Modélisation et évaluation des stratégies de couverture du Crack Spread à l'aide d'options européennes

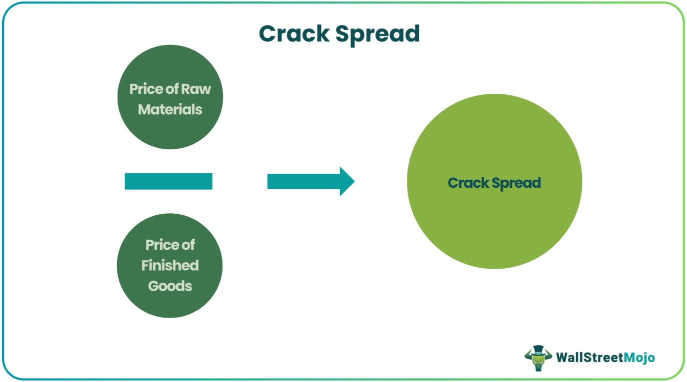
Daniel K. ANONWODJI

ENSA-Agadir / Supervised by : M. Brahim El ASRI

November 26, 2025

Contexte

- Forte volatilité du marché pétrolier (Refined & crude).
- Les raffineurs subissent un risque de marge.
- Le **Crack Spread** mesure cette marge.



Problématique du raffineur de pétrole

- Comment se couvrir contre les fluctuations défavorables du Crack Spread ?
- Choix de stratégie efficace

Techniques courantes de couverture

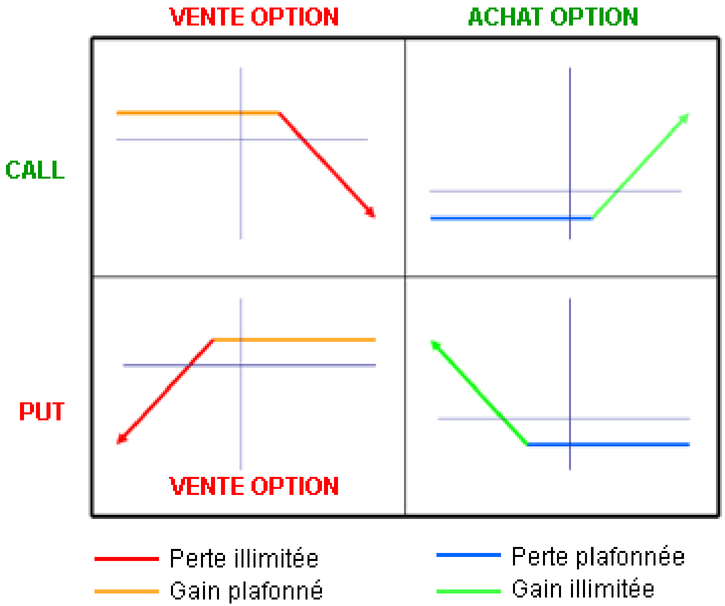
- Utilisation des **futures** ou **options** sur pétrole et essence.
- Stratégies classiques :
  - Achat de put sur produit raffiné + achat de call sur le brut.
  - Utilisation d'une option directe sur le spread (**spread option**).
  - Stratégie moins coûteuse ?

Plan

1. Théorie des options
2. Méthodes de valorisation
3. Implémentiations : Calcul du coût de la couverture
4. Analyse et conclusion

Plan

Les options


VENTE OPTION
ACHAT OPTION
CALL
PUT
VENTE OPTION
Perte illimitée
Gain plafonné
Perte plafonnée
Gain illimitée

Les options sur spread

- Le payoff s'écrit :

$$P_{\text{spread}} = \max(S_1 - S_2 - K, 0)$$

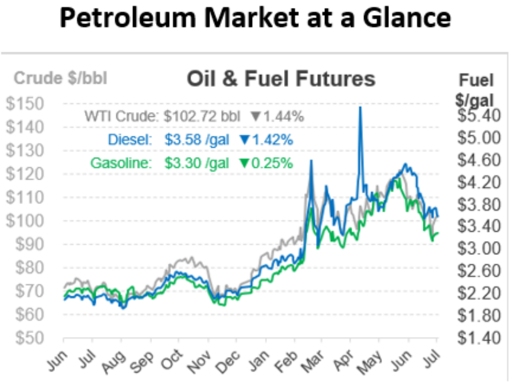
- Types de sous-jacent : Spark spread, crack spread, spread de taux etc.
- Corrélation ρ entre les sous-jacents joue un rôle clé.

