



ENSA5/FID/2025-2026

Valorisation & Couverture par les produits dérivés

PRÉSENTÉ PAR :

KODJOVI DANIEL ANONWODJI

SPÉCIALITÉ : **FINANCE ET INGÉNIERIE DÉCISIONNELLE**

THÈME :

BINOMIAL AND TRINOMIAL TREES FOR EUROPEAN OPTION VALUATION AND THEIR APPLICATION TO SPREAD OPTIONS

ENCADRÉ PAR :

M. BRAHIM EL ASRI

Liste des figures

3.1	Exemple d'arbre trinomial à 2 périodes	21
5.1	Analyse du coût initial de couverture	39
5.2	Convergence du modèle binomial univarié vers B&S	40
5.3	Convergence du modèle binomial bivarié vers KIRK	41
C.1	Accueil de l'interface	49
C.2	Observation de la marge	50
C.3	Valorisation des options utilisées.	50
C.4	Coûts de couverture avec portefeuille d'options.	51
C.5	Convergence du modèle binomial	51

Résumé

Ce projet traite de la valorisation des options financières par les modèles d'arbres discrets et leur application aux options sur spread. Ces dernières constituent des instruments de couverture clés face aux variations de prix, notamment dans le secteur énergétique.

Après une présentation des modèles binomial et trinomial (Cox-Ross-Rubinstein et son extension), l'étude met en évidence leurs fondements théoriques et leur convergence vers le modèle de Black-Scholes.

Une modélisation bivariée est ensuite développée pour intégrer la corrélation entre deux sous-jacents, permettant l'évaluation numérique des options sur spread via des arbres binomiaux, comparés à l'approximation analytique de Kirk.

Les résultats confirment la meilleure précision du modèle trinomial et l'efficacité des options sur spread comme outil de couverture ciblée. Ce travail met en lumière le compromis entre complexité numérique et performance dans le choix des méthodes de valorisation.

Table des matières

Liste des figures	i
1 Généralité sur les options	3
1.1 Définition	3
1.2 Terminologie et notations	3
1.3 Payoff des options	4
1.4 Parité Put-Call	4
1.5 Les Spread Options	5
1.5.1 Motivation	5
1.5.2 Généralités sur les Spread Options	6
1.5.3 Méthodes d'évaluation	6
2 Le modèle binomial	7
2.1 Introduction	7
2.2 Modèle binomial à une période	7
2.2.1 Modélisation probabiliste du marché	7
2.2.2 Stratégie de portefeuille simple	8
2.2.3 Probabilité risque-neutre	10
2.2.4 Évaluation d'un produit dérivé C	12
2.3 Modèle binomial à plusieurs périodes	13
2.3.1 Modélisation du marché	13
2.3.2 Stratégie de portefeuille simple	15
2.3.3 Existence et unicité de Q	15
2.3.4 Complétude du marché et évaluation d'un produit dérivé	17
2.4 Paramétrisation du modèle	19

3	Le Modèle Trinomial	20
3.1	Introduction	20
3.2	Structure du modèle	20
3.3	Probabilités neutres au risque	21
3.4	Complétude du marché dans le modèle trinomial	23
3.5	Valorisation d'une option	24
3.6	Avantages du modèle trinomial	25
4	Étude de convergence	26
4.1	Formule de Black–Scholes pour une option européenne	26
4.2	Convergence du modèle CRR vers Black–Scholes	26
4.2.1	Énoncé	26
4.2.2	Vitesse de convergence (borne via Berry–Esseen)	29
4.3	Convergence du modèle trinomial	30
5	Application : valorisation des options sur spread	33
5.1	Problème du raffineur de pétrole	33
5.2	Stratégies de couverture	33
5.2.1	Couverture par portefeuille d'options	34
5.2.2	Couverture par une option sur le spread	34
5.3	Évaluation des coûts de couverture	34
5.3.1	Évaluation du portefeuille d'options	34
5.3.2	Évaluation d'une option sur spread	35
5.4	Comparaison des deux approches de couverture	38
5.4.1	Couverture directe par option sur spread	38
5.4.2	Couverture par portefeuille d'options simples	39
5.4.3	Analyse comparative	39
A	Modèle de Black–Scholes pour les options européennes	44
A.1	Hypothèses du modèle	44
A.2	Définition du payoff	44
A.3	Formule de valorisation	45
A.4	Interprétation économique	45
A.5	Sensibilités (<i>Greeks</i>)	45
A.6	Limites du modèle	46
A.7	Extensions du modèle	46

B	Modèle de Kirk pour les options sur spread	47
B.1	Définition du payoff	47
B.2	Hypothèses	47
B.3	Formule approchée de Kirk	48
B.4	Interprétation	48
B.5	Limites	48
C	Présentation de notre outil d'aide à la couverture du Crack Spread	49
C.1	Page d'accueil	49
C.2	Visualisation des données de marché en temps réel	49
C.3	Valorisation des différentes stratégies de couverture	50
C.4	Analyse des coûts	51

Introduction générale

Les marchés financiers modernes sont caractérisés par une complexité croissante et une exposition à des risques multiples, qu'ils soient liés aux fluctuations des prix, aux taux d'intérêt, ou aux écarts entre différents actifs. Dans ce contexte, les produits dérivés jouent un rôle essentiel, non seulement comme instruments de spéculation, mais surtout comme outils de couverture et de gestion des risques. Parmi ces instruments, les options occupent une place privilégiée en raison de leur flexibilité et de leur capacité à offrir une protection asymétrique contre les mouvements défavorables des marchés.

Parmi les différentes catégories d'options, les options sur spread — dont le sous-jacent est la différence entre deux prix ou deux indices — revêtent une importance particulière dans des secteurs comme l'énergie et l'agroalimentaire. Par exemple, un raffineur de pétrole est exposé au risque de marge entre le prix du brut et celui des produits raffinés. Une option sur spread lui permet de se couvrir directement contre une compression de cette marge, sans avoir à combiner plusieurs instruments. Cependant, l'évaluation de ces options est complexe, car elle dépend de la dynamique conjointe de deux actifs corrélés, ce qui rend souvent impossible l'obtention de formules fermées exactes.

Pour pallier cette difficulté, les modèles numériques d'arbres discrets — tels que les arbres binomiaux et trinomiaux — offrent une alternative puissante et intuitive. Introduit par Cox, Ross et Rubinstein en 1979, le modèle binomial permet de discrétiser l'évolution du prix d'un actif en supposant que, à chaque pas de temps, celui-ci ne peut prendre que deux valeurs possibles. Bien que simple, ce modèle converge vers le modèle continu de Black-Scholes lorsque le nombre de périodes augmente. Le modèle trinomial, quant à lui, enrichit cette approche en autorisant une troisième possibilité : la stagnation du prix. Cette flexibilité supplémentaire améliore la précision et la stabilité numérique, en particulier pour l'évaluation d'options américaines ou exotiques.

Ce projet s'inscrit dans cette double problématique : comprendre et appliquer les modèles d'arbres discrets à l'évaluation des options européennes, puis étendre ces méthodes au cas des options sur spread. L'objectif est à la fois théorique et appliqué :

- Sur le plan théorique, nous rappellerons les fondements des modèles binomial et trinomial, en mettant l'accent sur les concepts clés que sont l'absence d'arbitrage, la probabilité risque-neutre, et la complétude des marchés. Nous étudierons également la convergence de ces modèles vers le cadre continu de Black-Scholes, en quantifiant leur vitesse de convergence à l'aide d'outils probabilistes comme le théorème de Berry-Esseen.
- Sur le plan appliqué, nous nous intéresserons à la modélisation des options sur spread, en particulier dans le contexte énergétique. Nous comparerons deux stratégies de couverture : l'utilisation d'un portefeuille d'options vanilles et le recours à une option sur spread. Nous

mettrons en œuvre des arbres binomiaux bivariés pour évaluer ces instruments, en tenant compte de la corrélation entre les deux sous-jacents. Enfin, nous confronterons ces résultats à l'approximation analytique proposée par Kirk (1995), largement utilisée dans l'industrie.

À travers cette étude, nous cherchons à illustrer la pertinence des méthodes numériques en finance, tout en soulignant leurs limites pratiques — qu'il s'agisse de la complexité computationnelle des arbres multi-dimensionnels ou des hypothèses sous-jacentes aux modèles analytiques.

Chapitre 1

Généralité sur les options

1.1 Définition

Une **option** est un **contrat financier** conclu entre deux parties : l'**acheteur** (ou détenteur) et le **vendeur** (ou émetteur). Ce contrat donne à l'acheteur **le droit**, mais **pas l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent** à un **prix fixé à l'avance**, appelé **prix d'exercice** ou **strike**, et ce à une **date future déterminée**.

L'**actif sous-jacent** peut être de nature très variée : il peut s'agir d'une **action**, d'un **indice boursier**, d'une **matière première**, d'une **devise**, ou même d'une **autre option**.

On distingue généralement deux grands types d'options selon la manière dont elles peuvent être exercées :

- Une **option européenne** ne peut être exercée **qu'à la date d'échéance**, c'est-à-dire à la fin de sa durée de vie.
- Une **option américaine**, en revanche, peut être exercée **à tout moment** entre la date d'émission et la date d'échéance.

1.2 Terminologie et notations

Voici quelques définitions importantes que nous rencontrerons tout au long de ce rapport :

- **Prime** : Le montant payé initialement pour le contrat d'option. Comment déterminer cette valeur sera le sujet principal de cette partie.
- **Actif sous-jacent** : L'instrument financier dont dépend la valeur de l'option (sa valeur dérive de cet actif). Il est noté S .
- **Prix d'exercice (Strike Price)** : Le montant auquel l'actif sous-jacent peut être acheté (pour une option d'achat) ou vendu (pour une option de vente). Ce prix est noté K . Cette définition s'applique principalement aux options d'achat et de vente simples.

- **Date d'expiration (Maturity)** : La date à laquelle l'option cesse d'exister ou de conférer des droits au détenteur. Elle est notée T .
- **Valeur intrinsèque** : Le gain potentiel si l'option était exercée immédiatement, c'est-à-dire le paiement qui serait reçu si l'actif sous-jacent reste à son niveau actuel lorsque l'option expire.

1.3 Payoff des options

Le *payoff* d'une option européenne correspond à la valeur que recevra son détenteur à l'échéance en fonction du prix de l'actif sous-jacent.

Option d'achat ("call")

Le *payoff* d'une option call est défini par la formule suivante :

$$C = \max(S - K, 0)$$

Où S est le prix de l'actif sous-jacent à l'expiration, et K est le prix d'exercice de l'option. Si le prix de l'actif à l'expiration est supérieur au prix d'exercice, le détenteur peut exercer l'option et acheter l'actif à un prix inférieur à sa valeur actuelle, générant un gain de $S - K$. Si le prix de l'actif est inférieur ou égal au prix d'exercice, le *payoff* de l'option est nul.

Option de vente ("put")

Le *payoff* d'une option put est donné par :

$$P = \max(K - S, 0)$$

Si le prix de l'actif à l'expiration est inférieur au prix d'exercice, le détenteur peut exercer l'option et vendre l'actif à un prix supérieur à sa valeur actuelle, générant un gain de $K - S$. Si le prix de l'actif est supérieur ou égal au prix d'exercice, le *payoff* de l'option est nul.

1.4 Parité Put-Call

La parité Put-Call établit une relation entre le prix d'une option d'achat (call) et celui d'une option de vente (put) ayant le même prix d'exercice K et la même date d'expiration T . Cette relation peut être expliquée par deux portefeuilles :

- π_A : Un portefeuille composé d'une option d'achat et d'une somme d'argent investie à un taux sans risque $Ke^{-r(T-t)}$.
- π_B : Un portefeuille composé d'une option de vente et d'une unité de l'actif sous-jacent.

À l'échéance, ces deux portefeuilles ont la même valeur :

$$\max(S(T) - K, 0) + K = \max(K - S(T), 0) + S(T)$$

Ainsi, à l'instant t , les valeurs de ces deux portefeuilles doivent être égales :

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t$$

Cela exprime la parité entre les options d'achat et de vente. Ce principe repose sur l'absence d'opportunités d'arbitrage.

Lorsque des dividendes sont versés sur l'actif sous-jacent, la formule de la parité Put-Call est modifiée pour tenir compte de la valeur actualisée des dividendes D_t :

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t - D_t$$

1.5 Les Spread Options

1.5.1 Motivation

Les *spread options* trouvent une application particulièrement pertinente dans le secteur de l'énergie, où les entreprises sont exposées à plusieurs prix de marché à la fois, souvent corrélés entre eux. Par exemple, un raffineur de pétrole achète du *pétrole brut* à un certain prix et revend des *produits raffinés* tels que l'essence ou le diesel. Sa rentabilité dépend donc non pas d'un prix isolé, mais de **l'écart entre le prix des produits raffinés et celui du pétrole brut**, autrement dit de sa **marge de raffinage**.

Lorsque le prix du brut augmente, le coût d'approvisionnement s'élève, tandis qu'une baisse du prix des produits raffinés réduit les revenus. Bien que ces deux prix soient corrélés, ils ne le sont pas parfaitement : il arrive que le prix du brut augmente plus vite que celui des produits finis, ce qui réduit la marge du raffineur. Ce dernier est donc exposé à un risque spécifique lié à **la diminution de l'écart de prix (le spread)** entre ces deux marchés.

Pour se prémunir contre ce risque, le raffineur peut recourir à une *spread put option*, dont le sous-jacent est précisément la différence entre le prix des produits raffinés et celui du brut. Le gain (ou *payoff*) de cette option s'écrit :

$$\text{Payoff} = \max(K - (S_{\text{produits}} - S_{\text{brut}}), 0)$$

où K représente le spread de référence ou la marge minimale que le raffineur souhaite garantir.

