárním součinem. To jsme očekávali: *rotace nemění vzdálenosti vektorů*.

Předchozí příklad dobře vystihuje intuitivní význam isometrií: isometrie jsou taková lineární zobrazení, která nemění vzdálenosti vektorů.

Pozor, jde pouze o slogan! V obecném geometrickém prostoru  $(L, \gamma)$  nemůžeme o vzdálenosti mluvit. Skalární součin vytváří pojem vzdálenosti proto, že platí nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski (12.3), viz Tvzení 12.2.3 a 12.2.12.

Žádnou analogii nerovnosti (12.3) nelze pro obecnou (ať symetrickou nebo symplektickou) bilineární formu ani vyslovit, natož dokázat. Obecné těleso totiž nelze „rozumným“ způsobem uspořádat, a proto nemůžeme o nerovnostech mezi skaláry mluvit. Viz Příklady 1.3.8 a 1.3.9. V plné síle se tento „deficit“ geometrických prostorů projeví v aplikacích v kódování, viz například podkapitolu 1.2.

**15.4.15 Důsledek (Grupa isometrií geometrického prostoru)** Ať  $(L, \gamma)$  je nedegenerovaný geometrický prostor. Označme jako  $G(L, \gamma)$  množinu všech isometrií vzhledem k  $\gamma$ . Potom množina  $G(L, \gamma)$  je grupa vzhledem k operaci skládání, tj. platí následující tři podmínky:

- (1) Zobrazení  $\text{id}$  je prvkem množiny  $G(L, \gamma)$ .
- (2) Jestliže  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}$  jsou prvky množiny  $G(L, \gamma)$ , potom  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$  je prvkem množiny  $G(L, \gamma)$ .
- (3) Jestliže  $\mathbf{f}$  je prvkem množiny  $G(L, \gamma)$ , potom  $\mathbf{f}$  je isomorfismus a  $\mathbf{f}^{-1}$  je prvkem množiny  $G(L, \gamma)$ .

Navíc pro každou isometrii  $\mathbf{f}$  platí rovnosti  $\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{f}^l = \mathbf{f}^r$ .



DŮKAZ. Podmínky (1) a (2) plynou okamžitě z Tvzení 15.4.13. Ukažme podmínku (3). Z Tvzení 15.4.13 plyne, že  $\mathbf{f}$  je isomorfismus. Lineární zobrazení  $\mathbf{f}^{-1}$  je opět isometrie, protože pro všechny vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  platí rovnosti

$$\gamma(\mathbf{f}^{-1}(\vec{x}), \mathbf{f}^{-1}(\vec{y})) = \gamma(\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\vec{x})), \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\vec{y}))) = \gamma(\vec{y}, \vec{y})$$

Tím je podmínka (3) dokázána.

Nakonec ukážeme, že pro každou isometrii  $\mathbf{f}$  platí rovnosti  $\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{f}^l = \mathbf{f}^r$ . Z rovností  $\gamma(\mathbf{f}^l(\mathbf{f}(\vec{x})), \vec{y}) = \gamma(\mathbf{f}(\vec{x}), \mathbf{f}(\vec{y})) = \gamma(\vec{x}, \vec{y})$  plyne  $\mathbf{f}^l \cdot \mathbf{f} = \mathbf{id}$  pomocí Tvzení 15.1.17. Analogicky dostaneme rovnost  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^r = \mathbf{id}$ . Celkově tedy platí  $\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{f}^l = \mathbf{f}^r$ . ■

**15.4.16 Tvzení (Matice, které jsou isometrie)** *At'  $(\mathbb{F}^n, \gamma)$  je nedegenerovaný geometrický prostor. Předpokládáme, že bilineární forma  $\gamma$  má matici  $\mathbf{G}$  vzhledem ke kanonické bázi  $K_n$  prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Potom jsou pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) *Matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  je isometrie.*
- (2) *Matice  $\mathbf{A}$  je regulární a platí rovnost  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$ .*
- (3) *Platí rovnost  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$ .*
- (4) *Zapíšeme-li  $\mathbf{A}$  ve sloupcovém zápisu jako  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ , potom pro všechna  $i, j$  platí rovnost  $\gamma(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ .*

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Podle Tvzení 15.4.13 je  $\mathbf{A}$  isomorfismus, čili regulární matice. Podle předpokladu platí  $\gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_j$ . Protože platí rovnosti  $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j = \gamma(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i, \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) = \gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_j$ , mají matice  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}$  a  $\mathbf{G}$  stejné položky v  $i$ -tém řádku a v  $j$ -tém sloupci.

Ze (2) triviálně plyne (3). Ze (3) plyne (4), protože platí rovnosti

$$\gamma(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \gamma(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i, \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_j = \gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

Zbývá dokázat, že ze (4) plyne (1). Protože  $\mathbf{a}_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j$  pro všechna  $j$ , podmínka (4) říká, že pro všechna  $i, j$  platí rovnost  $\gamma(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i, \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) = \gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ . Rovnost  $\gamma(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}) = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  pro libovolné vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z  $\mathbb{F}^n$  je pak okamžitým důsledkem bilinearit  $\gamma$  a toho, že  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  tvoří bázi  $\mathbb{F}^n$ . ■

**15.4.17 Důsledek** *Každá isometrie  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  nedegenerovaného geometrického prostoru  $(\mathbb{F}^n, \gamma)$  má determinant buď 1 nebo  $-1$ .*

DŮKAZ. Je-li  $\mathbf{G}$  matice  $\gamma$  vzhledem ke kanonické bázi  $K_n$  prostoru  $\mathbb{F}^n$ , potom podle Tvzení 15.4.16 pro každou isometrii  $\mathbf{A}$  platí rovnost  $\det(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{G})$ . To znamená, že  $\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{G}) \cdot \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{G})$ , neboli  $(\det(\mathbf{A}))^2 = 1$ . ■

Ve zbytku této podkapitoly zmíníme vlastnosti některých jednoduchých isometrií.

**15.4.18 Tvzení** *At'  $(L, \gamma)$  je nedegenerovaný geometrický prostor. Pro lineární zobrazení  $\mathbf{r} : L \rightarrow L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) *Zobrazení  $\mathbf{r}$  je isometrie a platí  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{id}_L$ .*
- (2) *V  $L$  existují podprostory  $V$  a  $W$  takové, že platí  $\mathbf{r} = (\mathbf{id}_V) \perp (-\mathbf{id}_W)$ .*

DŮKAZ. Protože ze (2) plyne (1), stačí ukázat, že z (1) plyne (2).

Definujme  $V = \text{im}(\mathbf{r} + \mathbf{id})$  a  $W = \text{im}(\mathbf{r} - \mathbf{id})$ . Potom  $V$  a  $W$  jsou lineární podprostory  $L$ . Pro  $\vec{v} = \mathbf{r}(\vec{x}) + \vec{x}$  z podprostoru  $V$  platí  $\mathbf{r}(\vec{v}) = \mathbf{r}(\mathbf{r}(\vec{x}) + \vec{x}) = \vec{x} + \mathbf{r}(\vec{x}) = \vec{v}$ . Pro  $\vec{w} = \mathbf{r}(\vec{x}') - \vec{x}'$  z podprostoru  $W$  platí  $\mathbf{r}(\vec{w}) = \mathbf{r}(\mathbf{r}(\vec{x}') - \vec{x}') = \vec{x}' - \mathbf{r}(\vec{x}') = -\vec{w}$ . Důkaz bude hotov, jakmile ukážeme, že platí  $L = V \perp W$ .

- (a) Platí  $V \vee W = L$ .

Opravdu: každý vektor  $\vec{x}$  z  $L$  lze napsat jako součet  $-\frac{1}{2}(\mathbf{r}(\vec{x}) - \vec{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{r}(\vec{x}) + \vec{x})$ .

(b) Platí  $V \cap W = \{\vec{o}\}$ .

Ať  $\vec{v}$  je v  $V \cap W$ . Podle předchozích výpočtů platí  $\mathbf{r}(\vec{v}) = \vec{v}$ , a současně  $\mathbf{r}(\vec{v}) = -\vec{v}$ . To znamená, že  $\mathbf{r}(\vec{v}) = \vec{o}$ . Tedy  $\vec{v} = \vec{o}$ , protože  $\mathbf{r}$  je isometrie (tudíž isomorfismus).

(c) Ať  $\mathbf{r}(\vec{x}) + \vec{x}$  je ve  $V$  a  $\mathbf{r}(\vec{y}) - \vec{y}$  je ve  $W$ . Potom  $\gamma(\mathbf{r}(\vec{x}) + \vec{x}, \mathbf{r}(\vec{y}) - \vec{y}) = 0$ .

Opravdu: platí rovnosti

$$\gamma(\mathbf{r}(\vec{x}) + \vec{x}, \mathbf{r}(\vec{y}) - \vec{y}) = \gamma(\mathbf{r}(\vec{x}), \mathbf{r}(\vec{y})) + \underbrace{\gamma(\vec{x}, \mathbf{r}(\vec{y})) - \gamma(\mathbf{r}(\vec{x}), \vec{y})}_{=0} - \gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma(\mathbf{r}(\vec{x}), \mathbf{r}(\vec{y})) - \gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

kde v poslední rovnosti jsme využili toho, že  $\mathbf{r}$  je isometrie a vyznačená rovnost plyne z toho, že  $\mathbf{r}$  je isometrie, pro kterou platí  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \text{id}$ :

$$\gamma(\vec{x}, \mathbf{r}(\vec{y})) - \gamma(\mathbf{r}(\vec{x}), \vec{y}) = \gamma(\mathbf{r}(\vec{x}), \mathbf{r}(\mathbf{r}(\vec{y}))) - \gamma(\mathbf{r}(\vec{x}), \vec{y}) = 0$$

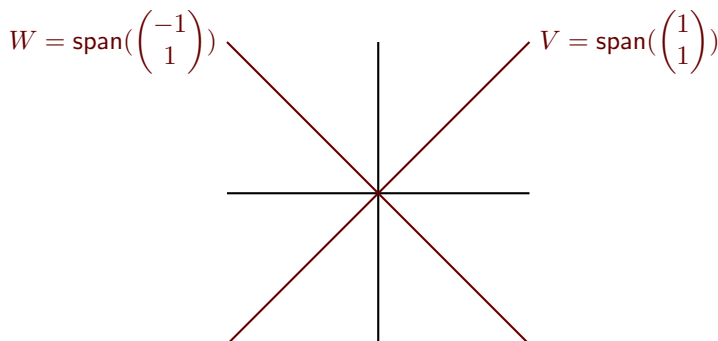
■

**15.4.19 Definice (Reflexe podle podprostoru)** Isometrii  $\mathbf{r}$  z Tvzení 15.4.18 říkáme *reflexe podle podprostoru*  $V$ .

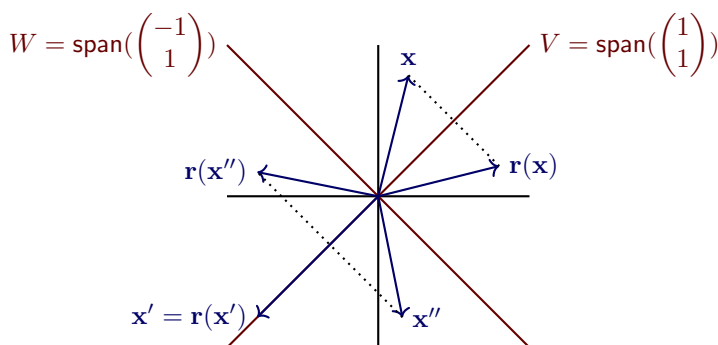
**15.4.20 Příklad** Prostor  $\mathbb{R}^2$  se standardním skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$  je nede degenerovaný geometrický prostor. Prostor  $\mathbb{R}^2$  má ortogonální rozklad

$$\mathbb{R}^2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \perp \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

viz obrázek



Zobrazení  $\mathbf{r} = (\text{id}_V) \perp (-\text{id}_W)$  je přesně reflexe podle osy  $V$ :



K reflexím podle *nadrovín* pro případ obecné *symetrické* bilineární formy se vrátíme v Tvzení 16.2.4 a Větě 16.2.5.

Podkapitolu zakončíme následujícím pozorováním: pokud isometrie zobrazuje každou přímku do sebe, nemůže se příliš lišit od identity. Zajímavé isometrie tedy musí alespoň jednu přímku zobrazit mimo tuto přímku.

**15.4.21 Tvzení** *At'  $(L, \gamma)$  je nedegenerovaný geometrický prostor. Pro lineární zobrazení  $f : L \rightarrow L$  jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1)  *$f$  je isometrie, která zobrazuje každou přímku  $\text{span}(\vec{v})$  do sebe.*
- (2)  *$f$  je buď  $\text{id}$  nebo  $-\text{id}$ .*

DŮKAZ. Protože evidentně ze (2) plyne (1), stačí ukázat, že z (1) plyne (2).

- (a) Existuje skalár  $a$  takový, že pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$  platí  $f(\vec{x}) = a\vec{x}$ .

Předpokládejme, že  $\vec{v}$  je nenulový vektor. Potom podle předpokladu platí  $f(\vec{v}) = a_{\vec{v}}\vec{v}$ , kde skalár  $a_{\vec{v}}$  může na  $\vec{v}$  záviset. Pro libovolný vektor  $\vec{y} = b\vec{v}$  platí rovnost

$$f(\vec{y}) = f(b\vec{v}) = bf(\vec{v}) = ba_{\vec{v}}\vec{v} = a_{\vec{v}}b\vec{v} = a_{\vec{v}}\vec{y}$$

Ukázali jsme, že skalár  $a_{\vec{v}}$  nezávisí na volbě vektoru z přímky  $\text{span}(\vec{v})$ . Stále by ale ještě mohl záviset na přímce  $\text{span}(\vec{v})$ . Zvolme proto jakýkoli další vektor  $\vec{w}$  takový, že  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  jsou lineárně nezávislé vektory. Potom  $f(\vec{v} + \vec{w}) = a_{\vec{v}+\vec{w}}(\vec{v} + \vec{w}) = a_{\vec{v}+\vec{w}}\vec{v} + a_{\vec{v}+\vec{w}}\vec{w}$ , ale také  $f(\vec{v} + \vec{w}) = a_{\vec{v}}\vec{v} + a_{\vec{w}}\vec{w}$ . To znamená, že  $a_{\vec{v}} = a_{\vec{w}} = a_{\vec{v}+\vec{w}}$ .

- (b) Pro skalár  $a$  z bodu (a) platí  $a = 1$  nebo  $a = -1$ .

Protože  $\gamma$  je nedegenerovaná, existují vektory  $\vec{x}, \vec{y}$  takové, že  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$ . Protože  $f$  je isometrie, platí rovnost

$$a^2\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma(a\vec{x}, a\vec{y}) = \gamma(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \gamma(\vec{x}, \vec{y})$$

tudíž  $(a^2 - 1)\gamma(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ . Protože  $\gamma(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$ , platí  $a^2 - 1 = 0$ . To jsme chtěli dokázat. ■

V následujících podkapitolách 16.2 a 16.4 prostudujeme grupu isometrií *nedegenerovaných* geometrických prostorů podrobněji: zvlášť pro případ symetrické formy a zvlášť pro případ symplektické formy. Uvidíme, že v obou případech lze každou isometrii vytvořit složením konečného počtu jistých jednoduchých isometrií.

## Dodatek A

# Aplikace — Základy tensorového počtu

When the problems in physics become difficult we may often look to the mathematicians, who may already have studied such things and have prepared a line of reasoning for us to follow. On the other hand they may not have, in which case we need to invent our own line of reasoning, which we then pass to mathematicians. Everybody who reasons carefully about anything is making a contribution to the knowledge of what happens when you think about something, and if you abstract it away and send it to the Department of Mathematics they put it in books as a branch of mathematics.

Richard Feynman, *The character of physical law*

V tomto dodatku nahlédneme do teorie *tenzorů*. Teorie tenzorů, ve své pokročilejší formě, se dokonale snoubí s diferenciální geometrií a dává možnost elegantně popisovat geometrickou strukturu „spojitých“ problémů ve více dimensích. Tensory tak tvoří základ moderní fyziky, ať už jde o klasickou mechaniku, elektrodynamiku, teorii relativity nebo fyziku elementárních částic. Viz například

- ☞ Sean Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*, Addison Wesley, 2004.
- ☞ Herbert Goldstein, Charles Poole a John Safko, *Classical mechanics*, Addison Wesley, 2000.

V dalším textu uvedeme pouze *základy* tensorového počtu. Přesněji: zaměříme se pouze na základní aspekty tenzorů, které bezprostředně souvisí s lineární algebrou. Pojem tenzoru je totiž pouhým speciálním případem *multilineárního zobrazení*<sup>1</sup> z Definice 5.1.4. Pro „klasické“ zavedení tenzorů lze doporučit texty

- ☞ Boris A. Dubrovin, Anatoli T. Fomenko, Sergey P. Novikov, *Modern geometry — Methods and applications, Part I: The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Springer, 1992.
- ☞ Daniel A. Fleisch, *A student's guide to vectors and tensors*, Cambridge University Press, 2012.
- ☞ Boaz Porat, *A gentle introduction to tensors*, 2014.

My zkombinujeme klasické zavedení pojmu tenzor s moderním *grafickým kalkulem* tenzorů. Grafický kalkulus pro tensory zavedl britský matematik a fyzik sir Roger Penrose v článku

- ☞ Roger Penrose, Applications of negative dimensional tensors, in: *Combinatorial mathematics and its applications* (D. J. A. Welsh, ed.), Academic Press (1971), 221–244.

V podkapitole A.1 ukážeme grafický kalkulus pro vektory, kovektory a lineární zobrazení. Obecné tensory druhého řádu (mezi které patří lineární zobrazení a metrický tenzor) budeme studovat v podkapitole A.2 a v podkapitole A.3 vysvětlíme obecný pojem tenzoru. Grafický kalkulus zavedeme *neformálně*, pro podrobnosti odkazujeme na citovanou literaturu. V podkapitole A.3 ukážeme i „klasický“ *indexový přístup* k tenzorům.

Tensory v tomto dodatku budeme studovat na lineárních prostorech konečné dimenze nad tělesem  $\mathbb{R}$ .

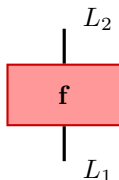
<sup>1</sup>Pokud jste Kapitulu 5 nečetli, nevadí to. Vše potřebné v tomto dodatku vysvětlíme.

## A.1 Vektory, kovektory a lineární zobrazení: znovu a jinak

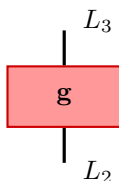
Pro lineární zobrazení jsme v Kapitole 2 zavedli kalkulus *komutativních diagramů*. Psali jsme tak například

$$L_1 \xrightarrow{\mathbf{f}} L_2 \xrightarrow{\mathbf{g}} L_3$$

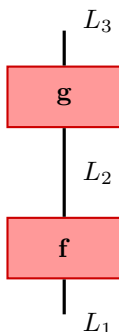
pro složení lineárních zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  a  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$ . Zavedeme nyní *jiný* kalkulus: lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  označíme jako



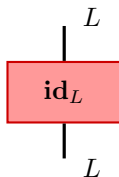
a lineární zobrazení  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$  označíme jako



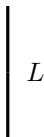
Složení  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_3$  je pak



Identické zobrazení



budeme značit



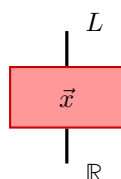
Výše zavedené obrázky umožňují pro libovolná lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ ,  $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$ ,  $\mathbf{h} : L_3 \rightarrow L_4$  dokázat rovnosti

$$(\mathbf{h} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{f} = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) \quad \mathbf{f} \cdot \text{id}_{L_1} \quad \text{id}_{L_2} \cdot \mathbf{f}$$

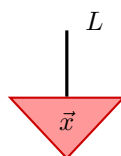
grafickým způsobem.

Jak vypadají lineární zobrazení tvaru  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow L$ ? Protože prostor  $\mathbb{R}$  má nad  $\mathbb{R}$  dimenzi 1, je lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow L$  určeno svojí hodnotou na bázi, tj. hodnotou  $\mathbf{f}(1)$  v  $L$ . Hodnota  $\mathbf{f}(1)$  je ovšem vektor v  $L$ .

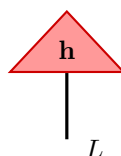
Obráceně: jakýkoli vektor  $\vec{x}$  v  $L$  určuje lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow L$  s předpisem  $\mathbf{f}(r) = r \cdot \vec{x}$ . To znamená, že do grafického kalkulu můžeme zahrnout i vektory. Vektor  $\vec{x}$  z lineárního prostoru  $L$  tedy můžeme značit jako



nebo (zatím bez vysvětlení proč, vše ale vysvětlíme v Tvzení A.2.3) můžeme „strunu“ označenou  $\mathbb{R}$  *vynechat* a psát



Ve Značení 2.5.1 jsme lineárním zobrazením  $\mathbf{h} : L \rightarrow \mathbb{R}$  říkali *lineární forma* nebo *kovektor* na lineárním prostoru  $L$ . Protože „strunu“ označenou  $\mathbb{R}$  *nepíšeme*, dostáváme pro kovektor  $\mathbf{h} : L \rightarrow \mathbb{R}$  obrázek



To jest: obrázky pro vektor a kovektor jsou *až na změnu orientace totožné*!

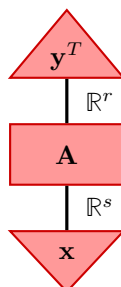
Protože skalár (tj. reálné číslo) lze ztotožnit s lineárním zobrazením  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , budeme skalár  $r$  značit



protože „struny“ označené  $\mathbb{R}$  *nemalujeme*.

Používáme termín *struna*. Pozor: grafický kalkulus pro tenzory *není totožný* s grafickým kalkulem pro strunové diagramy permutací z Kapitoly 8!

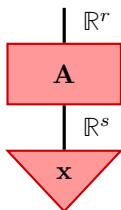
**A.1.1 Příklad** Pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ , vektor  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{R}^s$  a kovektor  $\mathbf{y}^T : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ , je součin  $\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  skalár. To vidíme i z grafického kalkulu:



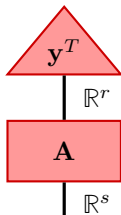
Získáváme totiž obrázek, ze kterého „nevedou volné struny“, tj. obrázek typu



Podobně:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  je vektor:



a  $\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{A}$  je kovektor:

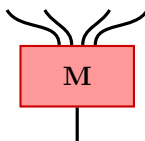


Shrňme to, co zatím o grafickém kalkulu pro vektory, kovektory a lineární zobrazení víme:

- (1) Lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  značíme obdélníkem značeným  $f$ . Struna označená  $L_1$  vede od obdélníku dolů, struna označená  $L_2$  vede od obdélníku nahoru. Strunu značenou  $\mathbb{R}$  nekreslíme. To jest:
  - (a) Vektor z  $L$  značíme trojúhelníkem se strunou směřující nahoru.
  - (b) Kovektor na  $L$  (tj. lineární formu na  $L$ ) značíme trojúhelníkem se strunou směřující dolů.
- (2) Skládání lineárních zobrazení modelujeme „napojením“ příslušných strun: první zobrazení je namalováno *pod* druhým. Identické zobrazení na prostoru  $L$  modelujeme jako pouhou strunu označenou  $L$ , tj. příslušný obdélník označený  $\text{id}_L$  nekreslíme.

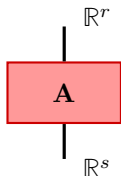
## A.2 Tensory druhého řádu

Grafický kalkulus z předchozí podkapitoly svádí k tomu, malovat například i obrázek následujícího typu:



Co má tento obrázek znázorňovat? Podle předchozího jsme namalovali obrázek něčeho, co „čeká“ na jeden vektor a čtyři kovektory: výsledkem pak bude skalár.

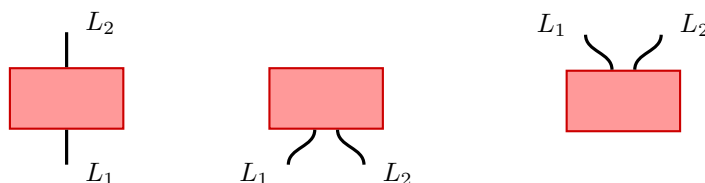
Podobnou situaci jsme viděli v Příkladu A.1.1: lineární zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  namalované jako



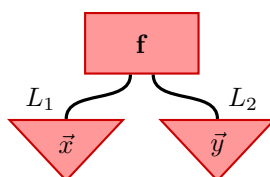
„čeká“ na jeden vektor z  $\mathbb{R}^s$  a jeden kovektor<sup>2</sup> z  $(\mathbb{R}^r)^*$ , abychom dostali skalár.

<sup>2</sup>Připomeňme, že pro lineární prostor  $L$  nad  $\mathbb{R}$  značíme jako  $L^*$  lineární prostor  $\text{Lin}(L, \mathbb{R})$  všech lineárních forem (kovektorů) na  $L$ , viz Značení 2.5.1.

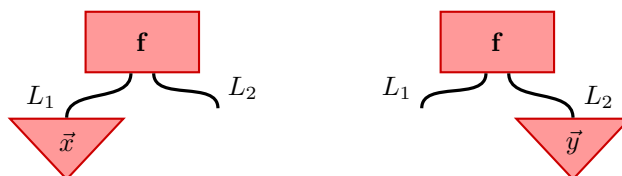
V této podkapitole se zaměříme na analýzu obrázků, které mají *přesně* dvě struny: tj na obrázky typu



Obrázek zcela nalevo znázorňuje lineární zobrazení z  $L_1$  do  $L_2$ ; zbylé dva obrázky ještě neumíme interpretovat. Prostřední obrázek znázorňuje objekt  $\mathbf{f}$ , který „čeká“ na dva vektory a výsledkem je pak skalár protože „obrázek nemá volnou strunu“:

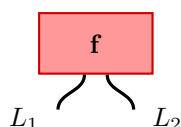


Podobné objekty  $\mathbf{f}$  jsme studovali například v Kapitole 5: jde o *bilineární*<sup>3</sup> zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \times L_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Obrázky



totiž tvrdí *přesně* to, že pro pevné vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  máme obrázky kovektorů na  $L_2$  a na  $L_1$ . Neboli: obě zobrazení  $\mathbf{f}(\vec{x}, -) : L_2 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\mathbf{f}(-, \vec{y}) : L_1 \rightarrow \mathbb{R}$  jsou lineární.

Tím je první problém vyřešen: obrázky typu



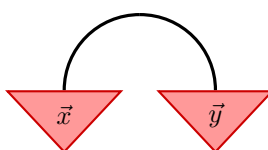
jsou *přesně* bilineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \times L_2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**A.2.1 Značení (Metrický tensor)** Na prostoru  $L$  se skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$  existuje prominentní bilineární forma — skalární součin. Skutečně: Definice 12.1.2 říká, že pro pevné vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  jsou obě zobrazení  $\langle \vec{x} | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\langle - | \vec{y} \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$  lineární. Tensor, který odpovídá skalárnímu součinu na  $L$  bude v dalších úvahách hrát důležitou roli, proto pro něj zavedeme speciální obrázek



a značku  $L$  budeme v dalším často vynechávat.

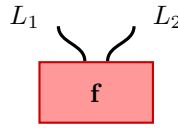
Skalární součin  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$  vektorů  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  tedy znázorníme obrázkem



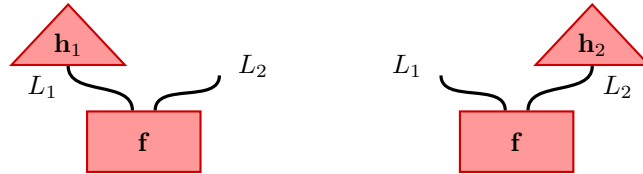
<sup>3</sup>Připomeňme, že  $\mathbf{f} : L_1 \times L_2 \rightarrow \mathbb{R}$  je bilineární zobrazení, pokud pro pevné vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  jsou obě zobrazení  $\mathbf{f}(\vec{x}, -) : L_2 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\mathbf{f}(-, \vec{y}) : L_1 \rightarrow \mathbb{R}$  lineární. Viz Definici 5.1.4. Bilineárnímu zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \times L_2 \rightarrow \mathbb{R}$  také říkáme *bilineární forma* na  $L_1 \times L_2$ .



Zbývá dát význam obrázkům typu



Pro libovolné kovektory  $\mathbf{h}_1 : L_1 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\mathbf{h}_2 : L_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , znázorňuje každý z obrázků



vektor.

Připomeňme, že podle Příkladu 9.1.12 je — pro každý lineární prostor  $L$  konečné dimenze — zobrazení

$$\mathbf{i} : L \rightarrow (L^*)^*, \quad \vec{y} \mapsto (\mathbf{h} \mapsto \mathbf{h}(\vec{y}))$$

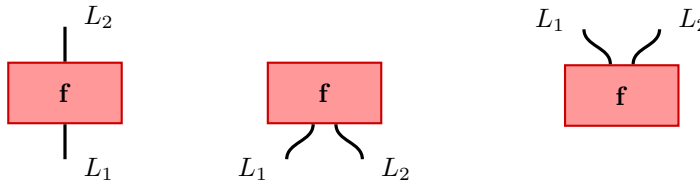
isomorfismus. Proto každý vektor  $\vec{x}$  z  $L$  můžeme ztotožnit s lineární formou  $\mathbf{i}(\vec{x})$  na  $L^*$ .

To znamená, že pro každý kovektor  $\mathbf{h}_1$  na  $L_1$  je zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{h}_1, -) : (L_2)^* \rightarrow \mathbb{R}$  lineární a pro každé  $\mathbf{h}_2$  je zobrazení  $\mathbf{f}(-, \mathbf{h}_2) : (L_1)^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Neboli:  $\mathbf{f}$  je *bilineární* zobrazení z  $(L_1)^* \times (L_2)^*$  do  $\mathbb{R}$ .

Rýsuje se nám obecný tvar: tensor druhého řádu je bilineární zobrazení  $\mathbf{f}$  tří typů:

$$\mathbf{f} : L_1 \times (L_2)^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{f} : L_1 \times L_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{f} : (L_1)^* \times (L_2)^* \rightarrow \mathbb{R}$$

a odpovídající obrázky jsou:



V předchozí podkapitole jsme ale říkali, že obrázek nalevo reprezentuje lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ . Proč nyní říkáme, že stejný obrázek reprezentuje *bilineární* zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \times (L_2)^* \rightarrow \mathbb{R}$ ? Důvodem je následující jednoduché tvrzení, které podstatným způsobem využívá faktu, že prostor  $L_2$  má *konečnou* dimenzi.

**A.2.2 Tvrzení** Zadat lineární zobrazení z  $L_1$  do  $L_2$  je totéž jako zadat bilineární zobrazení z  $L_1 \times (L_2)^*$  do  $\mathbb{R}$ .

**DŮKAZ.** Připomeňme, že podle Příkladu 9.1.12 je zobrazení

$$\mathbf{i} : L_2 \rightarrow ((L_2)^*)^*, \quad \vec{y} \mapsto (\mathbf{h} \mapsto \mathbf{h}(\vec{y}))$$

isomorfismus. Proto zadat bilineární zobrazení z  $L_1 \times (L_2)^*$  do  $\mathbb{R}$  je totéž jako zadat lineární zobrazení z  $L_1$  do  $((L_2)^*)^*$ . Důkaz rozdělíme na tři části.

- (1) Pro každé lineární zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  definujeme zobrazení  $\mathbf{f}^\sharp : L_1 \rightarrow ((L_2)^*)^*$  a ukážeme, že  $\mathbf{f}^\sharp$  je lineární zobrazení.

Složení

$$L_1 \xrightarrow{\mathbf{f}} L_2 \xrightarrow{\mathbf{i}} ((L_2)^*)^*$$

je lineární zobrazení. Označme jej  $\mathbf{f}^\sharp$ .

- (2) Pro každé lineární zobrazení  $g : L_1 \rightarrow ((L_2)^*)^*$  definujeme zobrazení  $g^b : L_1 \rightarrow L_2$  a ukážeme, že  $g^b$  je lineární zobrazení.

Zobrazení  $g^b$  definujeme jako složení

$$L_1 \xrightarrow{g} ((L_2)^*)^* \xrightarrow{i^{-1}} L_2$$

Toto zobrazení je evidentně lineární.

- (3) Dokážeme rovnosti  $(f^\sharp)^b = f$  a  $(g^b)^\sharp = g$ .

Opravdu, platí rovnosti

$$(f^\sharp)^b = i^{-1} \cdot f^\sharp = i^{-1} \cdot (i \cdot f) = f \quad (g^b)^\sharp = i \cdot (g^b) = i \cdot (i^{-1} \cdot g) = g$$

■

Zbývá vysvětlit, proč z obrázků vynecháváme strunu označenou  $\mathbb{R}$ . To plyne z následujícího tvrzení.

**A.2.3 Tvrzení** *Zadat bilineární zobrazení z  $\mathbb{R} \times L$  do  $\mathbb{R}$  je totéž jako zadat lineární zobrazení z  $L$  do  $\mathbb{R}$ .*

**DŮKAZ.** Zadat bilineární zobrazení z  $\mathbb{R} \times L$  do  $\mathbb{R}$  je totéž jako zadat lineární zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $L^*$ .

Zadat lineární zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $L^*$  je ale totéž jako zadat prvek z  $L^*$ , protože  $\mathbb{R}$  má dimenzi 1 nad  $\mathbb{R}$  a lineární zobrazení je určeno svými hodnotami na bázi.

Zadat prvek z  $L^*$  ale znamená totéž jako zadat lineární zobrazení z  $L$  do  $\mathbb{R}$ .

■

Předchozí dvě tvrzení lze dokázat pro lineární prostory  $L$  konečné dimenze nad *jakýmkoli* tělesem  $\mathbb{F}$ . Ve skutečnosti narážíme na důležitý pojem *tensorového součinu*  $L_1 \otimes L_2$  lineárních prostorů  $L_1$  a  $L_2$ . Tensorový součin lze definovat následujícím požadavkem:

Zadat bilineární zobrazení z  $L_1 \times L_2$  do  $L$  je totéž jako zadat lineární zobrazení z  $L_1 \otimes L_2$  do  $L$ .

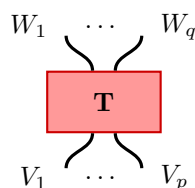
Tensorový součin lineárních prostorů nad obecným tělesem lze zavést podobným způsobem, jakým jsme zavedli vnější mocninu lineárního prostoru v Kapitole 5. Dělat to nebudeme, odkazujeme například na knihy

☞ Werner H. Greub, *Linear algebra*, Springer-Verlag, 1967.

☞ Serge Lang, *Algebra*, Springer, 1992.

## A.3 Obecné tensory a abstraktní indexy

V této závěrečné podkapitole zobecníme předchozí úvahy na studium obrázků typu



kde  $V_1, \dots, V_p$  a  $W_1, \dots, W_q$  jsou lineární prostory konečné dimenze nad  $\mathbb{R}$ .

Následující definice nás nemůže překvapit; jde pouze o přesné vyjádření toho, jak výše namalovaný obrázek interpretujeme:

### A.3.1 Definice (Obecný tensor) Multilineárnímu<sup>4</sup> zobrazení

$$\mathbf{T} : \underbrace{V_1 \times \dots \times V_p}_{p\text{-krát}} \times \underbrace{(W_1)^* \times \dots \times (W_q)^*}_{q\text{-krát}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

říkáme  $(V_1, \dots, V_p; W_1, \dots, W_q)$ -*tensor*.

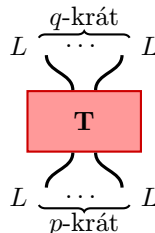
V případě, že  $V_1 = V_2 = \dots = V_p = W_1 = W_2 = \dots = W_q = L$ , říkáme multilineárnímu zobrazení

$$\mathbf{T} : \underbrace{L \times \dots \times L}_{p\text{-krát}} \times \underbrace{L^* \times \dots \times L^*}_{q\text{-krát}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

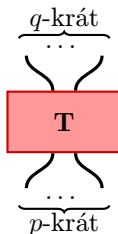
$(p, q)$ -*tensor na  $L$* . Součtu  $p + q$  říkáme *řád tensoru  $\mathbf{T}$* .

Ve fyzikálních aplikacích se převážně vyskytují  $(p, q)$ -tensory na pevném lineárním prostoru  $L$ . Proto se i my v dalším omezíme na tensory tohoto typu. Samozřejmě, grafický kalkulus můžeme v tomto případě upravit tak, že značku prostoru  $L$  u příslušných strun *nebudeme* psát.

Namísto



budeme tedy psát pouze



Pozor: naše terminologie pro  $(p, q)$ -tensor využívá následující konvence: symbol  $(p, q)$  čteme *zleva doprava* a to je v souladu s tím, že obrázky pro tensory čteme *zdola nahoru*. Tj. obrázek pro  $(p, q)$ -tensor má dole  $p$  strun a nahoře  $q$  strun.

V některé literatuře může být zavedena konvence obrácená. Budete-li studovat jinou literaturu, přesvědčete se, jak jsou v ní  $(p, q)$ -tensory zavedeny.

**A.3.2 Příklad** Vektory z  $L$  jsou *přesně*  $(0, 1)$ -tensory, kovektory na  $L$  jsou *přesně*  $(1, 0)$ -tensory. Lineární zobrazení z  $L$  do  $L$  jsou *přesně*  $(1, 1)$ -tensory. Bilineární formy na  $L$  jsou *přesně*  $(2, 0)$ -tensory. Příkladem  $(2, 0)$ -tensoru na  $L$  je metrický tensor (skalární součin):



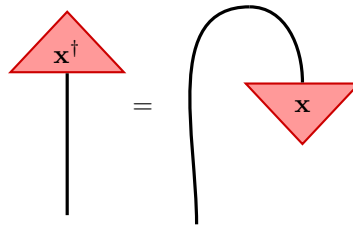
<sup>4</sup>Připomeňme, že  $\mathbf{T} : L_1 \times \dots \times L_k \longrightarrow \mathbb{R}$  je *multilineární zobrazení* (také: *multilineární forma* na  $L_1 \times \dots \times L_k$ ), pokud je  $\mathbf{T}$  v každé poloze lineární, zafixujeme-li všechny ostatní položky. Viz také Definici 5.1.4.

V dalším lineární prostor  $L$  omezíme ještě více. Abychom předpoklady nemuseli neustále opakovat, sepíšeme je zde:

- (1) Budeme pracovat v prostorech  $\mathbb{R}^n$  dimenze  $n$  nad  $\mathbb{R}$ .
- (2) Prostor  $\mathbb{R}^n$  je vybaven standardním skalárním součinem.
- (3) V lineárním prostoru  $\mathbb{R}^n$  je zadána kanonická uspořádaná ortonormální báze  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ .

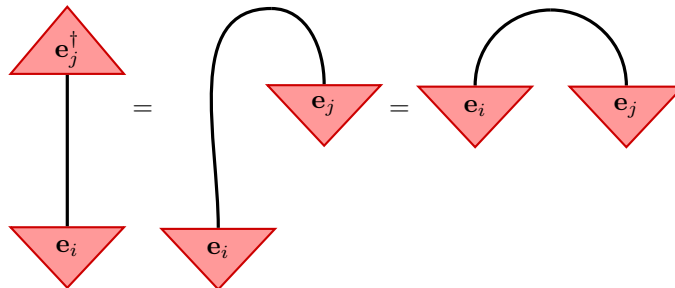
Přítomnost standardního skalárního součinu<sup>5</sup> na  $\mathbb{R}^n$  nám umožní začít provádět pěkné „hrátky“ s grafickým kalkulem. Začneme duální bází.

**A.3.3 Příklad (Duální báze: znovu a jinak)** Pro každý vektor  $\mathbf{x}$  definujeme kovektor  $\mathbf{x}^\dagger$  následujícím způsobem:



To znamená, že metrický tensor nám umožňuje z vektoru udělat kovektor „ohnutím“ struny směřující původně nahoru tak, aby směřovala dolů.

Co dostaneme, pokud budeme aplikovat „ohýbání“ na vektory kanonické ortonormální báze  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ ? Každý výsledný kovektor  $\mathbf{e}_j^\dagger$  je lineární zobrazení z  $L$  do  $\mathbb{R}$ . A jakéholi lineární zobrazení je určeno hodnotami na bázi. To znamená, že máme spočítat hodnoty  $\mathbf{e}_j^\dagger(\mathbf{e}_i)$ . V grafickém kalkulu je extrémně průzračné, jak tyto hodnoty vypadají:



To ale znamená *přesně* to, že seznam  $(\mathbf{e}_1^\dagger, \dots, \mathbf{e}_n^\dagger)$  tvoří *duální bázi* k bázi  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , viz Definici 3.5.2.

Podle Poznámky 4.4.4 platí

$$\mathbf{e}_1^\dagger = \mathbf{e}_1^T, \quad \mathbf{e}_2^\dagger = \mathbf{e}_2^T, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n^\dagger = \mathbf{e}_n^T$$

To znamená, že „ohýbání“ je *přesně* transpozice: pro každý vektor  $\mathbf{x}$  platí  $\mathbf{x}^\dagger = \mathbf{x}^T$ .

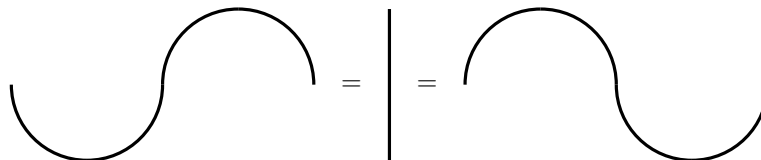
Podle Tvzení 12.4.19 ovšem existuje skalární součin na  $(\mathbb{R}^n)^*$  tak, že báze  $(\mathbf{e}_1^\dagger, \dots, \mathbf{e}_n^\dagger)$  je vzhledem k tomuto skalárnímu součinu ortonormální. Takový skalární součin na  $(\mathbb{R}^n)^*$  ovšem musí mít dvě struny směřující směrem nahoru, a tudíž to musí být  $(0, 2)$ -tensor na  $\mathbb{R}^n$ . Označme jej



a říkejme mu *metrický kotensor*. Povšimněme si dvou jednoduchých faktů:

<sup>5</sup>Z dalšího plyne, jak grafický kalkulus a notace indexů fungují pro *libovolný* lineární prostor  $L$  konečné dimenze nad  $\mathbb{R}$ , který je vybaven prominentní bilineární formou. Speciálně tak lze pracovat s tensory na *geometrickém prostoru*  $(L, \gamma)$ , viz Definici 15.4.1. Studium tensorů na geometrických prostorech je důležité v obecné teorii relativity, viz například knihu Sean Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*, Addison Wesley, 2004.

- (1) Metrický kotensor umožňuje „ohýbat“ struny směrem nahoru, tj. metrický kotensor vyrobí z každého kovektoru vektor.
- (2) Metrický tensor a metrický kotensor spolu souvisí rovnostmi, kterým se říká *yanking identities*:



Nyní již máme z grafického kalkulu vše, co potřebujeme pro zavedení *indexového* značení pro tensory. Toto značení je dáno historicky a zpočátku může působit nepěkně. Jde o zobecnění značení  $t_{ij}$  pro označení prvků matice  $\mathbf{T}$ . Protože ale reálná čtvercová matice  $\mathbf{T}$  rozměrů  $n \times n$  může vystupovat buď jako  $(1, 1)$ -tensor (tj. jako lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$ ), nebo jako  $(2, 0)$ -tensor (tj. jako bilineární forma na  $\mathbb{R}^n$ ) nebo jako  $(0, 2)$ -tensor (tj. jako bilineární forma na  $(\mathbb{R}^n)^*$ ), musíme značení  $t_{ij}$  zpřesnit.

Připomeňme, že lineární prostor

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{p\text{-krát}} \times \underbrace{(\mathbb{R}^n)^* \times \dots \times (\mathbb{R}^n)^*}_{q\text{-krát}}$$

má (podle definice součinu lineárních prostorů z Příkladu 1.2.15) dimenzi  $n^{p+q}$ , protože uspořádané  $(p+q)$ -tice

$$(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_{j_1}^T, \dots, \mathbf{e}_{j_q}^T)$$

kde indexy  $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$  probíhají množinu  $\{1, \dots, n\}$ , tvoří bázi prostoru

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{p\text{-krát}} \times \underbrace{(\mathbb{R}^n)^* \times \dots \times (\mathbb{R}^n)^*}_{q\text{-krát}}$$

**A.3.4 Značení (Indexové značení pro  $(p, q)$ -tensory na  $\mathbb{R}^n$ )** Pro  $(p, q)$ -tensor  $\mathbf{T}$  na  $\mathbb{R}^n$  značíme

$$t_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}; \mathbf{e}_{j_1}^T, \dots, \mathbf{e}_{j_q}^T)$$

kde indexy  $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$  probíhají množinu  $\{1, \dots, n\}$ . Říkáme, že kolekce  $t_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$  zadává *tensor*  $\mathbf{T}$  v bázi  $K_n$ .

Speciálně: pro  $\mathbf{T}$  na  $\mathbb{R}^n$  řádu 2, značíme

- (1)  $(1, 1)$ -tensor jako  $t_i^j$ , kde  $i$  a  $j$  probíhají množinu  $\{1, \dots, n\}$ .
- (2)  $(2, 0)$ -tensor jako  $t_{ij}$ , kde  $i$  a  $j$  probíhají množinu  $\{1, \dots, n\}$ .
- (3)  $(0, 2)$ -tensor jako  $t^{ij}$ , kde  $i$  a  $j$  probíhají množinu  $\{1, \dots, n\}$ .



**A.3.5 Poznámka** Tensory druhého řádu na  $\mathbb{R}^n$  tedy „jsou“ opět čtvercové tabulky  $n^2$  reálných čísel. Indexové značení ovšem naznačuje, o tensor jakého typu jde:

- (1)  $t_i^j$  má jeden dolní a jeden horní index. Příslušný obrázek má jednu dolní a jednu horní strunu. Proto je  $t_i^j$   $(1, 1)$ -tensor, neboli lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$ .
- (2)  $t_{ij}$  má dva dolní indexy a nula horních indexů. Příslušný obrázek má dvě dolní struny a nula horních strun. Proto je  $t_{ij}$   $(2, 0)$ -tensor, neboli bilineární forma na  $\mathbb{R}^n$ .
- (3)  $t^{ij}$  má nula dolních indexů a dva horní indexy. Příslušný obrázek má nula dolních strun a dvě horní struny. Proto je  $t^{ij}$   $(0, 2)$ -tensor, neboli bilineární forma na  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

Obecné  $(p, q)$ -tensory na  $\mathbb{R}^n$  tedy „jsou“ tabulky  $n^{p+q}$  reálných čísel. Indexové značení naznačuje o tensor jakého typu jde. Speciálně:  $(0, 1)$ -tensor (čili vektor) budeme značit  $t^j$ , kde  $j$  probíhá množinu  $\{1, \dots, n\}$  a  $(1, 0)$ -tensor (čili kovektor) budeme značit  $t_i$ , kde  $i$  probíhá množinu  $\{1, \dots, n\}$ .

Pozor: horní indexy u tensorů *neznamenají* umocňování!

Navíc je třeba říci, že jak dolní tak horní indexy jsou takzvané *abstraktní indexy*: jakýkoli index smíme přejmenovat. Jediné, na co si při přejmenování musíme dávat pozor je to, že *po přejmenování nesmí vzniknout dvojice stejných dolních a horních indexů*.

Teorie abstraktních indexů je vyložena v článku:

☞ Roger Penrose, *Structure of space-time*, in: *Batelle Recontres* (Cecille M. DeWitt a John A. Wheeler, eds.), W. A. Benjamin Inc., New York, 1968, 121–235.



**A.3.6 Příklad** Ve fyzice je metrický tensor obvyklé značit  $g_{ij}$ . Pro standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^n$  platí

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j \\ 0, & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Neboli: tabulka  $g_{ij}$  je jednotková matice. Tabulka čísel

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j \\ 0, & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

je také jednotková matice. Tensor  $\delta_i^j$  je ovšem  $(1, 1)$ -tensor, neboli reprezentuje identické zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$ . Konečně: tabulka čísel

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j \\ 0, & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

je opět jednotková matice. Jde ovšem o  $(0, 2)$ -tensor, neboli jde o bilineární zobrazení na  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

Aby konvencí nebylo málo, zavedeme ještě *Einsteinovu sčítací konvenci*, obvyklou ve fyzice: pokud v nějakém tensorovém výrazu se stejný index vyskytuje nahoře i dole, pak předpokládáme, že se přes tento index sčítá. To jest: například zápis

$$a_i^j x^i$$

znamená součet

$$\sum_{i=1}^n a_i^j x^i$$

I když zpočátku může být těžké si na tuto konvenci zvyknout, uvidíme, že jde o celkem přirozený zápis grafického kalkulu na řádek. Historicky ovšem tomu bylo naopak: sčítací konvenci zavedl Albert Einstein v článku

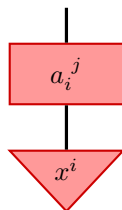
☞ Albert Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, *Ann. Phys.* 7 (1916), 769–822.

tedy 55 let před grafickým kalkulem. Pro exaktní zavedení indexového přístupu k tensorům odkazujeme na článek:

☞ Roger Penrose, *Structure of space-time*, in: *Batelle Recontres* (Cecille M. DeWitt a John A. Wheeler, eds.), W. A. Benjamin Inc., New York, 1968, 121–235.

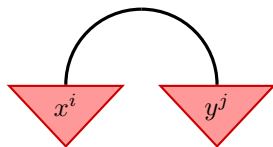
**A.3.7 Příklad** Předvedeme nyní několik výpočtů v indexovém značení spolu s Einsteinovou sčítací konvencí.

- (1) Výraz  $a_i^j x^i$  značí  $\sum_{i=1}^n a_i^j x^i$ , tj. hodnotu lineárního zobrazení  $a_i^j x$  ve vektoru  $x^i$ . Grafický kalkulus tohoto faktu dává:

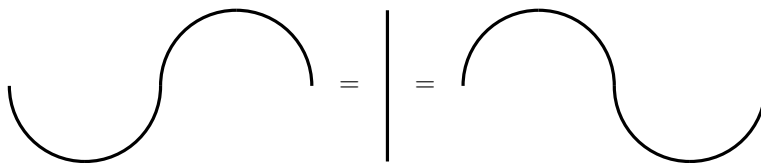


Vidíme, že zápis  $a_i^j x^i$  je vlastně docela přirozený: vektor  $x^i$  po struně „posílá“ svůj horní index  $i$ , který je „zkonsumován“ dolním indexem tensoru  $a_i^j$ . Výsledný obrázek je „schopen posílat“ již pouze vrchní index  $j$ . To dobře odpovídá faktu, že výraz  $\sum_{i=1}^n a_i^j x^i$  již závisí pouze na (horním) indexu  $j$ . Mít jen jeden horní index ovšem znamená mít vektor.

- (2) Pro vektory  $x^i, y^j$  je zápis  $g_{ij} x^i y^j$  zkratkou zápisu  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x^i y^j$ . Grafický kalkulus opět vysvětluje „posílání“ a „konsumaci“ indexů:



- (3) Označíme-li metrický kotensor jako  $g^{ij}$ , pak yanking identities

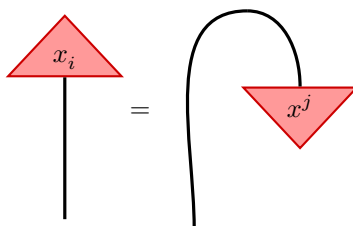


z Příkladu A.3.3 mají tvar

$$g^{jk} g_{ki} = \delta_i^j = g_{ik} g^{kj}$$

kde symbol  $\delta_i^j$  byl zaveden v Příkladu A.3.6. Neboli: jako tabulky čísel jsou matice  $g_{ij}$  a  $g^{ij}$  inverzní.

- (4) Rovnost



v grafickém kalkulu ukazuje, že metrický tensor „ohýbáním dolů“ umožňuje *snížit* index:

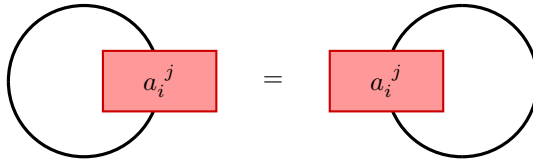
$$x_i = g_{ij} x^j$$

Například pro vektor  $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$  je tedy  $(x_1, x_2, x_3)$  příslušný kovektor.

Podobně: metrický tensor „ohýbáním nahoru“ umožňuje *zvýšit* index:

$$x^j = x_i g^{ij}$$

(5) Pro  $(1, 1)$ -tensor  $a_i^j$  je výraz  $a_i^j g_{jk} g^{ki}$  roven  $a_k^k$ , neboli součtu  $\sum_{k=1}^n a_k^k$ . V grafickém kalkulu jde o skalár



Součtu  $\sum_{k=1}^n a_k^k$  říkáme *stopa* tensoru  $a_i^j$  viz také Poznámku 5.2.13. V kontextu teorie tenzorů se tomuto procesu, kdy určitý index „zmizí“, také říká *kontrakce* indexu.

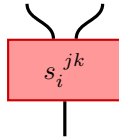
Poznamenejme ještě, že při „klasickém“ indexovém přístupu se tenzory často zavádějí jako veličiny, které se jistým způsobem chovají při transformaci souřadnic. Taková definice tensoru je pak téměř nestravitelná.

Netřeba dodávat, že příslušný vzorec snadno dostaneme jako důsledek grafického kalkulu z tohoto Dodatku: stačí na příslušné struny tensoru přidat matice transformace souřadnic báze a duální báze.

**A.3.8 Příklad** Transformaci tensoru při transformaci souřadnic předvedeme na příkladu  $(1, 2)$ -tensoru

$$\mathbf{S} : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

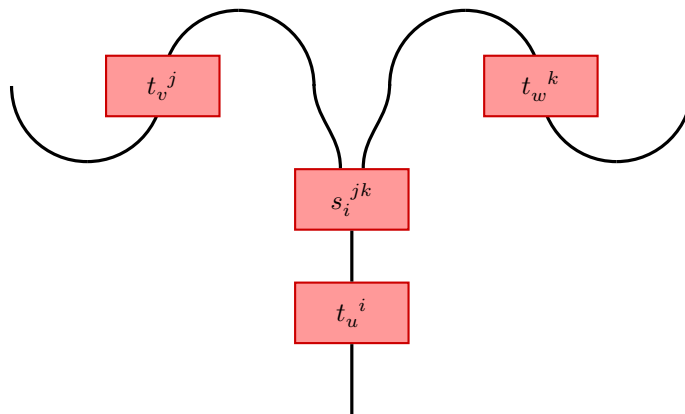
na  $\mathbb{R}^n$ , který je zapsán v bázi  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ . Tensor  $\mathbf{S}$  v bázi  $B$  zakreslíme následovně:



Ať  $C = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$  je jakákoli uspořádaná báze prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Metodami podkapitoly 9.2 umíme najít matici transformace souřadnic  $\mathbf{T}_{C \rightarrow B}$  a  $\mathbf{T}_{B^* \rightarrow C^*}$ . Podle Tvzení 9.1.13 víme, že platí rovnost

$$\mathbf{T}_{B^* \rightarrow C^*} = (\mathbf{T}_{C \rightarrow B})^T$$

Protože transpozice  $(1, 1)$ -tensoru je pouhé „prohození“ dolního a vrchního indexu, což realizujeme „ohýbáním“ strun, dostaneme pro tensor  $s_{ij}^k$  v bázi  $C$  obrázek



kde jako  $t_u^v$  jsme označili  $(1, 1)$ -tensor  $\mathbf{T}_{C \rightarrow B}$ . V bázi  $C$  má tedy tensor  $\mathbf{S}$  tvar

$$s'_u{}^{vw} = t_u^i s_i^{jk} t_j^v t_k^w$$

Poslední rovnost pak je *definice*  $(1, 2)$ -tensoru v klasické literatuře:  $(1, 2)$ -tensor na  $\mathbb{R}^n$  je  $n^3$  reálných čísel  $s_i^{jk}$ , které se při transformaci souřadnic řídí rovnicí  $s'_u{}^{vw} = t_u^i s_i^{jk} t_j^v t_k^w$ .



Krátké nahlédnutí do teorie tensorů zde zakončíme. Dalšími tématy základní teorie jsou:

- (1)  $(p, q)$ -tensory lze mezi sebou sčítat a  $(p, q)$ -tensor lze násobit reálným skalárem:

$$t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = a \cdot t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$$

Výslednou strukturou je *lineární prostor*  $(p, q)$ -tensorů dimenze  $n^{p+q}$  nad  $\mathbb{R}$ . Důkaz je zcela analogický důkazům Tvzení 2.1.6 a 4.3.4.

- (2) Metrický tensor a metrický kotensor lze využít pro snižování a zvyšování indexů  $(p, q)$ -tensorů a ke kontrakci libovolného indexu  $(p, q)$ -tensoru.

V grafickém kalkulu to pouze znamená „ohnout“ vybranou strunu dolů nebo nahoru, případně „spojit dokola“ vybranou dolní strunu s vybranou horní strunou.

- (3) Vynásobením  $(p_1, q_1)$ -tensorem s  $(p_2, q_2)$ -tensorem lze vytvořit  $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ -tensor. Například: jestliže  $s_{uv}^w$  je  $(2, 1)$ -tensor a  $t_h^{ijk}$  je  $(1, 3)$ -tensor, je

$$s_{uv}^w \cdot t_h^{ijk}$$

$(3, 4)$ -tensor.

V grafickém kalkulu to znamená nakreslit obrázky pro  $s_{uv}^w$  a  $t_h^{ijk}$  vedle sebe.

- (4) V tensorech lze *permutovat* pořadí horních a dolních indexů. Například pro  $(3, 2)$ -tensory platí rovnosti

$$t_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2} = t_{i_2 i_3 i_1}^{j_1 j_2} = t_{i_1 i_2 i_3}^{j_2 j_1} = \dots$$

Více se lze dočíst v textech

- ☞ Boris A. Dubrovin, Anatoli T. Fomenko, Sergey P. Novikov, *Modern geometry — Methods and applications, Part I: The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Springer, 1992.
- ☞ Daniel A. Fleisch, *A student's guide to vectors and tensors*, Cambridge University Press, 2012.
- ☞ Boaz Porat, *A gentle introduction to tensors*, 2014.

kde je použit indexový přístup k tensorům, nebo v objemné knize

- ☞ Roger Penrose, *The road to reality: A complete guide to the laws of the Universe*, Jonathan Cape, 2004.

kde je grafický kalkulus tensorů použit například i k výpočtům determinantů.

## Dodatek B

# Aplikace — Metrické výpočty v $\mathbb{R}^n$

If you mention in the pub that you intend to drive from, say, Surrey to Cornwall, a distance that most Americans would happily go to get a taco, your companions will puff their cheeks, look knowingly at each other, and blow out air as if to say, ‘Well, now *that’s* a bit of a tall order,’ and then they’ll launch into a lively and protracted discussion of whether it’s better to take the A30 to Stockbridge and then the A303 to Ilchester or the A361 to Glastonbury via Shepton Mallet.

Bill Bryson, *Notes from a small island*

V tomto dodatku využijeme lineární algebru k *metrickým výpočtům* v lineárních prostorech  $\mathbb{R}^n$  se standardním skalárním součinem, tj. se standardním pojmem *vzdálenosti*.

V podkapitole B.1 zavedeme technický pojem *Gramova determinantu* a v podkapitole B.2, zavedeme *vektorový součin* seznamu  $(n - 1)$  vektorů v prostorech  $\mathbb{R}^n$ , kde  $n \geq 2$ . V podkapitole B.3 budeme řešit standardní úlohu: budeme hledat *vzdálenosti* bodů od  $d$ -dimensionálních afinních podprostorů<sup>1</sup> prostoru  $\mathbb{R}^n$  a — obecněji — *vzdálenosti*  $d_1$ -dimensionálního afinního podprostoru od  $d_2$ -dimensionálního afinního podprostoru v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . V podkapitole B.4 se zaměříme na dva důležité speciální případy: na metrické výpočty v  $\mathbb{R}^2$  a v  $\mathbb{R}^3$ .

V celém tomto dodatku budeme pracovat v prostorech typu  $\mathbb{R}^n$  nad  $\mathbb{R}$  se *standardním* skalárním součinem. Připomeňme, že standardní skalární součin je definován rovností  $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ . Dále připomeňme, že skalární součin vytváří *normu* vektoru rovností  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}$ .

Explicitně: pro vektory

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

z  $\mathbb{R}^n$  jsou jejich normy a jejich vzdálenost vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu dány vzorci

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Dále připomeňme, že kanonická báze  $K_n = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  je vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu  $\langle - \mid - \rangle$  *ortonormální*, tj. pro každé  $i, j$  platí

$$\langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j \\ 0, & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

<sup>1</sup>Připomeňme, že afinní podprostory byly zavedeny v Kapitole 7.

## B.1 Gramův determinant

V metrických úvahách budou hrát velkou roli objemy rovnoběžnostěn v  $\mathbb{R}^n$ . Z Kapitoly 8 víme, že objem rovnoběžnostěny v  $\mathbb{R}^n$ , který je zadán seznamem  $n$  vektorů  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ , lze spočítat jako *absolutní hodnotu* determinantu  $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ . Determinant ovšem nelze *přímo* použít k výpočtu objemu rovnoběžnostěny v  $\mathbb{R}^n$ , který je zadán seznamem  $k$  vektorů  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ , kde  $k$  je *menší* než  $n$ . Matice  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  pro  $k < n$  totiž není čtvercová. Ukážeme, že tuto potíž lze elegantně obejít: ze seznamu vektorů  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  lze *vždy* vytvořit čtvercovou matici, které říkáme Gramova matice. Pomocí determinantu Gramovy matice pak již objem rovnoběžnostěny snadno spočteme.

Vynikajícími zdroji informací o vztahu Gramova determinantu a objemu rovnoběžnostěn jsou texty

- ☞ Boris A. Rozenfeld, *Mnogomernyye prostranstva*, Moskva, Nauka, 1966.
- ☞ Frank Jones, *Honors Calculus III/IV*, Rice University, 2004.
- ☞ Igor R. Shafarevich a Alexey O. Remizov, *Linear algebra and geometry*, Springer-Verlag, 2013.

**B.1.1 Definice (Gramova matice a Gramův determinant)** Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  je matice se sloupcovým zápisem  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ ,  $k \leq n$ . Čtvercové matici  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  říkáme *Gramova matice* seznamu vektorů  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  a determinantu  $\det(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$  říkáme *Gramův determinant* seznamu vektorů  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  a značíme jej

$$\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$$

**B.1.2 Lemma (Výpočet Gramovy matice a Gramova determinantu)** *Gramova matice seznamu vektorů  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  má tvar*

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_k \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{a}_k \rangle \end{pmatrix}$$

a tudíž

$$\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_k \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{a}_k \rangle \end{vmatrix}$$

DŮKAZ. Pro matici  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  platí  $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T \end{pmatrix}$  a proto

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{a}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_k^T \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_k^T \cdot \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k^T \cdot \mathbf{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_k \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{a}_k \rangle \end{pmatrix}$$

■

**B.1.3 Tvzení (Geometrický význam Gramova determinantu)** Ať  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  je seznam vektorů v  $\mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Potom platí:

- (1)  $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) \geq 0$ .
- (2)  $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) > 0$  právě tehdy, když vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  jsou lineárně nezávislé.
- (3) Hodnota  $\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)}$  udává  $k$ -dimensionální objem rovnoběžnostěny v  $\mathbb{R}^n$ , určeného seznamem  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ .

DŮKAZ. Označme  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ . Matice  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  je symetrická, je tedy samoadjungovaná vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu  $\langle - | - \rangle$  v  $\mathbb{R}^n$ , viz Poznámku 14.1.3. Podle Věty 14.1.4 a Důsledku 14.1.5 je každá vlastní hodnota matice  $\mathbf{M}$  reálné číslo a existuje ortonormální báze  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$  prostoru  $\mathbb{R}^k$ , která sestává z vlastních vektorů matice  $\mathbf{M}$  příslušných vlastním hodnotám  $\lambda_i$ . To znamená, že v bázi  $B$  je matice  $\mathbf{M}$  diagonální matice  $D(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  a podle Tvzení 9.3.5 platí

$$\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \det(\mathbf{M}) = \det(D(\lambda_1, \dots, \lambda_k)) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_k$$

Navíc pro vlastní hodnotu  $\lambda_i$  příslušnou vektoru  $\mathbf{b}_i$  platí

$$0 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{b}_i\|^2 = \langle \mathbf{A}\mathbf{b}_i | \mathbf{A}\mathbf{b}_i \rangle = \mathbf{b}_i^T \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}_{=\mathbf{M}} \mathbf{b}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i = \lambda_i \underbrace{\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_i \rangle}_{=1} = \lambda_i$$

Takže jsme ukázali, že platí  $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_k \geq 0$ . Tím je část (1) dokázána.

- (2) Předpokládejme, že vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  jsou lineárně závislé. Potom existuje nenulový vektor  $\mathbf{v}$  z  $\mathbb{R}^k$  tak, že  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{o}$ . Tudíž vektor  $\mathbf{v}$  můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k v_i \cdot \mathbf{b}_i$ , kde alespoň jedno z čísel  $v_i$  je nenulové. Dále platí rovnosti

$$\begin{aligned} 0 &= \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{A}\mathbf{v} | \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k v_i \cdot v_j \cdot \mathbf{b}_i^T \underbrace{\mathbf{M} \mathbf{b}_j}_{=\lambda_j \mathbf{b}_j} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k v_i \cdot v_j \cdot \lambda_j \cdot \underbrace{\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_j}_{=\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^k v_i^2 \cdot \lambda_i \end{aligned}$$

Protože pro všechna  $i$  platí  $\lambda_i \geq 0$ , znamená to, že  $v_i^2 \cdot \lambda_i = 0$  pro všechna  $i$ . Protože alespoň jedno z čísel  $v_i$  je nenulové, musí být alespoň jedno z čísel  $\lambda_i$  rovno 0. To znamená, že  $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_k = 0$ .

Jestliže jsou vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  lineárně nezávislé, potom je matice  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  pozitivně definitní, viz Definici 12.3.1. Podle podmínky (4) Tvzení 12.3.4 platí  $\det(\mathbf{M}) = \text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) > 0$ .

- (3) Pro každé  $1 \leq j \leq k$  označme jako  $V_j$   $j$ -dimensionální objem rovnoběžnostěnu zadaného seznamem  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j)$ .

(a) Pro  $j = 1$  platí  $V_1 = \|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle} = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1)}$ .

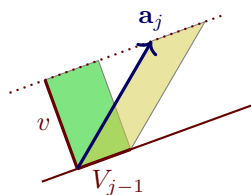
(b) Předpokládejme, že pro  $2 \leq j \leq k$  platí  $V_{j-1} = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1})}$ .

Jsou-li vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}$  lineárně závislé, pak  $V_{j-1} = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1})} = 0$ . Takže  $V_j = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j)} = 0$ .

Předpokládejme, že vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j$  jsou lineárně nezávislé. Potom platí rovnost

$$V_j = v \cdot V_{j-1}$$

kde  $v$  je délka ortogonální rejekce vektoru  $\mathbf{a}_j$  podprostorem  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1})$ :



Označme jako  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{j-1} v_i \mathbf{a}_i$  ortogonální projekci  $\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1})}(\mathbf{a}_j)$ . Potom platí rovnosti

$$0 = \langle \mathbf{v} - \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_{i_0} \rangle, \quad 1 \leq i_0 \leq j-1, \quad v^2 = \|\mathbf{a}_j - \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{a}_j - \mathbf{v} | \mathbf{a}_j - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{a}_j - \mathbf{v} | \mathbf{a}_j \rangle$$

neboli

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j-1} v_i \cdot \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_{i_0} \rangle + v^2 \cdot 0 &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{a}_{i_0} \rangle = \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_{i_0} \rangle, \quad 1 \leq i_0 \leq j-1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} v_i \cdot \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_i \rangle + v^2 \cdot 1 &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{a}_j \rangle + v^2 = \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_j \rangle \end{aligned}$$

Pro neznámé  $v_1, \dots, v_{j-1}, v^2$  lze výše uvedené požadavky zapsat jako soustavu rovnic

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_{j-1} \rangle & 0 & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_j \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_{j-1} \rangle & 0 & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_j \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_{j-1} | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_{j-1} | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_{j-1} | \mathbf{a}_{j-1} \rangle & 0 & \langle \mathbf{a}_{j-1} | \mathbf{a}_j \rangle \\ \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_{j-1} \rangle & 1 & \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_j \rangle \end{array} \right)$$

Podle našeho předpokladu je determinant této soustavy nenulový (použijeme rozvoj podle posledního sloupce a faktu, že vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}$  jsou lineárně nezávislé)

$$(-1)^{j+j} \cdot \text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}) = \text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}) \neq 0$$

Podle Důsledku 8.4.7 platí:

$$v^2 = \frac{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j)}{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1})}$$

neboli

$$V_j = v \cdot V_{j-1} = \sqrt{\frac{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j)}{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1})}} \cdot \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1})} = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j)}$$

což jsme chtěli dokázat. ■

**B.1.4 Příklad** Spočteme 2-dimensionální objem (tj. plochu) rovnoběžnostěnu zadaného vektory

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^3$ . Plocha je rovna odmocnině z determinantu

$$\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 19 \end{vmatrix} = 202$$

To jest: plocha rovnoběžnostěnu je  $\sqrt{202} \approx 14.21$ .

Tuto podkapitolu ukončíme geometrickým významem nezápornosti Gramova determinantu.

**B.1.5 Příklad (Geometrický význam nerovnosti  $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \geq 0$  v  $\mathbb{R}^n$ )** Pro vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  v  $\mathbb{R}^n$  platí

$$\begin{aligned} \text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle \end{vmatrix} \\ &= \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle - \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \\ &= \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 - (\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle)^2 \end{aligned}$$

Nerovnost  $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \geq 0$  je tedy ekvivalentní nerovnosti

$$|\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle| \leq \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\|$$

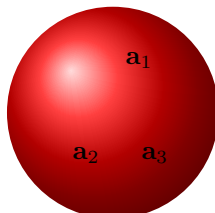
což je přesně nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski (12.4) v  $\mathbb{R}^n$  pro vektory  $\mathbf{a}_1$  a  $\mathbf{a}_2$ .

Následující příklad pochází z Kapitoly 8 textu

☞ Frank Jones, *Honors Calculus III/IV*, Rice University, 2004.

a my jej využijeme v podkapitole G.1 při měření vzdálenosti ve vektorovém modelu databází.

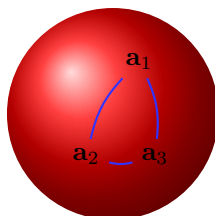
**B.1.6 Příklad (Geometrický význam nerovnosti  $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \geq 0$  v  $\mathbb{R}^n$ )** Předpokládejme, že pro vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  z  $\mathbb{R}^n$  platí  $\|\mathbf{a}_1\| = \|\mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_3\| = 1$ . To znamená, že vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  leží na povrchu jednotkové koule v  $\mathbb{R}^n$ :



Ukážeme, že nerovnost  $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \geq 0$  je ekvivalentní *trojúhelníkové nerovnosti*

$$d(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) \leq d(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + d(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

pro vzdálenost  $d$  měřenou na povrchu koule:



Protože vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  leží na povrchu jednotkové koule v  $\mathbb{R}^n$ , platí pro jejich vzdálenosti vztahy

$$d(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \arccos(\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle), \quad d(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \arccos(\langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle), \quad d(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = \arccos(\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle)$$

a my tedy potřebujeme ukázat nerovnost

$$\arccos(\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle) \leq \arccos(\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle) + \arccos(\langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle)$$

Protože  $\arccos(\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle) \leq \pi$ , nerovnost jistě platí, pokud  $\pi < \arccos(\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle) + \arccos(\langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle)$ . V případě, kdy  $0 \leq \arccos(\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle) + \arccos(\langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle) \leq \pi$ , je nerovnost

$$\arccos(\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle) \leq \arccos(\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle) + \arccos(\langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle)$$

ekvivalentní nerovnosti

$$\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle \geq \cos(\arccos(\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle) + \arccos(\langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle)) = \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle - \sqrt{1 - (\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle)^2} \cdot \sqrt{1 - (\langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle)^2}$$

protože funkce  $x \mapsto \cos x$  je klesající na intervalu  $[0; \pi]$  a protože  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ . Nerovnost

$$\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle \geq \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle - \sqrt{1 - (\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle)^2} \cdot \sqrt{1 - (\langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle)^2}$$

je ekvivalentní nerovnosti

$$\sqrt{1 - (\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle)^2} \cdot \sqrt{1 - (\langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle)^2} \geq \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle - \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle$$

Poslední nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$(1 - (\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle)^2) \cdot (1 - (\langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle)^2) \geq (\langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle - \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle)^2$$

a to je (po roznásobení) nerovnost

$$\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \geq 0$$

Celkově tedy pro vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  na jednotkové kouli v  $\mathbb{R}^n$  a pro funkci  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle)$  platí:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad 0 \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \pi, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ právě tehdy, když } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

To znamená, že  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle)$  je metrika na povrchu jednotkové koule v  $\mathbb{R}^n$ , viz Definici 12.2.1.

## B.2 Vektorový součin v $\mathbb{R}^n$ , kde $n \geq 2$

Podle podkapitoly 4.4 má každé lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tvar  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x}$ , kde vektor  $\mathbf{a}$  je určen jednoznačně. To znamená, že pro jakékoli lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  platí rovnost

$$\mathbf{f} = \langle \mathbf{a} \mid - \rangle$$

kde vektor  $\mathbf{a}$  je jednoznačně určen. Této vlastnosti využijeme k definici vektorového součinu seznamu  $(n-1)$  vektorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Využijeme k tomu Důsledku 8.2.15: pro pevně zvolený seznam  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  je funkce

$$\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, -) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{y} \mapsto \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y})$$

lineární.

**B.2.1 Definice (Vektorový součin)** Ať  $n \geq 2$ . Vektorový součin seznamu vektorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  z  $\mathbb{R}^n$  je jednoznačně určený vektor

$$\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$$

z  $\mathbb{R}^n$ , který splňuje rovnost

$$\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}) = \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{y} \rangle$$

pro všechna  $\mathbf{y}$  z  $\mathbb{R}^n$ .

V literatuře se obvykle vektorový součin definuje pouze v  $\mathbb{R}^3$ . Definice vektorového součinu v  $\mathbb{R}^n$  pro přirozené číslo  $n \geq 2$  má obrovskou řadu výhod: je jednoduchá, je geometricky velmi názorná a zjednodušuje řadu geometrických úvah. Definice B.2.1 je použita například v knihách

- ☞ Boris A. Rozenfeld, *Mnogomernyye prostranstva*, Moskva, Nauka, 1966.
- ☞ Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, 1965.
- ☞ Igor R. Shafarevich a Alexey O. Remizov, *Linear algebra and geometry*, Springer-Verlag, 2013.

Vektor  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  je označení vektorového součinu seznamu vektorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  pro pevné  $n \geq 2$ . Pro  $n \geq 2$  jsme tedy definovali funkci

$$\times : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{(n-1)\text{-krát}} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

a  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  je její hodnota v bodě  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  z  $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ .

Například pro  $n = 2$  je tedy

$$\times(\mathbf{x})$$

hodnota funkce  $\times(-) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  v bodě  $\mathbf{x}$ . Pro geometrický význam hodnoty  $\times(\mathbf{x})$  odkazujeme na Příklad B.2.3.

Pro  $n = 3$  budeme psát hodnoty této funkce *infixně*, tj. místo  $\times(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  budeme psát

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$$

a pro geometrický význam hodnoty  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$  opět odkazujeme na Příklad B.2.3.

**B.2.2 Lemma (Výpočet vektorového součinu v  $\mathbb{R}^n$ )** Vektor  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  má jako  $i$ -tou položku hodnotu  $\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i)$ . Platí tedy rovnost

$$\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i$$

DŮKAZ. Pro každý vektor  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  z  $\mathbb{R}^n$  platí rovnosti

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^n \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \mid \mathbf{y} \right\rangle &= \sum_{i=1}^n \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{y} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot y_i \\ &= \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \sum_{i=1}^n y_i \cdot \mathbf{e}_i) \\ &= \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}) \\ &= \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Protože vektor  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  je jednoznačně určen rovností  $\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}) = \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{y} \rangle$ , je důkaz hotov. ■

### B.2.3 Příklad (Výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ )

(1) Pro  $n = 2$  má vektorový součin v  $\mathbb{R}^2$  jediný argument. Pro vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

platí

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} = -x_2 \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

Proto

$$\times(\mathbf{x}) = -x_2 \cdot \mathbf{e}_1 + x_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Speciálně:  $\times(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$  a  $\times(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1$ . To znamená, že pro libovolnou permutaci  $\pi \in S_2$  platí rovnost  $\times(\mathbf{e}_{\pi(1)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \mathbf{e}_{\pi(2)}$ .

