MODELO MATEMÁTICO PARA O PLANEJAMENTO INTEGRADO DA PRODUÇÃO E CORTE DE PAPEL, COM TEMPOS E CUSTOS DE SETUP

FERNANDES, Daniel cassimiro
Universidade Estadual Paulista (Unesp) - Bauru
Endereço da Instituição
d.fernandes@unesp.br

POLTRONIERE, Sônia Cristina
Universidade Estadual Paulista (Unesp) - Bauru
Endereço da Instituição
poltroniere.silva@unesp.br

OLIVEIRA, José Fernando
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (INESC TEC) - Porto
Endereço da Instituição
jfo@fe.up.pt

RESUMO

Atualmente, os esforços para promover a utilização eficiente dos recursos disponíveis na produção industrial ocorrem não somente pelo fator econômico, mas também devido à crescente preocupação em contribuir com o desenvolvimento sustentável. Neste sentido, a integração de problemas inseridos no planejamento da produção colabora com a minimização dos custos operacionais e com o melhor aproveitamento da matéria-prima e dos equipamentos. Este trabalho propõe uma extensão de um modelo matemático da literatura, para integrar os processos de produção e corte de papel, considerando capacidade limitada para a cortadeira, tempos e custos de setup na mudança de padrões independentes da sequência. Além disso, busca-se a minimização dos custos relacionados à produção de papel, bem como dos custos do processo de corte e de setup. Testes numéricos foram realizados, obtendo-se limitantes inferiores de boa qualidade para o problema, a partir da técnica de geração de colunas. Os resultados são apresentados e discutidos.

PALAVRAS CHAVE. Dimensionamento de lotes. Corte multiperíodo. Indústria de papel.

POI – PO na Indústria

ABSTRACT

Currently, efforts to promote the efficient use of available resources in industrial production occur not only due to economic factors, but also due to the growing concern for contributing to sustainable development. In this sense, the integration of problems inserted in production planning contributes to the minimization of operational costs and to the best use of raw materials and equipment. This work proposes an extension of a mathematical model from the literature, to integrate the processes of paper production and cutting, considering limited capacity for the cutting machine, setup times and costs in the change of patterns independent of the sequence. In addition, the aim is to minimize the costs related to paper production, as well as the costs of the cutting process and setup. Numerical tests were performed, obtaining good quality lower bounds for the problem, from the column generation technique. The results are presented and discussed.

KEYWORDS. Lot sizing. Multi-period cutting. Paper industry.

POI – PO in Industry

1. Introdução

A indústria de papel desempenha um papel essencial na economia global, fornecendo insumos para uma vasta gama de aplicações, como produtos de consumo, impressão e embalagem, enfrentando, atualmente, desafios logísticos e operacionais significativos, principalmente relacionados à sustentabilidade, ao aproveitamento eficiente das matérias-primas e às reduções de perdas de materiais. Neste contexto, a interdependência dos processos de produção de jumbos (bobinas grandes de papel) e de posterior corte para o atendimento da demanda de produtos finais torna o planejamento produtivo particularmente desafiador.

O problema de produção dos jumbos de papel, que podem ser de diferentes larguras e gramaturas, pode ser modelado como um problema de dimensionamento de lotes (PDL) capacitado, com tempos e custos de setup dependentes ou não da sequência de gramaturas. Neste contexto, o PDL consiste em determinar a quantidade de jumbos de cada gramatura e cada largura que devem ser produzidos em uma ou mais máquinas de papel, em cada período de um horizonte de planejamento finito, de modo a produzir uma demanda de papel suficiente para abastecer os estágios de corte que irão produzir os itens finais demandados pelos clientes, como bobinas menores e resmas. Busca-se minimizar de produção, setup e estoque.

O problema de corte dos jumbos em bobinas menores (primeiro estágio de corte) ao longo dos períodos do horizonte de planejamento pode ser modelado como um problema de corte de estoque (PCE) multiperíodo, considerando ou não tempos e custos de setup, dependentes ou não da sequência. Neste sentido, o PCE unidimensional consiste em cortar os jumbos de papel em bobinas menores de mesma gramatura e de diferentes larguras, buscando atender a demanda dessas bobinas sem atrasos, por exemplo, por gráficas. O PCE multiperíodo permite a antecipação ou não da produção desses itens, considerando variáveis de estoque, o que possibilita uma melhor combinação dos itens nos padrões e, consequentemente, a diminuição da perda de matéria-prima. O segundo estágio de corte caracteriza-se pelo corte das bobinas menores em retângulos de tamanhos especificados, modelado como um PCE bidimensional.