Ainsi, si l'écart entre le prix des produits raffinés et celui du brut diminue en dessous de K , l'option génère un gain qui compense la perte de marge. La *spread put option* permet donc de **couvrir directement la marge de transformation**, sans avoir à combiner plusieurs instruments dérivés. Elle constitue un **outil de couverture naturel et efficace**, aligné sur la structure économique réelle de l'entreprise.

Les spread options jouent donc un rôle central dans la gestion du risque industriel et financier :

- Elles permettent aux entreprises de **stabiliser leurs marges**, en se couvrant contre des écarts de prix défavorables.
- Elles sont utilisées pour **évaluer la rentabilité** des opérations de transformation ou de production.
- Enfin, elles servent aussi de base à la **construction de stratégies combinées** dans les produits structurés et la gestion de portefeuille.

1.5.2 Généralités sur les Spread Options

Une *spread option* européenne porte sur la différence de prix entre deux actifs S_1 et S_2 . À l'échéance T , le *payoff* est :

$$C_T = \max(S_1(T) - S_2(T) - K, 0) \quad (\text{call}), \quad P_T = \max(K - (S_1(T) - S_2(T)), 0) \quad (\text{put}),$$

où K est le spread d'exercice.

Ces options dépendent de la *corrélation* $\rho = \text{Corr}(S_1, S_2)$, rendant leur valorisation plus complexe que pour les options vanilles, car la distribution du spread n'est généralement pas log-normale.

Les spread options couvrent différents domaines :

- **Crack spread** : cette option est utilisée par les raffineurs pour se protéger contre les variations du prix du pétrole brut et des produits raffinés tels que l'essence ou le diesel. Elle permet de sécuriser la marge de raffinage.
- **Spark spread** : cette option concerne le marché de l'électricité et du gaz naturel. Elle est utilisée par les producteurs d'électricité pour se couvrir contre les fluctuations du coût du combustible par rapport au prix de vente de l'électricité.
- **Dark spread** : similaire au spark spread, mais appliquée aux centrales électriques à charbon. Elle protège la marge entre le prix de l'électricité et le coût du charbon utilisé pour la production.
- **Spread de taux** : cette option porte sur la différence entre deux taux d'intérêt, comme le LIBOR et les taux de swap, et est principalement utilisée pour se couvrir contre le risque de variation des taux dans les produits financiers.

1.5.3 Méthodes d'évaluation

Les principales méthodes utilisées pour évaluer les options sur spread sont :

- **Méthode analytique approchée** : approximation de KIRK ;
- **Méthode numérique** : Monte Carlo, arbres binomiaux/trinomiaux bivariés, EDP à deux facteurs ;
- **Méthode semi-analytique** : transformées de Fourier (Heston, Variance Gamma, etc.).

Dans la suite, nous détaillerons l'approche des arbres binomiaux et trinomiaux pour leur évaluation.

Chapitre 2

Le modèle binomial

2.1 Introduction

Le développement des marchés financiers modernes a nécessité des modèles mathématiques capables de valoriser correctement les produits dérivés, en particulier les options. Leur prix dépend en effet de l'évolution aléatoire de l'actif sous-jacent, rendant leur évaluation complexe.

Parmi ces modèles, le binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979) occupe une place essentielle. Il suppose qu'à chaque période, le prix de l'actif peut seulement monter ou descendre, ce qui permet de construire un arbre de scénarios. Simple et intuitif, ce modèle est utilisé aussi bien pour les options européennes qu'américaines, tout en illustrant des principes clés comme l'absence d'arbitrage et la probabilité risque-neutre. Enfin, il constitue une version discrète qui converge vers le modèle de Black-Scholes (1973) lorsque le nombre d'étapes augmente.

Nous allons commencer ce chapitre en abordant le modèle binomial à une période. Dans la suite nous allons pouvoir étendre le travail sur le modèle binomial à plusieurs périodes.

2.2 Modèle binomial à une période

2.2.1 Modélisation probabiliste du marché

Nous nous intéressons ici à un modèle financier discret à deux dates : $t = 0$, correspondant à la date initiale, et $t = 1$, correspondant à une date future.

Le marché considéré comprend deux types d'actifs :

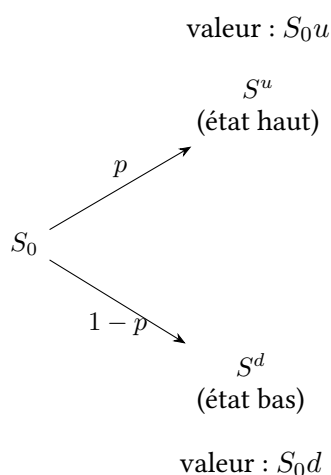
1. **Actif sans risque** : il peut s'agir d'une obligation ou d'un compte bancaire. Cet actif rapporte un taux d'intérêt déterminé, noté r . Ainsi, un investissement de 1 unité monétaire à la date initiale $t = 0$ permet d'obtenir un capital de $1 + r$ à la date future $t = 1$. Pour simplifier la notation, on note souvent $R = 1 + r$. Cet actif est dit *sans risque* car son rendement futur est certain et indépendant de l'évolution du marché.

2. **Actif risqué** : il s'agit d'un actif dont le prix évolue de manière aléatoire entre les deux dates. À la date initiale $t = 0$, le prix de l'actif est S_0 . À la date future $t = 1$, le prix peut évoluer vers deux états possibles :

$$S^u \quad (\text{état haut, "up"}), \quad S^d \quad (\text{état bas, "down"}).$$

Chaque état est associé à une *probabilité objective* :

$$\mathbb{P}(w = w_u) = p, \quad \mathbb{P}(w = w_d) = 1 - p, \quad p \in [0, 1].$$



Un élément clé de ce modèle est la *structure de l'information* disponible aux différents instants. À la date initiale $t = 0$, l'investisseur ne dispose que de l'information sur les prix initiaux. On note cette information :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

où Ω représente l'ensemble des états possibles.

À la date future $t = 1$, l'investisseur observe quel état du marché s'est réalisé. L'information disponible est alors :

$$\mathcal{F}_1 = \{\omega_u, \omega_d, \emptyset, \Omega\}.$$

On constate effectivement que l'information initiale est incluse dans l'information future :

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1.$$

2.2.2 Stratégie de portefeuille simple

2.2.2.1 Définition

Définition 1 (Stratégie de portefeuille simple) Une *stratégie de portefeuille simple* sur l'horizon $\{0, 1\}$ est donnée par un couple (x, Δ) où :

- x désigne le montant investi dans l'actif sans risque (obligation / compte) à $t = 0$,
- Δ désigne le nombre (constante sur $[0, 1]$) d'actif risqué (action) détenu.

La valeur du portefeuille à la date $t = 1$ est

$$X_1^{x,\Delta} = \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R = V_1,$$

avec $R = 1 + r$ le facteur sans risque. La stratégie est dite *autofinancante* si l'évolution de la valeur du portefeuille entre 0 et 1 s'explique uniquement par la variation des prix des actifs (pas d'apport ni de retrait additionnel).

Remarque (autofinancement)

Pour une stratégie constante (Δ, x) la condition d'autofinancement est automatiquement satisfaite puisque

$$V_1 - R V_0 = \Delta(S_1 - R S_0),$$

et aucun apport externe n'est nécessaire pour passer de V_0 à V_1 lorsque Δ, x sont fixés initialement.

2.2.2.2 Complétude du marché

Theorem 1 (Complétude du marché) Dans le modèle binomial à une période décrit ci-dessus, supposons que

$$S^d < R S_0 < S^u.$$

Alors le marché est complet : pour tout produit dérivé C défini par ses valeurs (C^u, C^d) en $t = 1$ (respectivement dans les états up et down), il existe une stratégie de portefeuille (Δ, x) qui réplique C , c.-à-d.

$$\Delta S^u + xR = C^u, \quad \Delta S^d + xR = C^d.$$

Preuve

Pour répliquer le produit dérivé C , on cherche (Δ, x) qui satisfont le système linéaire :

$$\begin{cases} C_1^u = xR + \Delta S_0(u - R), \\ C_1^d = xR + \Delta S_0(d - R). \end{cases}$$

En soustrayant la seconde équation de la première, on obtient :

$$C_1^u - C_1^d = \Delta S_0(u - d),$$

d'où

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u - d)}.$$

En remplaçant dans la seconde équation :

$$xR = C_1^d - \Delta S_0(d - R),$$

et donc

$$x = \frac{C_1^d}{R} - \frac{\Delta S_0(d - R)}{R}.$$

En substituant Δ :

$$x = C_1^u \frac{(R - d)}{R(u - d)} + C_1^d \frac{(u - R)}{R(u - d)}.$$

On peut aussi écrire le prix initial sous forme d'espérance en définissant une nouvelle mesure de probabilité de la façon suivante :

$$\tilde{P}(w = w_u) = \tilde{p} = \frac{R - d}{u - d}, \quad \tilde{P}(w = w_d) = 1 - \tilde{p} = \frac{u - R}{u - d},$$

ce qui donne :

$$x = \frac{1}{R} (\tilde{p}C_1^u + (1 - \tilde{p})C_1^d).$$

Ainsi, la stratégie (Δ, x) réplique parfaitement le produit dérivé dans chaque état, ce qui prouve la complétude du marché.

La mesure \tilde{P} que nous venons de définir joue un rôle fondamental en finance. Elle est appelée *mesure risque-neutre* (ou *risk-neutral measure*) et permet de valoriser les actifs dérivés comme des espérances actualisées sous un monde fictif où les investisseurs sont indifférents au risque. Dans le prochain paragraphe, nous allons l'aborder plus soigneusement en vérifiant d'abord qu'il s'agit bien d'une véritable mesure de probabilité.

2.2.3 Probabilité risque-neutre

Definition 2 (Arbitrage) On dit qu'il existe une *opportunité d'arbitrage* s'il existe une stratégie de portefeuille autofinçante (x, Δ) telle que :

$$\begin{cases} V_0 = \Delta S_0 + (x - \Delta S_0) = 0, \\ V_1 = \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R \geq 0 \quad \text{p.s.}, \\ \mathbb{P}(V_1 > 0) > 0. \end{cases}$$

Autrement dit, il est possible d'obtenir un gain positif dans au moins un état du monde, sans mise de fonds initiale ni risque de perte.

Proposition

L'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) dans le modèle binomial à une période est équivalente à la condition :

$$S^d < RS_0 < S^u$$

ou encore, en termes de multiplicateurs :

$$d < R < u.$$

Preuve

Supposons d'abord qu'il existe une AOA. Si $R \leq d$, un investisseur peut emprunter une unité de compte à taux r , acheter une quantité de l'actif risqué, et être sûr de rembourser moins que ce qu'il obtiendra dans l'état bas — ce qui génère un profit certain. Inversement, si $R \geq u$, il peut vendre l'action à découvert, placer le produit au taux sans risque, et rembourser moins que ce qu'il encaisserait — autre profit certain. Ainsi, AOA $\Rightarrow R \notin (d, u)$.

Réciproquement, si $d < R < u$, il n'existe aucune combinaison linéaire (x, Δ) satisfaisant $V_0 = 0$ et $V_1 \geq 0$ avec $\mathbb{P}(V_1 > 0) > 0$, car toute position long/short entraîne une exposition symétrique entre les deux états. Ainsi, l'absence d'arbitrage est équivalente à $d < R < u$.

2.2.3.1 Valeur actualisée du portefeuille et condition d'autofinancement

Pour un portefeuille (x, Δ) , la valeur à la date 1 est donnée par :

$$X_1^{x,\Delta} = \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R.$$

En actualisant à la date 0 :

$$\frac{X_1^{x,\Delta}}{R} = x + \Delta \left(\frac{S_1}{R} - S_0 \right).$$

La stratégie est *autofinancante* lorsque l'évolution de la valeur du portefeuille dépend uniquement de la variation des prix, c'est-à-dire :

$$X_1^{\tilde{x},\Delta} - X_0^{\tilde{x},\Delta} = \Delta(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0).$$

Cette relation garantit qu'aucun flux extérieur (ni apport, ni retrait) ne modifie la valeur du portefeuille au cours du temps.

Définition 3 (Probabilité risque-neutre) On appelle *probabilité risque-neutre* toute mesure de probabilité Q définie sur les deux états $\{w_u, w_d\}$ telle que la valeur actualisée de toute stratégie autofinancante simple soit une martingale, c'est-à-dire :

$$X_0^{\tilde{x},\Delta} = \frac{1}{R} \mathbb{E}_Q[X_1^{\tilde{x},\Delta} / \mathcal{F}_0] \iff x = \frac{1}{R} \mathbb{E}_Q[X_1^{\tilde{x},\Delta}],$$

où $q = Q(w_u)$ et $1 - q = Q(w_d)$.

2.2.3.2 Proposition

Sous la condition d'absence d'arbitrage ($d < R < u$), il existe une unique mesure de probabilité Q telle que le prix initial d'un portefeuille autofinancant (x, Δ) puisse s'écrire comme espérance actualisée :

$$x = \frac{1}{R} \mathbb{E}_Q[X_1^{x,\Delta}],$$

c'est-à-dire une unique probabilité risque-neutre.

Preuve

Pour un portefeuille autofinçant (x, Δ) , on a la valeur au temps 1 :

$$X_1^{x,\Delta} = \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R.$$

Sous la mesure Q , on cherche $q = Q(w_u)$ telle que la valeur actualisée soit une martingale :

$$x = \frac{1}{R} \mathbb{E}_Q[X_1^{x,\Delta}] = \frac{1}{R} (qX_1^u + (1-q)X_1^d),$$

où $X_1^u = X_1^{x,\Delta}(w_u)$ et $X_1^d = X_1^{x,\Delta}(w_d)$.