Dále si povšimněme, že z definice platí  $\langle \times(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ . To znamená, že vektory  $\times(\mathbf{x})$  a  $\mathbf{x}$  jsou vždy na sebe kolmé.

(2) Pro  $n = 3$  má vektorový součin v  $\mathbb{R}^3$  dva argumenty. Místo  $\times(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  píšeme  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ . Pro vektory

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

platí

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = x_3 y_1 - x_1 y_3 \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

a proto

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \cdot \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \cdot \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

V podmínce (4) Tvzení B.2.4 ukážeme, že pro libovolnou permutaci  $\pi \in S_3$  platí rovnost  $\mathbf{e}_{\pi(1)} \times \mathbf{e}_{\pi(2)} = \text{sign}(\pi) \cdot \mathbf{e}_{\pi(3)}$ .

Povšimněme si, že z definice platí  $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$  a  $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \rangle = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ . To znamená, že vektor  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  je vždy kolmý na vektor  $\mathbf{x}$  a vždy kolmý na vektor  $\mathbf{y}$ .



Lemma B.2.2 vede k *neformálnímu zápisu* vektorového součinu, který se často v literatuře objevuje:

$$\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n-1} & \mathbf{e}_1 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n-1} & \mathbf{e}_2 \\ \vdots & & \dots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n-1} & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}$$

Například v  $\mathbb{R}^3$  má tento neformální zápis následující podobu:

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \mathbf{e}_1 \\ x_{21} & x_{22} & \mathbf{e}_2 \\ x_{31} & x_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = (x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22})\mathbf{e}_1 + (x_{31}x_{12} - x_{11}x_{32})\mathbf{e}_2 + (x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})\mathbf{e}_3$$

což je v souladu s Příkladem B.2.3. Je ovšem třeba zdůraznit, že *tento neformální zápis není možné použít jako definici*: zápis

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \mathbf{e}_1 \\ x_{21} & x_{22} & \mathbf{e}_2 \\ x_{31} & x_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

je třeba brát jako pouhou mnemotechnickou pomůcku. *Nejde* o determinant žádné matice!

**B.2.4 Tvrzení (Základní geometrické vlastnosti vektorového součinu v  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ )** Vektorový součin má následující vlastnosti:

- (1) Funkce  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mapsto \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  je lineární v každé poloze.
- (2) Pro všechna  $j = 1, \dots, n-1$  platí rovnost  $\langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) | \mathbf{x}_j \rangle = 0$ . To jest: vektor  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  je kolmý na každý vektor  $\mathbf{x}_j$ .
- (3) Pro libovolnou permutaci  $\pi \in S_{n-1}$  platí rovnost  $\times(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(n-1)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ .
- (4) Pro libovolnou permutaci  $\pi \in S_n$  platí rovnost  $\times(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \mathbf{e}_{\pi(n)}$ .
- (5) Platí rovnost  $\|\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\|^2 = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}))$ .
- (6) Rovnost  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{0}$  platí právě tehdy, když vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  jsou lineárně závislé.
- (7) Platí rovnost  $\|\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\| = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})}$ . To jest: norma  $\|\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\|$  je rovna  $(n-1)$ -dimensionálnímu objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ .

**DŮKAZ.** Vlastnosti vektorového součinu plynou z rovnosti  $\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}) = \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) | \mathbf{y} \rangle$  pro všechna  $\mathbf{y}$  z  $\mathbb{R}^n$  a z vlastností determinantu a skalárního součinu:

(1) Platí

$$\begin{aligned} \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) | \mathbf{y} \rangle &= \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}) \\ &= a \cdot \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, \mathbf{a}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}) + b \cdot \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}) \\ &= a \cdot \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, \mathbf{a}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) | \mathbf{y} \rangle + b \cdot \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) | \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle a \cdot \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, \mathbf{a}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) | \mathbf{y} \rangle + \langle b \cdot \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) | \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle a \cdot \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, \mathbf{a}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) + b \cdot \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) | \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Tudíž platí rovnost

$$\begin{aligned} \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) &= \\ &= a \cdot \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, \mathbf{a}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) + b \cdot \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{x}_{j_0+1}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \end{aligned}$$

kterou jsme chtěli dokázat.

(2) Pro každé  $j$  platí  $\langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x}_j \rangle = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_j) = 0$ .

(3) Pro  $\pi \in S_{n-1}$  platí

$$\begin{aligned} \langle \times(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(n-1)}) \mid \mathbf{y} \rangle &= \det(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(n-1)}, \mathbf{y}) \\ &= \text{sign}(\pi) \cdot \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}) \\ &= \text{sign}(\pi) \cdot \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \text{sign}(\pi) \cdot \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Tudíž platí rovnost

$$\times(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(n-1)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$$

kterou jsme chtěli dokázat.

(4) Pro  $\pi \in S_n$  platí

$$\begin{aligned} \langle \times(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}) \mid \mathbf{y} \rangle &= \det(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}, \mathbf{y}) \\ &= \det(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}, \sum_{i=1}^n y_{\pi(i)} \cdot \mathbf{e}_{\pi(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^n y_{\pi(i)} \cdot \det(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}, \mathbf{e}_{\pi(i)}) \\ &= y_{\pi(n)} \cdot \det(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}, \mathbf{e}_{\pi(n)}) \\ &= y_{\pi(n)} \cdot \text{sign}(\pi) \\ &= \langle \text{sign}(\pi) \cdot \mathbf{e}_{\pi(n)} \mid \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Tudíž platí rovnost

$$\times(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \mathbf{e}_{\pi(n)}$$

kterou jsme chtěli dokázat.

(5) Platí

$$\|\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\|^2 = \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \rangle = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}))$$

(6) Jestliže  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  jsou lineárně nezávislé, potom existuje vektor  $\mathbf{y}$  tak, že

$$0 \neq \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}) = \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{y} \rangle$$

To znamená, že  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \neq \mathbf{o}$ .

Jestliže  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  jsou lineárně závislé, potom pro každé  $\mathbf{y}$  platí

$$0 = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}) = \langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{y} \rangle$$

Tudíž  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{o}$ .

(7) Označme  $\mathbf{z} = \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ . Potom

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{z}\|^4 &= \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{z}) \cdot \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{z}) \\
 &= \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{z}) \\
 &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_{n-1} \rangle & \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{z} \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_{n-1} \rangle & \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{z} \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{x}_{n-1} \rangle & \langle \mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{z} \rangle \\ \langle \mathbf{z} | \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{z} | \mathbf{x}_{n-1} \rangle & \langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_{n-1} \rangle & 0 \\ \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_{n-1} \rangle & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_{n-1} | \mathbf{x}_{n-1} \rangle & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle \end{vmatrix} \\
 &= \|\mathbf{z}\|^2 \cdot \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})
 \end{aligned}$$

Rovnost  $\|\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\| = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})}$  platí, jakmile  $\|\mathbf{z}\| = 0$ . V případě  $\|\mathbf{z}\| \neq 0$  jsme ukázali, že

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$$

a to jsme chtěli dokázat. ■

Vlastnosti vektorového součinu  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  v  $\mathbb{R}^n$  lze shrnout následovně:

(1) Vektor  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  lze zadat *neformálním* vzorcem

$$\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n-1} & \mathbf{e}_1 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n-1} & \mathbf{e}_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n-1} & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}$$

(2) Vektor  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  je kolmý na všechny vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ .

(3) Norma vektoru  $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$  je rovna  $(n-1)$ -dimensionálnímu objemu  $\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})}$  rovnoběžnostěnu určeného vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ .

(4) Jestliže jsou vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  lineárně nezávislé, potom seznam  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}))$  tvoří *pozitivně orientovanou* uspořádanou bázi prostoru  $\mathbb{R}^n$ , protože platí

$$\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})) = \|\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\|^2 = \text{Gram}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) > 0$$

**B.2.5 Poznámka** Pro ty, kteří četli Kapitulu 5. Podmínky (1) a (3) Tvzení B.2.4 říkají, že zobrazení

$$\times : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{(n-1)\text{-krát}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

je multilineární a alternující. Podle Věty 5.1.7 tedy existuje jediné *lineární zobrazení*

$$\star : (\mathbb{R}^n)^{(\wedge(n-1))} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

které rozšiřuje zobrazení  $\times$ . Lineární zobrazení  $\star$  je speciální příklad *Hodgeova komplementu* (anglicky: *Hodge star*), viz například Kapitolu 5.4.3 textu

☞ Sergei Winitzki, *Linear algebra via exterior products*, 2010.

nebo Kapitolu 10 knihy

☞ Igor R. Shafarevich a Alexey O. Remizov, *Linear algebra and geometry*, Springer-Verlag, 2013.

V plné obecnosti je Hodgeův komplement lineární zobrazení

$$\star : (\mathbb{R}^n)^{(\wedge k)} \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^{(\wedge (n-k))}$$

a počítá „vektorový součin“ pro  $k$ -vektor  $\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k$ .

Jako poslední výsledek uvedeme vztah vektorového součinu a skalárního součinu. Jde o zobecnění podmínky (7) z Tvzení B.2.4.

**B.2.6 Tvzení (Lagrangeova rovnost)** *At'  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})$  a  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$  jsou seznamy vektorů v  $\mathbb{R}^n$ . Potom platí rovnost*

$$\langle \times(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \mid \times(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}) \rangle = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle \end{vmatrix}$$

neboli

$$\langle \times(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \mid \times(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}) \rangle = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \cdot \det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$$

DŮKAZ. Rovnost evidentně platí, pokud je seznam  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$  lineárně závislý: levá strana rovnosti je rovna 0 (protože  $\times(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}) = \mathbf{0}$ ) a součin determinantů napravo je roven 0, protože sloupce matice  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$  jsou lineárně závislé.

Předpokládejme tedy, že seznam  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$  je lineárně nezávislý. Doplňme seznam  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$  libovolným vektorem  $\mathbf{b}_n$  na lineárně nezávislý seznam  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n)$  a definujme  $\mathbf{a}_n = \times(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$ . Potom platí rovnosti

$$\begin{aligned} & \langle \times(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \mid \times(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}) \rangle \cdot \det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \cdot \det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = \\ &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_n \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_n \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_n \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_n \mid \mathbf{b}_n \rangle \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_n \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle & \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_n \rangle \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle \end{vmatrix} \cdot \det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \end{aligned}$$

Protože  $\det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \neq 0$ , platí

$$\langle \times(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \mid \times(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}) \rangle = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_{n-1} \mid \mathbf{b}_{n-1} \rangle \end{vmatrix}$$

a to jsme chtěli dokázat. ■

Bezprostředními důsledky Lagrangeovy rovnosti jsou následující dva vzorce pro vektorové součiny v  $\mathbb{R}^3$ , které se často používají.

**B.2.7 Důsledek (Vektorový součin tří vektorů v  $\mathbb{R}^3$ )** Pro vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  v  $\mathbb{R}^3$  platí rovnost

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_3 = \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \cdot \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \cdot \mathbf{a}_1$$

DŮKAZ. Zvolme v  $\mathbb{R}^3$  libovolný vektor  $\mathbf{b}$ . Využijeme Tvzení B.2.6 pro seznamy  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  a  $(\mathbf{a}_3, \mathbf{b})$ , definici vektorového součinu a vlastnosti determinantu

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_3 \mid \mathbf{b} \rangle &= \det(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}) \\ &= \det(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \\ &= \langle \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b} \mid \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b} \rangle \\ &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_3 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b} \rangle \end{vmatrix} \\ &= \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b} \rangle \\ &= \langle \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \cdot \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \cdot \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

Protože vektor  $\mathbf{b}$  je libovolný, platí rovnost  $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_3 = \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \cdot \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \cdot \mathbf{a}_1$ . ■

**B.2.8 Důsledek (Vektorový součin vektorových součinů v  $\mathbb{R}^3$ )** Pro vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  v  $\mathbb{R}^3$  platí rovnost

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{a}_2 - \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{a}_1$$

DŮKAZ. V rovnosti z Důledku B.2.7 položíme  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$  a využijme definici vektorového součinu a vlastnosti determinantu

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) &= \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \rangle \cdot \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \rangle \cdot \mathbf{a}_1 \\ &= \langle \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{a}_1 \rangle \cdot \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{a}_2 \rangle \cdot \mathbf{a}_1 \\ &= \det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{a}_2 - \det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_1 \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{a}_2 - \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{a}_1 \end{aligned}$$
■

## B.3 Vzájemná vzdálenost afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$

V této podkapitole již podstatným způsobem využijeme strukturu tělesa  $\mathbb{R}$ . Naučíme se počítat vzdálenost dvou afinních podprostorů prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

**B.3.1 Definice** Vzdáleností afinních podprostorů  $\pi$  a  $\pi'$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  je reálné číslo  $\omega(\pi, \pi')$  definované následovně

$$\omega(\pi, \pi') = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \text{ je z } \pi \text{ a } \mathbf{x}' \text{ je z } \pi'\}$$

Z definice vzdálenosti dvou afinních podprostorů není vůbec zřejmé, jak číslo  $\omega(\pi, \pi')$  nalézt. Vzdálenost  $\omega(\pi, \pi')$  je totiž definována jako *infimum* neprázdné množiny nezáporných reálných čísel. Připomeňme, co infimum znamená.



**B.3.2 Poznámka** Ať  $M$  je množina reálných čísel. Řekneme, že reálné číslo  $i$  je *infimem* množiny  $M$  (a tento fakt značíme  $i = \inf M$ ), pokud platí následující dvě podmínky:

- (1) Číslo  $i$  je *dolním odhadem* množiny  $M$ , tj. platí:  $i \leq m$  pro všechna  $m$  z  $M$ .
- (2) Číslo  $i$  je *největším dolním odhadem* množiny  $M$ , tj. jestliže  $x \leq m$  pro všechna  $m$  z  $M$ , potom  $x \leq i$ .

Příklady infim množin reálných čísel jsou

$$0 = \inf\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \quad 2 = \inf(2; +\infty), \quad \pi = \inf[\pi; 4]$$

Značně netriviálním výsledkem teorie tělesa  $\mathbb{R}$  je *věta o infimu*

*Ať  $M$  je neprázdna množina reálných čísel. Ať existuje dolní odhad pro  $M$ , tj. ať existuje reálné číslo  $x$  s vlastností  $x \leq m$  pro všechna  $m$  z  $M$ . Potom  $\inf M$  existuje.*

Tuto větu nebudeme dokazovat, vyžadovala by totiž přesný popis toho, co reálná čísla skutečně jsou. O konstrukci tělesa  $\mathbb{R}$  z tělesa  $\mathbb{Q}$  se lze dozvědět například v knihách

- ☞ Oliver Deiser, *Reelle Zahlen: Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*, Springer-Verlag, 2008.
- ☞ Edwin Hewitt a Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 3. vydání, 1975.
- ☞ Vojtěch Jarník, *Diferenciální počet I*, Academia, 1974.

Pro jakékoli dva afinní podprostory  $\pi$  a  $\pi'$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  platí následující dvě podmínky:

- (1) Množina  $\{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \text{ je z } \pi \text{ a } \mathbf{x}' \text{ je z } \pi'\}$  je neprázdna, obsahuje totiž například reálné číslo  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}'\|$ .
- (2) Množina  $\{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \text{ je z } \pi \text{ a } \mathbf{x}' \text{ je z } \pi'\}$  má reálné číslo 0 jako dolní odhad. Pro jakékoli  $\mathbf{x}$  z  $\pi$  a jakékoli  $\mathbf{x}'$  z  $\pi'$  totiž platí nerovnost  $0 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ .

Podle věty o infimu je existence čísla  $\omega(\pi, \pi')$  zaručena. Jak ale  $\omega(\pi, \pi')$  najít?

Ukážeme, že vzdálenost dvou afinních podprostorů lze najít podobným stylem jakým hledáme vzdálenost dvou různých rovnoběžek v rovině: nalezneme *kolmou příčku* obou rovnoběžek a změříme délku příslušné úsečky na kolmé příčce.

Tato metoda není nijak omezena tím, zda zadané afinní podprostory rovnoběžné jsou nebo nejsou. Při důkazu využijeme pouze ortogonálních projekcí, ortogonálních rejekcí a ortogonálních doplňků lineárních podprostorů, viz podkapitoly 12.4 a 12.5.

**B.3.3 Věta (Nalezení vzdálenosti dvou afinních podprostorů)** Ať  $\pi = \mathbf{p} + W$  a  $\pi' = \mathbf{p}' + W'$  jsou dva afinní podprostory prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Potom platí

$$\omega(\pi', \pi) = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$

DŮKAZ.

- (1) Označme  $V = (W \vee W')^\perp$ . Protože  $\mathbb{R}^n = W \vee W' \vee V$ , platí, že  $\mathbf{p} - \mathbf{p}' \in (W \vee W') \vee V$ . Afinní podprostory  $\mathbf{p} + W \vee V$  a  $\mathbf{p}' + W' \vee V$  jsou tedy podle Tvzení 7.2.5 různoběžné.

- (2) Označme jako  $\mathbf{w} + \mathbf{w}'$  vektor  $\text{proj}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ . Ukážeme, že bod  $\mathbf{x}'_0 := \mathbf{p} + \mathbf{w} + \text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$  leží v průniku afinních podprostorů  $\mathbf{p} + W \vee V$  a  $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ .

Platí  $\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - \text{proj}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - (\mathbf{w} + \mathbf{w}')$ , a proto

$$\mathbf{p}' + \mathbf{w}' = \mathbf{p} + \mathbf{w} + (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - (\mathbf{w} + \mathbf{w}') = \mathbf{p} + \mathbf{w} + \text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{w} + \text{proj}_V(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$$

To znamená, že bod  $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{p} + \mathbf{w} + \text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$  leží v průniku afinních podprostorů  $\mathbf{p} + W \vee V$  a  $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ .

- (3) Definujeme bod  $\mathbf{x}_0$ , který leží v afinním podprostoru  $\pi = \mathbf{p} + W$ :

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{p} + \mathbf{w}$$

Povšimněme si, že  $\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0 = \text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ . Proto  $\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0$  leží ve  $V = (W \vee W')^\perp$ .

- (4) Zvolme jakékoli  $\mathbf{x}$  v  $\pi$  a jakékoli  $\mathbf{x}'$  v  $\pi'$ . Podle části (3) platí

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0)}_{\in (W \vee W')^\perp} + \underbrace{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}_{\in W \vee W'}$$

a proto podle Pythagorovy věty platí  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|^2 + \|(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\|^2$ . Proto platí nerovnost  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|^2$ .

Ukázali jsme, že platí rovnost  $\omega(\pi, \pi') = \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|$ . ■



**B.3.4 Poznámka** Důkaz Věty B.3.3 je veden tak, že vzorec

$$\omega(\pi', \pi) = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\vec{p}' - \vec{p})\|$$

platí pro afinní podprostory  $\pi = \vec{p} + W$ ,  $\pi' = \vec{p}' + W'$  *jakéhokoli* lineárního prostoru  $L$  konečné dimenze nad  $\mathbb{R}$  s *jakýmkoli* skalárním součinem. Používali jsme totiž pouze obecných vlastností ortogonálních doplňků, ortogonálních projekcí a ortogonálních rejekcí.

Všimněme si, že důkaz Věty B.3.3 má jasný geometrický význam: nalezneme bod  $\mathbf{x}_0$  v  $\pi$  a bod  $\mathbf{x}'_0$  v  $\pi'$  tak, že spojnice bodů  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}'_0$  tvoří *kolmou příčku* afinních podprostorů  $\pi$  a  $\pi'$ . Vzdálenost afinních podprostorů  $\pi$  a  $\pi'$  je pak délka této kolmé příčky.

Věta B.3.3 nám dává návod, jak vzdálenosti dvou afinních podprostorů prostoru  $\mathbb{R}^n$  hledat. Jak ale, pro zadané dva afinní podprostory prostoru  $\mathbb{R}^n$ , jejich vzdálenost prakticky *spočítat*? K tomu využijeme dva typy popisu afinních podprostorů z Tvzení 7.3.1: afinní podprostor prostoru  $\mathbb{R}^n$  může být zadán buď *parametricky* nebo *rovníkovým zápisem*.

Poznamenejme, že vzorec  $\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$  dává pro různoběžné afinní podprostory  $\pi$ ,  $\pi'$  pochopitelně hodnotu 0. To je vidět z Tvzení 7.2.5: vektor  $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$  leží ve  $W \vee W'$  a tudíž  $\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ .

**B.3.5 Tvzení (Vzdálenost dvou rovnoběžných afinních podprostorů)** *At  $\pi = \mathbf{p} + W$  a  $\pi' = \mathbf{p}' + W'$  jsou dva rovnoběžné afinní podprostory prostoru  $\mathbb{R}^n$  a at platí  $W' \subseteq W$ . Potom platí*

$$\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_W(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$

*Navíc platí:*

- (1) *Jsou-li  $\pi$  a  $\pi'$  zadány parametricky jako*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$$

*potom platí*

$$\omega(\pi, \pi')^2 = \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \mathbf{S}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle$$

(2) Jsou-li  $\pi$  a  $\pi'$  zadány obecnými rovnicemi jako

$$\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o} \quad \text{a} \quad \mathbf{N}'^T \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{p}') = \mathbf{o}'$$

potom platí

$$\omega(\pi, \pi')^2 = \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \mathbf{N}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle$$

DŮKAZ. Protože předpokládáme  $W' \subseteq W$ , platí  $W \vee W' = W$ . Potom vzorec

$$\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\text{rej}_W(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$

plyne z Věty B.3.3.

(1) Podle Tvzení 12.4.3 má zobrazení  $\text{rej}_W(-)$  matici  $\mathbf{E}_n - \mathbf{S}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T$  a proto platí

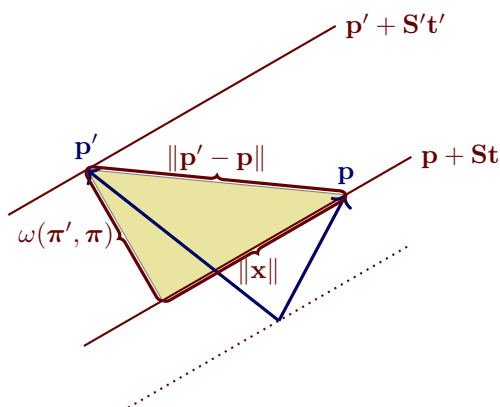
$$\|\text{rej}_W(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|^2 = \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid (\mathbf{E}_n - \mathbf{S}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T)(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle = \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \mathbf{S}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle$$

(2) Z Tvzení 12.5.4 plyne, že platí  $\text{im}(\mathbf{N}) = W^\perp$ . Protože podle části (3) Tvzení 12.5.3 platí  $\text{rej}_W(-) = \text{proj}_{W^\perp}(-)$ , je  $\text{rej}_W(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = \mathbf{N}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p})$  opět podle Tvzení 12.4.3. Tudíž

$$\|\text{rej}_W(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|^2 = \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \mathbf{N}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle$$

V obou případech jsme využili faktu, že jak projekce tak rejekce jsou dány symetrickou maticí  $\mathbf{X}$ , pro kterou platí  $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}$ , viz Důsledek 12.4.9 a část (3) Tvzení 12.5.3. ■

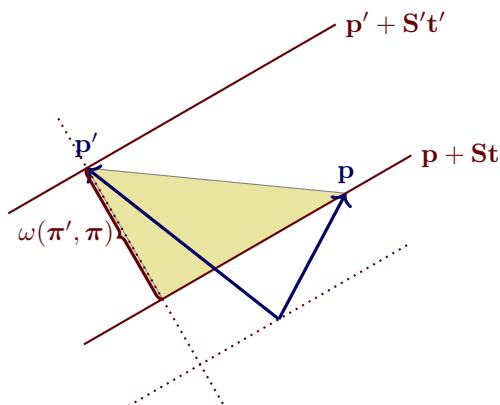
**B.3.6 Poznámka (Geometrická interpretace Tvzení B.3.5)** První část Tvzení B.3.5 je pouhé znění Pythagorovy věty: máme pravoúhlý trojúhelník



kde  $\|\mathbf{x}\|$  je velikost ortogonální projekce vektoru  $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$  na  $\text{im}(\mathbf{S})$ . Platí tedy

$$\omega(\pi, \pi')^2 = \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \mathbf{S}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle$$

Druhá část Tvzení B.3.5 využívá pouze velikost projekce vektoru  $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$  na ortogonální doplněk:





Vzorec pro vzdálenost dvou mimoběžných afinních podprostorů uvedeme pouze pro případ, kdy oba podprostory jsou zadány parametricky. Navíc z našich úvah vyloučíme „patologickou“ situaci, kdy tyto podprostory mají nenulový stupeň rovnoběžnosti. Taková patologická situace nastat může, viz Příklad 7.3.9. Co dělat v patologickém případě radí Poznámka B.3.9.

**B.3.7 Tvrzení (Vzdálenost dvou mimoběžných afinních podprostorů)** *At  $\pi = \mathbf{p} + W$  a  $\pi' = \mathbf{p}' + W'$  jsou dva mimoběžné afinní podprostory prostoru  $\mathbb{R}^n$ , které mají stupeň rovnoběžnosti 0. At  $\pi$  a  $\pi'$  jsou zadány parametricky jako*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$$

Potom platí

$$\omega(\pi', \pi) = \frac{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{S}, \mathbf{S}', \mathbf{p}' - \mathbf{p})}}{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{S}, \mathbf{S}')}}.$$

DŮKAZ. Pro potřeby tohoto důkazu označíme

$$\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d), \quad \mathbf{S}' = (\mathbf{s}'_1, \dots, \mathbf{s}'_{d'}),$$

Protože předpokládáme, že  $W \cap W' = \{\mathbf{o}\}$ , platí  $W \vee W' = W \oplus W'$ . To znamená, že seznam  $(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d, \mathbf{s}'_1, \dots, \mathbf{s}'_{d'})$  tvoří uspořádanou bázi prostoru  $W \vee W'$ . Podle Tvrzení B.1.3 je  $\text{Gram}(\mathbf{S}, \mathbf{S}') \neq 0$ . Potom délka  $\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$  je, opět podle Tvrzení B.1.3, rovna výšce rovnoběžnostěnu vytvořeného seznamem vektorů  $(\mathbf{S}, \mathbf{S}', \mathbf{p}' - \mathbf{p})$  vzhledem k základně  $(\mathbf{S}, \mathbf{S}')$ . To znamená, že platí

$$\omega(\pi', \pi) = \frac{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{S}, \mathbf{S}', \mathbf{p}' - \mathbf{p})}}{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{S}, \mathbf{S}')}}.$$

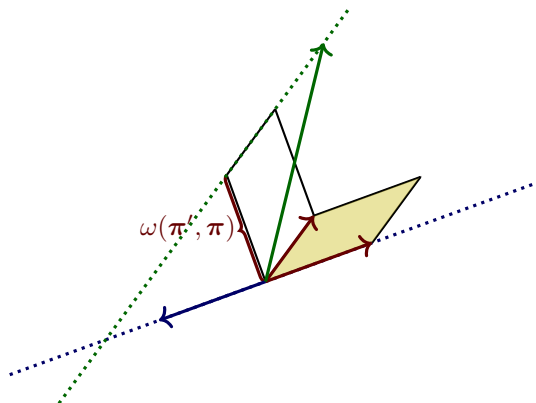
■

**B.3.8 Poznámka (Geometrická interpretace Tvrzení B.3.7)** Geometrický význam Tvrzení B.3.7 plyne z geometrického významu Gramova determinantu, viz Tvrzení B.1.3. Vzorec

$$\omega(\pi', \pi) = \frac{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{S}, \mathbf{S}', \mathbf{p}' - \mathbf{p})}}{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{S}, \mathbf{S}')}}.$$

znamená, že  $\omega(\pi', \pi)$  je přesně výška rovnoběžnostěnu vytvořeného seznamem vektorů  $(\mathbf{S}, \mathbf{S}', \mathbf{p}' - \mathbf{p})$  vzhledem k základně  $(\mathbf{S}, \mathbf{S}')$ .

Následující obrázek ilustruje situaci v  $\mathbb{R}^3$ :



**B.3.9 Poznámka** Jak spočítat vzdálenost mimoběžných afinních podprostorů, jejichž stupeň rovnoběžnosti je větší než 0? Inspekce důkazu Tvrzení B.3.7 dává okamžitě následující výsledek:

At  $\pi = \mathbf{p} + W$  a  $\pi' = \mathbf{p}' + W'$  jsou dva mimoběžné afinní podprostory prostoru  $\mathbb{R}^n$ . At  $\pi$  a  $\pi'$  jsou zadány parametricky jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$$

Potom platí

$$\omega(\pi', \pi) = \frac{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{B}, \mathbf{p}' - \mathbf{p})}}{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{B})}}$$

kde  $\mathbf{B}$  je báze prostoru  $W \vee W'$ , vybraná ze seznamu  $(\mathbf{S}, \mathbf{S}')$ .

Seznam  $(\mathbf{S}, \mathbf{S}')$  je totiž lineárně závislá množina generátorů prostoru  $W \vee W'$ , protože platí  $W \cap W' \neq \{\mathbf{o}\}$ . Ze seznamu generátorů lze ovšem vybrat bázi  $\mathbf{B}$ . Pak postupujeme stejně jako v důkazu Tvzení B.3.7.

## B.4 Vzájemná vzdálenost afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

Tuto kapitolu zakončíme speciálními tvary výše uvedených obecných vzorců v případě afinních podprostorů prostoru  $\mathbb{R}^2$  a prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Připomeňme, že vzájemnou polohu afinních podprostorů prostoru  $\mathbb{R}^2$  a prostoru  $\mathbb{R}^3$  jsme klasifikovali v Příkladu 7.3.8.

Všechny následující vzorce jsou jen instancemi vzorců z Tvzení B.3.5 a B.3.7. Spočteme i několik příkladů. Znovu zdůrazňme, že jde pouze o dosazení do vzorců, takže nespočteme příklad ke každé instanci vzorce. Doporučujeme si ke každému vzorci nakreslit obrázek; jednotlivé vzorce mají jasný geometrický význam!

**B.4.1 Vzdálenosti bodů od přímek v  $\mathbb{R}^2$ .** Je-li dán bod  $\mathbf{p}'$  a přímka  $\pi$  s parametrickým zápisem  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{s} \cdot t$  v  $\mathbb{R}^2$ , pak můžeme použít Tvzení B.3.5: platí

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{p}', \pi)^2 &= \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \mathbf{s}(\mathbf{s}^T \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \frac{\mathbf{s} \mathbf{s}^T}{\|\mathbf{s}\|^2} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \frac{|\mathbf{s}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{s}\|^2} \end{aligned}$$

Je-li dán bod  $\mathbf{p}'$  a přímka  $\pi$  s obecným rovnicovým zápisem  $\mathbf{n}^T (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$  v  $\mathbb{R}^2$ , pak můžeme použít Tvzení B.3.5: platí

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{p}', \pi)^2 &= \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \mathbf{n}(\mathbf{n}^T \mathbf{n})^{-1} \mathbf{n}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \frac{\mathbf{n} \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \frac{|\mathbf{n}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{n}\|^2} \end{aligned}$$

Vzorec  $\omega(\mathbf{p}', \pi)^2 = \frac{|\mathbf{n}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{n}\|^2}$  nebo  $\omega(\mathbf{p}', \pi) = \frac{|\mathbf{n}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\|\mathbf{n}\|}$  si lze snadno zapamatovat: dosadíte bod  $\mathbf{p}'$  do rovnice přímky, spočtete absolutní hodnotu a tu vydělíte velikostí normálového vektoru přímky.

### B.4.2 Příklad

(1) Nalezněte vzdálenost bodu  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  od přímky  $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ .

Protože přímka je zadána směrovým vektorem, použijeme vzorec

$$\omega(\mathbf{p}', \pi)^2 = \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \frac{|\mathbf{s}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{s}\|^2} = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 - \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right|^2}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} = 0$$

- (2) Nalezněte vzdálenost bodu  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  od přímky  $\pi$  zadané rovnicí  $3x - 2y = 1$ .

Přímka  $\pi$  je zadána normálovým vektorem  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  a prochází bodem  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , protože platí rovnost  $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ .

Použijeme tedy vzorec

$$\omega(\mathbf{p}', \pi)^2 = \frac{|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{n}\|^2} = \frac{|(3 \quad -2) \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)|^2}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{3}{13}$$

Vzdálenost bodu  $\mathbf{p}'$  od přímky  $\pi$  je  $\sqrt{3/13}$ .

Poznamenejme ještě, že výpočet pochopitelně nezávisí na volbě bodu  $\mathbf{p}$ , kterým přímka  $\pi$  prochází. Přesvědčete se, že stejný výsledek dostanete například pro bod  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**B.4.3 Vzdálenosti přímek od přímek v  $\mathbb{R}^2$ .** Podle Příkladu 7.3.8 jsou dvě přímky  $\pi, \pi'$  v  $\mathbb{R}^2$  buď různoběžné nebo rovnoběžné. O vzájemné poloze lze rozhodnout velmi snadno. Vzájemnou vzdálenost není třeba počítat pro různoběžky, pak je  $\omega(\pi, \pi') = 0$ . Pro rovnoběžky použijeme Tvzení B.3.5.

Jsou-li dány rovnoběžné přímky  $\pi'$  a  $\pi$  s parametrickými zápisy  $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{s}' \cdot t'$  a  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{s} \cdot t$  v  $\mathbb{R}^2$ , pak podle Tvzení B.3.5 platí

$$\begin{aligned} \omega(\pi', \pi)^2 &= \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} | \mathbf{s}(\mathbf{s}^T \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} | \frac{\mathbf{s} \mathbf{s}^T}{\|\mathbf{s}\|^2} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \frac{|\mathbf{s}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{s}\|^2} \end{aligned}$$

Jsou-li dány rovnoběžné přímky  $\pi'$  a  $\pi$  s obecnými rovnicovými zápisy  $\mathbf{n}'^T(\mathbf{x}' - \mathbf{p}') = \mathbf{o}'$  a  $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$  v  $\mathbb{R}^2$ , pak podle Tvzení B.3.5 platí

$$\begin{aligned} \omega(\pi', \pi)^2 &= \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} | \mathbf{n}(\mathbf{n}^T \mathbf{n})^{-1} \mathbf{n}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} | \frac{\mathbf{n} \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \frac{|\mathbf{n}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{n}\|^2} \end{aligned}$$

**B.4.4 Vzdálenosti bodů od přímek v  $\mathbb{R}^3$ .** Je-li dán bod  $\mathbf{p}'$  a přímka  $\pi$  s parametrickým zápisem  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{s} \cdot t$  v  $\mathbb{R}^3$ , pak můžeme použít Tvzení B.3.5: platí

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{p}', \pi)^2 &= \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} | \mathbf{s}(\mathbf{s}^T \mathbf{s})^{-1} \mathbf{s}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} | \frac{\mathbf{s} \mathbf{s}^T}{\|\mathbf{s}\|^2} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \frac{|\mathbf{s}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{s}\|^2} \end{aligned}$$

Je-li přímka  $\pi$  zadána obecnou rovnicí  $\mathbf{N}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ , pak použijeme vzorec

$$\omega(\pi, \pi')^2 = \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} | \mathbf{N}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle$$

nebo (a to je *rychlejší a doporučený* postup) z normálových vektorů  $\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  vytvoříme směrový vektor přímky:  $\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$  a použijeme předchozí vzorec.

**B.4.5 Příklad** Spočítejte vzdálenost bodu  $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  od přímky  $\mathbf{N}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ , kde

$$\mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Protože

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{N}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & 8 \\ -4 & 8 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{p}' - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

je

$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')^2 = \frac{1}{24} \cdot (1 \ 0 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 20 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & 8 \\ -4 & 8 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{84}{24}$$

Vzdálenost bodu od roviny je  $\sqrt{84/24}$ .

Rychlejší postup je spočítat

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a dosadit do vzorce

$$\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi})^2 = \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|^2 - \frac{|\mathbf{s}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{s}\|^2} = 5 - \frac{36}{24} = \frac{84}{24}$$

Dostali jsme pochopitelně stejný výsledek, jako při předchozím postupu.

**B.4.6 Vzdálenosti bodů od rovin v  $\mathbb{R}^3$ .** Je-li dán bod  $\mathbf{p}'$  a rovina  $\boldsymbol{\pi}$  s obecným rovnicovým zápisem  $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$  v  $\mathbb{R}^3$ , pak můžeme použít Tvrzení B.3.5: platí

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi})^2 &= \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \mathbf{n}(\mathbf{n}^T \mathbf{n})^{-1} \mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \frac{\mathbf{n} \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \frac{|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{n}\|^2} \end{aligned}$$

Je-li rovina  $\boldsymbol{\pi}$  zadána parametricky jako  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{s}_1 \cdot t_1 + \mathbf{s}_2 \cdot t_2$ , je vhodné vytvořit její normálový vektor vektorovým součinem:  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$ .

V tomto případě lze ovšem také použít rovnost

$$\|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2\| = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}$$

z Tvrzení B.2.4 a

$$|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})| = |\langle \mathbf{n} \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle| = |\langle \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle| = |\det(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{p}' - \mathbf{p})|$$

z Definice B.2.1.

Dostaneme tak vzorec

$$\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi}) = \frac{|\det(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}}$$

**B.4.7 Vzdálenosti přímek od přímek v  $\mathbb{R}^3$ .** V každém případě je vhodné převést obecný tvar přímky na parametrický pomocí vektorového součinu. Vzdálenosti různoběžných a rovnoběžných přímek zadaných parametricky v  $\mathbb{R}^3$  se počítají stejně jako v  $\mathbb{R}^2$ , viz B.4.3.

Vzdálenost dvou mimoběžek  $\mathbf{p} + \mathbf{s} \cdot t$ ,  $\mathbf{p}' + \mathbf{s}' \cdot t'$  spočteme vzorcem

$$\omega(\pi', \pi) = \frac{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \mathbf{p}' - \mathbf{p})}}{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')}}.$$

z Tvzení B.3.7.

**B.4.8 Příklad** Spočtete vzdálenost mimoběžných<sup>2</sup> přímek  $\pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  a  $\pi' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Platí

$$\text{Gram}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = 45 \quad \text{Gram}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 5 & 14 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 36$$

Vzdálenost přímek je  $\sqrt{36/45}$ .

**B.4.9 Vzdálenosti přímek od rovin v  $\mathbb{R}^3$ .** Přímka  $\pi'$  a rovina  $\pi$  v  $\mathbb{R}^3$  jsou buď různoběžné nebo rovnoběžné. V prvním případě je  $\omega(\pi, \pi') = 0$ , ve druhém případě využijeme toho, že stačí spočítat vzdálenost jakéhokoli bodu přímky  $\pi'$  od roviny  $\pi$ . Postupujeme tedy stejně jako v B.4.6.

**B.4.10 Vzdálenosti rovin od rovin v  $\mathbb{R}^3$ .** Dvě roviny  $\pi$  a  $\pi'$  v  $\mathbb{R}^3$  jsou buď různoběžné nebo rovnoběžné. V prvním případě je  $\omega(\pi, \pi') = 0$ , ve druhém případě použijeme Tvzení B.3.5. Je vhodné nejprve obě roviny převést na obecný rovnicový zápis pomocí vektorového součinu. Je-li například rovina  $\pi$  zadána parametricky jako  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{s}_1 \cdot t_1 + \mathbf{s}_2 \cdot t_2$ , je vhodné vytvořit její normálový vektor vektorovým součinem:  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$ .

Pro rovnoběžné roviny  $\pi$  a  $\pi'$  s obecnými rovnicovými zápisy  $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$  a  $\mathbf{n}'^T(\mathbf{x}' - \mathbf{p}') = \mathbf{o}$ , pak použijeme Tvzení B.3.5:

$$\begin{aligned} \omega(\pi', \pi)^2 &= \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \mathbf{n}(\mathbf{n}^T \mathbf{n})^{-1} \mathbf{n}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} \mid \frac{\mathbf{n} \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \frac{|\mathbf{n}^T (\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{n}\|^2} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Mimoběžnost těchto přímek jsme ověřili v Příkladu 7.3.6.

## Dodatek C

# Aplikace — Metoda nejmenších čtverců

Statistics are the triumph of the quantitative method, and the quantitative method is the victory of sterility and death.

Hilaire Belloc

V tomto dodatku se zaměříme na situace, kdy soustava rovnic  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  nad  $\mathbb{R}$  nemá řešení. V takovém případě se lze ptát, zda existuje vektor  $\hat{\mathbf{x}}$ , který *minimalisuje* vzdálenost vektorů  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$  a  $\mathbf{b}$  v prostoru  $\mathbb{R}^r$ .

Ukážeme, že takový vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  existuje dokonce jednoznačně, pokud matice soustavy  $\mathbf{A}$  má lineárně nezávislé sloupce. Pak mluvíme o řešení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  *metodou nejmenších čtverců*. Tento výsledek, dokázaný v podkapitole C.1, je pouhou jednoduchou aplikací teorie ortogonálních projekcí a ortogonálních rejekcí z Kapitoly 12.

Řešení soustav metodou nejmenších čtverců lze použít k úvahám o *regresních křivkách*. Regresním křivkám jsou věnovány podkapitoly C.2 a C.3.

Výsledku o Mooroevě-Penrosově pseudoinverzi matice z podkapitoly 14.4 využijeme v podkapitole C.4 k tomu, že pro *jakoukoli* soustavu rovnic  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  lze popsat množinu všech vektorů  $\mathbf{x}$ , které minimalisují vzdálenost vektorů  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  a  $\mathbf{b}$ .

V celém tomto dodatku budeme pracovat v prostorech typu  $\mathbb{R}^n$  nad  $\mathbb{R}$  se *standardním* skalárním součinem. Připomeňme, že standardní skalární součin je definován rovností  $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ . Dále připomeňme, že skalární součin vytváří *normu* vektoru rovností  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}$ .

Explicitně: pro vektory

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

z  $\mathbb{R}^n$  jsou jejich normy a jejich vzdálenost vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu dány vzorci

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Vynikajícím zdrojem praktických příkladů pro metodu nejmenších čtverců je kniha

☞ David C. Lay, *Linear algebra and its applications*, Pearson, 4. vydání, 2011.

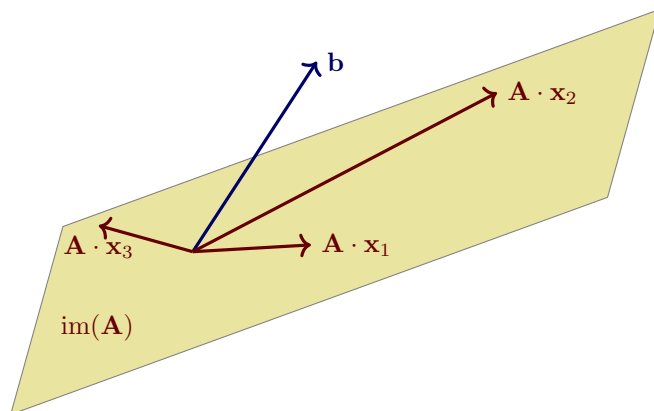
### C.1 Řešení soustav metodou nejmenších čtverců

V této podkapitole budeme pracovat se soustavou rovnic  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ , kde  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{b}$  je v  $\mathbb{R}^n$ . Jde tedy o soustavu  $n$  rovnic o  $k$  neznámých nad  $\mathbb{R}$ . Dále budeme předpokládat, že  $\text{rank}(\mathbf{A}) = k$ . To jest, předpokládáme,

že sloupce matice  $\mathbf{A}$  jsou lineárně nezávislé. Podle definice hodnotnosti lineárního zobrazení, si tedy lze představit, že sloupce matice  $\mathbf{A}$  tvoří bázi lineárního podprostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$  prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

Podle Frobeniovy věty 2.4.3 má soustava  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  alespoň jedno řešení právě tehdy, když  $\mathbf{b}$  je v  $\text{im}(\mathbf{A})$ . To je jednoduché: množina  $\text{im}(\mathbf{A})$  je tvořena přesně vektory tvaru  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ , kde  $\mathbf{x}$  je z  $\mathbb{R}^k$ .

Případ, kdy vektor  $\mathbf{b}$  neleží v  $\text{im}(\mathbf{A})$ , si lze tedy namalovat takto:



Vektory  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_3$ , ... si pak lze představovat jako *aproximace* vektoru  $\mathbf{b}$  vektory z podprostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$ . Existuje *nejlepší* taková aproximace? Odpověď zní ano. Tato odpověď je navíc bezprostřední aplikací Tvzení 12.4.3 a Poznámky 12.4.2 o tom, že ortogonální rejekce je nejkratší ze všech rejekcí. Odpověď přesto zformulujeme jako samostatné tvrzení.

**C.1.1 Tvrzení (Řešení soustav rovnic metodou nejmenších čtverců)** *Atť matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  má hodnot  $k$  a atť  $\mathbf{b}$  je jakýkoli vektor  $\mathbf{b}$  z  $\mathbb{R}^n$ . Potom existuje jediný vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  z  $\mathbb{R}^k$  s vlastností*

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2, \quad \text{kde } \mathbf{x} \text{ je jakýkoli vektor z } \mathbb{R}^k$$

kde norma  $\|\cdot\|$  je určena standardním skalárním součinem v  $\mathbb{R}^n$ . Tomuto  $\hat{\mathbf{x}}$  říkáme řešení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  metodou nejmenších čtverců.

**DŮKAZ.** Protože  $\text{rank}(\mathbf{A}) = k$ , má matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineárně nezávislé sloupce. Podle Definice 12.3.1 je tedy matice  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  pozitivně definitní. Podle podmínky (4) Tvzení 12.3.4 platí  $\det(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) > 0$ . Proto je matice  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  regulární. Soustava  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$  má tedy jediné řešení

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$$

z  $\mathbb{R}^k$ . Podle (12.6) je vektor  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$  ortogonální projekcí vektoru  $\mathbf{b}$  na podprostor  $\text{im}(\mathbf{A})$ . Ortogonální rejekce vektoru  $\mathbf{b}$  podprostorem  $\text{im}(\mathbf{A})$  je tudíž vektor  $\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ . Protože ortogonální rejekce je nejkratší ze všech rejekcí, platí nerovnost  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$ , pro jakýkoli vektor  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{R}^k$ . ■

**C.1.2 Příklad (Řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců)** Soustava rovnic  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  nad  $\mathbb{R}$ , kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nemá podle Věty 6.4.1 řešení: platí totiž  $2 = \text{rank}(\mathbf{A}) < \text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 3$ . Nalezneme řešení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  metodou nejmenších čtverců. Protože

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

máme podle Tvzení C.1.1 vyřešit soustavu rovnic

$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

Matice  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  je evidentně regulární a jediné řešení soustavy  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$  je vektor

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Protože

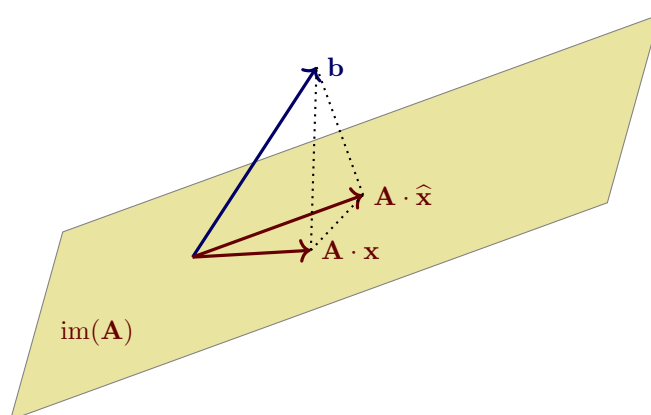
$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  není řešením soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ . Ovšem jakýkoli jiný vektor  $\mathbf{x}$  by „dopadl ještě hůře“. Pro všechny vektory  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{R}^2$  totiž platí nerovnost

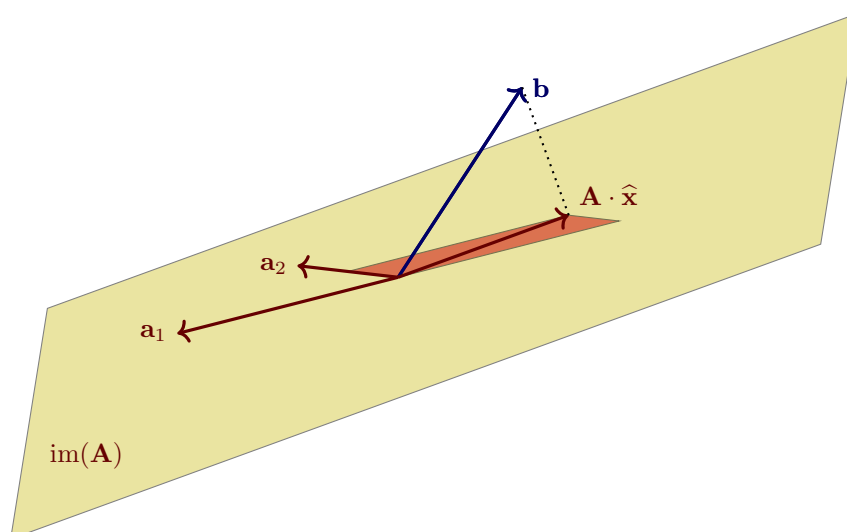
$$0.5 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$$

### C.1.3 Poznámka (Dva geometrické pohledy na řešení soustav metodou nejmenších čtverců)

- (1) Důkaz Tvzení C.1.1 podává popis vektoru  $\hat{\mathbf{x}}$  jako jediného vektoru, pro který je  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$  ortogonální projekcí vektoru  $\mathbf{b}$  na podprostor  $\text{im}(\mathbf{A})$ :



- (2) Zapišeme-li matici  $\mathbf{A}$  ve sloupcovém zápisu jako  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ , pak  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  je uspořádaná báze prostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$  a vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  je pak vektorem souřadnic ortogonální projekce vektoru  $\mathbf{b}$  na podprostor  $\text{im}(\mathbf{A})$ :



**C.1.4 Poznámka** Poznamenejme, že v situaci Tvzení C.1.1, kdy  $\mathbf{b}$  leží v podprostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$ , má soustava  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  *jediné* řešení. Toto řešení lze nalézt metodou nejmenších čtverců. To plyne okamžitě z druhé části



Poznámky **C.1.3**. Podrobněji: sloupcový tvar  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  zadává uspořádanou bázi podprostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$ . Jestliže vektor  $\mathbf{b}$  leží v  $\text{im}(\mathbf{A})$ , lze tedy psát

$$\mathbf{b} = a_1 \mathbf{a}_1 + \dots + a_k \mathbf{a}_k$$

pro *jediný* vektor

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

z  $\mathbb{R}^k$ . Tento vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  je vektorem souřadnic vektoru  $\mathbf{b}$  vzhledem k uspořádané bázi  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  podprostoru  $\text{im}(\mathbf{A})$ . Platí tedy  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ .

**C.1.5 Příklad (Nalezení souřadnic vektoru v lineárním podprostoru)** Ať  $W$  je lineární podprostor prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Předpokládejme, že  $W$  má uspořádanou bázi  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ , kde

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Chceme nalézt souřadnice vektoru

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

z podprostoru  $W$  vzhledem k bázi  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ .

Příslušné souřadnice jsou řešením soustavy

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

metodou nejmenších čtverců. Označme tuto soustavu jako  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ . Potom

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 14 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 39 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Soustava  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$  má jediné řešení

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a to je vektor souřadnic vektoru  $\mathbf{b}$  vzhledem k uspořádané bázi  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ . Platí tedy  $\mathbf{b} = 2 \cdot \mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_2$ .

**C.1.6 Poznámka (Statistický pohled na metodu nejmenších čtverců)** Metoda nejmenších čtverců pro řešení soustav lineárních rovnic má i interpretaci z teorie pravděpodobnosti a statistiky. Předpokládejme, že sloupce  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  matice  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  tvoří  $n$  různých měření náhodných veličin  $A_1, \dots, A_k$ . Vektor  $\mathbf{b}$  pak je  $n$  hodnot náhodné veličiny  $B$ , která je lineární kombinací náhodných veličin  $A_1, \dots, A_k$ . Protože každá naměřená hodnota veličiny  $B$  může být zatížena chybou, můžeme problém nalezení koeficientů lineární kombinace zformulovat rovností

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}$$

kde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je vektor chyb při jednotlivých měřeních, splňující

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{o}, \quad \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \cdot \mathbf{E}_n$$

Neboli: předpokládáme, že střední hodnota každé chyby je nula, a že kovarianční matice<sup>1</sup> má na diagonále společnou hodnotu  $\sigma^2$  (tj. předpokládáme, že chyby jednotlivých měření spolu nesouvisí). Potom lze dokázat následující výsledek:

<sup>1</sup>Něco málo o kovariančních maticích naleznete v podkapitole **G.2**.

**Gaussova-Markovova věta.** Řešení  $\hat{\mathbf{x}}$  soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  metodou nejmenších čtverců je nestranný odhad parametru  $\mathbf{x}$  s nejmenším rozptylem v problému  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \varepsilon = \mathbf{b}$ ,  $E(\varepsilon) = \mathbf{o}$ ,  $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot \mathbf{E}_n$ .

Více například v knihách

☞ Carl D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM Publishers, 2001

☞ Douglas C. Montgomery a George C. Runger, *Applied statistics and probability for engineers*, John Wiley & Sons, 2003



**C.1.7 Poznámka (Metoda nejmenších čtverců pro nestandardní skalární součin)** Důkaz Tvzení C.1.1 využíval vlastností ortogonálních rejekcí pro *standardní* skalární součin v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Mohli bychom ovšem využít Tvzení 12.4.3 o maticovém popisu ortogonální projekce pro *obecný* skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ , zadaný metrickým tensorem  $\mathbf{G}$ . Přesněji, řešením soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  metodou nejmenších čtverců vzhledem ke  $\mathbf{G}$  rozumíme následující postup:

- (1) Má-li matice  $\mathbf{A}$  hodnotu  $k$ , pak soustava  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b})$  má jediné řešení. Matice  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}$  je totiž podle důkazu Tvzení 12.4.3 regulární. Označme toto jediné řešení jako  $\hat{\mathbf{x}}$ . Platí tedy rovnost

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}$$

Podle (12.5) je  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$  ortogonální projekce vektoru  $\mathbf{b}$  na podprostor  $\text{im}(\mathbf{A})$ . Ortogonalitou samozřejmě myslíme ortogonalitu vzhledem ke skalárnímu součinu s metrickým tensorem  $\mathbf{G}$ .

- (2) Podle Poznámky 12.4.2 pak platí nerovnost

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2, \quad \text{kde } \mathbf{x} \text{ je jakýkoli vektor z } \mathbb{R}^k$$

kde  $\| - \|$  je norma vytvořená skalárním součinem s metrickým tensorem  $\mathbf{G}$ .

V praxi je často metrický tensor  $\mathbf{G}$  vytvořen z *kovarianční matice* náhodných veličin. Viz například článek

☞ Yves Nievergelt, A tutorial history of least squares with applications to astronomy and geodesy, *J. Comput. Appl. Math.* 121 (2000), 37–72.

Autorství metody nejmenších čtverců je často připisováno německému matematikovi Karlu Friedrichovi Gaussovi (1777–1855), i když autorem by mohl být i francouzský matematik Adrien-Marie Legendre (1752–1833). Gauss ovšem metodu nejmenších čtverců zpopularisoval opravdu krásným způsobem. Prvního ledna 1801 pozoroval ředitel observatoře v Palermu Guiseppe Piazzi souhvězdí Velryby a objevil novou „hvězdu“. Při dalších devatenácti pozorováních bylo zjištěno, že nový objekt se pohybuje. Piazzi se nejprve domníval, že objevil novou kometu. Později se Piazzi spolu s ostatními astronomy přiklonil k myšlence, že jde o novou planetu mezi Marsem a Jupiterem. Objekt ovšem 11. února 1801 zmizel v záři Slunce a pozorovat již nešel. Pokusy o znovunalezení objektu se účastnili přední astronomové té doby, avšak marně. V září 1801 se problému chopil Gauss a v prosinci 1801 měl již výsledek: Gauss byl schopen předpovědět, kde se objekt znovu objeví. Ukázalo se, že Gaussovy výpočty byly správné: 7. prosince 1801 astronom Xavier von Zach pozoroval objekt v souhvězdí Lva na Gaussem předpovězené dráze (pozorování potvrdil astronom Wilhelm Olbers 24. prosince 1801). Objekt byl později klasifikován jako asteroid a bylo mu dáno jméno *Ceres*. V roce 1809 Gauss publikoval spis *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium* (česky: *Teorie pohybu nebeských těles obíhajících kolem Slunce po kuželosečkách*), ve kterém metodu predikce drah vesmírných těles popsal. Velmi přístupnou a zajímavou formou je problém nalezení dráhy planety Ceres popsán v článku

☞ Donald Teets a Karen Whitehead, *The discovery of Ceres: How Gauss became famous*, *Math. Mag.* 72.2 (1999), 83–93.

## C.2 Lineární a polynomiální regrese

Metoda nejmenších čtverců pro řešení soustav lineárních rovnic se velmi často používá pro hledání *regresních* křivek, tj. pro hledání křivek, které lze „optimálně“ proložit zadanými body. Začneme jednoduchým příkladem.

**C.2.1 Příklad (Regresní přímka)** Uvažujme o třech bodech

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^2$ . Tyto body evidentně neleží na přímce tvaru  $y = a + bx$ . To znamená, že soustava rovnic

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

nemá řešení. Označme matici této soustavy jako  $\mathbf{A}$  a povšimněme si, že  $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ . Vektory tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b3 \\ a + b4 \\ a + b5 \end{pmatrix}$$

kde  $a, b$  jsou reálná čísla, jsou hodnoty na přímkách tvaru  $y = a + bx$  pro  $x = 3, x = 4, x = 5$ . Nalezneme-li tedy řešení

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$$

soustavy

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

metodou nejmenších čtverců, víme, že bude platit: hodnota

$$\left\| \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{b}3 \\ \hat{a} + \hat{b}4 \\ \hat{a} + \hat{b}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \right\|^2 = (\hat{a} + \hat{b}3 - 6)^2 + (\hat{a} + \hat{b}4 - 9)^2 + (\hat{a} + \hat{b}5 - 10)^2$$

je nejmenší možná. To znamená, že přímka tvaru  $y = \hat{a} + \hat{b}x$  projde body

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

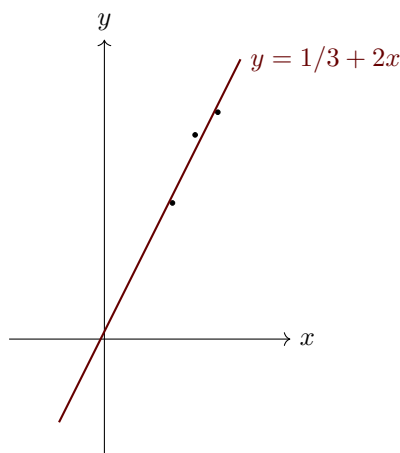
„optimálním“ způsobem. Vyřešíme tedy soustavu

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

metodou nejmenších čtverců.

$$(1) \text{ Soustava } (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}) \text{ má tvar } \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 12 & 25 \\ 12 & 50 & 104 \end{array} \right) \text{ a má jediné řešení } \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Hledaná přímka má tvar  $y = 1/3 + 2x$ .



Vektor

$$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

samozřejmě není řešením soustavy

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

protože platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/3 \\ 25/3 \\ 31/3 \end{pmatrix}$$

Čtverec chyby, které jsme se dopustili, je

$$\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19/3 \\ 25/3 \\ 31/3 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\|^2 = 6/9 = 2/3$$

a jde o nejmenší možný čtverec chyby.

Výše uvedené úvahy lze zobecnit na proložení regresní přímky více body. Jediné, co musíme zajistit je, aby body, kterými chceme regresní přímku prokládat, měly alespoň dvě *různé*  $x$ -ové souřadnice.

### C.2.2 Tvrzení (Existence jediné regresní přímky) *At*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

jsou body v  $\mathbb{R}^2$ , kde  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je alespoň dvouprvková množina. Potom soustava

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{array} \right)$$

nad  $\mathbb{R}$  má jediné řešení

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$$

metodou nejmenších čtverců. Přímce tvaru  $y = \hat{a} + \hat{b}x$  říkáme regresní přímka proložená body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

DŮKAZ. Hodnost matice soustavy

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{array} \right)$$

je 2, protože množina  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je alespoň dvouprvková množina reálných čísel. Zadanou soustavu lze tedy vyřešit metodou nejmenších čtverců. ■

**C.2.3 Poznámka** V některé literatuře (zvláště z matematické statistiky) lze objevit explicitní vzorce pro regresní přímkou proloženou body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Tyto vzorce je zbytečné si pamatovat, zastírají jen jasnou geometrickou podstatu lineární regrese. Přesto tyto vzorce v této poznámce uvedeme. Jak uvidíme, jde jen o přepis řešení soustavy  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$  Cramerovou větou (Důsledek 8.4.7). Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}$$

Pro vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

Potom platí

$$\det(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) = n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

a regresní přímka má tedy tvar

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} + \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \cdot x$$

Úvahy z Příkladu C.2.1 lze snadno zobecnit na hledání regresních parabol.

**C.2.4 Příklad (Regresní parabola)** Uvažujme o čtyřech bodech

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^2$ . Tyto body neleží na parabole tvaru  $y = a + bx + cx^2$ , protože soustava rovnic

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1^2 & 3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 7 \\ 1 & 3 & 3^2 & 10 \\ 1 & 4 & 4^2 & 5 \end{array} \right)$$

nemá podle Frobeniovy věty 6.4.1 řešení. Opravdu: označíme-li matici této soustavy jako  $\mathbf{A}$  a vektor pravých stran jako  $\mathbf{b}$ , pak platí  $3 = \text{rank}(\mathbf{A}) < \text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 4$ .

Vyřešíme-li tuto soustavu metodou nejmenších čtverců, pak lze podobnými úvahami jako v Příkladu C.2.1 mluvit o *regresní parabole*  $y = \hat{a} + \hat{b}x + \hat{c}x^2$ , proložené body

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

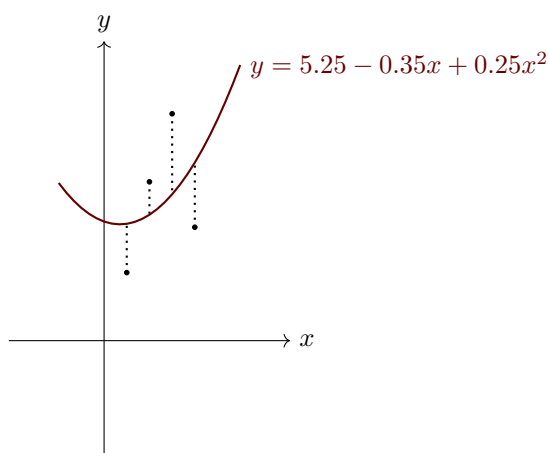
Soustava  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$  má tvar

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 30 & 25 \\ 10 & 30 & 100 & 67 \\ 30 & 100 & 354 & 211 \end{array} \right)$$

která má jediné řešení

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420/80 \\ -28/80 \\ 20/80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.25 \\ -0.35 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Regresní parabola tedy je  $y = 5.25 - 0.35x + 0.25x^2$ :



Protože platí rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5.25 \\ -0.35 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.15 \\ 5.55 \\ 6.45 \\ 7.85 \end{pmatrix}$$

je čtverec chyby, které jsme se dopustili, roven

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5.15 \\ 5.55 \\ 6.45 \\ 7.85 \end{pmatrix} \right\|^2 = 27.45$$

Podobným způsobem by šlo hledat regresní *polynom* tvaru  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}$ , kde  $k \geq 2$ . Než budeme moci zformulovat obecné tvrzení o existenci a jednoznačnosti regresního polynomu, musíme dokázat technické tvrzení o determinantu jisté matice, kterému se říká *Vandermondův determinant*.

**C.2.5 Lemma (Výpočet Vandermondova determinantu)** Pro reálná čísla  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ,  $k \geq 2$ , platí rovnost

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^k \prod_{j=i+1}^k (x_j - x_i)$$

*Speciálně: pokud čísla  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ,  $k \geq 2$ , jsou navzájem různá, je tento determinant nenulový.*

**DŮKAZ.** Označme hledaný determinant jako  $V(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Považujme  $V(x_1, x_2, \dots, x_k)$  za polynom v neurčitě  $x_k$ , jehož koeficienty závisí na hodnotách  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ . To znamená, že polynom  $V(x_1, x_2, \dots, x_k)$  má kořeny v bodech  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ . Existuje tedy polynom  $q(x_1, x_2, \dots, x_k)$  tak, že platí rovnost

$$V(x_1, x_2, \dots, x_k) = q(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot (x_k - x_1) \cdot (x_k - x_2) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Rozvojem determinantu  $V(x_1, x_2, \dots, x_k)$  podle posledního řádku zjišťujeme, že jde o polynom stupně  $k-1$ , jehož koeficient u  $x_k^{k-1}$  je roven  $V(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ . Z toho plyne, že polynom  $q(x_1, x_2, \dots, x_k)$  neobsahuje  $x_k$ , tudíž  $q(x_1, x_2, \dots, x_k) = V(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ . Neboli, platí rovnost

$$V(x_1, x_2, \dots, x_k) = V(x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot (x_k - x_1) \cdot (x_k - x_2) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1})$$

a odtud vzorec  $V(x_1, x_2, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=i+1}^k (x_j - x_i)$  plyne indukci. ■

**C.2.6 Tvrzení (Existence jediného regresního polynomu)** *At*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

jsou body v  $\mathbb{R}^2$ , kde  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je alespoň  $k$ -prvková množina,  $k \geq 2$ . Potom soustava

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{k-1} & y_n \end{array} \right)$$

nad  $\mathbb{R}$  má *jediné řešení*

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{k-1} \end{pmatrix}$$

metodou nejmenších čtverců. Polynomu tvaru  $y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1x + \dots + \hat{a}_{k-1}x^{k-1}$  říkáme *regresní polynom proložený body*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

**DŮKAZ.** Jediné, co je třeba ukázat, že matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{k-1} \end{pmatrix}$$

má hodnotu  $k$ . Podle předpokladu je množina  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  alespoň  $k$ -prvková. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že prvních  $k$  prvků této množiny je navzájem různých (jinak bychom změnili pořadí bodů, kterými chceme regresní polynom proložit). To znamená, že prvních  $k$  řádků matice  $\mathbf{A}$  dává regulární matici

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

podle Lemmatu C.2.5. To ovšem znamená, že prvních  $k$  řádků matice  $\mathbf{A}$  je lineárně nezávislých. Z toho plyne, že  $\text{rank}(\mathbf{A}) = k$ . ■

Jako důsledek lze vyslovit větu o explicitním tvaru *Lagrangeova interpolačního polynomu*, viz Příklad 3.3.9.

### C.2.7 Důsledek (Explicitní tvar Lagrangeova interpolačního polynomu) At

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

jsou body v  $\mathbb{R}^2$ , kde  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  je  $k$ -prvková množina,  $k \geq 2$ . Potom soustava

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} & y_k \end{array} \right)$$

nad  $\mathbb{R}$  má jediné řešení

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Polynomu tvaru  $y = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1}$  říkáme Lagrangeův interpolační polynom proložený body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

DŮKAZ. Podle Lemmatu C.2.5 je matice

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

regulární. Proto

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \end{pmatrix}$$

je jediné řešení soustavy

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} & y_k \end{array} \right)$$

■



### C.2.8 Příklad (Nalezení Lagrangeova interpolačního polynomu) Body

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^2$  proložíme Lagrangeův interpolační polynom.

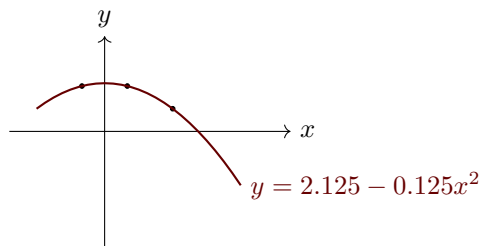
Musíme vyřešit regulární soustavu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & (-1)^2 & 2 \\ 1 & 1 & 1^2 & 2 \\ 1 & 3 & 3^2 & 1 \end{array} \right)$$

a to uděláme Cramerovou větou (tj. podle Důsledku 8.4.7):

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & (-1)^2 \\ 2 & 1 & 1^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix}} = \frac{34}{16} \quad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & (-1)^2 \\ 1 & 2 & 1^2 \\ 1 & 1 & 3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{16} \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{16}$$

Lagrangeův interpolační polynom je tedy  $2.125 - 0.125x^2$ :



## C.3 Regrese jiných typů

Úvahy z podkapitoly C.2 lze zobecnit: metodou nejmenších čtverců můžeme hledat regresní roviny, regresní plochy, regresní kuželosečky, atd. Nebudeme budovat obecnou teorii, zmíníme pouze tři ilustrační příklady.

**C.3.1 Příklad (Regresní rovina)** Lokálně lze model terénu aproximovat regresní rovinou, která je proložena naměřenými hodnotami

$$\begin{pmatrix} \text{zeměpisná délka} \\ \text{zeměpisná šířka} \\ \text{nadmořská výška} \end{pmatrix}$$

Chceme-li body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

proložit regresní rovinu tvaru  $z = a + bx + cy$ , stačí vyřešit soustavu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & z_n \end{array} \right)$$

metodou nejmenších čtverců. Jediné, co je třeba zajistit, je, aby hodnota matice soustavy byla rovna 3. Podle Příkladu 8.2.20 je k tomu nutné a stačí, aby alespoň tři z bodů

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

neležely v přímce.

**C.3.2 Příklad (Regresní plochy)** Regresní roviny lze zobecnit na prokládání ploch tvaru

$$z = a_1 \cdot f_1(x_1, \dots, x_d) + \dots + a_k \cdot f_k(x_1, \dots, x_d)$$

kde  $f_1(x_1, \dots, x_d), \dots, f_k(x_1, \dots, x_d)$  jsou známé funkce  $d$  proměnných. Jsou-li zadány body

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{d1} \\ z_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{dn} \\ z_n \end{pmatrix}$$

v prostoru  $\mathbb{R}^{d+1}$ , pak příslušnou plochu nalezneme vyřešením soustavy

$$\left( \begin{array}{ccc|c} f_1(x_{11}, \dots, x_{d1}) & \dots & f_k(x_{11}, \dots, x_{d1}) & z_1 \\ f_1(x_{12}, \dots, x_{d2}) & \dots & f_k(x_{12}, \dots, x_{d2}) & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_{1n}, \dots, x_{dn}) & \dots & f_k(x_{1n}, \dots, x_{dn}) & z_n \end{array} \right)$$

metodou nejmenších čtverců. Samozřejmě, je třeba ověřit, že matice dané soustavy má hodnost  $k$ . Příkladem je prokládání ploch tvaru

$$z = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2$$

při studiu eroze půdy, nebo prokládání ploch tvaru

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 \sin(2\pi x/12)$$

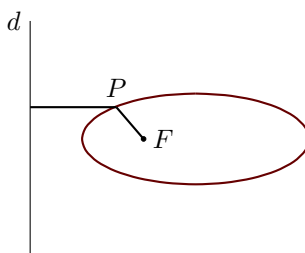
při analýze ročních trendů prodeje.

Poslední příklad se týká využití metody nejmenších čtverců pro klasifikaci regresních kuželoseček. Obecnou kuželosečku v rovině lze zadat *řídící přímkou*  $d$  (také: *direktrix*), *ohniskem*  $F$  (také: *focus*), tj. bodem, který neleží na řídící přímce, a kladným reálným číslem  $e$  (takzvanou *excentricitou*). Kuželosečka je pak množina těch bodů  $P$ , pro které platí rovnost

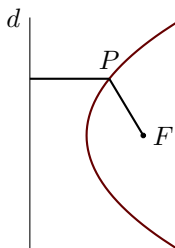
$$\text{vzdálenost } P \text{ od } F = e \cdot (\text{vzdálenost } P \text{ od } d)$$

Velikost excentricity kuželosečky *klasifikuje*:

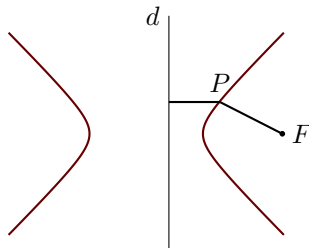
- (1) Pro  $0 < e < 1$  jde o elipsu.



- (2) Pro  $e = 1$  jde o parabolu.



(3) Pro  $e > 1$  jde o hyperbolu.



V polárních souřadnicích  $(r, \varphi)$  lze tedy kuželosečku popsat rovnicí

$$r = a + e(r \cos \varphi)$$

a my můžeme rozhodnout o kvalitě regresní kuželosečky pomocí metody nejmenších čtverců.

### C.3.3 Příklad (Regresní kuželosečka) Spočteme příklad z knihy

☞ David C. Lay, *Linear algebra and its applications*, Pearson, 4. vydání, 2011.

Podle Keplerova prvního zákona je dráha komety (při zanedbání gravitačního vlivu planet) eliptická, parabolická nebo hyperbolická. Na základě pozorování byly pro neznámou kometu naměřeny v polárních souřadnicích tyto hodnoty:

|           |      |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|
| $r$       | 3.00 | 2.30 | 1.65 | 1.25 | 1.01 |
| $\varphi$ | 0.88 | 1.10 | 1.42 | 1.77 | 2.14 |

Máme proložit regresní kuželosečku a rozhodnout o kvalitě dráhy komety. Parametry  $\hat{a}$  a  $\hat{e}$  jsou řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 3.00 \cdot \cos 0.88 & 3.00 \\ 1 & 2.30 \cdot \cos 1.10 & 2.30 \\ 1 & 1.65 \cdot \cos 1.42 & 1.65 \\ 1 & 1.25 \cdot \cos 1.77 & 1.25 \\ 1 & 1.01 \cdot \cos 2.14 & 1.01 \end{pmatrix}$$

metodou nejmenších čtverců. Po zaokrouhlení máme vyřešit soustavu

$$\begin{pmatrix} 5.00 & 1.58 & 9.21 \\ 1.58 & 0.97 & 3.50 \end{pmatrix}$$

Stačí zjistit excentricitu  $\hat{e}$ , proto použijeme Cramerovu větu (Důsledek 8.4.7):

$$\hat{e} = \frac{\begin{vmatrix} 5.00 & 9.21 \\ 1.58 & 3.50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5.00 & 1.58 \\ 1.58 & 0.97 \end{vmatrix}} = \frac{2.95}{2.35} > 1$$

Dráha pozorované komety je hyperbolická.

## C.4 Zobecněné řešení soustav metodou nejmenších čtverců

Pojem Mooreovy-Penroseovy pseudoinverse matice z podkapitoly 14.4 nám umožní podat popis úplného řešení soustavy metodou nejmenších čtverců.

**C.4.1 Tvzení (Zobecněné řešení soustav metodou nejmenších čtverců)** Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  je matice a ať  $\mathbf{b}$  je vektor v  $\mathbb{R}^r$ . Označme  $d = \text{def}(\mathbf{A})$ . Potom afinní podprostor

$$\mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b} + \ker(\mathbf{A})$$

dimenze  $d$  v  $\mathbb{R}^s$  je přesně množinou všech vektorů  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{R}^s$ , pro které je výraz  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$  nejmenší.

**DŮKAZ.** Označme jako  $\mathbf{p}$  ortogonální projekci  $\text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$ . Podle Tvzení 14.4.3 platí  $\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ . Tudíž  $\mathbf{A}^+\mathbf{b} + \ker(\mathbf{A})$  je řešením soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ . Proto afinní podprostor  $\mathbf{A}^+\mathbf{b} + \ker(\mathbf{A})$  dimenze  $d$  v  $\mathbb{R}^s$  je přesně množinou všech vektorů  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{R}^s$ , pro které je výraz  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$  nejmenší. ■

**C.4.2 Poznámka** Tvzení C.1.1 je speciálním případem Tvzení C.4.1. Pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  hodnosti  $k$  totiž platí  $\text{def}(\mathbf{A}) = 0$  a podle Příkladu 14.4.2 je  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ . V Tvzení C.4.1 tudíž říkáme, že 0-dimensionální plocha v  $\mathbb{R}^k$  (tj. bod v  $\mathbb{R}^k$ )  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$  je přesně množinou všech vektorů  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^k$ , pro které je výraz  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$  nejmenší.

**C.4.3 Příklad** Nalezneme všechny vektory  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^2$ , pro které je výraz  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$  nejmenší, kde

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Metodami Příkladu 14.4.6 lze zjistit, že platí

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tudíž

$$\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

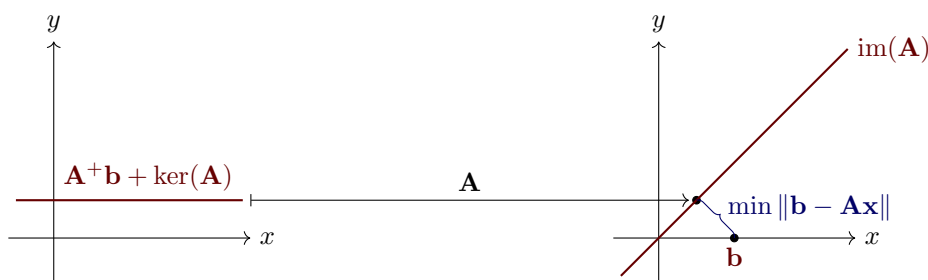
Protože platí

$$\ker(\mathbf{A}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

je přímka

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

množina všech vektorů  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^2$ , pro které je výraz  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$  nejmenší.