Dessa forma, o problema de corte de estoque multiperíodo é um subproblema fundamental no planejamento da produção de papel e deve ser tratado de forma integrada com os demais problemas. Em Poltroniere et al. [2008] e Poltroniere et al. [2016] são propostas modelagens matemáticas para o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque multiperíodo aplicado à indústria de papel. Vários trabalhos também consideram esses dois problemas de forma integrada com aplicações em outros contextos industriais, dentre eles de Lara Andrade et al. [2021], Lemos et al. [2021], Campello et al. [2020], Melega et al. [2018] e Vanzela et al. [2017].

Este trabalho propõe uma extensão da modelagem proposta em Poltroniere et al. [2008] para abordar o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque com aplicações no processo de produção e corte de papel. Da mesma forma, a produção de jumbos na máquina de papel é realizada considerando tempo e custo de setup na mudança de uma gramatura para outra, independentes da sequência. O processo de corte dos jumbos em bobinas de larguras menores é abordado como um problema de corte multiperíodo. No entanto, diferenciando-se de Poltroniere et al. [2008], esta abordagem considera capacidade limitada para a cortadeira, além de custo e tempo de setup na mudança de um padrão de corte para outro, independentes da sequência. Ou seja, não é resolvido o problema de sequenciamento dos padrões, mas é considerado o tempo necessário para o ajuste das facas (setup) para iniciar um novo padrão. Além disso, busca-se a minimização de custos no processo de corte e custos de setup, buscando evitar trocas excessivas entre os padrões em um mesmo período.

1.1. Revisão bibliográfica

Nas últimas décadas, como apontado por Pierini e Poldi [2021], os problemas integrados de dimensionamento de lotes e corte de estoque têm despertado interesse crescente, com estudos explorando particularidades, restrições e condições típicas de cenários industriais. Dentre essas investigações, destacam-se trabalhos voltados especificamente para a indústria de papel. Correia et al. [2004] abordaram o problema de otimização do corte de bobinas em uma fábrica de papel portuguesa, visando minimizar o desperdício de material ao atender a um conjunto de pedidos de bobinas menores e retângulos. O problema é modelado como um problema de corte unidimensional em duas fases, considerando restrições tecnológicas e operacionais, como o limite na quantidade de facas de corte disponíveis. A metodologia proposta envolveu a geração de padrões de corte viáveis, a solução dos modelos de programação linear por meio do método Simplex para determinar as quantidades ideais de produção e um procedimento de ajuste posterior de soluções em um procedimento de pós-otimização para atender às restrições de integralidade inicialmente relaxadas. Segundo os autores, experimentos computacionais com dados reais mostraram que a abordagem produziu soluções próximas às ótimas, com redução nas perdas de material.

No mesmo contexto, Poltroniere et al. [2008] propuseram um modelo para solucionar o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque na indústria de papel com o objetivo de minimizar os custos totais, abrangendo produção, estoque, preparação de máquinas e desperdício no processo de corte, respeitando restrições de capacidade de produção e demandas específicas. Foram desenvolvidos dois métodos heurísticos de solução: o primeiro, Lot-Cutting, relaxa as restrições de integração via relaxamento lagrangiano e resolve iterativamente os subproblemas de produção e corte, enquanto o segundo, Cutting-Lot, prioriza a solução do problema de corte antes de ajustar a produção. Um conjunto de testes computacionais foram realizados, baseados na realidade da indústria, evidenciando a viabilidade da abordagem integrada. Os resultados obtidos com as duas heurísticas são apresentados e comparados.

Campello et al. [2017] e Campello et al. [2019], utilizando o modelo proposto por Poltroniere et al. [2008], propuseram uma modelagem multiobjetivo para o problema de dimensionamento de lote integrado ao problema de corte de estoque na indústria de papel, analisando os trade-offs e as correlações existentes entre os custos do problema integrado. Ayres et al. [2021] propuseram modelo matemático para abordar a produção e corte de papel em três fases: na primeira fase o dimensionamento de lotes define a produção dos jumbos de papel; na segunda fase, um PCE unidimensional é resolvido para cortar os jumbos em bobinas intermediárias; na terceira fase, um PCE bidimensional é considerado para planejar o corte das bobinas intermediárias em retângulos. Um heurística que utiliza a técnica de geração de colunas e o procedimento relax-and-fix é aplicada para resolver o modelo proposto a partir de um conjunto de experimentos, combinando-se as fases de produção e corte.