En remplaçant $X_1^u = \Delta S^u + (x - \Delta S_0)R$ et $X_1^d = \Delta S^d + (x - \Delta S_0)R$, on obtient après simplification :

$$x = \frac{1}{R} \left[q(\Delta S^u + (x - \Delta S_0)R) + (1-q)(\Delta S^d + (x - \Delta S_0)R) \right].$$

Développons et simplifions :

$$x = \frac{1}{R} \left[\Delta(qS^u + (1-q)S^d) + (x - \Delta S_0)R \right] \implies x - (x - \Delta S_0) = \frac{\Delta}{R} (qS^u + (1-q)S^d)$$

$$\Delta S_0 = \frac{\Delta}{R} (qS^u + (1-q)S^d) \implies RS_0 = qS^u + (1-q)S^d.$$

En remplaçant $S^u = S_0u$ et $S^d = S_0d$, on obtient la probabilité risque-neutre :

$$q = \frac{R - d}{u - d}.$$

Sous la condition $d < R < u$, on a $0 < q < 1$, ce qui garantit que Q est une mesure de probabilité valide. L'unicité découle de la relation précédente qui détermine q de manière univoque.

Ainsi, l'absence d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une unique probabilité risque-neutre.

2.2.4 Évaluation d'un produit dérivé C

Soit C un produit dérivé dont la valeur à l'instant futur $t = 1$ dépend de l'état du marché :

$$C_1^u \quad \text{dans l'état haut,} \quad C_1^d \quad \text{dans l'état bas.}$$

Comme nous l'avons démontré précédemment, tout produit dérivé est *répliquable* par une stratégie de portefeuille simple (Δ, x) . Autrement dit, il existe un portefeuille autofinçant dont la valeur à $t = 1$ coïncide avec celle de C dans chaque état :

$$X_1^{\Delta,x} = C_1^u \quad \text{si } w_u, \quad X_1^{\Delta,x} = C_1^d \quad \text{si } w_d.$$

Par suite, la valeur actualisée du produit dérivé constitue une *martingale* sous la probabilité risque-neutre Q . Autrement dit, le prix initial C_0 du produit dérivé s'exprime comme l'espérance actualisée sous Q :

$$C_0 = x = \frac{1}{R} \mathbb{E}_Q[C_1] = \frac{1}{R} (q C_1^u + (1 - q) C_1^d),$$

où $q = Q(w_u)$ et $1 - q = Q(w_d)$.

En utilisant l'expression explicite de la probabilité risque-neutre :

$$q = \frac{R - d}{u - d},$$

On obtient ainsi la formule pratique de valorisation pour tout produit dérivé dans le modèle binomial à une période :

$$C_0 = \frac{1}{R} \left(\frac{R - d}{u - d} C_1^u + \frac{u - R}{u - d} C_1^d \right).$$

Cette formule illustre le principe fondamental de la finance moderne : le prix d'un produit dérivé est égal à la valeur actualisée de ses gains futurs sous la probabilité risque-neutre, reflétant l'absence d'arbitrage sur le marché.

Ce paragraphe nous a permis de mettre en évidence le concept des arbres binomiaux de façon simplifiée en se basant sur un modèle à une période. Notre prochain paragraphe porte sur l'élargissement des résultats que nous venons d'obtenir dans un cas plus général à n périodes.

2.3 Modèle binomial à plusieurs périodes

2.3.1 Modélisation du marché

On considère un horizon discret à n périodes :

$$t = 0, 1, \dots, n.$$

Le marché financier est constitué de deux actifs :

- **Un actif sans risque** (compte ou obligation) rapportant un taux d'intérêt constant r par période, avec comme facteur de capitalisation :

$$R = 1 + r.$$

- **Un actif risqué** (action) dont le prix évolue selon un *arbre binomial recombiné*. À chaque période, le prix de l'action est multiplié soit par un facteur $u > 1$ (hausse), soit par un facteur $d \in (0, 1)$ (baisse), en respectant la condition d'absence d'arbitrage locale :

$$d < R < u.$$

On suppose que :

- la probabilité d'un mouvement de hausse est constante et notée p , c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p, \quad \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n,$$

- les rendements élémentaires $Y_i = \frac{S_i}{S_{i-1}}$ sont indépendants et identiquement distribués.

Ainsi, pour tout chemin $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{u, d\}^n$, la probabilité associée s'écrit :

$$\mathbb{P}(\omega) = p^{N_u(\omega)}(1 - p)^{n - N_u(\omega)},$$

où $N_u(\omega)$ désigne le nombre de mouvements de type « up » dans le chemin ω .

Évolution du prix de l'actif risqué. Si S_0 est le prix initial de l'action, alors pour tout $t \in \{0, 1, \dots, n\}$ et tout chemin $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_t)$, on a :

$$S_t(\omega) = S_0 u^{N_u(\omega)} d^{t - N_u(\omega)}.$$

Autrement dit, après t périodes, le prix dépend uniquement du nombre de hausses observées.

La **filtration naturelle** $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq n}$ est celle engendrée par les observations successives des mouvements de marché :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\omega_1, \dots, \omega_t),$$

et décrit l'ensemble de l'information disponible jusqu'à la date t .

Ci-dessous une illustration d'un arbre binomial à trois périodes.

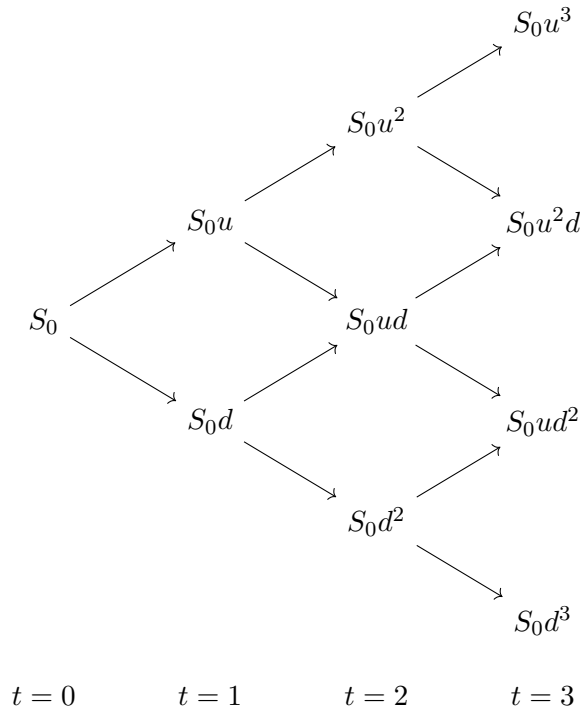


Illustration : arbre binomial recombiné jusqu'à trois périodes.

2.3.2 Stratégie de portefeuille simple

Definition 4 Une *stratégie de portefeuille simple* $X_t^{x,\Delta}$ sur l'horizon $\{0, \dots, n\}$ est la donnée d'un capital initial x et d'un processus discret $(\Delta_t)_{0 \leq t \leq n-1}$ où Δ_t est \mathcal{F}_t -mesurable et représente le nombre d'actions détenues sur la période $[t, t+1[$. On note $X_t^{x,\Delta}$ la valeur du portefeuille au temps t . Le montant investi en actif sans risque au temps t vaut $B_t = X_t^{x,\Delta} - \Delta_t S_t$.

Condition d'autofinancement

La stratégie est dite *autofinancante* si aucun flux de trésorerie extérieur n'intervient après $t = 0$. Mathématiquement, pour tout $t = 0, \dots, n-1$:

$$X_{t+1}^{x,\Delta} = \Delta_t S_{t+1} + B_t R,$$

avec $B_t = X_t^{x,\Delta} - \Delta_t S_t$. En remplaçant, on obtient la forme équivalente :

$$X_{t+1}^{x,\Delta} - R X_t^{x,\Delta} = \Delta_t (S_{t+1} - R S_t).$$

En divisant les deux membres par R^{t+1} , on obtient l'expression en *valeur actualisée* :

$$\frac{X_{t+1}^{x,\Delta}}{R^{t+1}} - \frac{X_t^{x,\Delta}}{R^t} = \Delta_t \left(\frac{S_{t+1}}{R^{t+1}} - \frac{S_t}{R^t} \right).$$

$$\tilde{X}_{t+1}^{x,\Delta} - \tilde{X}_t^{x,\Delta} = \Delta_t (\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t).$$

Cette forme met en évidence que, sous la condition d'autofinancement, le portefeuille actualisé évolue uniquement en fonction des variations du prix actualisé de l'actif risqué.

En sommant cette relation de $t = 0$ à $t = T-1$, on obtient par récurrence :

$$\tilde{X}_T^{x,\Delta} = \tilde{X}_0^{x,\Delta} + \sum_{t=0}^{T-1} \Delta_t (\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t).$$

Autrement dit :

$$\boxed{\tilde{X}_{t+1}^{x,\Delta} = \tilde{X}_0^{x,\Delta} + \sum_{i=0}^t \Delta_i (\tilde{S}_{i+1} - \tilde{S}_i).}$$

2.3.3 Existence et unicité de Q

Dans le modèle binomial multipériodes (arbre recombiné), l'absence d'arbitrage globale est assurée si et seulement si la condition locale

$$d < R < u$$

est satisfaite (la même condition qu'en une période appliquée à chaque pas). Intuitivement, si $R \leq d$ ou $R \geq u$ on peut construire un arbitrage local à la première période qui se propage.

Proposition 1 *Sous la condition $d < R < u$, il existe une unique mesure de probabilité produit Q sur l'espace des trajectoires $\{u, d\}^n$ sous laquelle les incréments sont i.i.d. avec*

$$q = Q(\omega = \omega_u) = \frac{R - d}{u - d}, \quad 1 - q = Q(\omega = \omega_d) = \frac{u - R}{u - d}.$$

Sous Q le processus actualisé $\tilde{S}_t := S_t/R^t$ est une martingale.

PROOF On cherche $q \in (0, 1)$ tel que l'égalité de martingale à un pas tienne :

$$S_t = \frac{1}{R} \mathbb{E}_Q[S_{t+1} \mid \mathcal{F}_t].$$

Comme $S_{t+1} = S_t u$ ou $S_t d$, cette condition donne (pour tout nœud)

$$R S_t = q S_t u + (1 - q) S_t d \implies R = q u + (1 - q) d,$$

d'où

$$q = \frac{R - d}{u - d}.$$

Sous $d < R < u$ on a $0 < q < 1$, et q est indépendant du nœud (homogénéité du modèle), donc on définit Q comme la mesure produit i.i.d. de paramètre q . Par construction, pour tout t

$$\mathbb{E}_Q[\tilde{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t,$$

donc (\tilde{S}_t) est une martingale sous Q . Unicité : toute probabilité Q' rendant \tilde{S} martingale doit satisfaire la même équation locale, donc avoir la même paramétrisation q et coïncider avec Q sur les générateurs de la filtration.

Proposition 2 *Soit $(x, \Delta_t)_{0 \leq t \leq n-1}$ une stratégie autofinancante et $X_t^{x, \Delta}$ sa valeur. Alors le processus actualisé $\tilde{X}_t^{x, \Delta} := X_t^{x, \Delta}/R^t$ est une martingale sous Q .*

PROOF Écrivons la relation d'autofinancement :

$$X_{t+1}^{x, \Delta} = \Delta_t S_{t+1} + (X_t^{x, \Delta} - \Delta_t S_t) R.$$

Divisons par R^{t+1} :

$$\tilde{X}_{t+1}^{x, \Delta} = \Delta_t \frac{S_{t+1}}{R^{t+1}} + \frac{X_t^{x, \Delta} - \Delta_t S_t}{R^t}.$$

En prenant l'espérance conditionnelle sous Q donnée \mathcal{F}_t et utilisant la martingale \tilde{S} , on obtient

$$\mathbb{E}_Q[\tilde{X}_{t+1}^{x, \Delta} \mid \mathcal{F}_t] = \Delta_t \frac{1}{R} \mathbb{E}_Q\left[\frac{S_{t+1}}{R^t} \mid \mathcal{F}_t\right] + \frac{X_t^{x, \Delta} - \Delta_t S_t}{R^t} = \Delta_t \frac{S_t}{R^t} + \frac{X_t^{x, \Delta} - \Delta_t S_t}{R^t} = \frac{X_t^{x, \Delta}}{R^t} = \tilde{X}_t^{x, \Delta}.$$

D'où la propriété annoncée.

2.3.4 Complétude du marché et évaluation d'un produit dérivé

Theorem 2 *Le modèle binomial recombiné à n périodes est complet : pour tout produit dérivé contingent C payable à la date n (défini par ses valeurs $C(\omega)$ pour chaque trajectoire $\omega \in \{u, d\}^n$), il existe une stratégie autofinancante $(x, \Delta_t)_{0 \leq t \leq n-1}$ telle que la valeur finale du portefeuille réplique exactement le payoff :*

$$X_n^{\Delta, x}(\omega) = C(\omega), \quad \forall \omega \in \{u, d\}^n.$$

PROOF La démonstration s'effectue par récurrence sur le nombre de périodes n .

Initialisation : Pour $n = 1$, le résultat a été montré précédemment : il existe un unique couple (x_0, Δ_0) satisfaisant le système

$$\begin{cases} x_0(1+r) + \Delta_0 S_0(u-1-r) = C_u, \\ x_0(1+r) + \Delta_0 S_0(d-1-r) = C_d, \end{cases}$$

dont la solution fournit une stratégie répliquante du payoff à une période.

Hérédité : Supposons le résultat vrai pour $n-1$ périodes. Considérons maintenant un produit dérivé C à n périodes, et notons C_t sa valeur à la date t dans chaque nœud de l'arbre. À la dernière étape ($t = n-1$), pour chaque nœud, la valeur de l'actif risqué peut évoluer soit vers u soit vers d . On peut alors résoudre localement le même système linéaire que pour le cas à une période, ce qui donne une stratégie Δ_{n-1} et une valeur de portefeuille X_{n-1} répliquant C à l'échéance. En remontant ainsi l'arbre période par période, on construit par récurrence une stratégie autofinancante qui réplique C exactement dans chaque scénario.

Ainsi, par le principe de récurrence, le modèle binomial est complet pour tout n .