Le Crack Spread

- Indicateur :

$$\text{Crack Spread} = P_{\text{produit raffiné}} \times 42 - P_{\text{pétrole brut}}$$

(conversion gallons $\rightarrow$ barils)



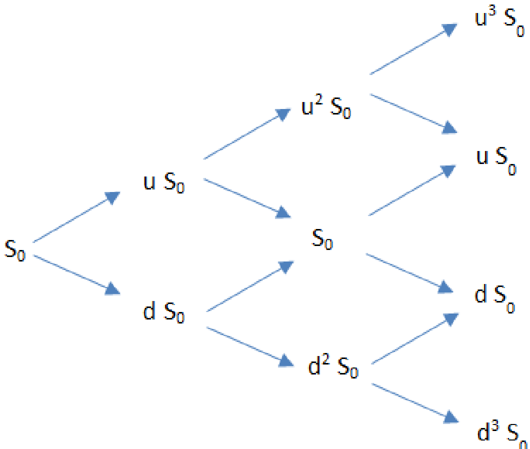
Source: CME Group

Plan

Modèle Binomial

- Arbre discret à deux états : hausse (u), baisse (d).
- Fondements : Complétude, AOA, probabilité risque neutre, martingales :

$$C_{i-1} = e^{-rT}[pC_i^u + (1-p)C_i^d]$$



Modèle Binomial de Cox–Ross–Rubinstein (CRR)

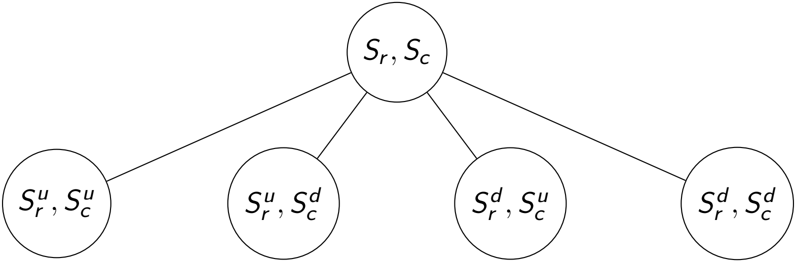
- **Principe :** discrétiser l'évolution du prix du sous-jacent sur N périodes.
- À chaque pas de temps :

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} uS_t & \text{(hausse)} \\ dS_t & \text{(baisse)} \end{cases}$$

  où $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ et $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.
- **Probabilité neutre au risque :**

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Modèle binomial pour les spread options (bivarié)



$$q_r := \mathbb{P}_Q(\text{hausse de } S^{(r)}) = p_{++} + p_{+-} = \frac{e^{r\Delta t} - d_r}{u_r - d_r},$$
$$q_c := \mathbb{P}_Q(\text{hausse de } S^{(c)}) = p_{++} + p_{-+} = \frac{e^{r\Delta t} - d_c}{u_c - d_c}.$$

Modèle binomial pour les spread options (bivarié)

Calcul des probabilités

$$\begin{aligned}
p_{+-} &= q_r - p_{++}, \\
p_{-+} &= q_c - p_{++}, \\
p_{--} &= 1 - q_r - q_c + p_{++}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[X^{(r)}X^{(c)}] &= p_{++}\, a_r a_c + p_{+-}\, a_r b_c + p_{-+}\, b_r a_c + p_{--}\, b_r b_c \\
&= p_{++}\, A + B,
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_{++} \;=\; \frac{\widehat{\mathrm{Cov}}(X^{(r)}, X^{(c)}) + \mathbb{E}_Q[X^{(r)}]\mathbb{E}_Q[X^{(c)}] - B}{A}}$$

Modèle binomial pour les spread options (bivarié)

$$f\big(S_0^{(r)} u_r^i d_r^{t-i} \times 42 \ - \ S_0^{(c)} u_c^j d_c^{t-j}\big).$$