O estudo de Pierini e Poldi [2021] propôs uma reformulação simplificada do modelo integrado proposta por Poltroniere et al. [2008], eliminando restrições redundantes de balanço de estoque e reformulando a demanda de papel como uma variável determinada diretamente pelo processo de corte. Pierini e Poldi [2023] abordaram a otimização integrada do dimensionamento de lotes e do problema de corte de estoque em indústrias de papel com múltiplas plantas. Os autores propõem um modelo de programação linear inteira que considera custos de produção, setup, estoque, transporte entre plantas e desperdício de material no processo de corte, inspirado em uma situação prática da indústria papeleira. O problema é resolvido por meio de uma metodologia que combina geração de colunas, heurística relax-and-fix e uma heurística de factibilização. Experimentos computacionais foram realizados com dados gerados baseadas em dados reais para avaliar o desempenho da abordagem proposta. Segundo os autores, os resultados demonstram que a integração entre plantas reduz custos totais, com destaque para a diminuição de custos de setup, desperdício de material e estoque final de itens.

Também, Furlan et al. [2015] abordou os problemas de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção de papel utilizando múltiplas máquinas, propondo um modelo matemático e um procedimento heurístico de solução baseado em algoritmos genéticos. Em Furlan et al. [2024], os autores propuseram uma meta-heurística que combina técnicas de otimização matemática para resolver um modelo de programação inteira mista que considera restrições de capacidade, tempos de setup sequenciais e múltiplos estágios de produção, aplicado ao planejamento e sequenciamento da produção de papel e celulose. A metodologia desenvolvida utiliza uma abordagem de relaxação lagrangeana para decompor o problema em subproblemas tratáveis, combinada com estratégias de fixação de variáveis e busca local para melhorar a qualidade da solução. Segundo os autores, os experimentos computacionais demonstraram que a meta-heurística proposta supera o desempenho do solver CPLEX em instâncias de grande escala, reduzindo o tempo computacional. Outros autores também estudaram a integração do problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes na indústria do papel como Figueira et al. [2013] e Figueira et al. [2015].

2. Descrição do problema

A linha de produção em indústrias de papel apresenta diversas etapas interdependentes que influenciam fortemente a eficiência e os custos operacionais, como afirma **?**. Inicialmente, de acordo com Bajpai [2018], a polpa de celulose, obtida de madeira, fibras recicladas ou outras fontes vegetais por meio de processos mecânicos ou químicos, forma uma suspensão homogênea após o processo de branqueamento. Essa matéria-prima é processada em máquinas paralelas de papel, cada uma com características e eficiências específicas, e enrolada em grandes bobinas de papel, chamadas de jumbos. No processo de produção desses jumbos, o Problema de Dimensionamento de Lotes pode ser considerado para definir a quantidade a ser fabricada em cada período do horizonte de planejamento, visando atender a demanda dos produtos finais sem atrasos. Como observado por Furlan et al. [2022], a produção envolve diferentes gramaturas e a transição entre as gramaturas gera desperdício significativo de papel e de tempo de máquina, sendo que custos e tempos de preparação de máquina (setup) associados são dependentes da sequência. Assume-se, ainda, que cada jumbo contém exclusivamente um tipo de gramatura.

Posteriormente, os jumbos seguem para o primeiro estágio de corte, gerando bobinas menores de peso específico pré-estabelecido, de diferentes larguras e diferentes gramaturas. Dessa forma, de acordo com Wäscher et al. [2007], caracteriza-se um Problema de Corte de Estoque Unidimensional para cada gramatura, que, por meio da definição de padrões de corte, objetiva a eficiência na redução das perdas de papel. Uma parcela dessas bobinas menores são embaladas e destinadas para o atendimento de clientes, por exemplo, gráficas. A outra parcela segue para o segundo estágio de corte, em que, por meio de cortes transversais e longitudinais, são transformadas em resmas (retângulos) de formatos padronizados, para o atendimento da demanda de outro grupo de clientes.

Como destaca Poltroniere et al. [2008], a produção dos jumbos com foco na redução de setups nas máquinas de papel, sem levar em conta a demanda dos produtos finais e o processo de corte, pode gerar perdas consideráveis de papel. Por outro lado, as larguras e quantidades de jumbos que melhoram o processo de corte podem introduzir altos setups nas máquinas de papel. Portanto, essa interdependência entre os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque demanda uma estratégia integrada, que possibilite associar a otimização de ambos os processos, visando diminuir o desperdício de papel e os custos operacionais.