Évaluation d'un produit dérivé C

Nous venons d'établir que le modèle binomial n -périodes est **complet**, c'est-à-dire que tout produit dérivé peut être parfaitement répliqué par une stratégie de portefeuille dynamique. De plus, dans les paragraphes précédents, nous avons montré que toute stratégie de portefeuille autofinancante est une **martingale sous la mesure risque-neutre Q** .

Ainsi, la valeur d'un produit dérivé C à la date t est donnée par l'espérance actualisée de son payoff sous la mesure Q :

$$V_t = \mathbb{E}^Q \left[\frac{C}{(1+r)^{n-t}} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

En particulier, à la date initiale $t = 0$, on obtient la formule fondamentale de valorisation :

$$V_0 = \mathbb{E}^Q \left[\frac{C}{(1+r)^n} \right].$$

Cette expression signifie que, dans un marché complet et sans arbitrage, le prix d'un produit dérivé correspond à l'espérance de sa valeur future, actualisée au taux sans risque, sous la probabilité risque-neutre Q . Autrement dit, le processus $\{V_t/(1+r)^t\}_{t=0, \dots, n}$ constitue une martingale sous Q .

Le résultat ci-dessus traduit le principe fondamental de la valorisation par absence d'arbitrage : dans un marché complet, le prix d'un actif dérivé ne dépend pas des préférences individuelles des investisseurs mais uniquement de la dynamique du sous-jacent et du taux sans risque. Toute différence de prix serait immédiatement arbitrée, garantissant ainsi l'unicité du prix théorique V_t .

On pose f la fonction payoff de notre produit dérivé C :

$$C = f(S_n).$$

L'évaluation du produit dérivé au temps t s'écrit alors, sous la mesure risque-neutre Q , par l'espérance actualisée conditionnelle :

$$V_t = \mathbb{E}^Q \left[\frac{f(S_n)}{(1+r)^{n-t}} \mid \mathcal{F}_t \right],$$

et en particulier, à l'instant initial $t = 0$:

$$V_0 = \mathbb{E}^Q \left[\frac{f(S_n)}{(1+r)^n} \right].$$

Dans le modèle binomial recombiné, on a la représentation explicite du prix terminal :

$$S_n = S_0 u^k d^{n-k} \quad \text{avec probabilité} \quad \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n,$$

où q est la probabilité risque-neutre de hausse. On obtient donc la formule discrète :

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} f(S_0 u^k d^{n-k}).$$

De façon plus générale, la valeur conditionnelle au temps t (dans un nœud caractérisé par $N_u(\omega) = j$ hausses sur t pas) s'écrit

$$V_t(\omega) = \frac{1}{(1+r)^{n-t}} \sum_{k=0}^{n-t} \binom{n-t}{k} q^k (1-q)^{n-t-k} f(S_t(\omega) u^k d^{n-t-k}).$$

Réplication et calcul du Δ La complétude assure l'existence d'une stratégie répliquante (x, Δ) . Dans la pratique, la stratégie est construite par induction arrière : si V_{t+1}^u et V_{t+1}^d désignent les valeurs du produit dans les deux nœuds fils d'un nœud courant, la position en actif risqué au temps t est donnée par la formule du *Delta* :

$$\Delta_t = \frac{V_{t+1}^u - V_{t+1}^d}{S_t(u - d)}.$$

La composante en actif sans risque B_t s'obtient ensuite via l'équation d'autofinancement :

$$B_t = \frac{V_{t+1}^u - \Delta_t S_{t+1}^u}{1+r} = \frac{V_{t+1}^d - \Delta_t S_{t+1}^d}{1+r}.$$

Cette construction donne le portefeuille répliquant et établit de façon constructive l'unicité du prix V_t .

2.4 Paramétrisation du modèle

Dans les sections précédentes, nous avons construit le modèle binomial et expliqué la stratégie de valorisation d'une option à l'aide de la probabilité neutre au risque. Les paramètres fondamentaux du modèle binomial sont u , d et q , qui doivent satisfaire certaines conditions asymptotiques afin que le modèle converge vers un modèle continu.

Cette section est consacrée à la détermination de ces paramètres de manière à ce que le modèle binomial reproduise correctement les propriétés statistiques du modèle continu de Black-Scholes, dans lequel le prix de l'actif sous-jacent suit une distribution log-normale. Bien que le modèle binomial puisse être adapté à d'autres distributions, nous nous limitons ici au cas de Black-Scholes.

Sous la mesure neutre au risque, l'évolution du prix de l'actif risqué S_t est donnée par l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t, \quad (2.1)$$

où W_t est un mouvement brownien sous la mesure neutre au risque, et r et σ sont des constantes représentant respectivement le taux d'intérêt sans risque et la volatilité.

Le modèle de Black-Scholes est caractérisé par sa moyenne et sa variance. Par conséquent, l'objectif est de choisir les paramètres du modèle binomial de manière à reproduire ces deux moments. Sur un petit intervalle de temps Δt , les moments du modèle de Black-Scholes sont :

$$\mathbb{E}(S_{\Delta t}) = e^{r\Delta t} S_0, \quad \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2) = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} S_0^2. \quad (2.2)$$

L'égalisation de ces deux moments entre les deux modèles conduit aux conditions suivantes :

$$q u S_0 + (1 - q) d S_0 = e^{r\Delta t} S_0, \quad q u^2 S_0^2 + (1 - q) d^2 S_0^2 = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} S_0^2. \quad (2.3)$$

La première équation est exactement la condition de neutralité au risque, tandis que la seconde impose la cohérence de la variance. Le système est donc sous-déterminé, et une condition supplémentaire est nécessaire pour obtenir une solution unique. Plusieurs choix sont possibles pour cette contrainte additionnelle. Nous présentons ci-dessous le cas le plus couramment utilisé : le modèle de Cox–Ross–Rubinstein (CRR).

Le modèle de Cox–Ross–Rubinstein (CRR)

En imposant la contrainte $ud = 1$ et en résolvant les équations précédentes, on obtient la solution suivante :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\Delta t}. \quad (2.4)$$

Ces relations, introduites par Cox, Ross et Rubinstein [1], définissent un arbre binomial dont la distribution terminale converge vers la distribution log-normale du modèle de Black-Scholes lorsque le nombre de périodes N tend vers l'infini. Autrement dit, le modèle CRR est *asymptotiquement équivalent* au modèle de Black-Scholes. Nous montrerons ce résultat dans le chapitre portant sur l'étude de convergence.

Il convient de noter que, pour certaines combinaisons de paramètres (r et σ en particulier), la probabilité q peut devenir négative. Cela ne remet pas nécessairement en cause la validité théorique du modèle, mais peut engendrer des problèmes de stabilité numérique dans la valorisation des options.

Chapitre 3

Le Modèle Trinomial

3.1 Introduction

Le modèle trinomial est une extension naturelle du modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979). Alors que le modèle binomial suppose que le prix de l'actif sous-jacent peut évoluer à chaque pas de temps selon deux directions possibles (*hausse* ou *baisse*), le modèle trinomial introduit une troisième possibilité : le prix peut également *rester inchangé*.

Ce raffinement rend le modèle plus flexible et plus précis, notamment pour l'approximation de modèles continus comme celui de BLACK-SCHOLES.

3.2 Structure du modèle

Dans un modèle trinomial à une période, le prix de l'actif sous-jacent S peut évoluer de la manière suivante :

$$S_u = S_0 u, \quad S_m = S_0, \quad S_d = S_0 d,$$

où :

- $u > 1$ est le facteur de hausse,
- $d < 1$ est le facteur de baisse,
- et $m = 1$ correspond au cas où le prix reste inchangé.

À chaque pas de temps, trois issues sont donc possibles :

$$S_{t+\Delta t} \in \{S_t u, S_t, S_t d\}.$$

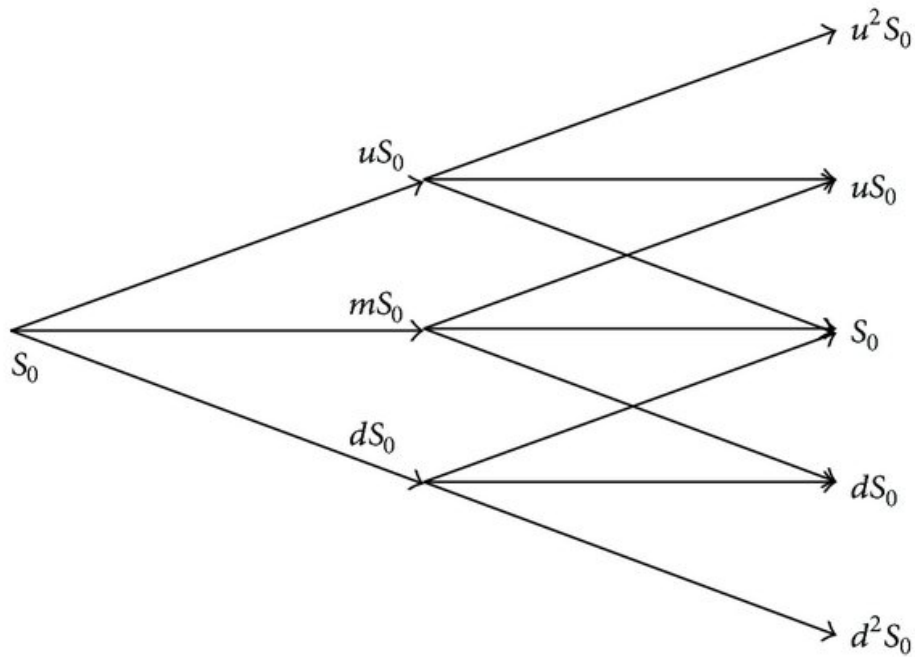


FIGURE 3.1 : Exemple d'arbre trinomial à 2 périodes

3.3 Probabilités neutres au risque

Dans un modèle trinomial, à chaque pas de temps Δt , le sous-jacent peut évoluer selon trois scénarios : hausse ($u > 1$), stagnation ($m = 1$) ou baisse ($d < 1$). On note p_u, p_m, p_d les probabilités neutres au risque associées. Ces probabilités doivent satisfaire les conditions classiques :

$$p_u + p_m + p_d = 1, \quad p_u, p_m, p_d \geq 0,$$

et la condition d'absence d'arbitrage (martingale actualisée) :

$$S_0 e^{r\Delta t} = S_0 (p_u u + p_m m + p_d d),$$

où r est le taux sans risque.

Paramétrisation de Boyle (1988)

Pour reproduire la variance du processus log-normal et simplifier les calculs, Boyle propose la paramétrisation suivante :

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \quad m = 1, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}.$$

Démonstration

On souhaite déterminer p_u, p_m, p_d de manière à ce que :

1. la probabilité totale soit $p_u + p_m + p_d = 1$,
2. l'espérance sous la mesure neutre au risque soit la martingale actualisée :

$$p_u u + p_m m + p_d d = e^{r\Delta t},$$

3. la variance du logarithme du prix corresponde à $\sigma^2 \Delta t$:

$$p_u (\ln u)^2 + p_m (\ln m)^2 + p_d (\ln d)^2 - (p_u \ln u + p_m \ln m + p_d \ln d)^2 = \sigma^2 \Delta t.$$

Étape 1 : simplification de la variance Comme $\ln m = 0$ et $\ln d = -\ln u$, la variance se simplifie :

$$p_u (\ln u)^2 + p_d (\ln d)^2 = (\ln u)^2 (p_u + p_d) = (\ln u)^2 (1 - p_m).$$

En imposant $(\ln u)^2 (1 - p_m) = \sigma^2 \Delta t$ et $\ln u = \sigma \sqrt{2\Delta t}$, on obtient :

$$(\sigma \sqrt{2\Delta t})^2 (1 - p_m) = 2\sigma^2 \Delta t (1 - p_m) = \sigma^2 \Delta t \quad \Rightarrow \quad 1 - p_m = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{p_m = \frac{1}{2}}.$$

Étape 2 : résolution pour p_u À partir de la condition de martingale actualisée :

$$p_u u + p_m m + p_d d = p_u u + \frac{1}{2} \cdot 1 + p_d d = e^{r\Delta t}.$$

On sait que $p_d = 1 - p_u - p_m = \frac{1}{2} - p_u$. On remplace :

$$p_u u + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - p_u\right) d = e^{r\Delta t} \quad \Rightarrow \quad p_u (u - d) + \frac{1 + d}{2} = e^{r\Delta t}.$$

D'où :

$$\boxed{p_u = \frac{e^{r\Delta t} - \frac{1+d}{2}}{u - d}}.$$

Étape 3 : détermination de p_d Enfin :

$$p_d = 1 - p_u - p_m = \frac{1}{2} - p_u.$$

On obtient ainsi les probabilités neutres au risque pour l'arbre trinomial :

$$p_u = \frac{e^{r\Delta t} - \frac{1+d}{2}}{u - d}, p_d = \frac{1}{2} - p_u, p_m = \frac{1}{2}.$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{e^{r\Delta t} - \frac{1+e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}}{2}}{e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}}, \\ p_d &= \frac{1}{2} - p_u = \frac{1}{2} - \frac{e^{r\Delta t} - \frac{1+e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}}{2}}{e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}}, \\ p_m &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cette paramétrisation garantit que la distribution du sous-jacent reproduit correctement la moyenne et la variance d'un processus log-normal sur un petit intervalle Δt , assurant ainsi la cohérence avec le modèle de Black-Scholes.

3.4 Complétude du marché dans le modèle trinomial

Dans le modèle trinomial à un actif risqué et un actif sans risque, le sous-jacent peut évoluer à chaque période selon trois mouvements possibles : *up* (u), *middle* (m) et *down* (d). Soit un produit dérivé C payable à l'échéance d'une période, avec valeurs C_u, C_m, C_d dans les trois scénarios respectifs.