## Dodatek D

# Aplikace — Ortogonální aproximace analogového a digitálního signálu

Orthogonal polynomials are connected with trigonometric, hypergeometric, Bessel, and elliptic functions, are related to the theory of continued fractions and to important problems of interpolation and mechanical quadrature, and are of occasional occurrence in the theories of differential and integral equations.

Gabor Szegő, *Orthogonal polynomials*, 1935

V textu tohoto dodatku nahlédneme do základů teorie zpracování analogových a digitálních signálů. Jde o část aplikované matematiky, která je kombinací lineární algebry a analýzy funkcí reálné proměnné. Některé matematické věty z analýzy v tomto textu nedokážeme, odkážeme však vždy na literaturu, kde je možné příslušné důkazy najít.

V podkapitole D.1 se seznámíme se základními problémy *zpracování analogových a digitálních signálů*.

Skalární součin v prostoru  $L^2([a; b]; \mathbb{R})$  využijeme v podkapitole D.3 ke studiu *ortonormálních systémů* a popíšeme *abstraktní Fourierovy řady*. Probereme dvě důležité instance ortonormálních systémů: *trigonometrický systém* v podkapitole D.4 a *systémy ortogonálních polynomů* v podkapitole D.5.

Nakonec, v podkapitole D.6, ukážeme, jak uniformním způsobem získat *diskrétní verze* Fourierovy transformace. Zaměříme se na dvě nejpoužívanější: *diskrétní Fourierovu transformaci* (také: *DFT*) a *diskrétní kosinovou transformaci* (také: *DCT*).

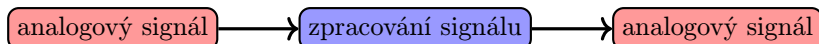
Vhodnou literaturou k teorii signálů jsou například knihy

☞ Sophocles J. Orfanidis, *Introduction to signal processing*, Prentice-Hall, 2009.

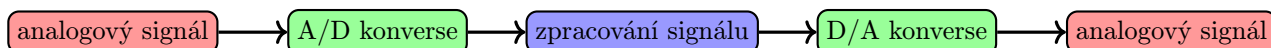
☞ John G. Proakis a Dimitris G. Manolakis, *Digital signals processing: Principles, algorithms, and applications*, Prentice-Hall, 1996.

## D.1 Základní myšlenky zpracování signálu

Analogový signál bývá reprezentován reálnou funkcí reálné proměnné. Při jeho zpracování můžeme aplikovat nejrůznější transformace (zesílení, analýza frekvencí, atd). Výstupem pak bude opět analogový signál:



V současné době se ale velmi často analogový signál nejprve převede na signál *digitální*, poté se digitální signál zpracuje, a opět se převede na signál analogový:

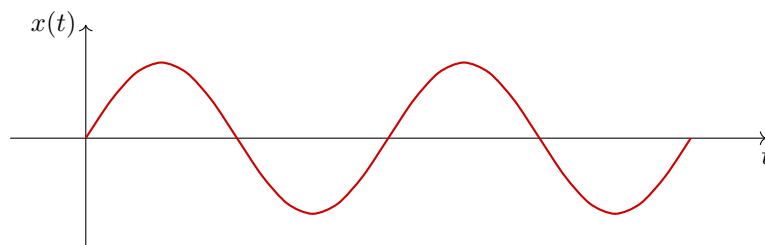


V každém z případů si můžeme klást otázku, zda při zpracování signálu dojde nebo nedojde ke ztrátě informace o signálu. V některých případech může být ztráta informace žádoucí (například při *kompresi* zvukového záznamu), v některých případech je ztráta nežádoucí (například při *frekvenční analýze* zvukového signálu).

V této úvodní podkapitole obě problematiky vysvětlíme na příkladu „naměřené“ hodnoty signálu

$$x : t \mapsto \sin(t\pi/2)$$

který jsme měřili v časech  $t$  z intervalu  $[0; 8]$ . Grafem tohoto signálu je křivka



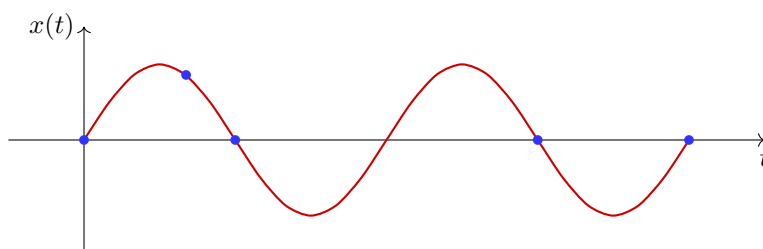
### Bezztrátové zpracování

Úplnou informací o signálu  $x : t \mapsto \sin(t\pi/2)$  je pochopitelně znalost všech funkčních hodnot pro  $t \in [0; 4]$ . Funkčních hodnot  $x(t)$  je nekonečně mnoho. Šlo by signál  $x$  popsat úsporněji? K řešení tohoto problému existují dva různé přístupy:

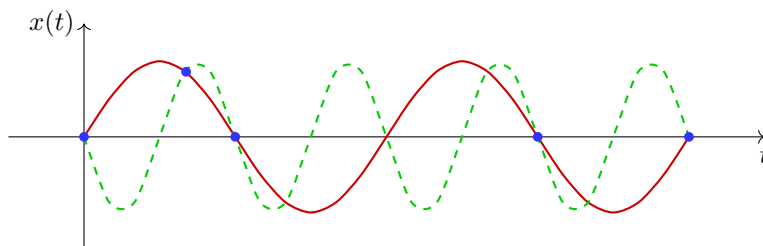
- (1) Zadaný signál  $x$  má *periodu* 4, *amplitudu* 1 a jde o funkci sinus. Tyto tři informace skutečně funkci  $x$  popisují jednoznačně. Navíc: při zpracování signálu  $x$  stačí zpracovat pouze tyto tři informace. Později ukážeme, že tyto tři informace (periodu, amplitudu a informaci o sinu) lze získat jistou *transformací*, které se říká *Fourierova*.

Fourierova transformace není jedinou metodou, kterou lze použít. Obecně platí empirický slogan: pokud má zadaný signál jisté charakteristické vlastnosti, lze na základě těchto vlastností zvolit *transformaci*, která, na základě charakteristických vlastností, je pro zpracování signálu nejvhodnější.

- (2) Jiným přístupem k bezztrátovému zpracování je *vzorkování* zadaného signálu, tj. zpracování informace o zadaném signálu pouze v konečně mnoha bodech:



Otázka, zda je signál jednoznačně popsán několika vzorky, je obecně komplikovaná. Pokud zvolíme příliš málo vzorků, můžeme být při rekonstrukci signálu nepříjemně překvapeni:



Problém nedostatečného vzorkování řeší různé verze *Whittakerovy-Shannonovy-Nyquistovy věty o vzorkování*, viz Větu [D.4.9](#).

## Ztrátové zpracování

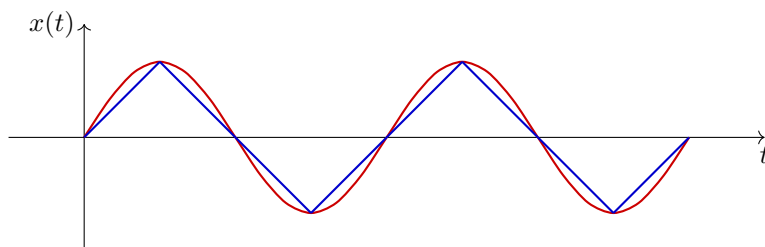
Aproximací signálu  $x : t \mapsto \sin(t\pi/2)$  může být jakákoli křivka, která se od funkce  $x$  na intervalu  $[0; 8]$  „příliš neliší“. Co by to ale mělo znamenat? Můžeme například využít skalárního součinu

$$\langle f(t) | g(t) \rangle = \int_0^8 f(t) \cdot g(t) dt$$

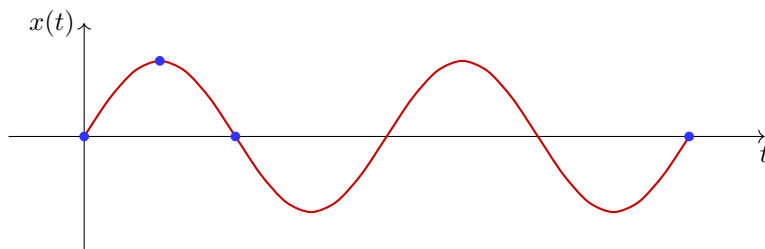
na lineárním prostoru  $C([0; 8]; \mathbb{R})$  z Příkladu 12.1.5. Tento skalární součin vytváří *normu*  $\| - \|$  na lineárním prostoru  $C([0; 8]; \mathbb{R})$  a my můžeme chtít aproximovat funkci  $x$  funkcí  $\hat{x}$  z nějaké předem zadané sady funkcí, pro kterou bude hodnota

$$\|x - \hat{x}\|^2 = \int_0^8 (\sin(t\pi/2) - \hat{x}(t))^2 dt$$

nejmenší možná. Příkladem takové aproximace může být například lomená čára



Navíc (a tím se přibližujeme problémům, které chceme opravdu řešit) výše uvedená lomená čára mohla vzniknout jako aproximace vzniklá *naměřením* konečně mnoha hodnot funkce (tj. *navzorkováním* spojitého signálu)  $x : t \mapsto \sin(t\pi/2)$ :

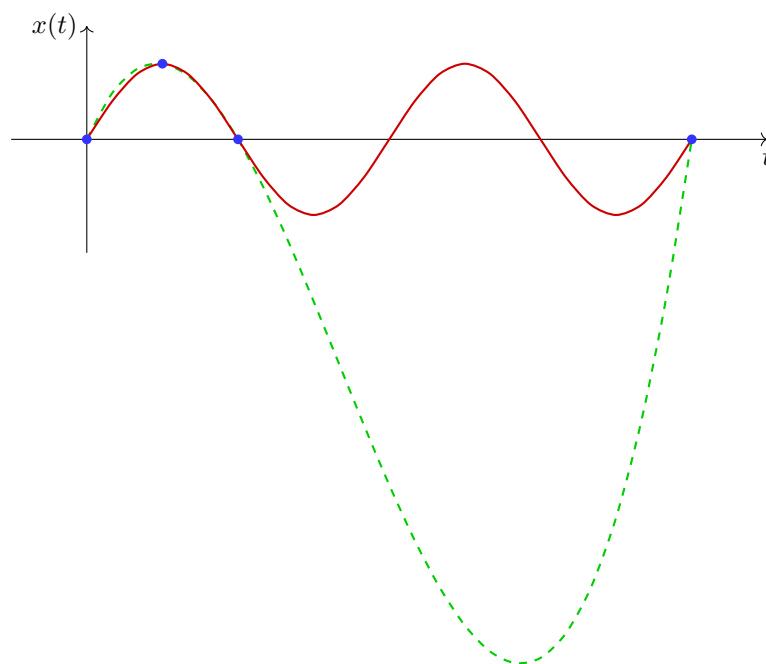


Co se stane, když na navzorkované hodnoty



použijeme nám zatím jediný známý interpolační postup, tj. tvrzení o *Lagrangeově interpolaci* (viz Důsledek C.2.7)? Dostaneme jako aproximaci původního spojitého signálu  $x : t \mapsto \sin(t\pi/2)$  polynom třetího stupně

$$t \mapsto 1/7 \cdot t \cdot (t - 2) \cdot (t - 8):$$



kteřý je od původního signálu hodně vzdálen. Potřebujeme tedy vyvinout rafinovanější interpolační/aproximační techniky, než je Lagrangeova interpolace.

Aproximace vzorkovaného signálu pochopitelně může záviset na mnoha faktorech: na původním tvaru signálu, na „hustotě“ naměřených vzorků, na třídě funkcí, které k aproximaci lze použít, a tak dále.

### Jak budeme dále postupovat?

- (1) V podkapitole D.2 zavedeme *lineární prostor* funkcí, které budeme považovat za „přípustné“ signály. Všechny funkce, které se v inženýrské praxi vyskytují, jsou prvky tohoto lineárního prostoru  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ .
- (2) V podkapitole D.3 zavedeme *úplné ortonormální systémy* funkcí v prostoru  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  a ukážeme, jakým způsobem tyto systémy lze využít k *aproximaci* funkcí z  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  *částecnými součty Fourierových řad*.
- (3) V podkapitolách D.4 a D.5 ukážeme, jak aproximovat pomocí *úplného trigonometrického systému* a *úplných systémů ortogonálních polynomů*.
- (4) V podkapitole D.6 pak ukážeme, jak lze Fourierovy rozvoje *diskretizovat* a získat tak důležité transformace, které se používají při zpracování digitálních signálů.

## D.2 Riemannův-Stieltjesův integrál a Hilbertův prostor $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$

Analogový signál je representován jako ne nutně spojitá funkce, proto je tato podkapitola věnována vysvětlení teorie *Riemannova-Stieltjesova integrálu*. Tento integrál je zobecněním dobře známého Riemannova integrálu. Ukážeme *geometrickou visualisaci* Riemannova-Stieltjesova integrálu. V této podkapitole také zavedeme *lineární prostor* integrovatelných funkcí  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  a vysvětlíme, jak na tomto prostoru lze zavést *skalární součin*.

V této podkapitole budeme studovat integrály reálných funkcí, definovaných na intervalu  $[a; b]$ . Protože tyto funkce chceme chápat jako *analogový signál* (tj., hodnotu  $f(t)$  budeme chápat jako hodnotu signálu v čase  $t$  z intervalu  $[a; b]$ ), budeme muset definici integrálu rozšířit i na funkce, které nejsou na intervalu  $[a; b]$  spojitě. Ve skutečnosti se vyplatí studovat integrály funkcí za situace, kdy interval  $[a; b]$  je „vážen“ *neklesající váhovou funkcí*  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Výsledkem je pojem *Riemannova-Stieltjesova integrálu*. Nebudeme budovat teorii tohoto integrálu od naprostých základů, pro podrobnosti a další důležité vlastnosti Riemannova-Stieltjesova integrálu (a jeho obecnější verze: *Lebesgueova-Stieltjesova integrálu*) odkazujeme například na knihy

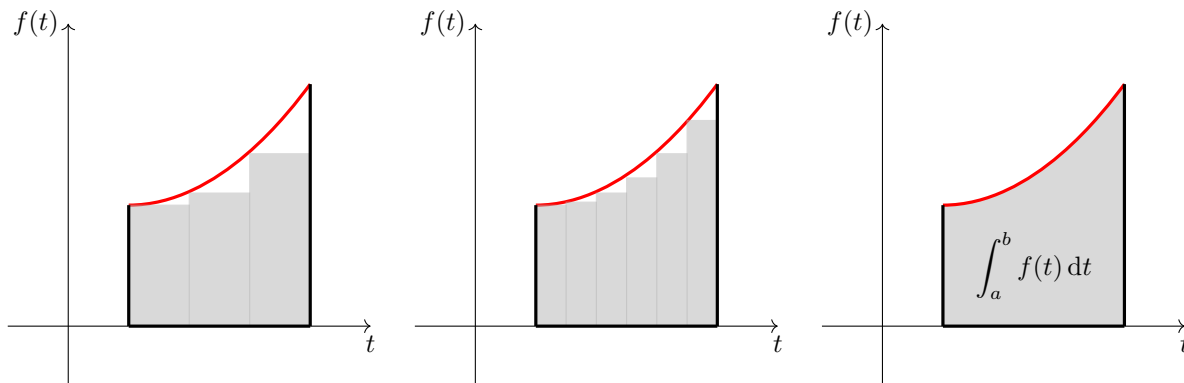


☞ Edwin Hewitt a Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 3. vydání, 1975.

☞ Vojtěch Jarník, *Integrální počet II*, Academia, 1984.

☞ Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1976.

Nám dobře známý *Riemannův integrál* (spojité) funkce  $f$ , definované na uzavřeném intervalu  $[a; b]$ , je definován pomocí *limity* Riemannových součtů přes všechna dělení intervalu  $[a; b]$ , kde *jemnost* dělení jde k nule:



U Riemannova-Stieltjesova integrálu budeme postupovat analogicky: součty ploch obdélníků ale nahradíme součty ploch *vážených* obdélníků.

**D.2.1 Definice** Volbě  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  říkáme *dělení* intervalu  $[a; b]$  a číslu

$$\max_i (t_{i+1} - t_i)$$

říkáme *jemnost* tohoto dělení.

**D.2.2 Definice** Ať  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  je neklesající funkce. Ať  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce a ať  $\Delta$  je dělení  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  intervalu  $[a; b]$ . Číslu

$$S(f; \alpha; \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \cdot (\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i))$$

říkáme *Riemannův-Stieltjesův součet* pro funkci  $f$ , váhu  $\alpha$  a dělení  $\Delta$ .

**D.2.3 Příklad** Ať  $\Delta$  je následující dělení intervalu  $[0; 1]$ :

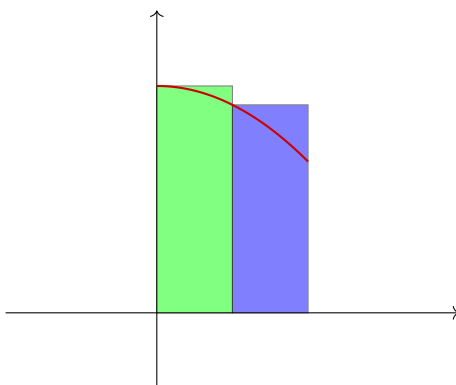
$$\underbrace{0}_{=t_0} < \underbrace{0.5}_{=t_1} < \underbrace{1}_{=t_2}$$

Pro funkci  $f : t \mapsto -t^2 + 3$  na intervalu jsou Riemannovy-Stieltjesovy součty závislé na volbě váhové funkce.

(1) Váhová funkce  $\alpha : t \mapsto t$  vytváří součet

$$f(0) \cdot (0.5 - 0) + f(0.5) \cdot (1 - 0.5)$$

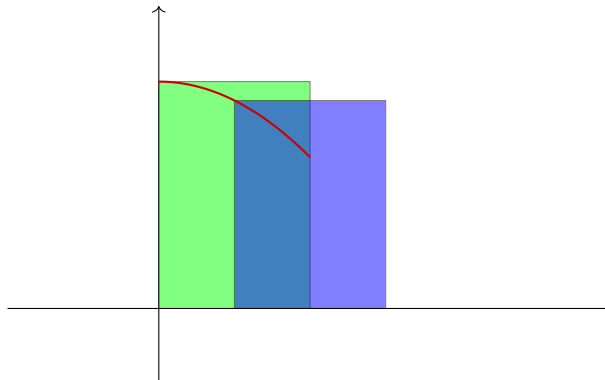
což je (velmi hrubá) aproximace plochy pod křivkou  $f : t \mapsto -t^2 + 3$  na intervalu  $[0; 1]$ :



(2) Váhová funkce  $\alpha : t \mapsto 2t$  vytváří součet

$$f(0) \cdot (2 \cdot 0.5 - 2 \cdot 0) + f(0.5) \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 0.5) = f(0) \cdot 2 \cdot (0.5 - 0) + f(0.5) \cdot 2 \cdot (1 - 0.5)$$

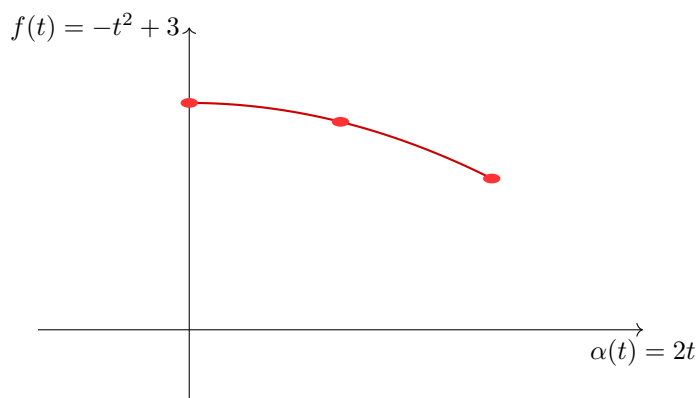
Vidíme, že v součtu



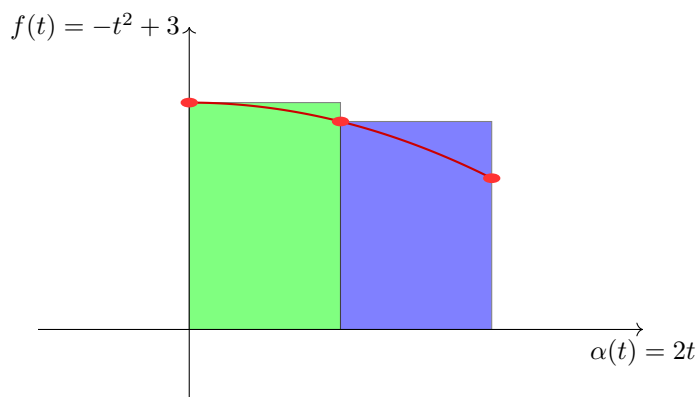
má každý obdélník vodorovnou stranu. „váženou“ váhovou funkcí. Příslušný Riemannův-Stieltjesův součet můžeme v našem případě namalovat i jinak a *podstatně názorněji*: funkce

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2 + 3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 1]$$

vytváří v  $\mathbb{R}^2$  křivku s grafem



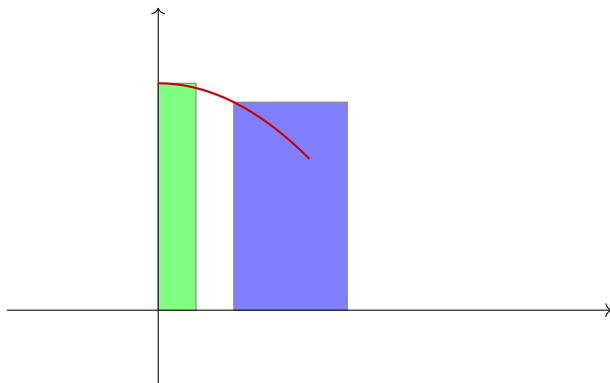
na které jsme vyznačili body pro  $t = 0$ ,  $t = 0.5$  a  $t = 1$ . Příslušný Riemannův-Stieltjesův součet je pak součtem ploch vyznačených obdélníků:



(3) Váhová funkce  $\alpha : t \mapsto t^2$  vytváří součet

$$f(0) \cdot (0.5^2 - 0^2) + f(0.5) \cdot (1^2 - 0.5^2) = f(0) \cdot 0.25 + f(0.5) \cdot 0.75$$

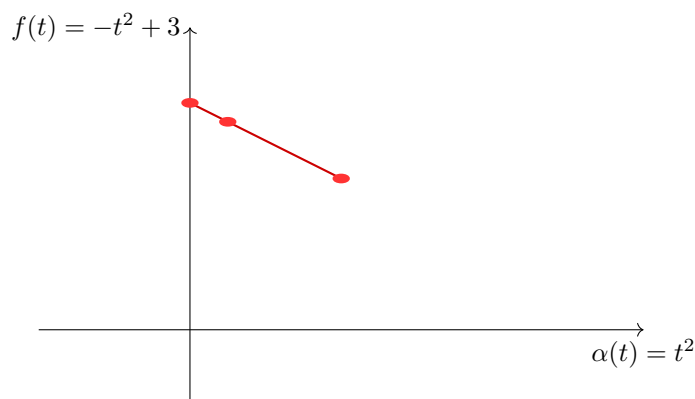
Vidíme, že v součtu



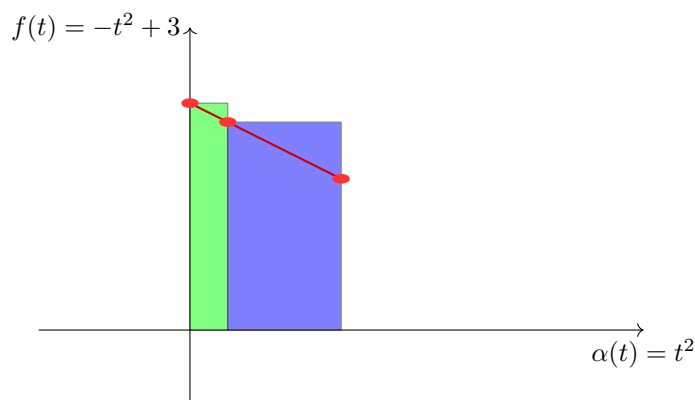
má každý obdélník vodorovnou stranu. „váženou“ váhovou funkcí. „Tíha“ bodů obdélníku roste se čtvercem vzdálenosti od osy  $y$ . Příslušný Riemannův-Stieltjesův součet vyznačíme nyní opět jinak. Funkce

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 + 3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 1]$$

vytváří v  $\mathbb{R}^2$  křivku



na které jsme vyznačili body pro  $t = 0$ ,  $t = 0.5$  a  $t = 1$ . Příslušný Riemannův-Stieltjesův součet je pak součtem ploch vyznačených obdélníků:



Úvahy z předchozího příkladu jsou typické: váhová funkce  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  „měří“ vodorovné strany obdélníků, které se vyskytují v Riemannových-Stieltjesových součtech. Integrál nyní definujeme jako limitu těchto součtů, kde jemnost dělení půjde k nule.

**D.2.4 Definice** Ať  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  je neklesající funkce. Řekneme, že *Riemannův-Stieltjesův integrál* funkce  $f$  vzhledem k  $\alpha$  existuje, pokud existuje limita součtů  $S(f; \alpha; \Delta)$ , kde jemnost  $\Delta$  se blíží 0. Tuto limitu označíme

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t)$$

V pořádku: integrál jsme definovali. Jaké funkce mají Riemannův-Stieltjesův integrál? Jde evidentně o zobecnění Riemannova integrálu, jak ukazuje volba váhové funkce  $\alpha(t) = t$  a očekáváme, že existence Riemannova-Stieltjesova integrálu může na volbě váhové funkce podstatně záviset. Zformulujeme větu (bez důkazu), která existenci integrálu zaručí ve všech případech, které nás budou zajímat.

**D.2.5 Věta (Existence Riemannova-Stieltjesova integrálu)** Ať  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  je tvaru

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_a^t w(s) ds$$

kde integrál je Riemannův. Jestliže existuje Riemannův integrál

$$\int_a^b f(t) dt$$

pak existuje i Riemannův-Stieltjesův integrál

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t)$$

a platí

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) = \int_a^b f(t) \cdot w(t) dt$$

Pomocí Věty D.2.5 můžeme spočítat Riemannovy-Stieltjesovy integrály funkce  $t \mapsto -t^2 + 3$  na intervalu  $[0; 1]$  (viz Příklad D.2.3).

### D.2.6 Příklad

(1) Pro váhovou funkci  $t \mapsto t$  platí

$$t = \int_0^t 1 ds$$

a proto

$$\int_0^1 (-t^2 + 3) dt = \int_0^1 (-t^2 + 3) \cdot 1 dt = \left[ -\frac{t^3}{3} + 3t \right]_0^1 = -1/3 + 3 = 8/3$$

Pro identickou váhovou funkci se Riemannův-Stieltjesův integrál shoduje s Riemannovým integrálem. To jsme čekali.

(2) Pro váhovou funkci  $t \mapsto 2t$  platí

$$2t = \int_0^t 2 ds$$

a proto

$$\int_0^1 (-t^2 + 3) d2t = \int_0^1 (-t^2 + 3) \cdot 2 dt = \left[ -\frac{2t^3}{3} + 6t \right]_0^1 = -2/3 + 6 = 16/3$$

(3) Pro váhovou funkci  $t \mapsto t^2$  platí

$$t^2 = \int_0^t 2s ds$$

a proto

$$\int_0^1 (-t^2 + 3) dt^2 = \int_0^1 (-t^2 + 3) \cdot 2t dt = \left[ -\frac{(-t^2 + 3)^2}{2} \right]_0^1 = -2 + 4.5 = 2.5$$

Všechny předchozí příklady používaly váhové funkce tvaru

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_a^t w(s) \, ds$$

Každá taková váhová funkce  $\alpha$  je *spojitá* (protože platí

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = w(t)$$

Opravdová síla Riemannova-Stieltjesova integrálu se však projevuje pro *nespojité* váhové funkce. Připomeňme, že funkce  $\alpha$  má v bodě  $t_0$  *nespojitosť prvního druhu*, pokud limity

$$\lim_{t \rightarrow t_0-} \alpha(t) \quad \lim_{t \rightarrow t_0+} \alpha(t)$$

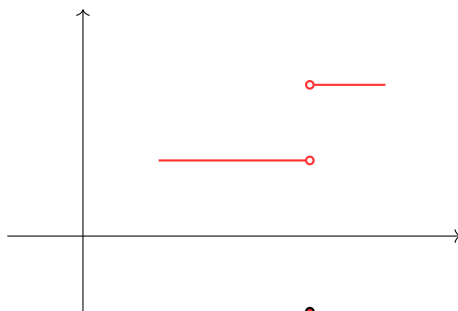
existují a jsou vlastní, ale platí

$$\lim_{t \rightarrow t_0-} \alpha(t) \neq \lim_{t \rightarrow t_0+} \alpha(t)$$

Příkladem je neklesající funkce

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } 1 \leq t < 3 \\ -1, & \text{pro } t = 3 \\ 2, & \text{pro } 3 < t \leq 4 \end{cases}$$

definovaná na intervalu  $[1; 4]$  s grafem



Pro tuto funkci platí

$$1 = \lim_{t \rightarrow 3-} \alpha(t) \neq \lim_{t \rightarrow 3+} \alpha(t) = 2$$

Pro neklesající váhové funkce s konečně mnoha nespojitostmi prvního druhu platí následující věta:

**D.2.7 Věta** *At neklesající váhová funkce  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  má, až na konečně bodů  $a = t_0 < \dots < t_n = b$ , na intervalu derivaci  $\alpha'$ , pro kterou Riemannův integrál*

$$\int_a^b \alpha'(s) \, ds$$

*existuje. Dále předpokládáme, že  $\alpha$  má v bodech  $t_0, \dots, t_k$  nespojitost prvního druhu. At funkce  $f$  je spojitá v bodech  $t_0, \dots, t_k$  a at Riemannův integrál*

$$\int_a^b f(t) \, dt$$

*existuje. Potom existuje i Riemannův-Stieltjesův integrál*

$$\int_a^b f(t) \, d\alpha(t)$$

*a je roven součtu*

$$\int_a^b f(t) \cdot \alpha'(t) \, dt + f(a) \cdot \left( \lim_{t \rightarrow a+} \alpha(t) - \alpha(a) \right) + \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k) \cdot \left( \lim_{t \rightarrow t_k-} \alpha(t) - \lim_{t \rightarrow t_k+} \alpha(t) \right) + f(b) \cdot \left( \alpha(b) - \lim_{t \rightarrow b-} \alpha(t) \right)$$

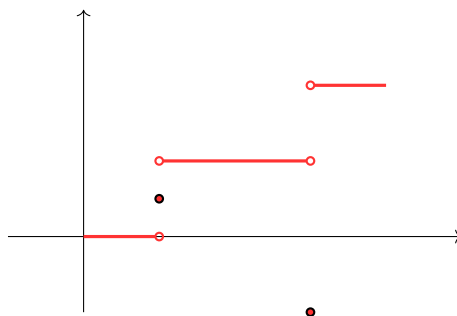
**D.2.8 Příklad** Spočítáme

$$\int_0^4 3t \, d\alpha(t)$$

kde

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } 0 \leq t < 1 \\ 0.5, & \text{pro } t = 1 \\ 1, & \text{pro } 1 \leq t < 3 \\ -1, & \text{pro } t = 3 \\ 2, & \text{pro } 3 < t \leq 4 \end{cases}$$

je váhová funkce definovaná na intervalu  $[1; 4]$ . Podle grafu funkce  $t \mapsto \alpha(t)$



vidíme, že  $\alpha'(t) = 0$  ve všech bodech kromě bodů 1 a 3, kde  $\alpha$  má nespojitosti prvního druhu. Podle Věty [D.2.7](#) platí rovnosti

$$\begin{aligned} \int_1^4 3t \, d\alpha(t) &= (3 \cdot 1) \cdot \left( \lim_{t \rightarrow 1-} \alpha(t) - \lim_{t \rightarrow 1+} \alpha(t) \right) + (3 \cdot 3) \cdot \left( \lim_{t \rightarrow 3-} \alpha(t) - \lim_{t \rightarrow 3+} \alpha(t) \right) \\ &= (3 \cdot 1) \cdot (1 - 0) + (3 \cdot 3) \cdot (2 - 1) \\ &= (3 \cdot 1) + (3 \cdot 3) \end{aligned}$$

To znamená, že integrál je roven *váženému součtu* hodnot tam, kde váhová funkce  $\alpha$  má „skok“! Na hodnotě váhové funkce v jejích bodech nespojitosti prvního druhu navíc hodnota integrálu vůbec nezávisí.

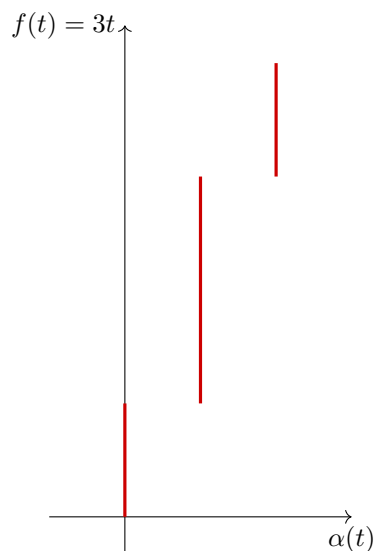
Jak vypadá geometrická interpretace Riemannova-Stieltjesova integrálu

$$\int_1^4 3t \, d\alpha(t)$$

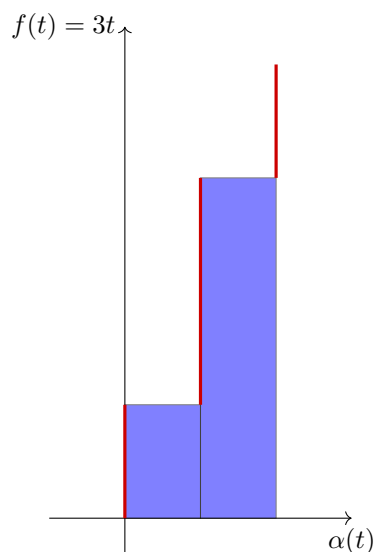
pro naši *nespojitou* váhovou funkci  $\alpha(t)$ ? Lze si opět představit křivku

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 3t \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 4]$$

v  $\mathbb{R}^2$  s grafem



a integrál opět počítá plochu pod touto křivkou (v bodech nespojitosti funkce  $\alpha$  jsme vzali úsečky rovnoběžné s osou  $\alpha(t)$ ):



Příklad D.2.8 odhalil pravou podstatu a význam Riemannova-Stieltjesova integrálu pro naše úvahy. Zformulujeme nyní dvě tvrzení. Obě tvrzení jsou jednoduchými důsledky definice Riemannova-Stieltjesova integrálu.

**D.2.9 Tvrzení** Zvolme libovolně body  $a = t_0 < \dots < t_n = b$  a definujme

$$\alpha(t) = k \text{ pro } t_k \leq t < t_{k+1}$$

Ať funkce  $f$  je spojitá v bodech  $t_0, \dots, t_n$  a ať Riemannův integrál

$$\int_a^b f(t) dt$$

existuje. Potom platí

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) = \sum_{k=0}^n f(t_k) (\alpha(t_{k+1}) - \alpha(t_k))$$

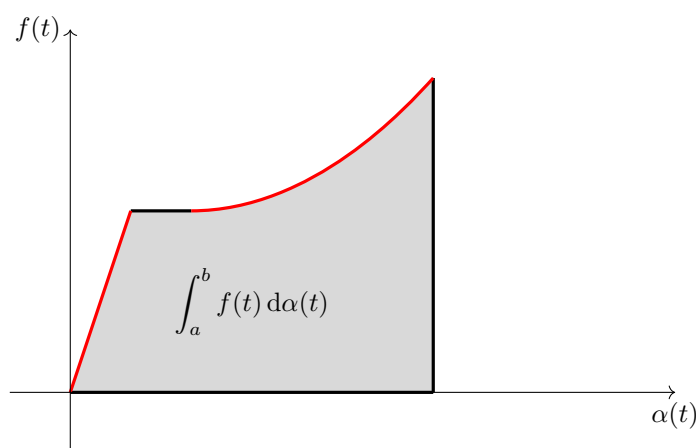
**D.2.10 Tvzení (Geometrický význam Riemannova-Stieltjesova integrálu)** *At' nezáporná neklesající váhová funkce  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  má v intervalu  $[a; b]$  pouze konečně mnoho bodů nespojitosti prvního druhu, ve kterých je nezáporná funkce  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá. Potom Riemannův-Stieltjesův integrál*

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t)$$

je roven obsahu plochy pod křivkou

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a; b]$$

mezi body  $t_0 = a$  a  $t_1 = b$ . V bodech nespojitosti funkce  $\alpha$  křivku doplníme o vodorovné úsečky



Ve zbytku této podkapitoly zvolíme pevně *neklesající* váhovou funkci  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , pro kterou existuje Riemannův integrál

$$\int_a^b \alpha(t) dt$$

a definujeme jistý lineární prostor nad  $\mathbb{R}$  se skalárním součinem. Prvky tohoto lineárního prostoru budou funkce  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , pro které existuje Riemannův-Stieltjesův integrál

$$\int_a^b f(t)^2 d\alpha(t)$$

Množinu všech takových funkcí označíme  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ . V případě, kdy  $\alpha(t) = t$ , budeme psát pouze  $L^2([a; b]; \mathbb{R})$ .

Než budeme moci ukázat, že  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  je opravdu lineární prostor nad  $\mathbb{R}$  se skalárním součinem, je zapotřebí si uvědomit následující fakta:

- (1) Množina  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  obsahuje všechny funkce spojitě na intervalu  $[a; b]$ .  
Speciálně: množina  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  obsahuje všechny funkce  $p : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $p(x)$  je polynom.  
Kromě spojitých funkcí obsahuje ovšem množina  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  i řadu funkcí, které spojitě na  $[a; b]$  nejsou.
- (2) Protože prostory polynomů *nemají* konečnou dimenzi, neočekáváme, že lineární prostor  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  má konečnou dimenzi.  
Budeme se tudíž snažit úvahám o dimenzi (a bázi) prostoru  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  vyhnout a omezíme se jen na ty výsledky, které budeme v dalším opravdu potřebovat.
- (3) I se skalárním součinem v  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  budou mírné potíže: ne všechny vlastnosti „přirozeného skalárního součinu“

$$\langle f(t) | g(t) \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) d\alpha(t)$$



jsou splněny. Problémy však lze snadno vyřešit (v tomto úvodním textu budeme tyto problémy víceméně ignorovat). Proto budeme moci definovat *vzdálenost* dvou funkcí rovností

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 d\alpha(t)}$$

která evidentně zobecňuje vzdálenost dvou bodů v  $\mathbb{R}^n$  vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

**D.2.11 Tvzení (Lineární prostor  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ )** Množina  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  spolu s obvyklými operacemi součtu dvou funkcí a násobku funkce reálným číslem tvoří lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ . Navíc: součin dvou funkcí z  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  je opět funkce z  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ .

DŮKAZ. Ať  $f$  a  $g$  jsou dvě funkce z  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ . Nerovnost

$$|f(t) \cdot g(t)| \leq \frac{f(t)^2 + g(t)^2}{2}$$

spolu s rovností

$$(f(t) \pm g(t))^2 = f(t)^2 \pm 2f(t) \cdot g(t) + g(t)^2$$

ukazují, že součin dvou funkcí z  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  je opět funkce z  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  a že součet (rozdíl) dvou funkcí z  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  je opět funkce z  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ . Je-li funkce  $f$  v  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ , pak i jakýkoli skalární násobek funkce  $f$  je funkce z  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ . Na množině  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  jsou tedy definovány potřebné operace a je snadné ověřit, že spolu s těmito operacemi tvoří  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ . ■

*Pozor:* rovnost

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) d\alpha(t)$$

nezadává skalární součin na  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ .

Jediná vlastnost, která pro  $\langle - | - \rangle$  neplatí, je implikace

Jestliže  $\langle f | f \rangle = 0$ , potom  $f = 0$ .

Protipříkladem může být například situace  $[a; b] = [0; 1]$ ,  $\alpha(t) = t$  a  $f(t) = 0$  pro  $0 \leq t < 1$  a  $f(1) = 1$ . Potom  $f \neq 0$ , ale

$$\langle f | f \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot f(t) dt = 0$$

Povšimněme si, že v našem protipříkladu funkce  $f$  *není* spojitá. Právě existence nespojitých funkcí v prostorech typu  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  způsobuje možnost takového protipříkladu. V Poznámce 12.1.6 jsme pracovali pouze se *spojitými* funkcemi, a tam výše uvedený příklad zkonstruovat nemůžeme.

Lze tuto nepříjemnost vyřešit? Ano, ve výše uvedeném protipříkladu se totiž funkce  $f$  od funkce 0 „příliš neliší“. V matematické praxi se proto prostory typu  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  zavádějí jinak: prvky  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  jsou *třídy* funkcí. Do jedné třídy dáme takové funkce, které se navzájem „příliš neliší“. Přesná definice by vyžadovala vybudování pojmu *míry*. Opět odkazujeme na knihy

☞ Edwin Hewitt a Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 3. vydání, 1975.

☞ Vojtěch Jarník, *Integrovaný počet II*, Academia, 1984.

Hledejte v nich termín *rovnost skoro všude* (anglicky: *equality almost everywhere*).

V dalším budeme s rovností

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) d\alpha(t)$$

pracovat, jako by to skalární součin *opravdu byl*. Budeme mít ale na paměti, že hodnotu  $\langle f | g \rangle$  nezměníme, když funkce  $f$  a  $g$  „příliš nezměníme“ (přesněji: nezměníme na množině míry 0). Pro naše další úvahy nám bude postačovat, že  $\langle f | g \rangle$  nezměníme, když (například) hodnoty funkcí  $f$  a  $g$  *změníme v konečně mnoha bodech*, ve kterých je funkce  $\alpha$  spojitá.

Protože každý skalární součin vytváří normu, je prostor  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  *normovaný lineární prostor*. Navíc: prostor  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  je v této normě *úplný*. Tento důležitý fakt opět nebudeme dokazovat.

Pro naprosté základy teorie úplných normovaných prostorů odkazujeme na podkapitolu 13.1.

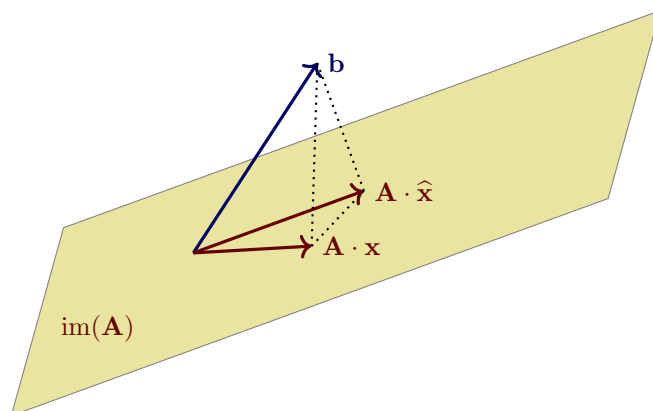
## D.3 Ortonormální systémy a abstraktní Fourierovy řady v prostoru $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$

V Tvzení C.1.1 jsme využili teorii ortogonálních projekcí a rejekcí vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v  $\mathbb{R}^n$ , k nalezení „nejlepší možné náhražky“ řešení soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

která řešení nemá.

Přesněji: pokud vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  označíme jako jediný vektor, pro který je  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$  ortogonální projekcí vektoru  $\mathbf{b}$  na podprostor  $\text{im}(\mathbf{A})$



potom pro každé  $\mathbf{x}$  platí nerovnost

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$$

Tato početní technika nás přirozeně dovedla k *interpolačním* technikám: umíme tak například konečně mnoha zadanými body v rovině proložit různé křivky, které se „nejméně liší“ od zadaných hodnot, viz podkapitolu C.2.

Nyní tuto techniku použijeme na lineární prostor  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ . Přesněji: ukážeme, že v prostoru  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  lze zvolit *ortonormální* posloupnost funkcí

$$\omega_0, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots$$

tj. posloupnost, pro kterou platí:

$$\int_a^b \omega_m(t) \cdot \omega_n(t) d\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } m = n \\ 0, & \text{pro } m \neq n \end{cases}$$

Pro každou takovou posloupnost  $\{\omega_k\}_{k=0}^{+\infty}$  funkcí pak můžeme technikami Kapitoly 12 dokázat následující tvrzení:

**D.3.1 Tvzení** Pro funkci  $x$  z  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  definujeme posloupnost reálných čísel

$$\hat{x}(k) = \langle \omega_k \mid x \rangle, \quad k = 0, 1, \dots$$

Potom platí:

- (1) Lineární kombinace

$$\sum_{k=0}^n \hat{x}(k) \cdot \omega_k$$

je ortogonální projekce funkce  $x$  na  $\text{span}(\omega_0, \dots, \omega_n)$ .

- (2) Platí nerovnost<sup>1</sup>

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\hat{x}(k))^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{D.1})$$

Speciálně: řada  $\sum_{k=0}^{+\infty} (\hat{x}(k))^2$  konverguje.

DŮKAZ.

- (1) Tvzení plyne okamžitě z Tvzení 12.4.12.

- (2) Podle části (1) je pro jakékoli  $n$  funkce

$$x - \sum_{k=0}^n \hat{x}(k) \cdot \omega_k$$

ortogonální rejkci funkce  $x$  podprostorem  $\text{span}(\omega_0, \dots, \omega_n)$ . Pro jakékoli  $n$  tedy podle Pythagorovy věty platí rovnost

$$\|x\|^2 = \|x - \sum_{k=0}^n \hat{x}(k) \cdot \omega_k\|^2 + \|\sum_{k=0}^n \hat{x}(k) \cdot \omega_k\|^2$$

a proto

$$\|\sum_{k=0}^n \hat{x}(k) \cdot \omega_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

Protože posloupnost  $\{\omega_k\}_{k=1}^{+\infty}$  je ortonormální, platí pro jakékoli  $n$ :

$$\begin{aligned} \|\sum_{k=0}^n \hat{x}(k) \cdot \omega_k\|^2 &= \langle \sum_{j=0}^n \hat{x}(j) \cdot \omega_j \mid \sum_{k=0}^n \hat{x}(k) \cdot \omega_k \rangle \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \hat{x}(j) \cdot \hat{x}(k) \cdot \langle \omega_j \mid \omega_k \rangle \\ &= \sum_{k=0}^n (\hat{x}(k))^2 \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že  $\sum_{k=0}^n (\hat{x}(k))^2 \leq \|x\|^2$ . Neklesající posloupnost  $\{\sum_{k=0}^n (\hat{x}(k))^2\}_{n=0}^{+\infty}$  je tedy shora omezená, tudíž má limitu  $\sum_{k=0}^{+\infty} (\hat{x}(k))^2$ . Nerovnost  $\sum_{k=0}^{+\infty} (\hat{x}(k))^2 \leq \|x\|^2$  plyne z předchozího. ■

**D.3.2 Definice (Fourierovy koeficienty)** Ať posloupnost  $\{\omega_k\}_{k=1}^{+\infty}$  je ortonormální v  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ . Reálnému číslu

$$\hat{x}(k) = \langle \omega_k \mid x \rangle$$

říkáme  $k$ -tý Fourierův koeficient funkce  $x$  (vzhledem k posloupnosti  $\{\omega_k\}_{k=1}^{+\infty}$ ).

<sup>1</sup>V teorii Fourierových řad se této nerovnosti říká *Besselova nerovnost*.

**D.3.3 Důsledek (Riemann-Lebesgue)** Pro jakoukoli funkci  $x$  z  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  platí rovnost

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{x}(k) = 0$$

DŮKAZ. Tvzení plyne ihned z Besselovy nerovnosti  $\sum_{k=0}^{+\infty} (\widehat{x}(k))^2 \leq \|x\|^2$ . Řada  $\sum_{k=0}^{+\infty} (\widehat{x}(k))^2$  je totiž konvergentní, a proto musí platit  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\widehat{x}(k))^2 = 0$ . Proto také  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{x}(k) = 0$ . ■

Nyní můžeme charakterisovat ty ortonormální posloupnosti funkcí  $\{\omega_k\}_{k=0}^\infty$  v prostoru  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ , které umožňují libovolnou funkci  $x$  z  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  libovolně přesně nahradit konečným součtem

$$\sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k$$

ve smyslu normy  $\| - \|$  na  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ .

**D.3.4 Tvzení** At  $\{\omega_k\}_{k=0}^\infty$  je ortonormální posloupnost funkcí v prostoru  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Jestliže  $x$  je z  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  a jestliže  $\widehat{x}(k) = 0$  pro všechna  $k$ , potom  $x$  je nulová funkce.<sup>2</sup>
- (2) Pro každou funkci  $x$  z  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - \sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k\| = 0$$

- (3) Pro každou funkci  $x$  z  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  platí rovnost

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (\widehat{x}(k))^2$$

- (4) Pro jakékoli funkce  $x, y$  z  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$  platí rovnost

$$\langle x | y \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{x}(k) \cdot \widehat{y}(k)$$

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Pro každé  $m$  a  $n$  platí rovnosti

$$\langle \omega_m | x - \sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k \rangle = \langle \omega_m | x \rangle - \sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \langle \omega_m | \omega_k \rangle = \begin{cases} 0, & \text{pro } m \leq n \\ \langle \omega_m - \omega_n | x \rangle, & \text{pro } m > n \end{cases}$$

Proto platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - \sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k\| = 0$$

Ze (2) plyne (3). Podle (2) platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - \sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k\|^2 = 0$$

Protože pro každé  $n$  platí

$$\|x - \sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k\|^2 = \|x\|^2 - \left\| \sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k \right\|^2$$

---

<sup>2</sup>Přesněji: je nulová skoro všude.

je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k \right\|^2 = \|x\|^2$$

Díky ortonormalitě platí pro každé  $n$  rovnost

$$\left\| \sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n (\hat{x}(k))^2$$

takže

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (\hat{x}(k))^2$$

Ze (3) plyne (4). Podle předpokladu platí

$$\|x + y\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (\hat{x}(k) + \hat{y}(k))^2 \quad \|x - y\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (\hat{x}(k) - \hat{y}(k))^2$$

takže platí

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} \cdot (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4} \cdot \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (\hat{x}(k) + \hat{y}(k))^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} (\hat{x}(k) - \hat{y}(k))^2 \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{x}(k) \cdot \hat{y}(k)$$

Ze (4) plyne (1) triviálně. ■

*Pozor:* podmínka (2) Tvrzení D.3.4 *neříká*, že platí rovnost

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k(t)$$

pro všechna  $t$  z intervalu  $[a; b]$ .

Tvrdíme pouze, že jakoukoli funkci  $x$  z  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  lze libovolně přesně *aproximovat* konečnými součty

$$\sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k$$

ve smyslu normy  $\| - \|$  na  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ .

To znamená: pro jakékoli  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0$  tak, že nerovnost

$$\sqrt{\int_a^b \left( x(t) - \sum_{k=0}^n \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k(t) \right)^2 d\alpha(t)} < \varepsilon$$

platí pro všechna  $n \geq n_0$ .

*Pozor:* nekonečná Fourierova řada

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k(t)$$

pro  $t$  z intervalu  $[a; b]$  vůbec nemusí konvergovat a, i když konverguje, tak rovnost

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \omega_k | x \rangle \cdot \omega_k(t)$$

pro  $t$  z  $[a; b]$  nemusí platit.

Problémy konvergence Fourierových řad jsou obecně poměrně složité a my se jim věnovat nebudeme. Viz například knihu

☞ György Alexits, *Convergence problems of orthogonal series*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961.

K otázce konvergence Fourierových řad se vrátíme v Poznámkách D.4.2 a D.5.5.

**D.3.5 Definice** Ortonormální posloupnosti funkcí  $\{\omega_k\}_{k=0}^\infty$  v prostoru  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ , která splňuje jakoukoli z ekvivalentních podmínek Tvzení D.3.4, říkáme *úplný ortonormální systém* v prostoru  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ .

## D.4 Trigonometrické polynomy

Tradičním úplným ortonormálním systémem funkcí v prostoru  $L^2([-\pi; \pi]; \mathbb{R})$  je *trigonometrický systém*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots, \quad \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots$$

kde  $n \geq 1$ . Příslušné rovnosti

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt &= 1, & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} dt &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} dt &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} dt &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin mt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} dt &= \begin{cases} 0, & \text{pro } m \neq n \\ 1, & \text{pro } m = n \end{cases} & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} dt &= \begin{cases} 0, & \text{pro } m \neq n \\ 1, & \text{pro } m = n \end{cases} \end{aligned}$$

lze snadno ověřit přímým výpočtem jednotlivých integrálů.

Pro funkci  $f$ , integrovatelnou na intervalu  $[-\pi; \pi]$ , tedy dostáváme *seznam Fourierových koeficientů*

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt, \quad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} dt, \quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} dt, \quad \text{pro } n \geq 1$$

a příslušná *Fourierova řada* má tvar

$$a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + b_n \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right)$$

Libovolnému výrazu

$$a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + b_n \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right)$$

(který obecně nemusí být částečným součtem Fourierovy řady) pak říkáme *trigonometrický polynom* (řádu  $N$ ).

Konvergence Fourierovy řady funkce je obecně velmi složitý problém. Nám se bude hodit následující věta.

**D.4.1 Věta** *Atž funkce  $f$  má na intervalu  $[-\pi; \pi]$  derivaci až na konečně mnoho bodů, kde předpokládáme existenci příslušných derivací zprava a zleva. Potom Fourierova řada konverguje v každém bodě  $t_0$  z intervalu  $[-\pi; \pi]$  a platí:*

(1) *Jestliže  $f$  je spojitá v bodě  $t_0$ , potom platí rovnost*

$$f(t_0) = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cdot \frac{\cos nt_0}{\sqrt{\pi}} + b_n \cdot \frac{\sin nt_0}{\sqrt{\pi}} \right)$$

(2) Jestliže  $t_0$  je jedním z konečně mnoha bodů nespojitosti funkce  $f$ , potom platí rovnost

$$\frac{\lim_{t \rightarrow t_0+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t)}{2} = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cdot \frac{\cos nt_0}{\sqrt{\pi}} + b_n \cdot \frac{\sin nt_0}{\sqrt{\pi}} \right)$$

**D.4.2 Poznámka (Konvergence Fourierových řad pro trigonometrické polynomy)** Obšírnou diskusi konvergence „klasických“ Fourierových řad lze najít například v následujících knihách:

- ☞ Robert E. Edwards, *Fourier series: A modern introduction*, 2 Volumes, Springer-Verlag, 1979.
- ☞ György Alexits, *Convergence problems of orthogonal series*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961.
- ☞ Antoni Zygmund, *Trigonometric series*, Warszawa-Lwów, 1935.

Dále dokážeme, že v případě, kdy je funkce  $f$  na intervalu  $[-\pi; \pi]$  sudá nebo lichá, pak je „polovina“ příslušných Fourierových koeficientů rovna 0.

**D.4.3 Lemma** Pro Fourierovy koeficienty  $a_0, a_1, b_1, \dots$  funkce  $f$  platí:

- (1) Jestliže  $f$  je na intervalu  $[-\pi; \pi]$  sudá, pak  $b_n = 0$  pro všechna  $n \geq 1$ .
- (2) Jestliže  $f$  je na intervalu  $[-\pi; \pi]$  lichá, pak  $a_n = 0$  pro všechna  $n \geq 0$ .

DŮKAZ.

- (1) Je-li  $f(-t) = f(t)$  pro všechna  $t$  z  $[-\pi; \pi]$ , pak je funkce

$$t \mapsto f(t) \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$$

na intervalu  $[-\pi; \pi]$  lichá a platí

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} dt = 0$$

- (2) Je-li  $f(-t) = -f(t)$  pro všechna  $t$  z  $[-\pi; \pi]$ , pak je funkce

$$t \mapsto f(t) \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}$$

na intervalu  $[-\pi; \pi]$  lichá a pro  $n \geq 1$  platí

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} dt = 0$$

Rovnost

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = 0$$

platí, protože funkce  $f$  je na intervalu  $[-\pi; \pi]$  lichá. ■

**D.4.4 Příklad** Rozvineme ve Fourierovu řadu funkci  $f(t) = 1$  na intervalu  $[-\pi; \pi]$ . Funkce  $f$  je sudá, podle Lemmatu D.4.3 tedy platí  $b_n = 0$  pro všechna  $n \geq 1$ . Dále pro  $n \geq 1$  platí

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} dt = \left[ \frac{\sin nt}{n\sqrt{\pi}} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

a

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \sqrt{2\pi}$$

Aproximace funkce  $f$  trigonometrickými polynomy tedy je funkce

$$a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

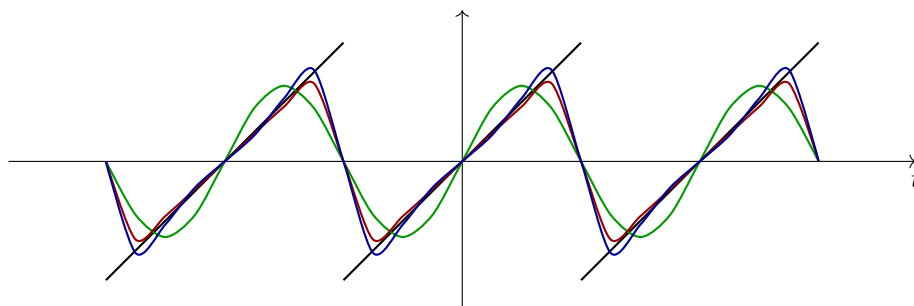
**D.4.5 Příklad** Rozvineme ve Fourierovu řadu funkci  $f(t) = t$  na intervalu  $[-\pi; \pi]$ . Funkce  $f$  je lichá, podle Lemmatu D.4.3 tedy platí  $a_n = 0$  pro všechna  $n \geq 0$ . Dále pro  $n \geq 1$  platí

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} dt = \left[ t \cdot \frac{-\cos nt}{n\sqrt{\pi}} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos nt}{n\sqrt{\pi}} dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot 2\sqrt{\pi}$$

Aproximace funkce  $f$  trigonometrickými polynomy tedy jsou funkce

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot 2\sqrt{\pi} \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot 2 \cdot \sin nt$$

Při periodickém rozšíření funkce  $f$  na celou reálnou osu dostáváme tedy následující grafy



kde jsou vyznačeny aproximace pro  $N = 1$  (zeleně),  $N = 7$  (červeně) a  $N = 10$  (modře).

Bezprostředním důsledkem Lemmatu D.4.3 a Věty D.4.1 je následující výsledek:

**D.4.6 Tvzení** *At funkce  $f$  má na intervalu  $[0; \pi]$  derivaci až na konečně mnoho bodů, kde předpokládáme existenci příslušných derivací zprava a zleva. Potom platí:*

- (1) *Rozšíříme-li  $f$  na interval  $[-\pi; \pi]$  předpisem  $f(-t) = f(t)$ , pak funkce  $f$  je sudá a má na intervalu  $[-\pi; \pi]$  derivaci až na konečně mnoho bodů, kde existují příslušné derivace zprava a zleva.*

*Potom v bodech spojitosti  $t_0$  funkce  $f$  platí:*

$$f(t_0) = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{\cos nt_0}{\sqrt{\pi}}$$

*Jestliže  $t_0$  je jedním z konečně mnoha bodů nespojitosti funkce  $f$ , potom platí rovnost*

$$\frac{\lim_{t \rightarrow t_0+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t)}{2} = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{\cos nt_0}{\sqrt{\pi}}$$



- (2) Rozšíříme-li  $f$  na interval  $[-\pi; \pi]$  předpisem  $f(-t) = -f(t)$ , pak funkce  $f$  je lichá a má na intervalu  $[-\pi; \pi]$  derivaci až na konečně mnoho bodů, kde existují příslušné derivace zprava a zleva.

Potom v bodech spojitosti  $t_0$  funkce  $f$  platí:

$$f(t_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cdot \frac{\sin nt_0}{\sqrt{\pi}}$$

Jestliže  $t_0$  je jedním z konečně mnoha bodů nespojitosti funkce  $f$ , potom platí rovnost

$$\frac{\lim_{t \rightarrow t_0+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cdot \frac{\sin nt_0}{\sqrt{\pi}}$$



**D.4.7 Poznámka (Trigonometrický systém na obecném intervalu)** Vše, co jsme řekli o úplném trigonometrickém systému na intervalu  $[-\pi; \pi]$  lze jednoduchou substitucí převést na libovolný omezený interval  $[a; b]$ . V aplikacích bývá zvykem označovat jako  $T > 0$  délku tohoto intervalu. V prostoru  $L^2([a; a+T]; \mathbb{R})$  je tedy seznam funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \frac{1}{\sqrt{T/2}} \cdot \cos(2\pi nt/T), \quad \frac{1}{\sqrt{T/2}} \cdot \sin(2\pi nt/T), \quad n \geq 1$$

úplným ortonormálním systémem.

Pro funkci  $f$  z  $L^2([a; a+T]; \mathbb{R})$  jsou Fourierovy koeficienty dány vzorci

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \int_a^{a+T} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \cdot \int_a^{a+T} f(t) \cdot \cos(2\pi nt/T) dt, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \cdot \int_a^{a+T} f(t) \cdot \sin(2\pi nt/T) dt, \quad n \geq 1$$

a příslušná Fourierova řada má tvar

$$a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cdot \frac{\cos(2\pi nt/T)}{\sqrt{T/2}} + b_n \cdot \frac{\sin(2\pi nt/T)}{\sqrt{T/2}} \right)$$

V této obecnosti je občas výhodné  $n$ -tý člen  $f_n(t)$  pro  $n \geq 1$  příslušné Fourierovy řady přepsat pomocí součtových vzorců:

$$f_n(t) = a_n \cdot \frac{\cos(2\pi nt/T)}{\sqrt{T/2}} + b_n \cdot \frac{\sin(2\pi nt/T)}{\sqrt{T/2}} = A_n \cdot \cos(2\pi nt/T - \varphi_n) = A_n \cdot \cos(\omega_n t - \varphi_n) \quad (\text{D.2})$$

kde

$$A_n = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{T/2}}, \quad \omega_n = 2\pi n/T, \quad \tan \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$$

Číslu  $A_n$  pak říkáme *amplituda*, číslu  $\omega_n$  *úhlová frekvence* a číslu  $\varphi_n$  *fázový posuv*. Viz také Příklad O.4.10.

Přikročíme nyní k problému *vzorkování* obecného signálu. Následující důležité lemma říká, že ve „všech“ signálech z praxe mají amplitudy  $A_n$  limitu 0.

#### D.4.8 Lemma (Riemann-Lebesgue) At

$$a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cdot \frac{\cos(2\pi nt/T)}{\sqrt{T/2}} + b_n \cdot \frac{\sin(2\pi nt/T)}{\sqrt{T/2}} \right)$$

je Fourierova řada po částech spojitě funkce z  $L^2([a; a+T]; \mathbb{R})$ . Potom platí (ve značení Poznámky D.4.7)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0$$

DŮKAZ. Tvzení plyne okamžitě z obecnějšího Důsledku D.3.3. ■

Podle Lemmatu D.4.8 můžeme tedy předpokládat, že (až na „nepodstatnou“ chybu) mají všechny „rozumné“ signály tvar

$$f(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

pro nějaké  $N$ , viz rovnost (D.2). Následující věta pak ukazuje, že takový signál lze *bezztrátově* digitalisovat, pokud signál vzorkujeme dostatečně často. Větu opět uvedeme bez důkazu, důkaz lze najít například v článku

☞ Claude Shannon, Communication in the presence of noise, *Proc. IRE* (1949), 10–21.

nebo v knize

☞ John G. Proakis a Dimitris G. Manolakis, *Digital signals processing: Principles, algorithms, and applications*, Prentice-Hall, 1996.

**D.4.9 Věta (Sampling Theorem — Whittaker-Shannon-Nyquist)** Předpokládejme, že platí

$$f(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

a označme jako  $\Omega = \max_n \omega_n$ . Je-li signál  $f$  vzorkován s úhlovou frekvencí  $\omega > 2\Omega$ , pak lze  $f$  přesně zrekonstruovat:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t/\omega) \cdot \frac{\sin(2\pi\Omega t - 2\pi n)}{2\pi\Omega t - 2\pi n}$$

**D.4.10 Poznámka** Číslo  $\Omega = \max_n \omega_n$  se říká *Nyquistova frekvence*. Pro řeč jde o hodnotu 3 kHz a pro televizní signál má Nyquistova frekvence hodnotu 5 MHz.

## D.5 Ortogonální polynomy, Haarovy funkce a Walshovy funkce

V této podkapitole se budeme věnovat *úplným ortonormálním systémům polynomů* v prostoru  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ , kde funkce  $\alpha$  má kladnou derivaci  $w$ . V Příkladech D.5.6 a D.5.7 ukážeme i dva další důležité příklady úplných ortonormálních systémů v prostoru  $L^2([0; 1]; \mathbb{R})$  — *Haarovy funkce* a *Walshovy funkce*.

**D.5.1 Značení** Jako

$$P_0(t), \quad P_1(t), \quad P_2(t), \dots$$

označíme posloupnost polynomů, kde  $\deg(P_n(x)) = n$  a kde platí

$$\int_a^b P_m(t) \cdot P_n(t) d\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } m \neq n \\ 1, & \text{pro } m = n \end{cases}$$

To jest: posloupnost polynomů  $P_0(t), P_1(t), P_2(t), \dots$  je *ortonormální* vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) d\alpha(t) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) \cdot w(t) dt \quad (\text{D.3})$$

na  $L_2([a; b]; \mathbb{R})$ . Dále označme

$$P_0(x) = a_{0,0}, \quad P_1(x) = a_{1,1}x + a_{1,0}, \quad \dots, \quad P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,0}, \quad \dots$$

a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $a_{n,n} > 0$  pro všechna  $n$ .

Volbou váhových funkcí  $\alpha'(t)$  dostaneme následující řadu zajímavých tříd polynomů, které se objevují v inženýrské praxi:

| $a$ | $b$ | $\alpha'(t) = w(t)$                                | Název třídy polynomů                                 |
|-----|-----|--|--|
| -1  | 1   | 1  | Legendrovy polynomy, viz Příklady 12.4.17 a D.5.2    |
| -1  | 1   | $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$                           | Čebyševovy polynomy prvního druhu, viz Příklad D.5.3 |
| -1  | 1   | $\sqrt{1-t^2}$                                     | Čebyševovy polynomy druhého druhu, viz Příklad D.5.4 |
| -1  | 1   | $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta, \alpha > -1, \beta > -1$ | Jacobiho polynomy                                    |

Nebudte překvapeni, pokud v literatuře naleznete mírně *jiné* vzorce pro Legendrovy polynomy, Čebyševovy polynomy, atd. Často se totiž u polynomů používá následující konvence:

Koeficient u nejvyšší mocniny polynomu je roven 1.

My použijeme konvenci:

Koeficient u nejvyšší mocniny polynomu je kladný a norma polynomu je rovna 1.

**D.5.2 Příklad (Legendrovy polynomy)** Legendrovy polynomy jsme již potkali v Příkladu 12.4.17. V Příkladu 12.4.17 jsme ovšem pracovali pouze s *ortogonálním* systémem, nikoli *ortonormálním*. Podle definice pracujeme se skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

na lineárním prostoru  $L^2([-1; 1]; \mathbb{R})$ . Lze snadno ukázat, že norma Legendrova polynomu  $n$ -tého stupně z Příkladu 12.4.17 je  $\sqrt{2/(2n+1)}$ . Pro posloupnost *normalizovaných* Legendrových polynomů

$$L_0(t), \quad L_1(t), \quad L_2(t), \quad L_3(t), \quad \dots$$

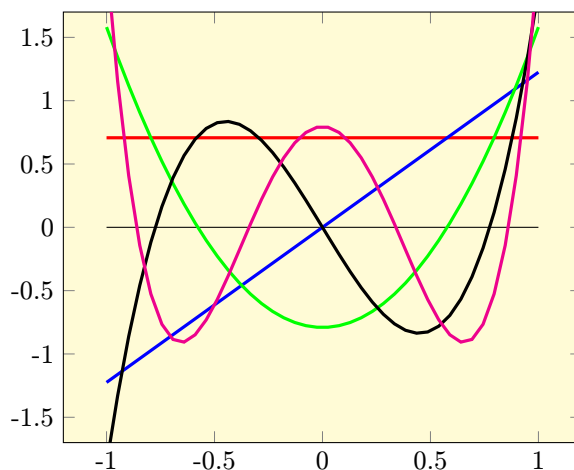
tedy platí

$$L_0(t) = \sqrt{1/2}, \quad L_1(t) = \sqrt{3/2} \cdot t, \quad L_2(t) = \sqrt{5/2} \cdot \left( \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right), \quad L_3(t) = \sqrt{7/2} \cdot \left( \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right), \quad \dots$$

Obecně:

$$L_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1}{n! \cdot 2^n} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

Grafy prvních čtyř Legendrových polynomů jsou vyznačeny v následujícím obrázku



**D.5.3 Příklad (Čebyševovy polynomy prvního druhu)** Čebyševovy polynomy prvního druhu vznikají ortonormalisací systému  $1, t, t^2, t^3, \dots$ , vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

na lineárním prostoru  $L^2([-1; 1]; \mathbb{R})$ .

Lze ukázat, že pro posloupnost  $T_0, T_1, \dots$  Čebyševových polynomů prvního druhu platí

$$T_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos(n \cdot \arccos t), \quad \text{pro } n \geq 1$$

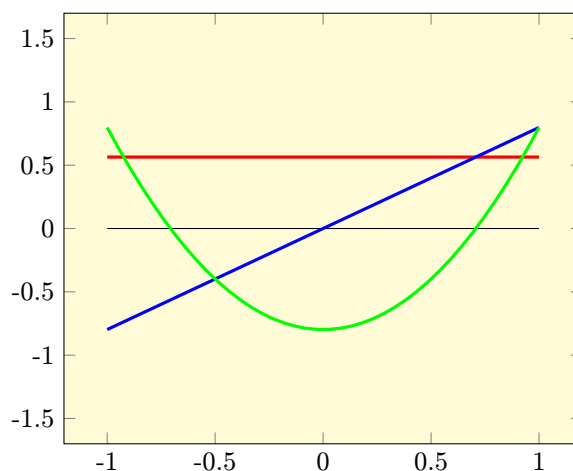
Čebyševovy polynomy prvního druhu jsou opravdu polynomy; to plyne ze součtového vzorce

$$\cos(n\vartheta) = 2^{n-1} \cdot \cos^n \vartheta + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \cdot \cos^k \vartheta$$

kde  $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$  jsou reálné konstanty. Platí tedy například:

$$T_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos(1 \cdot \arccos t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot t, \quad T_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos(2 \cdot \arccos t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot (2 \cos^2(\arccos t) - 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot (2t^2 - 1)$$

Grafy polynomů  $T_0, T_1$  a  $T_2$  jsou vyznačeny v následujícím obrázku:



**D.5.4 Příklad (Čebyševovy polynomy druhého druhu)** Čebyševovy polynomy druhého druhu vznikají ortonormalisací systému  $1, t, t^2, t^3, \dots$ , vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) \cdot \sqrt{1-t^2} dt$$

na lineárním prostoru  $L^2([-1; 1]; \mathbb{R})$ .

Lze ukázat, že pro posloupnost  $U_0, U_1, \dots$  Čebyševových polynomů druhého druhu platí

$$U_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{T_{n+2}(t) - T_n(t)}{1-t^2}, \quad \text{pro } n \geq 0$$

kde  $T_n$  jsou Čebyševovy polynomy prvního druhu.

Celou teorii Riemannova-Stieltjesova integrálu a ortogonálních polynomů lze rozšířit na *neomezené* intervaly reálných čísel. Pro různé volby váhové funkce  $\alpha'(t)$  tak obdržíme další třídy ortogonálních polynomů.

| $a$       | $b$       | $\alpha'(t) = w(t)$ | Název třídy polynomů          |
|-----------|-----------|---------------------|-------------------------------|
| 0         | $+\infty$ | $e^{-t}$            | Laguerrovy polynomy           |
| 0         | $+\infty$ | $t^\alpha e^{-t}$   | zobecněné Laguerrovy polynomy |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $e^{-t^2}$          | Hermiteovy polynomy           |

Ortogonalní polynomy jsou důležité v řadě partií matematiky. Více se o nich lze dočíst například v knihách

- ☞ Stefan Kaczmarz a Hugo Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie matematyczne, Warszawa, 1935.
- ☞ Vojtěch Jarník, *Integrální počet II*, Academia, 1984.
- ☞ Gabor Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc., 1975.
- ☞ Francesco G. Tricomi, *Vorlesungen über Orthogonalreihen*, Springer-Verlag, 1955.

My systémy ortogonálních polynomů využijeme v podkapitole D.6 pro konstrukci *diskrétních* verzí Fourierovy transformace.

**D.5.5 Poznámka (Konvergence Fourierových řad pro systémy polynomů)** Otázka konvergence Fourierových řad pro úplné ortonormální systémy polynomů v  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  je obšírně diskutována například v knize

- ☞ György Alexits, *Convergence problems of orthogonal series*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961.

Tuto podkapitolu zakončíme přehledem dvou dalších úplných systémů funkcí v prostoru  $L^2([0; 1]; \mathbb{R})$ , které se v praxi používají.

**D.5.6 Příklad (Haarovy funkce)** Následující úplný ortonormální systém funkcí vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

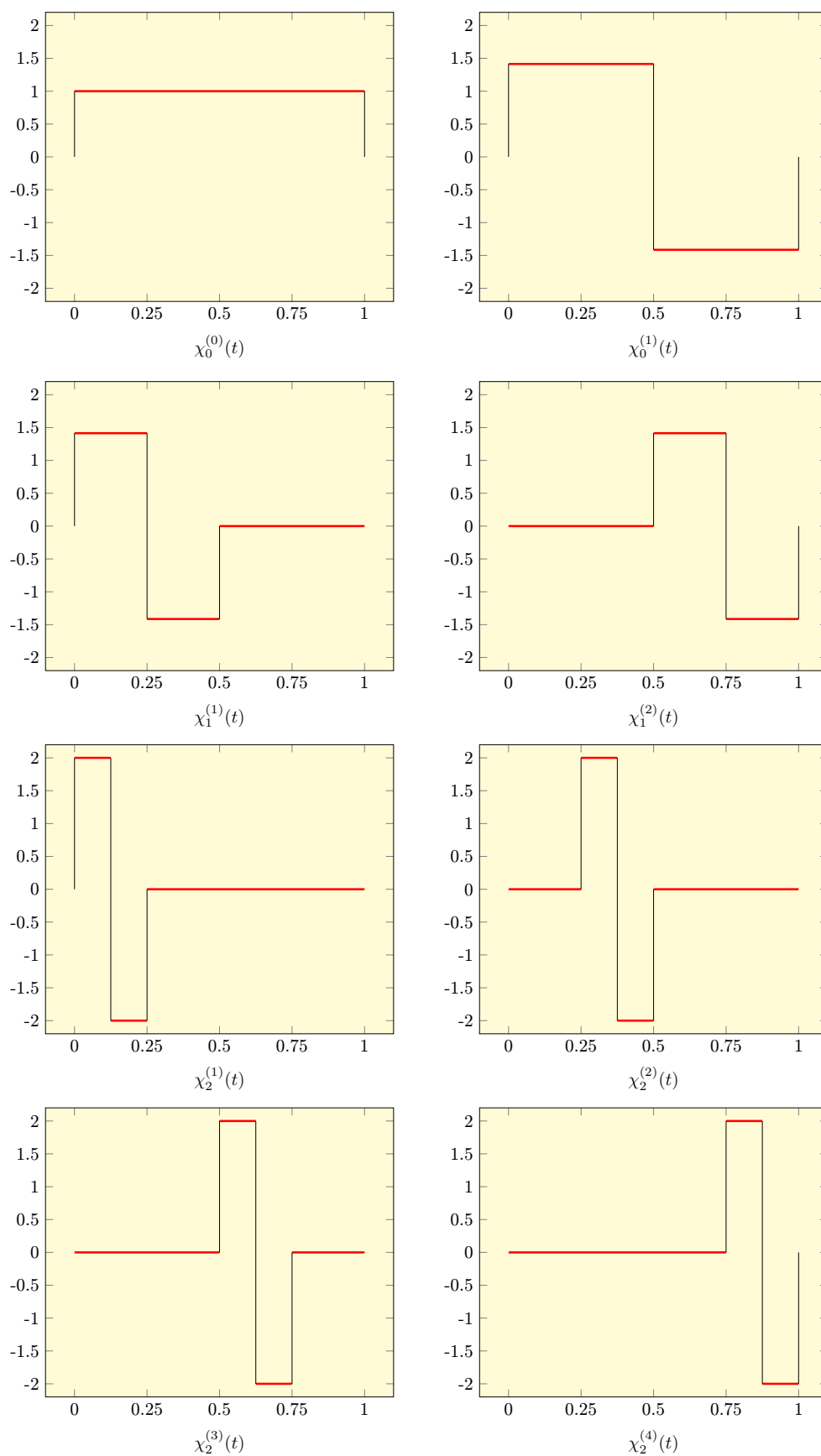
popsal Alfréd Haar v roce 1910 v práci

- ☞ Alfréd Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme I, *Math. Ann.* 69 (1910), 331–371.