De acordo com Garey e Johnson [1979], devido à natureza combinatória e às múltiplas variáveis envolvidas, o problema de corte de estoque é classificado como NP-difícil. Dessa forma, o método de geração de colunas, desenvolvido por Gilmore e Gomory [1961] e Gilmore e Gomory [1963] consiste em uma abordagem poderosa no sentido de se obter modelos com soluções eficientes. Neste trabalho, consideramos o estágio de corte dos jumbos de papel em bobinas de larguras menores para o atendimento da demanda em cada período do horizonte de planejamento. É permitido o corte antecipado e o estoque das bobinas cortadas, que poderá suprir as demandas de períodos subsequentes. Dessa forma, caracteriza-se um Problema de Corte de Estoque Unidimensional Multiperíodo. Além disso, considera-se capacidade limitada na máquina de corte, tempos e custos de setup associados à mudança entre os padrões de corte, diferenciando-se da abordagem proposta em Poltroniere et al. [2008]. O problema foi modelado utilizando o conceito de padrões de corte e resolvido pela abordagem de geração de colunas proposta por Gilmore e Gomory [1961] e Gilmore e Gomory [1963] para fornecer o padrão de corte mais atrativo a cada iteração.

3. Modelagem matemática

Da mesma forma que em Poltroniere et al. [2008], para efeito de modelagem, supomos que um jumbo é composto por papel de uma única gramatura. Ainda, um jumbo de gramatura $k,\ k = 1, ..., K$, e largura $L_m,\ m = 1, ..., M$, (diferentes objetos disponíveis para o corte) pode ser representado por uma quantidade de bobinas de mesma largura L_m e mesmo peso específico ρ_k, denominadas bobinas-mestre. O peso específico é definido previamente, de acordo com a demanda dos clientes, que se dá em bobinas de diferentes larguras, mas de pesos específicos padronizados.

Considere, então, a produção de jumbos de diferentes larguras, diferentes gramaturas e em diferentes períodos, sendo: K o número de gramaturas, M o número de larguras e T o número de períodos do horizonte de planejamento. Além disso, a demanda de bobinas menores (itens) é dada em diferentes larguras e nas diferentes gramaturas. Seja N o número de diferentes larguras demandadas e seja l_i a largura do item tipo $i,\ i = 1, ..., N$. Define-se o conjunto $\{1, 2, ..., N\} = S(1) \cup S(2) \cup ... \cup S(K)$, sendo $S(k) = \{i$ tal que o item i é de gramatura $k\},\ k = 1, ..., K$.

Parâmetros complementares:

Cap^c_t : capacidade (minutos) da cortadeira no período t;

c_{jkm} : tempo de corte (minutos) de uma bobina-mestre de largura L_m e gramatura k pelo padrão j;

p_{jkm} : tempo de setup (minutos) do padrão j para uma bobina-mestre de largura L_m e gramatura k;

d_{ikt} : demanda do item de largura l_i e gramatura k no período t;

n_m : número de padrões de corte para a bobina-mestre de largura L_m;

a_{ijkmt} : número de itens de largura l_i no padrão j gerado para cortar bobinas-mestre de gramatura k e largura L_m e no período t;

Cap^p_{mt} : capacidade de produção (ton) da máquina que produz jumbos de largura L_m no período t;

ρ_k : peso específico (ton) da bobina-mestre de gramatura k;

b_{km} : peso (ton) da bobina-mestre de gramatura k e largura L_m (dado por $L_m\rho_k$);

f_{km} : peso (ton) do papel desperdiçado na preprararação da máquina (setup) que produz bobinas-mestre de largura L_m e gramatura k;

c^x_{kmt}: custo de produção de uma bobina-mestre de largura L_m e gramatura k no período t;

c^w_{kmt}: custo de estocar uma bobina-mestre de largura L_m e gramatura k no período t;

c^z_{kmt}: custo de setup na produção de uma bobina-mestre de largura L_m e gramatura k no período t;

c^y_{kmt}: custo de cortar uma bobina-mestre de gramatura k e largura L_m no período t;

c^e_{ikt}: custo de estocar um item de largura l_i e gramatura k no final do período t;

c^{sc}_{jkmt}: custo de setup do padrão j para cortar bobinas-mestre de gramatura k e largura L_m no período t.

Váriáveis de decisão:

x_{kmt} : número de bobinas-mestre de gramatura k e largura L_m produzidas no período t;

w_{kmt} : número de bobinas-mestre de gramatura k e largura L_m estocados no final do período t;

z_{kmt} : variável binária que indica a preparação (setup) ou não para a produção de bobinas-mestre de gramatura k e largura L_m no período t;

y_{jkmt} : número de bobinas-mestre de gramatura k e largura L_m cortadas no padrão j no período t;

e_{ikt} : número de itens de largura l_i e gramatura k estocados no final do período t;

s_{jkmt} : variável binária que indica a preparação (setup) ou não para a utilização do padrão de corte j para cortar bobinas-mestre de gramatura k e largura L_m no período t.