Réplication : pour construire un portefeuille répliquant (Δ, B) , on doit résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} \Delta S_0 u + BR = C_u, \\ \Delta S_0 m + BR = C_m, \\ \Delta S_0 d + BR = C_d, \end{cases}$$

où S_0 est le prix initial et R le facteur sans risque.

Observation : ce système comporte **3 équations avec 2 inconnues** (Δ, B) . En général, ce système est **surdéterminé** et n'admet pas de solution exacte pour tous les triplets (C_u, C_m, C_d) . Autrement dit, il n'existe pas toujours de portefeuille répliquant exactement le produit dérivé dans tous les scénarios.

Conclusion : le marché trinomial standard à un actif risqué est donc **incomplet**. On ne peut pas garantir l'existence d'une stratégie répliquante unique pour chaque produit dérivé contingent.

Usage pratique : Même si la complétude est perdue, le modèle trinomial reste très utile pour l'évaluation des options. En choisissant des probabilités risque-neutres (q_u, q_m, q_d) telles que la valeur actualisée du sous-jacent soit une martingale :

$$S_0 = \frac{1}{R}(q_u S_0 u + q_m S_0 m + q_d S_0 d), \quad q_u + q_m + q_d = 1,$$

on peut calculer des prix *arbitrage-free*. Cette approche permet notamment une meilleure approximation des modèles continus (Black-Scholes) et une convergence numérique plus précise.

Remarque : Si l'on dispose de suffisamment d'actifs risqués corrélés pour "saturer" l'espace des mouvements (au moins 3 actifs pour 3 scénarios par période), le marché trinomial peut redevenir complet.

3.5 Valorisation d'une option

La valeur d'une option européenne à la date initiale s'obtient comme l'espérance, sous la mesure neutre au risque, de la valeur actualisée du payoff final. Pour un modèle à une période de longueur Δt , on a :

$$C_0 = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^*[C_1].$$

Dans un modèle trinomial, le sous-jacent peut évoluer selon trois états :

$$S_1 \in \{S_u = S_0 u, S_m = S_0, S_d = S_0 d\},$$

avec $u > 1 > d$.

Ainsi, la valeur de l'option à la première période s'écrit :

$$C_1 = \begin{cases} f(S_u), & \text{avec probabilité } p_u, \\ f(S_m), & \text{avec probabilité } p_m, \\ f(S_d), & \text{avec probabilité } p_d, \end{cases}$$

et la valeur actuelle :

$$C_0 = e^{-r\Delta t} (p_u f(S_u) + p_m f(S_m) + p_d f(S_d)).$$

Extension à plusieurs périodes

Pour un modèle à N périodes, on définit pour chaque nœud (i, j) la valeur du sous-jacent :

$$S_{i,j} = S_0 u^j d^{i-j}, \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, i,$$

et le payoff terminal :

$$C_N(j) = f(S_{N,j}).$$

On procède alors par récurrence inverse (*backward induction*) :

$$C_i(j) = e^{-r\Delta t} (p_u C_{i+1}(j+1) + p_m C_{i+1}(j) + p_d C_{i+1}(j-1)),$$

pour $i = N-1, N-2, \dots, 0$.

3.6 Avantages du modèle trinomial

Comparé au modèle binomial, le modèle trinomial présente plusieurs avantages :

- meilleure convergence vers le modèle de BLACK-SCHOLES,
- plus grande stabilité numérique,
- possibilité de traiter plus facilement les options américaines (grâce à la troisième branche),

Chapitre 4

Étude de convergence

4.1 Formule de Black–Scholes pour une option européenne

On note $T > 0$ l'échéance et $\Delta t = T/n$ le pas de temps. Sous les hypothèses classiques du modèle de Black–Scholes (sous la mesure neutre au risque Q), le prix du sous-jacent suit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t, \quad S_0 > 0,$$

avec r le taux sans risque et $\sigma > 0$ la volatilité.

Pour une option européenne d'achat (call) de strike K , la formule fermée de Black–Scholes s'écrit :

$$C_{BS}(S_0, t) = S_0 e^{-q_f(T-t)} \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

où

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - q_f \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

et Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale standard. (Si l'actif ne verse pas de dividendes, on prend $q_f = 0$.)

La formule pour un put européen s'obtient par parité put-call :

$$P_{BS}(S_0, t) = C_{BS}(S_0, t) - S_0 e^{-q_f(T-t)} + K e^{-r(T-t)}.$$

4.2 Convergence du modèle CRR vers Black–Scholes

4.2.1 Énoncé

Considérons le modèle binomial de Cox–Ross–Rubinstein (CRR) construit sur n périodes de longueur $\Delta t = T/n$ avec :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

et la probabilité risque-neutre notée q :

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Soit $V_0^{(n)}$ le prix d'une option européenne (payoff $f(S_T)$) évalué par le modèle CRR à n pas. Alors, sous des hypothèses standards sur f (par exemple f bornée Lipschitzienne ou de croissance au plus linéaire), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_0^{(n)} = V_{BS}(S_0, 0),$$

où V_{BS} est le prix donné par la formule de Black–Scholes.

Preuve

Nous rappelons que, dans la paramétrisation de Cox–Ross–Rubinstein (CRR),

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d},$$

avec $\Delta t = T/n$. Notons $N_u \sim \text{Bin}(n, q)$ le nombre de hausses sur n pas sous la probabilité risque-neutre Q . On a

$$S_T^{(n)} = S_0 u^{N_u} d^{n-N_u}.$$

L'objectif est de montrer que, pour un payoff européen $f(S_T)$ satisfaisant une condition de régularité (par exemple f Lipschitz ou de croissance au plus linéaire), la valeur binomiale

$$V_0^{(n)} = e^{-rT} \mathbb{E}_Q[f(S_T^{(n)})]$$

converge vers la valeur donnée par le modèle de Black–Scholes $V_{BS}(S_0, 0)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Réécriture en somme d'incrémentes i.i.d. Posons

$$X_i = \begin{cases} \ln u & \text{avec probabilité } q, \\ \ln d & \text{avec probabilité } 1 - q, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Alors $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ sont i.i.d. sous Q et

$$\ln S_T^{(n)} = \ln S_0 + \sum_{i=1}^n X_i.$$

On note

$$\mu_{\Delta t} := \mathbb{E}_Q[X_1] = q \ln u + (1 - q) \ln d, \quad \sigma_{\Delta t}^2 := \text{Var}_Q(X_1).$$

Nous aurons besoin des quantités $n\mu_{\Delta t}$ et $n\sigma_{\Delta t}^2$ et de leur comportement lorsque $\Delta t \rightarrow 0$.

Calcul des moments sur un pas et développement asymptotique Utilisons $\ln u = \sigma\sqrt{\Delta t}$ et $\ln d = -\sigma\sqrt{\Delta t}$. On obtient

$$\mu_{\Delta t} = (2q - 1)\sigma\sqrt{\Delta t}.$$

De plus

$$\sigma_{\Delta t}^2 = q(\ln u)^2 + (1 - q)(\ln d)^2 - \mu_{\Delta t}^2 = (\ln u)^2(q + (1 - q)) - \mu_{\Delta t}^2 = (\sigma\sqrt{\Delta t})^2 - \mu_{\Delta t}^2 = \sigma^2\Delta t - \mu_{\Delta t}^2.$$

Il reste donc à étudier l'asymptotique de $2q - 1$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$. Rappelons la définition exacte de q :

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}.$$

En développant en séries de Taylor pour Δt petit (avec $a := \sigma\sqrt{\Delta t} \rightarrow 0$), on a

$$e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t + O(\Delta t^2), \quad e^{\pm a} = 1 \pm a + \frac{a^2}{2} \pm \frac{a^3}{6} + O(a^4).$$

Calcul direct (développement formel) donne l'expansion

$$q = \frac{1}{2} + \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t}).$$

(La manipulation algébrique consistant à remplacer $e^{r\Delta t}$ et $e^{\pm a}$ par leurs séries et à simplifier les termes d'ordre dominants fournit cette expression.) Par conséquent,

$$2q - 1 = \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t}),$$

et donc

$$\mu_{\Delta t} = (2q - 1)\sigma\sqrt{\Delta t} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + o(\Delta t).$$

De même, en substituant dans $\sigma_{\Delta t}^2 = \sigma^2\Delta t - \mu_{\Delta t}^2$, on obtient

$$\sigma_{\Delta t}^2 = \sigma^2\Delta t + o(\Delta t).$$

En multipliant par $n = T/\Delta t$, on en déduit les limites des moments du logarithme terminal :

$$n\mu_{\Delta t} \longrightarrow (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \quad n\sigma_{\Delta t}^2 \longrightarrow \sigma^2T, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Application du Théorème central limite (Lindeberg) Les X_i étant i.i.d. de variance finie, on peut appliquer le théorème central limite (version de Lindeberg). Posons

$$\bar{\mu}_n := n\mu_{\Delta t}, \quad \bar{\sigma}_n^2 := n\sigma_{\Delta t}^2.$$

Alors la variable normalisée

$$\frac{\ln S_T^{(n)} - (\ln S_0 + \bar{\mu}_n)}{\bar{\sigma}_n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_{\Delta t})}{\sqrt{n}\sigma_{\Delta t}}$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Compte tenu des limites précédentes de $\bar{\mu}_n$ et $\bar{\sigma}_n^2$, la distribution limite de $\ln S_T^{(n)}$ est normale de moyenne $\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ et de variance σ^2T . Par le théorème de la fonction continue, on obtient que $S_T^{(n)} = \exp(\ln S_T^{(n)})$ converge en loi vers la variable log-normale S_T du modèle Black-Scholes sous la mesure Q .

Passage de la convergence en loi à la convergence des espérances actualisées Nous souhaitons maintenant passer de la convergence en loi de $S_T^{(n)}$ à la convergence des attentes $\mathbb{E}_Q[f(S_T^{(n)})]$ pour des fonctions f d'intérêt (par exemple $f(x) = \max(x - K, 0)$).

- Si f est continue et bornée, la convergence en loi implique immédiatement la convergence des attentes $\mathbb{E}[f(S_T^{(n)})] \rightarrow \mathbb{E}[f(S_T)]$ (théorème de convergence dominée ou propriété standard pour la convergence en loi).
- Pour les payoffs usuels en finance (call, put, fonctions de croissance au plus linéaire), f n'est pas bornée mais satisfait une croissance au plus linéaire : il existe $A, B \geq 0$ tels que $|f(x)| \leq Ax + B$ pour tout $x \geq 0$. Dans ce cas on utilise l'uniforme intégrabilité pour échanger limite en loi et espérance.

Dans le modèle CRR, sous la probabilité risque-neutre Q le processus actualisé $\tilde{S}_t := S_t/R^t$ (avec $R = e^{r\Delta t}$ ou $1 + r$ selon la convention de discretisation) est une martingale : en particulier, pour tout n ,

$$\mathbb{E}_Q[S_T^{(n)}] = S_0 e^{rT}.$$

Donc la famille $\{S_T^{(n)}\}_{n \geq 1}$ possède une uniformité des premières espérances (borne uniforme sur la première moment). Pour des variables non négatives, la borne uniforme de la première moment entraîne l'uniforme intégrabilité : en effet, pour $M > 0$,

$$\mathbb{E}[S_T^{(n)} \mathbf{1}_{\{S_T^{(n)} > M\}}] \leq \frac{\mathbb{E}[S_T^{(n)}]}{M} \leq \frac{S_0 e^{rT}}{M},$$

ce qui tend vers 0 lorsque $M \rightarrow \infty$ uniformément en n . Ainsi $\{S_T^{(n)}\}$ est uniformément intégrable. Par conséquent, si f vérifie $|f(x)| \leq Ax + B$, on a

$$|\mathbb{E}[f(S_T^{(n)})] - \mathbb{E}[f(S_T)]| \leq A \mathbb{E}[|S_T^{(n)} - S_T|] + B |\mathbb{P}\text{-term}|,$$

et l'uniforme intégrabilité combinée à la convergence en loi assure que $\mathbb{E}[f(S_T^{(n)})] \rightarrow \mathbb{E}[f(S_T)]$. En particulier, pour un call européen $f(x) = \max(x - K, 0)$ (croissance linéaire), on obtient bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_Q[f(S_T^{(n)})] = \mathbb{E}_Q[f(S_T)].$$

En actualisant, la convergence des espérances donne la convergence des prix :

$$V_0^{(n)} = e^{-rT} \mathbb{E}_Q[f(S_T^{(n)})] \longrightarrow e^{-rT} \mathbb{E}_Q[f(S_T)] = V_{BS}(S_0, 0),$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Cela établit la convergence du prix CRR vers la formule de Black-Scholes.

4.2.2 Vitesse de convergence (borne via Berry-Esseen)

Pour quantifier la vitesse de convergence, on utilise le théorème de Berry-Esseen, qui fournit une borne uniforme de l'écart entre la loi de la somme normalisée et la loi normale. Notons F_n la fonction

de répartition standardisée de $\ln S_T^{(n)}$ et Φ celle de la normale ; le théorème de Berry–Esseen assure qu’il existe une constante C telle que

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C \rho}{\sqrt{n}},$$

où ρ est la troisième moment normalisé (dépendant de σ, r mais borné pour un pas Δt fixé).

Si f est Lipschitz de constante L , une application standard (intégration par parties des différences de distribution ou inégalité de Kantorovich–Rubinstein) conduit à :

$$|\mathbb{E}[f(S_T^{(n)})] - \mathbb{E}[f(S_T)]| \leq \frac{C'}{\sqrt{n}},$$

pour une constante C' dépendant de L, σ, r et T . Par conséquent, la vitesse de convergence du prix binomial (CRR) vers le prix Black–Scholes est en général de l’ordre

$$V_0^{(n)} - V_{BS} = O(n^{-1/2}).$$

Remarques sur l’amélioration du taux :

- Pour des payoffs *lisses* (fonctions suffisamment différentiables), il est possible d’obtenir des ordres de convergence plus rapides (par exemple $O(n^{-1})$) en effectuant des corrections d’approximation (continuity correction, ajustement d’ordre supérieur des moments) ; plusieurs travaux montrent que des corrections appropriées réduisent l’erreur d’une puissance $1/n$.
- Pour les payoffs avec des discontinuités de dérivées (comme le call en K), le taux $O(n^{-1/2})$ est la borne générique donnée par Berry–Esseen.