Dnes se tomuto systému říká *Haarovy funkce* a jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} \chi_0^{(0)}(t) &= 1 \\ \chi_0^{(1)} &= \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{pro } t \in [0; 1/4) \\ -\sqrt{2}, & \text{pro } t \in (3/4; 1] \\ 0, & \text{jinde} \end{cases} \\ \chi_n^{(1)}(t) &= \sqrt{2^n}, \\ \chi_n^{(k)}(t) &= \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \text{pro } t \in [\frac{2k-2}{2^{n+1}}; \frac{2k-1}{2^{n+1}}) \\ -\sqrt{2^n}, & \text{pro } t \in (\frac{2k-1}{2^{n+1}}; \frac{2k}{2^{n+1}}] \\ 0, & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{pro } k = 2, \dots, 2^n - 1 \\ \chi_n^{(2^n)}(t) &= -\sqrt{2^n} \end{aligned}$$

Grafy prvních osmi Haarových funkcí jsou následující:



Fourierově transformaci pro systém Haarových funkcí se říká *Haarova transformace*.

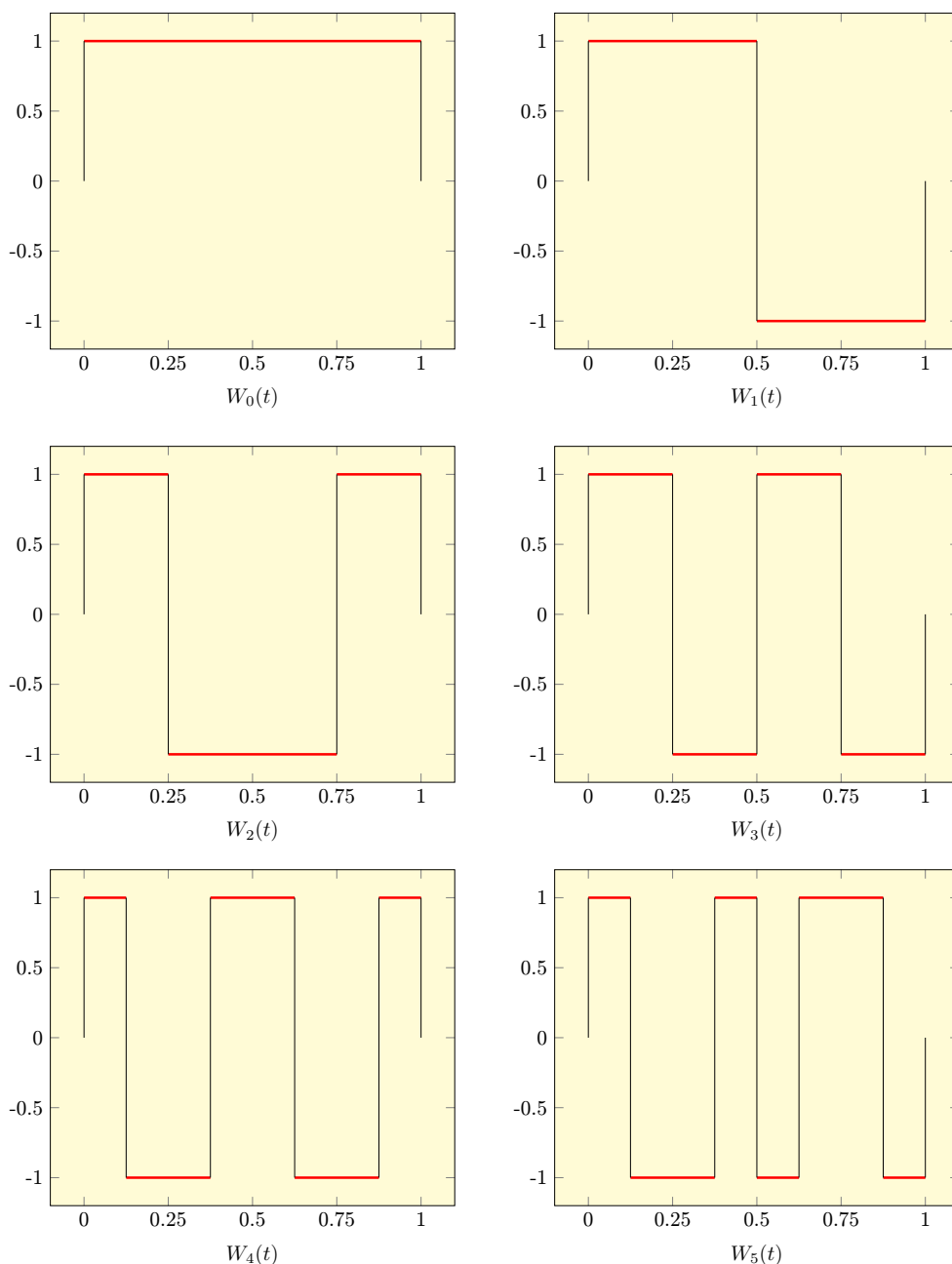
**D.5.7 Příklad (Walshovy funkce)** Další úplný ortonormální systém vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

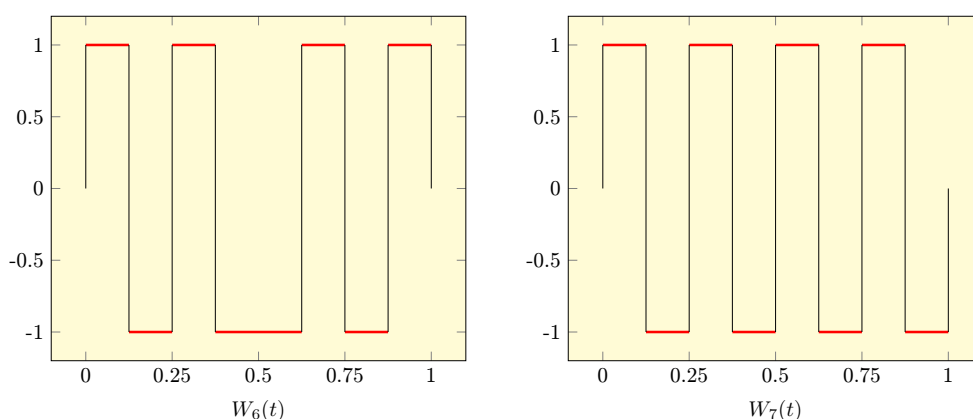
je systém<sup>3</sup> *Walshových funkcí* z článku

☞ J. L. Walsh, A closed set of normal orthogonal functions, *Amer. J. Math.* 45 (1923), 5–24.

Grafy prvních osmi Walshových funkcí jsou následující:



<sup>3</sup>Používáme původní, takzvané *Walshovo*, uspořádání Walshových funkcí. Ještě se používají *dyadické* (také: *Paleyho*) nebo *přirozené* (také: *Hadamardovo*) uspořádání. Více viz například knihu N. Ahmed a K. Ramamohan Rao, *Orthogonal transforms for digital signal processing*, Springer-Verlag, 1975.



Fourierově transformaci pro systém Walshových funkcí  $\{W_n\}_{n=0}^{+\infty}$  se říká *Walshova transformace*.

## D.6 Gaussova-Jacobiho transformace, DFT a DCT

V této podkapitole předvedeme tvorbu *diskrétních ortogonálních transformací* založenou na myšlenkách úplných ortonormálních systémů polynomů v prostoru  $L^2_\alpha([a; b]; \mathbb{R})$ . Hlavní myšlenka postupu pochází z článku

☞ Yechiam Yemini a Judea Pearl, Asymptotic properties of discrete unitary transforms, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence* 4 (1979), 366–371.

a využívá důležitou vlastnost úplného systému polynomů v prostorech  $L^2_\alpha([a; b], \mathbb{R})$ . Odvodíme tak nejprve obecnou diskrétní *Gaussovu-Jacobiho transformaci* a poté — jako speciální případy — i *diskrétní Fourierovu transformaci* (také: *DFT*) a *diskrétní kosinovou transformaci* (také: *DCT*).

Začneme jednoduchým pozorováním: předpokládejme, že je zadána funkce<sup>4</sup>

$$\mathbf{f} : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

a vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

z  $\mathbb{R}^n$ . Chceme nyní využít funkci  $\mathbf{f} : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  k nalezení funkce  $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , která je v bodech  $t_j$  „co nejméně vzdálena“ od jednotlivých položek  $x_j$  vektoru  $\mathbf{x}$ . Nabízí se následující myšlenka:

Utvořme matici

$$\mathbf{F} = (\mathbf{f}(t_0), \dots, \mathbf{f}(t_{n-1}))$$

a funkci  $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$  hledejme ve tvaru

$$f(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{f}(t) = \langle \mathbf{c} \mid \mathbf{f}(t) \rangle$$

Pak totiž

$$f(t_j) = \langle \mathbf{c} \mid \mathbf{f}(t_j) \rangle = \langle \mathbf{c} \mid \mathbf{F} \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{F}^T \mathbf{c} \mid \mathbf{e}_j \rangle$$

a nebude-li  $\mathbf{F}^T \mathbf{c}$  „příliš daleko“ od  $\mathbf{x}$ , bude platit

$$f(t_j) \approx \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{e}_j \rangle = x_j$$

<sup>4</sup>V této podkapitole bude výhodné indexovat položky vektorů z  $\mathbb{R}^n$  od 0 do  $n - 1$ , viz Poznámku 1.1.7.



To znamená, že budeme hledat řešení soustavy

$$\mathbf{F}^T \mathbf{c} = \mathbf{x}$$

metodou nejmenších čtverců. Zformulujeme nyní naše úvahy jako jednoduché, ale velmi užitečné, tvrzení o *ortogonální aproximaci*.

**D.6.1 Tvrzení (Ortogonální interpolace a aproximace)** *At  $\mathbf{f} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  je jakákoli funkce a at  $\mathbf{x}$  je jakýkoli vektor z  $\mathbb{R}^n$ . Předpokládejme, že pro navzájem různá  $t_0, \dots, t_{n-1}$  je matice*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{f}(t_0), \dots, \mathbf{f}(t_{n-1}))$$

*ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu  $\langle - | - \rangle$  v  $\mathbb{R}^n$ , tj., at platí  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^T$ . Potom platí:*

- (1) *Definujeme-li  $\mathbf{c} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ , pak funkce*

$$f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle \mathbf{c} | \mathbf{f}(t) \rangle$$

*splňuje rovnosti  $f(t_0) = x_0, \dots, f(t_{n-1}) = x_{n-1}$ . To znamená: funkce  $t \mapsto \langle \mathbf{F}\mathbf{x} | \mathbf{f}(t) \rangle$  interpoluje hodnoty  $t_j \mapsto x_j$  pro  $j = 0, \dots, n-1$ .*

- (2) *Označme jako  $\mathbf{P}_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  matici se sloupcovým zápisem  $(\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{o}, \dots, \mathbf{o})$ , kde  $1 \leq k \leq n-1$ . Označme jako  $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{P}_k \mathbf{F}\mathbf{x}$ . Potom funkce*

$$f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle \mathbf{P}_k^T \hat{\mathbf{c}} | \mathbf{f}(t) \rangle$$

*aproximuje hodnoty  $t_j \mapsto x_j$  pro  $j = 0, \dots, n-1$  metodou nejmenších čtverců.*

DŮKAZ.

- (1) Protože  $\mathbf{F}^T = \mathbf{F}^{-1}$ , platí rovnosti

$$f(t_j) = \langle \mathbf{F}\mathbf{x} | \mathbf{f}(t_j) \rangle = \langle \mathbf{F}\mathbf{x} | \mathbf{F}\mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{e}_j \rangle = x_j$$

pro všechna  $j = 0, \dots, n-1$ .

- (2) Platí rovnost

$$\hat{\mathbf{c}} = \underbrace{\mathbf{P}_k \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{P}_k^T}_{=\mathbf{E}_k} \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{P}_k \mathbf{F}\mathbf{x}$$

kde jsme využili toho, že  $\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{E}_n$  a  $\mathbf{P}_k \mathbf{P}_k^T = \mathbf{E}_k$ . Protože matice  $\mathbf{F}^T \mathbf{P}_k^T$  má evidentně  $k$  lineárně nezávislých sloupců (jde o prvních  $k$  lineárně nezávislých řádků matice  $\mathbf{F}$ ), je  $\hat{\mathbf{c}}$  (jediné) řešení soustavy  $\mathbf{F}^T \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} = \mathbf{x}$  metodou nejmenších čtverců. Protože  $\mathbf{F}^T = \mathbf{F}^{-1}$ , je  $\hat{\mathbf{c}}$  také jediným řešením soustavy  $\mathbf{P}_k^T \mathbf{c} = \mathbf{F}\mathbf{x}$  metodou nejmenších čtverců.

Tudíž platí nerovnost

$$\|\mathbf{P}_k^T \hat{\mathbf{c}} - \mathbf{F}\mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{P}_k^T \mathbf{c} - \mathbf{F}\mathbf{x}\|^2$$

pro jakékoli  $\mathbf{c}$  z  $\mathbb{R}^k$ . Pro jakékoli  $\mathbf{c}$  z  $\mathbb{R}^k$  ovšem platí

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_k^T \mathbf{c} - \mathbf{F}\mathbf{x}\|^2 &= \langle \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} | \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} \rangle - 2 \underbrace{\langle \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} | \mathbf{F}\mathbf{x} \rangle}_{=\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} + \langle \mathbf{F}\mathbf{x} | \mathbf{F}\mathbf{x} \rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \langle \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} | \mathbf{f}(t_j) \rangle \cdot \langle \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} | \mathbf{f}(t_j) \rangle - 2 \sum_{j=0}^{n-1} \langle \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} | \mathbf{F}\mathbf{e}_j \rangle \cdot \langle \mathbf{x} | \mathbf{e}_j \rangle + \sum_{j=0}^{n-1} \langle \mathbf{x} | \mathbf{e}_j \rangle \cdot \langle \mathbf{x} | \mathbf{e}_j \rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \langle \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} | \mathbf{f}(t_j) \rangle \cdot \langle \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} | \mathbf{f}(t_j) \rangle - 2 \sum_{j=0}^{n-1} \langle \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} | \mathbf{f}(t_j) \rangle \cdot \langle \mathbf{x} | \mathbf{e}_j \rangle + \sum_{j=0}^{n-1} \langle \mathbf{x} | \mathbf{e}_j \rangle \cdot \langle \mathbf{x} | \mathbf{e}_j \rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (\langle \mathbf{P}_k^T \mathbf{c} | \mathbf{f}(t_j) \rangle - x_j)^2 \end{aligned}$$

protože sloupce matic  $\mathbf{F}$  a  $(\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$  tvoří ortonormální báze prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

Důkaz je u konce. ■

Problémem nyní je nalézt „dost“ vhodných ortogonálních matic tvaru

$$\mathbf{F} = (\mathbf{f}(t_0), \dots, \mathbf{f}(t_{n-1}))$$

pro nějakou funkci

$$\mathbf{f} : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Ukazuje se, že je vhodné zvolit za funkce  $f_0, \dots, f_{n-1}$  prvních  $n$  funkcí *úplného ortonormálního systému* z prostoru  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ .

### Jak budeme postupovat dále?

- (1) Využijeme Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces na množinu polynomů  $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$  v lineárním prostoru  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  se skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) \, d\alpha(t) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) \cdot \alpha'(t) \, dt$$

z podkapitoly **D.3**.

Po ortonormalisaci získáme posloupnost polynomů

$$\{P_0(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t), \dots\}$$

- (2) Ukážeme, že každý polynom  $P_n(t)$  má přesně  $n$  různých kořenů  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$  *uvnitř* intervalu  $[a; b]$ .
- (3) Ukážeme, že sloupce čtvercové matice

$$\begin{pmatrix} P_0(\lambda_0) & P_0(\lambda_1) & \dots & P_0(\lambda_{n-1}) \\ P_1(\lambda_0) & P_1(\lambda_1) & \dots & P_1(\lambda_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n-1}(\lambda_0) & P_{n-1}(\lambda_1) & \dots & P_{n-1}(\lambda_{n-1}) \end{pmatrix}$$

tvoří ortogonální bázi prostoru  $\mathbb{R}^n$  se standardním skalárním součinem. Jde totiž o matici vlastních vektorů jisté čtvercové symetrické matice.

- (4) Normalisací sloupců matice

$$\begin{pmatrix} P_0(\lambda_0) & P_0(\lambda_1) & \dots & P_0(\lambda_{n-1}) \\ P_1(\lambda_0) & P_1(\lambda_1) & \dots & P_1(\lambda_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n-1}(\lambda_0) & P_{n-1}(\lambda_1) & \dots & P_{n-1}(\lambda_{n-1}) \end{pmatrix}$$

pak získáme *ortonormální* matici.

- (5) Vhodnými volbami váhové funkce  $\alpha : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$  pak získáme zajímavé ortogonální matice, které se používají v praxi.

Náš program zahájíme následující důležitou větou, která platí pro úplné ortonormální systémy polynomů na *uzavřeném a omezeném* intervalu  $[a; b]$ .

**D.6.2 Věta** *Até  $\{P_n(t)\}_{n=0}^{+\infty}$  je úplný ortonormální systém polynomů v  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ . Potom platí:*

- (1) Pro jakékoli  $n \geq 0$  a jakýkoli polynom  $Q(t)$  stupně menšího než  $n$  platí rovnost  $\langle P_n | Q \rangle = 0$ .  
 (2) Pro  $n \geq 1$  platí rekurentní rovnice

$$P_{n+1}(t) = (A_n t + B_n) \cdot P_n(t) - C_n \cdot P_{n-1}(t) \quad (\text{D.4})$$

kde

$$A_n = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \quad B_n = A_n \cdot \left( \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} \right), \quad C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

Pokud definujeme  $P_{-1}(t) = 0$ , pak platí

$$P_1(t) = a_{1,1}t + a_{1,0} = a_{0,0} \cdot \left( \frac{a_{1,1}}{a_{0,0}}t + \frac{a_{1,0}}{a_{0,0}} \right) = (A_0 t + B_0) \cdot P_0(t)$$

- (3) Polynom  $P_n(t)$  má přesně  $n$  různých reálných kořenů v otevřeném intervalu  $(a; b)$ .

DŮKAZ.

- (1) Označme  $m = \deg(P(t))$ . Protože  $(P_0(t), \dots, P_m(t))$  je ortonormální báze prostoru všech polynomů stupně nanejvýš  $m$ , platí rovnost

$$Q(t) = \sum_{k=0}^m \langle P_k | Q \rangle \cdot P_k(t)$$

Potom platí i rovnost

$$\langle P_n | Q \rangle = \sum_{k=0}^m \langle P_k | Q \rangle \cdot \underbrace{\langle P_k | P_n \rangle}_{=0} = 0$$

- (2) Pokud definujeme  $P_{-1}(t) = 0$ , pak platí

$$P_1(t) = a_{1,1}t + a_{1,0} = a_{0,0} \cdot \left( \frac{a_{1,1}}{a_{0,0}}t + \frac{a_{1,0}}{a_{0,0}} \right) = (A_0 t + B_0) \cdot P_0(t)$$

Ať  $n \geq 1$ . Potom polynom  $P_{n+1}(t) - A_n \cdot t \cdot P_n(t)$  má stupeň nejvýše  $n$ . Tudíž platí rovnost

$$P_{n+1}(t) - A_n \cdot t \cdot P_n(t) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\langle P_{n+1} - A_n \cdot t \cdot P_n | P_k \rangle}{\|P_k\|^2}}_{=\gamma_k} \cdot P_k(t)$$

protože  $(P_0(t), \dots, P_n(t))$  je ortonormální báze prostoru všech polynomů stupně nanejvýš  $n$ .

Podle části (1) tohoto důkazu platí

$$0 = \langle P_{n+1} - A_n \cdot t \cdot P_n | P_k \rangle$$

pro všechna  $k = 0, \dots, n-2$ . Tudíž  $\gamma_k = 0$  pro všechna  $k = 0, \dots, n-2$ . Platí tedy

$$P_{n+1}(t) - A_n \cdot t \cdot P_n(t) = \gamma_{n-1} \cdot P_{n-1}(t) + \gamma_n \cdot P_n(t)$$

Ukážeme, že  $\gamma_n = B_n$  a  $\gamma_{n-1} = -C_n$ .

- (a) Porovnáním koeficientů u  $t^n$  v rovnosti

$$P_{n+1}(t) - A_n \cdot t \cdot P_n(t) = \gamma_{n-1} \cdot P_{n-1}(t) + \gamma_n \cdot P_n(t)$$

dostaneme

$$a_{n+1,n} - A_n \cdot a_{n,n-1} = \gamma_n \cdot a_{n,n}$$

neboli

$$\gamma_n = \frac{a_{n+1,n} - A_n \cdot a_{n,n-1}}{a_{n,n}} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \cdot \left( \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} \right) = A_n \cdot \left( \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} \right) = B_n$$

(b) Víme již, že platí rovnost

$$-\gamma_{n-1} \cdot P_{n-1}(t) = -P_{n+1}(t) + (A_n \cdot t + B_n) \cdot P_n(t)$$

Vynásobíme-li tuto rovnost skalárně polynomem  $P_{n-1}(t)$ , dostaneme

$$\begin{aligned} -\gamma_{n-1} \cdot \langle P_{n-1} | P_{n-1} \rangle &= -\gamma_{n-1} \cdot \|P_{n-1}\|^2 \\ &= -\underbrace{\langle P_{n+1} | P_{n-1} \rangle}_{=0} \\ &\quad + \langle A_n \cdot t \cdot P_n | P_{n-1} \rangle \\ &\quad + \underbrace{\langle B_n \cdot P_n | P_{n-1} \rangle}_{=0} \\ &= \langle A_n \cdot t \cdot P_n | P_{n-1} \rangle \\ &\stackrel{\text{(D.3)}}{=} A_n \cdot \langle P_n | t \cdot P_{n-1} \rangle \\ &\stackrel{\text{část (1)}}{=} A_n \cdot \langle P_n | a_{n-1,n-1} \cdot t^n \rangle \\ &= A_n \cdot a_{n-1,n-1} \cdot \langle P_n | \frac{a_{n,n}}{a_{n,n}} \cdot t^n \rangle \\ &= A_n \cdot \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \cdot \langle P_n | a_{n,n} \cdot t^n \rangle \\ &\stackrel{\text{část (1)}}{=} A_n \cdot \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \cdot \langle P_n | P_n \rangle \\ &= A_n \cdot \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \cdot \|P_n\|^2 \end{aligned}$$

To znamená, že

$$-\gamma_{n-1} = A_n \cdot \frac{a_{n-1,n-1} \cdot \|P_n\|^2}{a_{n,n} \cdot \|P_{n-1}\|^2} = \frac{A_n \cdot \|P_n\|^2}{A_{n-1} \cdot \|P_{n-1}\|^2} = \frac{A_n}{A_{n-1}} = C_n$$

(3) Polynom  $P_0(t)$  je nenulový a tudíž má na intervalu  $(a; b)$  přesně 0 různých kořenů. Ať  $n \geq 1$ . Potom podle části (1) platí

$$0 = \langle P_n | 1 \rangle = \int_a^b P_n(t) \cdot \alpha'(t) dx$$

a proto  $P_n(t)$  má v intervalu  $(a; b)$  alespoň jeden kořen. Předpokládejme, že  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  jsou všechny kořeny polynomu  $P_n(t)$  v intervalu  $(a; b)$  a že platí  $m < n$ . Pro polynom

$$Q(t) = (t - \lambda_1) \cdot (t - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_m)$$

pak platí, že součin

$$Q(t) \cdot P_n(t)$$

je buď  $\geq 0$  nebo  $\leq 0$  na celém intervalu  $(a; b)$ . To znamená, že

$$\langle Q | P_n \rangle = \int_a^b Q(t) \cdot P_n(t) \cdot \alpha'(t) dt \neq 0$$

a to je spor. Polynom  $P_n(t)$  má na intervalu  $(a; b)$  přesně  $n$  různých kořenů  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . ■

**D.6.3 Důsledek** Označme jako  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$  kořeny polynomu  $P_n(t)$  v intervalu  $(a; b)$ . Potom sloupce matice

$$\begin{pmatrix} P_0(\lambda_0) & P_0(\lambda_1) & \dots & P_0(\lambda_{n-1}) \\ P_1(\lambda_0) & P_1(\lambda_1) & \dots & P_1(\lambda_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n-1}(\lambda_0) & P_{n-1}(\lambda_1) & \dots & P_{n-1}(\lambda_{n-1}) \end{pmatrix}$$

tvoří ortogonální bázi prostoru  $\mathbb{R}^n$  vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

DŮKAZ. Předpokládáme, že platí  $\|P_n(t)\| = 1$  pro všechna  $n \geq 0$ . Využijeme rovnosti (D.4):

$$C_n \cdot P_{n-1}(t) + (-B_n - A_n t) \cdot P_n(t) + P_{n+1}(t) = 0$$

kde

$$A_n = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \quad B_n = A_n \cdot \left( \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} \right), \quad C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

pro všechna  $n \geq 1$ .

Vydělením číslem  $A_n$  tedy dostáváme rovnosti

$$\underbrace{\frac{C_n}{A_n}}_{=\frac{1}{A_{n-1}}} \cdot P_{n-1}(t) + \left( -\frac{B_n}{A_n} - t \right) \cdot P_n(t) + \frac{1}{A_n} \cdot P_{n+1}(t) = 0$$

pro všechna  $n \geq 1$ .

Pro pevné  $n \geq 1$  lze tedy psát soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (\alpha_0 - t)P_0(t) + \beta_0 P_1(t) &= 0 \\ \beta_0 P_0(t) + (\alpha_1 - t)P_1(t) + \beta_1 P_2(t) &= 0 \\ \beta_1 P_1(t) + (\alpha_2 - t)P_2(t) + \beta_2 P_3(t) &= 0 \\ &\vdots \\ \beta_{n-2} P_{n-2}(t) + (\alpha_{n-1} - t)P_{n-1}(t) + \beta_{n-1} P_n(t) &= 0 \end{aligned}$$

kde (ve značení části (2) tohoto tvrzení) je pro  $1 \leq k \leq n-1$

$$\alpha_k = -\frac{B_k}{A_k} \quad \beta_k = \frac{1}{A_k}$$

Pro jakýkoli kořen  $\lambda_k$  polynomu  $P_n(t)$  je vektor

$$\begin{pmatrix} P_0(\lambda_k) \\ P_1(\lambda_k) \\ \vdots \\ P_{n-1}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

nenulovým řešením této soustavy. To znamená, že vektor

$$\begin{pmatrix} P_0(\lambda_k) \\ P_1(\lambda_k) \\ \vdots \\ P_{n-1}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

vlastním vektorem symetrické matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{n-2} & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

■

**D.6.4 Poznámka (Lagrangeova interpolace v  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ )** V Příkladu 3.3.9 a Důsledku C.2.7 jsme mluvili o *Lagrangeově interpolaci* v prostoru  $C([a; b]; \mathbb{R})$  se skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(s) \cdot g(s) \, ds$$

Pochopitelně, o Lagrangeově interpolaci můžeme mluvit i v prostoru  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ , vybaveném skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(s) \cdot g(s) \, d\alpha(s)$$

kde váhová funkce má na  $[a; b]$  kladnou spojitou derivaci. Přesněji: pokud je  $\{P_n(t)\}_{n=0}^{+\infty}$  ortonormální systém polynomů v  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$ , pak *Lagrangeova interpolace stupně  $n$*  funkce  $f$  z  $L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R})$  je lineární kombinace

$$\sum_{i=0}^n f(\lambda_{i,n+1}) \cdot L_{i,n+1}(t)$$

kde

$$L_{i,n+1}(t) = \frac{P_{n+1}(t)}{(t - \lambda_{i,n+1}) \frac{d}{dt} P_{n+1}(\lambda_{i,n+1})}, \quad \text{pro } t \neq \lambda_{i,n+1}$$

a kde

$$\lambda_{0,n+1} < \lambda_{1,n+1} < \dots < \lambda_{n,n+1}$$

jsou kořeny polynomu  $P_{n+1}(t)$  v intervalu  $(a; b)$ ,  $n \geq 0$ .

Pro každou *bázickou funkci*  $L_{i,n+1}(t)$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \lambda_{i,n+1}} L_{i,n+1}(t) = 1$$

Proto lze  $L_{i,n+1}$  dodefinovat na *spojitou funkci* tak, aby platilo

$$L_{i,n+1}(\lambda_{j,n+1}) = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j \\ 0, & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

**D.6.5 Věta (Gaussova-Jacobiho kvadratura)** Ať funkce  $\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  má na intervalu  $[a; b]$  kladnou spojitou derivaci. Označme jako  $\lambda_{0,n} < \lambda_{1,n} < \dots < \lambda_{n-1,n}$  kořeny polynomu  $P_n(t)$  v intervalu  $(a; b)$ ,  $n \geq 1$ . Potom existují nezáporná reálná čísla  $A_{0,n}, A_{1,n}, \dots, A_{n-1,n}$  tak, že platí:

$$(1) \quad \sum_{i=0}^{n-1} A_{i,n} = \int_a^b d\alpha(s).$$

$$(2) \quad \text{Pro jakoukoli funkci } f \text{ z } L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R}) \text{ označme } \mathcal{Q}_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} A_{i,n} \cdot f(\lambda_{i,n}). \text{ Potom:}$$

$$(a) \quad \text{Platí rovnost } \mathcal{Q}_n(P) = \int_a^b P(s) \, d\alpha(s), \text{ pro jakýkoli polynom stupně nanejvýš } 2n - 1.$$

$$(b) \quad \text{Platí rovnost } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{Q}_n(f) = \int_a^b P(s) \, d\alpha(s), \text{ pro jakoukoli funkci } f \text{ z } L_\alpha^2([a; b]; \mathbb{R}).$$

**DŮKAZ.** Ať  $P(t)$  je jakýkoli polynom stupně maximálně  $2n - 1$ . Označme jako  $L(t)$  Lagrangeův interpolační polynom stupně  $n - 1$  pro polynom  $P(t)$  a hodnoty

$$\left( \begin{smallmatrix} \lambda_{0,n} \\ P(\lambda_{0,n}) \end{smallmatrix} \right), \quad \left( \begin{smallmatrix} \lambda_{1,n} \\ P(\lambda_{1,n}) \end{smallmatrix} \right), \quad \dots, \quad \left( \begin{smallmatrix} \lambda_{n-1,n} \\ P(\lambda_{n-1,n}) \end{smallmatrix} \right)$$

Platí

$$L(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P(\lambda_{i,n}) \cdot L_{i,n}(t), \quad \text{kde} \quad L_{i,n}(t) = \frac{P_n(t)}{(t - \lambda_{i,n}) \frac{d}{dt} P_n(\lambda_{i,n})}$$

viz Poznámku D.6.4. Protože rozdíl  $P(t) - L(t)$  je dělitelný polynomem  $P_n(t)$ , existuje polynom  $R(t)$  stupně nanejvýš  $n - 1$  tak, že platí

$$P(t) = L(t) + P_n(t) \cdot R(t)$$

Proto platí

$$\int_a^b P(s) d\alpha(s) = \int_a^b L(s) d\alpha(s) + \underbrace{\int_a^b P_n(s) \cdot R(s) d\alpha(s)}_{=0, \text{ viz Větu D.6.2(1)}} = \sum_{i=0}^{n-1} P(\lambda_{i,n}) \cdot \int_a^b L_{i,n}(s) d\alpha(s)$$

Označíme-li

$$A_{i,n} = \int_a^b L_{i,n}(s) d\alpha(s)$$

jsou části (1) a (2)(a) dokázány.

Protože stupeň polynomu  $L_{i,n}^2(t)$  je nanejvýš  $2n - 1$ , platí podle už dokázané části (2)(a) pro každé  $i_0$ :

$$0 \leq \int_a^b L_{i_0,n}^2(s) d\alpha(s) = \sum_{i=0}^{n-1} A_{i,n} \cdot L_{i_0,n}^2(\lambda_{i,n}) = A_{i_0,n}$$

a my jsme dokázali, že každé z čísel  $A_{i,n}$  je nezáporné.

Část (2)(b) plyne ihned z definice Riemannova-Stieltjesova integrálu. ■

### D.6.6 Poznámka Výrazu

$$\mathcal{Q}_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} A_{i,n} \cdot f(\lambda_{i,n})$$

se říká *Gaussova-Jacobiho kvadratura  $n$ -tého řádu* funkce  $f$ , nezáporným číslem

$$A_{0,n}, \quad \dots, \quad A_{n-1,n}$$

se říká *Christoffelova čísla*.

Část (2)(b) Věty D.6.5 říká, že posloupnost čísel  $\mathcal{Q}_n(f)$  konverguje ke skutečné hodnotě integrálu  $\int_a^b f(s) d\alpha(s)$ . Část (2)(a) Věty D.6.5 říká, že kvadratura  $n$ -tého řádu dává *přesný* výpočet integrálu pro všechny polynomy stupně nanejvýš  $2n - 1$ .

### D.6.7 Důsledek

At  $N \geq 1$  je pevné přirozené číslo. Potom matice

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{A_{0,N}} P_0(\lambda_{0,N}) & \sqrt{A_{0,N}} P_1(\lambda_{0,N}) & \dots & \sqrt{A_{0,N}} P_{N-2}(\lambda_{0,N}) & \sqrt{A_{0,N}} P_{N-1}(\lambda_{0,N}) \\ \sqrt{A_{1,N}} P_0(\lambda_{1,N}) & \sqrt{A_{1,N}} P_1(\lambda_{1,N}) & \dots & \sqrt{A_{1,N}} P_{N-2}(\lambda_{1,N}) & \sqrt{A_{1,N}} P_{N-1}(\lambda_{1,N}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \sqrt{A_{N-2,N}} P_0(\lambda_{N-2,N}) & \sqrt{A_{N-2,N}} P_1(\lambda_{N-2,N}) & \dots & \sqrt{A_{N-2,N}} P_{N-2}(\lambda_{N-2,N}) & \sqrt{A_{N-2,N}} P_{N-1}(\lambda_{N-2,N}) \\ \sqrt{A_{N-1,N}} P_0(\lambda_{N-1,N}) & \sqrt{A_{N-1,N}} P_1(\lambda_{N-1,N}) & \dots & \sqrt{A_{N-1,N}} P_{N-2}(\lambda_{N-1,N}) & \sqrt{A_{N-1,N}} P_{N-1}(\lambda_{N-1,N}) \end{pmatrix}$$

(kde značení je stejné jako ve Větě D.6.5) je ortogonální, tj. platí  $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$ .

DŮKAZ. Pro jakákoli  $m = 0, \dots, N - 1$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$  je součin  $P_m(t) \cdot P_n(t)$  polynom stupně nanejvýš  $2N - 1$ . Podle Věty D.6.5 platí

$$\sum_{i=0}^{N-1} A_{i,N} \cdot P_m(\lambda_{i,N}) \cdot P_n(\lambda_{i,N}) = \mathcal{Q}_N(P_m \cdot P_n) = \int_a^b P_m(s) \cdot P_n(s) d\alpha(s) = \delta_{mn}$$

což je přesně tvrzení, že  $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$ . ■

**D.6.8 Definice (Gaussova-Jacobiho transformace)** Matici  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  z Důsledku D.6.7 říkáme matice *Gaussovy-Jacobiho transformace* (řádu  $N$ ). Diskrétní signál

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \vdots \\ s(N-1) \end{pmatrix}$$

pak má jako svoji Gaussovu-Jacobiho transformaci vektor  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{s}$ , neboli

$$\begin{pmatrix} \sqrt{A_{0,N}}P_0(\lambda_{0,N}) & \sqrt{A_{0,N}}P_1(\lambda_{0,N}) & \dots & \sqrt{A_{0,N}}P_{N-2}(\lambda_{0,N}) & \sqrt{A_{0,N}}P_{N-1}(\lambda_{0,N}) \\ \sqrt{A_{1,N}}P_0(\lambda_{1,N}) & \sqrt{A_{1,N}}P_1(\lambda_{1,N}) & \dots & \sqrt{A_{1,N}}P_{N-2}(\lambda_{1,N}) & \sqrt{A_{1,N}}P_{N-1}(\lambda_{1,N}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \sqrt{A_{N-2,N}}P_0(\lambda_{N-2,N}) & \sqrt{A_{N-2,N}}P_1(\lambda_{N-2,N}) & \dots & \sqrt{A_{N-2,N}}P_{N-2}(\lambda_{N-2,N}) & \sqrt{A_{N-2,N}}P_{N-1}(\lambda_{N-2,N}) \\ \sqrt{A_{N-1,N}}P_0(\lambda_{N-1,N}) & \sqrt{A_{N-1,N}}P_1(\lambda_{N-1,N}) & \dots & \sqrt{A_{N-1,N}}P_{N-2}(\lambda_{N-1,N}) & \sqrt{A_{N-1,N}}P_{N-1}(\lambda_{N-1,N}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \vdots \\ s(N-1) \end{pmatrix}$$

**D.6.9 Příklad (Diskrétní kosinová transformace — DCT)** Ať  $[a; b] = [-1; 1]$  a  $\alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ .

Gaussově-Jacobiho transformaci, příslušné Čebyševovým polynomům prvního druhu

$$T_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos(n \cdot \arccos t), \quad \text{pro } n \geq 1$$

z Příkladu D.5.3, říkáme *diskrétní kosinová transformace* (také: *DCT*).

Příslušná ortogonální matice pro DCT řádu  $N$  je

$$\mathbf{T} \Rightarrow ($$

protože nulové body Čebyševova polynomu prvního druhu  $T_N$  stupně  $N$  jsou

$$\lambda_{i,N} = \cos \frac{(2i+1) \cdot \pi}{2N}$$

**D.6.10 Příklad (Diskrétní Fourierova transformace — DFT)** TO DO!!!



## Dodatek F

# Aplikace — Vektor důležitosti webových stránek

With all due respect John, I am the head of IT and I have it on good authority that if you type “Google” into Google, you can break the Internet. So please, no one try it, even for a joke. It’s not a laughing matter. You can break the Internet.

Jen Barber, head of IT Department, Reynholm Industries

V tomto dodatku ukážeme jednoduchou, ale velmi důležitou, aplikaci teorie vlastních hodnot čtvercových matic z Kapitoly 10. Přesněji řečeno: ukážeme, jak lze tuto teorii využít pro výpočet *vektoru důležitosti* webových stránek. Moderní vyhledávací algoritmy totiž přesně takový vektor využívají.

Jak vlastně vyhledávací algoritmy (velmi zhruba) pracují? Při vyhledávání klíčového slova nebo fráze očekáváme, že vyhledávač najde stránky, která klíčová slova obsahují. Současně ale očekáváme, že nalezené stránky budou seřazeny podle „důvěryhodnosti“ (nebo „důležitosti“). Pro všechny praktické účely se důvěryhodností/důležitostmi rozumí následující:

*stránka je důvěryhodná, pokud na ni odkazuje velké množství důvěryhodných stránek.*

Vyhledávací stroje (search engines) vyrábí pro webové stránky celou řadu rejstříků v následujících krocích:

- (1) Search engine neustále prohledává web a indexuje všechny stránky s veřejným přístupem. Vytváří tak základní repozitář stránek, se kterým dále pracuje indexační modul.
- (2) Indexační modul nejprve každou stránku z repozitáře „komprimuje“, tj. z každé stránky vybere důležité deskriptory. Dále modul vytvoří několik rejstříků:
  - (a) Rejstřík obsahu stránek (tj. rejstřík klíčových slov a frází).
  - (b) Rejstřík struktury hyperlinků.
  - (c) Další rejstříky (například rejstřík obrázků).

Vytváření rejstříků neprobíhá v reálném čase a je na vyhledávacích dotazech nezávislé. Při zadání dotazu musí ale vyhledávací stroj zareagovat v reálném čase a k tomu využívá předem vytvořené rejstříky.

- (1) Po zadání dotazu projde dotazový modul rejstřík obsahu stránek a vrátí tak seznam relevantních stránek.
- (2) Seznam relevantních stránek je předán modulu, který využívá strukturu hyperlinků, a který seřadí relevantní stránky podle jejich důležitosti. Pak se stránky, označené jako důležité, objeví mezi prvními.

V tomto dodatku se zaměříme pouze na tvorbu rejstříku struktury hyperlinků webu. Vysvětlíme, jakým způsobem search engine vytváří *vektor důležitosti* webových stránek. Navíc se omezíme pouze na základní

myšlenky jednoho z mnoha možných algoritmů: předvedeme, jakým způsobem pracuje algoritmus PageRank využívaný společností Google<sup>TM</sup>.

Vynikajícím zdrojem informací o matematice vyhledávání je kniha

- ☞ Amy N. Langville a Carl D. Meyer, *Google's PageRank and beyond: The science of search engine rankings*, Princeton Univ. Press, 2006.

a vysvětlení základních aspektů tvorby vektoru důležitosti lze nalézt v článcích

- ☞ David Austin, *How Google finds your needle in the web's haystack*, *AMS Feature Columns*, 2008.
- ☞ Amy N. Langville a Carl D. Meyer, *Deeper inside PageRank*, *Internet Math.*, 1 (2005), 335–380.
- ☞ Kurt Bryan a Anna Leise, *The \$ 25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google*, *SIAM Rev.* 48.3 (2006), 569–581.

kterými je text tohoto dodatku inspirován.

Základní myšlenky vektoru důležitosti webových stránek vyložíme v podkapitole F.1. Uvidíme, že bude zapotřebí znát fakta o vlastních hodnotách velmi speciálních matic. Tato fakta dokážeme v podkapitole F.2. Nakonec, v podkapitole F.3, vysvětlíme, jakou matici používá algoritmus PageRank.

## F.1 Základní myšlenky výpočtu vektoru důležitosti

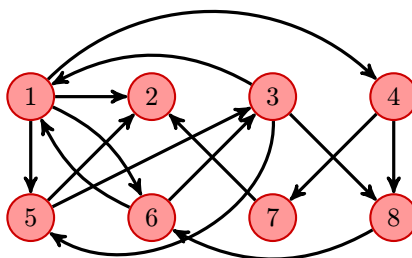
Prvním úkolem při tvorbě vektoru důležitosti webových stránek je volba „rozumného“ modelu webu. Takovým modelem je *orientovaný graf*. Z teorie grafů použijeme pouze ty nejzákladnější pojmy, a ty v tomto textu definujeme. Pro pochopení tedy není třeba studovat teorii grafů. Kdo se chce o teorii grafů dozvědět více, tomu doporučujeme například knihy

- ☞ Jiří Demel, *Grafy a jejich aplikace*, Academia, Praha 2002.
- ☞ Reinhard Diestel, *Graph theory*, Springer-Verlag, 2005.

**F.1.1 Definice (Orientovaný graf)** *Orientovaný graf* je dvojice  $(V, E)$ , kde  $V$  je konečná množina a  $E \subseteq V \times V$ . Prvkům množiny  $V$  říkáme *vrcholy* a prvkům množiny  $E$  říkáme *hrany*. U hrany  $(v_1, v_2) \in E$  říkáme vrcholu  $v_1$  *počáteční vrchol hrany*  $(v_1, v_2)$  a vrcholu  $v_2$  *koncový vrchol hrany*  $(v_1, v_2)$ . Říkáme také, že hrana  $(v_1, v_2)$  *vede z vrcholu*  $v_1$  *do vrcholu*  $v_2$ .

Jak ukazuje následující příklad, orientovaný graf je dobrým modelem webu: jednotlivé webové stránky tvoří vrcholy příslušného grafu a hrana vede ze stránky  $v_1$  do stránky  $v_2$ , pokud stránka  $v_1$  odkazuje na stránku  $v_2$ .

**F.1.2 Příklad (Příklad orientovaného grafu)** Orientovaný graf (malých rozměrů) je často vhodné namalovat. Následující obrázek



je obrázkem orientovaného grafu  $(V, E)$ , kde

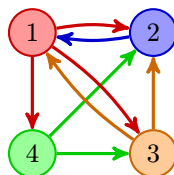
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

je množina vrcholů a

$$E = \{(1, 2), (1, 5), (3, 1), (3, 5), (3, 8), (4, 7), (4, 8), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 3), (7, 2), (8, 6)\}$$

je množina hran. Pojmy z Definice F.1.1 na obrázku získávají intuitivní význam: hranu orientovaného grafu malujeme jako *šipku*, která vede z počátečního vrcholu do koncového vrcholu.

**F.1.3 Příklad (Příklad webu a jeho matice hyperlinků)** Předpokládejme, že web je zadán následujícím orientovaným grafem:



Podle naší interpretace má web čtyři stránky: 1, 2, 3, 4 (to jsou vrcholy grafu) a struktura hyperlinků je zadána hranami (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2) a (4, 3).

Orientovaný graf lze zachytit maticí  $\mathbf{H}$  reálných čísel, která vystihuje strukturu hyperlinků. Pro náš příklad platí

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matici  $\mathbf{H}$  lze interpretovat takto: v  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{H}$  je vektor „důležitosti“, které stránka  $j$  předává ostatním stránkám webu  $(V, E)$ . Například čtvrtý sloupec

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matice  $\mathbf{H}$  lze číst takto: stránka 4 nepředává žádnou důležitost stránkám 1 a 4 a předává polovinu své důležitosti stránkám 2 a 3.

Předpokládejme, že

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

je zadané ohodnocení jednotlivých stránek. Součin

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_2 + 1/2 \cdot d_3 \\ 1/3 \cdot d_1 + 1/2 \cdot d_3 + 1/2 \cdot d_4 \\ 1/3 \cdot d_1 + 1/2 \cdot d_4 \\ 1/3 \cdot d_1 \end{pmatrix}$$

je pak možné interpretovat jako *změnu* vektoru  $\mathbf{d}$  ohodnocení jednotlivých stránek hyperlinkovou strukturou webu  $(V, E)$ .

Splňuje-li vektor  $\mathbf{d}$  rovnost  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$ , pak je ohodnocení jednotlivých stránek „spravedlivé“: hyperlinková struktura webu vektor  $\mathbf{d}$  již nezmění. Protože matice  $\mathbf{H} - \mathbf{E}_4$  má hodnotu 3, má soustava  $(\mathbf{H} - \mathbf{E}_4 \mid \mathbf{o})$  netriviální řešení. Toto řešení je

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix}\right)$$

Existuje tedy celá řada „spravedlivých“ ohodnocení jednotlivých stránek: každý vektor tvaru

$$\mathbf{d} = a \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix}$$

kde  $a \in \mathbb{R}$ , rovnost  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$  splňuje. Volbou parametru  $a = 1/(36 + 27 + 18 + 12) = 1/93$  můžeme zajistit *relativní* důležitost jednotlivých webových stránek. To znamená, že relativní ohodnocení důležitosti jednotlivých

stránek našeho webu je

$$\frac{1}{93} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.39 \\ 0.29 \\ 0.19 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

Úvahy z předchozího příkladu nyní probereme v plné obecnosti. Pro každý orientovaný graf zavedeme matici hyperlinků  $\mathbf{H}$ . Bude nás zajímat, zda pro každou matici hyperlinků  $\mathbf{H}$  existuje alespoň jeden vektor  $\mathbf{d}$  s kladnými položkami a s vlastností  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$ . Takovému vektoru bychom rádi říkali *vektor důležitosti* stránek webu. Problémem bude *existence* a *jednoznačnost* vektoru důležitosti. Uvidíme, že na existenci a jednoznačnost vektoru důležitosti má značný vliv hyperlinková struktura webu. Dále budeme analyzovat způsob, jak by vektor důležitosti bylo možné spočítat *iteracími*.

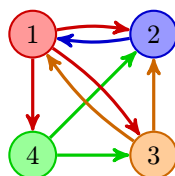
Uvidíme, že matice hyperlinků je dobrým začátkem analýzy struktury webu. Pro praktické použití bude ale nutné matici hyperlinků webu mírně modifikovat. To provedeme v podkapitole F.3.

**F.1.4 Definice (Matice hyperlinků)** Ať  $(V, E)$  je orientovaný graf, kde  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . *Maticí hyperlinků* grafu  $(V, E)$  rozumíme čtvercovou matici  $\mathbf{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kde pro položku  $h_{ij}$  v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{H}$  platí

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pokud } (j, i) \notin E, \\ 1/k, & \text{pokud } (j, i) \in E \text{ a } k \text{ je počet hran, které z } j \text{ vycházejí.} \end{cases}$$

V Příkladu F.1.3 jsme našli „rozumný“ vektor  $\mathbf{d}$ , pro který platí rovnost  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$ . Zdá se tedy, že problém je vyřešen. Pokud je ale matice hyperlinků  $\mathbf{H}$  obrovská, rádi bychom použili nějakou *numerickou* metodu, která takový vektor nalezne. V dalším příkladu takovou *iterativní* metodu předvedeme.

**F.1.5 Příklad (Konvergence k vlastnímu vektoru)** Pro web



s maticí hyperlinků

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z Příkladu F.1.3 zvolíme jako počáteční aproximaci vektoru důležitosti vektor

$$\mathbf{d}_0 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

To jest: každé stránce webu přisoudíme *stejnou* důležitost. Zvolíme jako přípustnou toleranci dvě desetinná

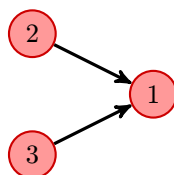
místa a zkusíme spočítat posloupnost  $\mathbf{d}_k = \mathbf{H}^k \cdot \mathbf{d}_0$  pro  $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 = \mathbf{H}\mathbf{d}_0 &= \begin{pmatrix} 0.38 \\ 0.33 \\ 0.21 \\ 0.08 \end{pmatrix}, & \mathbf{d}_2 = \mathbf{H}^2\mathbf{d}_0 &= \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.27 \\ 0.17 \\ 0.13 \end{pmatrix}, & \mathbf{d}_3 = \mathbf{H}^3\mathbf{d}_0 &= \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.30 \\ 0.21 \\ 0.15 \end{pmatrix}, & \mathbf{d}_4 = \mathbf{H}^4\mathbf{d}_0 &= \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.30 \\ 0.19 \\ 0.12 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{d}_5 = \mathbf{H}^5\mathbf{d}_0 &= \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.29 \\ 0.20 \\ 0.14 \end{pmatrix}, & \mathbf{d}_6 = \mathbf{H}^6\mathbf{d}_0 &= \begin{pmatrix} 0.39 \\ 0.30 \\ 0.20 \\ 0.13 \end{pmatrix}, & \mathbf{d}_7 = \mathbf{H}^7\mathbf{d}_0 &= \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.29 \\ 0.19 \\ 0.13 \end{pmatrix}, & \mathbf{d}_8 = \mathbf{H}^8\mathbf{d}_0 &= \begin{pmatrix} 0.39 \\ 0.29 \\ 0.20 \\ 0.13 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{d}_9 = \mathbf{H}^9\mathbf{d}_0 &= \begin{pmatrix} 0.39 \\ 0.29 \\ 0.19 \\ 0.13 \end{pmatrix}, & \mathbf{d}_{10} = \mathbf{H}^{10}\mathbf{d}_0 &= \begin{pmatrix} 0.39 \\ 0.29 \\ 0.19 \\ 0.13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Protože platí rovnost  $\mathbf{d}_{10} = \mathbf{d}_9$ , budou vektory  $\mathbf{d}_9, \mathbf{d}_{10}, \dots$  stále stejné. S tolerancí dvě desetinná místa jsme tedy získali *stejný* vektor důležitosti stránek webu jako v Příkladu F.1.3!

Příklad F.1.5 je velmi povzbudivý: pro zadaný web  $(V, E)$  stačí nalézt matici hyperlinků  $\mathbf{H}$  a potom počítat iterace  $\mathbf{H}^k \cdot \mathbf{d}_0$  tak dlouho, dokud se tato posloupnost v předem zadané toleranci nezastaví. Následující sada příkladů ukazuje, že taková metoda obecně fungovat nemůže.

#### F.1.6 Příklad (Viselec (dangling node)) Pro web



s maticí hyperlinků

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

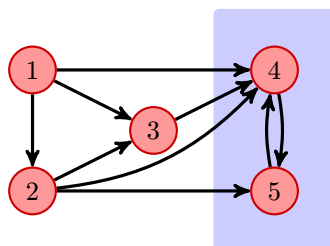
uvidíme, že iterativní postup Příkladu F.1.5 nefunguje.

Platí totiž  $\mathbf{H}^2 = \mathbf{O}_{3,3}$ . Proto má posloupnost  $\mathbf{d}_k = \mathbf{H}^k \cdot \mathbf{d}_0$  pro všechna  $k \geq 2$  jako své členy nulový vektor, a to nezávisle na počátečním vektoru  $\mathbf{d}_0$ . To je zcela proti naší intuici. Stránka 1 by měla být dvakrát důležitější než každá ze stránek 2 a 3.

Problémem je *viselec* (anglicky: *dangling node*). Viselcem našeho webu je stránka 1. Obecně je viselcem jakákoli stránka, která žádné hyperlinky neobsahuje. Stránka 1 postupně „vyssává“ všechnu důležitost ostatních stránek. Obecně lze ukázat, že viselec „vyssává“ důležitost všech stránek, které na viselce odkazují.

Zobecněním problému viselců je existence *komponenty silné souvislosti* webu. Obecně je komponentou silné souvislosti webu  $(V, E)$  maximální množina vrcholů  $C$ , která má následující vlastnost: pro jakékoli dva vrcholy  $v_1, v_2$  z  $C$  se lze po orientovaných hranách dostat z  $v_1$  do  $v_2$  a z  $v_2$  do  $v_1$ .

#### F.1.7 Příklad (Komponenta silné souvislosti) Web



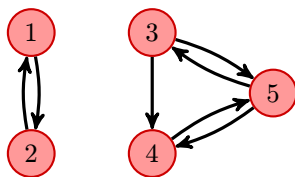
má matici hyperlinků

$$\mathbf{H} = \left( \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.33 & 0.33 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

zapsanou v blokovém tvaru. Jde o zobecnění Příkladu F.1.6. Komponenta silné souvislosti  $\{4, 5\}$  „vyssaje“ důležitost stránek 1, 2, 3, které do komponenty  $\{4, 5\}$  odkazují.

Dalším problémem jsou situace, kdy web obsahuje dvě nebo více komponent silné souvislosti, které již ale propojeny nijak nejsou. Tato situace vede při iterativním postupu k nejednoznačnosti vektoru důležitosti.

### F.1.8 Příklad (Dvě izolované komponenty silné souvislosti) Web



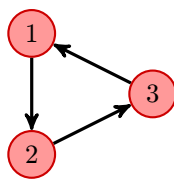
obsahuje dvě izolované komponenty silné souvislosti:  $\{1, 2\}$  a  $\{3, 4, 5\}$ . Matice hyperlinků tohoto webu je

$$\mathbf{H} = \left( \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{H}_1 & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{H}_2 \end{array} \right)$$

Dvě komponenty silné souvislosti webu způsobí existenci dvou nezávislých kandidátů na vektor důležitosti (vzniklých z vektorů důležitosti pro  $\mathbf{H}_1$  a  $\mathbf{H}_2$  doplněním nul).

Jinou nepříjemnou situací je „zacyklení“ hyperlinků. Pokud k zacyklení dojde, je posloupnost  $\mathbf{H}^k \cdot \mathbf{d}_0$  periodická. Obecně tedy iterativní metoda v případě zacyklení konvergovat nemůže.

### F.1.9 Příklad (Marná touha po uznání) Web



má matici hyperlinků

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Platí  $\mathbf{H}^3 = \mathbf{E}_3$ , takže posloupnost  $\mathbf{d}_k$  obecně nemůže konvergovat (pro každé  $k \geq 0$  platí rovnosti  $\mathbf{d}_{3k} = \mathbf{d}_0$ ,  $\mathbf{d}_{3k+1} = \mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_{3k+2} = \mathbf{d}_2$ ).

## F.2 Vlastní vektory pozitivních sloupcově stochastických matic

Výsledky předchozí podkapitoly ukazují, že web může být postaven způsobem, který zabrání korektnosti iterativní metody výpočtu vektoru důležitosti. Přesto se iterativní metody výpočtu tohoto vektoru nechceme vzdát. V této podkapitole ukážeme, že pro jistou třídu čtvercových matic nad  $\mathbb{R}$  iterativní metoda výpočtu vlastního vektoru vede ke správnému výsledku. Tato teorie pochází z počátku 20. století a byla vytvořena matematikou Oskarem Perronem a Georgem Friedrichem Frobeniem. V plné obecnosti je tato teorie vyložena v knize

☞ Carl D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM Publishers, 2001

My se omezíme pouze na tu část Perronovy-Frobeniovy teorie, kterou budeme potřebovat, a vybudujeme ji elementárními prostředky podle článku<sup>1</sup>

☞ Kurt Bryan a Anna Leise, [The \\$ 25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google](#), *SIAM Rev.* 48.3 (2006), 569–581.

Dokážeme následující výsledek:

*Jestliže matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  má všechny položky kladné a jestliže součet každého sloupce matice  $\mathbf{M}$  je roven 1, pak existuje vektor  $\mathbf{d}$  s kladnými položkami, který splňuje rovnost  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$ .*

*Navíc: vektor  $\mathbf{d}$  lze najít jako limitu posloupnosti vektorů  $\mathbf{d}_k = \mathbf{M}^k \cdot \mathbf{d}_0$ , nezávisle na hodnotě první aproximace  $\mathbf{d}_0$  s kladnými položkami.*

Reálný web nemá matici hyperlinků, která by vyhovovala předpokladům výše uvedeného tvrzení. V podkapitole F.3 ukážeme, jak hyperlinkovou strukturu reálného webu algoritmus PageRank důmyslně modifikuje tak, aby šla Perronova-Frobeniova teorie použít.

**F.2.1 Definice (Stochastické vektory a sloupcově stochastické matice)** Vektor  $\mathbf{v}$  z  $\mathbb{R}^n$  je *stochastický*, pokud součet všech položek vektoru  $\mathbf{v}$  je roven 1. Matici  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  říkáme *sloupcově stochastická*, pokud je každý její sloupec stochastický vektor.

**F.2.2 Lemma** *Jakákoli sloupcově stochastická matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  má vlastní hodnotu 1.*

DŮKAZ. Označme jako  $\mathbf{e}$  vektor z  $\mathbb{R}^n$ , který má všechny položky rovny 1. Potom platí rovnost  $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$ , protože matice  $\mathbf{M}$  je sloupcově stochastická. To znamená, že matice  $\mathbf{M}^T$  má vlastní hodnotu 1 a příslušný vlastní vektor je  $\mathbf{e}$ . Ukázali jsme, že matice  $\mathbf{M}^T - \mathbf{E}_n$  je singulární. Protože podle Důsledku 3.5.6 platí  $\text{rank}(\mathbf{M}^T - \mathbf{E}_n) = \text{rank}((\mathbf{M}^T - \mathbf{E}_n)^T)$ , a protože  $(\mathbf{M}^T - \mathbf{E}_n)^T = \mathbf{M} - \mathbf{E}_n$ , je i matice  $\mathbf{M} - \mathbf{E}_n$  singulární. To znamená, že matice  $\mathbf{M}$  má vlastní hodnotu 1. ■

Lemma F.2.2 tedy zaručuje, že pro každou sloupcově stochastickou matici  $\mathbf{M}$  existuje alespoň jeden nenulový vlastní vektor  $\mathbf{d}$  příslušný vlastní hodnotě 1. To jest, dovedeme najít nenulový vektor  $\mathbf{d}$ , pro který platí rovnost  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$ . Podle podkapitoly 10.3 to znamená, že dimenze podprostoru

$$\text{eigen}(1, \mathbf{M}) = \ker(\mathbf{M} - \mathbf{E}_n)$$

je alespoň 1. Další požadavky na matici  $\mathbf{M}$  zaručí, že dimenze podprostoru  $\text{eigen}(1, \mathbf{M})$  je přesně 1.

**F.2.3 Definice (Positivní a negativní vektory a matice)** Vektor  $\mathbf{v}$  z  $\mathbb{R}^n$  je *positivní*, pokud jsou všechny jeho položky kladné. Vektor  $\mathbf{v}$  z  $\mathbb{R}^n$  je *negativní*, jsou-li všechny jeho položky záporné. Matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je *positivní*, je-li každý její sloupec pozitivní vektor.

**F.2.4 Poznámka (Trojúhelníková nerovnost pro absolutní hodnotu)** Připomeňme, že pro jakákoli reálná čísla  $x_1, \dots, x_n$  platí nerovnost

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

přičemž ostrá nerovnost platí, jakmile vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

není nulový a není ani pozitivní, ani negativní.

<sup>1</sup>To jest: důkazy v této podkapitole pocházejí z článku Kurt Bryan a Anna Leise, [The \\$ 25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google](#), *SIAM Rev.* 48.3 (2006), 569–581.

**F.2.5 Lemma** *At' matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je pozitivní a sloupcově stochastická. Potom jakýkoli nenulový vektor v podprostoru  $\text{eigen}(1, \mathbf{M})$  je buď pozitivní nebo negativní.*

DŮKAZ. Označme jako  $m_{ij}$  položku matice  $\mathbf{M}$  v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci. Předpokládejme, že  $\text{eigen}(1, \mathbf{M})$  obsahuje nenulový vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

který není ani pozitivní ani negativní. Protože platí  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ , platí rovnost

$$v_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot v_j$$

a tudíž platí podle Poznámky F.2.4 ostrá nerovnost

$$|v_i| = \left| \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot v_j \right| < \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot |v_j|$$

protože vektor  $\mathbf{v}$  není ani pozitivní ani negativní a matice  $\mathbf{M}$  je pozitivní. To znamená, že platí

$$\sum_{i=1}^n |v_i| < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot |v_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ij} \cdot |v_j| = \sum_{j=1}^n |v_j| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n m_{ij}}_{=1} = \sum_{j=1}^n |v_j|$$

kde poslední rovnost platí, protože  $\mathbf{M}$  je sloupcově stochastická. To je spor. To znamená, že buď platí  $v_i \geq 0$  pro všechna  $i$ , nebo platí  $v_i \leq 0$  pro všechna  $i$ . Protože  $\mathbf{M}$  je pozitivní a protože platí

$$v_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot v_j$$

musí buď platit  $v_i > 0$  pro všechna  $i$ , nebo musí platit  $v_i < 0$  pro všechna  $i$ . ■

**F.2.6 Tvzení** *At' matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je pozitivní a sloupcově stochastická. Potom dimenze podprostoru  $\text{eigen}(1, \mathbf{M})$  je přesně 1.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že v  $\text{eigen}(1, \mathbf{M})$  jsou dva lineárně nezávislé vektory  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ . Jakákoli netriviální lineární kombinace  $\mathbf{x} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$  leží v  $\text{eigen}(1, \mathbf{M})$  a podle Lemmatu F.2.5 je vektor  $\mathbf{x}$  buď pozitivní nebo negativní. Nalezneme hodnoty  $a$  a  $b$  takové, že  $\mathbf{x} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$  je nenulový vektor, který není ani pozitivní ani negativní. Tím ukážeme, že  $\text{dim} \text{eigen}(1, \mathbf{M})$  je přesně 1.

Označme jako  $v_i$  jednotlivé položky vektoru  $\mathbf{v}$  a jako  $w_i$  jednotlivé položky vektoru  $\mathbf{w}$ . Protože vektor  $\mathbf{v}$  je nenulový, je podle Lemmatu F.2.5 vektor  $\mathbf{v}$  buď pozitivní nebo negativní. Proto platí  $\sum_{i=1}^n v_i \neq 0$ . Potom vektor

$$\mathbf{x} = - \left( \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n}} \right) \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{w}$$

je nenulový a platí  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ . To znamená, že  $\mathbf{x}$  není ani pozitivní ani negativní. ■



Pro iterativní metodu je třeba zavést pojem *limity posloupností* v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Jakýkoli pojem limity posloupností vyžaduje pojem „vzdálenosti“ vektorů. Podle Tvzení 12.2.12 stačí definovat v  $\mathbb{R}^n$  normu. Připomeňme 1-normu v  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

viz Příklad 13.1.2(2). Jde o zobecnění normy na  $\mathbb{R}^2$  z Příkladu 12.2.14.

Pro hlavní výsledek (korektnost iterativní metody) budeme potřebovat následující technické tvrzení.

**F.2.7 Tvzení** *At matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je pozitivní a sloupcově stochastická. Označme jako  $W$  lineární podprostor*

$$\left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n w_i = 0 \right\}$$

*Potom platí:*

- (1) *Pro každé  $\mathbf{w}$  z  $W$  platí  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{w}$  je ve  $W$ .*
- (2) *Existuje  $c < 1$  tak, že pro každé  $\mathbf{w}$  z  $W$  platí nerovnost  $\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{w}\|_1 \leq c \cdot \|\mathbf{w}\|_1$ .*

DŮKAZ. Označme  $\mathbf{v} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{w}$ , kde  $\mathbf{w}$  je z  $W$ .

- (1) Pro každé  $i$  platí

$$v_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot w_j$$

a tudíž platí

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot w_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ij} \cdot w_j = \sum_{j=1}^n w_j \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n m_{ij}}_{=1} = \sum_{j=1}^n w_j = 0$$

protože  $\mathbf{w}$  je ve  $W$  a matice  $\mathbf{M}$  je sloupcově stochastická.

- (2) Pokud  $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ , bude nerovnost  $\|\mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{M} \cdot \mathbf{w}\|_1 \leq c \cdot \|\mathbf{w}\|_1$  splněna pro jakékoli  $c < 1$ .

Předpokládejme tedy, že  $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ . Označme jako  $\mathbf{s}$  vektor z  $\mathbb{R}^n$ , pro který platí

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } v_i > 0, \\ 0, & \text{jestliže } v_i = 0, \\ -1, & \text{jestliže } v_i < 0. \end{cases}$$

Potom platí rovnosti

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n s_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n s_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot w_j \right) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n s_i \cdot m_{ij}}_{=a_j} = \sum_{j=1}^n w_j \cdot a_j$$

kde jsme označili  $\sum_{i=1}^n s_i \cdot m_{ij}$  jako  $a_j$ .

Protože  $\mathbf{v}$  je nenulový vektor ve  $W$ , platí  $\{i \mid s_i = 1\} \neq \emptyset$  a  $\{i \mid s_i = -1\} \neq \emptyset$ . Dále víme, že  $\mathbf{M}$  je pozitivní sloupcově stochastická matice. Proto platí pro každé  $j$  nerovnosti

$$-1 < -1 + \min_{1 \leq i \leq n} m_{ij} \leq \underbrace{\sum_{\{i \mid s_i = 1\}} m_{ij} - \sum_{\{i \mid s_i = -1\}} m_{ij}}_{=a_j} \leq 1 - \min_{1 \leq i \leq n} m_{ij} < 1$$

To znamená, že pro každé  $j$  platí nerovnosti

$$|a_j| \leq |1 - \min_{1 \leq i \leq n} m_{ij}| < 1$$

Označme

$$c = \max_{1 \leq j \leq n} |1 - \min_{1 \leq i \leq n} m_{ij}|$$

Potom platí nerovnosti  $c < 1$  a  $|a_j| \leq c$  pro všechna  $j$ . Celkově tedy platí

$$\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{w}\|_1 = \|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{j=1}^n w_j \cdot a_j = \left| \sum_{j=1}^n w_j \cdot a_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |w_j| \cdot |a_j| \leq \sum_{j=1}^n |w_j| \cdot c = c \cdot \sum_{j=1}^n |w_j| = c \cdot \|\mathbf{w}\|_1$$

což je nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat. ■

**F.2.8 Definice (Konvergence v 1-normě na  $\mathbb{R}^n$ )** Ať  $(\mathbf{v}_k)_{k=0}^{+\infty}$  je posloupnost vektorů v  $\mathbb{R}^n$ . Řekneme, že posloupnost  $(\mathbf{v}_k)_{k=0}^{+\infty}$  *konverguje k vektoru  $\mathbf{v}$  v 1-normě*, když platí rovnost  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\|_1 = 0$ . Tento fakt budeme značit  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_k = \mathbf{v}$ .

Pro posloupnost  $(\mathbf{v}_k)_{k=0}^{+\infty}$  vektorů v  $\mathbb{R}^n$  má rovnost  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\|_1 = 0$  velmi intuitivní význam. Protože  $\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\|_1$  je posloupnost reálných čísel, plyne tento význam okamžitě z definice limity posloupnosti reálných čísel:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\|_1 < \varepsilon$$

To znamená: předepíšeme-li jakkoli toleranci  $\varepsilon > 0$ , potom od jistého indexu  $k_0$  počínaje bude vzdálenost vektoru  $\mathbf{v}_k$  od vektoru  $\mathbf{v}$  menší než  $\varepsilon$ .

Vzdálenost vektorů v  $\mathbb{R}^n$  jsme se rozhodli měřit 1-normou. Tato norma je *jíná* než „obvyklá“ norma

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

v  $\mathbb{R}^n$ , která vznikla ze standardního skalárního součinu.

Dá se namítnout, že vzdálenost v  $\mathbb{R}^n$  měřená normou  $\|\cdot\|$  je pojmem, který používáme „doopravdy“. Lze ale ukázat, že normy  $\|\cdot\|$  a  $\|\cdot\|_1$  v  $\mathbb{R}^n$  jsou (vzhledem k limitám posloupností) *ekvivalentní*. Přesněji: pro jakoukoli posloupnost  $(\mathbf{v}_k)_{k=0}^{+\infty}$  vektorů v  $\mathbb{R}^n$  platí

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\|_1 = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$

To jest: členy  $\mathbf{v}_k$  se „blíží“ k  $\mathbf{v}$  ve smyslu 1-normy  $\|\cdot\|_1$  právě tehdy, když se členy  $\mathbf{v}_k$  „blíží“ k  $\mathbf{v}$  ve smyslu normy  $\|\cdot\|$ .

Více se o ekvivalenci různých norem v  $\mathbb{R}^n$  lze dočíst například v knize

☞ Edwin Hewitt a Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 3. vydání, 1975.

nebo v Tvzení 13.1.13.

**F.2.9 Věta (Korektnost iterativní metody)** Ať matice  $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je *positivní a sloupcově stochastická*. Potom existuje jediný *positivní vektor  $\mathbf{d}$  s vlastnostmi  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$  a  $\|\mathbf{d}\|_1 = 1$* . Navíc platí rovnost  $\mathbf{d} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{M}^k \cdot \mathbf{d}_0$  pro jakýkoli *positivní vektor  $\mathbf{d}_0$ , pro který platí  $\|\mathbf{d}_0\|_1 = 1$* .

DŮKAZ. Podle Lemmatu F.2.5 je každý vektor  $\mathbf{d}$  s vlastností  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$  buď *positivní* nebo *negativní*. Podle Tvzení F.2.6 má prostor  $\text{eigen}(1, \mathbf{M})$  dimenzi 1. Proto existuje jediný *positivní vektor  $\mathbf{d}$  s vlastnostmi  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$  a  $\|\mathbf{d}\|_1 = 1$* .

Ať  $\mathbf{d}_0$  je jakýkoli pozitivní vektor, pro který platí  $\|\mathbf{d}_0\|_1 = 1$ . Označme  $\mathbf{w} = \mathbf{d}_0 - \mathbf{d}$ . Vektor  $\mathbf{w}$  evidentně leží v podprostoru  $W$ , definovaném v Tvzení F.2.7, protože  $\mathbf{d}_0$  a  $\mathbf{d}$  jsou pozitivní a platí  $\|\mathbf{d}_0\|_1 = \|\mathbf{d}\|_1 = 1$ . Potom, díky Tvzení F.2.7, pro jakékoli  $k \geq 0$  platí

$$0 \leq \|\mathbf{M}^k \cdot \mathbf{d}_0 - \mathbf{d}\|_1 = \|\mathbf{M}^k \cdot (\mathbf{d}_0 - \mathbf{d})\|_1 = \|\mathbf{M}^k \cdot \mathbf{w}\|_1 \leq c^k \cdot \|\mathbf{w}\|_1$$

Protože  $c < 1$ , znamená to, že  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{M}^k \cdot \mathbf{d}_0 - \mathbf{d}\|_1 = 0$ , neboli  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{M}^k \cdot \mathbf{d}_0 = \mathbf{d}$ . ■

## F.3 Algoritmus PageRank

Teorii pozitivních sloupcově stochastických matic z podkapitoly F.2 použili v roce 1998 Sergej Brin a Lawrence Page k tvorbě matice, které se říká *Google matrix*. Algoritmu, který na základě této matice přiřazuje vektor důležitosti jednotlivým webovým stránkám, se říká **PageRank** a využívá jej vyhledávač společnosti Google<sup>TM</sup>. Více se lze od tvůrců algoritmu dozvědět například v článku

☞ Sergej Brin a Lawrence Page, *The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine*, *Computer networks and ISDN systems* 33 (1998), 107–117.

Google matrix  $\mathbf{G}_\alpha$  popisuje web tak, jak se jeví „průměrnému surfaři“ po webových stránkách: surfař po webu brouzdá pomocí hyperlinků, po nějaké době jej to omrzí a „teleportuje“ se na náhodnou stránku. To znamená, že matice  $\mathbf{G}_\alpha$  je lineární kombinací dvou sloupcově stochastických matic: *upravené matice hyperlinků* webu a *teleportační matice*. Přesná definice je následující:

**F.3.1 Definice (Google matrix)** Označme jako  $n$  počet stránek webu. Ať  $\mathbf{e}$  je vektor v  $\mathbf{R}^n$  s položkami 1 a ať  $\mathbf{p}$  je jakýkoli pozitivní vektor z  $\mathbf{R}^n$ , kde  $\|\mathbf{p}\|_1 = 1$ . *Google matrix* je matice

$$\mathbf{G}_\alpha = \alpha \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{A}) + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{T}$$

rozměrů  $n \times n$ , kde

- (1)  $\mathbf{H}$  je matice hyperlinků webu.
- (2) Matice  $\mathbf{A}$  má jako položky samé nuly, kromě sloupců, ve kterých  $\mathbf{H}$  má samé nuly: v nich má  $\mathbf{A}$  vektor  $\mathbf{p}$ .
- (3)  $\mathbf{T}$  je matice  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}^T$ .
- (4)  $\alpha$  je reálné číslo,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

### F.3.2 Poznámka (Význam jednotlivých komponent matice $\mathbf{G}_\alpha$ )

- (1) Význam vektoru  $\mathbf{p}$ .

Protože  $\mathbf{p}$  je pozitivní vektor a protože platí  $\|\mathbf{p}\|_1 = 1$ , je možné  $\mathbf{p}$  chápat jako pravděpodobnostní rozdělení: pro webovou stránku  $i$  je zadáno kladné reálné číslo  $p_i$  a platí  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

Volba vektoru  $\mathbf{p}$  z původního návrhu matice  $\mathbf{G}_\alpha$  je  $(1/n) \cdot \mathbf{e}$ . To znamená, že pravděpodobnost  $p_i$  je rovna  $1/n$  pro každé  $i$ .

- (2) Význam matice  $\mathbf{A}$ .

Matice  $\mathbf{A}$  odstraňuje z webu viselce, viz Příklad F.1.6. Neexistující hyperlinky z viselce  $j$  jsou nahrazeny vektorem  $\mathbf{p}$ . To modeluje situaci, že z viselce  $j$  přejdeme na stránku  $i$  s pravděpodobností  $p_i$ .

- (3) Význam matice  $\mathbf{T}$ .

Matici  $\mathbf{T}$  se říká *teleportační matice* a má v každém sloupci vektor  $\mathbf{p}$ . To znamená, že  $\mathbf{T}$  reprezentuje web s následující hyperlinkovou strukturou: ze stránky  $j$  přejdeme na stránku  $i$  s pravděpodobností  $p_i$ .

(4) Význam parametru  $\alpha$ .