Modelo matemático:

$$\text{Min} \quad \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}(c^x_{kmt}x_{kmt} + c^w_{kmt}w_{kmt} + c^z_{kmt}z_{kmt}) + \tag{1}$$

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_m} c^y_{kmt}y_{jkmt} + \sum_{i=1}^{N} c^e_{ikt}e_{ikt} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} c^{sc}_{jkmt}s_{jkmt}\right)$$

$$\text{s. a:} \quad \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_m} a_{ijkmt}y_{jkmt} + e_{i,k,t-1} - e_{ikt} = d_{ikt}, \quad i = 1,\ldots,N; k = 1,\ldots,K; t = 1,\ldots,T \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_m}(c_{jkm}y_{jkmt} + p_{jkm}s_{jkmt}) \leq Cap^c_t, \quad t = 1,\ldots,T \tag{3}$$

$$y_{jkmt} \leq Q_1 s_{jkmt}, \; k = 1,\ldots,K; m = 1,\ldots,M; t = 1,\ldots,T; j = 1,\ldots,n_m \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{k}(b_{km}x_{kmt} + f_{km}z_{kmt}) \leq Cap^p_{mt}, \quad m = 1,\ldots,M; t = 1,\ldots,T \tag{5}$$

$$x_{kmt} \leq Q_2 z_{kmt}, \quad k = 1,\ldots,K; m = 1,\ldots,M; t = 1,\ldots,T \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n_m} y_{jkmt} = x_{kmt} + w_{k,m,t-1} - w_{kmt}, \quad k = 1,\ldots,K; m = 1,\ldots,M; t = 1,\ldots,T \tag{7}$$

$$y_{jkmt} \geq 0 \text{ e inteiros}, k = 1,\ldots,K; m = 1,\ldots,M; t = 1,\ldots,T; j = 1,\ldots,n_m \tag{8}$$

$$e_{ikt} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad i = 1,\ldots,N; k = 1,\ldots,K; t = 1,\ldots,T \tag{9}$$

$$x_{kmt} \geq 0, w_{kmt} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad k = 1,\ldots,K; m = 1,\ldots,M; t = 1,\ldots,T \tag{10}$$

$$s_{jkmt} \in \{0,1\}, \; z_{kmt} \in \{0,1\}, \quad k = 1,\ldots,K; m = 1,\ldots,M; t = 1,\ldots,T \tag{11}$$

A função objetivo (1) minimiza os custos de produção, estoque e setup das bobinas-mestre, além dos custos de corte, estoque dos itens finais e setup dos padrões. Os conjuntos de restrições (2)-(4) referem-se ao problema de corte das bobinas-mestre nos itens demandados (bobinas menores). As restrições (2) garantem o atendimento da demanda sem atrasos, a partir do corte das bobinas-mestre utilizando os padrões de corte e do estoque disponível no período. As restrições (3) visam respeitar a capacidade da cortadeira em cada período, considerando o tempo necessário para o corte de cada bobina-mestre e o tempo de setup, ou seja, de preparação da máquina para a mudança de padrão de corte. Considera-se tempos de setup independentes da sequência. Além disso, as restrições (4) relacionam as variáveis de corte com as variáveis de setup, sendo Q_1 um número grande. Dessa forma, o corte de bobinas-mestre utilizando um determinado padrão ocorre somente se a cortadeira foi preparada para isso.

Por outro lado, os conjuntos de restrições (5) e (6) referem-se à produção de bobinas-mestre nas máquinas de papel. As restrições (5) limitam a capacidade de cada máquina em cada período, dada em peso de papel, considerando o peso das bobinas-mestre a serem produzidas, além do peso de papel desperdiçado (setup) com as mudanças de gramatura. As restrições (6) relacionam as variáveis de produção de bobinas-mestre de diferentes gramaturas com as variáveis de setup, sendo Q_2 um número grande, garantindo que só haverá produção de determinada gramatura se a máquina foi preparada para isso, considerando setup independente da sequência. O conjunto (7) contém as restrições de integração dos processos de produção e corte das bobinas-jumbo, garantindo que, em cada período e para cada gramatura e largura, o número de bobinas-mestre cortadas por todos os padrões não ultrapasse a quantidade produzida e estocada. Caso não seja necessário ou conveniente o corte de todas as bobinas-mestre disponíveis no período, é permitido o estoque para serem utilizadas no próximo período. Por fim, as restrições (8)-(11) definem o domínio das variáveis de decisão.