4.3 Convergence du modèle trinomial

Contexte

On considère une option européenne sur un actif dont le prix suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0,$$

où r est le taux sans risque, σ la volatilité, et W_t un mouvement brownien standard. L’objectif est de montrer que le prix de l’option obtenu par un arbre trinomial converge vers le prix de Black–Scholes lorsque le nombre de pas $N \rightarrow \infty$.

Construction de l’arbre trinomial

On divise la maturité T en N pas de temps $\Delta t = T/N$. À chaque pas, le prix de l’actif évolue selon :

$$S_{i+1} = \begin{cases} S_i u, & \text{avec probabilité } p_u, \\ S_i, & \text{avec probabilité } p_m, \\ S_i d, & \text{avec probabilité } p_d, \end{cases}$$

avec

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \quad m = 1,$$

et les probabilités p_u, p_m, p_d choisies pour respecter la moyenne et la variance du mouvement brownien géométrique :

$$\mathbb{E}[\Delta S_i/S_i] = r\Delta t + o(\Delta t), \quad \text{Var}[\Delta S_i/S_i] = \sigma^2\Delta t + o(\Delta t).$$

Convergence des incréments logarithmiques

On définit les incréments logarithmiques :

$$X_i = \ln(S_{i+1}/S_i) \in \{-\sigma\sqrt{2\Delta t}, 0, \sigma\sqrt{2\Delta t}\}.$$

Alors :

$$\mathbb{E}[X_i] = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + O(\Delta t^2), \quad \text{Var}[X_i] = \sigma^2\Delta t + O(\Delta t^2).$$

Théorème central limite

Les X_i sont asymptotiquement indépendants et identiquement distribués à l'ordre Δt . Par le théorème central limite classique, on a :

$$\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mathbb{E}[X_i]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \text{Var}[X_i]}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Ainsi :

$$\sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T),$$

c'est-à-dire que le logarithme du prix terminal de l'arbre converge en distribution vers celui du GBM.

Majoration de l'erreur sur le payoff

Pour une fonction de payoff Lipschitz (ici $f(S_T) = (S_T - K)^+$) :

$$|f(S_T^{(N)}) - f(S_T)| \leq |S_T^{(N)} - S_T|.$$

On peut montrer (par la convergence faible et les moments bornés) qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de N telle que :

$$\mathbb{E}[|S_T^{(N)} - S_T|] \leq C\Delta t = C\frac{T}{N}.$$

Donc l'erreur moyenne sur le payoff est bornée et tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$.

Application du Théorème de convergence dominée

Comme $f(S_T) = (S_T - K)^+$ est positive et intégrable sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , on peut appliquer le Théorème de convergence dominée :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T^{(N)})] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)].$$

Ainsi, le prix actualisé de l'option :

$$C_0^{(N)} = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T^{(N)} - K)^+] \longrightarrow e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+] = C_{\text{BS}}.$$

Conclusion et ordre de convergence

- L'arbre trinomial respecte les moments du GBM jusqu'à l'ordre Δt .
- La loi terminale converge vers la loi log-normale de Black-Scholes.
- Par convergence dominée, le prix de l'option converge vers le prix Black-Scholes.
- La majoration $\mathbb{E}[|S_T^{(N)} - S_T|] \leq C/N$ montre que l'erreur est d'ordre $O(1/N)$, plus rapide que le binomial ($O(1/\sqrt{N})$).

Remarque : Ce résultat justifie l'utilisation pratique du modèle trinomial pour un pricing précis avec un nombre de pas raisonnable.

Chapitre 5

Application : valorisation des options sur spread

5.1 Problème du raffineur de pétrole

Le raffineur de pétrole est confronté à un **risque de marge** lié à la fluctuation des prix de deux marchés distincts : le marché du **pétrole brut** (matière première) et celui des **produits raffinés** (essence, diesel, etc.). Sa marge opérationnelle, appelée *crack spread*, est donnée par :

$$\Pi_t = P_t^{(r)} \times 42 - P_t^{(c)},$$

où $P_t^{(r)}$ désigne le prix du produit raffiné par gallon, $P_t^{(c)}$ le prix du baril de brut, et le facteur 42 convertit les gallons en barils.

Ainsi, une variation défavorable du prix du brut ou du prix raffiné peut éroder la marge du raffineur. La problématique consiste donc à se prémunir contre cette incertitude de marge, tout en préservant une exposition efficace à la rentabilité du raffinage.

5.2 Stratégies de couverture

Plusieurs instruments financiers permettent de se couvrir contre ce risque de marge :

- **Contrats à terme (futures)** sur le brut et sur le produit raffiné : permettent de fixer à l'avance les prix d'achat et de vente, mais impliquent une couverture linéaire et souvent rigide.
- **Portefeuille d'options** : combinaison d'options distinctes sur chaque actif sous-jacent, offrant une protection asymétrique et flexible.
- **Option sur le spread** : instrument dérivé dont le sous-jacent est la différence entre les deux prix, assurant une couverture directe de la marge.

Nous allons étudier en détail les deux dernières approches dans ce chapitre.

5.2.1 Couverture par portefeuille d'options

Une stratégie classique consiste à constituer un portefeuille composé :

Put sur le produit raffiné et Call sur le pétrole brut.

Ainsi, le raffineur est protégé :

- contre la baisse du prix du produit raffiné via le put,
- et contre la hausse du prix du brut via le call.

Le coût total de cette couverture correspond à la somme des primes des deux options :

$$C_{\text{portefeuille}} = C_{\text{put raffiné}} + C_{\text{call brut}}.$$

5.2.2 Couverture par une option sur le spread

Une alternative consiste à utiliser une **option sur le spread**, dont le payoff dépend directement de la marge :

$$\text{PayOff}_T = \max(K - (P_T^{(r)} \times 42 - P_T^{(c)}), 0),$$

pour une option de type put, où K représente la marge minimale souhaitée.

Nous verrons de par les résultats des implémentations que cette approche est plus efficace pour le raffineur car elle cible directement la variable économique d'intérêt — la marge de raffinage — sans nécessiter la combinaison de plusieurs instruments.

5.3 Évaluation des coûts de couverture

5.3.1 Évaluation du portefeuille d'options

Pour chaque option du portefeuille, Nous allons utiliser pour les calculs d'implémentation les modèles d'évaluation présentés précédemment :

- le modèle binomial de Cox–Ross–Rubinstein (CRR),
- le modèle trinomial de Boyle,
- et le modèle continu de Black–Scholes–Merton (BSM).

Ainsi, pour chaque actif ($S^{(r)}$ et $S^{(c)}$), on calcule le prix théorique de l'option correspondante :

$$V_{\text{put}}^{(r)} = f_{\text{modèle}}(S_0^{(r)}, K^{(r)}, \sigma_r, r, T), \quad V_{\text{call}}^{(c)} = f_{\text{modèle}}(S_0^{(c)}, K^{(c)}, \sigma_c, r, T),$$

puis la somme des deux primes donne le coût global de couverture :

$$C_{\text{portefeuille}} = V_{\text{put}}^{(r)} + V_{\text{call}}^{(c)}.$$

5.3.2 Évaluation d'une option sur spread

Dans ce cas, le sous-jacent est une combinaison linéaire :

$$S_t^{(s)} = S_t^{(r)} \times 42 - S_t^{(c)}.$$

Le payoff à maturité pour une option de type put sur le spread est :

$$f(S_T^{(s)}) = \max(K - S_T^{(s)}, 0).$$

5.3.2.1 Méthode binomiale bivariée

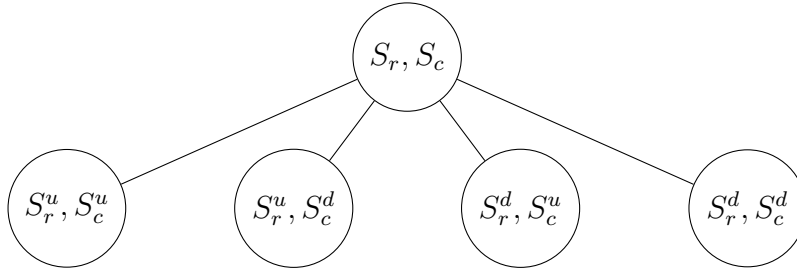
Nous étendons ici le cadre du modèle binomial à deux sous-jacents corrélés :

$$(S_t^{(r)}, S_t^{(c)}),$$

où $S^{(r)}$ désigne le prix du produit raffiné (revenu) et $S^{(c)}$ le prix de la matière première (coût). Chaque actif suit localement un mouvement binomial : sur un pas Δt ,

$$S_{t+\Delta t}^{(r)} \in \{S_t^{(r)} u_r, S_t^{(r)} d_r\}, \quad S_{t+\Delta t}^{(c)} \in \{S_t^{(c)} u_c, S_t^{(c)} d_c\},$$

avec volatilités σ_r, σ_c et facteurs u_r, e^{-u_r}, u_c, d_c (par exemple CRR : $u_i = e^{\sigma_i \sqrt{\Delta t}}, d_i = e^{-\sigma_i \sqrt{\Delta t}}, i \in \{r, c\}$).



États combinés et transitions À chaque pas, il existe $2 \times 2 = 4$ issues conjointes possibles :

$$(++) : (u_r, u_c), \quad (+-) : (u_r, d_c), \quad (-+) : (d_r, u_c), \quad (--) : (d_r, d_c).$$

Si l'on note $p_{++}, p_{+-}, p_{-+}, p_{--}$ ces probabilités sous la mesure risque-neutre Q , on doit avoir

$$p_{++} + p_{+-} + p_{-+} + p_{--} = 1, \quad p_{ij} \geq 0.$$

Conditions de neutralité au risque et paramétrisation à partir des données historiques Soient les deux sous-jacents $S^{(r)}$ (produit raffiné) et $S^{(c)}$ (matière première). À chaque pas Δt on a les facteurs :

$$u_i, d_i \quad (i \in \{r, c\}), \quad a_i := \ln u_i, \quad b_i := \ln d_i.$$

Les quatre issues conjointes et leurs probabilités sous la mesure risque-neutre Q sont :

$$(u_r, u_c) \mapsto p_{++}, \quad (u_r, d_c) \mapsto p_{+-}, \quad (d_r, u_c) \mapsto p_{-+}, \quad (d_r, d_c) \mapsto p_{--}.$$

(1) Marges neutres au risque.

La condition de martingale actualisée pour chaque actif impose les probabilités marginales

$$q_r := \mathbb{P}_Q(\text{hausse de } S^{(r)}) = p_{++} + p_{+-} = \frac{e^{r\Delta t} - d_r}{u_r - d_r},$$
$$q_c := \mathbb{P}_Q(\text{hausse de } S^{(c)}) = p_{++} + p_{-+} = \frac{e^{r\Delta t} - d_c}{u_c - d_c}.$$

Ces deux relations fixent les sommes des probabilités sur les lignes/marges.

(2) Utilisation de la covariance historique.

À partir des données historiques on estime la covariance empirique des rendements logarithmiques sur la période de calibration :

$$\widehat{\text{Cov}}(X^{(r)}, X^{(c)}) \quad \text{avec} \quad X_t^{(i)} = \ln \frac{S_t^{(i)}}{S_{t-1}^{(i)}}, \quad i \in \{r, c\}.$$

Cette quantité fournit la cible (sur un pas) qu'on souhaite reproduire par le modèle discret.

(3) Expression des probabilités en fonction de p_{++} .

On pose

$$p_{+-} = q_r - p_{++},$$
$$p_{-+} = q_c - p_{++},$$
$$p_{--} = 1 - q_r - q_c + p_{++}.$$

(4) Équation linéaire en p_{++} donnée par la covariance.

Calculons d'abord les espérances marginales des incréments log-prix (connues via q_r, q_c) :

$$\mathbb{E}_Q[X^{(r)}] = q_r a_r + (1 - q_r) b_r,$$
$$\mathbb{E}_Q[X^{(c)}] = q_c a_c + (1 - q_c) b_c.$$

L'espérance du produit s'écrit (affine en p_{++}) :

$$\mathbb{E}_Q[X^{(r)} X^{(c)}] = p_{++} a_r a_c + p_{+-} a_r b_c + p_{-+} b_r a_c + p_{--} b_r b_c$$
$$= p_{++} A + B,$$

avec les notations

$$A = a_r a_c - a_r b_c - b_r a_c + b_r b_c = (a_r - b_r)(a_c - b_c),$$
$$B = q_r a_r b_c + q_c b_r a_c + (1 - q_r - q_c) b_r b_c.$$

La condition que la covariance sous Q égale la covariance empirique (cible) s'écrit

$$\mathbb{E}_Q[X^{(r)} X^{(c)}] - \mathbb{E}_Q[X^{(r)}] \mathbb{E}_Q[X^{(c)}] = \widehat{\text{Cov}}(X^{(r)}, X^{(c)}).$$

Remplaçant $\mathbb{E}_Q[X^{(r)} X^{(c)}] = p_{++} A + B$ on obtient l'équation linéaire

$$A p_{++} + B - \mathbb{E}_Q[X^{(r)}] \mathbb{E}_Q[X^{(c)}] = \widehat{\text{Cov}}(X^{(r)}, X^{(c)}).$$

D'où la solution explicite

$$p_{++} = \frac{\widehat{\text{Cov}}(X^{(r)}, X^{(c)}) + \mathbb{E}_Q[X^{(r)}] \mathbb{E}_Q[X^{(c)}] - B}{A}$$

et ensuite p_{+-}, p_{-+}, p_{--} sont obtenues par les relations précédentes.