Parametru  $\alpha$  se také říká *damping factor*. Modeluje chování průměrného surfaře, který se s pravděpodobností  $\alpha$  řídí hyperlinkovou strukturou webu a s pravděpodobností  $1 - \alpha$  využije hyperlinkovou strukturu danou teleportační maticí.

Sergej Brin a Larry Page v původním návrhu použili  $\alpha = 0.85$ . Tj., průměrný surfař se zhruba v 5/6 případů řídí strukturou webu, zhruba v 1/6 případů se „teleportuje“ na jinou stránku.

Výsledky podkapitoly F.2 umožňují zformulovat základní vlastnost matice  $\mathbf{G}_\alpha$  pro  $\alpha < 1$  (tj. pro situaci, kdy průměrný surfař se alespoň někdy náhodně teleportuje na náhodnou stránku): matice  $\mathbf{G}_\alpha$  má jednoznačně určen vektor důležitosti webových stránek a tento vektor lze najít iterativní metodou, nezávisle na počátečním odhadu vektoru důležitosti.

**F.3.3 Věta (Základní vlastnosti matice  $\mathbf{G}_\alpha$ )** Pro  $\alpha < 1$  je matice  $\mathbf{G}_\alpha$  pozitivní a sloupcově stochastická. To znamená, že platí:

- (1) Existuje jediný pozitivní vektor  $\mathbf{d}$  s vlastnostmi  $\mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$  a  $\|\mathbf{d}\|_1 = 1$ .
- (2) Pro jakýkoli pozitivní vektor  $\mathbf{d}_0$ , pro který platí  $\|\mathbf{d}_0\|_1 = 1$ , platí rovnost  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\mathbf{G}_\alpha)^k \cdot \mathbf{d}_0 = \mathbf{d}$ .

DŮKAZ. Matice  $\mathbf{H} + \mathbf{A}$  a  $\mathbf{T}$  jsou sloupcově stochastické, proto je sloupcově stochastická i jejich konvexní kombinace  $\alpha \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{A}) + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{T}$ . Protože platí  $\alpha < 1$ , je  $1 - \alpha > 0$ . Matice  $(1 - \alpha) \cdot \mathbf{T}$  je tedy pozitivní, protože  $\mathbf{T}$  je pozitivní matice. Tudíž je pozitivní i matice  $\alpha \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{A}) + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{T}$ . Ukázali jsme, že matice  $\mathbf{G}_\alpha$  je pozitivní a sloupcově stochastická. Nyní stačí použít Větu F.2.9. ■

Předchozí výsledek nám dovoluje konečně definovat vektor důležitosti webových stránek *přesně*: je totiž jednoznačně určen.

**F.3.4 Definice (Vektor důležitosti webových stránek)** Ať  $\alpha < 1$ . Jedinému pozitivnímu vektoru  $\mathbf{d}$ , který splňuje podmínky  $\mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d}$  a  $\|\mathbf{d}\|_1 = 1$ , říkáme *vektor důležitosti webových stránek*.

O matici  $\mathbf{G}_\alpha$  lze dokázat řadu dalších zajímavých faktů. Například platí:

- (1) Pro  $\alpha < 1$  je druhou největší vlastní hodnotou matice  $\mathbf{G}_\alpha$  číslo  $\alpha$ .
- (2) Rychlost konvergence posloupnosti  $(\mathbf{G}_\alpha)^k \cdot \mathbf{d}_0$  k vektoru důležitosti  $\mathbf{d}$  je stejně rychlá jako rychlost konvergence posloupnosti  $\alpha^k$  k číslu 0.
- (3) Pro  $\alpha = 0.85$  a toleranci  $10^{-10}$  je pro web s 8 miliardami stránek třeba pro výpočet vektoru důležitosti provést zhruba 142 iterací.

Důkazy jsou však mimo rozsah tohoto dodatku. Odkazujeme na knihu

☞ Amy N. Langville a Carl D. Meyer, *Google's PageRank and beyond: The science of search engine rankings*, Princeton Univ. Press, 2006.

kde je vyložena nejen matematika vyhledávání, ale kde jsou zmíněny i některé praktické implementační metody výpočtů.

## Dodatek G

# Aplikace — Kompresse dat

This is what he said. ‘The identity of this official whose alleged responsibility for this hypothetical oversight has been the subject of recent speculation is not shrouded in quite such impenetrable obscurity as certain previous disclosures may have led you to assume, and, in fact, not to put too fine point on it, the individual in question was, it may surprise you to learn, the one to whom your present interlocutor is in the habit of identifying by means of the perpendicular pronoun.’

‘I beg your pardon?’ I said.

There was an anguished pause. ‘It was I’, he said.

Jonathan Lynn and Anthony Jay, *Yes Minister*

V tomto dodatku ukážeme aplikace lineární algebry v oblasti *komprese dat*. V našich úvahách bude hrát klíčovou roli SVD rozklad matic, zavedený v podkapitole 14.2.

Nahlédneme do dvou aplikací:

- (1) Podkapitolu G.1 věnujeme vyhledávání klíčových slov v databázi. Databáze lze modelovat maticemi a SVD rozklad matic využijeme pro představení metody *latentního sémantického indexování*.
- (2) Důležitou aplikací v matematické statistice je *analýza hlavní komponenty* vícedimensionálních statistických dat. Této metodě (zvané *PCA*) je věnována podkapitola G.2.

Tento dodatek je pouze *úvodem* do výše zmíněných oblastí. V každé podkapitole tedy naleznete odkazy na další literaturu, ve které si můžete znalosti a postupy prohloubit.

Výpočty SVD rozkladu matic v praktických příkladech je většinou třeba provést některým z maticových „kalkulátorů“, protože zadané matice jsou obvykle velkých rozměrů. Veškeré výpočty s velkými maticemi v tomto dodatku byly provedeny programem **Maple 16**.

Nemáte-li k profesionálním programům přístup, pak doporučujeme například maticový kalkulátor

☞ <http://www.bluebit.gr/matrix-calculator/>

který SVD rozklad umí spočítat.

## G.1 LSI — Latentní sémantické indexování

Aproximace matice pomocí SVD rozkladu lze využít i pro vyhledávání klíčových slov v databázi. Metoda, kterou předvedeme, byla poprvé popsána v článku

- ☞ Scott Deerwester, Susan T. Dumais, George W. Furnas, Thomas K. Landauer a Richard Harshman, Indexing by latent semantic analysis, *Journal of the American Society for Information Science* 41.6 (1990), 391–407

a říká se jí *LSI* (*latent semantic indexing*, také: *latentní sémantické indexování*). Proč se této metodě tak říká, vysvětlíme v Příkladech G.1.2 a G.1.7. Dobrým zdrojem o LSI (a dalších metodách získávání informací) je kniha

☞ Christopher D. Manning, Prabhakar Raghavan a Hinrich Schütze, *An introduction to information retrieval*, Cambridge Univ. Press, 2008.

a články

☞ Michael W. Berry, Susan T. Dumais a Gavin W. O'Brien, Using linear algebra for intelligent information retrieval, *SIAM Rev.* 37 (1995), 573–595.

☞ Michael W. Berry, Zlatko Drmač a Elizabeth R. Jessup, Matrices, vector spaces and information retrieval, *SIAM Rev.* 41 (1999), 335–362.

Úvahy o vyhledávání klíčových slov pomocí LSI začneme *klasickým vektorovým modelem* vyhledávání. Předpokládejme, že je zadána databáze  $s$  různých dokumentů  $D_1, \dots, D_s$ . Každý dokument v databázi je indexován výskytem  $r$  různých klíčových slov  $W_1, \dots, W_r$ . Pro  $j$ -tý dokument sestavíme *vektor frekvencí* jednotlivých klíčových slov v  $j$ -tém dokumentu:

$$\mathbf{f}_j = \begin{pmatrix} f_{1j} \\ \vdots \\ f_{ij} \\ \vdots \\ f_{rj} \end{pmatrix} \quad \text{kde } f_{ij} = \text{frekvence klíčového slova } W_i \text{ v dokumentu } D_j$$

Existuje mnoho strategií, podle kterých se frekvence výskytu počítají. My zmíníme jen dvě nejjednodušší:

- (1) *Booleovská strategie*: frekvence je buď 1 nebo 0, podle toho, zda se dané klíčové slovo v dokumentu vyskytuje nebo ne.
- (2) *tf-strategie* (také: *term-frequency strategy*): frekvence je počet výskytů klíčového slova v dokumentu.

Bude-li seznam klíčových slov  $W_1, \dots, W_r$  dostatečně bohatý, pak můžeme předpokládat, že žádný z vektorů  $\mathbf{f}_j$  není nulový. Dostáváme tedy *frekvenční matici*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s)$$

s nenulovými sloupci.

*Dotazem* rozumíme nenulový vektor

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_r \end{pmatrix}$$

kde  $q_j$  je *váha dotazu* na klíčové slovo  $W_i$ . Váhy dotazu se počítají stejnou strategií, jako frekvence klíčových slov. Dotaz je tedy „další dokument“, proto se dotazům také říká *pseudodokumenty*.

Po zadání dotazu očekáváme výpis relevantních dokumentů, který je seřazen podle míry relevance. K tomu je zapotřebí zjistit, jak moc je dotaz  $\mathbf{q}$  podobný vektoru frekvencí  $\mathbf{f}_j$  dokumentu  $D_j$ . Ukazuje se, že vhodnou mírou podobnosti je kosinus úhlu, které vektory  $\mathbf{q}$  a  $\mathbf{f}_j$  svírají (vzhledem ke *standardnímu* skalárnímu součinu  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{R}$ ). Definujeme tedy *podobnost*  $\text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_j)$  dotazu  $\mathbf{q}$  a vektoru  $\mathbf{f}_j$  jako

$$\text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_j) = \frac{\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{f}_j}{\|\mathbf{q}\| \cdot \|\mathbf{f}_j\|}$$

Podobnost  $\mathbf{q}$  a  $\mathbf{f}_j$  je tedy kosinus<sup>1</sup> úhlu  $\varphi$ , který vektory  $\mathbf{q}$  a  $\mathbf{f}_j$  svírají. Podobnost vektorů se tedy zmenšuje se vzrůstajícím úhlem  $\varphi \in [0; \pi]$  mezi nimi.

<sup>1</sup>Proto se  $\text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_j)$  také říká *kosinová vzdálenost* vektorů  $\mathbf{q}$  a  $\mathbf{f}_j$ . Pozor:  $\text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_j)$  *není* metrika ve smyslu Definice 12.2.1. Vztah  $\arccos(\text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_j))$  však metriku *určuje*, viz Příklad B.1.6.

Pokud jsou vektory  $\mathbf{q}$  a  $\mathbf{f}_j$  *normovány*, dostaneme jednoduchou reprezentaci relevance: kovektor relevance

$$(\text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_1), \dots, \text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_s))$$

je přímo roven kovektoru  $\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{F}$ . Kovektor relevance je reprezentací *relevance* jednotlivých dokumentů vzhledem k dotazu  $\mathbf{q}$ .

Zavedené pojmy pojďme ilustrovat na jednoduchém příkladu.

**G.1.1 Příklad (Klasický vektorový model jednoduché databáze)** Předpokládejme, že je zadána databáze tří dokumentů:<sup>2</sup>

(1) *Dokument D<sub>1</sub>*:

‘Excuse me, my lord,’ said Mr Bunter, deferentially, ‘but, having seen *The Times* (delivered here every morning by air, my lord; and very expeditious I’m sure, all things considered), I made no doubt your lordship would be wishing to go to Riddlesdale at once.’

‘Riddlesdale!’ exclaimed Peter. ‘What’s the matter? Anything wrong with my brother?’

Dorothy L. Sayers, *Clouds of witness*

(2) *Dokument D<sub>2</sub>*:

‘Perhaps your lordship could be so good as to think,’ he said hopefully, ‘of a word in seven letters with S in the middle, meaning two.’

‘Also,’ suggested Lord Peter thoughtlessly.

‘I beg your lordship’s pardon. T-w-o. And seven letters.’

‘Nonsense!’ said Lord Peter. ‘How about that bath?’

Dorothy L. Sayers, *The fascinating problem of uncle Meleager’s will*

(3) *Dokument D<sub>3</sub>*:

‘I’m sorry,’ said Wimsey. ‘Whereabouts do you suppose we’ve got to, Bunter?’

The manservant consulted a map in the ray of an electric torch.

‘I think, my lord, we must have run off the proper road at Leamholt. Unless I am much mistaken, we must be near Fenchurch St Paul.’

Dorothy L. Sayers, *The nine tailors*

Zvolme klíčová slova  $W_1$ =Peter,  $W_2$ =Bunter,  $W_3$ =lord,  $W_4$ =lordship, a vytvořme vektory  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$  výskytu klíčových slov v dokumentech  $D_1$ ,  $D_2$  a  $D_3$ :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To znamená, že volíme *tf*-strategii pro výpočet frekvencí.

Matice *normovaných* frekvencí (s použitím normy, vytvořené standardním skalárním součinem) je

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{7} & 2/\sqrt{12} & 0 \\ 1/\sqrt{7} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{7} & 2/\sqrt{12} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{7} & 2/\sqrt{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Dotaz na slova  $W_1$  a  $W_3$  je (po znormování) roven vektoru

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>Angličtinu jsme zvolili proto, že nepoužívá skloňování podstatných jmen. Navíc jsme zvolili úryvky z knih stejné autorky, abychom mohli porovnávat „podobné“ dokumenty.

a kovektor relevance je

$$\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{F} = (3/\sqrt{14} \quad 4/\sqrt{24} \quad 1/2) \approx (0.80 \quad 0.82 \quad 0.50)$$

Pro dotaz  $\mathbf{q}$  je nejrelevantnější (jak jsme ostatně čekali) dokument  $D_2$ .

Základní rysy vyhledávání ve vektorovém modelu nás zatím příliš nepřekvapily. Metoda LSI využívá vektorového modelu s *komprimovanou* maticí frekvencí. Získáme tak nový rys: metoda LSI je schopna rozpoznat v jednotlivých dokumentech *skryté pojmy*. Ukážeme to na příkladu.

**G.1.2 Příklad (Proč se metodě říká *latentní sémantické indexování*?)** Uvažujme o databázi pěti dokumentů:

- (1) *Dokument  $D_1$* : Sherlock Holmes and Dr Watson.
- (2) *Dokument  $D_2$* : Sherlock Holmes: ‘This is elementary!’
- (3) *Dokument  $D_3$* : Dr Watson was not fond of elementary deduction.
- (4) *Dokument  $D_4$* : Deduction is a powerful tool.
- (5) *Dokument  $D_5$* : Linear algebra is a sheer nightmare, yet a powerful tool.

Předpokládejme, že chceme vyhledat klíčová slova *elementary* a *deduction*. Dokument  $D_3$  by samozřejmě měl mít vzhledem k dotazu největší relevanci a měl by být následován dokumenty  $D_2$  a  $D_4$ . Znalci detektivní literatury cítí, že dokument  $D_1$  by měl mít vzhledem k dotazu větší relevanci než dokument  $D_5$ : vždyť *elementary deduction* je oblíbenou součástí příběhů Sherlocka Holmese a Dr Watsona. V Příkladu G.1.7 uvidíme, že LSI tento fakt „vycítí“, pokud matici frekvencí *zkomprimujeme* pomocí SVD.

Zvolme klíčová slova  $W_1$ =elementary,  $W_2$ =deduction,  $W_3$ =Sherlock Holmes,  $W_4$ =Dr Watson,  $W_5$ =linear algebra,  $W_6$ =powerful tool a  $W_7$ =sheer nightmare.

Sestavme vektory výskytů klíčových slov v dokumentech  $D_1$  až  $D_5$ :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrice frekvencí (s použitím normy, vytvořené standardním skalárním součinem) je

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dotaz na slova  $W_1$  a  $W_3$  je (po znormování) roven vektoru

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



a vektor relevance je

$$\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{F} = (0 \quad 1/2 \quad 2/\sqrt{6} \quad 1/2 \quad 0) \approx (0 \quad 0.50 \quad 0.82 \quad 0.50 \quad 0)$$

Vidíme, že dokument  $D_1$  nebyl pro dotaz  $\mathbf{q}$  vyhodnocen jako relevantní. Situace se změní, když matici  $\mathbf{F}$  komprimujeme pomocí SVD rozkladu. Budeme ovšem muset příslušným způsobem komprimovat i dotaz  $\mathbf{q}$ . Viz Příklad G.1.7.

Nejprve metodu LSI zformulujeme obecně:

**Latentní sémantické indexování.** Předpokládejme, že je zadáno  $s$  dokumentů  $D_1, \dots, D_s$  a  $r$  klíčových slov  $W_1, \dots, W_r$ . Sestavíme (s využitím některé z indexovacích strategií) matici frekvencí  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  a označme jako

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_j$$

její  $j$ -tý sloupec,  $j = 1, \dots, s$ . Budeme předpokládat, že všechny vektory  $\mathbf{f}_j$  mají normu 1. Potom matice  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  obsahuje jako položky kosinové vzdálenosti vektorů  $\mathbf{f}_j$ .

Dále označme jako

$$\underbrace{(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h)}_{=\mathbf{U}_h} \cdot \underbrace{(\sigma_1 \cdot \mathbf{e}_1, \dots, \sigma_h \cdot \mathbf{e}_h)}_{=\mathbf{S}_h} \cdot \underbrace{(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)^T}_{=\mathbf{V}_h^T}$$

redukovaný SVD rozklad matice  $\mathbf{F}$ , kde  $h = \text{rank}(\mathbf{F}) > 0$  (viz Poznámku 14.2.7).

Protože platí rovnost

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{U}_h \mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T)^T (\mathbf{U}_h \mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T) = \mathbf{V}_h \mathbf{S}_h^T \underbrace{\mathbf{U}_h^T \mathbf{U}_h}_{=\mathbf{E}_h} \mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T = (\mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T)^T (\mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T)$$

dává dobrý smysl považovat matici

$$\mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T$$

za *aproximaci* matice  $\mathbf{F}$  v prostoru  $\mathbb{R}^h$ .

Podobným způsobem lze uvažovat i o vektoru relevance  $\mathbf{q}^T \mathbf{F}$ . Platí rovnosti

$$\mathbf{q}^T \mathbf{F} = \mathbf{q}^T (\mathbf{U}_h \mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T) = (\mathbf{U}_h^T \mathbf{q})^T (\mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T)$$

a proto můžeme vektor

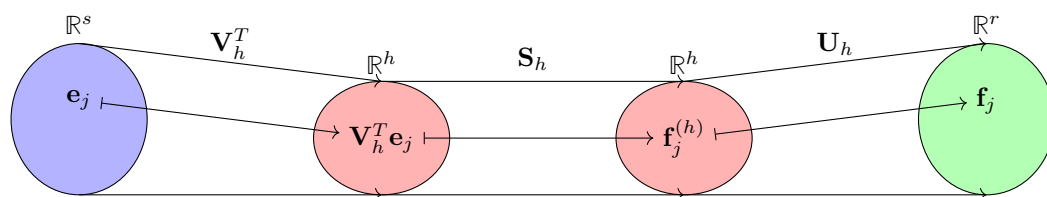
$$\mathbf{U}_h^T \mathbf{q}$$

považovat za *aproximaci* dotazu  $\mathbf{q}$  v prostoru  $\mathbb{R}^h$ .

„Cesta“ vektoru  $\mathbf{e}_j$  singulárním rozkladem matice  $\mathbf{F}$  ukazuje, že pokud označíme jako

$$\mathbf{f}_j^{(h)} = \mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T \mathbf{e}_j$$

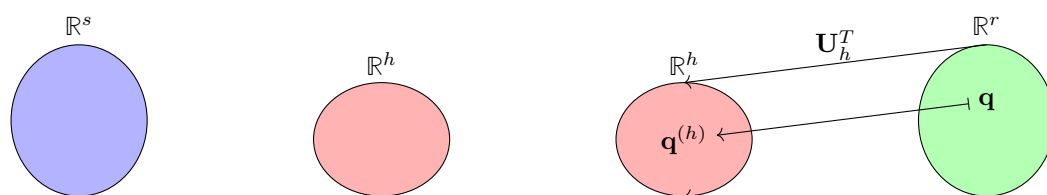
$j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{S}_h \mathbf{V}_h^T$ , je  $\mathbf{f}_j^{(h)}$  dobrou aproximací vektoru  $\mathbf{f}_j$  v prostoru  $\mathbb{R}^h$ :



Analogicky označme jako

$$\mathbf{q}^{(h)} = \mathbf{U}_h^T \mathbf{q}$$

*aproximaci* dotazu  $\mathbf{q}$  v prostoru  $\mathbb{R}^h$ :



Protože platí  $(\mathbf{U}_h \mathbf{U}_h^T)(\mathbf{U}_h \mathbf{U}_h^T) = \mathbf{U}_h \mathbf{U}_h^T$  a  $(\mathbf{U}_h \mathbf{U}_h^T)^T = \mathbf{U}_h \mathbf{U}_h^T$ , je podle Důsledku 12.4.9 vektor  $\mathbf{U}_h \mathbf{q}^{(h)} = \mathbf{U}_h \mathbf{U}_h^T \mathbf{q}$  ortogonální projekcí vektoru  $\mathbf{q}$  na prostor  $\text{im}(\mathbf{F})$ . Platí tudíž nerovnost

$$\|\mathbf{U}_h \mathbf{q}^{(h)}\| \leq \|\mathbf{q}\|$$

Navíc platí

$$(\mathbf{U}_h \mathbf{q}^{(h)})^T \mathbf{F} = \mathbf{q}^T \mathbf{U}_h \mathbf{U}_h^T \mathbf{U}_h \mathbf{S}_h \mathbf{V}_h = \mathbf{q}^T \mathbf{U}_h \mathbf{S}_h \mathbf{V}_h = \mathbf{q}^T \mathbf{F}$$

Pokud  $\mathbf{U}_h \mathbf{q}^{(h)} \neq \mathbf{o}$ , ukázali jsme nerovnost

$$\text{sim}(\mathbf{U}_h \mathbf{q}^{(h)}, \mathbf{f}_j) \geq \text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_j)$$

pro všechna  $j$ . To znamená, že projekcí jsme *zvýšili* podobnost dotazu a dokumentů.

Dále postupujeme takto:

- (1) Zvolme číslo  $k \leq h$ . Číslo  $k$  bude použito ke *komprimaci* matice  $\mathbf{F}$  následujícím způsobem. Platí rovnost

$$\mathbf{F}_k = \underbrace{(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)}_{=\mathbf{U}_k} \cdot \underbrace{(\sigma_1 \cdot \mathbf{e}_1, \dots, \sigma_k \cdot \mathbf{e}_k)}_{=\mathbf{S}_k} \cdot \underbrace{(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)^T}_{=\mathbf{V}_k^T}$$

To jest: matice  $\mathbf{F}_k$  je ve smyslu Frobeniovy normy  $\| - \|_F$  nejlepší aproximací matice  $\mathbf{F}$  hodnosti  $k$ , viz Větu 14.3.3.

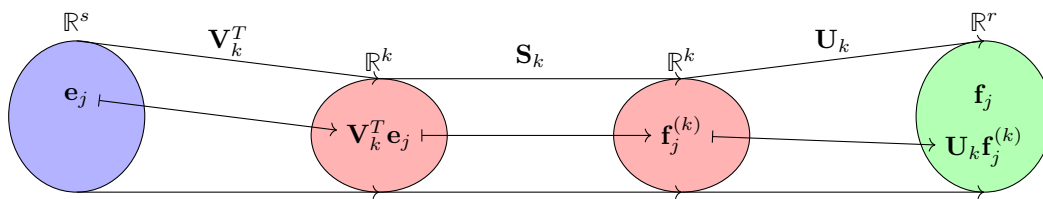
Volba čísla  $k$  je empirická a souvisí s relativní změnou

$$\frac{\|\mathbf{F} - \mathbf{F}_k\|_F}{\|\mathbf{F}\|_F} = \sqrt{\frac{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_h^2}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_h^2}}$$

matice  $\mathbf{F}$  při jejím nahrazení maticí  $\mathbf{F}_k$ .

- (2) Nyní definujeme, pro každé  $j = 1, \dots, s$ ,  $k$ -dimensionální *aproximaci*  $\mathbf{f}_j^{(k)}$  vektoru  $\mathbf{f}_j$ :

$$\mathbf{f}_j^{(k)} = \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T \mathbf{e}_j$$

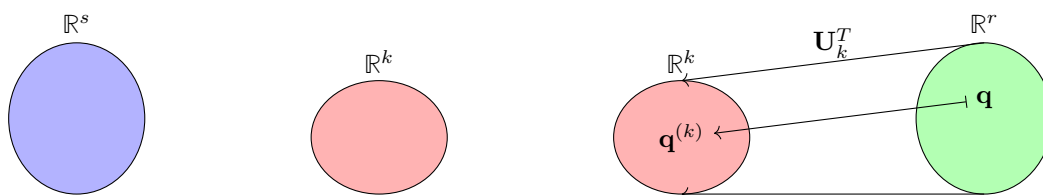


Obecně samořejmě nemůžeme očekávat rovnost  $\mathbf{f}_j = \mathbf{U}_k \mathbf{f}_j^{(k)}$ ; vektor  $\mathbf{U}_k \mathbf{f}_j^{(k)}$  je pouhou *aproximací* vektoru  $\mathbf{f}_j$ .

- (3) *Aproximaci*  $\mathbf{q}^{(k)}$  dotazu  $\mathbf{q}$  v prostoru  $\mathbb{R}^k$  definujeme rovností

$$\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{U}_k^T \mathbf{q}$$

to jest



Výše uvedená metoda tedy *zvětší* podobnost vektoru dotazu a vektoru aproximace  $j$ -tého dokumentu, pokud tuto podobnost počítáme mezi *aproximací* dotazu  $\mathbf{U}_k \mathbf{q}^{(k)}$  a *aproximací*  $\mathbf{U}_k \mathbf{f}_j^{(k)}$   $j$ -tého dokumentu. Přesněji, v nerovnosti

$$\text{sim}(\mathbf{U}_k \mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{f}_j) \geq \text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_j)$$

nahradíme levou stranu aproximací  $\text{sim}(\mathbf{U}_k \mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{U}_k \mathbf{f}_j^{(k)})$ .

Potřebujeme ovšem, aby pro dotaz  $\mathbf{q}$  platily nerovnosti

$$\|\mathbf{U}_k \mathbf{f}_j^{(k)}\| \neq 0 \quad \text{a} \quad \|\mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{q}\| \neq 0$$

Vektory  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^r$ , pro které platí  $\|\mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{x}\| \neq 0$ , lze snadno charakterisovat.

**G.1.3 Lemma** Pro vektor  $\mathbf{x}$  v  $\mathbb{R}^r$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) Vektor  $\mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{x}$  je nenulový v  $\mathbb{R}^r$ .
- (2) Vektor  $\mathbf{U}_k^T \mathbf{x}$  je nenulový v  $\mathbb{R}^k$ .
- (3) Standardní skalární součin  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_i \rangle$  v  $\mathbb{R}^r$  je nenulový pro alespoň jedno  $i = 1, \dots, k$ .

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Ať  $\mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$  a  $\mathbf{U}_k^T \mathbf{x} = \mathbf{o}$ . Potom  $\mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{x} = \mathbf{o}$  a to je spor.

Ze (2) plyne (1). Protože  $\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k = \mathbf{E}_k$ , platí  $\mathbf{U}_k^T \mathbf{x} = \mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{x}$ . Jestliže  $\mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{x} = \mathbf{o}$ , pak  $\mathbf{U}_k^T \mathbf{x} = \mathbf{o}$ .

Podmínky (2) a (3) jsou ekvivalentní. Platí  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_i \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{u}_i$ , protože pracujeme se standardním skalárním součinem. Proto je kovektor  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{U}_k = (\langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_k \rangle)$  nenulový právě tehdy, když vektor  $\mathbf{U}_k^T \mathbf{x}$  je nenulový. ■

**G.1.4 Definice** Ať  $\mathbf{F}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T$  je aproximace hodnosti  $k$  matice frekvencí  $\mathbf{F}$ . Řekneme, že vektor  $\mathbf{x}$  je *přípustný* pro  $\mathbf{F}_k$ , pokud je vektor  $\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k \mathbf{x}$  nenulový.



**G.1.5 Poznámka (Geometrická interpretace přípustnosti vektoru)** Ať SVD rozklad matice  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  je zapsán v *plném* tvaru, tj. ať platí rovnost

$$\mathbf{F} = \underbrace{(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)}_{=\mathbf{U}} \cdot \underbrace{(\sigma_1 \cdot \mathbf{e}_1, \dots, \sigma_h \cdot \mathbf{e}_h, \mathbf{o}, \dots, \mathbf{o})}_{=\mathbf{S}} \cdot \underbrace{(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)}_{=\mathbf{V}}^T$$

kde  $h = \text{rank}(\mathbf{F})$  a  $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$  a  $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ .

Protože  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$  tvoří ortonormální bázi prostoru  $\mathbb{R}^r$ , platí pro každý vektor  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{R}^r$  rovnost

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_i \rangle \cdot \mathbf{u}_i$$

a

$$\mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_i \rangle_r \cdot \mathbf{u}_i$$

kde  $k \leq h$ . Vektor  $\mathbf{x}$  je tedy přípustný pro  $\mathbf{F}_k$  přesně tehdy, pokud je alespoň jedna z jeho prvních  $k$  souřadnic vzhledem k bázi  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$  různá od nuly.

**G.1.6 Důsledek (Korektnost metody LSI)** Ať  $\mathbf{F}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T$  je aproximace hodnosti  $k$  matice frekvencí  $\mathbf{F}$ . Ať dotaz  $\mathbf{q}$  a každý domukent  $\mathbf{f}_j$  jsou přípustné pro  $\mathbf{F}_k$ . Potom metoda LSI zvětšuje podobnosti  $\mathbf{q}$  a  $\mathbf{f}_j$  při výpočtu v prostoru  $\mathbb{R}^k$ , tj. pro všechna  $j = 1, \dots, s$  platí  $\text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_j) \leq \text{sim}(\mathbf{U}_k \mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{U}_k \mathbf{f}_j^{(k)}) = \text{sim}(\mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{f}_j^{(k)})$ .

DŮKAZ. Nerovnost

$$\text{sim}(\mathbf{q}, \mathbf{f}_j) \leq \text{sim}(\mathbf{U}_k \mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{U}_k \mathbf{f}_j^{(k)})$$

plyne okamžitě z předchozích úvah. Rovnost

$$\text{sim}(\mathbf{U}_k \mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{U}_k \mathbf{f}_j^{(k)}) = \text{sim}(\mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{f}_j^{(k)})$$

plyne z toho, že  $\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k = \mathbf{E}_k$ . ■

### G.1.7 Příklad (Proč se metodě říká *latentní sémantické indexování*? — Pokračování) Databáze

- (1) *Dokument*  $D_1$ : Sherlock Holmes and Dr Watson.
- (2) *Dokument*  $D_2$ : Sherlock Holmes: ‘This is elementary!’
- (3) *Dokument*  $D_3$ : Dr Watson was not fond of elementary deduction.
- (4) *Dokument*  $D_4$ : Deduction is a powerful tool.
- (5) *Dokument*  $D_5$ : Linear algebra is a sheer nightmare, yet a powerful tool.

z Příkladu G.1.2 nevyhodnotila dokument  $D_1$  jako relevantní pro dotaz na klíčová slova  $W_1$ =elementary a  $W_2$ =deduction.

Ukážeme, že *komprimací* matice frekvencí

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

se relevance dokumentu  $D_1$  *zvýší*.

Matice  $\mathbf{F}$  má kladné singulární hodnoty (po zaokrouhlení):  $\sigma_1 = 1.40$ ,  $\sigma_2 = 1.19$ ,  $\sigma_3 = 0.90$ ,  $\sigma_4 = 0.71$ ,  $\sigma_5 = 0.57$ . Aproximace matice  $\mathbf{F}$  maticí  $\mathbf{F}_2$  hodnoty 2, tj. aproximace matice  $\mathbf{F}$  pomocí prvních dvou kladných singulárních hodnot  $\sigma_1 = 1.40$ ,  $\sigma_2 = 1.19$ , je  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{V}_2^T$ , kde

$$\mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} -0.51 & 0.15 \\ -0.39 & -0.41 \\ -0.53 & 0.35 \\ -0.51 & 0.15 \\ -0.05 & -0.30 \\ -0.21 & -0.69 \\ -0.05 & -0.30 \end{pmatrix}$$

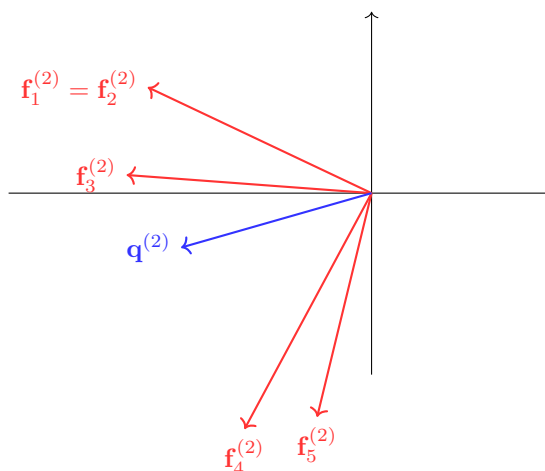
Projekce jednotlivých dokumentů do  $\mathbb{R}^2$  jsou sloupce matice

$$\mathbf{U}_2^T \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -0.74 & -0.74 & -0.81 & -0.42 & -0.18 \\ 0.35 & 0.35 & -0.06 & -0.78 & -0.74 \end{pmatrix} = (\mathbf{f}_1^{(2)}, \mathbf{f}_2^{(2)}, \mathbf{f}_3^{(2)}, \mathbf{f}_4^{(2)}, \mathbf{f}_5^{(2)})$$

a projekce dotazu  $\mathbf{q}$  je

$$\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{U}_2^T \cdot \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -0.63 \\ -0.18 \end{pmatrix}$$

Aproximace dokumentů a dotazu můžeme zakreslit do roviny



Z obrázku je také patrné, že dokument  $D_3$  byl vyhodnocen jako nejrelevantnější, následován dokumenty  $D_1$  a  $D_2$ . Skutečně: vektor relevance je roven

$$(0.75, 0.75, 0.98, 0.70, 0.49)$$

Připomeňme, že naše databáze obsahovala pět dokumentů

- (1) *Dokument  $D_1$* : Sherlock Holmes and Dr Watson.
- (2) *Dokument  $D_2$* : Sherlock Holmes: ‘This is elementary!’
- (3) *Dokument  $D_3$* : Dr Watson was not fond of elementary deduction.
- (4) *Dokument  $D_4$* : Deduction is a powerful tool.
- (5) *Dokument  $D_5$* : Linear algebra is a sheer nightmare, yet a powerful tool.

a my vyhledávali klíčová slova  $W_1$ =elementary a  $W_2$ =deduction.

Jak to, že metoda LSI vyhodnotila dokument  $D_1$  jako relevantní (dokonce *stejně* relevantní jako dokument  $D_2$ ), i když se ani jedno z vyhledávaných slov v dokumentu  $D_1$  nevyskytuje? Komprese databáze a dotazu způsobí objevení „skrytých konceptů“ v databázi.



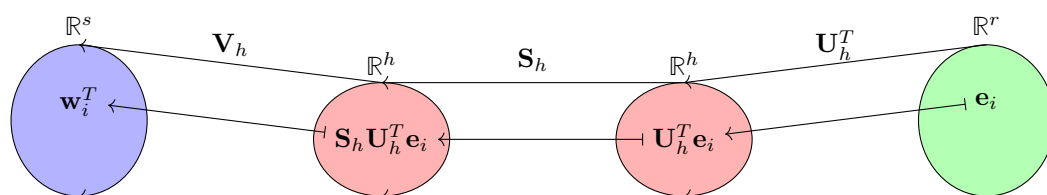
### G.1.8 Poznámka (Aproximace klíčových slov) Ať

$$\mathbf{F} = \underbrace{(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h)}_{=\mathbf{U}_h} \cdot \underbrace{(\sigma_1 \cdot \mathbf{e}_1, \dots, \sigma_h \cdot \mathbf{e}_h)}_{=\mathbf{S}_h} \cdot \underbrace{(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)^T}_{=\mathbf{V}_h}$$

je SVD rozklad matice frekvencí  $\mathbf{F}$ . Protože platí

$$\mathbf{F}^T = \underbrace{(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)}_{=\mathbf{V}_h} \cdot \underbrace{(\sigma_1 \cdot \mathbf{e}_1, \dots, \sigma_h \cdot \mathbf{e}_h)}_{=\mathbf{S}_h} \cdot \underbrace{(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h)^T}_{=\mathbf{U}_h}$$

můžeme sledovat i „obrácenou cestu“ vektoru  $\mathbf{e}_i$  z  $\mathbb{R}^r$ :



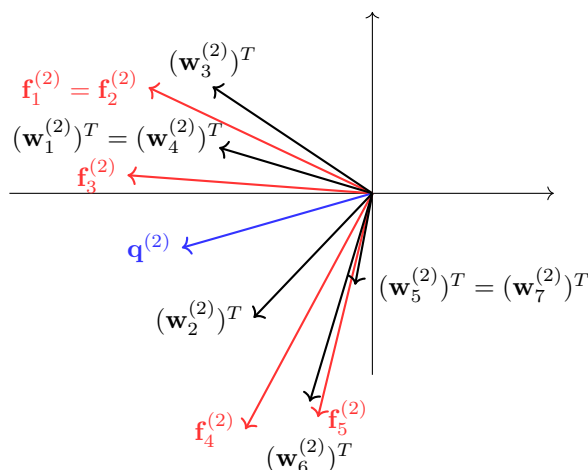
kde jsme jako  $\mathbf{w}_i^T$  označili  $i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{F}^T$ . V prostoru  $\mathbb{R}^h$  lze tedy aproximovat i kosinové vzdálenosti jednotlivých klíčových slov, pokud ztotožníme klíčové slovo  $W_i$  s  $i$ -tým řádkem matice  $\mathbf{F}$ .

Analogicky předchozímu pak lze definovat aproximace

$$\mathbf{w}_i^{(k)} = \mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{e}_i$$

$i$ -tého klíčového slova v prostoru  $\mathbb{R}^k$ , kde  $k \leq h$ .

Pro  $k = 2$  a pro databázi z Příkladu G.1.2 tak můžeme porovnat dokumenty i klíčová slova v  $\mathbb{R}^2$ :



## G.2 PCA — Analýza hlavní komponenty

Základem předchozích úvah bylo využití SVD rozkladu matice  $\mathbf{M}$  pro aproximaci matice  $\mathbf{M}$  maticemi  $\mathbf{M}_k$  hodnosti  $k$ . Vysvětlení vhodnosti této metody poskytuje matematická statistika. V této podkapitole tedy zavedeme nezbytné minimum ze statistiky, které je nutné k pochopení statistické metody, které se říká *analýza hlavní komponenty* (také: *PCA* nebo *Principal component analysis*). Více se lze dozvědět například v knihách

☞ Ian T. Joilliffe, *Principal component analysis*, Springer-Verlag, 2002.

☞ Milan Meloun a Jiří Militký, *Kompendum statistického zpracování dat*, Academia, Praha, 2006.

nebo v přehledovém článku

☞ Hervé Abdi a Lynne W. Williams, Principal component analysis, *WIREs Computational Statistics* 2 (2010), 433–459.

Analýza hlavní komponenty je metoda statistické analýzy *vícerozměrných* dat. Začneme proto jednoduchou analýzou *jednorozměrných* statistických dat.

**G.2.1 Příklad (Statistická analýza jednorozměrných dat)** Předpokládejme, že u čtrnácti osob byly naměřeny tyto hodnoty výšky:

|            |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| výška (cm) | 170 | 174 | 165 | 192 | 155 | 183 | 185 | 179 | 169 | 177 | 162 | 182 | 177 | 156 |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

Měření výšky čtrnácti osob je soubor čtrnácti hodnot *náhodné* veličiny. Základní statistickou úlohou je stanovení typu pravděpodobnostního rozdělení této náhodné veličiny a odhad parametrů tohoto pravděpodobnostního rozdělení. Nebudeme se pouštět do příliš hlubokých statistických metod a omezíme se pouze na dva parametry: na bodové odhady *míry polohy* a *míry rozptylu* naměřené náhodné veličiny.

Bodovým odhadem míry polohy je dobře známý *aritmetický průměr*:

$$\bar{v} = \frac{1}{14} \cdot \sum_{i=1}^{14} v_i \approx 173.29$$

Takto získaný odhad míry polohy lze použít pro *centrování* naměřených dat: vytvoříme tabulku hodnot  $v_i - \bar{v}$ .

|                 |       |      |       |       |        |      |       |      |       |      |        |      |      |        |
|-----------------|-------|------|-------|-------|--------|------|-------|------|-------|------|--------|------|------|--------|
| $v_i - \bar{v}$ | -0.29 | 0.71 | -8.29 | 18.71 | -18.29 | 9.71 | 11.71 | 5.71 | -4.29 | 3.71 | -11.29 | 8.71 | 3.71 | -17.29 |
|-----------------|-------|------|-------|-------|--------|------|-------|------|-------|------|--------|------|------|--------|

Vidíme, že naměřená data se odchylojí od  $\bar{v}$  v rozmezí  $-18.29$  až  $18.71$ . Mírou rozptylu od aritmetického průměru je *výběrový rozptyl*

$$s^2 = \frac{1}{14-1} \cdot \sum_{i=1}^{14} (v_i - \bar{v})^2 \approx 121.22$$

nebo *výběrová směrodatná odchylka*

$$s = \sqrt{\frac{1}{14-1} \cdot \sum_{i=1}^{14} (v_i - \bar{v})^2} \approx 11.01$$

Obecně se pro naměřené hodnoty  $v_1, \dots, v_n$  jednorozměrné náhodné veličiny  $v$  používá *aritmetický průměr*

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n v_i$$

pro bodový odhad míry polohy  $v$  a *výběrový rozptyl*

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2$$

nebo *výběrová směrodatná odchylka*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}$$

pro bodový odhad míry rozptýlení jednorozměrné náhodné veličiny  $v$ .

Proč jsou hodnoty  $\bar{v}$  a  $s$  „dobrými“ odhady míry polohy a míry rozptylu náhodné veličiny  $v$ ? Jedná se totiž o maximálně věrohodné nevychýlené<sup>3</sup> odhady střední hodnoty  $\mu$  a rozptylu  $\sigma$  náhodné veličiny  $v$ .

Aritmetický průměr  $\bar{v}$  a výběrovou směrodatnou odchylku  $s$  lze použít pro dobrý odhad toho, kde „leží většina naměřených dat“. Empirické pravidlo (kterému se někdy říká pravidlo tří  $\sigma$ ) zní:

*Zhruba 68% dat by mělo ležet v intervalu o poloměru jednoho  $s$  od  $\bar{v}$ , zhruba 95% dat by mělo ležet v intervalu o poloměru dvou  $s$  od  $\bar{v}$ , a zhruba 99% dat by mělo ležet v intervalu o poloměru tří  $s$  od  $\bar{v}$ .*

Toto pravidlo ovšem předpokládá *normální* rozdělení náhodné veličiny  $v$ .

Více se o bodových odhadech lze dočíst například v knize

☞ Douglas C. Montgomery a George C. Runger, *Applied statistics and probability for engineers*, John Wiley & Sons, 2003.



**G.2.2 Poznámka** Pozor! Při *nesprávném* použití statistických metod lze dojít k velmi zkresleným výsledkům. Příkladem jsou nejružnější informace o „průměrných platech“, „průměrných známkách“, „průměrném impaktním faktoru vědeckého časopisu“ a podobně. Velmi přístupnou a zábavnou formou se o základech statistické analýzy jednorozměrných dat a zkreslování informací pomocí statistiky lze dočíst například v knihách

<sup>3</sup>Povšimněme si, že při výpočtu  $s^2$  a  $s$  se používá počet měření *zmenšený* o jedničku. Tento fakt je velmi důležitý: zmenšení o jedničku způsobí *nevychýlenost* odhadu rozptylu.

☞ Helmut Swoboda, *Moderní statistika*, Svoboda, Praha, 1977.

☞ Darrell Huff, *How to lie with statistics*, 2. vydání, Penguin Classics, 1991

Nikdy nevěřte informacím používajících pouze slovo *průměr*!

Podobně jako v Příkladu G.2.1 lze provést analýzu *vícerozměrných* statistických dat. Nepřekvapí, že vzorce pro bodové odhady míry polohy a míry rozptýlení budou totožné s jednorozměrným případem, budou ovšem psány *vektorově*.

**G.2.3 Příklad (Statistická analýza dvourozměrných dat)** Předpokládejme, že u čtrnácti osob byly naměřeny tyto hodnoty výšky a hmotnosti:

|               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| výška (cm)    | 170 | 174 | 165 | 192 | 155 | 183 | 185 | 179 | 169 | 177 | 162 | 182 | 177 | 156 |
| hmotnost (kg) | 83  | 83  | 67  | 91  | 59  | 76  | 77  | 67  | 76  | 83  | 73  | 83  | 77  | 58  |

Jednotlivá měření si lze představit jako vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 170 \\ 83 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} 174 \\ 83 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_3 &= \begin{pmatrix} 165 \\ 67 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_4 &= \begin{pmatrix} 192 \\ 91 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_5 &= \begin{pmatrix} 155 \\ 59 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_6 &= \begin{pmatrix} 183 \\ 76 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_7 &= \begin{pmatrix} 185 \\ 77 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_8 &= \begin{pmatrix} 179 \\ 67 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_9 &= \begin{pmatrix} 169 \\ 76 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_{10} &= \begin{pmatrix} 177 \\ 83 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_{11} &= \begin{pmatrix} 162 \\ 73 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_{12} &= \begin{pmatrix} 182 \\ 83 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_{13} &= \begin{pmatrix} 177 \\ 77 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_{14} &= \begin{pmatrix} 156 \\ 58 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a lze je zakreslit do roviny následovně:



Bodovým odhadem polohy vektorové náhodné veličiny  $\mathbf{x}$  je opět *aritmetický průměr*, tentokrát počítaný v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^2$ :

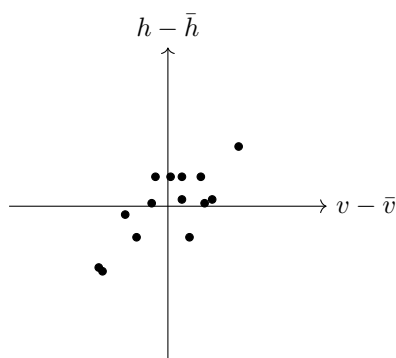
$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{14} \cdot \sum_{j=1}^{14} \mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} 173.29 \\ 75.21 \end{pmatrix}$$

Centrování matice  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{14})$  je matice  $\mathbf{M} = (\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}_{14} - \bar{\mathbf{x}})$  neboli matice

$$\begin{pmatrix} -3.29 & 0.71 & -8.29 & 18.71 & -18.29 & 9.71 & 11.71 & 5.71 & -4.29 & 3.71 & -11.29 & 8.71 & 3.71 & -17.29 \\ 7.79 & 7.79 & -8.21 & 15.79 & -16.21 & 0.79 & 1.79 & -8.21 & 0.79 & 7.79 & -2.21 & 7.79 & 1.79 & -17.21 \end{pmatrix}$$



Jednotlivé sloupce centrované matice  $\mathbf{M}$  můžeme opět zakreslit jako body v prostoru  $\mathbb{R}^2$ :



Bodový odhad míry rozptylu je zdánlivě komplikovanější než v jednorozměrném případě: definujeme *výběrovou kovarianční matici* vzorcem

$$\mathbf{C} = \frac{1}{14-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 121.30 & 80.30 \\ 80.30 & 92.18 \end{pmatrix}$$

Protože víme, že  $\mathbf{M} = (\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}_{14} - \bar{\mathbf{x}})$ , platí rovnost

$$\mathbf{C} = \frac{1}{14-1} \cdot \sum_{i=1}^{14} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T$$

která je formálně totožná se vzorcem pro výběrový rozptyl  $s^2$  v jednorozměrném případě. Co ale z matice  $\mathbf{C}$  lze vyčíst?

Matice  $\mathbf{C}$  obsahuje kromě rozptylu veličin výšky a hmotnosti (to jsou čísla na hlavní diagonále) i *kovarianci* veličin výšky a hmotnosti (to jsou čísla na vedlejší diagonále). Velmi zhruba řečeno: hodnota 80.30 signalizuje kladnou kovarianci výšky a hmotnosti: čím je člověk těžší, tím je vyšší (a naopak).

Povšimněme si *součtu* 213.48 prvků 121.30 a 92.18 na hlavní diagonále: tento součet udává *celkový rozptyl naměřených dat*.

**G.2.4 Definice** Ať matice  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$  má sloupcový zápis  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ . Matici  $\mathbf{X}$  interpretujeme jako  $s$  nezávislých měření  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$  náhodné veličiny v  $\mathbb{R}^r$ . Definujeme:

- (1) Vektor

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{s} \cdot \sum_{j=1}^s \mathbf{x}_j$$

je *bodový odhad střední hodnoty*  $\mathbf{X}$ .

- (2) Matice

$$\mathbf{M} = (\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}})$$

je *centrování matice*  $\mathbf{X}$ .

- (3) Matici

$$\mathbf{C} = \frac{1}{s-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T = \frac{1}{s-1} \cdot \sum_{j=1}^s (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T$$

říkáme *výběrová kovarianční matice* matice  $\mathbf{M}$ .

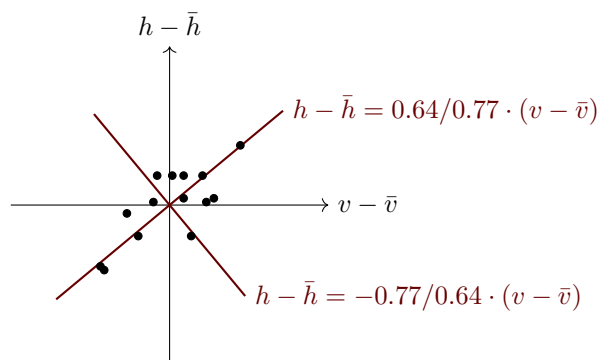
**G.2.5 Příklad (Analýza hlavní komponenty dat z Příkladu G.2.3)** V Příkladu G.2.3 jsme našli výběrovou kovarianční matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 121.30 & 80.30 \\ 80.30 & 92.18 \end{pmatrix}$$

měření výšky a hmotnosti. Víme, že celkový rozptyl naměřených dat je  $121.30 + 92.18 = 213.48$ , a že hodnota 80.30 udává kovarianci výšky a hmotnosti. Analýza hlavní komponenty nám dovolí najít *nové proměnné*, které budou mít *stejný* celkový rozptyl a *nulovou* kovarianci.

Tyto nové proměnné nalezneme pomocí SVD rozkladu matice  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -0.77 & -0.64 \\ -0.64 & 0.77 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 188.37 & 0.00 \\ 0.00 & 25.11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.77 & -0.64 \\ -0.64 & 0.77 \end{pmatrix}^T$$



Protože

$$\frac{188.37}{213.48} \approx 0.8824$$

znamená to, že *hlavní komponenta*, tj. přímka s rovnicí

$$h - \bar{h} = 0.64/0.77 \cdot (v - \bar{v})$$

je zodpovědná za 88.24% rozptylu dat. S takto předepsanou tolerancí rozptylu tedy můžeme považovat naměřená data za jednorozměrná, zadaná rovnicí

$$h = 0.64/0.77 \cdot (v - 173.29) + 75.21$$

## Dodatek I

# Aplikace — Lineární kódy

*Barry Kripke:* You got Siwi, ha? The voice wecognition on that thing is tewwible, look:  
“Siwi, can you wecommend a westauwant?”  
*Siri:* I’m sorry, Bawwy, I don’t understand “wecommend a westauwant”.

The Big Bang Theory, *The Beta Test Initiation*

V tomto dodatku nahlédneme do teorie lineárních kódů. V podkapitole I.1 ukážeme, že vektory v lineárním podprostoru (například)  $\mathbb{R}^3$  lze chápat jako *kódová slova*, která ochraňují informaci před poškozením. Vybudování „použitelných“ lineárních kódů ovšem vyžaduje práci v lineárních prostorech tvaru  $\mathbb{F}^n$ , kde  $\mathbb{F}$  je *konečné těleso*. V podkapitole I.2 tedy zavedeme dvě podstatné ingredience teorie lineárních kódů: *ortogonalitu* v  $\mathbb{F}^n$  a *Hammingovu metriku* v  $\mathbb{F}^n$ . Lineární kódy pak zavedeme v podkapitole I.3 a podkapitola I.4 je věnována *detekci* a *opravě* chyb v kódových slovech. Nakonec, v podkapitole I.5, upozorníme na další témata a na rozdílná značení v literatuře věnované teorii kódů.

V matematice mají pojmy *kódování* a *šifrování* přesně vymezený smysl, rozhodně nejde o totožné procedury. V obou případech jde o výměnu zpráv mezi dvěma stranami (tradičně se jim říká *Alice* a *Bob*), rozdíl je v tom, jakým způsobem se chová *informační kanál*, kterým zprávy putují.

- (1) *Kódování:* Alice a Bob si vyměňují zprávy. Při přenosu zpráv může dojít k poškození vyslané zprávy, nemůže dojít k odposlechu posílané zprávy (nebo nám takový odposlech nevádí).

Předpokládejme, že Alice píše Bobovi. Chceme umožnit Bobovi opravit přijatou poškozenou zprávu bez nutnosti toho, aby zaslal zpětný dotaz Alice.

K řešení tohoto problému lze použít metody lineární algebry: takzvané lineární kódy.

- (2) *Šifrování:* Alice a Bob si vyměňují zprávy. Při přenosu zpráv nemůže dojít k poškození vyslané zprávy, ale může dojít k odposlechu zprávy třetí stranou (ta se obvykle jmenuje Eve, z anglického *eavesdropper* — ten, kdo tajně naslouchá.).

Předpokládejme, že Alice píše Bobovi. Chceme takovou komunikaci, kterou Eve nedokáže efektivně (tj. v reálném čase) přechyčkat.

K účinnému šifrování je třeba použít poměrně sofistikovaných metod, které jsou mimo oblast lineární algebry. V tomto textu se kryptografií věnovat nebudeme. Základní myšlenky kryptografie lze najít například ve skriptu

☞ J. Velebil, *Diskrétní matematika*, Praha, 2007

a podrobněji se o šifrování lze dočíst například v knize

☞ N. Koblitz, *A course in number theory and cryptography*, Springer-Verlag, New York, 1994.

## I.1 Uvedení do lineárních kódů

Teorie lineárních kódů je vlastně vtipnou aplikací teorie lineárního podprostoru lineárního prostoru typu  $\mathbb{F}^n$ , kde  $\mathbb{F}$  je těleso. Zatímco v reálných aplikacích bude těleso  $\mathbb{F}$  vždy *konečné*, začneme příkladem lineárního podprostoru v  $\mathbb{R}^3$ . Všechny geometrické aspekty teorie lineárních kódů lze totiž na takovém příkladu dobře ukázat.

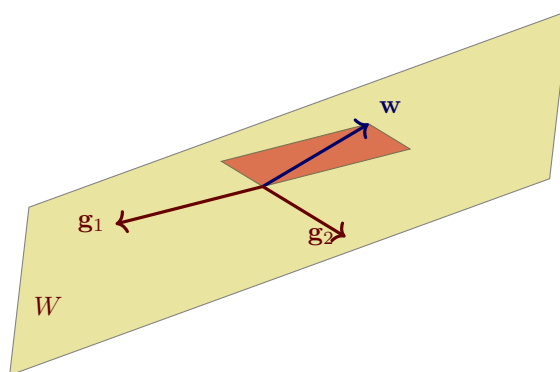
**I.1.1 Příklad (Rovina v  $\mathbb{R}^3$  jako lineární kód)** Označme jako  $W$  rovinu  $\mathbb{R}^3$  s obecnou rovnicí  $x + y - z = 0$ . Víme, že  $W$  je lineární podprostor dimenze 2 v  $\mathbb{R}^3$ . Ukážeme, že vlastnosti lineárního podprostoru jsou schopny postihnout dva důležité aspekty teorie kódů:

- (1) Souřadnicový systém ve  $W$  lze využít pro *generování* kódového slova z informačních bitů. Kódová slova mají větší délku než je délka posílané informace. Nejde o marnotratnost: uvidíme, že tato redundance umožní detekovat, zda při přenosu kódového slova došlo k chybě. V některých případech lze dokonce (bez nutnosti opětovného zaslání zprávy) takovou chybu opravit.
- (2) Rovina  $W$  má normálový vektor, který umožňuje *zkontrolovat*, zda přijaté slovo je opravdu kódovým slovem (a tím pádem, zda při přenosu nedošlo k chybě).

Chceme-li použít k analýze výše uvedených problémů použít lineární algebru, pak dává velký smysl považovat (kódová) slova za *vektory* v  $\mathbb{R}^3$ . Pojďme nyní oba výše uvedené body detailně probrat:

- (1) Volbou uspořádané báze  $W$  lze generovat prvky  $W$ .

- (a) Zvolme ve  $W$  například uspořádanou bázi  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ , kde  $\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (b) Protože uspořádaná báze  $W$  určuje ve  $W$  systém souřadnic (viz Kapitulu 3), platí:  $\mathbf{w} \in W$  právě tehdy, když existují *jednoznačně* určená  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  tak, že  $a_1 \cdot \mathbf{g}_1 + a_2 \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{w}$ .



- (c) Vektor  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  budeme považovat za vektor *informačních bitů*. Neboli: volbou reálných čísel  $a_1, a_2$  lze vygenerovat vektor  $\mathbf{w} \in W$  takto:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{generující matice } \mathbf{G}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + a_2 \\ 3a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{w}$$

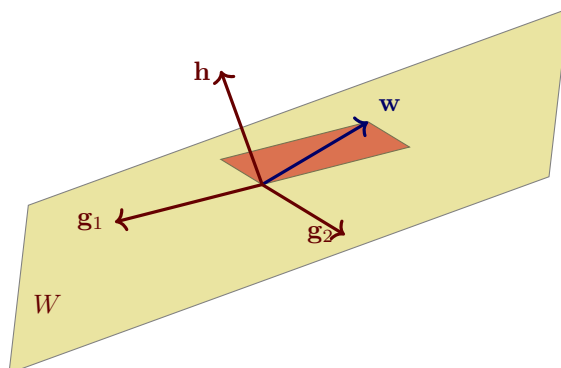
Vektoru  $\mathbf{w}$  z  $W$  budeme říkat *kódové slovo*. Alice odešle kódové slovo  $\mathbf{w}$  Bobovi.

Vektor  $\mathbf{w}$  obsahuje *redundantní informaci*: informační „bity“ byly 2, kódové slovo má délku 3.<sup>1</sup> Tato redundantní informace chrání původní informační bity před poškozením.

- (2) Volbou ortogonálního doplňku  $W$  lze testovat, zda vektory leží ve  $W$ . Co je ortogonální doplněk vysvětlíme přesně v podkapitole I.2. Zatím se odvoláváme na intuici v  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>1</sup>Podíl délky informace a celkové délky kódového slova (tzv. *information rate* kódu) je tedy v našem případě 2/3.

- (a)  $W$  má normálový vektor  $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Přesněji:  $\mathbf{w} \in W$  právě tehdy, když platí  $\mathbf{h}^T \cdot \mathbf{w} = 0$ .



Neboli: *syndrom*  $s$  vektoru  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ , kde

$$s = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{kontrolní matice}} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

určuje *míru příslušnosti* vektoru  $\mathbf{v}$  do  $W$ .

Povšimněme si: syndrom  $s$  vektoru  $\mathbf{v}$  je hodnota standardního skalárního součinu  $\langle \mathbf{h} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{v}$  v prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

Syndrom vektoru  $\mathbf{v}$  je tedy nulový právě tehdy, když jsou vektory  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{h}$  ortogonální. V podkapitole **I.2** zobecníme pojem ortogonalitu vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu z prostorů  $\mathbb{R}^n$  na prostory tvaru  $\mathbb{F}^n$ , kde  $\mathbb{F}$  je obecné těleso.

Pojďme předvést „provoz“ lineárního kódu  $W$ .

- (1) Alice chce Bobovi zaslat informaci  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- (2) Alice zná generující matici  $\mathbf{G}$  podprostoru  $W$  a může tedy vygenerovat kódové slovo  $\mathbf{G} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$ .
- (3) Alice pošle slovo  $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$  Bobovi.
- (4) Bob přijme slovo  $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$  a není si jist, zda při přenosu náhodou nedošlo k poškození posílané informace.
- (5) Bob spočte syndrom přijatého slova:  $\mathbf{h}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = -1$ . Syndrom přijatého slova je nenulový, k chybě jistě došlo. Ovšem na jaké posici k chybě došlo? A jak chybu opravit? Bob je v koncích: reálných čísel je příliš mnoho. Chybu lze detekovat, nelze ovšem zjistit, ve které položce k chybě došlo, natož pak zrekonstruovat poškozenou položku.

Příklad **I.1.1** byl geometricky velmi názorný. Ukazoval však lineární kód, který není prakticky využitelný. Další příklad je velmi známý a používaný lineární kód 10-ISBN. Povšimněme si, že geometrické aspekty kódu 10-ISBN jsou *stejně* jako aspekty kódu z Příkladu **I.1.1**.

**I.1.2 Příklad (Kód 10-ISBN)** Kód 10-ISBN (*International Standard Book Number*) je velmi známým příkladem lineárního kódu. Pro kódová slova jsou použity symboly z množiny  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X\}$ . Chápeme je jako zbytky po dělení číslem 11. Protože 11 je prvočíslo, znamená to, že kódujeme nad tělesem  $\mathbb{Z}_{11}$ .

Příkladem kódového slova kódu 10-ISBN je řetězec

$$0-141-01878-X$$

kde jednotlivé skupiny znamenají:

- (1) 0 jazyk knihy (angličtina)
- (2) 141 nakladatelství (v tomto případě Penguin Mathematics)
- (3) 01878 číslo knihy, přidělené nakladatelstvím
- (4)  $X$  kontrolní bit

Obecně: kódové slovo kódu 10-ISBN je řetězec  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}$ , splňující rovnost  $\sum_{i=1}^{10} ix_i = 0$  v  $\mathbb{Z}_{11}$ . To znamená, že řetězec  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}$  je kódovým slovem kódu 10-ISBN právě tehdy, když jeho *syndrom*

$$\underbrace{(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X)}_{\text{kontrolní matice } \mathbf{H}^T \text{ kódu 10-ISBN}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix}$$

je nula v  $\mathbb{Z}_{11}$ .

Informace o knize tvoří *vektor*  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$  v  $(\mathbb{Z}_{11})^9$ . Kontrolní bit se spočte maticovým násobením

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}}_{\text{generující matice } \mathbf{G} \text{ kódu 10-ISBN}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{Z}_{11}$ .

Kód 10-ISBN tedy vykazuje stejné rysy jako kód z Příkladu I.1.1. Shrňme tedy pozorování o kódu 10-ISBN:

- (1) Kódová slova kódu 10-ISBN jsou vektory v lineárním podprostoru  $W$  lineárního prostoru  $(\mathbb{Z}_{11})^{10}$ .  
Sloupce generující matice  $\mathbf{G}$  jsou tvořeny uspořádanou bází  $B$  podprostoru  $W$ .  
Dimenze podprostoru  $W$  je 9, kód má 9 informačních „bitů“.

- (2) Informace o knize tvoří *vektor souřadnic*  $\mathbf{a}$  vektoru  $\mathbf{w}$  ve  $W$  vzhledem k uspořádané bázi  $B$ . Platí vztah  $\mathbf{w} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}$ .
- (3) Testem při příjmu slova  $\mathbf{v}$  ze  $(\mathbb{Z}_{11})^{10}$  je výpočet *syndromu*  $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{v}$  slova  $\mathbf{v}$ .
- (4) Očekáváme, že sloupce matice  $\mathbf{H}^T$  jsou tvořeny bází *ortogonálního doplňku* kódu  $W$ . Protože ale ortogonalitě v prostoru  $(\mathbb{Z}_{11})^{10}$  zatím nerozumíme, bereme to jen jako slogan.

## I.2 Ortogonalita v $\mathbb{F}^n$ a Hammingova metrika v $\mathbb{F}^n$

Pro teorii kódů jsou důležité pojmy *ortogonálního doplňku* lineárního podprostoru prostoru  $\mathbb{F}^n$  a *vzdálenosti* vektorů v  $\mathbb{F}^n$ .

Některé úvahy o ortogonalitě v  $\mathbb{F}^n$ , které uvedeme v této podkapitole, jsou speciálními případy obecnějších výsledků z Kapitoly 15. Kapitola 15 ovšem není třeba číst (navíc v Kapitole 15 je z úvah vyloučeno důležité těleso  $\mathbb{Z}_2$ ), všechny nutné pojmy jsou vysvětleny níže v textu.

Ortogonální doplněk lineárního podprostoru prostoru  $\mathbb{F}^n$  by měl souviset s definicí kolmosti (ortogonalitu) v prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Připomeňme, že kolmost vektorů jsme zavedli pomocí skalárního součinu, ovšem *pouze* pro lineární prostory nad tělesem  $\mathbb{R}$ . Jak zavést kolmost v lineárním prostoru  $\mathbb{F}^n$  nad obecným tělesem  $\mathbb{F}$ ? Uvidíme, že budeme muset z požadavků na skalární součin slevit. Důvodem je to, že (na rozdíl od tělesa  $\mathbb{R}$ ) obecné těleso  $\mathbb{F}$  nelze uspořádat. Dokonce *žádné konečné* těleso uspořádat nelze, viz Příklad 1.3.9

Pokud chceme studovat „skalární součiny“ v prostorech tvaru  $\mathbb{F}^n$ , musíme tedy z Definice 12.1.2 určitě vynechat podmínku  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0$ , protože takovou nerovnost v obecném tělese  $\mathbb{F}$  nemůžeme obecně psát. Povšimněme si ale, že Definice 12.2.5 *kolmosti* vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  používala pouze rovnost  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0$ , která má smysl v *jakémkoli* tělese.

Standardní skalární součin vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  v  $\mathbb{R}^n$  byl definován maticovým součinem  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ , viz Příklad 12.1.3. Takové maticové násobení má smysl pro jakékoli vektory z  $\mathbb{F}^n$  a příslušné zobrazení  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$  se chová velmi podobně jako standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ .

**I.2.1 Tvzení** *At  $\mathbb{F}$  je jakékoli těleso. Zobrazení  $\gamma : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$  z množiny  $\mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n$  do množiny  $\mathbb{F}$  se chová velmi podobně jako standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ . To jest, platí následující:*

- (1) Pro všechna  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z  $\mathbb{F}^n$  platí rovnost  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \gamma(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .
- (2) Pro všechna  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{F}^n$  je zobrazení  $\gamma(\mathbf{x}, -) : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$  lineární.

*Podmínka*

- (3) Rovnost  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  platí právě tehdy, když  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

ale obecně neplatí. Protipříklad lze nalézt například v  $(\mathbb{Z}_2)^2$ .

DŮKAZ.

- (1) Protože  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$  a  $\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y})^T$ , platí  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \gamma(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . Každá matice rozměrů  $1 \times 1$  je totiž symetrická.
- (2) Pro všechna  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{F}^n$  je zobrazení  $\gamma(\mathbf{x}, -) : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$  lineární, protože  $\gamma(\mathbf{x}, a_1 \cdot \mathbf{y}_1 + a_2 \cdot \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}^T \cdot (a_1 \cdot \mathbf{y}_1 + a_2 \cdot \mathbf{y}_2) = a_1 \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}_1 + a_2 \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}_2 = a_1 \cdot \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + a_2 \cdot \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$ .
- (3) Pro  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  v  $(\mathbb{Z}_2)^2$  platí  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} = 0$ .

■

V Kapitole 12 jsme zavedli *kolmost* (také: *ortogonalitu*) vzhledem ke skalárnímu součinu. V prostorech tvaru  $\mathbb{F}^n$  *nemáme* možnost definovat skalární součin, protože těleso  $\mathbb{F}$  typicky nejde uspořádat. Skalární součin tedy „nahradíme“ zobrazením  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ .

**I.2.2 Definice (Ortogonalita vzhledem ke  $\gamma$ )** Řekneme, že vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z  $\mathbb{F}^n$  jsou *ortogonální* vzhledem ke  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ , pokud platí  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = 0$ .

Ortogonalita vzhledem ke  $\gamma$  nám nakonec umožní definovat *ortogonální doplněk* lineárního podprostoru. Tato definice je zcela analogická úvahám z podkapitoly 12.5 pro prostory se skalárním součinem.

**I.2.3 Definice (Ortogonální doplněk lineárního podprostoru)** Pro lineární podprostor  $W$  prostoru  $\mathbb{F}^n$  definujeme jeho *ortogonální doplněk*

$$W^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n \mid \gamma(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = 0 \text{ pro všechna } \mathbf{w} \in W\}$$

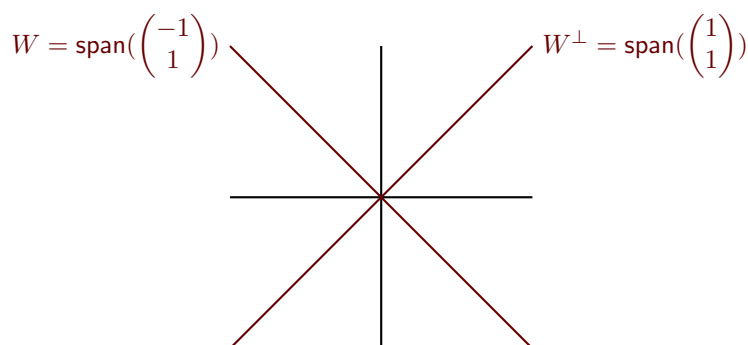
**I.2.4 Příklad** V lineárním prostoru  $\mathbb{R}^2$  je  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$  standardní skalární součin. Pojmy kolmosti a ortogonálního doplňku podprostoru  $\mathbb{R}^2$  tedy mají intuitivní význam. Například pro

$$W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

je

$$W^\perp = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

viz obrázek



Příklad I.2.4 naznačuje, že by měla vždy platit nerovnost  $W \neq W^\perp$ . Že tomu tak *není*, ukazuje následující příklad nad  $\mathbb{Z}_2$ . V případě lineárních kódů se budeme velmi často zabývat ortogonalitou nad  $\mathbb{Z}_p$ , kde  $p$  je prvočíslo. Budeme tedy muset „opustit intuici“ a brát definici ortogonalitativy velmi formálně.

**I.2.5 Příklad (Rovnost  $W = W^\perp$  může platit)** Pro podmnožinu  $W = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$  lineárního prostoru  $(\mathbb{Z}_2)^2$  platí:<sup>2</sup>

(1)  $W$  je lineární podprostor prostoru  $(\mathbb{Z}_2)^2$ .

(2)  $W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $\dim(W) = 1$ .

(3)  $W^\perp = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^2 \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ a současně } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} = W$ .

**I.2.6 Tvzení (Vlastnosti ortogonálního doplňku)** Ať  $W$  je lineární podprostor prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Potom platí:

(1)  $W^\perp$  je lineární podprostor prostoru  $\mathbb{F}^n$ .

(2) Je-li  $\dim(W) = k$ , potom  $\dim(W^\perp) = n - k$ .

(3) Platí  $(W^\perp)^\perp = W$ .

<sup>2</sup> „Absurdní“ rovnost  $W = W^\perp$  je způsobena *degenerovaností* podprostoru  $W$  prostoru  $(\mathbb{Z}_2)^2$ . Všechny vektory podprostoru  $W$  jsou totiž na sebe navzájem kolmé.



DŮKAZ.

- (1) Připomeňme, že jsme jako  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  označili maticový součin  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ . Podle Tvzení 1.2.1 platí, že zobrazení  $\gamma(\mathbf{x}, -) : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$  je lineární pro jakékoli  $\mathbf{x}$ . Proto je, pro jakékoli  $\mathbf{w}$  z  $W$ , podle Tvzení 2.3.12  $\ker(\gamma(\mathbf{w}, -))$  lineární podprostor prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Definice 1.2.3 říká, že

$$W^\perp = \bigcap_{\mathbf{w} \in W} \ker(\gamma(\mathbf{w}, -))$$

a tudíž  $W^\perp$  je lineární podprostor prostoru  $\mathbb{F}^n$  podle Tvzení 1.6.7.

- (2) Označme jako  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  uspořádanou bázi  $W$ . Pro matici  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  platí:  $\mathbf{x}$  je ve  $W^\perp$  právě tehdy, když  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Neboli platí  $W^\perp = \ker(\mathbf{A}^T)$ .

Protože  $\text{rank}(\mathbf{A}^T) = \text{rank}(\mathbf{A}) = k$  a protože  $\mathbf{A}^T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^k$ , je  $\text{def}(\mathbf{A}^T) = n - k$  podle Věty 3.3.6 o dimenzi jádra a obrazu.

To znamená, že  $\dim(W^\perp) = n - k$ .

- (3) Zjevně platí  $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ , protože každý vektor z  $W$  je kolmý na jakýkoli vektor z  $W^\perp$ . Podle druhé části důkazu platí  $\dim((W^\perp)^\perp) = \dim(W)$ . Rovnost  $(W^\perp)^\perp = W$  pak plyne z Tvzení 3.3.1. ■

Připomeňme Definici 12.2.1 *metriky* na lineárním prostoru  $L$ : funkci  $d : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje následující tři podmínky

- (1)  $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0$  pro všechny vektory  $\vec{v}, \vec{w}$ , rovnost platí pouze pro  $\vec{v} = \vec{w}$ .
- (2)  $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$  pro všechny vektory  $\vec{v}, \vec{w}$ .
- (3)  $d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{u}) + d(\vec{u}, \vec{w})$  pro všechny vektory  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ .

říkáme *metrika* na lineárním prostoru  $L$ . Zápis  $d(\vec{v}, \vec{w})$  čteme *vzdálenost vektorů  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$*  (také: *vzdálenost vektoru  $\vec{v}$  od vektoru  $\vec{w}$* ).

Pro potřeby lineárních kódů zavedeme velmi užitečnou metriku na lineárním prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Zdůrazněme, že tato metrika *nevzniká* ze skalárního součinu, protože na  $\mathbb{F}^n$  skalární součin obecně *neexistuje*.

**1.2.7 Tvzení (Hammingova metrika na  $\mathbb{F}^n$ )** Pro vektory  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  z  $\mathbb{F}^n$  označme jako  $d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  počet různých položek vektorů  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ . Potom  $d_H$  je metrika na  $\mathbb{F}^n$ . Budeme jí říkat Hammingova metrika (také: Hammingova vzdálenost).

DŮKAZ. Povšimněme si, že pro každé  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  z  $\mathbb{F}^n$  podle definice  $d_H$  platí, že  $d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  je přirozené číslo a platí  $0 \leq d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq n$ .

- (1) Nerovnost  $d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \geq 0$  platí pro každé  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  z  $\mathbb{F}^n$ . A podle definice  $d_H$  rovnost  $d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$  platí právě tehdy, když  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ .
- (2) Pro každé  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  z  $\mathbb{F}^n$  rovnost  $d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v})$  platí z definice  $d_H$ .
- (3) Zvolme libovolné  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$  z  $\mathbb{F}^n$  a označme jako  $v_i, w_i$  a  $u_i$  jejich položky. Potom platí

$$\{i \mid v_i \neq w_i\} \subseteq \{i \mid v_i \neq u_i\} \cup \{i \mid u_i \neq w_i\}$$

a tedy

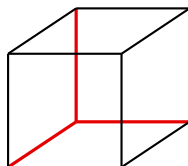
$$\text{card}(\{i \mid v_i \neq w_i\}) \leq \text{card}(\{i \mid v_i \neq u_i\} \cup \{i \mid u_i \neq w_i\})$$

S použitím principu inkluze a exkluze z Poznámky 3.3.3 dostáváme

$$\begin{aligned} d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \text{card}(\{i \mid v_i \neq w_i\}) \\ &\leq \text{card}(\{i \mid v_i \neq u_i\} \cup \{i \mid u_i \neq w_i\}) \\ &= \text{card}(\{i \mid v_i \neq u_i\}) + \text{card}(\{i \mid u_i \neq w_i\}) - \text{card}(\{i \mid v_i \neq u_i\} \cap \{i \mid u_i \neq w_i\}) \\ &\leq \text{card}(\{i \mid v_i \neq u_i\}) + \text{card}(\{i \mid u_i \neq w_i\}) \\ &= d_H(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + d_H(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Důkaz je u konce. ■

**I.2.8 Příklad (Hammingova vzdálenost v prostoru  $(\mathbb{Z}_2)^3$ )** Osm vektorů  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  prostoru  $(\mathbb{Z}_2)^3$  si lze představit jako vrcholy krychle (červené hrany jsou souřadnicové osy):



Hammingova vzdálenost dvou vektorů je pak délka nejkratší cesty po hranách krychle z jednoho vrcholu do druhého. Podobnou představu lze mít o Hammingově vzdálenosti vektorů v prostoru  $(\mathbb{Z}_2)^n$ : vektory v  $(\mathbb{Z}_2)^n$  jsou vrcholy  $n$ -dimensionální krychle a Hammingova vzdálenost dvou vektorů je délka nejkratší cesty po hranách krychle z jednoho vrcholu do druhého.