O modelo utiliza o conceito de padrão de corte para cortar as bobinas-mestre, obtendo-se os itens demandados de largura e gramatura especificadas. Assim, busca-se resolver o problema de corte com as melhores combinações de padrões, visando minimizar a quantidade de matéria prima utilizada e o desperdício. No entanto, o número de padrões de corte possíveis aumenta exponencialmente com o aumento do número de tipos de itens demandados. Além disso, na modelagem, uma variável de decisão é associada a cada padrão de corte, tornando impraticável a enumeração prévia de todos os padrões de corte possíveis, muitos dos quais irrelevantes para a solução ótima. A técnica de geração de colunas proposta por Gilmore e Gomory [1961] e Gilmore e Gomory [1963] contorna essa dificuldade ao resolver, inicialmente, um problema restrito, que considera apenas um subconjunto viável de padrões e, iterativamente, inclui novos padrões que possam melhorar a solução corrente.

Considerando a relaxação linear do modelo proposto (1)-(11), a técnica de geração de colunas foi aplicada e o método simplex foi utilizado. Nesta etapa, k problemas de corte multi-períodos são resolvidos, uma para cada gramatura. Além disso, para cada largura L_m é gerado um conjunto de padrões de corte. Em cada iteração, o padrão mais atrativo é obtido resolvendo-se um problema da mochila inteiro, cuja função objetivo contém como coeficientes as variáveis duais $\pi_i,\ i = 1, ..., N$, associadas as restrições de demanda do modelo integrado, restrições (2).

Fixando-se a gramatura k, a largura L_m e o período t, deve-se resolver o problema da mochila:

$$\text{Min} \quad (c^y_{kmt} - \pi^T \mathbf{a}_j) = \text{Max} \quad \pi_1\alpha_1 + ... + \pi_N\alpha_N) \tag{12}$$

$$\text{sujeito a:} \quad l_1\alpha_1 + ... + l_N\alpha_N \leq L_m, \tag{13}$$

$$0 \leq \alpha_i \leq d_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_+. \tag{14}$$

sendo $\mathbf{a}_j^T = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ o padrão de corte mais atrativo para a bobina de largura L_m, na iteração atual.

4. Experimentos computacionais

O modelo (1)-(11) foi implementado utilizando a linguagem de programação Julia 1.11.5, com o apoio do solver IBM CPLEX Optimizer versão 22.1.1.0. Foi utilizado um computador equipado com um processador Intel Core i7, 3.4 GHz, 16 GB de memória RAM e rodando o sistema operacional Ubuntu 20.04 LTS.

4.1. Classes de testes

Testes computacionais foram realizados buscando validar e verificar a eficiência do modelo proposto, considerando as classes de exemplos testadas em Poltroniere et al. [2008]. Os dados foram complementados com tempos e custos de setup relacionados à mudança dos padrões de corte, além do tempo de corte de uma bobina-mestre. Foi incluída, também, a capacidade de produção da cortadeira em cada período.

O conjunto de testes é formado por 270 exemplos, organizados em 27 classes com 10 exemplos cada. As classes se diferenciam pelo número de gramaturas, $K = 2, 4, 6$, número de períodos, $T = 8, 10, 12$, e número de diferentes larguras de itens demandados, sendo $N = 5, 10, 20$. São consideradas duas máquinas de papel, sendo que a máquina 1 produz jumbos de largura $L_1 = 540cm$ e a máquina 2 produz jumbos de largura $L_2 = 460cm$. O peso específico de cada bobina-mestre de gramatura k foi adotado como $\rho_k = 2kg$.

Os conjuntos de testes em Poltroniere et al. [2008] foram gerados com o objetivo de simular a realidade em indústrias papeleiras. A seguir, os demais parâmetros utilizados são descritos e complementados.

Custo de produção de uma bobina-mestre: $c^x_{kmt} \in [0,015; 0,025] \cdot b_{km}$.

Custo de estoque de uma bobina-mestre: $c^w_{kmt} \in [0,0000075; 0,0000125]$.

Custo de setup da máquina de papel: $c^z_{kmt} \in [0,03; 0,05] \cdot c^x_{kmt}$.

Custo de corte de uma bobina-mestre: $c^y_{kmt} = [0,03; 0,05] \cdot c^x_{kmt}$.

Custo de estoque dos itens finais: $c^e_{ikt} = 0,5 \cdot c^w_{kmt}$.

Custo de setup com a mudança de padrão de corte: $c^{sc}_{jkmt} \in [0,05; 0,15] \cdot c^y_{kmt}$.