Calcul du payoff et backward induction sur la grille bidimensionnelle Après n pas, chaque actif peut avoir $0, \dots, n$ hausses; l'ensemble des états est donc le produit cartésien, et le nombre de nœuds au temps t vaut $(t+1)^2$. Le payoff de l'option sur spread (par exemple put sur la marge) au nœud (i, j) à l'instant t (avec i hausses pour $S^{(r)}$ et j hausses pour $S^{(c)}$) est :

$$f(S_0^{(r)} u_r^i d_r^{t-i} \times 42 - S_0^{(c)} u_c^j d_c^{t-j}).$$

On calcule ensuite la valeur par *backward induction* :

$$V_t(i, j) = e^{-r\Delta t} \left(p_{++} V_{t+1}(i+1, j+1) + p_{+-} V_{t+1}(i+1, j) + p_{-+} V_{t+1}(i, j+1) + p_{--} V_{t+1}(i, j) \right).$$

Complexité numérique et contraintes pratiques

- **Nombre de nœuds** : pour un horizon à n pas, le nombre de nœuds totaux est de l'ordre de $\sum_{t=0}^n (t+1)^2 = O(n^3)$ si l'on compte tous les nœuds (mais le nombre de nœuds au dernier time slice est $(n+1)^2$). En pratique, la complexité mémoire principale est $O(n^2)$ (stockage d'une grille $(n+1) \times (n+1)$ au dernier pas) et la complexité temporelle de la backward induction est $O(n^2)$ opérations par étape (chaque nœud combine 4 valeurs).
- **Opérations par nœud** : chaque mise à jour requiert une somme pondérée de 4 valeurs et une actualisation (quelques opérations flottantes). Le coût total de la valuation par récurrence est donc $O(n^2)$ en temps et $O(n^2)$ en mémoire (par rapport à $O(n)$ pour un arbre unidimensionnel).
- **Problèmes numériques** : la calibration des p_{ij} doit garantir $0 \leq p_{ij} \leq 1$. Pour des pas trop grands (i.e. Δt gros) la contrainte peut échouer, imposant une réduction du pas (augmentation de n). De plus, l'arbre bidimensionnel entraîne des problèmes pratiques de coût CPU et mémoire pour n au-delà de quelques centaines.
- **Incomplétude et réplcation** : avec deux actifs risqués et un actif sans risque on dispose de trois titres pour couvrir 4 issues locales; le système linéaire de réplcation (4 équations, 3 inconnues) est en général surdéterminé et n'admet pas de solution exacte pour un payoff dépendant des deux actifs. Ainsi, en pratique, on évalue l'option par l'espérance risque-neutre (pricing) mais la réplcation exacte (hedging parfait) n'est pas toujours possible — le marché multi-actifs discret est typiquement incomplet. Pour l'hedging, on se contente d'une stratégie dynamique (delta hedging multi-dimensionnel) qui minimise l'erreur ou d'approches de réplcation quadratique.

Alternatives numériques pour diminuer le coût

1. **Monte-Carlo** : simuler directement les trajectoires corrélées (via Cholesky / copule gaussienne) et estimer $\mathbb{E}_Q[f(S_T^{(s)})]$. Complexité $O(N_{\text{sim}} n)$; approprié pour n grand et payoffs path-independent.
2. **Réduction de dimension / approximations** : utiliser l'approximation de Kirk (analytique) pour obtenir un prix rapide, ou recourir à une méthode semi-analytique (Fourier) si possible.

- 3. **Méthodes hybrides** : contrôler la variance Monte-Carlo (control variates) en utilisant les prix obtenus par un petit arbre bivarié comme variable de contrôle.

La méthode binomiale bivariée est conceptuellement simple et permet d'illustrer la mécanique du pricing d'une option sur spread en tenant compte de la corrélation. Toutefois, son coût computationnel et ses limitations (détermination des probabilités conjointes, possible incomplétude locale, explosion du nombre d'états) en restreignent l'usage pour des horizons fins n élevés. En pratique on combine souvent : arbres bivariés pour validations et pédagogie, Monte-Carlo ou approximations analytiques (Kirk) pour les valuations de production.

5.3.2.2 Méthode trinomial

Le modèle trinomial permet d'approximer plus finement les dynamiques conjointes des deux sous-jacents. En considérant un arbre recombiné pour chaque actif, on peut construire une grille bidimensionnelle plus dense, tout en conservant la convergence vers la loi log-normale jointe. La convergence vers le prix de référence (par exemple celui de Kirk) est plus rapide et plus stable numériquement que pour le modèle binomial. Toutefois nous n'étalerons pas dans ce rapport l'implémentation du modèle trinomial bivarié.

5.4 Comparaison des deux approches de couverture

Données de base

- **Produit raffiné** : RBOB Gasoline (Novembre 2025)
- **Pétrole brut** : Crude Oil (Novembre 2025)

L'objectif est d'analyser et de comparer plusieurs stratégies de couverture du risque de marge (*crack spread*) pour un raffineur de pétrole.

5.4.1 Couverture directe par option sur spread

- Modèles utilisés : BINOMIAL BIVARIÉ et KIRK.
- Sous-jacent : la marge du raffineur (*crack spread*).
- Instrument : 1 option put sur le spread.
- Strike $K = 5$: marge minimale garantie (en \$ par baril).

5.4.2 Couverture par portefeuille d'options simples

(a) Put sur le produit raffiné.

- Modèles utilisés : BINOMIAL, TRINOMIAL et BLACK-SCHOLES.
- Nombre d'options : 42 puts par baril raffiné.
- Strike K_1 : prix minimum de vente garanti.

(b) Call sur le pétrole brut.

- Modèles utilisés : BINOMIAL, TRINOMIAL et BLACK-SCHOLES.
- Nombre d'options : 1 call par baril brut.
- Strike K_2 : prix maximum d'achat garanti.

Le *spread garanti* entre les deux strikes est défini par :

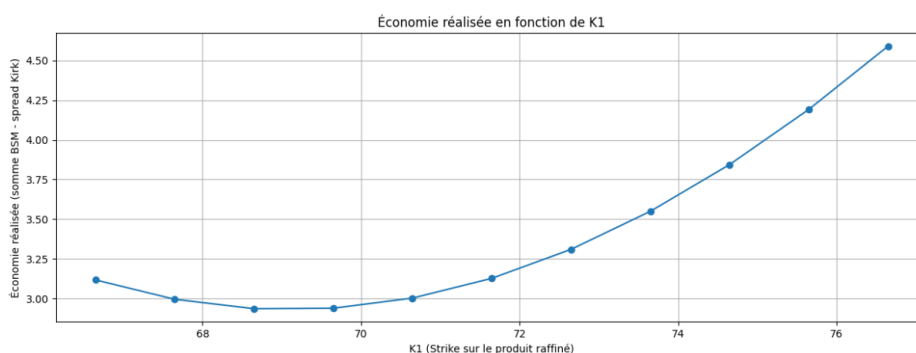
$$K = K_1 - K_2.$$

5.4.3 Analyse comparative

Les deux approches diffèrent tant sur le plan de la structure de couverture que sur leurs coûts. Les critères de comparaison sont les suivantes

- **Coût initial de couverture** : montant à déboursier au départ pour établir la stratégie.

Économie réalisée selon K1



Meilleure combinaison :

Put Refined Strike 68.64999999999999	Call Crude Strike Prix : 63.65	Economy 2.9368
---	-----------------------------------	-------------------

FIGURE 5.1 : Analyse du coût initial de couverture

Afin de pouvoir savoir la différence de coût entre les deux stratégies, nous avons proposer plusieurs portefeuilles d'options (put sur le produit raffiné et call sur le produit brut) pour la couverture. Ce qui caractérise chaque portefeuille ce sont les prix d'exercice de ces deux options. En effet le raffineur n'entrera en donnée que la marge minimale à garantir peu importe les conditions de marché. Or l'expression de la marge minimale à garantir n'est rien d'autre que :

$$\text{Marge minimale garantie} = \text{Prix de vente minimal garanti} - \text{Prix d'achat maximal garanti}$$

Cela nous revient de déterminer de façon implicite le prix de vente minimale à garantir du produit raffiné. Ce qui représente exactement le strike price K_1 de l'option put sur le produit raffiné. Par suite on déterminera aussi le strike K_2 de l'option call sur la matière brute, qui peut être déduit de la relation entre les trois strikes. Afin de trouver la meilleure combinaison de K_1 , et K_2 possible qui permet de se couvrir tout en minimisant les coûts, on va opérer les calculs de valorisation pour plusieurs valeurs de K_1 et trouver la combinaison qui garanti un meilleur coût pour le portefeuille d'options. La référence restant le coût du portefeuille à une seule option sur le spread.

$$\text{Economie} = \text{Cout portefeuille d'options}(K_1, K_2) - \text{Cout d'option sur spread}$$

On peut facilement d'après le graphe ci-dessus remarquer que cette quantité est toujours positive, ce qui montre bien qu'aucune combinaison d'options ne produit un coût inférieur à celui de l'option sur le spread.

- **Coût de calcul** : il s'agit de la complexité computationnelle et temps nécessaire à l'évaluation des instruments.

D'autres part, nous sommes désireux d'évaluer la puissance des arbres binomiaux pour la valorisation des options sur le spread. Sur quoi, nous allons procéder à l'analyse comparative des graphes de convergence du modèle binomial univarié et bivarié. Nous avons toutefois déjà parlé de la complexité computationnelle de cette dernière.

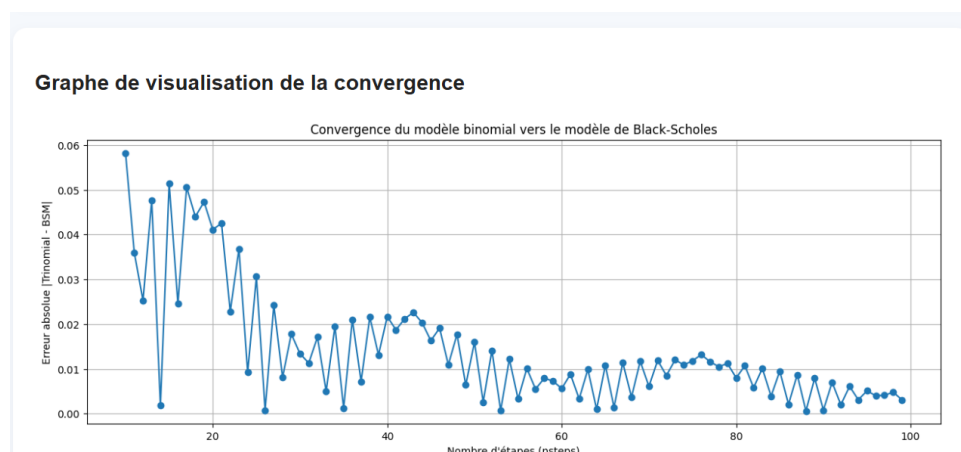


FIGURE 5.2 : Convergence du modèle binomial univarié vers B&S

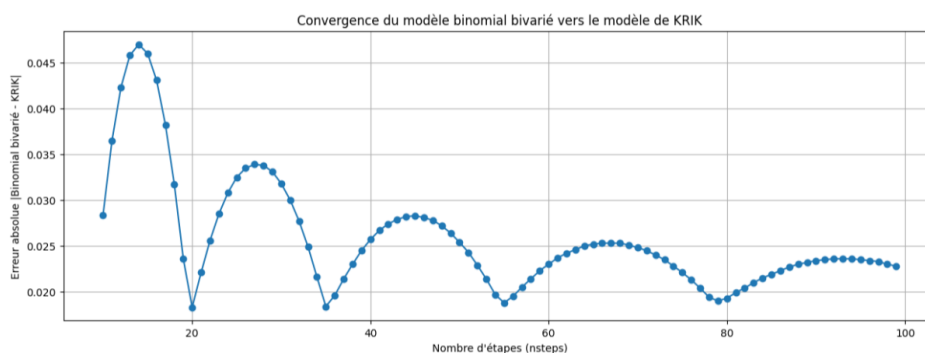


FIGURE 5.3 : Convergence du modèle binomial bivarié vers KIRK

On remarque que le modèle binomial bivarié n'est pas aussi performant que le modèle univarié en terme de convergence, en effet lorsque le nombre de pas avoisine les 100, l'erreur du prix binomial univarié se stabilise entre 0.01 et 0.00 alors que l'erreur du prix binomial bivarié se stabilise entre 0.025 et 0.020 ; soit deux fois celle du modèle binomial simple.

Au vue de cela, le modèle bivarié demande plus de pas de calcul pour une meilleure précision, ce qui peut rendre lourd le programme car on a une augmantation du nombre de calculs. Cette critique d'implémentation du modèle binomial bivarié qui semble de prime abord simple dans la modélisation, suscite un intérêt pour d'autres méthodes comme celles de Monte Carlo qui offre une plus grande souplesse, pour le déploiement d'outils de tarification des options sur le spread.

Conclusion

Ce projet nous a permis d'explorer concrètement les modèles d'arbres discrets pour l'évaluation des options, avec une application aux options sur spread. À travers ce travail, nous avons pu constater l'efficacité et les limites des approches binomiale et trinomiale dans la valorisation de produits dérivés.

La mise en œuvre des modèles binomiaux et trinomiaux nous a permis de comprendre leur fonctionnement et leurs différences. L'étude de convergence a montré que le modèle trinomial offre de meilleures performances numériques que le modèle binomial, avec une précision qui s'améliore plus rapidement lorsque le nombre de pas augmente.

L'application aux options sur spread a été particulièrement instructive. La modélisation de deux sous-jacents corrélés nous a confrontés aux défis pratiques de paramétrisation et de complexité computationnelle.

Ce projet nous a fait prendre conscience des compromis nécessaires en finance quantitative entre précision, complexité et temps de calcul. Les options sur spread se sont révélées être des instruments particulièrement adaptés pour couvrir des risques de marge, comme dans le cas du crack spread pour les raffineurs.