Připomeňme Poznámku 12.2.15: v jakémkoli lineárním prostoru vybaveném metrikou můžeme mluvit o sférah a koulích. Koule a sféry v prostorech tvaru  $\mathbb{F}^n$  s Hammingovou metrikou budou hrát velkou roli při analýze detekce a korekce chyb v lineárních kódech. Zjistíme, kolik prvků takové koule a sféry obsahují v prostoru  $(\mathbb{Z}_p)^n$ .

**I.2.9 Příklad (Počet prvků v kouli v prostoru  $(\mathbb{Z}_p)^n$  s Hammingovou metrikou)** Zjistíme počet prvků koule  $\text{Ball}_t(\mathbf{w})$  se středem v bodě  $\mathbf{w}$  a poloměrem  $t$ , kde  $t$  je přirozené číslo, v prostoru  $(\mathbb{Z}_p)^n$  s Hammingovou metrikou. Kouli lze „rozřezat“ na jednotlivé sféry o poloměrech  $0, 1, \dots, t$ . Přesněji, platí rovnost

$$\text{Ball}_t(\mathbf{w}) = \text{Sphere}_0(\mathbf{w}) \cup \text{Sphere}_1(\mathbf{w}) \cup \dots \cup \text{Sphere}_{t-1}(\mathbf{w}) \cup \text{Sphere}_t(\mathbf{w})$$

kde jednotlivé sféry jsou navzájem disjunktní množiny.

Stačí tedy spočítat počet prvků ve sféře  $\text{Sphere}_i(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \mid d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = i\}$ , kde  $i = 0, \dots, t$ . Máme tedy spočítat počet vektorů  $\mathbf{v}$ , které mají přesně  $i$  položek odlišných od položek vektoru  $\mathbf{w}$ . Z  $n$  posic lze vybrat  $i$  posic přesně

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$$

způsoby. Každou takto vybranou položku vektoru  $\mathbf{v}$  lze obsadit přesně  $p-1$  znaky. Všech  $i$  položek tedy lze obsadit  $(p-1)^i$  způsoby.

Počet prvků  $\text{Sphere}_i(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \mid d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = i\}$  je tedy roven výrazu

$$\binom{n}{i} \cdot (p-1)^i$$

a počet prvků  $\text{Ball}_t(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \mid d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq t\}$  je roven součtu

$$\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \cdot (p-1)^i$$

## I.3 Lineární kódy nad tělesem $\mathbb{F}$

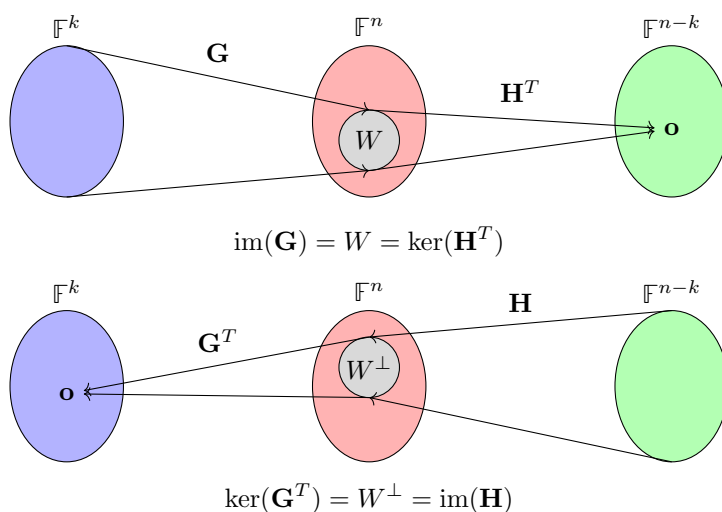
Úvahy z podkapitoly I.1 nás vedou k následující definici.

**I.3.1 Definice (Lineární kód nad tělesem  $\mathbb{F}$ )** Lineární kód nad  $\mathbb{F}$  délky  $n$  a dimenze  $k$  je lineární podprostor  $W$  prostoru  $\mathbb{F}^n$ , kde  $\dim(W) = k$ ,  $0 \leq k \leq n$ . V případě, kdy  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$  pro  $p$  prvočíslo, mluvíme také o lineárním  $p$ -kódu délky  $n$  a dimenze  $k$ . Vektorům z  $\mathbb{F}^n$  říkáme slova a vektorům z  $W$  kódová slova (kódu  $W$ ).

Lineární kód je tedy *jakýkoli* lineární podprostor prostoru  $\mathbb{F}^n$ . Lineární podprostory lze popsat dvěma matricemi, které v teorii kódů hrají důležitou úlohu. Existence těchto matic plyne okamžitě z úvah o řešení soustav lineárních rovnic z Kapitoly 6. Přesto tyto úvahy připomeneme:

- (1) *Generující matice* podprostoru  $W$  je jakákoli matice  $\mathbf{G} : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$  se sloupcovým zápisem  $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k)$ , kde  $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k)$  je uspořádaná báze podprostoru  $W$ .  
Pro slovo  $\mathbf{w}$  tedy platí:  $\mathbf{w}$  je ve  $W$  právě tehdy, když existuje *jednoznačně* určený vektor  $\mathbf{a}$  z  $\mathbb{F}^k$  tak, že  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w}$ . Vektor  $\mathbf{a}$  je *vektor souřadnic* vektoru  $\mathbf{w}$  vzhledem k uspořádané bázi  $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k)$ .
- (2) Protože  $W$  je lineární podprostor prostoru  $\mathbb{F}^n$ , existuje homogenní soustava rovnic<sup>3</sup> tvaru  $(\mathbf{H}^T \mid \mathbf{o})$ , kde matice  $\mathbf{H}^T$  má  $n$  sloupců a  $n - k$  lineárně nezávislých řádků a platí:  $\mathbf{w}$  je ve  $W$  právě tehdy, když platí  $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{w} = \mathbf{o}$ . Matici  $\mathbf{H}^T$  říkáme *kontrolní matice* kódu  $W$ .

Generující matice  $\mathbf{G}$  a kontrolní matice  $\mathbf{H}^T$  lineárního kódu  $W$  nejsou určeny jednoznačně. Přesto jsou spolu spojeny důležitými vztahy



které přesně zformulujeme v následujícím tvrzení.

**I.3.2 Tvrzení (Vztah kontrolní a generující matice lineárního kódu)** *At  $W$  je lineární kód délky  $n$  a dimenze  $k$  nad  $\mathbb{F}$ . Potom platí:*

- (1) *Pro jakoukoli generující matici  $\mathbf{G} : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$  kódu  $W$  platí  $\text{rank}(\mathbf{G}) = k$  a  $\text{im}(\mathbf{G}) = W$ .*
- (2) *Pro jakoukoli kontrolní matici  $\mathbf{H}^T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^{n-k}$  kódu  $W$  platí  $\text{rank}(\mathbf{H}^T) = n - k$  a  $\ker(\mathbf{H}^T) = W$ .*
- (3) *At  $\mathbf{G} : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$  a  $\mathbf{H}^T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^{n-k}$  jsou generující a kontrolní matice kódu  $W$ . Potom  $\mathbf{H} : \mathbb{F}^{n-k} \rightarrow \mathbb{F}^n$  je generující matice kódu  $W^\perp$  a  $\mathbf{G}^T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^k$  je kontrolní matice kódu  $W^\perp$ .*

**DŮKAZ.**

- (1) Generující matice  $\mathbf{G}$  má, podle definice, ve svých sloupcích vektory jakékoli uspořádané báze  $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k)$  podprostoru  $W$ . Proto  $\mathbf{G} : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$  a  $\text{rank}(\mathbf{G}) = k$ . Protože  $\text{im}(\mathbf{G}) = \text{span}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k)$ , platí  $\text{im}(\mathbf{G}) = W$ .
- (2) Podle definice je kontrolní matice  $\mathbf{H}^T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^{n-k}$  matice soustavy  $(\mathbf{H}^T \mid \mathbf{o})$ , která má jako řešení přesně podprostor  $W$ . Tudíž platí  $\ker(\mathbf{H}^T) = W$ . Podle Frobeniovy věty 6.4.1 musí platit  $\text{def}(\mathbf{H}^T) = k$ , tudíž  $\text{rank}(\mathbf{H}^T) = n - k$  podle Věty 3.3.6 o dimenzi jádra a obrazu.
- (3) Pro ortogonální doplněk  $W^\perp$  platí  $\dim(W^\perp) = n - k$  podle Tvrzení I.2.6. Transpozicí matic  $\mathbf{H}^T$  a  $\mathbf{G}$  dostaneme lineární zobrazení  $\mathbf{H} : \mathbb{F}^{n-k} \rightarrow \mathbb{F}^n$  a  $\mathbf{G}^T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^k$ . Navíc  $\text{rank}(\mathbf{H}) = \text{rank}(\mathbf{H}^T) = n - k$  a  $\text{rank}(\mathbf{G}^T) = \text{rank}(\mathbf{G}) = k$ . Zbývá tedy dokázat rovnosti  $\text{im}(\mathbf{H}) = W^\perp$  a  $\ker(\mathbf{G}^T) = W^\perp$ . Podle Tvrzení 3.3.1 stačí ukázat, že platí  $\text{im}(\mathbf{H}) \subseteq W^\perp$  a  $\ker(\mathbf{G}^T) \subseteq W^\perp$ .

<sup>3</sup>Takovou soustavu umíme nalézt pomocí Tvrzení 6.4.8. Proč jsme se rozhodli matici homogenní soustavy psát *transponovaně* uvidíme v Tvrzení I.3.2.

- (a) Inkluse  $\text{im}(\mathbf{H}) \subseteq W^\perp$ . Zvolme vektor tvaru  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$  v podprostoru  $\text{im}(\mathbf{H})$ . Abychom ukázali, že vektor  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$  leží ve  $W^\perp$ , stačí ukázat, že rovnost  $\gamma(\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{w}) = 0$  platí pro každý vektor  $\mathbf{w}$  ve  $W$ . Ale

$$\gamma(\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{w}) = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{H}^T) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{x}^T \cdot \underbrace{(\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{w})}_{=\mathbf{o}} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{o} = 0$$

- (b) Inkluse  $\ker(\mathbf{G}^T) \subseteq W^\perp$ . Zvolme jakýkoli vektor  $\mathbf{x}$  v  $\ker(\mathbf{G}^T)$ , tj. platí  $\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ . Chceme ukázat, že  $\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = 0$  platí pro každý vektor  $\mathbf{w}$  ve  $W$ . Vektor  $\mathbf{w}$  lze napsat jako  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}$ , protože  $W = \text{im}(\mathbf{G})$ . Potom

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}^T \cdot \mathbf{a} = 0$$

■

Tvrzení I.3.2 vysvětluje, proč jsme se při zavedení kontrolních matic rozhodli použít značení  $\mathbf{H}^T$ . Generující a kontrolní matice lineárního kódu jsou totiž k sobě navzájem *duální* v následujícím smyslu:

- (1) Ať  $W$  je lineární kód s generující maticí  $\mathbf{G}$ . Potom  $\mathbf{G}^T$  je kontrolní matice *duálního* kódu  $W^\perp$ .
- (2) Ať  $W$  je lineární kód s kontrolní maticí  $\mathbf{H}^T$ . Potom  $\mathbf{H}$  je generující matice *duálního* kódu  $W^\perp$ .

Prostudujeme nyní příklad jednoho lineární kódu nad  $\mathbb{Z}_2$ , takzvaný *Hammingův (7, 4)-kód*. Jde o speciální příklad ze třídy kódů, které zavedeme později v Definici I.4.21. Ukážeme, že práce s Hammingovým (7, 4)-kódem nad  $\mathbb{Z}_2$  nám umožní při příjmu *opravit* jednu chybu. Pokud kanál, po kterém kódová slova posíláme, při přenosu poruší *maximálně* jeden bit, jde o „ideální“ kód.

**I.3.3 Příklad (Hammingův (7, 4)-kód)** V  $(\mathbb{Z}_2)^7$  zvolme lineární podprostor  $W$  dimenze 4 s bází danou vektory

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Generující matice  $\mathbf{G}$  podprostoru  $W$  je

$$\mathbf{G} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1)  $\text{rank}(\mathbf{G}) = 4$ , tudíž máme k dispozici 4 informační bity.
- (2) Dimenze ortogonálního doplňku  $7 - 4 = 3$ . Informace bude chráněna třemi bity. Redundance je vyjádřena podílem  $4/7$ , kterému říkáme *information rate* kódu.

- (3) Posílání zpráv: informace  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  vytváří kódové slovo  $\mathbf{G} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Pozorování:  $\mathbf{G}$  je v blokovém tvaru  $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_4 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$ . Takovým kódům se říká *systematické*: v každém kódovém slovu jsou jasně odděleny informační a ochranné bity.

Kontrolní (Hammingova) matice

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \mathbf{h}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jde o ideální kód, pokud *došlo nejvýše k jedné chybě*:

- (1) Ať je odesláno slovo  $\mathbf{w}$ . Přijmeme slovo  $\mathbf{v}$  a předpokládáme, že došlo k nejvýše jedné chybě. Tj.  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{e}$  ( $\mathbf{e}$  je *error pattern*). Víme, že  $\mathbf{e}$  obsahuje nejvýše jednu jedničku.
- (2) Spočteme syndrom  $\mathbf{s}$  slova  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{s} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{v} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{e}$ .
  - (a) Jestliže  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ , při přenosu nedošlo k chybě, tj.  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , neboli  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ .
  - (b) Jestliže  $\mathbf{s}$  je  $i$ -tý sloupec  $\mathbf{H}^T$ , je  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_i$ . Došlo k chybě na  $i$ -tém místě. Opravíme ji:  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{e}_i$ .
- (3) Z opravené zprávy izolujeme informační bity.

Co se stane, pokud error pattern  $\mathbf{e}$  obsahuje *dvě* jedničky? Tj., co nastane, pokud při přenosu došlo k *právě dvěma chybám*?

Spočteme syndrom  $\mathbf{s}$  slova  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{s} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{v} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{e}$ .

Pokud jsou jedničky v  $\mathbf{e}$  na místech  $i$  a  $j$ , je  $\mathbf{H}^T \mathbf{e}$  *součet*  $i$ -tého a  $j$ -tého sloupce matice  $\mathbf{H}^T$ .

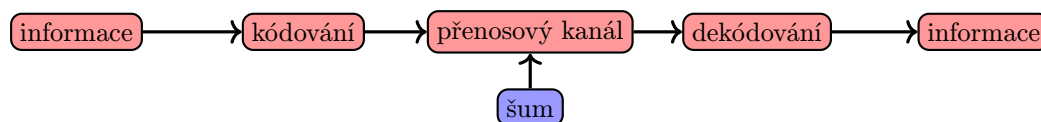
Připomeňme, že kontrolní matice je

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dvě chyby na první a druhé pozici současně tedy nerozlišíme od jedné chyby na pouze třetí pozici. K detekci a opravám chyb v Hammingově (7, 4)-kódu se vrátíme v Příkladech I.4.10 a I.4.16.

## I.4 Detekce a oprava chyb v lineárních kódech

V teorii lineárních kódů je asi nejzajímavější otázkou problém *detekce* a *opravy* chyb. Co tím přesně myslíme? Připomeňme, že při přenosu zpráv může dojít k jejich poškození. Problém kódování a dekódování lze tedy znázornit takto:



V této podkapitole budeme *ignorovat pravděpodobnostní charakter* poškození zprávy při přenosu (více o tomto tématu řekneme v podkapitole I.5). Budeme se věnovat dekódovací proceduře, které se říká *nearest neighbour decoding*.

Ať  $W$  je lineární kód dimenze  $k$  a délky  $n$  nad  $\mathbb{F}$ . Odeslané slovo  $\mathbf{w}$  z  $W$  může být přijato jako slovo  $\mathbf{v}$  z  $\mathbb{F}^n$ . Protože  $\mathbf{w}$  i  $\mathbf{v}$  jsou vektory v lineárním prostoru  $\mathbb{F}^n$ , platí rovnost

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{e}$$

pro vektor  $\mathbf{e} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ , kterému říkáme *error pattern* (také: *chybové slovo*) přijatého slova  $\mathbf{v}$ .

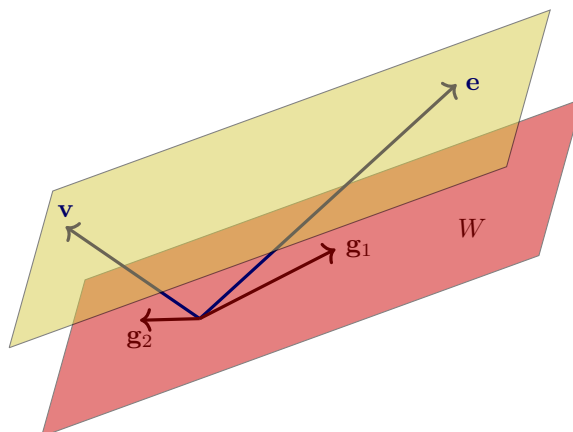
Předpokládejme, že  $\mathbf{H}^T$  je kontrolní matice lineárního kódu  $W$ . Potom platí rovnost

$$\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{v} = \mathbf{H}^T \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{e}) = \underbrace{\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{w}}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{e} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{e}$$

Přijaté slovo  $\mathbf{v}$  má tedy stejný *syndrom*  $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{v}$  jako je *syndrom*  $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{e}$  chybového slova  $\mathbf{e}$ .

Protože  $\mathbf{H}^T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^{n-k}$  a protože  $\text{def}(\mathbf{H}^T) = k$ , je  $\text{rank}(\mathbf{H}^T) = n-k$ . To znamená, že  $\mathbf{H}^T$  je epimorfismus. Neboli: jakýkoli vektor  $\mathbf{s}$  z lineárního prostoru  $\mathbb{F}^{n-k}$  je tvaru  $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{e}$  pro nějaké chybové slovo  $\mathbf{e}$ . Chceme-li najít *všechna* slova z  $\mathbb{F}^n$ , která mají syndrom  $\mathbf{s}$ , stačí vyřešit soustavu rovnic  $(\mathbf{H}^T \mid \mathbf{s})$ .

Podle úvah z Kapitoly 6 je řešení soustavy  $(\mathbf{H}^T \mid \mathbf{s})$  přesně  $k$ -dimensionální plocha v  $\mathbb{F}^n$ , která vznikla paralelním posunem podprostoru  $W$  do bodu  $\mathbf{v}$  (nebo, ekvivalentně, do bodu  $\mathbf{e}$ ):



#### Dekódovací procedura nearest neighbour decoding.

- (1) Pro přijaté slovo  $\mathbf{v}$  spočteme syndrom  $\mathbf{s} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{v}$ .
- (2) V  $k$ -dimensionální ploše, která je dána soustavou  $(\mathbf{H}^T \mid \mathbf{s})$ , nalezneme „optimální“ chybové slovo  $\mathbf{e}$ . To jest, nalezneme  $\mathbf{e}$  takové, že Hammingova vzdálenost  $d_H(\mathbf{e}, \mathbf{o})$  chybového slova  $\mathbf{e}$  od počátku  $\mathbf{o}$  je nejmenší možná.
- (3) Spočteme odeslané slovo  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{e}$ .

Zatím nevíme, zda výše uvedená strategie je korektní (tj., zda přijaté slovo  $\mathbf{v}$  opravdu opraví na odeslané slovo). Než budeme schopni zjistit, že za určitých okolností tato strategie korektní skutečně je, musíme zavést řadu pomocných pojmů. Všechny tyto pojmy souvisejí s „rozložením“ kódových slov v prostoru  $\mathbb{F}^n$  vzhledem k Hammingově metrice.

##### I.4.1 Definice (Hammingova váha slova a minimální distance kódu)

- (1) *Hammingova váha* slova  $\mathbf{v}$  je  $w_H(\mathbf{v})$  je definována jako  $d_H(\mathbf{v}, \mathbf{o})$ .
- (2) *Minimální (Hammingova) distance kódu*  $\text{dist}(W)$  je definována jako

$$\min\{w_H(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \text{ je nenulové slovo ve } W\}$$

##### I.4.2 Poznámka

- (1) Zjevně platí: Hammingova váha  $w_H(\mathbf{v})$  slova  $\mathbf{v}$  je přesně počet nenulových položek slova  $\mathbf{v}$ .
- (2) Platí rovnost  $\text{dist}(W) = \min\{d_H(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \mid \mathbf{w}, \mathbf{w}' \text{ jsou různá slova z } W\}$ .  
Opravdu: pro různá slova  $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$  z  $W$  je  $\mathbf{w} - \mathbf{w}'$  nenulové slovo z  $W$  a platí  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{w}') = w_H(\mathbf{w} - \mathbf{w}')$ . Obráceně, pro nenulové slovo  $\mathbf{w}$  z  $W$  je  $w_H(\mathbf{w}) = d_H(\mathbf{w}, \mathbf{o})$  Hammingova vzdálenost dvou různých slov ve  $W$ .

Minimální distanci kódu lze zjistit z (jakékoli) kontrolní matice kódu. To je obsahem následujícího tvrzení.

**I.4.3 Tvrzení** *Ať  $\mathbf{H}^T$  je kontrolní matice lineárního kódu  $W$ . Pro kladné přirozené číslo  $d$  jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (1) *Kód  $W$  má minimální distanci  $d$ .*

- (2) Každých  $d - 1$  sloupců matice  $\mathbf{H}^T$  je lineárně nezávislých a některých  $d$  sloupců matice  $\mathbf{H}^T$  je lineárně závislých.

DŮKAZ. Kód  $W$  obsahuje slovo  $\mathbf{w}$  váhy  $w > 0$  právě tehdy, když  $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{w} = \mathbf{o}$ . A to nastane právě tehdy, když  $w > 0$  sloupců  $\mathbf{H}^T$  je lineárně závislých. ■

Jednoduchým důsledkem předchozího tvrzení je odhad minimální distance kódu, založený na hodnotě kontrolní matice.

**I.4.4 Důsledek (Singletonův odhad)** *Ať  $W$  je lineární kód délky  $n$  a dimenze  $k$ . Potom  $\text{dist}(W) \leq n - k + 1$ .*

DŮKAZ. Pro kontrolní matici  $\mathbf{H}^T : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^{n-k}$  kódu  $W$  platí  $\text{rank}(\mathbf{H}^T) = n - k$ . Tudíž  $\text{dist}(W) - 1 \leq n - k$  podle Tvrzení I.4.3. ■

Jak ukazuje následující příklad, Singletonův odhad je jen velmi hrubým horním odhadem minimální distance lineárního kódu.

**I.4.5 Příklad (Minimální distance Hammingova (7, 4)-kódu)** Hammingův (7, 4)-kód má kontrolní matici

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Označme jako  $d$  minimální distanci tohoto kódu.

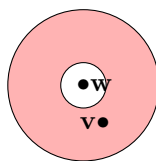
Singletonův odhad dává:  $d - 1 \leq 7 - 4 + 1$ , čili  $d \leq 5$ . Ve skutečnosti platí  $d = 3$ . Proč? Například první tři sloupce matice  $\mathbf{H}^T$  jsou lineárně závislé, jakákoli dvojice sloupců matice  $\mathbf{H}^T$  je lineárně nezávislá. Podle Tvrzení I.4.3 je  $d = 3$ .

**I.4.6 Definice (Detekce a oprava chyb)** Ať  $W$  je lineární kód nad  $\mathbb{F}$ . Řekneme, že

- (1)  $W$  *detekuje*  $t$  chyb, pokud pro každé  $\mathbf{w}$  ve  $W$  a každé  $\mathbf{v}$  takové, že  $1 \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq t$ , platí:  $\mathbf{v}$  není ve  $W$ .
- (2)  $W$  *opravuje*  $t$  chyb, pokud pro každé  $\mathbf{w}$  ve  $W$  a každé  $\mathbf{v}$  takové, že  $1 \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq t$ , platí:  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) < d_H(\mathbf{w}', \mathbf{v})$  pro všechna  $\mathbf{w}'$  z  $W$  různá od  $\mathbf{w}$ .

**I.4.7 Poznámka (Slogany pro detekci a opravu chyb)**

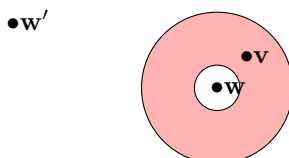
- (1) Slogan pro detekci chyb: slova *nedaleko* od kódového slova *nejdou* ve  $W$ .



Opravdu: slova  $\mathbf{v}$  taková, že platí  $1 \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq t$  jsou „nedaleko“ od  $\mathbf{w}$ : leží ve vyznačeném „mezikruží“. Žádné takové slovo nesmí být ve  $W$ .

Detekce  $t$  chyb tedy znamená: pokud odeslané slovo  $\mathbf{w}$  bylo při přenosu poškozeno na alespoň 1 a maximálně na  $t$  posicích, pak výsledné přijaté slovo  $\mathbf{v}$  jistě není kódovým slovem.

- (2) Slogan pro opravu chyb: slova *nedaleko* od kódového slova *jsou daleko od jiných slov* z  $W$ .



Opravdu: slova  $\mathbf{v}$  taková, že platí  $1 \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq t$  jsou „nedaleko“ od  $\mathbf{w}$ : leží ve vyznačeném „mezikruží“. Pro každé takové slovo  $\mathbf{v}$  musí platit nerovnost  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) < d_H(\mathbf{w}', \mathbf{v})$  pro všechna  $\mathbf{w}'$  z  $W$  různá od  $\mathbf{w}$ .

Oprava  $t$  chyb tedy znamená: pokud odeslané slovo  $\mathbf{w}$  bylo při přenosu pokaženo na alespoň 1 a maximálně na  $t$  pozicích, pak výsledné přijaté slovo  $\mathbf{v}$  má *nejbližšího souseda*<sup>4</sup> z kódu  $W$ , a sice slovo  $\mathbf{w}$ .

Detekce chyb a oprava chyb bezprostředně souvisí s minimální distancí lineárního kódu. Zdůrazněme, že kód (zatím) lze používat *bud'* pro detekci *nebo* opravu chyb, *nikoli* pro obojí zároveň. Chceme-li kód použít pro detekci a opravu *současně*, je situace mírně komplikovanější, viz Definici I.4.13.

**I.4.8 Tvzení** Lineární kód  $W$  detekuje  $t$  chyb právě tehdy, když  $\text{dist}(W) > t$ .

DŮKAZ.

- (1) Ať  $\text{dist}(W) \leq t$ . Zvolme kódová slova  $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$  tak, že  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{w}') = \text{dist}(W)$ . Potom  $1 \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \leq t$ .

To znamená, že nelze detekovat následujících  $t$  chyb: odesláno slovo  $\mathbf{w}$ , přijato slovo  $\mathbf{w}'$ .

- (2) Ať  $\text{dist}(W) > t$ . Zvolme  $\mathbf{w}$  ve  $W$  a  $\mathbf{v}$  takové, že platí  $1 \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq t$ .

Potom  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) < \text{dist}(W)$ , takže  $\mathbf{v}$  nemůže být kódové slovo. ■

**I.4.9 Tvzení** Lineární kód  $W$  opravuje  $t$  chyb právě tehdy, když  $\text{dist}(W) > 2t$ .

DŮKAZ.

- (1) Ať  $\text{dist}(W) \leq 2t$ . Zvolme kódová slova  $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$  tak, že  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{w}') = \text{dist}(W)$  a označme jako  $i_1, \dots, i_r$  indexy položek, ve kterých se  $\mathbf{w}$  a  $\mathbf{w}'$  liší.

Definujme  $\mathbf{v}$  jako slovo, které má stejné položky jako  $\mathbf{w}$ , kromě položek  $i_2, i_4, \dots$ , na kterých má stejné položky jako  $\mathbf{w}'$ .

Potom  $1 \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq \frac{r}{2} \leq t$ , ale  $d_H(\mathbf{w}', \mathbf{v}) \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ .

- (2) Ať  $\text{dist}(W) > 2t$ . Ať  $\mathbf{w}$  je ve  $W$  a ať platí  $1 \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq t$ . Pro jakékoli  $\mathbf{w}'$  ve  $W$  platí  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \geq \text{dist}(W) > 2t$ .

To znamená, že  $2t < d_H(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}')$ .

Takže  $d_H(\mathbf{w}', \mathbf{v}) > 2t - d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \geq 2t - t = t \geq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ . ■



**I.4.10 Příklad (Detekční a opravné schopnosti Hammingova (7, 4)-kódu)** Podle Příkladu I.4.5 má Hammingův (7, 4)-kód  $W$  minimální distanci  $\text{dist}(W) = 3$ . Podle Tvzení I.4.8 kód  $W$  detekuje maximálně dvě chyby a podle Tvzení I.4.9 kód  $W$  opravuje maximálně jednu chybu.

*Pozor!* Tvzení o schopnosti detekce a opravy chyb kódu je třeba pochopit správně: kód musí být používán *bud'* pro detekci chyb *nebo* pro opravu chyb, *nikoli pro obojí současně!* Simultánní detekci a opravu chyb je věnována Definice I.4.13 a Tvzení I.4.15. Že Hammingův (7, 4)-kód využít k simultánní detekci a opravě chyb v podstatě nejde, ukážeme v Příkladu I.4.16. Pro simultánní detekci a opravu chyb lze však využít *rozšířený* Hammingův (7, 4)-kód, viz Příklad I.4.17.

Jako aplikaci ukážeme důležitý horní odhad pro počet kódových slov kódu, který opravuje  $t$  chyb.

<sup>4</sup>Definice opravy  $t$  chyb je tedy „šitá na míru“ proceduře *nearest neighbour decoding*.



**I.4.11 Tvrzení (Sphere-packing bound)** *Ať lineární kód  $W$  délky  $n$  nad  $\mathbb{Z}_p$  opravuje  $t$  chyb. Potom platí nerovnost*

$$\text{počet slov ve } W \leq \frac{p^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \cdot (p-1)^i} \quad (\text{I.1})$$

kteří se říká sphere-packing bound kódu  $W$ .

DŮKAZ. Pro každé  $\mathbf{w}$  ve  $W$  platí  $\text{Ball}_t(\mathbf{w}) \subseteq (\mathbb{Z}_p)^n$ . To znamená, že platí

$$\bigcup_{\mathbf{w} \in W} \text{Ball}_t(\mathbf{w}) \subseteq (\mathbb{Z}_p)^n$$

a tedy platí nerovnost

$$\text{card}\left(\bigcup_{\mathbf{w} \in W} \text{Ball}_t(\mathbf{w})\right) \leq \text{card}\left((\mathbb{Z}_p)^n\right) = p^n$$

Pro  $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$  ale platí  $\text{Ball}_t(\mathbf{w}) \cap \text{Ball}_t(\mathbf{w}') = \emptyset$ , protože  $W$  opravuje  $t$  chyb a tudíž  $\text{dist}(W) > 2t$  podle Tvrzení I.4.9. To znamená, že díky Příkladu I.2.9 dostáváme rovnost

$$\text{card}\left(\bigcup_{\mathbf{w} \in W} \text{Ball}_t(\mathbf{w})\right) = (\text{počet slov ve } W) \cdot \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \cdot (p-1)^i$$

Sesazením toho, co jsme dosud dokázali, dostáváme nerovnost

$$\text{počet slov ve } W \leq \frac{p^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \cdot (p-1)^i}$$

kteřou jsme měli dokázat. ■

**I.4.12 Příklad (Sphere-packing bound pro Hammingův (7, 4)-kód)** Sphere-packing bound kódu  $W$  má tvar

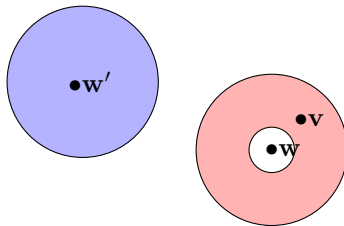
$$\text{počet slov ve } W \leq \frac{p^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \cdot (p-1)^i} = \frac{2^7}{\sum_{i=0}^1 \binom{7}{i} \cdot (2-1)^i} = \frac{2^7}{\binom{7}{0} + \binom{7}{1}} = \frac{2^7}{1+7} = 2^4$$

protože  $p = 2$ ,  $n = 7$  a  $t = 1$ . Víme, že  $\dim(W) = 4$ . Proto počet slov ve  $W$  je roven  $2^4$ .

V nerovnosti (I.1) pro Hammingův (7, 4)-kód tedy *platí rovnost*. Kódům, které takovou rovnost splňují, se říká *perfektní* pro opravu  $t$  chyb. Perfektním kódům se budeme věnovat později, viz Definici I.4.18.

**I.4.13 Definice (Simultánní detekce a oprava chyb)** Ať  $W$  je lineární kód nad  $\mathbb{F}$ . Ať  $s \geq t \geq 1$ . Řekneme, že  $W$  *opravuje  $t$  chyb a detekuje  $s$  chyb simultánně*, pokud pro každé kódové slovo  $\mathbf{w}$  platí: jestliže  $\mathbf{v}$  je slovo takové, že  $1 \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq s$ , pak  $d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}') > t$  pro všechna kódová slova  $\mathbf{w}' \neq \mathbf{w}$ .

**I.4.14 Poznámka (Vysvětlení simultánní detekce a opravy)**



Parametr  $s$  vytíná „mezikruží“ slov  $\mathbf{v}$ , která nejsou příliš daleko od kódového slova  $\mathbf{w}$ . Každé takové slovo  $\mathbf{v}$  má „velikou“ vzdálenost (větší než  $t$ ) od jakéhokoli kódového slova různého od  $\mathbf{w}$ .

Jak tedy simultánní detekce a oprava probíhá? Předpokládejme, že odeslané kódové slovo bylo přijato jako slovo  $\mathbf{v}$ . Simultánní detekce a oprava je následující procedura:

- (1) Nalezneme *nejbližší* kódové slovo  $\mathbf{w}$  přijatému slovu  $\mathbf{v}$ .
- (2) Jestliže  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq t$ , opravme slovo  $\mathbf{v}$  na slovo  $\mathbf{w}$ .
- (3) Jestliže  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) > t$ , ohlašme, že došlo k alespoň  $s$  chybám.

Tato procedura je korektní: předpokládejme, že odeslané slovo  $\mathbf{w}$  bylo přijato jako  $\mathbf{v}$ .

- (1) Pokud při přenosu došlo k maximálně  $t$  chybám, platí  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq t$ . To znamená, že oprava  $\mathbf{v}$  na  $\mathbf{w}$  je korektní, protože pro každé  $\mathbf{w}' \neq \mathbf{w}$  platí  $d_H(\mathbf{w}', \mathbf{v}) > t$ .
- (2) Pokud platí  $t < d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq s$ , hlásíme, že došlo k (alespoň)  $s$  chybám.

**I.4.15 Tvzení** *Ať  $s \geq t \geq 1$ . Lineární kód  $W$  opravuje  $t$  chyb a detekuje  $s$  chyb simultánně právě tehdy, když platí nerovnost  $\text{dist}(W) \geq t + s + 1$ .*

DŮKAZ.

- (1) Ať  $\text{dist}(W) \geq t + s + 1$ . Zvolme kódové slovo  $\mathbf{w}$  a jakékoli slovo  $\mathbf{v}$  s vlastností  $1 \leq d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq s$ . Pro jakékoli kódové slovo  $\mathbf{w}' \neq \mathbf{w}$  platí  $d_H(\mathbf{w}', \mathbf{w}) \geq \text{dist}(W) \geq t + s + 1$ . Takže, s využitím trojúhelníkové nerovnosti pro  $d_H$ , dostáváme

$$t + s + 1 \leq \text{dist}(W) \leq d_H(\mathbf{w}', \mathbf{w}) \leq d_H(\mathbf{w}', \mathbf{v}) + d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

a tudíž

$$d_H(\mathbf{w}', \mathbf{v}) \geq t + s + 1 - d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \geq t + s + 1 - s = t + 1 > t$$

- (2) Ať  $\text{dist}(W) < t + s + 1$ . Zvolme dvě různá kódová slova  $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$  tak, že  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{w}') = \text{dist}(W)$ . Protože  $\text{dist}(W) \leq t + s$ , lze zvolit slovo  $\mathbf{v}$ , pro které  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = s$  a  $d_H(\mathbf{w}', \mathbf{v}) \leq t$ . Takže  $W$  nemůže opravit  $t$  chyb a detekovat  $s$  chyb simultánně. ■

**I.4.16 Příklad (Simultánní detekce a oprava chyb v Hammingově (7, 4)-kódu)** Připomeňme, že pro Hammingův (7, 4)-kód  $W$  platí  $\text{dist}(W) = 3$ . Podle Tvzení I.4.15 je tedy kód  $W$  schopen detekovat 1 chybu a opravovat 1 chybu simultánně.

Hammingův (7, 4)-kód tedy není dobrým kódem pro simultánní detekci a opravu chyb. Situace je jiná pro *rozšířený* Hammingův (7, 4)-kód.

**I.4.17 Příklad (Rozšířený Hammingův (7, 4)-kód)** *Rozšířený Hammingův (7, 4)-kód  $W$  má kontrolní matici*

$$\mathbf{H}^T = \left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

vzniklou rozšířením kontrolní matice Hammingova (7, 4)-kódu o poslední řádek a sloupec. Lze se snadno přesvědčit, že za generující matici kódu  $W$  lze zvolit matici  $\mathbf{H}$ ,<sup>5</sup> protože každý řádek matice  $\mathbf{H}^T : (\mathbb{Z}_2)^8 \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^4$  je kódovým slovem a protože  $\text{rank}(\mathbf{H}^T) = 4$ .

Rozšířený Hammingův (7, 4)-kód je schopen detekovat 2 chyby a opravovat 1 chybu simultánně, protože minimální distance tohoto kódu je 4.

Optimálním kódem délky  $n$ , který opravuje  $t$  chyb, je kód, který  $t$  chyb opravuje a má nejmenší možnou redundanci. Takovým lineárním kódům říkáme *perfektní* pro  $t$  chyb.

**I.4.18 Definice (Perfektní kód)** Řekneme, že lineární kód  $W$  délky  $n$  nad  $\mathbb{Z}_p$  je *perfektní pro  $t$  chyb*, pokud pro každé  $\mathbf{v}$  ze  $(\mathbb{Z}_p)^n$  existuje právě jedno  $\mathbf{w} \in W$  tak, že  $d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq t$ .

<sup>5</sup>Rozšířený Hammingův (7, 4)-kód  $W$  je tedy příkladem *samoduálního* kódu: platí  $W = W^\perp$ .

**I.4.19 Poznámka (Slogan pro perfektní kódy)** Definici kódu perfektního pro  $t$  chyb lze přeformulovat v řeči koulí s poloměrem  $t$  v prostoru  $(\mathbb{Z}_p)^n$  s Hammingovou metrikou. Přesněji: lineární kód  $W$  je perfektní pro  $t$  chyb právě tehdy, když platí rovnost

$$\bigcup_{\mathbf{w} \in W} \text{Ball}_t(\mathbf{w}) = (\mathbb{Z}_p)^n$$

a kde toto sjednocení je sjednocením navzájem *disjunktních* množin.

Slogan: kód  $W$  je perfektní pro  $t$  chyb právě tehdy, když  $(\mathbb{Z}_p)^n$  lze pokrýt disjunktními koulemi se středy v kódových slovech a poloměrem  $t$ .

Jestliže  $W$  je lineární kód, perfektní pro  $t$  chyb, potom platí  $\text{dist}(W) = 2t + 1$ . Takže  $W$  opravuje  $t$  chyb. Ukážeme nyní, že perfektní kódy lze mezi všemi kódy, které opravují  $t$  chyb, charakterisovat *rovností* ve sphere-packing bound (I.1).

**I.4.20 Tvzení** Lineární kód  $W$  dimense  $k$  a délky  $n$  nad  $\mathbb{Z}_p$  je perfektní pro  $t$  chyb právě tehdy, když platí rovnost

$$\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \cdot (p-1)^i = p^{n-k} \quad (\text{I.2})$$

a kód  $W$  opravuje  $t$  chyb.

DŮKAZ.

- (1) Ať  $W$  je kód dimense  $k$  a délky  $n$ , perfektní pro  $t$  chyb. Potom  $W$  má přesně  $p^k$  slov. Podle Poznámky I.4.19 platí rovnost

$$\bigcup_{\mathbf{w} \in W} \text{Ball}_t(\mathbf{w}) = (\mathbb{Z}_p)^n$$

kde toto sjednocení je sjednocením navzájem disjunktních množin. Podle Příkladu I.2.9 pak platí rovnost (I.2).

- (2) Všechny slov v  $(\mathbb{Z}_p)^n$  váhy  $\leq t$  je přesně  $\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \cdot (p-1)^i$ . Podle předpokladu je takových slov přesně  $p^{n-k}$ , což je počet různých syndromů. Protože  $W$  opravuje  $t$  chyb, je  $W$  perfektní pro  $t$  chyb. ■

**I.4.21 Definice** *Hammingův kód* je kód nad  $\mathbb{Z}_2$  délky  $n = 2^m - 1$  s kontrolní maticí  $\mathbf{H}^T$ , která má  $m$  řádků a sloupce matice  $\mathbf{H}^T$  přesně odpovídají binárním zápisům všech čísel  $1, \dots, 2^m - 1$ , kde  $m \geq 1$  je přirozené číslo.

**I.4.22 Příklad (Příklady Hammingových kódů)**

- (1) Kontrolní matice Hammingova kódu pro  $m = 1$ :

$$\mathbf{H}^T = (1)$$

Délka tohoto kódu je 1, dimense 0. Jde tedy o *triviální* kód  $(\mathbb{Z}_2)^0 = \{\mathbf{o}\}$ , který není příliš použitelný. Information rate tohoto kódu je  $0/1 = 0$ .

- (2) Kontrolní matice Hammingova kódu pro  $m = 2$ :

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Délka tohoto kódu je 3, dimense 1. Information rate tohoto kódu je  $1/3 = 0.33\dots$

- (3) Kontrolní matice Hammingova (7, 4)-kódu (zde je  $m = 3$ ):

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Délka tohoto kódu je 7, dimense 4. Information rate tohoto kódu je  $4/7 = 0.57\dots$

(4) Kontrolní matice Hammingova kódu pro  $m = 4$ :

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Délka tohoto kódu je 15, dimenze 11. Information rate tohoto kódu je  $11/15 = 0.73 \dots$

(5) Pro obecné  $m \geq 1$  je délka příslušného Hammingova kódu  $2^m - 1$ , dimenze je rovna  $2^m - 1 - m$  a information rate tohoto kódu je roven

$$\frac{2^m - 1 - m}{2^m - 1} = 1 - \frac{m}{2^m - 1}$$

**I.4.23 Tvzení** *At  $W$  je Hammingův kód délky  $n = 2^m - 1$ ,  $m \geq 2$ . Potom  $W$  je perfektní pro 1 chybu.*

DŮKAZ. Podle Tvzení I.4.20 stačí ukázat rovnost

$$\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \cdot (p-1)^i = p^{n-k}$$

kde  $p = 2$ ,  $t = 1$ ,  $n = 2^m - 1$  a  $k = 2^m - 1 - m$ .

Opravdu, platí:

$$\underbrace{\binom{2^m - 1}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{2^m - 1}{1}}_{=2^m - 1} = 1 + 2^m - 1 = 2^m = 2^{n-k}$$

■

**I.4.24 Poznámka** Perfektních lineárních kódů nad  $\mathbb{Z}_2$  „není příliš mnoho“. Lze dokázat, že perfektní kód nad  $\mathbb{Z}_2$  je nutně jeden ze tří následujících typů:

- (1) Hammingův kód délky  $n = 2^m - 1$  (perfektní pro 1 chybu).
- (2) Opakovací kód (repetition code) liché délky  $n$  (perfektní pro  $(n-1)/2$  chyb). Generující matice opakovacího kódu délky  $n$  je

$$\mathbf{G} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} n \text{ řádků}$$

(3) Binární Golayův kód délky 23 a dimenze 12 (perfektní pro 3 chyby) s generující maticí

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Viz například knihu

☞ D. J. C. MacKay, *Information theory, inference and learning algorithms*, Cambridge Univ. Press, 2003

Jako aplikaci Hammingových kódů předvedeme pravděpodobnostní vyhrávací strategii pro týmovou hru.

**I.4.25 Příklad (The Hat Problem (Todd Ebert, 1998))** Skupina vězňů hraje následující hru. Vyhrají-li, získají svobodu. Pravidla hry jsou následující:

- (1) Každý vězeň dostane buď černý nebo bílý klobouk (klobouky se rozdávají náhodně s pravděpodobností  $1/2$ ).
- (2) Každý vidí barvy klobouků ostatních, barvu svého klobouku nevidí nikdo.
- (3) Skupina hraje jako tým. Vyhrají, pokud alespoň jeden uhodne správně barvu svého klobouku a nikdo ze skupiny nehádá špatně.
- (4) Před začátkem hry se vězni na strategii domlouvat mohou, po začátku hry spolu komunikovat nesmí.

*Simple-minded strategy* nám říká: hádejme náhodně, pravděpodobnost výhry je pak  $1/2$ . Otázka zní, zda existuje strategie *lepší*. Ano, taková strategie skutečně existuje. Je-li  $m \geq 2$ , pak uvidíme, že pro skupinu  $n = 2^m - 1$  vězňů pomůže příslušný *Hammingův kód*.

Označme jako  $W$  Hammingův kód délky  $n = 2^m - 1$ , kde  $m \geq 2$ . Slova  $\mathbf{v}$  ze  $(\mathbb{Z}_2)^n$  budeme považovat za *distribuci klobouků*:

- (1)  $0$  v  $i$ -té poloze slova  $\mathbf{v}$  znamená: vězeň  $i$  má černý klobouk.
- (2)  $1$  v  $i$ -té poloze slova  $\mathbf{v}$  znamená: vězeň  $i$  má bílý klobouk.

Pro zadanou distribuci  $\mathbf{v}$  definujme slovo  $\mathbf{v}_i$  jako distribuci, která má shodné položky se slovem  $\mathbf{v}$ , *kromě*  $i$ -té položky, kde je  $0$ . Slovo  $\mathbf{v}_i$  je tedy definováno jako distribuce, kterou  $i$ -tý vězeň *skutečně vidí* a který *předpokládá*, že má černý klobouk.

Platí rovnost  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + a_i \mathbf{e}_i$ , kde  $a_i \in \mathbb{Z}_2$  je pevné.

**Strategie  $i$ -tého vězně:**

- (1) Jestliže  $\mathbf{v}_i + b_i \mathbf{e}_i \notin W$  pro jakékoli  $b_i$  ze  $\mathbb{Z}_2$ , vězeň  $i$  mlčí.
- (2) Jestliže  $\mathbf{v}_i + b_i \mathbf{e}_i \in W$  pro nějaké  $b_i$  ze  $\mathbb{Z}_2$ , vězeň  $i$  prohlásí, že má klobouk barvy  $1 + b_i$ .

**Strategie je dobře definovaná:** nemůže současně platit  $\mathbf{v}_i + 0 \cdot \mathbf{e}_i \in W$  a  $\mathbf{v}_i + 1 \cdot \mathbf{e}_i \in W$ .

Kdyby platilo  $\mathbf{v}_i + 0 \cdot \mathbf{e}_i \in W$  a  $\mathbf{v}_i + 1 \cdot \mathbf{e}_i \in W$ , pak součet  $(\mathbf{v}_i + 0 \cdot \mathbf{e}_i) + (\mathbf{v}_i + 1 \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i$  leží ve  $W$ . To není možné, protože syndrom  $\mathbf{e}_i$  je  $i$ -tý sloupec kontrolní matice  $\mathbf{H}^T$  a ten je nenulový.<sup>6</sup>

- (1) **Jestliže  $\mathbf{v}$  není ve  $W$ , strategie dává vítězství.**

Pokud  $\mathbf{v}$  není ve  $W$ , existuje *jediné*  $j$  tak, že  $\mathbf{v} + \mathbf{e}_j$  je ve  $W$ . Hammingův kód je totiž perfektní pro 1 chybu. Vězeň  $j$  tedy správně uhodl barvu svého klobouku. Navíc všichni ostatní vězni museli mlčet: pro  $i \neq j$  by v opačném případě muselo platit  $\mathbf{v}_i + b_i \mathbf{e}_i \in W$  pro nějaké  $b_i$ .

Protože  $\mathbf{v} + \mathbf{e}_j = \mathbf{v}_i + a_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \in W$  a  $\mathbf{v}_i + b_i \mathbf{e}_i \in W$ , platí  $(\mathbf{v}_i + a_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) + (\mathbf{v}_i + b_i \mathbf{e}_i) = (a_i + b_i) \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \in W$ .

Syndrom slova  $(a_i + b_i) \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$  je ale nenulový, to je spor.

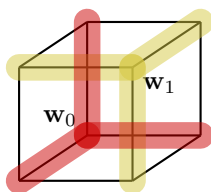
- (2) **Jestliže  $\mathbf{v}$  je ve  $W$ , každý vězeň hádá špatně.**

Opravdu: pro každé  $i$  platí  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + a_i \mathbf{e}_i \in W$  a  $i$ -tý vězeň tedy prohlásí, že má klobouk barvy  $1 + a_i$ , ačkoli má ve skutečnosti klobouk barvy  $a_i$ .

**Příklad strategie pro  $m = 2$ .** V případě  $m = 2$ , je  $n = 2^2 - 1 = 3$ . Hammingův kód pro  $m = 2$  obsahuje pouze dvě kódová slova:

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tato dvě kódová slova můžeme stejně jako v Příkladu I.2.8 znázornit jako dva vrcholy „jednotkové krychle“ a příslušné koule o poloměru 1 kolem kódových slov jsou disjunktní a pokrývají celé  $(\mathbb{Z}_2)^3$ :



Výše uvedená strategie pro 3 vězně vypadá následovně. Každý vězeň postupuje takto:

- (1) Jestliže zbylí dva vězni mají klobouky *různé* barvy, vězeň mlčí.
- (2) Jestliže zbylí dva vězni mají klobouky *stejně* barvy, vězeň prohlásí, že má klobouk barvy *opačné*. (To jest: mají-li zbylí dva vězni oba černé klobouky, vězeň prohlásí, že má klobouk bílý; mají-li zbylí dva vězni oba bílé klobouky, vězeň prohlásí, že má klobouk černý).

Každý vězeň se tedy snaží zůstat ve vzdálenosti 1 od kódového slova.

**Pravděpodobnost výhry při strategii dané Hammingovým kódem.** Pro skupinu  $n = 2^m - 1$  je pravděpodobnost výhry rovna *přesně*

$$1 - \frac{\text{počet slov ve } W}{\text{počet slov v } (\mathbb{Z}_2)^n} = 1 - \frac{2^{2^m-1-m}}{2^{2^m-1}} = 1 - \frac{1}{2^m}$$

- (1) Například pro  $m = 2$  (tedy pro skupinu  $n = 2^2 - 1 = 3$  vězňů) je pravděpodobnost výhry  $3/4 = 0.75$ .
- (2) Pro  $m = 3$  (tj. pro  $n = 2^3 - 1 = 7$  vězňů) je pravděpodobnost výhry  $7/8 = 0.875$ .
- (3) Pro  $m = 4$  (tj. pro  $n = 2^4 - 1 = 15$  vězňů) je pravděpodobnost výhry  $15/16 = 0.9375$ .
- (4) Pro  $m = 5$  (tj. pro  $n = 2^5 - 1 = 31$  vězňů) je pravděpodobnost výhry  $31/32 = 0.96875$ .
- (5) Atd.

To je *vždy lepší* výsledek než simple-minded strategie (která dává vždy pravděpodobnost výhry  $1/2$ ).

<sup>6</sup>Připomenutí: kontrolní matice Hammingova kódu má ve sloupcích přesně binární zápisy všech *nenulových* čísel  $1, \dots, 2^m - 1$ .

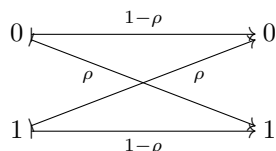
## I.5 Další témata teorie lineárních kódů

Téma lineárních kódů je součástí velmi rozsáhlé partie matematiky, zvané *teorie informace*. Velmi zhruba řečeno, teorie informace bere v potaz *vlastnosti* informačního kanálu, po kterém zprávy posíláme. Přesněji: bereme v potaz *pravděpodobnosti* poškození jednotlivých bitů ve zprávě při přenosu. V této podkapitole krátce do teorie informace (pro lineární kódy nad  $\mathbb{Z}_2$ ) nahlédneme. Ukážeme, že nearest neighbour decoding z podkapitoly I.4 maximalisuje pravděpodobnost správného dekódování, pokud zprávy posíláme po *binárním symetrickém kanálu*. Zformulujeme (ale nedokážeme) také teoreticky důležitý výsledek — Shannonovu větu. Shannonova věta ukazuje, že pro daný binární symetrický kanál lze najít lineární kód, který libovolně minimalisuje chybu při přenosu.

**I.5.1 Příklad (Binární symetrický kanál)** Předpokládejme, že pracujeme nad  $\mathbb{Z}_2$  a že posíláme kódová slova informačním kanálem s následujícími vlastnostmi: je dáno číslo  $\rho$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$  tak, že

- (1) Pravděpodobnost, že odeslaný bit 0 je přijat jako 1 je  $\rho$ .
- (2) Pravděpodobnost, že odeslaný bit 1 je přijat jako 0 je  $\rho$ .

Takovému informačnímu kanálu se říká *binární symetrický kanál*. Graficky jej můžeme znázornit takto:



Předpokládejme, že binárním symetrickým kanálem posíláme kódová slova délky  $n$ . Potom pravděpodobnost přijetí chybového slova  $\mathbf{e}$  s váhou  $w$  je

$$\text{Prob}(w_H(\mathbf{e}) = w) = \rho^w \cdot (1 - \rho)^{n-w}$$

V případě  $\rho < 1/2$  platí  $1 - \rho > \rho$ . Potom platí série nerovností

$$(1 - \rho)^n > \rho \cdot (1 - \rho)^{n-1} > \rho^2 \cdot (1 - \rho)^{n-2} > \dots > \rho^{n-1} \cdot (1 - \rho)^1 > \rho^n$$

Pokud tedy binární symetrický kanál splňuje  $\rho < 1/2$ , je pravděpodobnost přijetí chybového slova s váhou 1 pravděpodobnější než přijetí chybového slova s váhou 2, atd. V takovém případě je přirozená dekódovací strategie: vyberte chybové slovo s nejmenší váhou. To je přesně nearest neighbour decoding z podkapitoly I.4. Tento výsledek zformulujeme přesně.

**I.5.2 Tvzení (Maximum likelihood decoding)** Ať je dán binární symetrický kanál s pravděpodobností  $\rho < 1/2$ . Předpokládejme dále, že  $W$  je lineární kód délky  $n$  nad  $\mathbb{Z}_2$  a že každé kódové slovo je posíláno se stejnou pravděpodobností. Potom nearest neighbour decoding maximalisuje pravděpodobnost toho, že přijaté slovo bylo dekódováno jako odeslané slovo.

**DŮKAZ.** Předpokládejme, že bylo odesláno slovo  $\mathbf{w}$  a přijato slovo  $\mathbf{v}$ . Označme  $w = d_H(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ . Potom platí

$$\text{Prob}(\text{bylo přijato } \mathbf{v}, \text{ když bylo odesláno } \mathbf{w}) = \rho^w \cdot (1 - \rho)^{n-w}$$

Dále podle předpokladu platí

$$\text{Prob}(\text{bylo odesláno } \mathbf{w}) = \frac{1}{\text{počet slov ve } W}$$

Podle Bayesova pravidla pro podmíněné pravděpodobnosti platí

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\text{bylo odesláno } \mathbf{w}, \text{ když bylo přijato } \mathbf{v}) &= \\ &= \frac{\text{Prob}(\text{bylo přijato } \mathbf{v}, \text{ když bylo odesláno } \mathbf{w}) \cdot \text{Prob}(\text{bylo odesláno } \mathbf{w})}{\text{Prob}(\text{bylo přijato } \mathbf{v})} \\ &= \rho^w \cdot (1 - \rho)^{n-w} \cdot \frac{1}{\text{počet slov ve } W} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost

$$\text{Prob}(\text{bylo odesláno } \mathbf{w}, \text{ když bylo přijato } \mathbf{v})$$

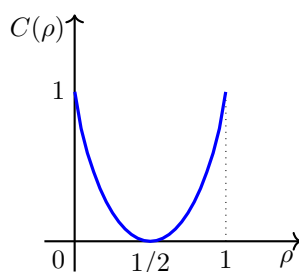
je tedy maximalisována pro nejmenší možné  $w$ . ■

Shannonova kapacita  $C(\rho)$  binárního symetrického kanálu s pravděpodobností  $\rho$  je míra schopnosti kanálu přenést informaci spolehlivě. Mělo by platit  $C(0) = C(1) = 1$  a  $C(1/2) = 0$ .

**I.5.3 Definice (Shannonova kapacita binárního symetrického kanálu)** Shannonova kapacita  $C(\rho)$  binárního symetrického kanálu s pravděpodobností  $\rho$  je definována výrazem

$$C(\rho) = 1 + \rho \log_2 \rho + (1 - \rho) \log_2(1 - \rho)$$

kde klademe  $0 \log_2 0 = 0$ . Graf Shannonovy kapacity je



**I.5.4 Věta (Shannonova věta (Noisy-channel coding Theorem))** Předpokládejme, že je dán binární symetrický kanál s pravděpodobností  $\rho$ . At  $\varepsilon > 0$  a  $R < C(\rho)$ . Potom existuje lineární kód délky  $n$  a dimenze  $k$  nad  $\mathbb{Z}_2$  tak, že  $k/n \geq R$  a pravděpodobnost chyby při přenosu je menší než  $\varepsilon$ . Navíc: pro  $R > C(\rho)$  žádný takový kód neexistuje.

### I.5.5 Poznámka

- (1) Důkaz Shannonovy věty je značně mimo rozsah tohoto dodatku. Sluší se poznamenat, že důkaz je *nekonstruktivní* a nedává explicitní popis příslušného kódu.
- (2) Pro  $\varepsilon$  blíží se k 0 se  $n$  blíží k  $+\infty$  nebo  $k/n$  se blíží k  $C(\rho)$ . V praxi je ovšem  $n$  omezeno rozsahem paměti dekodéru.
- (3) I pro kódy rozumné délky  $n$  vyžaduje maximum likelihood decoding prohledávání prostoru o rozměrech řádově  $2^n$ , jde tedy o časově velmi náročnou proceduru.

Vynikajícími zdroji dalších informací o kódech (nejen lineárních) jsou například knihy

☞ J. Adámek, *Foundations of coding*, John Wiley & Sons, 1991

☞ W. C. Huffman a V. Pless, *Fundamentals of error-correcting codes*, Cambridge Univ. Press, 2003

☞ D. J. C. MacKay, *Information theory, inference and learning algorithms*, Cambridge Univ. Press, 2003

☞ F. J. MacWilliams a N. J. A. Sloane, *The theory of error-correcting codes*, North-Holland, 1977



V teorii lineárních kódů je zvykem psát vektory z  $\mathbb{F}^n$  do *řádku*. Co tím ztrácíme a co tím získáváme?

- (1) Vycvičení dosavadním průběhem tohoto textu, *ztrácíme* okamžitý geometrický přehled o tom, co se při kódování skutečně děje.

*Pro zájemce:* ve skutečnosti geometrický přehled *neztrácíme*; pracujeme jen s kovektory místo s vektory, viz podkapitolu 3.5.

To znamená, že kódování má jasnou geometrickou interpretaci v *duálním prostoru*.

- (2) *Získáváme* kompatibilitu s rozsáhlou literaturou o kódování.

Protože nám šlo jen o velmi krátký úvod do lineárních kódů, psali jsme vektory v tomto dodatku nadále do sloupců. Kdo bude číst jinou literaturu z kódování, bude velmi pravděpodobně muset všechny matice a maticové rovnice z teorie kódů transponovat.

## Dodatek O

# Aplikace — Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

If you assume continuity, you can open the well-stocked mathematical toolkit of continuous functions and differential equations, the saws and hammers of engineering and physics for the past two centuries (and the foreseeable future).

Benoit Mandelbrot, *The (mis)behaviour of markets: A fractal view of risk, ruin and reward*

V textu tohoto Dodatku vybudujeme teorii řešení *soustav lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty*. Uvidíme, že tato teorie je kombinací lineární algebry (zvláště Jordanova tvaru matice z Kapitoly 11) a úvah, které patří do kalkulu více proměnných.

Základní myšlenky abstraktních postupů vysvětlíme v podkapitole O.1 na velmi jednoduché lineární diferenciální rovnici prvního řádu.

Exponenciála matic z podkapitoly 13.2 nám umožní v podkapitole O.2 zformulovat elegantním způsobem větu o existenci a jednoznačnosti řešení *soustav lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu*. Takové soustavy se v aplikacích vyskytují poměrně často. Analýzu kvality řešení těchto rovnic pomocí diagramů ve *fázovém prostoru* řešení podáme v podkapitole O.3.

Nakonec se, v podkapitole O.4, zaměříme na *diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty*. Ukážeme aplikace takových rovnic a využijeme vybudovanou teorii k rychlému řešení těchto rovnic.

Knih a textů věnovaných diferenciálním rovnicím je samozřejmě velmi mnoho. Můžeme doporučit například knihy

- ☞ William C. Boyce a Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, John Wiley & Sons, 2001.
- ☞ Fred Brauer a John A. Nohel, *The qualitative theory of ordinary differential equations*, W. A. Benjamin Inc., 1969.
- ☞ Morris W. Hirsch a Stephen Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press Inc., 1974.
- ☞ Lawrence Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, 2001.
- ☞ Steven H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry and engineering*, Addison Wesley, 1994.
- ☞ Stephen A. Wirkus a Randall J. Swift, *A course in ordinary differential equations*, CRC Press, 2015.

Řadu odkazů na další možné zdroje informací o diferenciálních rovnicích naleznete dále v textu.

**Upozornění:** protože tento text *není* současně textem z matematické analýzy, budeme předpokládat znalost *základních* pojmů kalkulu jedné reálné proměnné: limitu, spojitost, derivaci a integrál reálných funkcí jedné reálné proměnné. Dobrými referencemi jsou knihy

- ☞ Tom M. Apostol, *Mathematical analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- ☞ Edwin Hewitt a Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 3. vydání, 1975.
- ☞ Vojtěch Jarník, *Diferenciální počet I*, Academia, 1974.
- ☞ Vojtěch Jarník, *Integrální počet I*, Academia, 1984.
- ☞ Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Inc., 1976.

Některá fakta tak v našem textu plně *nedokážeme*. Na takových místech je vždy odkaz na literaturu, kde lze příslušné důkazy najít.

Poznamenejme ještě, že naprosto vynikajícím úvodem do kalkulu a diferenciálních rovnic v Banachových prostorech je kniha

- ☞ Henri Cartan, *Calcul différentiel*, Herman, 1967.

Jde o ideální knihu pro toho, kdo má rád abstraktní a čisté teorie.

## O.1 Diferenciální rovnice růstu populace — základní myšlenky řešení diferenciálních rovnic

Velmi zhruba řečeno jsou diferenciální rovnice takové rovnice, ve kterých se vyskytují derivace neznámé funkce (pro pohodlí budeme mluvit i o *nulté* derivaci funkce, což je funkce samotná). Naším úkolem je pak neznámou funkci najít. V této podkapitole se zaměříme na řešení velmi jednoduché diferenciální rovnice

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$$

kde  $x : [t_0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce  $t \mapsto x(t)$ , kde  $t_0$  je pevné reálné číslo,  $a$  je pevné reálné číslo a kde  $\dot{x}$  značí první derivaci funkce  $x$ .

Dobrou intuicí je, že rovnice  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$  popisuje *vývoj* nějakého procesu v čase (proto jsme také označili proměnnou funkce  $x$  jako  $t$ ). Pak dává velmi dobrý smysl požadovat, aby funkce  $x$  nabývala v *počáteční* hodnotě  $t_0$  nějakou přesně stanovenou hodnotu. Proto se požadavku

$$x(t_0) = c$$

kde  $c$  je pevné reálné číslo, říká *počáteční podmínka* rovnice  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$ .

Diferenciální rovnici

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t), \quad x(t_0) = c$$

se často říká rovnice *růstu populace*:

- (1) Hodnota  $x(t)$  reprezentuje velikost populace v čase  $t$ .
- (2) Rovnost  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$  vyjadřuje, že změna velikosti populace závisí lineárně na velikosti populace.
- (3) Rovnost  $x(t_0) = c$  vyjadřuje počáteční velikost populace.

Ve fyzice tato diferenciální rovnice (pro  $a < 0$ ) popisuje *radioaktivní rozpad*, viz například knihu

- ☞ Arthur Beiser, *Concepts of modern physics*, McGraw-Hill, 2003.

a v medicíně jde o rovnici *vylučování látek z organismu*.

Jednoduché použití vlastností integrálu dává první výsledek o řešení diferenciální rovnice.

**O.1.1 Tvzení** Pro funkci  $u : [t_0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , která má spojitou první derivaci, jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) Platí  $\dot{u}(t) = a \cdot u(t)$  a  $u(t_0) = c$ .

(2) Pro všechna  $t \geq t_0$  platí rovnost  $u(t) = c + a \cdot \int_{t_0}^t u(s) \, ds$

DŮKAZ. Z (1) plyne (2). Pro jakékoli  $t \geq t_0$  integrál  $a \cdot \int_{t_0}^t u(s) \, ds$  existuje a platí

$$a \cdot \int_{t_0}^t u(s) \, ds = u(t) - u(t_0)$$

protože  $u$  je spojitá funkce a protože  $\dot{u}(t) = a \cdot u(t)$ . Protože  $u(t_0) = c$ , platí

$$c + a \cdot \int_{t_0}^t u(s) \, ds = u(t_0) + u(t) - u(t_0) = u(t)$$

Ze (2) plyne (1). Především jistě platí rovnost  $u(t_0) = c$ . Protože předpokládáme, že  $u$  má spojitou první derivaci, můžeme rovnost

$$u(t) = c + a \cdot \int_{t_0}^t u(s) \, ds$$

zderivovat. Dostaneme tak rovnost  $\dot{u}(t) = a \cdot u(t)$ . ■

Tvzení **O.1.1** nám poskytuje návod, jak by se diferenciální rovnice

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t), \quad x(t_0) = c$$

dala řešit *iterací*. Mohli bychom zkusit definovat posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$  funkcí z  $[t_0; +\infty)$  do  $\mathbb{R}$  následujícím způsobem

$$u_0(t) = c, \quad u_{n+1}(t) = c + a \cdot \int_{t_0}^t u_n(s) \, ds, \quad \text{pro } n \geq 0$$

a doufat, že posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$  konverguje k hledanému řešení  $u$ . Nebudeme ukazovat, že tomu tak skutečně je. Podíváme se ale na *intuitivní* výpočet limity posloupnosti  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , který nám pomůže řešení najít.

Postupné dosazování nám dává následující hodnoty pro  $t \geq t_0$ :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= c \\ u_1(t) &= c + ca(t - t_0) \\ u_2(t) &= c + ca(t - t_0) + c \frac{a^2(t - t_0)^2}{2} \\ u_3(t) &= c + ca(t - t_0) + c \frac{a^2(t - t_0)^2}{2} + c \frac{a^3(t - t_0)^3}{2 \cdot 3} \\ u_4(t) &= c + ca(t - t_0) + c \frac{a^2(t - t_0)^2}{2} + c \frac{a^3(t - t_0)^3}{2 \cdot 3} + c \frac{a^4(t - t_0)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \end{aligned}$$

a matematickou indukcí je snadné dokázat, že pro  $t \geq t_0$  a libovolné  $n \geq 0$  platí rovnost

$$u_n(t) = c \cdot \sum_{k=0}^n \frac{a^k(t - t_0)^k}{k!}$$

Limita posloupnosti  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$  by tedy měla být

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} c \cdot \sum_{k=0}^n \frac{a^k(t-t_0)^k}{k!} = c \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k(t-t_0)^k}{k!} = c \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a(t-t_0))^k}{k!} = c \cdot e^{a(t-t_0)}$$

Je to velmi nadějně: funkce  $u(t) = c \cdot e^{a(t-t_0)}$  má na intervalu  $[t_0; +\infty)$  spojitou první derivaci a platí  $\dot{u}(t) = a \cdot u(t)$  a  $u(t_0) = c$ .

Řešení problému  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$  a  $x(t_0) = c$  jsme tedy našli. Zbývá ukázat, že tento problém jiné řešení, než funkci  $u(t) = c \cdot e^{a(t-t_0)}$ , nemá.

**O.1.2 Věta (Věta o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice růstu populace)** Na intervalu  $[t_0; +\infty)$  existuje jediná funkce  $u$  se spojitou první derivací, která splňuje rovnost

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t), \quad x(t_0) = c$$

totiž funkce

$$u(t) = c \cdot e^{a(t-t_0)}$$

DŮKAZ. Stačí ukázat, že jestliže  $\dot{v}(t) = a \cdot v(t)$  a  $v(t_0) = c$ , potom  $v(t) = c \cdot e^{a(t-t_0)}$  pro všechna  $t$  z intervalu  $[t_0; +\infty)$ . Za tím účelem definujeme novou funkci

$$w(t) = v(t) \cdot e^{-a(t-t_0)}$$

a spočítáme její první derivaci:

$$\frac{d}{dt}w(t) = \underbrace{\frac{d}{dt}v(t)}_{=a \cdot v(t)} \cdot e^{-a(t-t_0)} - v(t) \cdot a \cdot e^{-a(t-t_0)} = 0$$

To znamená, že funkce  $w$  je konstantní na intervalu  $[t_0; +\infty)$ . Protože  $w(t_0) = v(t_0) \cdot e^{-a(t_0-t_0)} = v(t_0) = c$ , platí  $w(t) = v(t) \cdot e^{-a(t-t_0)} = c$  pro všechna  $t$  z intervalu  $[t_0; +\infty)$ , neboli

$$v(t) = c \cdot e^{a(t-t_0)}$$

pro všechna  $t$  z intervalu  $[t_0; +\infty)$ . ■

V praxi se často studuje i diferenciální rovnice růstu populace tvaru

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b(t), \quad x(t_0) = c$$

kde  $t \mapsto b(t)$  je spojitá funkce na intervalu  $[t_0; +\infty)$ . Hodnotu  $b(t)$  funkce  $b$  si lze představit jako „vnější faktor“, který v čase  $t$  přispívá k růstu populace. Jak vypadá řešení této složitější diferenciální rovnice?

Jak to v matematice bývá, pokusíme se složitější diferenciální rovnici převést na jednodušší, kterou již umíme řešit. Předpokládejme, že funkce  $u(t)$  řeší rovnici  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$ ,  $x(t_0) = c$  a zavedeme substituci<sup>1</sup>

$$u(t) = e^{a(t-t_0)} \cdot y(t)$$

a spočteme

$$\dot{u}(t) = a \cdot e^{a(t-t_0)} \cdot y(t) + e^{a(t-t_0)} \cdot \dot{y}(t)$$

Dosadíme  $\dot{u}(t)$  do rovnice  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b(t)$  a dostaneme tak rovnici

$$e^{a(t-t_0)} \cdot \dot{y}(t) = b(t)$$

neboli

$$\dot{y}(t) = e^{-a(t-t_0)} \cdot b(t)$$

<sup>1</sup>Povšimněme si, co se tu děje: víme, že  $e^{a(t-t_0)} \cdot c$  je jediným řešením rovnice  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$ ,  $x(t_0) = c$ . My nyní hledáme řešení rovnice  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b(t)$ ,  $x(t_0) = c$  ve tvaru  $u(t) = e^{a(t-t_0)} \cdot y(t)$ , tj. ve tvaru, kdy konstanta  $c$  je nahrazena (zatím neznámou) funkcí  $y(t)$ . Proto se této metodě říká *variace konstant*. Viz Větu [O.2.15](#).

Poslední rovnici je ale snadné řešit: jakákoli primitivní funkce ke spojitě funkci  $e^{-a(t-t_0)} \cdot b(t)$  rovnici  $\dot{y}(t) = e^{-a(t-t_0)} \cdot b(t)$  řeší. Jako určitý integrál vezmeme funkci

$$v(t) = \int_{t_0}^t e^{-a(s-t_0)} \cdot b(s) \, ds + c$$

protože musí platit rovnosti

$$c = u(t_0) = e^{a(t_0-t_0)} \cdot v(t_0) = v(t_0)$$

Celkově tedy dostáváme řešení problému  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b(t)$ ,  $x(t_0) = c$  ve tvaru

$$u(t) = e^{a(t-t_0)} \cdot v(t) = e^{a(t-t_0)} \cdot \int_{t_0}^t e^{-a(s-t_0)} \cdot b(s) \, ds + c \cdot e^{a(t-t_0)}$$

nebo, po zjednodušení integrované funkce

$$u(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-s)} \cdot b(s) \, ds + c \cdot e^{a(t-t_0)}$$

Vzorec

$$u(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-s)} \cdot b(s) \, ds + c \cdot e^{a(t-t_0)}$$

je hoden naší zvýšené pozornosti. Povšimněme si, že řešení rovnice

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b(t), \quad x(t_0) = c$$

jsme našli ve tvaru *součtu*:

(1) Rovnici

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t), \quad x(t_0) = c$$

bychom mohli říkat *homogenní rovnice* příslušná rovnici

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b(t), \quad x(t_0) = c$$

a funkce  $e^{a(t-t_0)} \cdot c$  tuto homogenní rovnici řeší.

(2) Protože platí rovnosti

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e^{a(t-s)} \cdot b(s) \, ds = \frac{d}{dt} (F(t) - F(t_0)) = b(t)$$

kde jako  $F(s)$  jsme označili primitivní funkci k  $e^{a(t-s)} \cdot b(s)$ , je

$$\int_{t_0}^t e^{a(t-s)} \cdot b(s) \, ds$$

*partikulárním řešením* diferenciální rovnice.

Zdá se tedy, že se pohybujeme na poli lineární algebry: podobné úvahy dobře známe z Kapitoly 6 pro řešení soustav lineárních rovnic. Shrňme je: řešení rovnice  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b(t)$ ,  $x(t_0) = c$  jsme našli ve tvaru

partikulární řešení + řešení homogenní rovnice

V dalším ukážeme, že velkou třídu diferenciálních rovnic, které se vyskytují v praxi, lze považovat za rovnici růstu populace. Přesněji: v dalším budeme studovat diferenciální rovnice tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

a diferenciální rovnice tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

kde  $\mathbf{A}$  je reálná čtvercová matice rozměrů  $n \times n$ ,  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  je funkce z intervalu  $[t_0; +\infty)$  do  $\mathbb{R}^n$  se spojitou první derivací, kde  $t \mapsto \mathbf{b}(t)$  je spojitá funkce z intervalu  $[t_0; +\infty)$  do  $\mathbb{R}^n$ , a kde  $\mathbf{c}$  je pevný vektor z  $\mathbb{R}^n$ . Dosavadní úvahy pak budou speciálním případem, kdy  $n = 1$ .

Obecný „vektorový“ případ si vyžádá zopakování dvou témat z Kapitoly 13:

- (1) Je třeba pochopit spojitost funkcí z prostoru  $\mathbb{R}$  do prostoru  $\mathbb{R}^n$ ; tomu byla věnována podkapitola 13.1.
- (2) V podkapitole 13.2 byla zavedena exponenciála  $\exp(\mathbf{A})$ , kde  $\mathbf{A}$  je reálná čtvercová matice. Výraz  $\exp((t - t_0)\mathbf{A})$  pak nahradí funkci  $e^{a(t-t_0)}$  z řešení rovnice růstu populace.

V podkapitole 0.2 vybudovanou teorii použijeme k popisu obecných řešení „maticových“ diferenciálních rovnic.

V podkapitole 0.3 pak vysvětlíme popis řešení diferenciálních rovnic pomocí diagramů ve *fázovém prostoru* řešení. Nakonec, v podkapitole 0.4, ukážeme řadu diferenciálních rovnic, které pocházejí z inženýrské praxe.

## O.2 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty

V této podkapitole se budeme věnovat derivacím a integrálům spojitých funkcí tvaru

$$\mathbf{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{a} \quad \mathbf{U} : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

nebo obecněji derivacím a integrálům spojitých funkcí tvaru

$$\mathbf{u} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{a} \quad \mathbf{U} : I \longrightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

kde  $I$  je nějaký interval reálných čísel.<sup>2</sup>

Vysvětlíme, jakým způsobem se takové funkce používají při řešení soustav diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Uvidíme, že řešení soustav bude pomocí vybudované teorie velmi jednoduché: budeme vlastně kopírovat postupy z podkapitoly 0.1 pro řešení diferenciální rovnice růstu populace.