Largura do item final: $l_i \in [0,1; 0,3] \cdot \dfrac{\sum_{m=1}^{M} L_m}{M}$.

Demanda dos itens: $d_{ikt} \in [0,300]$. Se $d_{ikt} \leq 50$, então $d_{ikt} = 0$.

Perda de papel devido ao setup na produção: $f_{km} \in [0,01; 0,05] \cdot b_{km}$.

Tempo de corte da bobina-mestre: $c_{jkm} \in [0,02; 0,05] \cdot b_{km}$.

Tempo de setup na mudança de padrão: $p_{jkm} \in [0,10; 0,15] \cdot c_{jkm}$.

Capacidade das máquinas de papel: $Cap^p_{mt} = \dfrac{\sum_{k=1}^{K} b_{km}}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} b_{km}} \cdot CM$,

sendo a capacidade média de produção por período calculada por:

$CM = 1,24 \cdot \dfrac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\left(\dfrac{D_{kt}}{M} + f_{km}\right)}{T}$, em que $D_{kt} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} \rho_k l_i d_{ikt}$

Capacidade da cortadeira: $Cap_t^c = \frac{\sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_m} c_{jkm}}{KMn_m} \cdot DM,$

sendo DM a demanda média por período, em quantidade de bobinas-mestre, dada por:

$$DM = \frac{\sum_{k=1}^{K} M \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} l_i d_{ikt}}{T \sum_{m=1}^{M} L_m}.$$

Esta rodada inicial de testes foi realizada com o objetivo de validação do modelo proposto para considerar tempos e custos de setup na máquina de corte. Os conjuntos de testes propostos em Poltroniere et al. [2008] foram utilizados, considerando a grande variabilidade nos dados gerados, a partir de observações da prática industrial.

Considerando cada exemplo do conjunto de testes, inicialmente, foi resolvida a relaxação linear do modelo (1)-(11), utilizando o método simplex com geração de colunas. Dessa forma, obteve-se limitantes inferiores para a solução do Problema Inteiro original. Na coluna "FO-Problema Relaxado" da Tabela 1 são apresentados, para cada classe, a média aritmética dos valores da função objetivo obtidos na solução dos 10 exemplos, além do desvio padrão calculado para esses valores.

Em um segundo momento, o Problema inteiro, representado pelo modelo original (1)-(11), foi resolvido considerando-se os padrões de corte associados à solução obtida para a sua relaxação linear, obtendo-se, assim, uma solução aproximada para o Problema Inteiro original. A coluna "FO-Problema Inteiro" da Tabela 1 apresenta, para cada classe de testes, a média aritmética dos valores da função objetivo obtidos na solução dos 10 exemplos da classe, além do desvio padrão. Por fim, a coluna "Tempo total" fornece a média do tempo, em segundos, utilizado na resolução dos exemplos de cada classe, bem como o desvio padrão associado. Observa-se que o tempo de resolução de cada exemplo varia significativamente entre as classes, de 21,5 segundos em casos mais simples (Classe 1) até valores acima de 1000 segundos em instâncias mais complexas (por exemplo, Classe 27). Isso evidencia que, apesar da alta qualidade das soluções, o esforço computacional tende a aumentar de acordo com a complexidade dos exemplos, em função da necessidade de um maior número de padrões de corte pela expansão do espaço de decisão.

Os valores médios e seus desvios padrão para ambos os problemas são muito próximos, o que evidencia que a relaxação linear fornece fortes limitantes inferiores para a solução do Problema Inteiro, resolvido considerando-se o conjunto de padrões de corte gerados como o modelo relaxado. Nesse sentido, os resultados apresentados na Tabela 1 demonstram que a aplicação da técnica de geração de colunas não apenas otimiza a utilização dos recursos, minimizando perdas e desperdícios, mas também reforça a robustez do modelo integrado proposto, indicando sua eficácia para resolver problemas de otimização em cenários complexos, o que é altamente desejável em ambientes industriais onde decisões rápidas e precisas são essenciais para a eficiência produtiva. Por outro lado, nada se pode afirmar sobre a qualidade da solução do Problema Inteiro, resolvido com os padrões pré-gerados, relativamente à solução do mesmo, em que todos os padrões possíveis estão disponíveis, pois a solução ótima do Problema Inteiro pode não utilizar os padrões gerados na solução da sua relaxação linear.

5. Conclusões e perspectivas futuras

Este estudo adotou como referência e ampliou o modelo integrado de corte de estoque e dimensionamento de lotes proposto por Poltroniere et al. [2008], considerando capacidade da cortadeira, tempos e custos de setup na mudança de padrão de corte. Classes de exemplos foram resolvidas, obtendo limitantes inferiores para o problema considerado. Além disso, soluções aproximadas para obtidas por considerar um conjunto de padrões de corte pré-gerados.