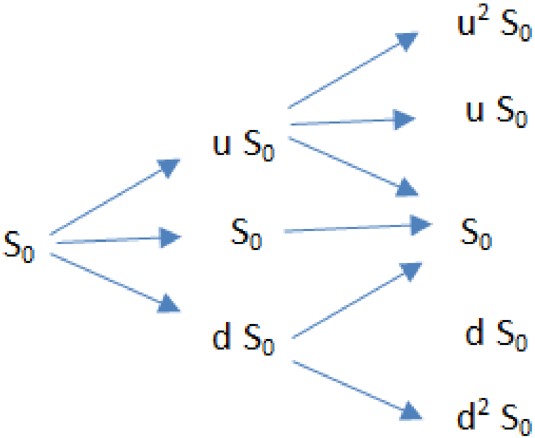
On calcule ensuite la valeur par *backward induction* :

$$V_t(i,j) = e^{-r\Delta t}(p_{++} V_{t+1}(i+1, j+1) + p_{+-} V_{t+1}(i+1, j) + ...).$$

Modèle Trinomial

- Trois scénarios possibles : hausse, stable, baisse.

$$C_{i-1} = e^{-rT}[p_1 C_i^u + p_2 C_i^m + p_3 C_i^d]$$



Modèle Trinomial de Boyle

- Paramètres :

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

- **Probabilités neutres au risque :**

$$p_u = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sigma^2\Delta t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)^2\Delta t^2}{\sigma^2\Delta t}\right) + \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{\Delta t}}{\sigma\sqrt{2}}\right],$$

$$p_m = 1 - \frac{\sigma^2\Delta t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)^2\Delta t^2}{\sigma^2\Delta t},$$

$$p_d = 1 - p_u - p_m.$$

Modèle de Black & Scholes (1973)

- **Hypothèse :** :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- **Formule fermée du call européen :**

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

et $N(x)$: fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Modèle de KIRK (1995) – approximation analytique

- Payoff d'une option call sur spread :

$$C = e^{-rT}\,\mathbb{E}[\max(S_1 - S_2 - K, 0)]$$

- Approximation analytique de Kirk :

$$C \approx e^{-rT}\Big[S_1 N(d_1) - (S_2 + K)N(d_2)\Big]$$

avec :

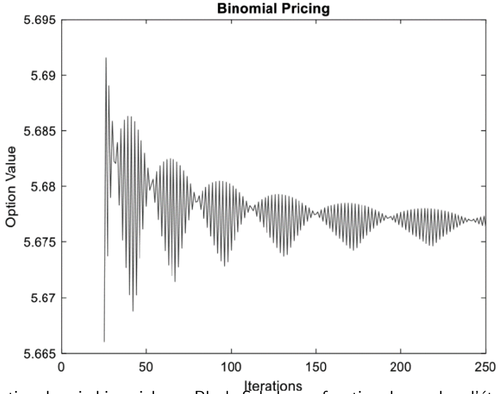
$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_1}{S_2+K} + \frac{1}{2}\sigma_{\text{Kirk}}^2 T}{\sigma_{\text{Kirk}}\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_{\text{Kirk}}\sqrt{T}$$

où la volatilité ajustée du spread :

$$\sigma_{\text{Kirk}} = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\frac{S_2}{S_2+K}\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{S_2}{S_2+K}\sigma_2\right)^2}$$

- **Majorant de l'erreur :**

$$\left| C_{\text{binomial}} - C_{\text{BS}} \right| \leq \frac{S_0 \sigma \sqrt{\Delta t}}{2} \quad \text{avec} \quad \Delta t = \frac{T}{n}$$



Évolution du prix binomial vers Black–Scholes en fonction du nombre d'étapes.

Convergence du modèle trinomial vers BSM

- La majoration $\mathbb{E}[|S_T^{(N)} - S_T|] \leq C/N$
- Ordre $O(1/N)$.

Plan

Données d'études

- Produit raffiné : RBOB Gasoline Nov 25
- Pétrole brut : Crude Oil Nov 25

Pricing des puts sur le produit raffiné

- Modèles : Binomial, Trinomial et BS
- 42 options par unité de barils
- Strike K_1: garanti du minimum de prix de vente

$$K = K_1 - K_2$$

Pricing du call sur la matière brute

- Modèles : Binomial, Trinomial et BS
- 1 option par unité de barils
- Strike K_2: garanti (maximale) de prix d'achat

Pricing du put sur le crack spread

- Binomial bivarié et KRIK
- 1 option sur la marge
- Strike K: garanti minimale de marge fixé à 5

Plan

Analyse comparative des deux stratégies

Conclusion & Perspectives