Začneme důležitou geometrickou představou.

Spojitá funkce tvaru

$$\mathbf{u} : I \longrightarrow L$$

kde  $I$  je interval reálných čísel a kde  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ , vytváří *křivku* v lineárním prostoru  $L$ . Obecné prvky intervalu  $I$  budeme značit jako  $t$  a hodnoty funkce  $\mathbf{u}$  budeme tudíž značit  $\mathbf{u}(t)$ .

Je vhodné si proměnnou  $t$  přestavit jako čas. Hodnota  $\mathbf{u}(t)$  pak reprezentuje bod na křivce v čase  $t$ .

Čas plyne v intervalu  $I$  od menších čísel k větším. Proto je křivka „dynamický“ objekt. Často si budeme představovat, že pro  $t_1 < t_2$  z intervalu  $I$  je bod  $\mathbf{u}(t_1)$  „navštíven dříve“ než bod  $\mathbf{u}(t_2)$ .

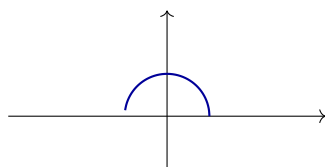
### O.2.1 Příklad

<sup>2</sup>Tj.  $I$  je množina některého z tvarů  $(-\infty; +\infty)$ ,  $(t_0; +\infty)$ ,  $[t_0; +\infty)$ ,  $(-\infty; t_0)$ ,  $(-\infty; t_0]$ ,  $(t_0; t_1)$ ,  $[t_0; t_1)$ ,  $(t_0; t_1]$ ,  $[t_0; t_1]$ , kde  $t_0 < t_1$  jsou reálná čísla.

(1) Funkce

$$\mathbf{u} : [0; 3] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

vytváří oblouk jednotkové kružnice

v rovině  $\mathbb{R}^2$ . Počáteční bod tohoto oblouku je bod

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

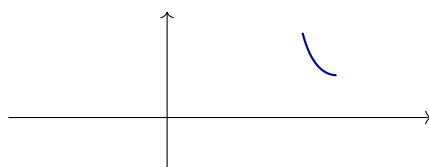
a koncový bod tohoto oblouku je bod

$$\mathbf{u}(3) = \begin{pmatrix} \cos 3 \\ \sin 3 \end{pmatrix}$$

(2) Křivka vytvořená funkcí

$$\mathbf{u} : [0; 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \cdot \cos t + 3 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

má jako obrázek křivku

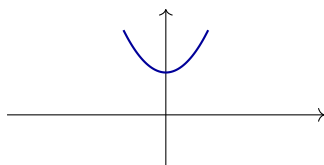
v rovině  $\mathbb{R}^2$ .

„Standardní“ grafy funkcí si lze také snadno představit jako obrázky křivek.

**O.2.2 Příklad** Křivka vytvořená funkcí

$$\mathbf{u} : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

má jako obrázek křivku

v rovině  $\mathbb{R}^2$ .

V úvahách o diferenciálních rovnicích budou hrát velkou roli *tečny* ke křivkám. Víme, že tečny (v kalkulu jedné proměnné) souvisí s derivacemi. Derivace nyní zavedeme standardním způsobem.

**O.2.3 Definice** Řekneme, že bod  $\vec{d}$  z normovaného lineárního prostoru  $L$  je *derivací* funkce  $\mathbf{u} : I \longrightarrow L$  v bodě  $t_0$  z  $I$ , pokud platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t_0 + h) - \mathbf{u}(t_0)}{h} = \vec{d}$$

Derivaci v bodě  $t_0$  budeme značit  $\dot{\mathbf{u}}(t_0)$  nebo  $\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t_0)$ .



Pokud si hodnotu  $t_0$  v rovnici křivky  $\mathbf{u}$  představíme jako čas a hodnotu  $\mathbf{u}(t_0)$  jako *polohu* na křivce v čase  $t_0$ , potom hodnota derivace

$$\dot{\mathbf{u}}(t_0) = \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t_0 + h) - \mathbf{u}(t_0)}{h}$$

representuje *rychlost* a *směr*, jak se v čase  $t_0$  hodnoty  $\mathbf{u}(t)$  mění. Viz Příklad O.2.5.

Výpočty derivací křivek  $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  jsou velmi jednoduché: stačí zderivovat hodnoty  $\mathbf{u}(t)$  po složkách. Stejný fakt platí pro derivace křivek tvaru  $\mathbf{U} : I \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . To plyne z teorie podkapitoly 13.1.

#### O.2.4 Příklad

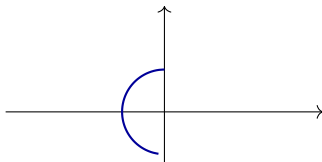
(1) Pro

$$\mathbf{u} : [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

je

$$\dot{\mathbf{u}} : [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

a to je křivka s obrázkem



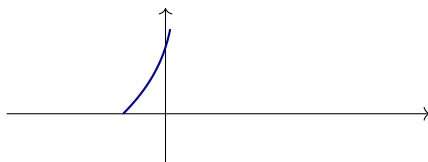
(2) Pro

$$\mathbf{u} : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \cdot \cos t + 3 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

je

$$\dot{\mathbf{u}} : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} -e^{-t} \cdot \cos t - e^{-t} \cdot \sin t \\ 2t \end{pmatrix}$$

a to je křivka s obrázkem



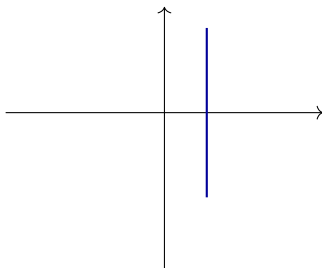
(3) Pro

$$\mathbf{u} : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

je

$$\dot{\mathbf{u}} : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

a to je křivka s obrázkem



(4) Pro křivku

$$\mathbf{U} : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 2 & \cos t & e^{t-2} \\ t-2 & 334 & t^3 \\ t^2 & -t+1 & 2t \end{pmatrix}$$

je derivace opět křivka

$$\dot{\mathbf{U}} : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\sin t & e^{t-2} \\ 1 & 0 & 3t^2 \\ 2t & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ukážeme nyní důležitý příklad visualisace derivací funkcí  $\mathbf{u} : I \longrightarrow L$ . Obecněji se k těmto úvahám vrátíme v podkapitole [O.3](#).



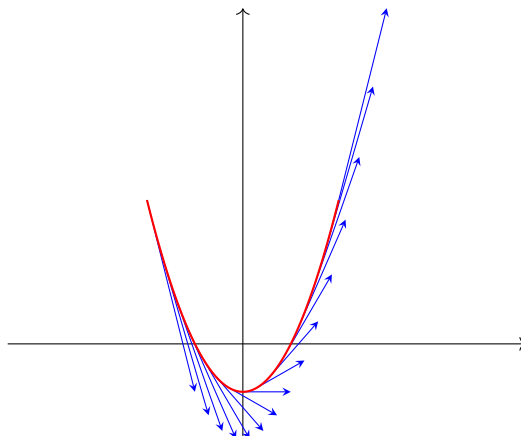
### O.2.5 Příklad Křivka

$$\mathbf{u} : [-2; 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

má derivaci

$$\dot{\mathbf{u}} : [-2; 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Pokud nyní ke každému bodu  $\mathbf{u}(t_0)$  křivky přimalujeme vektor  $\dot{\mathbf{u}}(t_0)$ , který začíná v bodě  $\mathbf{u}(t_0)$ , dostaneme obrázek



Tento obrázek vypovídá o *rychlosti* a *směru* s „jakou křivka plyne“. Všimněme si, že pro  $t \leq 0$  křivka „brzdí“ a pro  $t \geq 0$  křivka „nabírá na rychlosti“.

Nyní již zformulujeme hlavní definici této podkapitoly.

**O.2.6 Definice** Ať  $t_0$  je pevné reálné číslo. Zápisu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c} \quad (\text{O.1})$$

kde  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c}$  je vektor z  $\mathbb{R}^n$  a kde  $\mathbf{b} : (-\infty; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitá funkce, říkáme *soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty*. Matici  $\mathbf{A}$  říkáme *matice soustavy* a funkci  $\mathbf{b}(t)$  říkáme *pravá strana soustavy*. Rovnosti  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$  říkáme *počáteční podmínka soustavy*.

Zápisu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c} \quad (\text{O.2})$$

řekáme *homogenní soustava přidružená soustavě (O.1)*.

Funkci  $\mathbf{u} : (-\infty; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , která má první derivaci, říkáme *řešení soustavy (O.1)*, pokud platí rovnosti

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{c}$$



**O.2.7 Poznámka** Přísně vzato bychom kvůli aplikacím měli studovat diferenciální rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad t \in I, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

a jejich řešení, kde  $I$  je nějaký *interval* obsahující bod  $t_0$ .<sup>3</sup> Nebudeme to dělat, protože značení by bylo příliš komplikované a formulace výsledků by byla těžkopádná. Modifikovat znění a důkazy všech vět pro obecný interval je snadné. V příkladech uvidíme, jakým způsobem se s řešením diferenciálních rovnic pro obecný interval vypořádat.

Pro diferenciální rovnice typu (O.1) bude hrát významnou roli křivka

$$\mathbf{U} : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad t \mapsto \exp(t\mathbf{A})$$

kde  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  je pevná matice. Podle předchozích úvah jde o *křivku v Banachově prostoru*  $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Ukážeme, že tato křivka má v bodě  $t$  derivaci, rovnou matici  $\mathbf{A} \cdot \exp(t\mathbf{A})$ .

To znamená (kdybychom uměli malovat obrázky v  $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ), že „rychlost“  $\dot{\mathbf{U}}(t)$  křivky  $\mathbf{U}$  v „čase“  $t$  je zadána maticí  $\mathbf{A} \cdot \exp(t\mathbf{A})$ . Takovou věc opravdu nejde smysluplně namalovat, ale doporučujeme si nějakou základní intuici vybudovat.

Doufáme, že k vybudování intuice značně napomůže Poznámka O.2.9.

**O.2.8 Tvzení** Pro jakoukoli matici  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  platí rovnost

$$\frac{d}{dt} \exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \exp(t\mathbf{A}) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$$

DŮKAZ. Protože pro každé reálné číslo  $t$  platí  $(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot (t\mathbf{A})$ , platí podle části (2) Tvzení 13.2.8 pro každé reálné číslo  $t$  rovnost

$$\mathbf{A} \cdot \exp(t\mathbf{A}) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$$

Nyní spočteme derivaci křivky  $t \mapsto \exp(t\mathbf{A})$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(t\mathbf{A}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp((t+h)\mathbf{A}) - \exp(t\mathbf{A})}{h} \\ &= \exp(t\mathbf{A}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h\mathbf{A}) - \mathbf{E}_n}{h} \\ &= \exp(t\mathbf{A}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \mathbf{A} + \frac{h\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{h^2\mathbf{A}^3}{3!} + \dots + \frac{h^{k-1}\mathbf{A}^k}{k!} \right) \\ &= \exp(t\mathbf{A}) \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \mathbf{A} + \frac{h\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{h^2\mathbf{A}^3}{3!} + \dots + \frac{h^{k-1}\mathbf{A}^k}{k!} \right) \\ &= \exp(t\mathbf{A}) \cdot \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{A} \right) \\ &= \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

kde limity jsme mohli prohodit, protože nekonečná řada

$$\mathbf{A} + \frac{h\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{h^2\mathbf{A}^3}{3!} + \dots + \frac{h^{k-1}\mathbf{A}^k}{k!} + \dots$$

je pro  $|h| \leq 1$  *stejněměrně konvergentní*.<sup>4</sup> ■

<sup>3</sup>V Definici O.2.6 jsme tedy volili  $I = (-\infty; +\infty)$ .

<sup>4</sup>To znamená, že pro  $|h| \leq 1$  lze tuto řadu majorisovat absolutně konvergentní řadou. Viz například knihu Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Inc., 1976.

**O.2.9 Poznámka (Význam křivky  $t \mapsto \exp(t\mathbf{A})$ )** Rovnost

$$\frac{d}{dt} \exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \exp(t\mathbf{A})$$

z Tvzení O.2.8 znamená přesně platnost rovností

$$\left( \frac{d}{dt} \exp(t\mathbf{A}) \right) \cdot \mathbf{e}_j = (\mathbf{A} \cdot \exp(t\mathbf{A})) \cdot \mathbf{e}_j$$

pro všechna  $j = 1, \dots, n$  (protože matice se rovnají přesně tehdy, když se rovnají jejich sloupce).

Protože v  $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  se derivuje po složkách, můžeme výše uvedené rovnosti přepsat jako rovnosti

$$\frac{d}{dt} (\exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{A} \cdot (\exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_j)$$

které platí pro všechna  $j = 1, \dots, n$ .

Pokud označíme  $\exp(t\mathbf{A})$  ve sloupcovém zápisu jako  $(\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t))$ , potom lze rovnosti dále přepsat jako rovnosti

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_j(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_j(t)$$

které pro všechna  $j = 1, \dots, n$ .

Povšimněme si, že pro všechna  $j = 1, \dots, n$  platí

$$\mathbf{u}_j(0) = \exp(0\mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_j = \exp(\mathbf{O}_{n,n}) \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j$$

To znamená, že funkce  $\mathbf{u}_j(t)$  (tj.  $j$ -tý sloupec matice  $\exp(t\mathbf{A})$ ) je řešením diferenciální rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_j$$

pro  $j = 1, \dots, n$ .

Podle Tvzení 13.2.8 je matice  $\exp(t\mathbf{A})$  regulární pro každou hodnotu  $t$ . Tudíž sloupce  $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$  jsou lineárně nezávislé pro všechna reálná  $t$ .

Poznámka O.2.9 tedy říká, že  $j$ -tý sloupec matice  $\exp(t\mathbf{A})$  obsahuje řešení diferenciální rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_j$$

Z toho okamžitě plyne důležitá věta. Povšimněme si přímé analogie s Větou O.1.2. Tato analogie je zvláště patrná v Důsledku O.2.12.

**O.2.10 Věta (Existence a jednoznačnost řešení homogenní soustavy)** *At'  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je jakákoli matice a at'  $\mathbf{c}$  je jakýkoli vektor z  $\mathbb{R}^n$ . Potom diferenciální rovnice*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$$

*má jediné řešení*

$$\mathbf{u}(t) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

DŮKAZ. Protože platí rovnosti

$$\mathbf{u}(0) = \exp(0\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c} = \exp(\mathbf{O}_{n,n}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$$

stačí ověřit, že

$$\frac{d}{dt} \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

Podle Tvzení O.2.8 platí

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}) &= \left( \frac{d}{dt} \exp(t\mathbf{A}) \right) \cdot \mathbf{c} \\ &= \mathbf{A} \cdot \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

Nyní musíme ukázat, že jestliže  $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}(t)$  a  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{c}$ , potom  $\mathbf{v}(t) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$  pro všechna reálná  $t$ . Za tím účelem definujeme novou funkci

$$\mathbf{w}(t) = \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}(t)$$

a spočítáme její první derivaci:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{w}(t) = -\mathbf{A} \cdot \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}(t) + \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)}_{=\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}(t)} = \mathbf{0}$$

kde poslední rovnost plyne z rovnosti  $\mathbf{A} \cdot \exp(-t\mathbf{A}) = \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$  podle části (2) Tvzení 13.2.8.

To znamená, že funkce  $\mathbf{w}$  je konstantní. Protože

$$\mathbf{w}(0) = \exp(0\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(0) = \mathbf{c}$$

platí  $\mathbf{w}(t) = \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}(t) = \mathbf{c}$  pro všechna reálná  $t$ , neboli

$$\mathbf{v}(t) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

pro všechna reálná  $t$ . ■



**O.2.11 Poznámka (Princip superposice pro homogenní diferenciální rovnice)** Věta O.2.12 je vlastně *principem superposice*. Z Poznámky O.2.9 víme, že matice

$$\exp(t\mathbf{A}) = (\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t))$$

má ve svých sloupcích řešení rovnic

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, n$$

To znamená, že platí

$$\dot{\mathbf{u}}_j(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_j(t), \quad \mathbf{u}_j(0) = \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Pokud nyní počáteční podmínku nahradíme *lineární kombinací*

$$\mathbf{c} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{e}_j$$

tj. pokud chceme vyřešit rovnici  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ , stačí spočítat lineární kombinaci

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j(t)$$

neboli křivku  $t \mapsto \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$ .

**O.2.12 Důsledek** At  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je jakákoli matice,  $t_0$  je jakékoli reálné číslo a at  $\mathbf{c}$  je jakýkoli vektor z  $\mathbb{R}^n$ . Potom diferenciální rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

má *jediné řešení*

$$\mathbf{u}(t) = \exp((t - t_0)\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

DŮKAZ. Provedte substituci  $s = t - t_0$ . Protože rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(s), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$$

má *jediné řešení*  $\exp(s\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$ , je  $\exp((t - t_0)\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$  jediným řešením rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

■

**O.2.13 Příklad** Vyřešme rovnici  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ ,  $t \geq 4$ ,  $\mathbf{x}(4) = \mathbf{c}$ , kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podle Důsledku O.2.12 je jediné řešení tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \exp((t-4)\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c} \\ &= \exp\left(\begin{pmatrix} 3t-12 & -2t+8 \\ 2t-8 & 3t-12 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{3t-12} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2t-8) & -\sin(2t-8) \\ \sin(2t-8) & \cos(2t-8) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t-12} \cdot (4 \cos(2t-8) - \sin(2t-8)) \\ e^{3t-12} \cdot (4 \sin(2t-8) + \cos(2t-8)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kde jsme pro výpočet exponenciály použili Příklad 13.2.12.

Zbývá umět vyřešit *nehomogenní* diferenciální rovnice tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

Budeme postupovat stejně jako v podkapitole O.1. To znamená, že je třeba umět *integravit* křivky. Pro křivky v  $\mathbb{R}^n$  a  $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  nejde o žádný problém — integruje se po složkách. To opět plyne z teorie podkapitoly 13.1.

#### O.2.14 Příklad

(1) Pro křivku

$$\mathbf{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

je

$$\int_{-1}^t \mathbf{u}(s) \, ds = \begin{pmatrix} \int_{-1}^t s^3 \, ds \\ \int_{-1}^t (s-1) \, ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[ \frac{s^4}{4} \right]_{-1}^t \\ \left[ \frac{(s-1)^2}{2} \right]_{-1}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^4-1}{4} \\ \frac{t^2-2t-3}{2} \end{pmatrix}$$

(2) Pro křivku

$$\mathbf{U} : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & e^t \\ 2t & \sin t \end{pmatrix}$$

je

$$\int_0^t \mathbf{U}(s) \, ds = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos s \, ds & \int_0^t e^s \, ds \\ \int_0^t 2s \, ds & \int_0^t \sin s \, ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & e^t - 1 \\ t^2 & -\cos t + 1 \end{pmatrix}$$

Následující věta je kopií výsledku z podkapitoly O.1.

**O.2.15 Věta (Metoda variace konstant)** At  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  je jakákoli matice a at  $\mathbf{c}$  je jakýkoli vektor z  $\mathbb{R}^n$ . At  $\mathbf{b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  je jakákoli spojitá funkce. Potom diferenciální rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$$

má jediné řešení

$$\mathbf{u}(t) = \underbrace{\int_0^t \exp((t-s)\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}(s) \, ds}_{\text{partikulární řešení}} + \underbrace{\exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}}_{\text{řešení homogenní rovnice}}$$

DŮKAZ. Předpokládejme, že křivka  $\mathbf{u}(t)$  řeší diferenciální rovnici

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$$

a zavedeme substituci<sup>5</sup>

$$\mathbf{u}(t) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{y}(t)$$

Protože je pro každé  $t$  matice  $\exp(t\mathbf{A})$  regulární, určuje křivka  $t \mapsto \mathbf{u}(t)$  křivku  $t \mapsto \mathbf{y}(t)$  jednoznačně (a naopak: křivka  $t \mapsto \mathbf{y}(t)$  jednoznačně určuje křivku  $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ ).

Spočteme

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A} \cdot \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{y}(t) + \exp(t\mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t)$$

Dosadíme do  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$  a dostaneme tak rovnici

$$\exp(t\mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{b}(t)$$

neboli

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}(t)$$

Poslední rovnici je ale snadné řešit: stačí zintegrovat křivku  $t \mapsto \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}(t)$ . Jako určitý integrál vezmeme funkci

$$\mathbf{v}(t) = \int_0^t \exp(-s\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}(s) \, ds + \mathbf{c}$$

protože musí platit rovnosti

$$\mathbf{c} = \mathbf{u}(0) = \exp(0\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(0)$$

Celkově tedy dostáváme

$$\mathbf{u}(t) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}(t) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \int_0^t \exp(-s\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}(s) \, ds + \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

nebo, po zjednodušení integrované funkce, dává rovnost

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \exp((t-s)\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}(s) \, ds + \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

jediné řešení diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ . ■

**O.2.16 Důsledek** *At  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je jakákoli matice,  $t_0$  je jakékoli reálné číslo a at  $\mathbf{c}$  je jakýkoli vektor z  $\mathbb{R}^n$ . At  $\mathbf{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  je jakákoli spojitá funkce. Potom diferenciální rovnice*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

*má jediné řešení*

$$\mathbf{u}(t) = \underbrace{\int_{t_0}^t \exp((t-s)\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}(s) \, ds}_{\text{partikulární řešení}} + \underbrace{\exp((t-t_0)\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}}_{\text{řešení homogenní rovnice}}$$

DŮKAZ. Zavedťe substituci stejně jako v Důsledku O.2.12. ■

<sup>5</sup>Opět upozorňujeme na to, co se zde odehrává. Víme, že křivka  $\exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$  řeší rovnici  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ . Nyní hledáme řešení problému  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$  ve tvaru  $\exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{y}(t)$ , kde  $\mathbf{y}(t)$  je (zatím) neznámá křivka. To znamená, že konstantu  $\mathbf{c}$  „chceme rozpohybovat“. Proto se této metodě říká *variace konstant*.

**O.2.17 Příklad (Jedna diferenciální rovnice druhého řádu)** V podkapitole O.4 uvidíme, že často je zapotřebí umět vyřešit diferenciální rovnici, jakou je například

$$\ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) + 3y(t) = -5t + \cos t, \quad y(0) = 4, \quad \dot{y}(0) = -1$$

Hledáme tedy funkci  $u(t)$ , která má *druhou*<sup>6</sup> derivaci, a pro kterou platí rovnost

$$\ddot{u}(t) - 6\dot{u}(t) + 3u(t) = -5t + \cos t, \quad u(0) = 4, \quad \dot{u}(0) = -1$$

Jak tento problém souvisí s problémy, které jsme doposud studovali?

Stačí provést substituci:

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t)$$

a studovat *soustavu*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 6x_2(t) - 3x_1(t) - 5t + \cos t, \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = -1, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5t + \cos t \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Je jasné, že vyřešením této soustavy lineárních rovnic vyřešíme i původní rovnici

$$\ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) + 3y(t) = -5t + \cos t, \quad y(0) = 4, \quad \dot{y}(0) = -1$$

Nyní zavedeme obecné lineární diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu a předvedeme, jak je převést na soustavy diferenciálních rovnic. Postup bude analogický Příkladu O.2.17. Připomeňme značení: jako  $u^{(j)}(t)$  značíme  $j$ -tou derivaci funkce  $u(t)$ .

**O.2.18 Definice** *Lineární diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty* je zápis

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = f(t)$$

$$y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}, \quad y^{(n-2)}(t_0) = c_{n-2}, \dots, \quad \dot{y}(t_0) = c_1, \quad y(t_0) = c_0$$

kde  $a_0, \dots, a_{n-1}$  jsou pevná reálná čísla,  $f: t \mapsto f(t)$  je funkce definovaná na intervalu  $I$  obsahujícím reálné číslo  $t_0$  a  $c_0, \dots, c_{n-1}$  jsou pevná reálná čísla.

Pokud  $f(t) = 0$  pro všechna  $t \in I$ , mluvíme o *příslušné homogenní rovnici*.

Systému rovností

$$y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}, \quad y^{(n-2)}(t_0) = c_{n-2}, \dots, \quad \dot{y}(t_0) = c_1, \quad y(t_0) = c_0$$

říkáme *počáteční podmínka*.

Funkci  $u: t \mapsto u(t)$ , mající na intervalu  $I$   $n$  derivací, a splňující

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot \dot{u}(t) + a_0 \cdot u(t) = f(t)$$

$$u^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}, \quad u^{(n-2)}(t_0) = c_{n-2}, \dots, \quad \dot{u}(t_0) = c_1, \quad u(t_0) = c_0$$

říkáme *řešení* příslušné diferenciální rovnice.

**O.2.19 Věta** *Každou lineární diferenciální rovnici  $n$ -tého lze převést na soustavu  $n$  lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty.*

<sup>6</sup>Proto se takovým rovnicím říká *rovnice druhého řádu*. Viz Definici O.2.18.



DŮKAZ. Ať

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = f(t)$$

$$y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}, \quad y^{(n-2)}(t_0) = c_{n-2}, \dots, \quad \dot{y}(t_0) = c_1, \quad y(t_0) = c_0$$

je lineární diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty. Zavedeme substituci

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t), \quad x_3(t) = \ddot{y}(t), \dots, \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

a definujeme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-3} \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

První komponenta řešení problému  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$  je řešením zadané lineární diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty. ■

**O.2.20 Poznámka** Podle Tvzení 10.3.10 pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

platí  $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n) = (-1)^n \cdot (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)$ . To znamená, že kořeny *charakteristického polynomu* diferenciální rovnice

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = 0$$

lze najít vyřešením rovnice

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Na závěr podkapitoly se vrátíme ke křivce  $t \mapsto \exp(t\mathbf{A})$ . V Poznámce O.2.9 jsme ukázali, že platí

$$\frac{d}{dt}(\exp(t\mathbf{A})) = \mathbf{A} \cdot \exp(t\mathbf{A}), \quad \exp(0\mathbf{A}) = \mathbf{E}_n$$

Víme také, že matice  $\exp(t\mathbf{A})$  je vždy regulární (platí  $(\exp(t\mathbf{A}))^{-1} = \exp(-t\mathbf{A})$ ). Křivkám s těmito vlastnostmi se říká *fundamentální matice*.

**O.2.21 Definice (Fundamentální matice)** Jakékoli křivce  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  v  $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , která splňuje rovnost  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t)$  a pro kterou je matice  $\mathbf{U}(t)$  vždy regulární, říkáme *fundamentální matice* rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ .

Pro fundamentální matice platí analogie Věty O.2.10. Povšimněme si, že i důkaz následujícího výsledku je kopií důkazu Věty O.2.10.

**O.2.22 Tvzení** Ať křivka  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  je fundamentální matice diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ . Potom platí

- (1)  $\mathbf{U}(t) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{U}(0)$ .
- (2) Je-li  $\mathbf{P}$  jakákoli regulární matice, potom křivka  $t \mapsto \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{P}$  je fundamentální matice diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ .

DŮKAZ.

(1) Definujme  $\mathbf{W}(t) = \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{U}(t)$ . Potom platí

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}(t) = -\mathbf{A} \cdot \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{U}(t) + \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \mathbf{U}(t)}_{=\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}(t)} = \mathbf{O}_{n,n}$$

kde jsme využili rovnost  $\mathbf{A} \cdot \exp(-t\mathbf{A}) = \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$  z Tvzení 13.2.8. To znamená, že součin  $\mathbf{W}(t) = \exp(-t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{U}(t)$  je konstantní pro všechna  $t$ . Protože platí

$$\mathbf{W}(0) = \exp(-0\mathbf{A}) \cdot \mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}(0)$$

je důkaz hotov.

(2) Tvzení okamžitě plyne z rovnosti

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{P}) = \left( \frac{d}{dt} \mathbf{U}(t) \right) \cdot \mathbf{P} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}(t)) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{P})$$

a toho, že součin  $\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{P}$  je vždy regulární. ■

**O.2.23 Věta (Abel-Liouville)** *At  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je jakákoli čtvercová matice a at křivka  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  splňuje rovnici  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t)$ . Potom platí rovnost*

$$\det(\mathbf{U}(t)) = \det(\mathbf{U}(0)) \cdot e^{t \cdot \sum_{i=1}^n a_{ii}}$$

DŮKAZ. Označme  $a = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  a označme jako  $W(t) = \det(\mathbf{U}(t))$ . Ukážeme, že křivka  $t \mapsto W(t)$  je řešením diferenciální rovnice  $\dot{x}(t) = a \cdot x(t)$ ,  $x(0) = W(0)$ . Podle Věty O.2.10 bude důkaz hotov.

Označme dále  $\mathbf{U}(t) = (\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t))$ . Potom se lze snadno přesvědčit, že platí rovnost

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(t) &= \det(\dot{\mathbf{u}}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_3(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)) + \det(\mathbf{u}_1(t), \dot{\mathbf{u}}_2(t), \mathbf{u}_3(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)) + \dots \\ &\quad \dots + \det(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_3(t), \dots, \mathbf{u}_{n-1}(t), \dot{\mathbf{u}}_n(t)) \end{aligned}$$

Protože pro jakékoli  $j = 1, \dots, n$  platí  $\dot{\mathbf{u}}_j(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_j(t)$ , dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(t) &= \det(\mathbf{A}\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_3(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)) + \det(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{A}\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_3(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)) + \dots \\ &\quad \dots + \det(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_3(t), \dots, \mathbf{u}_{n-1}(t), \mathbf{A}\mathbf{u}_n(t)) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n a_{ii} \right) \cdot W(t) \end{aligned}$$

kde poslední rovnost plyne z přímého výpočtu determinantu. Protože platí  $W(0) = \det(\mathbf{U}(0))$ , je důkaz hotov. ■

**O.2.24 Definice (Wronského determinant)** Determinantu  $W(t) = \det(\mathbf{U}(t))$  říkáme *Wronského determinant* fundamentální matice  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$ .

**O.2.25 Poznámka** Věta O.2.23 je posledním kamínkem v mozaice faktů o exponenciále matic. Křivka  $t \mapsto \exp(t\mathbf{A})$  je totiž fundamentální maticí rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ . Rovnost

$$\det(\exp(t\mathbf{A})) = e^{t \cdot \sum_{i=1}^n a_{ii}}$$

pak znamená, že  $\det(\exp(t\mathbf{A})) > 0$  pro všechna reálná  $t$ . Tento fakt můžeme interpretovat jako náhražku nerovnosti  $e^x > 0$  pro všechna reálná čísla  $x$ .

Obecně z Věty **O.2.23** plyne, že  $\mathbf{U}(t)$  je regulární matice, jakmile matice  $\mathbf{U}(0)$  je regulární. To znamená, že platí následující výsledek.

**O.2.26 Důsledek** *Ať křivka  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  splňuje rovnici  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t)$  a ať matice  $\mathbf{U}(0)$  je regulární, potom  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  je fundamentální matice rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ .*

Na závěr podkapitoly shrneme vyloženu teorii do několika prakticky zaměřených pozorování.

**Poznámky k řešení diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ .**

Podle Věty **O.2.10** má rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ , kde  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , jako řešení křivku  $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ , kde

$$\mathbf{u}(t) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}(0)$$

Důsledky tohoto faktu jsou následující:

- (1) Sloupce matice  $\exp(t\mathbf{A})$  jsou systémem  $n$  lineárně nezávislých řešení rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ . Jakékoli řešení rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$  lze získat lineární kombinací sloupců matice  $\exp(t\mathbf{A})$ . To říká Věta **O.2.10**.
- (2) Obecněji: pro jakoukoli fundamentální matici  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  (viz Definici **O.2.21**) rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$  tvoří sloupce matice  $\mathbf{U}(t)$  systém  $n$  lineárně nezávislých řešení rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ .
- (3) Abychom zjistili, zda křivka  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  tvoří fundamentální matici rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ , stačí podle Důsledku **O.2.26** ověřit dvě následující podmínky:
  - (a) Každý sloupec matice  $\mathbf{U}(t)$  musí být řešením rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ .
  - (b) Matice reálných čísel  $\mathbf{U}(0)$  je regulární.

Rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ , s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$  má jediné řešení tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot (\mathbf{U}(0))^{-1} \cdot \mathbf{c}$$

kde  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  je jakákoli fundamentální matice rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ . To plyne z Věty **O.2.10** a Tvzení **O.2.22**.

**Poznámky k řešení diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ .**

Věta **O.2.15** říká, že řešení diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$  lze jednoznačně psát ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \underbrace{\mathbf{U}(t) \cdot \int_0^t (\mathbf{U}(s))^{-1} \cdot \mathbf{b}(s) \, ds}_{\text{partikulární řešení}} + \underbrace{\mathbf{U}(t) \cdot (\mathbf{U}(0))^{-1} \cdot \mathbf{c}}_{\text{řešení homogenní rovnice}}$$

kde  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  je jakákoli fundamentální matice rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ . Této metodě se říká *variace konstant*. Tvzení plyne z důkazu Věty **O.2.15**, kde jsme využívali pouze toho, že  $t \mapsto \exp(t\mathbf{A})$  je fundamentální matice rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ .

**Poznámky k řešení lineární diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty.**

Lineární diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty lze převést na soustavu tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

Viz Větu **O.2.19**.

**Poznámky k hledání fundamentální matice.**

- (1) „Kanonickou“ fundamentální maticí rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$  je křivka  $t \mapsto \exp(t\mathbf{A})$ .

Tuto křivku lze často spočítat nalezením Jordanova tvaru čtvercové matice  $\mathbf{A}$  nad  $\mathbb{R}$  pomocí Tvzení 13.2.13. Z Kapitoly 11 víme, že Jordanův tvar je výpočetně náročná úloha. Víme také, že Jordanův tvar reálné čtvercové matice nemusí existovat. Pak si lze pomoci „reálným Jordanovým tvarem“ z Poznámky 11.4.7. Viz například Tvzení 13.2.14.

- (2) V některých případech lze fundamentální matici „uhodnout“. Kandidáta na fundamentální matici je ovšem nutno „prověřit“: každý sloupec matice musí být řešením zadané diferenciální rovnice a sloupce fundamentální matice musí být lineárně nezávislé.

V podkapitole O.4 budeme věnovat případu, který se v praxi vyskytuje nejčastěji: lineárním diferenciálním rovnicím *druhého* řádu s konstantními koeficienty. Pro takový případ nalezení fundamentální matice příslušné soustavy prvního řádu nebude činit potíže.

## O.3 Fázové prostory řešení

V této podkapitole vezmeme vážně dynamický pohled na řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Naučíme se namalovat *trajektorie* řešení takových soustav ve *fázovém prostoru*. Začneme velmi jednoduchým příkladem.

### O.3.1 Příklad Zakreslíme trajektorie řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Chceme si představovat výše uvedenou soustavu jako *dynamický systém*. To jest: vektor

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

popisuje *polohu* (dejme tomu nějaké částice) v čase  $t$ , vektor

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

je *rychlost* v čase  $t$ . Počáteční podmínka

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

pak udává *polohu v čase*  $t = 0$ .

Podle Věty O.2.10 a Příkladu 13.2.12 platí

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Například pro

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

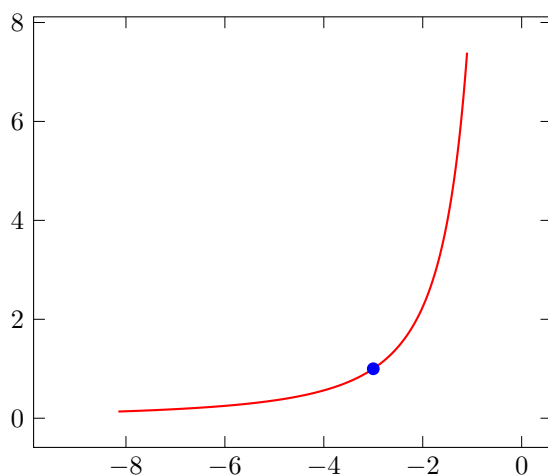
je tedy

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^t \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

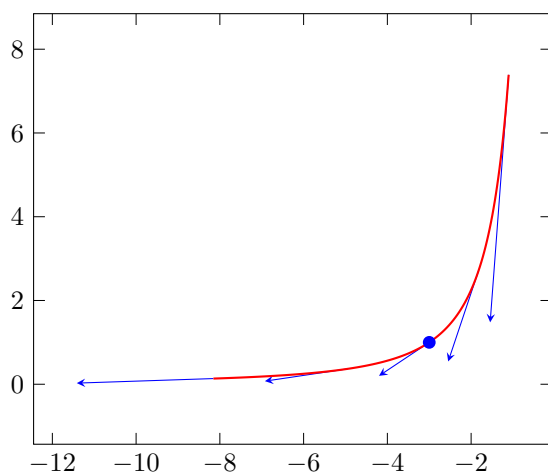
a příslušná křivka

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -3e^t \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

má obrázek<sup>7</sup>



kde jsme modře vyznačili počáteční bod  $\mathbf{c}$ . Pokud ke každému bodu  $\mathbf{x}(t)$  přimalujeme vektor  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ , dostaneme obrázek

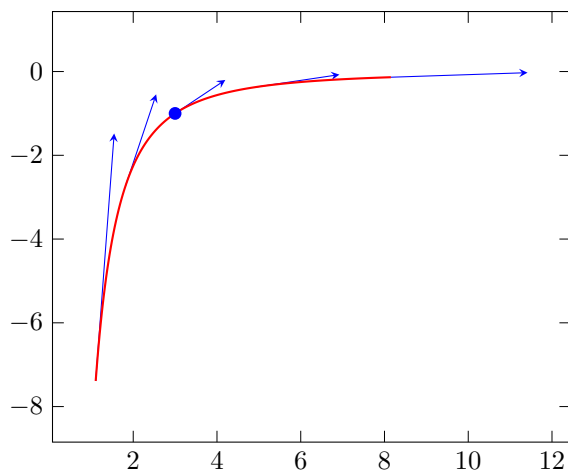


který vypovídá o *rychlosti směru* pohybu (částice).

Je jasné, že změnou počáteční podmínky dostaneme obrázek jiný. Například pro

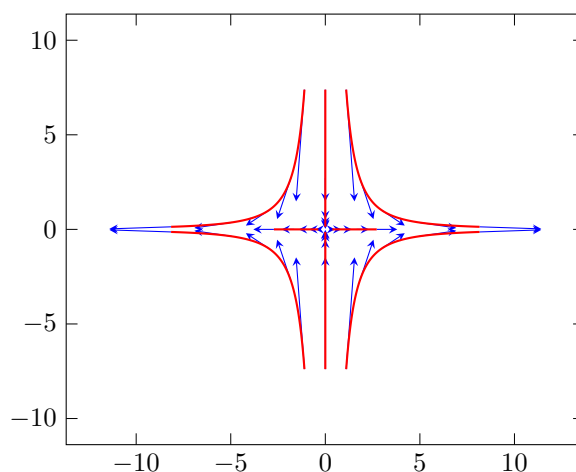
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dostaneme obrázek



<sup>7</sup>Takovým obrázkům se říká *trajektorie ve fázovém prostoru*. Body na jedné trajektorii se liší o fázi, viz Poznámku O.3.5.

Pro volby hodnot  $\mathbf{c}$  ve všech čtyřech kvadrantech a na jednotlivých osách dostaneme celkový obrázek



který nám dává jasnou představu o vývoji pohybu v čase, o rychlosti, a o závislosti na počátečních podmínkách.

Předchozí příklad naznačil, jakým směrem se budeme ubírat: pro diferenciální rovnici  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$  budeme studovat vývoj řešení v závislosti na počátečních podmínkách. To je smyslem následující definice.

**O.3.2 Definice (Dynamický systém určený diferenciální rovnicí)** Ať  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je matice. *Dynamický systém* diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$  je funkce tvaru

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

pro kterou platí podmínky:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, \mathbf{c}) = \mathbf{A} \cdot \Phi(t, \mathbf{c}), \quad \Phi(0, \mathbf{c}) = \mathbf{c}$$

Definice dynamického systému je jen *jiný* pohled na řešení diferenciální rovnice. Z Věty O.2.10 víme, že platí rovnost

$$\Phi(t, \mathbf{c}) = \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

Přesto nám značení  $\Phi(t, \mathbf{c})$  umožní odhalit zajímavé vlastnosti řešení diferenciálních rovnic.

**O.3.3 Lemma** Pro jakákoli reálná čísla  $t_1, t_2$  platí rovnosti

$$\Phi(t_1 + t_2, \mathbf{c}) = \Phi(t_1, \Phi(t_2, \mathbf{c})) = \Phi(t_2, \Phi(t_1, \mathbf{c}))$$

DŮKAZ. Podle Tvrzení 13.2.8 platí rovnosti

$$\Phi(t_1 + t_2, \mathbf{c}) = \exp((t_1 + t_2)\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c} = \exp(t_1\mathbf{A}) \cdot \underbrace{\exp(t_2\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}}_{=\Phi(t_2, \mathbf{c})} = \Phi(t_1, \Phi(t_2, \mathbf{c}))$$

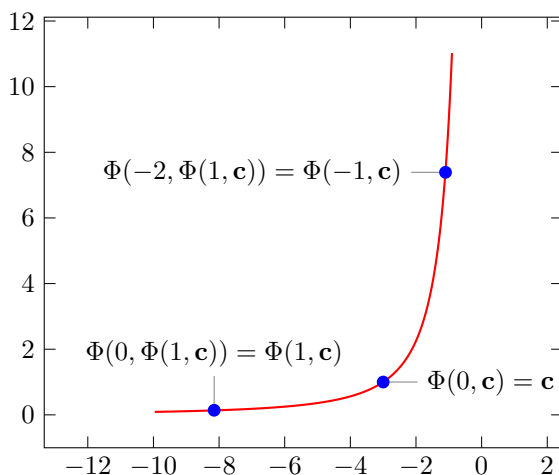
Rovnost  $\Phi(t_1 + t_2, \mathbf{c}) = \Phi(t_2, \Phi(t_1, \mathbf{c}))$  se dokáže analogicky. ■

**O.3.4 Důsledek** Pro pevné  $t_0$  jsou křivky

$$t \mapsto \Phi(t + t_0, \mathbf{c}) \quad t \mapsto \Phi(t, \Phi(t_0, \mathbf{c}))$$

stejné. Jde o řešení diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}(0) = \Phi(t_0, \mathbf{c})$ .

**O.3.5 Poznámka (Proč mluvíme o fázovém prostoru?)** Jakkoli jsou předchozí úvahy triviální, vysvětlují, proč jsme obrázku



z Příkladu O.3.1 říkali trajektorie ve *fázovém prostoru*. Namalovaná trajektorie je totiž *společnou* trajektorií nekonečného počtu různých pohybů. Dva různé pohyby se liší o *fázi*, proto používáme terminologii *fázový prostor*. Například rovnost

$$\Phi(0, \Phi(1, c)) = \Phi(1, c)$$

říká, že bod  $\Phi(1, c)$  lze chápat jako *počáteční bod* pohybu částice po křivce a bod  $\Phi(-1, c)$  je pak bodem, ve kterém se částice nacházela v čase  $-2$ , protože platí  $\Phi(-2, \Phi(1, c)) = \Phi(-1, c)$ .

Pro soustavy rozměrů  $2 \times 2$  můžeme jednotlivé případy fázových prostorů snadno zakreslit a klasifikovat. Ukazuje se, že chování řešení soustav diferenciálních rovnic rozměrů  $2 \times 2$  je pouze jednoho z pěti různých typů. Platí totiž následující jednoduchá věta.

**O.3.6 Věta (Topologická klasifikace reálných matic  $2 \times 2$ )** *At*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je reálná matice. Označme jako  $\delta = ad - cb$  determinant  $\mathbf{A}$ , jako  $\tau = a + d$  stopu matice  $\mathbf{A}$ , a jako  $\Delta = \tau^2 - 4\delta$  diskriminant charakteristického polynomu  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  matice  $\mathbf{A}$ . Potom nastane právě jeden z pěti případů:

(1)  $\delta < 0$ .

V tomto případě má polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  dva různé nenulové reálné kořeny opačných znamének.

(2)  $\delta > 0$  a  $\Delta \geq 0$ .

V tomto případě má polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  dva nenulové reálné kořeny stejného znaménka jako  $\tau$ .

(3)  $\delta > 0$ ,  $\tau \neq 0$  a  $\Delta < 0$ .

V tomto případě má polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  dva různé komplexně sdružené kořeny s nenulovou reálnou částí.

(4)  $\delta > 0$  a  $\tau = 0$ .

V tomto případě má polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  dva různé ryze imaginární kořeny.

(5)  $\delta = 0$ .

V tomto případě má polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  jeden kořen 0 a druhý kořen  $\tau$ .

**DŮKAZ.** Zjevně platí buď  $\delta > 0$  nebo  $\delta < 0$  nebo  $\delta = 0$ . V případě  $\delta > 0$  může nastat buď  $\Delta \geq 0$  nebo  $\Delta < 0$ . Pokud platí  $\delta > 0$  a  $\tau = 0$ , potom  $a = -d$  a tudíž  $\Delta = 0 - 4\delta < 0$ . Nastane tedy opravdu právě jeden z případů (1)–(5). Zbývá ukázat tvrzení o kořenech polynomu  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - (a + b)x + (ab - cd) = x^2 - \tau x + \delta$ .

- (1) Protože  $\Delta = \tau^2 - 4\delta$ , platí  $\Delta > 0$ , jakmile  $\delta < 0$ . To znamená, že kořeny  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  jsou navzájem různá reálná čísla

$$\frac{\tau + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \frac{\tau - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Protože

$$(\tau + \sqrt{\Delta}) \cdot (\tau - \sqrt{\Delta}) = \tau^2 - \Delta = 4\delta < 0$$

mají tyto vlastní hodnoty různé znaménko.

- (2) V případě  $\delta > 0$  a  $\Delta \geq 0$  jsou kořeny  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  reálná čísla

$$\frac{\tau + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \frac{\tau - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Oba kořeny jsou nenulové. Kdyby totiž platilo  $\tau^2 = \Delta$ , pak platí  $-4\delta \geq 0$ , a to není možné.

Protože platí

$$(\tau + \sqrt{\Delta}) \cdot (\tau - \sqrt{\Delta}) = \tau^2 - \Delta = 4\delta > 0$$

mají tyto kořeny stejné znaménko. Protože platí  $\tau^2 \geq 4|\delta| > 0$ , je  $\tau \neq 0$ . Znaménko obou kořenů je tedy stejné jako znaménko  $\tau$ .

- (3) V případě  $\delta > 0$ ,  $\tau \neq 0$  a  $\Delta < 0$  jsou kořeny polynomu  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  komplexní čísla

$$\frac{\tau + i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \frac{\tau - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

a protože  $\tau \neq 0$ , mají tato komplexní čísla nenulovou reálnou část.

- (4) V případě  $\delta > 0$  a  $\tau = 0$  je  $\Delta < 0$  a kořeny polynomu  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$  jsou ryze imaginární čísla

$$i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \quad -i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

- (5) V případě  $\delta = 0$  má charakteristický polynom  $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - \tau x$  jeden kořen 0 a druhý kořen  $\tau$ .

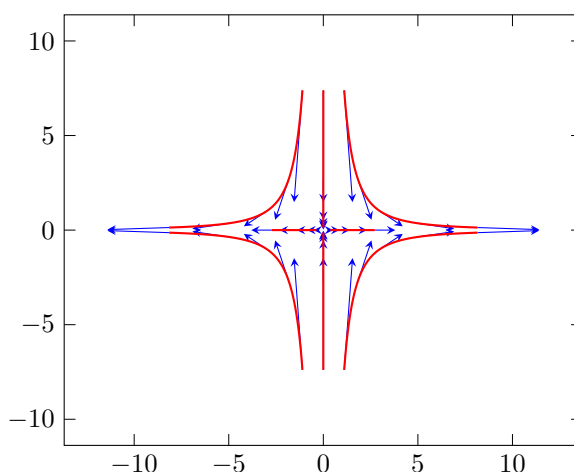
■

Ukážeme, že Věta **O.3.6** umožní krásnou klasifikaci fázových diagramů systémů  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ . Tato klasifikace okamžitě plyne z výpočtu křivek  $t \mapsto \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$  pro matice  $2 \times 2$  pomocí Příkladu **13.2.12** a Tvzení **13.2.14**.

**O.3.7 Topologický typ (1)** V případě  $\delta < 0$  má matice  $\mathbf{A}$  dvě různé nenulové vlastní hodnoty opačných znamének. Křivka

$$t \mapsto \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

má ve fázovém prostoru diagram (až na případnou změnu souřadnic) tvaru



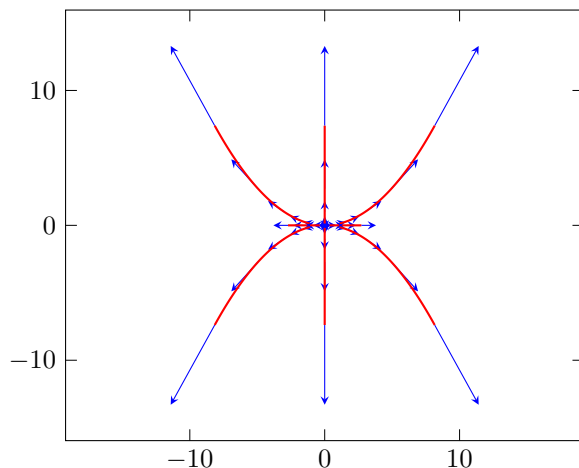


V tomto případě mluvíme o tom, že fázový diagram má v počátku *sedlový bod*.

**O.3.8 Topologický typ (2)** V případě  $\delta > 0$  a  $\Delta \geq 0$  má matice  $\mathbf{A}$  dvě různé nenulové vlastní hodnoty stejného znaménka jako  $\tau$ . Křivka

$$t \mapsto \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

má ve fázovém prostoru diagram (až na změnu souřadnic) tvaru

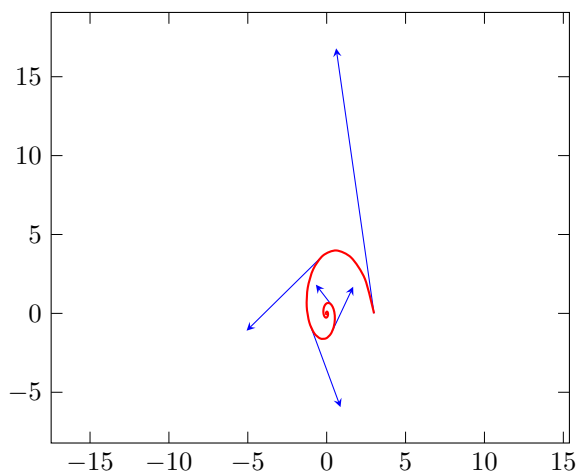


V tomto případě mluvíme o tom, že fázový diagram má v počátku *stabilní bod* v případě  $\tau < 0$  nebo *nestabilní bod* v případě  $\tau > 0$ . Zakreslen je nestabilní bod; stabilní bod by měl opačný směr tečen ke křivkám.

**O.3.9 Topologický typ (3)** V případě  $\delta < 0$ ,  $\tau \neq 0$  a  $\Delta < 0$  má matice  $\mathbf{A}$  dvě různé komplexně sdružené vlastní hodnoty s nenulovou reálnou částí. Křivka

$$t \mapsto \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

má ve fázovém prostoru diagram (až na změnu souřadnic) tvaru

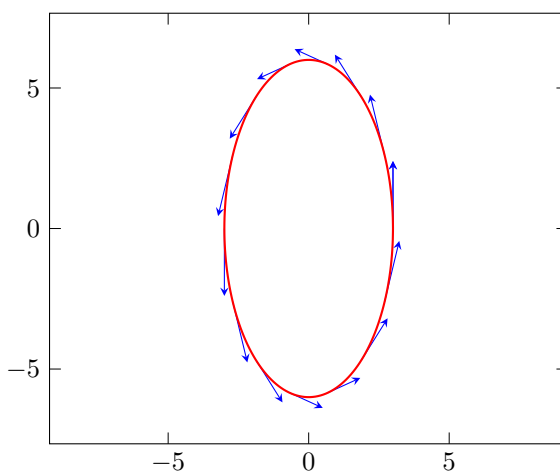


V tomto případě mluvíme o tom, že fázový diagram má v počátku *stabilní ohnisko* v případě  $\tau < 0$  nebo *nestabilní ohnisko* v případě  $\tau > 0$ . Zakresleno je stabilní ohnisko; nestabilní ohnisko by mělo opačný směr tečen ke spirále.

**O.3.10 Topologický typ (4)** V případě  $\delta > 0$  a  $\tau = 0$  má matice  $\mathbf{A}$  dvě různé ryze imaginární vlastní hodnoty. Křivka

$$t \mapsto \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

má ve fázovém prostoru diagram (až na změnu souřadnic) tvaru



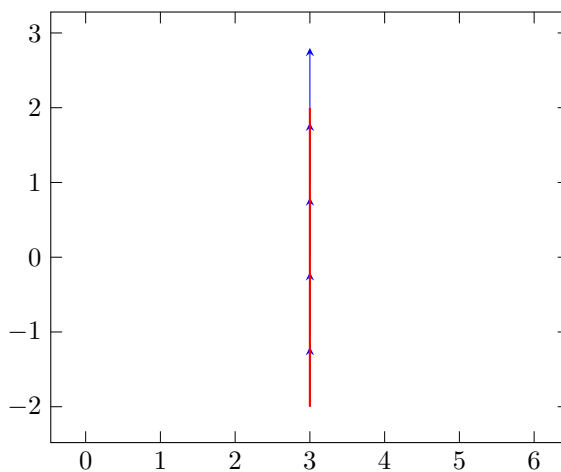
V tomto případě mluvíme o *středě* v počátku.

**O.3.11 Topologický typ (5)** V případě  $\delta = 0$  má matice  $\mathbf{A}$  jednu vlastní hodnotu 0 a druhou vlastní hodnotu  $\tau$ . V závislosti na znaménku  $\tau$  je pak diagram křivky

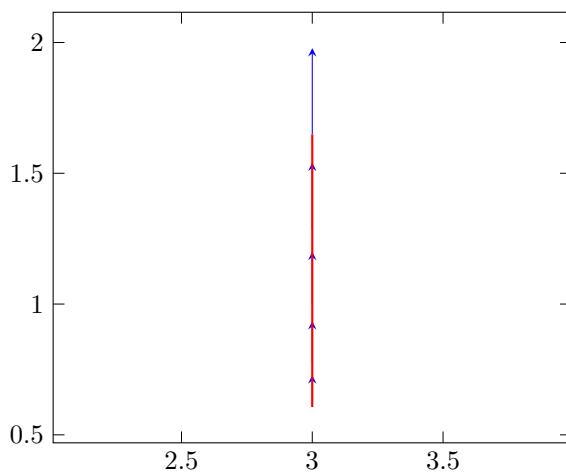
$$t \mapsto \exp(t\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c}$$

(až na změnu souřadnic) jednoho ze tří následujících tvarů

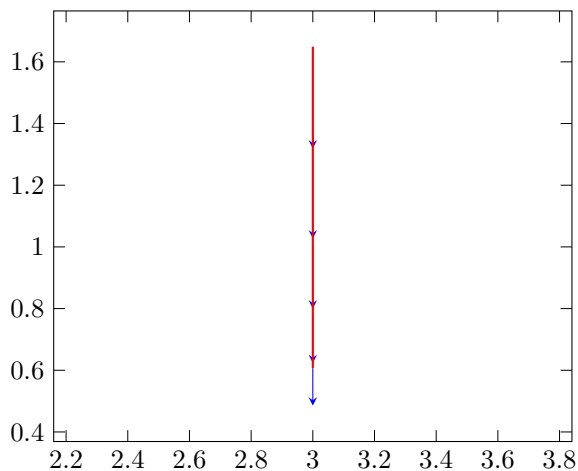
(1) Příklad  $\tau = 0$ .



(2) Příklad  $\tau > 0$ .



(3) Příklad  $\tau < 0$ .



**O.3.12 Poznámka (Diferenciální rovnice a milostné strategie)** Zábavnou interpretaci soustavy

$$\begin{pmatrix} \dot{R}(t) \\ \dot{J}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} R(0) \\ J(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ j_0 \end{pmatrix}$$

lze najít v knize

☞ Steven H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry and engineering*, Addison Wesley, 1994.

Hodnotu  $R(t)$  lze totiž interpretovat jako intenzitu vztahu Romea k Julii v čase  $t$  a, analogicky, hodnotu  $J(t)$  lze interpretovat jako intenzitu vztahu Julie k Romeovi v čase  $t$ . Matice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

pak popisuje *milostnou strategii* páru Romeo-Julie. Například fázový diagram situace  $\delta > 0$  a  $\tau = 0$  (tj. topologický typ (4)) popisuje situaci, kdy se Romeo a Julie potácejí v nekonečné smyčce lásky a nenávisť. Podobně lze interpretovat zbylé topologické typy. Výše uvedený model romantického vztahu tedy připouští *pouze pět kvalitativně různých milostných strategií*, klasifikovaných Větou O.3.6. Více se lze dočíst například v článku

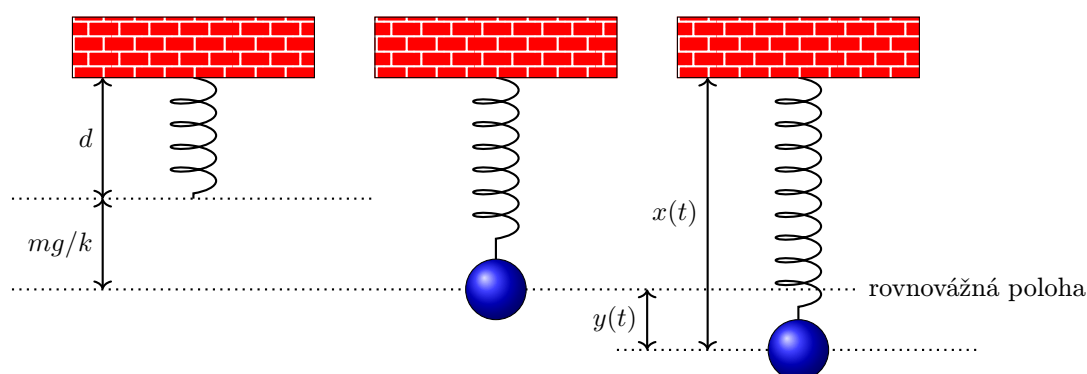
☞ Julien C. Sprott, Dynamical models and love, *Nonlinear dynamics, Psychology, and Life Sciences* 8.3 (2004), 303–313.

kde je probírán i problém milostných trojúhelníků.

## O.4 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

V inženýrských a fyzikálních aplikacích se velmi často vyskytují lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Proto tuto závěrečnou podkapitolu věnujeme těmto rovnicím. Začneme dvěma klasickými příklady, které na konci podkapitoly propojíme. Dostaneme tak jednotný a ucelený pohled na diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Viz Příklad O.4.10.

**O.4.1 Příklad (Závaží na pružině, část 1)** Předpokládejme, že na pružině je zavěšeno závaží hmotnosti  $m$ . Označme jako  $d$  délku nezátíženou pružiny a jako  $x(t)$  vzdálenost závaží od bodu zavěšení pružiny v čase  $t$ . Jako  $y(t)$  označíme odchylku závaží od rovnovážné polohy v čase  $t$ .



Podle druhého Newtonova zákona platí rovnost

$$m\ddot{x}(t) = F(t)$$

kde  $F(t)$  je celková síla, která na závaží působí. Tato celková síla má obecně několik složek. My zanedbáme všechny složky, až na následující dvě:

- (1) Gravitační síla  $F_g = mg$ , kde  $g$  je gravitační zrychlení. Tato síla je způsobena homogenním gravitačním polem Země.
- (2) Síla  $F_p(t) = -k(x(t) - d)$  způsobená pružinou (kde  $k > 0$  je konstanta závisající na pružině, říká se jí *elasticita*). Této rovnici se říká *Hookeův zákon*.

Závaží je (v nějakém čase  $t_0$ ) v rovnovážné poloze, když platí rovnosti

$$F(t_0) = F_g + F_p(t_0) = mg - k(x(t_0) - d) = 0$$

neboli, když platí rovnost

$$x(t_0) = mg/k + d$$

Podívejte se na obrázek.

To znamená, že pro výchylku  $y(t)$  od rovnovážné polohy v čase  $t$  platí

$$y(t) = x(t) - (mg/k + d) = x(t) - mg/k - d$$

neboli

$$x(t) = y(t) + mg/k + d$$

Pro celkovou sílu  $F(t)$  v čase  $t$  tudíž platí

$$m\ddot{y}(t) = m\ddot{x}(t) = F(t) = mg - k(x(t) - d) = -ky(t)$$

Dostáváme tedy diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0$$

Zbývá zvolit počáteční podmínky. Předpokládejme, že v čase 0 je závaží vychýleno o jistou hodnotu  $y(0) = y_0$  a my jej „pustíme“. To znamená, že rychlost  $\dot{y}(0)$  je nulová. Neboli: počáteční podmínky jsou

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Substitucí  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{y}(t)$  dostaneme soustavu lineárních rovnic druhého řádu:

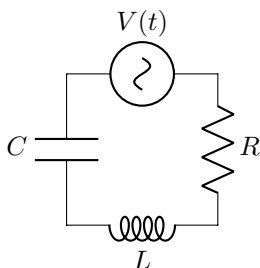
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z Věty **O.2.10** víme, že řešení soustavy je tvaru

$$\exp(t\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a nás zajímá první položka tohoto řešení. K tomuto problému se ještě vrátíme v Příkladu **O.4.4** a v Příkladu **O.4.10**.

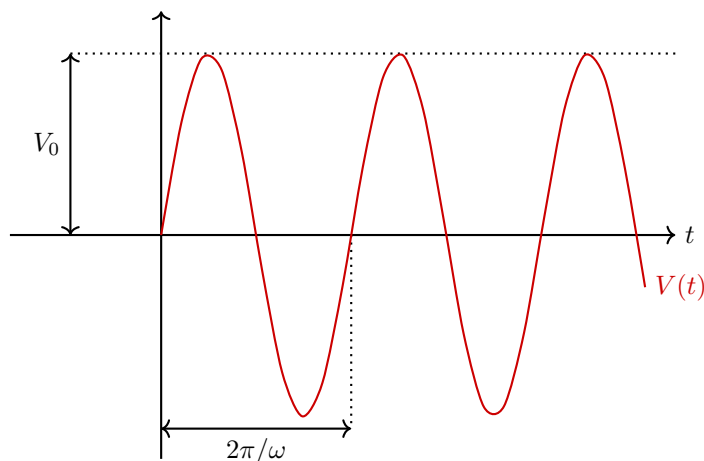
**O.4.2 Příklad (RLC obvod, část 1)** *RLC obvod* je elektrický obvod tvaru



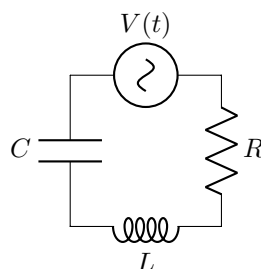
kde *napětí*  $V(t)$  zdroje má tvar

$$V(t) = V_0 \cdot \sin(\omega t)$$

s *amplitudou*  $V_0 > 0$  a *úhlovou frekvencí*  $\omega > 0$ . Průběh střídavého napětí tedy je



Dále v RLC obvodu



značí  $C$  kapacitu kondensátoru,  $L$  je indukčnost cívky a  $R$  je elektrický odpor resistoru. Jestliže na kondensátoru je v čase  $t$  náboj  $Q(t)$  a jestliže  $I(t)$  je proud v obvodu v čase  $t$ , je napětí na kondensátoru, cívce a resistoru rovno (v tomto pořadí)

$$\frac{Q(t)}{C}, \quad L \frac{d}{dt} I(t), \quad RI(t)$$

Kirchhoffův zákon nám říká, že součet napětí v uzavřeném obvodu je nulový. To znamená, že platí rovnost

$$L\dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V(t)$$

pro všechna  $t \geq 0$ . Po zderivování této rovnosti podle času a s využitím definice proudu

$$I(t) = \frac{d}{dt}Q(t)$$

dostaneme rovnost

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \dot{V}(t)$$

neboli

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \omega V_0 \cos(\omega t)$$

Jako počáteční podmínky pro jednoduchost zvolíme

$$I(0) = 0, \quad \dot{I}(0) = 0$$

K řešení této rovnice se vrátíme v Příkladu O.4.9 a v Příkladu O.4.10.

Nyní zformulujeme výsledek o řešení lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s konstantními koeficienty. Využijeme k tomu teorii z podkapitoly O.2.

**O.4.3 Věta (Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty)** *At*

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

je lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Označme jako  $\lambda_1, \lambda_2$  (případně i komplexní) kořeny rovnice

$$x^2 + bx + c = 0$$

Definujme v jednotlivých případech křivku  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  následovně:

(1) Čísla  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou reálná a navzájem různá. Pak definujeme

$$t \mapsto \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

(2) Číslo  $\lambda_1 = \lambda_2$  je reálné číslo. Označme jej  $\lambda$ . Pak definujeme

$$t \mapsto \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

(3) Čísla  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou různá a komplexní. Označme  $\lambda_1 = A + iB$ . Pak definujeme

$$t \mapsto \begin{pmatrix} e^{At} \cos(Bt) & e^{At} \sin(Bt) \\ Ae^{At} \cos(Bt) - Be^{At} \sin(Bt) & Ae^{At} \sin(Bt) + Be^{At} \cos(Bt) \end{pmatrix}$$

Potom je v každém z případů křivka  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  fundamentální maticí rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

a řešení rovnice

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

je první položka součinu

$$\mathbf{U}(t) \cdot (\mathbf{U}(0))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

DŮKAZ. V každém z případů křivka  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  splňuje rovnici  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t)$ . O tom se lze snadno přesvědčit dosazením. Protože  $\mathbf{U}(0)$  je v každém z případů regulární matice, je křivka  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  v každém z případů fundamentální maticí rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$  podle Důsledku O.2.26. Tvrzení pak okamžitě plyne z Věty O.2.10 a Tvrzení O.2.22. ■

Věta O.4.3 má nepochybně značně barokní formulaci a je nezapamatovatelná. Přesto z ní okamžitě plyne snadný návod, jak řešit homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty *v praxi*. Tvrzení věty zní: řešení je v každém z případů tvaru první řádek matice  $\mathbf{U}(t)$  vynásobený vektorem

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{U}(0))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Z toho okamžitě plyne praktický návod, jak při řešení postupovat.

#### Praktický návod pro řešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s konstantními koeficienty.

Věta O.4.3 se pamatuje špatně. Plyne z ní ale okamžitě praktický návod, jak postupovat při řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

Nejprve sestavíme *charakteristický polynom*

$$x^2 + ax + b$$

a nalezneme jeho kořeny  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  v  $\mathbb{C}$ . V závislosti na kvalitě kořenů pak je řešení  $u(t)$  rovnice v jednom z tvarů:

$$(1) \quad u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \text{ jsou-li kořeny } \lambda_1, \lambda_2 \text{ reálné a navzájem různé.}$$

$$(2) \quad u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \text{ je-li kořen } \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \text{ dvojnásobný reálný.}$$

$$(3) \quad u(t) = c_1 e^{At} \cos(Bt) + c_2 e^{At} \sin(Bt), \text{ je-li jeden z kořenů tvaru } A + Bi, \text{ kde } B \neq 0.$$

Konstanty  $c_1$  a  $c_2$  pak dopočteme z požadavků  $u(0) = y_0$  a  $\dot{u}(0) = y_1$ .

#### O.4.4 Příklad (Závaží na pružině, dokončení) Vyřešíme diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

pro závaží na pružině z Příkladu O.4.1. Protože charakteristický polynom

$$x^2 + \frac{k}{m}$$

této rovnice má jako kořeny komplexní čísla

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

víme podle Věty O.4.3, že řešení má tvar

$$y(t) = c_1 \cos(t\sqrt{\frac{k}{m}}) + c_2 \sin(t\sqrt{\frac{k}{m}})$$

Konstanty  $c_1, c_2$  určíme z počátečních podmínek. Určit  $c_1$  je snadné:

$$y_0 = y(0) = c_1 \cos(0\sqrt{\frac{k}{m}}) + c_2 \sin(0\sqrt{\frac{k}{m}}) = c_1$$

Pro určení  $c_2$  nejprve spočteme

$$\dot{y}(t) = -c_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(t\sqrt{\frac{k}{m}}) + c_2\sqrt{\frac{k}{m}} \cos(t\sqrt{\frac{k}{m}})$$

Proto platí

$$0 = \dot{y}(0) = -c_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(0\sqrt{\frac{k}{m}}) + c_2\sqrt{\frac{k}{m}} \cos(0\sqrt{\frac{k}{m}}) = c_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

odkud plyne  $c_2 = 0$ .

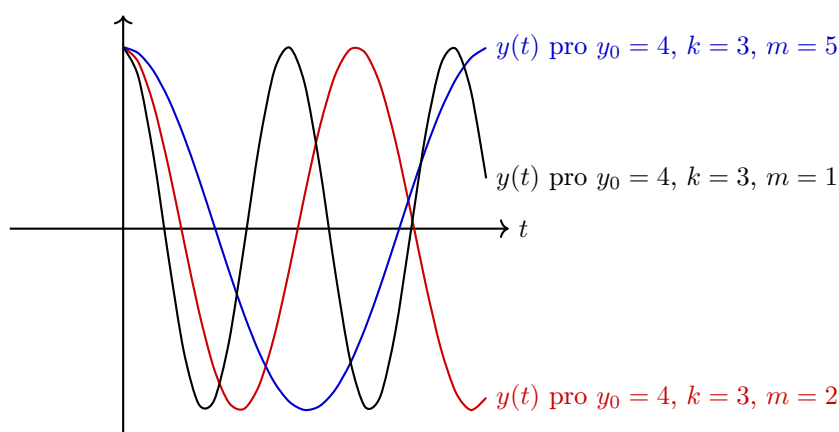
Řešení rovnice

$$\ddot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

je

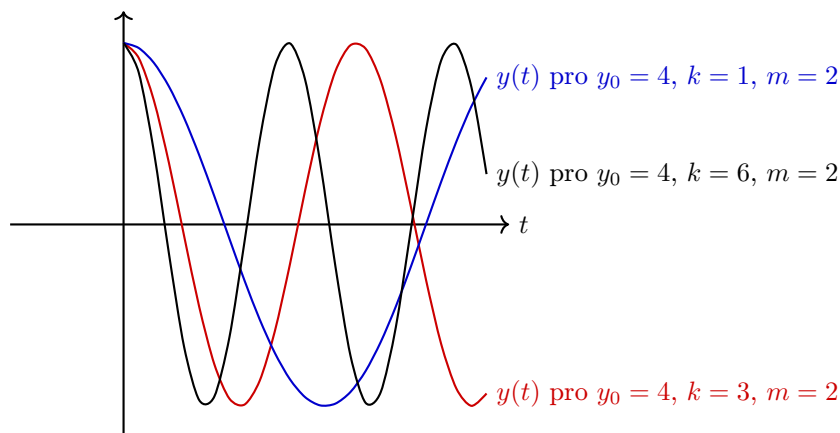
$$y(t) = y_0 \cos(t\sqrt{\frac{k}{m}})$$

Grafy

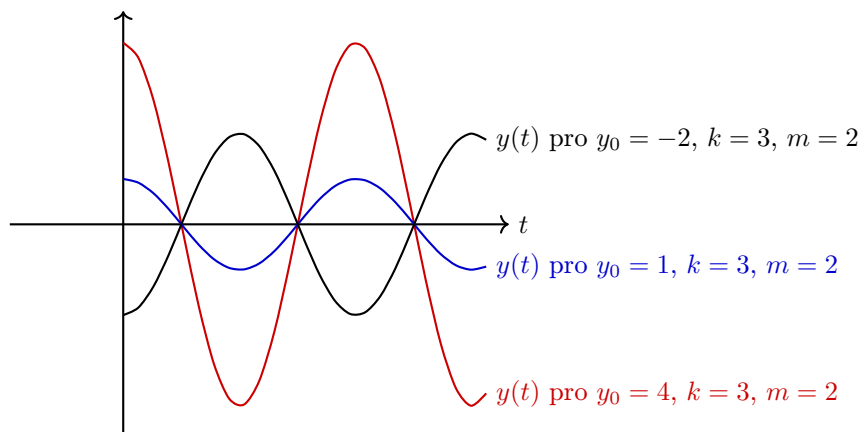




ukazují, jak se mění řešení v závislosti na hmotnosti závaží. Grafy



ukazují, jakým způsobem ovlivňuje pohyb závaží volba elasticity pružiny (tj. volba konstanty  $k$ ). Grafy



ukazují pohyb závaží v závislosti na počáteční podmínce  $y_0$ . K problému závaží na pružině se ještě vrátíme v Příkladu [O.4.10](#).

Z Věty [O.2.15](#) o variaci konstant také okamžitě dostáváme návod, jak hledat partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a s pravou stranou

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

Stačí spočítat integrál

$$v(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \int_0^t (\mathbf{U}(s))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

kde  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  je fundamentální matice soustavy

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(t)$$

a vzít z něj první položku. To plyne z důkazu Věty [O.2.15](#) a z poznámek na konci podkapitoly [O.2](#).

Naštěstí integrovanou funkci lze v jednotlivých případech zjednodušit v závislosti na kořenech  $\lambda_1, \lambda_2$  charakteristického polynomu  $x^2 + ax + b = 0$ . Výsledek zformulujeme jako větu.

**O.4.5 Věta (Partikulární řešení diferenciální rovnice druhého řádu — Metoda variace konstant)**  
 Označme jako  $\lambda_1, \lambda_2$  kořeny polynomu  $x^2 + bx + c$ . Partikulární řešení rovnice  $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t)$  je tvaru:

(1)

$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \int_0^t -e^{-\lambda_1 s} f(s) \, ds + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \int_0^t e^{-\lambda_2 s} f(s) \, ds$$

v případě, kdy kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou reálné a navzájem různé.

(2)

$$e^{\lambda t} \cdot \int_0^t -s e^{-\lambda s} f(s) \, ds + t e^{\lambda t} \cdot \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) \, ds$$

v případě, kdy  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  je dvojnásobný reálný kořen.

(3)

$$\frac{1}{B} \cdot e^{At} \cos(Bt) \cdot \int_0^t -e^{-As} \sin(Bs) f(s) \, ds + \frac{1}{B} \cdot e^{At} \sin(Bt) \cdot \int_0^t e^{-As} \cos(Bs) f(s) \, ds$$

v případě, kde jeden z kořenů  $\lambda_1, \lambda_2$  má tvar  $A + iB$ , kde  $B \neq 0$ .

DŮKAZ. Budeme počítat integrál

$$v(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \int_0^t (\mathbf{U}(s))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} \, ds$$

kde  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  jsou fundamentální matice soustavy

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(t)$$

z Věty [O.4.3](#). K výpočtu inverzních matic samozřejmě použijeme Důsledek [8.4.4](#).

(1) Kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou reálné a navzájem různé.