Les connaissances acquises durant ce travail pourraient être enrichies par l'étude d'autres types d'options exotiques ou par l'implémentation de méthodes alternatives comme Monte Carlo. L'amélioration des performances computationnelles des arbres multi-sous-jacents constituerait également une piste d'approfondissement intéressante.

En conclusion, ce projet a été l'occasion d'appliquer des concepts théoriques à un problème concret de valorisation financière, renforçant ainsi notre compréhension des produits dérivés et des méthodes numériques utilisées pour leur évaluation.

Annexe

Annexe A

Modèle de Black–Scholes pour les options européennes

Introduction

Le modèle de BLACK et SCHOLLES (1973) constitue la base théorique de la valorisation moderne des options. Il fournit une formule analytique permettant d'évaluer le prix d'une option européenne (call ou put) sous l'hypothèse que le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique avec volatilité constante.

A.1 Hypothèses du modèle

Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- Le prix du sous-jacent S_t suit un processus de type mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où μ est le taux de rendement espéré, σ la volatilité constante, et W_t un mouvement brownien standard.

- Le taux d'intérêt sans risque r est constant et connu.
- Les marchés sont parfaits : pas de coûts de transaction ni d'opportunité d'arbitrage.
- Le sous-jacent ne verse pas de dividendes durant la vie de l'option.
- L'option est de type *européen* (exercée uniquement à l'échéance).

A.2 Définition du payoff

On considère une option européenne de type call ou put sur un actif S_t avec prix d'exercice K et maturité T :

$$\text{Payoff}_{\text{call}} = \max(S_T - K, 0), \quad \text{Payoff}_{\text{put}} = \max(K - S_T, 0).$$

A.3 Formule de valorisation

Sous la mesure risque neutre, le prix actuel d'un call ou d'un put européen est donné par la formule de Black–Scholes :

$$\begin{aligned}C &= S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2), \\P &= K e^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1),\end{aligned}$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Ici, $\Phi(\cdot)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

A.4 Interprétation économique

Le terme $\Phi(d_1)$ représente la probabilité risque neutre (ajustée) que l'option soit exercée, tandis que $\Phi(d_2)$ correspond à la probabilité que le prix du sous-jacent dépasse le strike à l'échéance. Le modèle exprime ainsi le prix de l'option comme la valeur actualisée de son gain espéré sous la mesure neutre au risque :

$$C = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+].$$

A.5 Sensibilités (*Greeks*)

Le modèle permet également de calculer analytiquement les sensibilités du prix de l'option par rapport à ses paramètres :

- **Delta** : $\frac{\partial C}{\partial S_0} = \Phi(d_1)$,
- **Gamma** : $\frac{\partial^2 C}{\partial S_0^2} = \frac{\phi(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$,
- **Vega** : $\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_0 \phi(d_1) \sqrt{T}$,
- **Theta** : $\frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{S_0 \phi(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - r K e^{-rT} \Phi(d_2)$,
- **Rho** : $\frac{\partial C}{\partial r} = K T e^{-rT} \Phi(d_2)$.

où $\phi(\cdot)$ est la densité de la loi normale standard :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

A.6 Limites du modèle

- Hypothèse de volatilité constante, souvent irréaliste sur les marchés réels (volatilité implicite variable).
- Absence de sauts ou de discontinuités dans le prix du sous-jacent.
- Ne prend pas en compte les dividendes, ni les contraintes de liquidité.
- Sensibilité élevée aux paramètres, notamment σ et r .

A.7 Extensions du modèle

De nombreuses extensions du modèle de Black–Scholes ont été développées pour pallier ses limites :

- Modèles à volatilité locale (Dupire, Derman–Kani),
- Modèles à volatilité stochastique (Heston, SABR),
- Modèles à sauts (Merton, Kou),
- Approches numériques : arbres binomiaux/trinomiaux, Monte Carlo, PDE implicites.

Annexe B

Modèle de Kirk pour les options sur spread

Introduction

Le modèle de KIRK (1995) fournit une approximation analytique pour la valorisation d'options sur *spread*, c'est-à-dire d'options dont le sous-jacent est la différence (ou combinaison linéaire) de deux actifs corrélés. Il permet d'obtenir une formule proche de Black-Scholes en introduisant une volatilité ajustée qui tient compte de la corrélation et du niveau du strike.

B.1 Définition du payoff

Nous considérons une option de type call sur spread avec payoff :

$$\text{Payoff} = \max (S_1 - \beta S_2 - K, 0),$$

où

- S_1 et S_2 sont les prix des deux actifs sous-jacents au temps courant,
- β est un facteur de conversion (souvent $\beta = 1$),
- K est le strike,
- T est la maturité restante (en années),
- r est le taux d'intérêt sans risque (continu).

B.2 Hypothèses

Kirk suppose que S_1 et S_2 suivent des dynamiques log-normales corrélées, avec volatilités constantes σ_1 et σ_2 et corrélation instantanée ρ .

B.3 Formule approchée de Kirk

La formule approchée pour le prix du call (à la date courante) s'écrit :

$$C = e^{-rT} \left(S_1 \Phi(d_1) - (\beta S_2 + K) \Phi(d_2) \right),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_1}{\beta S_2 + K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_K^2 T}{\sigma_K \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_K \sqrt{T},$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et où la *volatilité ajustée* est :

$$\sigma_K = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho \frac{\beta S_2}{\beta S_2 + K} \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{\beta S_2}{\beta S_2 + K}\right)^2 \sigma_2^2}.$$

Cette volatilité σ_K reflète l'effet de la corrélation et du poids relatif de S_2 dans le spread ($S_1 - \beta S_2 - K$).

B.4 Interprétation

L'astuce de Kirk est de considérer le numérateur S_1 et le dénominateur $\beta S_2 + K$ puis d'appliquer une formule de type Black-Scholes avec une volatilité effective σ_K qui tient compte de la covariance entre S_1 et S_2 . Cette approximation est souvent très utile en pratique (marchés de l'énergie, matières premières) car elle offre un prix analytique rapide, même si elle reste une approximation.

B.5 Limites

- Approximation : peut devenir imprécise pour des spreads profonds ou pour des strikes très éloignés.
- Hypothèse de volatilités constantes et de corrélation constante.
- Ne capture pas des effets comme la volatilité locale/stochastique ni des sauts.

Annexe C

Présentation de notre outil d'aide à la couverture du Crack Spread

Dans le cadre de ce projet, nous avons développé une application web avec Flask afin de nous permettre de mettre en production les stratégies de valorisation et de couverture pour les raffineurs de pétrole. Nous présentons dans cette annexe les différentes sections et fonctionnalités de notre application.

C.1 Page d'accueil

Une première page qui accueille chaleureusement l'utilisateur par une documentation sur les données d'entrée (les tickers correspondant aux produits qu'il souhaite entrer)

The screenshot shows the 'Crack Spread Hedging Tool' interface. On the left, under 'PARAMÈTRES', there are input fields for 'Produit raffiné (ticker)' (RB=F), 'Produit brut (ticker)' (CL=F), 'Échéance (jours)' (90), 'Marge minimale (K)' (5,0), and 'Taux sans risque (r)' (0,03). On the right, under 'Documentation des Tickers des Produits Pétroliers', there is a table listing oil products and their tickers.

Produit	Ticker	Marché / Bourse	Notes
Crude Oil WTI	CL	NYMEX	Futures / Options
Crude Oil Brent	BRN	ICE	Futures / Options
RBOB Gasoline	RB	NYMEX	Futures / Options
Heating Oil	HO	NYMEX	Futures / Options
Natural Gas	NG	NYMEX	Futures / Options

FIGURE C.1 : Accueil de l'interface

C.2 Visualisation des données de marché en temps réel

Une fois l'utilisateur entre les données et lance les calculs, notre interface propose une visualisation claire des cours des actifs (le produit raffiné et la matière brute) en mettant l'accent sur la marge :

crack spread.

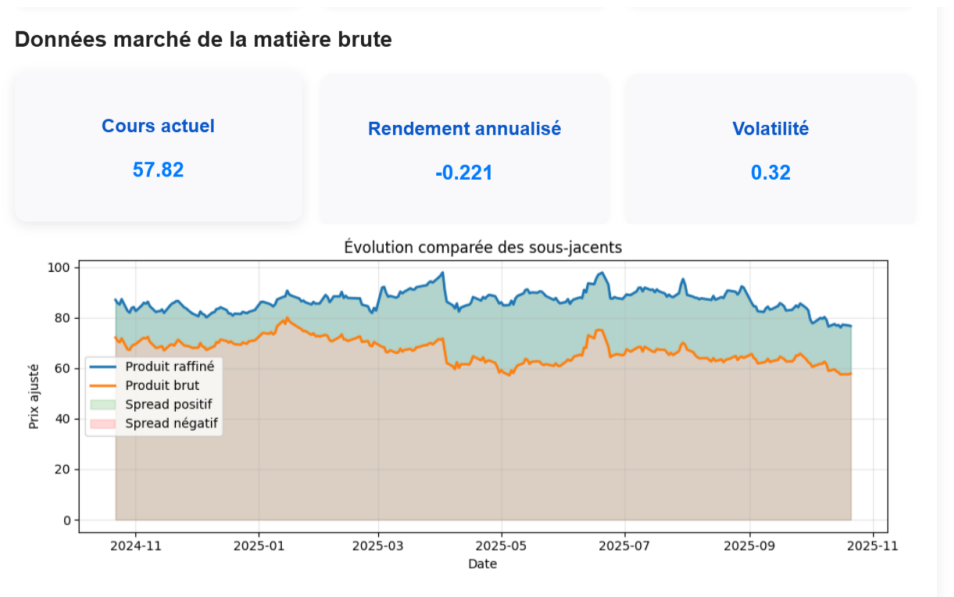


FIGURE C.2 : Observation de la marge

C.3 Valorisation des différentes stratégies de couverture

L’interface propose plus bas une vue de la valorisation des options qui sont utilisées pour la couverture.

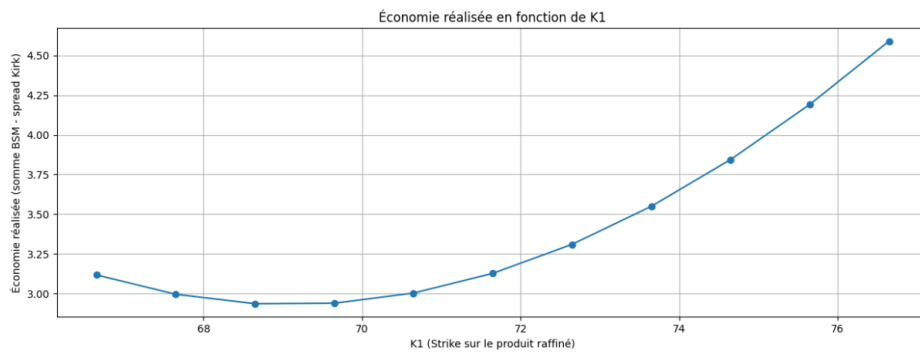


FIGURE C.3 : Valorisation des options utilisées

C.4 Analyse des coûts

Étant donné notre objectif, qui est de proposer la stratégie la plus optimale sur options pour le raffineur, nous allons proposer une comparaison des stratégies par les coûts de couverture.

Économie réalisée selon K1



Meilleure combinaison :

Put Refined Strike 68.64999999999999	Call Crude Strike Prix : 63.65	Economy 2.9368
---	-----------------------------------	-------------------

FIGURE C.4 : Coûts de couverture avec portefeuille d'options

Par suite, nous voulons aussi proposer aux raffineur un interface optimale moins lourde en terme de calcul pour un meilleur déploiement; nous allons donc proposer une vue de la convergence des méthodes discètes utilisées pour avoir une idée sur leur souplesse.

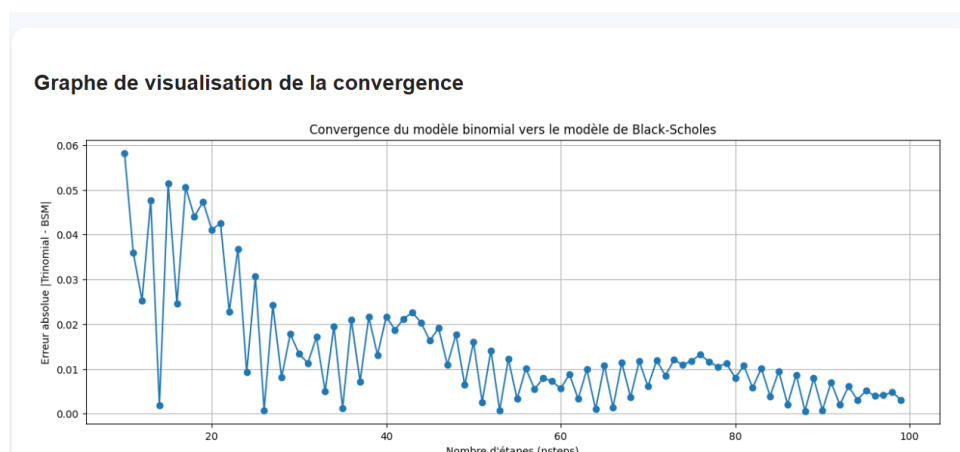


FIGURE C.5 : Convergence du modèle binomial

Bibliographie

- [1] John C. HULL. Options, futures, et autres actifs dérivés. Pearson, 6ème édition.
- [2] Derom Marie, Formule de Black-Sholes, 2016-2017.
- [3] Didier Auroux, Méthodes numérique pour le pricing d'options, Brest 2010-2011.
- [4] Tchierry Chonavel, Introduction aux équations différentielles stochastiques, Brest Octobre 2014.
- [5] Andrew Morris, Trinomial and Finite Difference Option Pricing, Spring 2011
- [6] Atanu Biswasa & Jing-Shiang Hwangb, A new bivariate binomial distribution