Potom

$$(\mathbf{U}(s))^{-1} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)s}}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_2 s} & -\lambda_1 e^{\lambda_1 s} \\ -e^{\lambda_2 s} & e^{\lambda_1 s} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} & -e^{-\lambda_1 s} \\ -\lambda_1 e^{-\lambda_2 s} & e^{-\lambda_2 s} \end{pmatrix}$$

Řešení je tedy v tomto případě první položka maticového součinu

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} & -e^{-\lambda_1 s} \\ -\lambda_1 e^{-\lambda_2 s} & e^{-\lambda_2 s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} \, ds \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-\lambda_1 s} f(s) \\ e^{-\lambda_2 s} f(s) \end{pmatrix} \, ds \end{aligned}$$

neboli partikulární řešení rovnice  $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t)$  je tvaru

$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \int_0^t -e^{-\lambda_1 s} f(s) \, ds + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \int_0^t e^{-\lambda_2 s} f(s) \, ds$$

(2) Kořen  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  je dvojnásobný reálný. Potom

$$(\mathbf{U}(s))^{-1} = e^{-2\lambda s} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda s} + \lambda s e^{\lambda s} & -\lambda e^{\lambda s} \\ -s e^{\lambda s} & e^{\lambda s} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e^{-\lambda s} + \lambda s e^{-\lambda s} & -s e^{-\lambda s} \\ -\lambda e^{-\lambda s} & e^{-\lambda s} \end{pmatrix}$$

Řešení je tedy v tomto případě první položka maticového součinu

$$\begin{aligned} v(t) &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\lambda s} + \lambda s e^{-\lambda s} & -s e^{-\lambda s} \\ -\lambda e^{-\lambda s} & e^{-\lambda s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} \, ds \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} -s e^{-\lambda s} f(s) \\ e^{-\lambda s} f(s) \end{pmatrix} \, ds \end{aligned}$$

neboli partikulární řešení rovnice  $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t)$  je tvaru

$$e^{\lambda t} \cdot \int_0^t -se^{-\lambda s} f(s) \, ds + te^{\lambda t} \cdot \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) \, ds$$

(3) Jeden z kořenů je tvaru  $A + Bi$ , kde  $B \neq 0$ . Potom

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}(s))^{-1} &= \frac{e^{-2As}}{B} \cdot \begin{pmatrix} Ae^{As} \sin(Bs) + Be^{As} \cos(Bs) & -Ae^{As} \cos(Bs) + Be^{As} \sin(Bs) \\ -e^{As} \sin(Bs) & e^{As} \cos(Bs) \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{e^{-2As}}{B} \cdot \begin{pmatrix} Ae^{As} \sin(Bs) + Be^{As} \cos(Bs) & -e^{As} \sin(Bs) \\ -Ae^{As} \cos(Bs) + Be^{As} \sin(Bs) & e^{As} \cos(Bs) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{B} \cdot \begin{pmatrix} Ae^{-As} \sin(Bs) + Be^{-As} \cos(Bs) & -e^{-As} \sin(Bs) \\ -Ae^{-As} \cos(Bs) + Be^{-As} \sin(Bs) & e^{-As} \cos(Bs) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Řešení je tedy v tomto případě první položka maticového součinu

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{B} \cdot \begin{pmatrix} e^{At} \cos(Bt) & e^{At} \sin(Bt) \\ Ae^{At} \cos(Bt) - Be^{At} \sin(Bt) & Ae^{At} \sin(Bt) + Be^{At} \cos(Bt) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} Ae^{-As} \sin(Bs) + Be^{-As} \cos(Bs) & -e^{-As} \sin(Bs) \\ -Ae^{-As} \cos(Bs) + Be^{-As} \sin(Bs) & e^{-As} \cos(Bs) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} \, ds \\ &= \frac{1}{B} \cdot \begin{pmatrix} e^{At} \cos(Bt) & e^{At} \sin(Bt) \\ Ae^{At} \cos(Bt) - Be^{At} \sin(Bt) & Ae^{At} \sin(Bt) + Be^{At} \cos(Bt) \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-As} \sin(Bs) f(s) \\ e^{-As} \cos(Bs) f(s) \end{pmatrix} \, ds \end{aligned}$$

neboli partikulární řešení rovnice  $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t)$  je tvaru

$$\frac{1}{B} \cdot e^{At} \cos(Bt) \cdot \int_0^t -e^{-As} \sin(Bs) f(s) \, ds + \frac{1}{B} \cdot e^{At} \sin(Bt) \cdot \int_0^t e^{-As} \cos(Bs) f(s) \, ds$$

■

Znění Věty [O.4.5](#) opět není nutné si pamatovat. Její hlavní význam tkví v tom, že dává praktický návod pro výpočet partikulárního řešení diferenciálních rovnic druhého řádu. Tento návod nyní zformulujeme.

**Praktický návod pro nalezení partikulárního řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty — Metoda variace konstant.**Partikulární řešení  $u(t)$  lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

nalezneme tak, že (podle kvality kořenů  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  charakteristické rovnice  $x^2 + ax + b = 0$ ) bude v jednom z tvarů:

- (1)  $u(t) = c_1(t)e^{\lambda_1 t} + c_2(t)e^{\lambda_2 t}$ , jsou-li kořeny  $\lambda_1, \lambda_2$  reálné a navzájem různé.

Derivace  $\dot{c}_1(t)$  a  $\dot{c}_2(t)$  funkcí  $c_1(t)$  a  $c_2(t)$  pak dopočteme z rovnice

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

- (2)  $u(t) = c_1(t)e^{\lambda t} + c_2(t)te^{\lambda t}$ , je-li kořen  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  dvojnásobný reálný. Derivace  $\dot{c}_1(t)$  a  $\dot{c}_2(t)$  funkcí  $c_1(t)$  a  $c_2(t)$  pak dopočteme z rovnice

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

- (3)  $u(t) = c_1(t)e^{At} \cos(Bt) + c_2(t)e^{At} \sin(Bt)$ , je-li jeden z kořenů tvaru  $A + Bi$ , kde  $B \neq 0$ . Derivace  $\dot{c}_1(t)$  a  $\dot{c}_2(t)$  funkcí  $c_1(t)$  a  $c_2(t)$  pak dopočteme z rovnice

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{At} \cos(Bt) & e^{At} \sin(Bt) \\ Ae^{At} \cos(Bt) - Be^{At} \sin(Bt) & Ae^{At} \sin(Bt) + Be^{At} \cos(Bt) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Ve všech třech případech pak dostaneme hledané funkce  $c_1(t)$  a  $c_2(t)$  výpočtem integrálů

$$c_1(t) = \int_0^t \dot{c}_1(s) ds \quad c_2(t) = \int_0^t \dot{c}_2(s) ds$$

Výše uvedený návod okamžitě plyne z důkazu Věty O.4.5.

Vše nejlépe uvidíme na jednoduchých příkladech.

**O.4.6 Příklad (Metoda variace konstant)** Nalezněte partikulární řešení pro rovnici

- (1)  $\ddot{y}(t) - 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 2 \sin t$ .

V tomto případě je  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Proto hledáme partikulární řešení ve tvaru  $u(t) = c_1(t)e^{2t} + c_2(t)e^{3t}$ , kde

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin t \end{pmatrix} = e^{-5t} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{3t} & -e^{3t} \\ -2e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \sin t \\ 2e^{-3t} \sin t \end{pmatrix}$$

Protože

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int_0^t -2e^{-2s} \sin s ds = \frac{2}{5} \cdot e^{-2t} \cdot \cos t + \frac{4}{5} \cdot e^{-2t} \cdot \sin t - \frac{2}{5} \\ c_2(t) &= \int_0^t 2e^{-3s} \sin s ds = -\frac{1}{5} \cdot e^{-3t} \cdot \cos t - \frac{3}{5} \cdot e^{-3t} \cdot \sin t + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(integrály lze spočítat například metodou *per partes*), je partikulární řešení tvaru

$$e^{2t}c_1(t) + e^{3t}c_2(t) = -\frac{2}{5} \cdot e^{2t} + \frac{1}{5} \cdot e^{3t} + \frac{1}{5} \cdot (\cos t + \sin t)$$

$$(2) \quad \ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = t.$$

V tomto případě je  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Proto hledáme partikulární řešení ve tvaru  $u(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$ , kde

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} e^t + te^t & -te^t \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$$

Protože

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int_0^t -s^2 e^{-s} ds = e^{-t}t^2 + 2e^{-t}t + 2e^{-t} - 2 \\ c_2(t) &= \int_0^t se^{-s} ds = -e^{-t}t - e^{-t} + 1 \end{aligned}$$

(integrály lze spočítat například metodou *per partes*), je partikulární řešení tvaru

$$e^t c_1(t) + te^t c_2(t) = -2e^t + te^t + t + 2$$

$$(3) \quad \ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 13y(t) = -6.$$

V tomto případě má jeden z kořenů tvar  $2 + 3i$ . Proto hledáme partikulární řešení ve tvaru  $u(t) = c_1(t)e^{2t} \cos(3t) + c_2(t)e^{2t} \sin(3t)$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{2t} \cos(3t) & e^{2t} \sin(3t) \\ 2e^{2t} \cos(3t) - 3e^{2t} \sin(3t) & 2e^{2t} \sin(3t) + 3e^{2t} \cos(3t) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \sin(3t) + 3e^{-2t} \cos(3t) & -e^{-2t} \sin(3t) \\ -2e^{-2t} \cos(3t) + 3e^{-2t} \sin(3t) & e^{-2t} \cos(3t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \sin(3t) \\ -2e^{-2t} \cos(3t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int_0^t 2e^{-2s} \sin(3s) ds = \frac{6}{13} - \frac{6}{13} \cdot e^{-2t} \cos(3t) - \frac{4}{13} \cdot e^{-2t} \sin(3t) \\ c_2(t) &= \int_0^t -2e^{-2s} \cos(3s) ds = -\frac{4}{13} + \frac{4}{13} \cdot e^{-2t} \cos(3t) - \frac{6}{13} \cdot e^{-2t} \sin(3t) \end{aligned}$$

(integrály lze spočítat například metodou *per partes*), je partikulární řešení tvaru

$$e^{2t} \cos(3t) \cdot c_1(t) + e^{2t} \sin(3t) \cdot c_2(t) = \frac{6}{13} \cdot e^{2t} \cos(3t) - \frac{4}{13} \cdot e^{2t} \sin(3t) - \frac{6}{13}$$

Příklad **O.4.6** jasně ukazuje, že i pro jednoduché diferenciální rovnice je metoda variace konstant neúnosně zdlouhavá. Navíc: pokud si povšimneme tří nalezených partikulárních řešení

$$\begin{aligned} &\underbrace{-\frac{2}{5} \cdot e^{2t} + \frac{1}{5} \cdot e^{3t}}_{\text{řešení homogenní rovnice}} + \frac{1}{5} \cdot (\cos t + \sin t) \\ &\underbrace{-2e^t + te^t}_{\text{řešení homogenní rovnice}} + 2t^2 + t + 2 \\ &\underbrace{\frac{6}{13} \cdot e^{2t} \cos(3t) - \frac{4}{13} \cdot e^{2t} \sin(3t)}_{\text{řešení homogenní rovnice}} - \frac{6}{13} \end{aligned}$$

z Příkladu **O.4.6**, zjistíme, že metoda variace konstant pracuje neefektivně: metoda přidá k partikulárnímu řešení ještě nějaké řešení homogenní rovnice. To samozřejmě nevadí, ale není to hezké. Lze tedy metodu variace

konstant zefektivnit? Odpověď zní ano, pokud je pravá strana  $f(t)$  „dostatečně krotká“. Výsledné metodě se říká *metoda neurčitých koeficientů* (také: *metoda odhadu*).

**Praktický návod pro nalezení partikulárního řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty — Metoda neurčitých koeficientů.**

Partikulární řešení  $u(t)$  lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

lze snadno nalézt v následujících dvou případech:

(1) Příklad

$$f(t) = e^{\alpha t} p(t)$$

kde  $\alpha$  je reálné číslo a  $p(t)$  je reálný polynom.

Potom existuje partikulární řešení tvaru

$$e^{\alpha t} t^d P(t)$$

kde  $P(t)$  je reálný polynom stejného stupně jako  $p(t)$  a  $d$  je násobnost čísla  $\alpha$  jako kořene charakteristické rovnice (tj.  $d = 0, 1, 2$ ).

(2) Příklad

$$f(t) = e^{\alpha t} (p(t) \cos(\beta t) + q(t) \sin(\beta t))$$

kde  $\alpha, \beta$  jsou reálná čísla a  $p(t), q(t)$  jsou reálné polynomy.

Potom existuje partikulární řešení tvaru

$$e^{\alpha t} t^d (P(t) \cos(\beta t) + Q(t) \sin(\beta t))$$

kde  $P(t)$  a  $Q(t)$  jsou reálné polynomy stupně  $\max\{\deg(p(t)), \deg(q(t))\}$  a  $d$  je násobnost komplexního čísla  $\alpha$  jako kořene charakteristické rovnice (tj.  $d = 0, 1$ ).

Koeficienty polynomů jdou navíc jednoznačně dopočítat z požadavku na partikulární řešení.

Metoda neurčitých koeficientů opět snadno plyne z toho, že lineární kombinace nultých až druhých derivací „odhadů“

$$e^{\alpha t} t^d P(t)$$

a

$$e^{\alpha t} t^d (P(t) \cos(\beta t) + Q(t) \sin(\beta t))$$

partikulárních řešení „vypadají téměř jako pravá strana rovnice“. Vše bude jasné na příkladech.

**O.4.7 Příklad (Metoda neurčitých koeficientů)** Nalezněte partikulární řešení pro rovnici

$$(1) \quad \ddot{y}(t) - 4y(t) = t^2 e^{2t}.$$

Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$$(At^2 + Bt + C)t^1 e^{2t}$$

protože násobnost čísla 2 v exponentu  $e^{2t}$  jako kořene charakteristického polynomu je  $d = 1$ .

Protože po dosazení do  $\ddot{y}(t) - 4y(t)$  dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} ((At^2 + Bt + C)t^1 e^{2t}) - 4(At^2 + Bt + C)t^1 e^{2t} \\ = 4e^{2t}(At^2 + Bt + C)t + 4e^{2t}(2At + B)t + 4e^{2t}(At^2 + Bt + C) + 2e^{2t}At + 4e^{2t}(2At + B) - 4e^{2t}(At^2 + Bt + C) \\ = 4e^{2t}(2At + B)t + 4e^{2t}(At^2 + Bt + C) + 2e^{2t}At + 2e^{2t}(2At + B) \end{aligned}$$

získáváme požadavek

$$4e^{2t}(2At + B)t + 4e^{2t}(At^2 + Bt + C) + 2e^{2t}At + 2e^{2t}(2At + B) = t^2e^{2t}$$

Po zkrácení nenulovým číslem  $e^{2t}$  dostáváme požadavek

$$12At^2 + (6A + 8B)t + (2B + 4C) = t^2$$

a odtud získáme soustavu rovnic

$$12A = 1, \quad 6A + 8B = 0, \quad 2B + 4C = 0$$

Tato soustava rovnic má řešení

$$A = \frac{1}{12}, \quad B = -\frac{1}{16}, \quad C = \frac{1}{32}$$

Partikulární řešení má tvar

$$\left(\frac{1}{12}t^2 - \frac{1}{16}t + \frac{1}{32}\right)t^1e^{2t}$$

$$(2) \quad \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = t.$$

Pravá strana je tvaru  $e^{0t}$ . To znamená, že budeme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$(At + B)t^0e^{0t}$$

protože násobnost exponentu 0 v  $e^{0t}$  v charakteristické rovnici je 0. Dosadíme-li do levé strany rovnice  $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = t$  odhad  $(At + B)t^0e^{0t}$ , dostaneme požadavek

$$At + A + B = t$$

neboli  $A = 1$ ,  $B = -1$  (porovnáním koeficientů u stejných mocnin). To znamená, že partikulární řešení má tvar

$$t - 1$$

**Upozornění:** u metody neurčitých koeficientů *nezapomeňte* zjištění exponentu  $d$  v  $t^d$ . V případě, kdy je  $d > 0$ , dochází k *resonanci*. Proto se faktoru  $t^d$  často říká *resonanční člen*.

O resonanci budeme ještě mluvit v Příkladech [O.4.9](#) a [O.4.10](#). Na stránce

☞ **Broughton Suspension Bridge**

se dozvíte, kam vede zanedbání resonance v reálném životě.

Poslední součástíou základních technik řešení lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu je jednoduchý *princip superposice*.

**Praktický návod pro nalezení partikulárního řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty — Princip superposice.**

Ať  $u_1(t)$  je partikulárním řešením rovnice  $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f_1(t)$  a ať  $u_2(t)$  je partikulárním řešením rovnice  $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f_2(t)$ .

Potom  $u_1(t) + u_2(t)$  je partikulární řešením rovnice  $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f_1(t) + f_2(t)$ .

**O.4.8 Příklad (Princip superposice)** Nalezneme partikulární řešení rovnice  $\ddot{y}(t) - 4y(t) = t^2e^{2t} + \sin t$ .

V Příkladu [O.4.7](#) jsme našli partikulární řešení

$$\left(\frac{1}{12}t^2 - \frac{1}{16}t + \frac{1}{32}\right)t^1e^{2t}$$

rovnice  $\ddot{y}(t) - 4y(t) = t^2e^{2t}$ .

Nyní nalezneme (metodou neurčitých koeficientů) partikulární řešení rovnice  $\ddot{y}(t) - 4y(t) = \sin t$ . Protože pravá strana je ve tvaru  $e^{0t} \sin t$ , hledáme partikulární řešení ve tvaru  $Ae^{0t} \sin t + Be^{0t} \cos t$ . Dosazením do rovnice  $\ddot{y}(t) - 4y(t) = \sin t$  dostáváme požadavek

$$-A \sin t - B \cos t - 4A \sin t - 4B \cos t = \sin t$$

Odtud plyne

$$A = -\frac{1}{5}, \quad B = 0$$

Partikulární řešení rovnice  $\ddot{y}(t) - 4y(t) = \sin t$  má tvar  $-1/5 \sin t$ .

Partikulární řešení rovnice  $\ddot{y}(t) - 4y(t) = t^2 e^{2t} + \sin t$  je součet

$$\left( \frac{1}{12} t^2 - \frac{1}{16} t + \frac{1}{32} \right) t^1 e^{2t} - \frac{1}{5} \sin t$$

#### O.4.9 Příklad (RLC obvod, dokončení) Diferenciální rovnice

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \omega V_0 \cos(\omega t), \quad I(0) = 0, \quad \dot{I}(0) = 0$$

pro RLC obvod není homogenní. Příslušná homogenní rovnice

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0 \quad I(0) = 0, \quad \dot{I}(0) = 0$$

má charakteristický polynom

$$Lx^2 + Rx + \frac{1}{C}$$

a řešení homogenní diferenciální rovnice bude mít podle Věty O.4.3 tvar v závislosti na znaménku jeho diskriminantu

$$R^2 - 4\frac{L}{C}$$

(1) Příklad  $R^2 - 4L/C > 0$ .

V tomto případě je

$$y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

kde  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou reálné kořeny rovnice  $Lx^2 + Rx + 1/C = 0$ . Koeficienty  $c_1$  a  $c_2$  lze dopočítat z počátečních podmínek  $I(0) = 0, \dot{I}(0) = 0$ :

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 0$$

Z těchto rovnic plyne  $c_1 = c_2 = 0$ . To znamená, že platí

$$y(t) = 0$$

(2) Příklad  $R^2 - 4L/C = 0$ .

V tomto případě je

$$y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda t}$$

kde  $\lambda$  je dvojnásobný reálný kořen rovnice  $Lx^2 + Rx + 1/C = 0$ . Koeficienty  $c_1$  a  $c_2$  lze dopočítat z počátečních podmínek  $I(0) = 0, \dot{I}(0) = 0$ :

$$c_1 = 0, \quad c_1 \lambda + c_2 = 0$$

Z těchto rovnic plyne  $c_1 = c_2 = 0$ . To znamená, že platí

$$y(t) = 0$$



(3) Příklad  $R^2 - 4L/C < 0$ .

V tomto případě je

$$y(t) = c_1 \cdot e^{At} \cdot \cos(Bt) + c_2 \cdot e^{At} \cdot \sin(Bt)$$

kde  $A + Bi$  je komplexní kořen rovnice  $Lx^2 + Rx + 1/C = 0$ ,  $B \neq 0$ . Koeficienty  $c_1$  a  $c_2$  lze dopočítat z počátečních podmínek  $I(0) = 0$ ,  $\dot{I}(0) = 0$ :

$$c_1 = 0, \quad c_1 + c_2 B = 0$$

Z těchto rovnic plyne  $c_1 = c_2 = 0$ . To znamená, že platí

$$y(t) = 0$$

Budeme tedy hledat *partikulární* řešení rovnice

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \omega V_0 \cos(\omega t)$$

metodou neurčitých koeficientů. Připomeňme, že diskriminant charakteristické rovnice je roven číslu  $R^2 - 4L/C$ .

V každém případě je partikulární řešení tvaru

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

protože komplexní číslo  $i\omega$  nemůže být kořenem charakteristické rovnice. To je jasné v případě  $R^2 - 4L/C \geq 0$ . V případě  $R^2 - 4L/C < 0$  nemůže být  $i\omega$  kořenem, protože  $R \neq 0$ .

*Nyní provedeme standardní trik:* kombinaci  $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  (jejíž koeficienty  $A$  a  $B$  neznáme) nahradíme výrazem

$$a \sin(\omega t - \varphi)$$

kde neznáme konstanty  $a$  a  $\varphi$ . Podle součtových vzorců totiž platí

$$a \sin(\omega t - \varphi) = a \sin(\omega t) \cos \varphi - a \cos(\omega t) \sin \varphi = \underbrace{-a \sin \varphi}_{=A} \cos(\omega t) + \underbrace{a \cos \varphi}_{=B} \sin(\omega t)$$

Známe-li tedy  $a$  a  $\varphi$ , známe i  $A$  a  $B$ . Obráceně, známe-li  $A$  a  $B$ , je  $A^2 + B^2 \neq 0$  (jinak by partikulární řešení bylo nulové a to není možné, protože  $V_0 \omega > 0$  podle předpokladu). V případě, kdy  $B \neq 0$ , zvolíme  $\varphi$  tak, aby platilo  $A/B = -\tan \varphi$  a dopočteme  $a$ . V případě, kdy  $A \neq 0$ , zvolíme  $\varphi$  tak, aby platilo  $B/A = -\cot \varphi$  a dopočteme  $a$ .

Po dosazení partikulárního řešení do rovnice  $a \sin(\omega t - \varphi)$  dostáváme požadavek

$$-L\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + R\omega \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{C}a \sin(\omega t - \varphi) = \omega V_0 \cos(\omega t)$$

Protože podle součtových vzorců platí

$$\omega V_0 \cos(\omega t) = \omega V_0 \cos((\omega t - \varphi) + \varphi) = \omega V_0 \cos(\omega t - \varphi) \cos(\varphi) - \omega V_0 \sin(\omega t - \varphi) \sin(\varphi)$$

můžeme požadavek po dosazení partikulárního řešení do rovnice napsat jako

$$-L\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + R\omega \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{C}a \sin(\omega t - \varphi) = \omega V_0 \cos(\omega t - \varphi) \cos(\varphi) - \omega V_0 \sin(\omega t - \varphi) \sin(\varphi)$$

odkud dostaneme (porovnáním koeficientů) rovnosti

$$aR\omega = \omega V_0 \cos \varphi, \quad a(-L\omega^2 + \frac{1}{C}) = -\omega V_0 \sin \varphi$$

Tvrdíme, že  $\cos \varphi \neq 0$ . Kdyby  $\cos \varphi = 0$ , pak  $a = 0$  (z první rovnice), a tudíž  $\sin \varphi = 0$  (z druhé rovnice). To je spor. Proto můžeme psát

$$\tan \varphi = \frac{L\omega^2}{R} - \frac{1}{RC\omega}$$

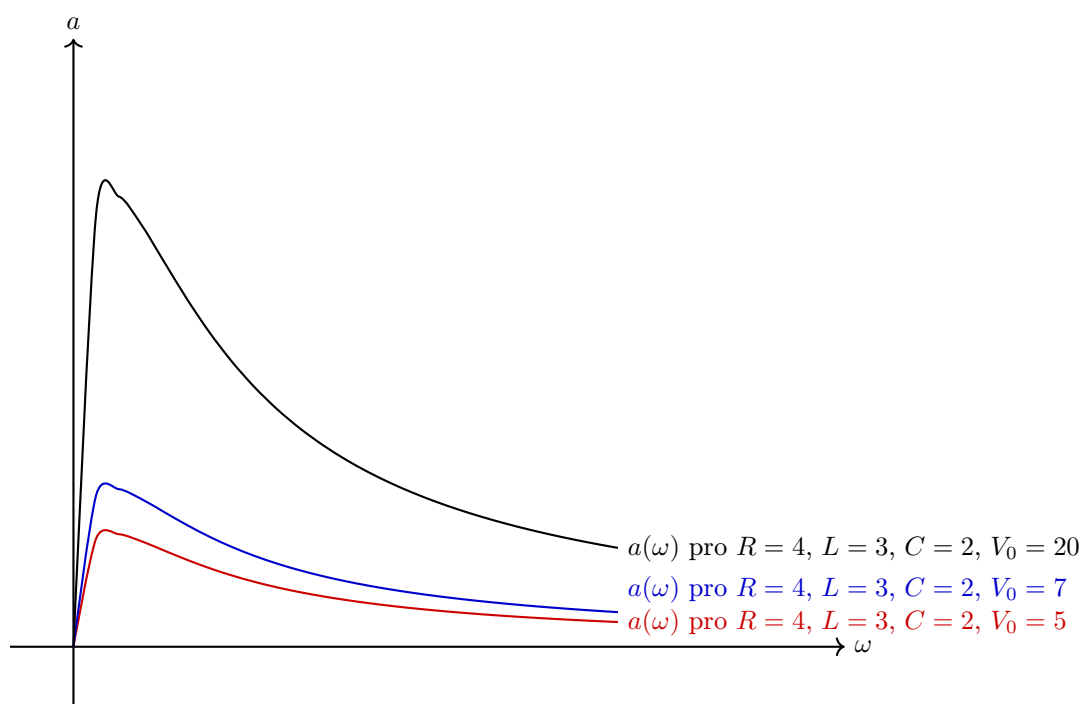
a tudíž jsme našli  $\varphi$ . Protože platí

$$(aR\omega)^2 + a^2(-L\omega^2 + \frac{1}{C})^2 = (\omega V_0 \cos \varphi)^2 + (-\omega V_0 \sin \varphi)^2 = (\omega V_0)^2$$

platí i rovnost

$$a = \frac{\omega V_0}{\sqrt{(R\omega)^2 + (-L\omega^2 + \frac{1}{C})^2}} = \frac{\omega V_0}{\sqrt{(R\omega)^2 + (L\omega^2 - \frac{1}{C})^2}}$$

Závislost amplitudy  $a$  na frekvenci  $\omega$  (při konstantním  $R$ ,  $L$ ,  $C$  a měnícím se počátečním napětí  $V_0$ ) lze vyčíst z grafu



Vidíme, že některé frekvence  $\omega$  vybudí velkou amplitudu. Tomuto jevu se říká *resonance*.

Následující příklad je velmi ovlivněn teorií vyloženou v knize

☞ Ralph P. Agnew, *Differential equations*, McGraw-Hill, 1942.

a podává *jednotlicí pohled* na lineární diferenciální rovnice druhého řádu s *nezápornými* konstantními koeficienty.

**O.4.10 Příklad (Jednotlicí pohled: Harmonický pohyb a rovnice oscilátoru)** Diferenciální rovnice

$$\ddot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0$$

pro závaží na pružině a diferenciální rovnice

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \omega V_0 \cos(\omega t)$$

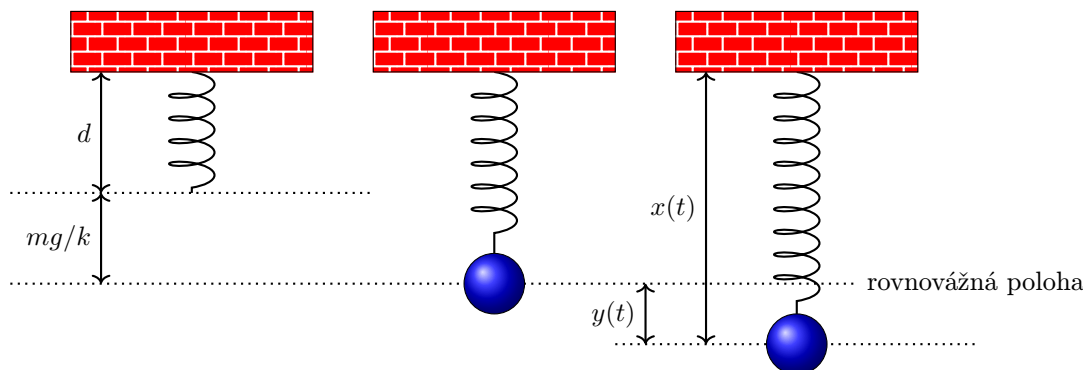
pro RLC obvod mají mnoho společného.

V tomto příkladu na tyto podobnosti upozorníme. Ve skutečnosti se tak *jednotným* způsobem naučíme *interpretovat* lineární diferenciální rovnice druhého řádu s *nezápornými* konstantními koeficienty.

Příklad z mechaniky je možná snadněji představitelný, než RLC obvod. Začneme tedy s ním. V Příkladu O.4.1 jsme předpokládali, že v Newtonově zákoně

$$m\ddot{y}(t) = m\ddot{x}(t) = F(t)$$

je síla  $F(t)$  rozložena pouze na konstantní gravitační sílu  $F_g = mg$  a na sílu  $F_p(t) = -k(x(t) - d) = -ky(t)$ , způsobenou Hookeovým zákonem (tj. elasticitou pružiny).



Ve skutečnosti je ještě třeba vzít v úvahu *tlumící faktor*: na závaží působí síla  $F_d(t)$ , která je (pro malé hodnoty  $\dot{x}(t)$ ) vyjádřena vzorcem

$$F_d(t) = -d\dot{x}(t) = -d\dot{y}(t)$$

kde  $d \geq 0$  je *konstanta tlumení* (anglicky: *damping factor*).

V některých situacích je ještě možné, že k celkové síle  $F(t)$  přispívá *vnější síla*  $F_e(t)$  (tj. v čase  $t$  závaží „postrčíme“ silou  $F_e(t)$ ).

Druhý Newtonův zákon pro závaží na pružině je tedy v plné obecnosti možno zapsat takto

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) - d\dot{y}(t) + F_e(t)$$

neboli

$$\ddot{y}(t) + \frac{d}{m}\dot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{1}{m}F_e(t)$$

To je ale *obecná* lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty! Přidáme ještě počáteční podmínky

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

které interpretujeme následovně:

- (1) Rovnost  $y(0) = y_0$  znamená: závaží je na počátku vychýleno o hodnotu  $y_0$  od rovnovážné polohy.
- (2) Rovnost  $\dot{y}(0) = y_1$  znamená: závaží na počátku vypouštíme s rychlostí  $y_1$ .

Dostaneme tak následující první poučení:

### Poučení 1.

Každou lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

s *kladnými* konstantními koeficienty  $a$  a  $b$  lze interpretovat jako rovnici polohy závaží s *jednotkovou hmotností* (tj.  $m = 1$ ) na pružině.

Jednotlivé koeficienty lze interpretovat následovně:

- (1) Koeficient  $a$  u první derivace  $\dot{y}(t)$  je *tlumící faktor*.
- (2) Koeficient  $b$  u nulté derivace  $y(t)$  je *elasticita pružiny*.

Pravou stranu rovnice  $f(t)$  si lze představit jako *zrychlení dané vnější silou*.

Počáteční podmínky si lze představit takto:

- (1) Rovnost  $y(0) = y_0$  znamená: závaží je na počátku *vychýleno* o hodnotu  $y_0$  *od rovnovážné polohy*.
- (2) Rovnost  $\dot{y}(0) = y_1$  znamená: závaží *na počátku vypouštíme s rychlostí*  $y_1$ .

Pojďme ve světle prvního poučení interpretovat rovnici

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \omega V_0 \cos(\omega t), \quad I(0) = 0, \quad \dot{I}(0) = 0$$

pro RLC obvod. Tato rovnice kladné koeficienty má, takže první poučení aplikovat lze.

- (1) Indukčnost  $L$  hraje roli *hmotnosti* závaží.
- (2) Hodnota  $R$  je *tlumící faktor*. To je ve shodě s intuicí: odpor  $R$  „brání“ proudu.
- (3) Podílu  $\frac{1}{C}$  se často říká *zdánlivý odpor* nebo *kapacitance*. Hraje roli *elasticity pružiny*.
- (4) Pravá strana  $\omega V_0 \cos(\omega t)$  hraje roli *vnější síly*. V tomto kontextu se také používá sousloví *elektromotorická síla*.
- (5) Počáteční podmínky  $I(0) = 0$  a  $\dot{I}(0) = 0$  hrají roli závaží *v rovnovážné poloze*, které vypouštíme *s nulovou rychlostí*.

Nyní by nás již nemělo překvapit, že řešení homogenní rovnice

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0, \quad I(0) = 0, \quad \dot{I}(0) = 0$$

vyšlo v Příkladu O.4.9 vždy rovné nule: závaží jsme „vypouštěli“ s nulovou rychlostí z rovnovážné polohy.

Ve zbytku tohoto příkladu uvedeme ještě interpretace řešení *homogenních* rovnic a interpretace řešení rovnic *s pravou stranou*.

**Rovnice harmonického oscilátoru bez vnějšího buzení.** V Příkladu O.4.4 jsme ukázali grafy řešení

$$y(t) = y_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

homogenní rovnice

$$\ddot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

v závislosti na jednotlivých parametrech.

Ukážeme, že řešení homogenní rovnice

$$\ddot{y}(t) + by(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

kde  $b > 0$  lze *vždy* najít ve tvaru

$$u(t) = A \cos(\sqrt{b}(t - t_0))$$

kde  $A \geq 0$  je *amplituda* a  $t_0 \in [-\pi/2; \pi/2]$  je *fázový posuv*. Význam těchto slov bude opět patrný z grafů řešení.

Protože kořeny charakteristického polynomu  $x^2 + b$  jsou ryze imaginární, víme, že řešení homogenní rovnice je ve tvaru

$$u(t) = c_1 \cos(\sqrt{b}t) + c_2 \sin(\sqrt{b}t)$$

pro vhodné konstanty  $c_1$  a  $c_2$ . Podobným trikem jako v Příkladu O.4.9 (tj. součtovými vzorci pro funkce  $\sin$  a  $\cos$ ) lze výše uvedenou lineární kombinaci přepsat jako

$$u(t) = A \cos(\sqrt{b}(t - t_0))$$

pro neznámé *kladné* konstanty  $A$  a  $t_0$ . Tyto konstanty nalezneme z počátečních podmínek takto: platí

$$u(0) = A \cos(\sqrt{b}(0 - t_0)) = A \cos(\sqrt{b}t_0) = y_0$$

a

$$\dot{u}(0) = -A \sin(\sqrt{b}(0 - t_0)) = A \sin(\sqrt{b}t_0) = y_1$$

To znamená, že

$$y_0^2 + y_1^2 = A^2 \left( \cos^2(\sqrt{b}(t_0)) + \sin^2(\sqrt{b}(t_0)) \right) = A^2$$

a my definujeme

$$A = \sqrt{y_0^2 + y_1^2} \geq 0$$

V případě  $A = 0$  definujeme  $t_0 = 0$ . V případě  $A > 0$  definujeme  $t_0$  jako jediné číslo v intervalu  $[-\pi/2; \pi/2]$ , pro které platí

$$\sin(\sqrt{b}(t_0)) = \frac{y_1}{A}$$

Rovnost  $A = 0$  platí právě tehdy, když  $y(0) = 0$  a  $\dot{y}(0) = 0$ . To znamená, že závaží „vypouštíme“ z rovnovážné polohy s nulovou rychlostí. Pak je graf řešení

$$u(t) = A \cos(\sqrt{b}(t - t_0))$$

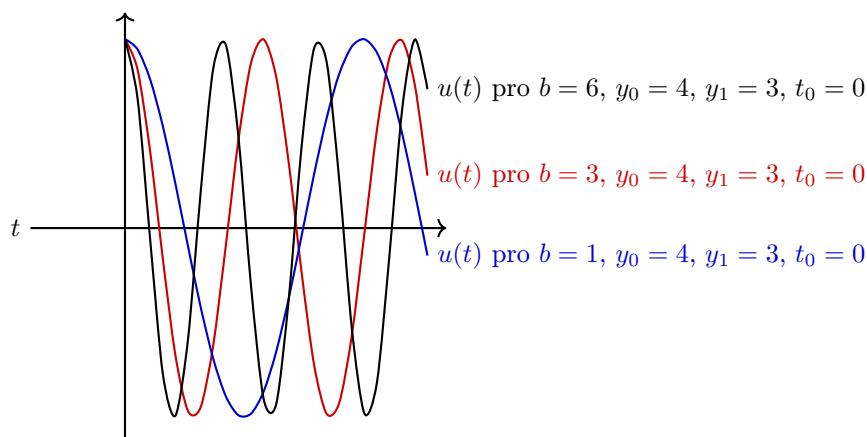
roven 0 (tj., k žádnému pohybu závaží nedochází).

Namalujeme nyní grafy řešení

$$u(t) = A \cos(\sqrt{b}(t - t_0))$$

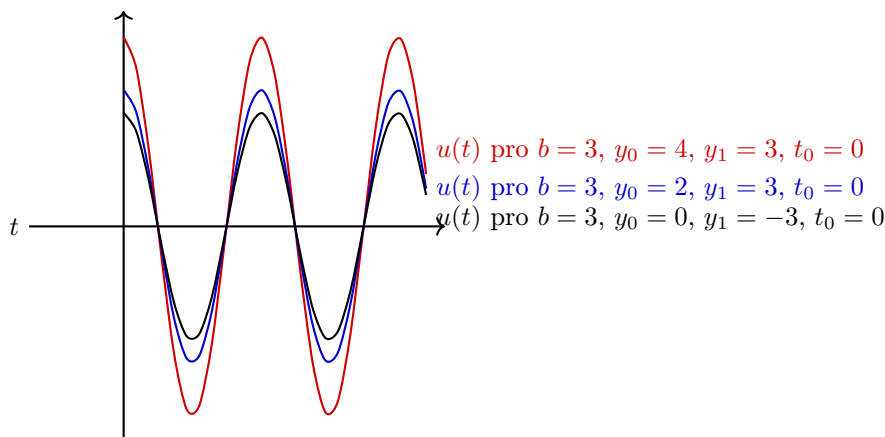
pro kladné hodnoty  $A$  a ukážeme závislost na  $b$ ,  $A = \sqrt{y_0^2 + y_1^2}$  a  $t_0$ .

Grafy



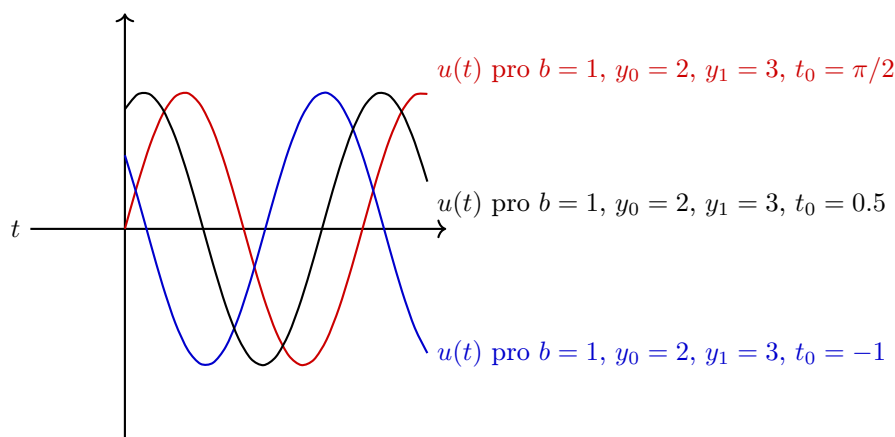
ukazují závislost na  $b$ . Koeficient  $b$  máme interpretovat jako elasticitu: nižší elasticita způsobí nižší frekvenci kmitů.

Grafy



ukazují závislost na amplitudě  $A = \sqrt{y_0^2 + y_1^2}$ . Uvědomme si, že pro výpočet amplitudy *nezáleží* na znaménku počátečních podmínek  $y_0$  a  $y_1$ .

Grafy



ukazují závislost na fázovém posuvu  $t_0$  z intervalu  $[-\pi/2; \pi/2]$ .

### Poučení 2.

Rovnici

$$\ddot{y}(t) + by(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

s kladným  $b$  říkáme *rovnice harmonického oscilátoru bez vnějšího buzení*.

Jejím řešením je křivka

$$u(t) = A \cos(\sqrt{b}(t - t_0))$$

neboli *harmonické kmity s amplitudou*  $A \geq 0$  a *fázovým posuvem*  $t_0$  z  $[-\pi/2; \pi/2]$ .

Platí

$$A = \sqrt{y_0^2 + y_1^2} \geq 0, \quad t_0 = \begin{cases} 0, & \text{je-li } A = 0 \\ \arcsin(\frac{y_1}{A}), & \text{je-li } A > 0 \end{cases}$$

**Rovnice tlumeného oscilátoru bez vnějšího buzení.** Ukážeme, jak vypadají řešení rovnice

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

s kladnými  $a$  a  $b$ . Víme, že koeficient  $a > 0$  vypovídá o *tlumení*. Podle teorie musíme vyšetřit tři různé případy v závislosti na diskriminantu  $a^2 - 4b$  charakteristického polynomu  $x^2 + ax + b$ .

(1) **Kritické tlumení** je případ  $a^2 - 4b = 0$ , tj., případ *dvojnásobného* reálného kořene

$$\lambda = -\frac{a}{2} < 0$$

Podle vyložené teorie je řešení tvaru

$$u(t) = (c_1 + tc_2)e^{-ta/2}$$

kde konstanty  $c_1, c_2$  jsou určeny z počátečních podmínek

$$u(0) = (c_1 + 0c_2)e^{-ta/2} = c_1 = y_0$$

a

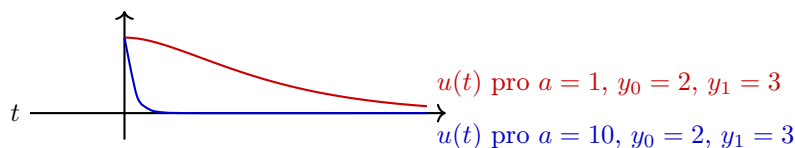
$$\dot{u}(0) = c_1 + c_2 = y_1, \quad \text{to jest: } c_2 = y_1 - y_0$$

Řešení je tedy ve tvaru

$$u(t) = (y_0 + t(y_1 - y_0))e^{-ta/2}$$

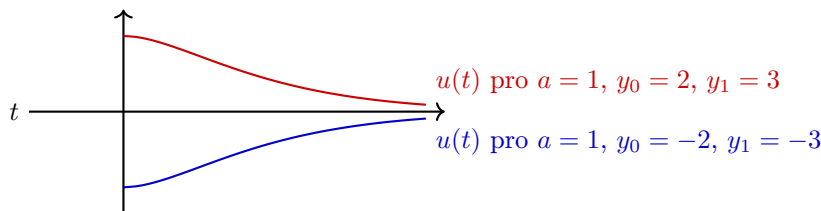
a my opět na grafech ukážeme závislost na  $a, y_0$  a  $y_1$ .

Grafy



ukazují závislost na faktoru tlumení  $a$ .

Grafy



ukazují závislost na počátečních podmínkách  $y_0$  a  $y_1$ .

- (2) **Podkritické tlumení** je případ  $a^2 - 4b < 0$ , tj., případ *nereálných* komplexních kořenů. Podle vyložené teorie je řešení tvaru

$$u(t) = c_1 e^{-ta/2} \cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}t\right) + c_2 e^{-ta/2} \sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}t\right)$$

kde konstanty  $c_1$  a  $c_2$  určíme z počátečních podmínek: platí

$$u(0) = c_1 e^{-0a/2} \cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}0\right) + c_2 e^{-0a/2} \sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}0\right) = c_1 = y_0$$

a

$$\dot{u}(0) = -c_1 \frac{a}{2} + c_2 \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} = y_1$$

To znamená, že platí

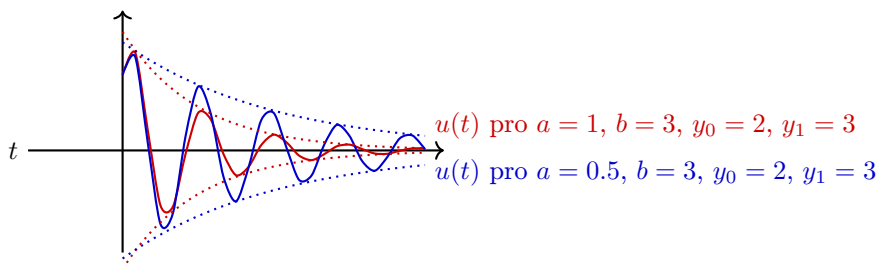
$$c_2 = \frac{ay_0 + 2y_1}{\sqrt{4b-a^2}}$$

Již známým trikem se součtovými vzorci pro funkce  $\cos$  a  $\sin$  lze ukázat, že řešení je pak ve tvaru

$$u(t) = A e^{-ta/2} \cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}(t-t_0)\right)$$

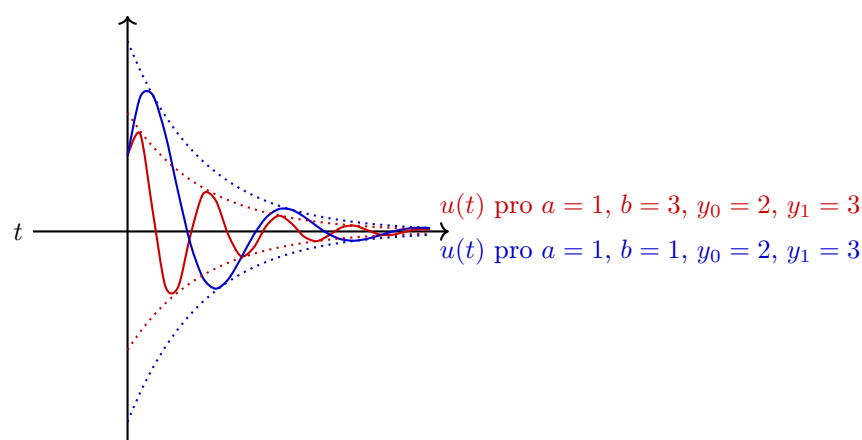
kde konstanty  $A$  a  $t_0$  (tj., *amplitudu* a *fázový posuv*) určíme z počátečních podmínek. Nebudeme obecné vzorce uvádět (jsou velmi komplikované). Ukážeme opět grafy v závislosti na  $a$ ,  $b$  a počátečních podmínkách  $y_0$  a  $y_1$ .

Grafy



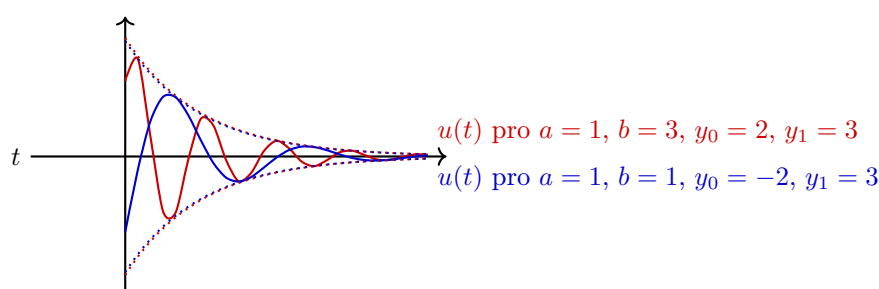
ukazují závislost na *tlumícím faktoru*  $a$ .

Grafy



ukazují závislost na *elasticitě*  $b$ .

Grafy



ukazují závislost na *počátečních podmínkách*  $y_0$  a  $y_1$ .

Kmity jsou vždy „sevrěny“ křivkami

$$\pm e^{-ta/2} \sqrt{y_0^2 + \frac{(ay_0 + 2y_1)^2}{4b - a^2}}$$

(3) **Nadkritické tlumení** je případ  $a^2 - 4b > 0$ , tj., případ *dvou různých a záporných* reálných kořenů<sup>8</sup>

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Podle vyložené teorie je řešení tvaru

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

kde konstanty  $c_1$  a  $c_2$  určíme z počátečních podmínek. Platí

$$u(0) = c_1 e^{\lambda_1 0} + c_2 e^{\lambda_2 0} = c_1 + c_2 = y_0$$

a

$$\dot{u}(0) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 0} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 0} = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = y_1$$

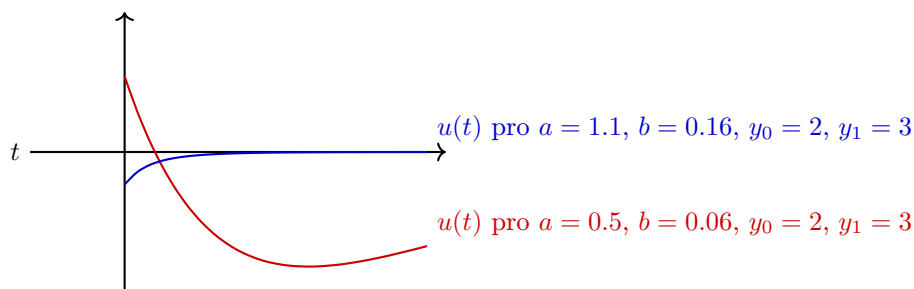
To znamená, že

$$c_1 = \frac{y_0 \lambda_2 - y_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad c_2 = \frac{y_1 - y_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

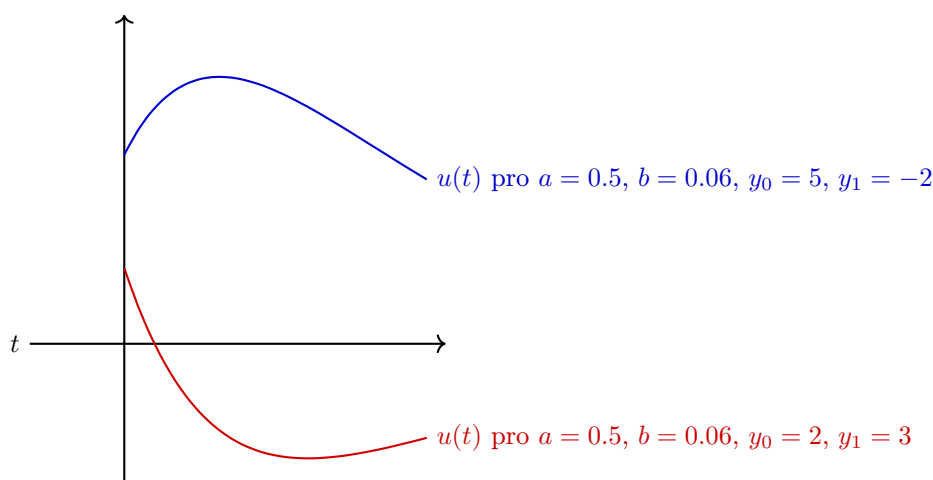
<sup>8</sup>Podle Věty O.3.6 se jedná o topologický typ (2), kde  $\tau < 0$ . Viz O.3.8.



Grafy

ukazují závislost na  $a$  a  $b$ .

Grafy

ukazují závislost na počátečních podmínkách  $y_0$  a  $y_1$ .**Poučení 3.** Rovnici

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

s kladnými  $a$  a  $b$  říkáme *rovnice tlumeného oscilátoru bez vnějšího buzení*. Víme, že koeficient  $a > 0$  odpovídá *tlumení* a koeficient  $b > 0$  odpovídá *elasticitě*.

Kvalita řešení se řídí znaménkem diskriminantu  $a^2 - 4b$  charakteristické rovnice  $x^2 + ax + b$ .

- (1) V případě  $a^2 - 4b = 0$  mluvíme o kritickém tlumení.
- (2) V případě  $a^2 - 4b < 0$  mluvíme o podkritickém tlumení.
- (3) V případě  $a^2 - 4b > 0$  mluvíme o nadkritickém tlumení.

V každém případě pro řešení  $u(t)$  platí

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$$

To znamená: kmity oscilátoru jsou libovolně malé, jakmile je „budoucnost dostatečně vzdálená“.

**Oscilátor s harmonickým buzením.** V praxi se velmi často studuje rovnice

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = E_0 \cos \omega t, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

s konstantami  $a \geq 0$ ,  $b > 0$  a s kladnými konstantami  $E_0$  a  $\omega$ . Podle úvah o závaží na pružině to znamená, že funkci

$$E_0 \cos \omega t$$

máme považovat za *zrychlení* dané vnější silou. Protože funkce  $E_0 \cos \omega t$  popisuje harmonické kmity s *frekvencí*  $\omega$ , říkáme výše uvedené rovnici *rovnice oscilátoru s harmonickým buzením*. Podle metody neurčitých koeficientů víme, že partikulární řešení je ve tvaru

$$t^d (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

kde  $d = 0$  nebo  $1$  v závislosti na tom, zda komplexní číslo  $i\omega$  není nebo je kořenem charakteristického polynomu  $x^2 + ax + b$ . Rozebereme tedy tyto dva případy. V každé situaci ovšem (opět trikem se součtovými vzorci pro funkce  $\cos$  a  $\sin$ ) budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$At^d \cos(\omega(t - t_0))$$

pro neznámé konstanty  $A$  a  $t_0$ . Dosazením hodnoty  $i\omega$  do charakteristického polynomu dostaneme hodnotu

$$(i\omega)^2 + ai\omega + b = (b - \omega^2) + i a \omega$$

které se říká *impedance* a značí se  $Z$ . Rozlišení, zda komplexní číslo  $i\omega$  není nebo je kořenem charakteristického polynomu  $x^2 + ax + b$ , tedy znamená, zda  $Z \neq 0$  nebo, zda  $Z = 0$ .

- (1) **Nenulová impedance.** Každé nenulové komplexní číslo lze napsat v goniometrickém tvaru. To znamená, že lze psát

$$Z = (b - \omega^2) + i a \omega = \underbrace{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}}_{=Z_0} \cdot (\cos(\omega t_0) + i \sin(\omega t_0))$$

kde  $t_0 \neq 0$ .

Pak má partikulární řešení tvar

$$v(t) = \frac{E_0}{Z_0} \cos(\omega(t - t_0))$$

o čemž se lze snadno přesvědčit dosazením.

Protože obecné řešení rovnice

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = E_0 \cos \omega t, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

je tvaru součtu

$$u(t) + v(t)$$

kde limita řešení  $u(t)$  homogenní rovnice  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ , je v „dostatečně vzdálené budoucnosti“ možné řešení aproximovat pouze partikulárním řešením

$$\frac{E_0}{Z_0} \cos(\omega(t - t_0))$$

Povšimněme si amplitudy

$$\frac{E_0}{Z_0} = \frac{E_0}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}}$$

partikulárního řešení. Mohou totiž nastat dva zajímavé případy:

- (a) **„Tlumená“ resonance.** Jde o případ, kdy  $b = \omega^2$ . To znamená, že frekvence  $\omega$  vnější síly je rovna  $\sqrt{b}$ . Protože impedance  $Z$  je nenulová, je nenulový i faktor tlumení  $a$ .

Amplitudu pak lze psát ve tvaru

$$\frac{E_0}{Z_0} = \frac{1}{a} \cdot E_0 \cdot \frac{1}{\omega}$$

To znamená, že při malém koeficientu tlumení  $a$  může být amplituda partikulárního řešení tak velká, že vede ke katastrofě.

- (b) **Rázové vlny.** Jde o případ, kdy  $a = 0$  (tj., máme harmonický oscilátor). Protože impedance  $Z$  je nenulová, nastává nerovnost  $b \neq \omega^2$ .

Celkové řešení rovnice

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = E_0 \cos \omega t, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

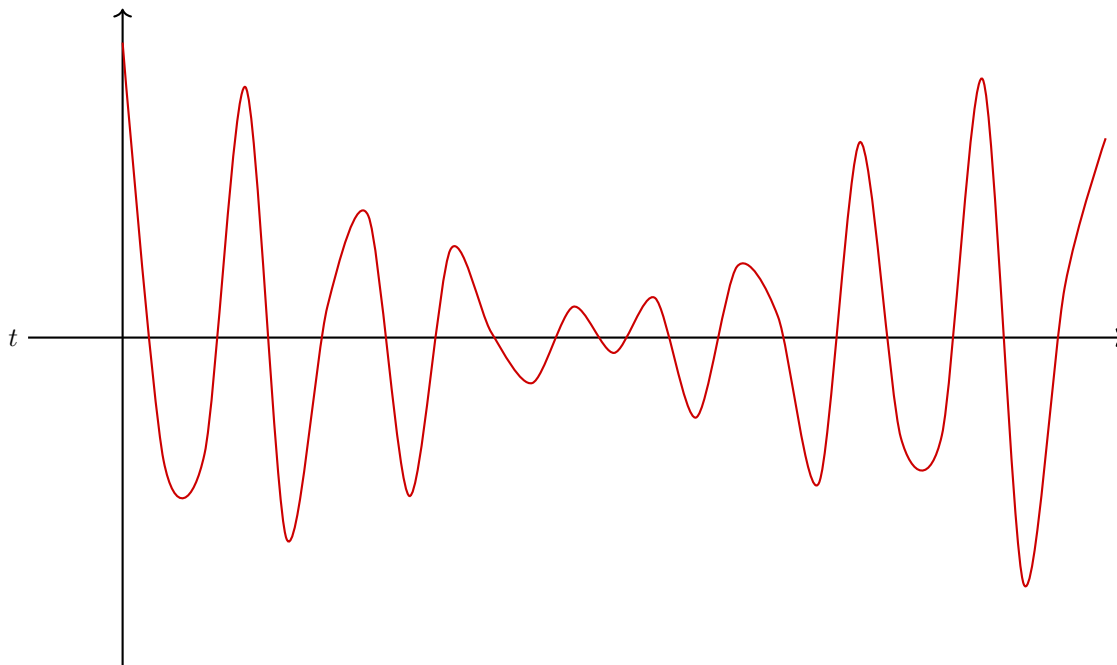
je tvaru součtu

$$A \cos(\sqrt{b}(t - t_0)) + \frac{E_0}{|b - \omega^2|} \cos(\omega t)$$

Pokud platí

$$A \simeq \frac{E_0}{|b - \omega^2|} \quad \text{a} \quad b \simeq \omega^2$$

dochází k *rázovým vlnám*:



Odvození tohoto faktu plyne opět (tentokrát poměrně pracně) ze součtových vzorců pro funkce  $\cos$  a  $\sin$ .

- (2) **Nulová impedance = Netlumená resonance.** Protože komplexní číslo  $Z = (b - \omega^2) + i a \omega$  je rovno nule právě tehdy, když  $a \omega = 0$  a  $b = \omega^2$ , je impedance nulová přesně tehdy, když<sup>9</sup>  $a = 0$  (nedochází k tlumení) a  $\omega = \sqrt{b}$ .

Diferenciální rovnice, kterou chceme vyřešit, vypadá tedy následovně:

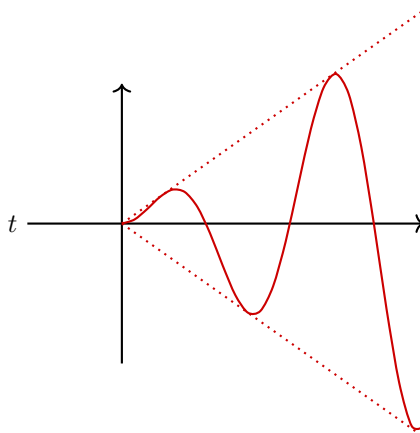
$$\ddot{y}(t) + by(t) = E_0 \cos(\sqrt{b}t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

Pomocí vyložené teorie je snadné ukázat, že partikulární řešení má tvar

$$v(t) = \frac{E_0}{\sqrt{b}} t \sin(\sqrt{b}t)$$

<sup>9</sup>Předpokládáme totiž, že  $a \geq 0$  a  $\omega > 0$ . Proto je  $a\omega = 0$  právě tehdy, když  $a = 0$ .

a to znamená, že dochází k *netlumené resonanci*:



#### Poučení 4. Rovnici

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = E_0 \cos(\omega t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

s  $a \geq 0$  a  $b > 0$  říkáme *rovnice oscilátoru s harmonickým buzením*. Víme, že koeficient  $a$  odpovídá *tlumení* a koeficient  $b$  odpovídá *elasticitě*. Konstanta  $E_0 > 0$  je *amplituda* a konstanta  $\omega > 0$  je *frekvence* vnějšího harmonického buzení.

Kvalita řešení se řídí *impedancí*

$$Z = (b - \omega^2) + ia\omega$$

(1) V případě  $Z \neq 0$  je partikulární řešení tvaru

$$\frac{E_0}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} \cos(\omega(t - t_0))$$

pro jistou konstantu  $t_0$ .

V tomto případě může dojít ke *tlumené resonanci* (situace  $b = \omega^2$  a  $a > 0$ ), nebo k *rázovým vlnám*, nebo k řadě dalších situací.

(2) V případě  $Z = 0$  je partikulární řešení tvaru

$$\frac{E_0}{\sqrt{b}} \sin(\sqrt{b}t)$$

a dochází k *netlumené resonanci*.

# Rejstřík

Rejstřík obsahuje odkazy na stránky, kde se pojmy vyskytují poprvé, nebo na stránky, kde se s pojmem pracuje zásadním způsobem. Například pojem *lineární prostor* se vyskytuje v textu téměř všude, ale dát odkazy na všechna tato místa by nebylo přehledné.

- 2-vektor, [114](#)
- $(p, q)$ -tensor, [424](#)
- $\Gamma$ -kombinace, [44](#)
  
- adjungovaná matice, [200](#)
- afinní obal, [46](#)
- afinní podprostor, [42](#), [48](#), [163](#), [164](#)
  - jeho parametrický zápis, [169](#)
  - jeho rovnicový zápis, [169](#)
  - jeho směr, [164](#)
- afinní podprostory
  - jejich stupeň rovnoběžnosti, [167](#)
  - jejich vzájemná vzdálenost, [443](#)
  - mimoběžné, [167](#)
  - rovnoběžné, [167](#)
  - různoběžné, [167](#)
- algebraický doplněk posice v matici, [194](#)
- algoritmus balení dárků, [570](#)
- analýza hlavní komponenty, [524](#)
- axiom výběru, [92](#)
  
- Banachův prostor, [334](#)
- báze, [75](#)
  - duální, [89](#)
  - Jordanova, [272](#), [279](#)
  - kanonická, [75](#)
  - konečně generovaného lineárního prostoru, [75](#)
  - obecného lineárního prostoru, [92](#)
  - ortogonální, [322](#)
  - ortonormální, [326](#)
  - uspořádaná, [75](#)
- Besselova nerovnost, [350](#), [480](#)
- bilineární forma
  - symetrická, [383](#)
  - symplektická, [383](#)
- binární symetrický kanál, [560](#)
  - Shannonova kapacita, [561](#)
- bodový odhad střední hodnoty matice, [527](#)
  
- cauchyovská posloupnost, [333](#)
- centrování matice, [527](#)
- Cramerova věta
  - pro lineární zobrazení, [128](#)
  - pro maticové soustavy, [203](#)
- damping factor
  - pro Google matrix, [514](#)
  - pro oscilátor, [640](#)
- dangling node, [507](#)
- dekódování
  - maximum likelihood, [560](#)
  - nearest neighbour, [551](#)
- derivate, [605](#)
- determinant
  - a plocha trojúhelníka, [199](#)
  - a rovnice kružnice, [207](#)
  - a rovnice přímky, [193](#)
  - formule pro výpočet, [125](#)
  - geometrický význam, [184](#)
  - Gramův, [432](#)
  - Laplaceův rozvoj, [195](#)
  - lineárního zobrazení, [122](#), [231](#)
  - matice, [182](#)
  - matice  $2 \times 2$ , [183](#)
  - matice  $3 \times 3$ , [184](#)
  - Sarrusovo pravidlo, [184](#)
  - Wronského, [615](#)
- dělení se zbytkem
  - pro polynomy, [238](#)
- diagram
  - komutativní, [54](#)
  - prohnání prvku, [88](#)
  - strunový, [179](#)
- diferenciální rovnice
  - $n$ -tého řádu, [613](#)
  - a milostné strategie, [624](#)
  - harmonického oscilátoru bez vnějšího buzení, [643](#)
  - její dynamický systém, [619](#)
  - její fundamentální matice, [614](#)
  - její řešení ve fázovém prostoru, [620](#)
  - metoda neurčitých koeficientů, [635](#)
  - oscilátoru s harmonickým buzením, [649](#)
  - počáteční podmínka, [600](#)
  - pro růst populace, [600](#)
  - RLC obvodu, [626](#)

- tlumeného oscilátoru bez vnějšího buzení, 646
- závaží na pružině, 625
- dimenze lineárního prostoru, 78
- dotaz, 516
- duální lineární zobrazení, 69
- duální prostor, 67
- dynamický prostor, 619
- Einsteinova sčítací konvence, 427
- ekvivalence matic, 229
- epimorfismus, 59
- error pattern, 551
- Eulerova formule pro konvexní polytopy, 591
- Eulerova věta o rotaci, 412
- Exchange Lemma, 76
- exponenciála matice, 341
- forma
  - bilineární, 377
  - lineární, 67
- Fourierova řada, 350
  - v konečné dimenzi, 352
- Frobeniova věta
  - pro lineární zobrazení, 64
  - pro soustavy lineárních rovnic, 147
- Fundamentální věta algebry, 241, 290
- Gaussova eliminační metoda, 144
- Gaussova-Jordanova eliminace, 159
- Gaussova-Seidelova iterační metoda, 154
- Gift Wrapping Algorithm, 570
- Google matrix, 513
- Gramova matice
  - obecného skalárního součinu, 314
  - skalárního součinu v  $\mathbb{R}^n$ , 313
- Gramův determinant, 432
- grupa
  - ortogonální, 411
- Hamelova báze, 93
- Hammingova váha slova, 551
- Hat Problem, 558
- Hermitovsky sdružená matice, 330
- Hilbertův prostor, 346
- hlavní komponenta, 528
- Hodgeův komplement, 441
- homotetie, 53
- Hornerovo schéma, 235
- Householderova
  - GEM, 415
  - reflexe, 414
- hustá množina, 348
- charakterisace ortogonálních projekcí v  $\mathbb{R}^n$ 
  - pro obecný skalární součin, 320
  - pro standardní skalární součin, 321
- Choleskyho faktorizace pozitivně definitní matice, 311
- chyba
  - detekce, 552
  - oprava, 552
  - simultánní detekce a oprava, 554
- identické lineární zobrazení, 53
- index nilpotence, 257
- infimum, 443
- interpolační polynom, 84, 461
- isomorfismus, 59
  - a jednostranné inverse, 85
- jádro lineárního zobrazení, 62
  - zobecněné, 255
- Jarvis' March, 570
- jednotková sféra v  $\mathbb{R}^n$ , 411
- Jordanova buňka
  - pro nilpotentní matice, 272
- Jordanova báze, 272, 279
- Jordanův segment
  - pro obecné matice, 279
- Jordanův tvar
  - pro nilpotentní matice, 272
  - pro obecné matice, 279
- kardinální číslo, 91
- kofaktor posice v matici, 194
- kombinace
  - absolutně konvexní, 46
  - afinní, 45
  - konické, 45
  - konvexní, 46
  - vzhledem k operadu koeficientů, 44
- kombinační číslo, 120
- komponenta silné souvislosti, 507
- komprese obrázků, 368
- komutativní
  - diagram, 54, 55
  - trojúhelník, 57
  - čtverec, 57
- komutativní okruh s jednotkou, 29
- konečná množina, 27
- konická množina, 48
- konický obal, 47
- konjugovaná matice, 330
- konvergence v 1-normě, 512
- konvergence řady, 339
  - absolutní, 339
- konvexní množina, 48
- konvexní obal, 47
- kořen polynomu, 239
- kosinová věta, 304
- koule, 306
- kovektor, 67, 110

## kód

- duální, 549
- Golayův, 558
- Hammingův, 556
- Hammingův (7, 4)-kód, 549
- jeho information rate, 541
- jeho minimální distance, 551
- lineární, 548
- opakovací, 557
- perfektní, 556
- rozšířený Hammingův (7, 4)-kód, 555
- sphere-packing bound, 554
- systematický, 550

## kódování, 540

## Kroneckerův symbol, 89

## křivka

- v lineárním prostoru, 604

## Laplaceův rozvoj determinantu, 195

## latentní sémantické indexování, 519

## Legendrovy polynomy, 325, 488

## limita posloupnosti, 332

## lineární diferenciální rovnice, 67

## lineární kombinace

- nulová, 71
- triviální, 71

## lineární obal, 35

- konečné množiny, 36
- uzávěrové vlastnosti, 37

## lineární podprostor, 37

## lineární prostor

- $I$ -souřadnic nad  $\mathbb{F}$ , 28
- $I$ -tic nad  $\mathbb{F}$ , 26
- $n$ -tic nad  $\mathbb{F}$ , 26
- $n$ -tic nad  $\mathbb{R}$ , 17
- jako diskrétní signály, 19

## Banachův, 334

## jeho dimenze, 78

## jeho direktní rozklad, 41

## jeho podprostor, 37

## konečně generovaný, 74

nad  $\mathbb{F}$ , 25nad  $\mathbb{R}$ , 15

## normovaný, 332

polynomů nad  $\mathbb{F}$ , 27

## reálných posloupností, 21

## reálných spojitých funkcí, 21

## s metrikou, 300

## s normou, 300

## lineární rovnice, 64

## její partikulární řešení, 64

## její pravá strana, 64

## její přidružená homogenní rovnice, 64

## lineární zobrazení, 51

## diagonalisovatelné, 247

## identické, 53

## invertibilní, 59

## jednoduché, 291

## jeho defekt, 83

## jeho direktní rozklad, 58

## jeho hodnost, 83

## jeho index nilpotence, 257

## jeho invariantní podprostor, 257

## negativní test, 52

## nilpotentní, 257

## polojednoduché, 291

## samoadjungované vzhledem ke skalárnímu součinu, 356

z  $\mathbb{F}^{(S)}$  do  $\mathbb{F}^{(R)}$ , 97z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$ , 95

## matice, 96

## adjungovaná, 200

## direktního součtu lineárních zobrazení, 219

## duálního lineárního zobrazení, 220

## ekvivalentní, 229

## fundamentální pro diferenciální rovnici, 614

## generující, 548

## Google matrix, 513

## Gramova, 432

## Hermitovsky sdružená, 330

## Householderova, 414

## hyperlinků webu, 506

## identického zobrazení, 217

## inversní, 101

## invertibilní, 101

## jednotková, 103

## jejich direktní součet, 109

## jejich součet, 134

## její exponenciála, 341

## její horní blokový tvar, 143

## její inverse, 101

## její pseudoinverse, 371

## její redukovaný SVD rozklad, 364

## její singulární hodnota, 362

## její sloupcový zápis, 96

## její SVD rozklad, 362

## její řádkový zápis, 96

## konjugovaná, 330

## kontrolní, 548

## kovarianční, 454, 527

## lineárního zobrazení vzhledem k uspořádaným bázím, 212

## nulová, 107

## podobné, 230

## positivní, 509

## positivně definitní, 307

## regulární, 101

## singulární, 101

## skalárního násobku lineárního zobrazení, 218

## sloupcově stochastická, 509

## složení dvou lineárních zobrazení, 217

- součtu lineárních zobrazení, 218
- spektrální tvar jejího SVD rozkladu, 370
- teleportační, 513
- transformace souřadnic, 224
- transponovaná, 134
- v blokové diagonálním tvaru, 109
- vynásobená skalárem, 134
- metrický tensor
  - jeho yanking identities, 426
  - obecného skalárního součinu, 314, 424
  - skalárního součinu v  $\mathbb{R}^n$ , 313
- metrika, 300
  - Hammingova, 546
  - Lorentzova, 315
- množina
  - konická, 48
  - konvexní, 48
  - uzavřená vzhledem k operadu koeficientů, 48
- množina generátorů, 74
- množina vektorů
  - lineárně nezávislá, 73
  - lineárně závislá, 73
- monomorfismus, 59
- nadrovina v  $\mathbb{R}^n$ , 413
- násobení matic
  - rozměrová zkouška, 103
- násobnost kořene, 240
- nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunjakovski, 300
- norma, 300, 332
  - 1-norma na  $\mathbb{R}^2$ , 305
  - 1-norma na  $\mathbb{R}^n$ , 332
  - ekvivalentní normy, 335
  - Frobeniova, 304
  - matice, 337
- normovaný lineární prostor, 332
- normála nadroviny, 413
- obal
  - afinní, 46
  - konický, 47
  - konvexní, 47
  - lineární, 35
  - vzhledem k operadu koeficientů, 46
- obraz lineárního zobrazení, 62
  - zobecněný, 255
- operad koeficientů, 43
- ordinální zápis přirozeného čísla, 18
- orientovaný graf, 504
  - hrana, 504
  - vrchol, 504
- ortogonalisace (Gram-Schmidt), 323
- ortogonální
  - doplňek podprostoru, 327, 545
  - projekce, 315
  - rejekce, 315
- ortogonální množina, 349
- ortonormální množina, 348
- Parsevalova rovnost, 351
- permutace, 125, 178
  - identická, 178
  - inverse v permutaci, 181
  - jednotková, 178
  - jejich strunové diagramy, 179
  - její znaménko, 181
  - lichá, 181
  - sudá, 181
- pivot, 143
- podobnost dotazu a dokumentu, 516
- podobnost matic, 230
- podprostor
  - afinní, 48
- polynom
  - jeho hodnota, 235, 263
  - jeho hodnota v lineárním zobrazení, 261
  - jeho kořenový faktor, 240
  - jeho stupeň, 237
  - jeho vedoucí koeficient, 235
  - Lagrangeův interpolační, 84, 461
  - Legendrův, 325, 488
  - minimální, 262
  - nad  $\text{Lin}(L, L)$ , 263
  - nad tělesem  $\mathbb{F}$ , 27, 235
- polynom jako funkce *vs.* polynom jako výraz, 241
- princip
  - inkluse a exkluse, 81
  - superposice, 52
  - superposice pro homogenní diferenciální rovnice, 610
- problém klobouků, 558
- projekce
  - na osu  $x$ , 98
  - na osu  $y$ , 98
- prostor lineárních forem, 67
- Pythagorova věta, 304
- regresní
  - kuželosečka, 464
  - plocha, 463
  - polynom, 460
  - přímka, 457
  - rovina, 462
- regulární kvadrika, 359
  - její střed, 359
- resonance, 639
- rotace o úhel  $\alpha$ , 99
- rovnoběžníková rovnost, 305
- Sarrusovo pravidlo, 184
- search engine, 503
- seznam vektorů, 34



- lineárně nezávislý, 71
- lineárně závislý, 71
- sféra, 306
- shear, 99
- singular value decomposition, 362
- skalární součin
  - Frobeniův, 299
  - komplexní, 329
  - obecný tvar v  $\mathbb{R}^n$ , 312
  - reálný, 296
  - standardní v  $\mathbb{R}^n$ , 296
- slovo, 548
  - chybové, 551
  - kódové, 548
- soustava diferenciálních rovnic, 607
  - její počáteční podmínka, 607
  - její přidružená homogenní soustava, 607
  - její řešení, 607
  - metoda variace konstant, 611
  - věta o existenci jediného řešení, 609
- soustava lineárních rovnic, 136
  - její fundamentální systém, 148
  - její matice soustavy, 136
  - její partikulární řešení, 136
  - její pravá strana, 136
  - její přidružená homogenní soustava, 136
  - její rozšířená matice, 136
  - zobecněné řešení metodou nejmenších čtverců, 464
  - řešení metodou nejmenších čtverců, 452
- součin lineárních prostorů, 28
  - universální vlastnost, 57
- součin matic, 102
- souřadnice vzhledem k bázi, 79
- spojení lineárních podprostorů, 40
- spojitá funkce, 335
- spočetná množina, 91, 347
- stejnolehlost, 53
- stopa lineárního zobrazení, 127
- syndrom, 551
- šifrování, 540
- tensor
  - grafický kalkulus, 419
  - jeho indexové značení, 426
  - jeho řád, 424
  - kontrakce indexu, 429
  - snížení indexu, 428
  - zvýšení indexu, 428
- teorie kategorií, 55
- těleso, 23
  - algebraicky uzavřené, 289
  - formálně reálné, 32
  - jeho charakteristika, 290
  - komplexních čísel, 25
  - perfektní, 291
  - racionálních čísel, 25
  - reálných čísel, 25
  - uspořádané, 30
  - zbytkových tříd modulo  $p$ , 24
- translace, 52, 402
- universální algebra, 180
- úplná ortonormální množina, 348
- vektor
  - důležitosti webových stránek, 506, 514
  - negativní, 509
  - nulový, 15, 26
  - opačný, 15, 26
  - pozitivní, 509
  - stochastický, 509
- vektor frekvencí, 516
- vektorový model vyhledávání, 516
- vektorový součin
  - Lagrangeova rovnost, 441
  - tří vektorů v  $\mathbb{R}^3$ , 442
  - v  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$ , 437
  - v  $\mathbb{R}^n$ , 436
- věta
  - Abelova-Liouvilleova, 614
  - Artinova-Schreierova, 32
  - Carathéodoriho, 577
  - Cartan-Dieudonné, 415
  - Cayleho-Hamiltonova, 265
  - Cramerova, 128, 203
  - Eulerova o rotaci, 412
  - Frobeniova, 64, 147
  - kosinová, 304
  - o dimenzi jádra a obrazu, 83
  - o dimenzi spojení a průniku, 82
  - Pythagorova, 304
  - Shannonova, 561
- viselec, 507
- vlastní
  - hodnota, 244
  - podprostor, 244
- vlastní vektor
  - lineárního zobrazení, 244
  - matice, 244
- vnější mocnina lineárního prostoru, 117
- výběrová kovarianční matice, 527
- výběrová směrodatná odchylka, 525
- výběrový rozptyl, 525
- Wrońského determinant, 615
- zkosení, 99
- změna měřítka, 99
- znaménko permutace, 125
- zobrazení, 17

$k$ -lineární, 117  
afinní, 402  
alternující, 117  
bijektivní, 27  
bilineární, 117  
identické, 54  
injektivní, 27  
multilineární, 117  
na, 27  
prosté, 27  
surjektivní, 27  
Zornovo Lemma, 92