Tabela 1: Resultados obtidos para as classes de testes numéricos.

	FO - Problema Relaxado		FO - Problema Inteiro		Tempo total (s)	
Classe	**Média**	**Desvio Padrão**	**Média**	**Desvio Padrão**	**Média**	**Desvio Padrão**
1	1575,2	430,3	1592,1	431,5	21,5	40,4
2	1419,2	207,6	1438,9	209,0	30,2	5,9
3	1662,9	195,3	1684,8	195,1	133,5	28,8
4	1884,7	504,0	1906,1	504,1	15,6	18,0
5	1757,2	316,8	1782,3	316,7	38,7	8,9
6	1895,0	284,3	1923,2	285,9	192,6	32,6
7	2236,6	464,8	2260,4	464,9	127,2	343,4
8	2122,6	492,5	2151,7	491,7	74,3	14,9
9	2392,1	279,4	2428,6	279,3	384,7	220,1
10	3137,4	407,8	3168,6	392,4	24,8	19,8
11	4004,9	416,6	4058,8	416,5	53,0	12,0
12	4053,4	470,0	4113,0	468,6	245,2	64,9
13	4402,4	781,0	4462,1	783,6	22,8	5,9
14	4772,1	784,3	4839,6	783,1	74,6	12,7
15	5079,0	907,6	5182,3	932,7	360,6	99,2
16	5225,3	806,9	5301,9	809,4	27,4	5,8
17	5109,2	1878,8	5755,3	587,1	87,2	11,3
18	5621,2	812,6	5671,6	776,2	391,5	158,7
19	5260,5	717,2	5336,2	717,0	31,1	18,9
20	5873,5	752,8	5955,7	752,5	95,4	69,9
21	6272,1	1427,0	6361,0	1428,4	342,3	199,0
22	6561,6	809,4	6655,7	808,0	66,0	52,4
23	7125,3	813,2	7259,7	795,2	435,7	366,2
24	5152,8	3619,8	7474,7	836,5	448,3	414,5
25	7815,2	1448,7	7927,9	1440,2	71,4	50,6
26	8407,9	1232,6	8694,9	1251,5	259,6	117,5
27	9202,7	1010,0	10033,0	1433,9	932,4	565,2

Trata-se de uma pesquisa em andamento. O modelo e os conjuntos de testes considerados serão revistos e aprimorados, buscando se aproximar da realidade e das práticas industriais. Além disso, incertezas nos parâmetros serão analisadas e consideradas, com o objetivo de propor uma abordagem de otimização estocástica, ampliando a aplicabilidade do modelo.

Referências

Ayres, A. O. C., Campello, B. S. C., Oliveira, W. A., e Ghidini, C. T. L. S. (2021). A bi-integrated model for coupling lot-sizing and cutting-stock problems. *OR Spectrum*, 43(4):1047–1076. URL `https://link.springer.com/article/10.1007/s00291-021-00647-8`.

Bajpai, P. (2018). Pulp and paper industry: Chemicals. In *Biermann's Handbook of Pulp and Paper*, p. 1–36. Elsevier.

Campello, B. S. C., Ghidini, C. T. L. S., Ayres, A. O. C., e Oliveira, W. A. (2019). A multiobjective integrated model for lot sizing and cutting stock problems. *Journal of the Operational Research Society*, 71(9):1466–1478. URL https://doi.org/10.1080/01605682.2019.1619892.

Campello, B. S. C., Ghidini, C. T. L. S., Ayres, A. O. C., e Oliveira, W. A. (2020). A multiobjective integrated model for lot sizing and cutting stock problems. *Journal of the Operational Research Society*, 71(9):1466–1478.

Campello, B. S. C., Oliveira, W. A., Ayres, A. O. C., e Ghidini, C. T. L. S. (2017). Lot-sizing problem integrated into cutting stock problem in a paper industry: A multi-objective approach. Technical report, Cornell University Library. URL https://repository.library.cornell.edu/catalog/4510659.

Correia, M. H., Oliveira, J. F., e Ferreira, J. S. (2004). Reel and sheet cutting at a paper mill. *Computers & Operations Research*, 31(8):1223–1243. URL https://doi.org/10.1016/S0305-0548(03)00076-5. Afiliations: a) INESC Porto, Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores do Porto, 4200-465 Porto, Portugal; b) Faculdade de Economia e Gestão, Universidade Católica Portuguesa, 4169-005 Porto, Portugal; c) Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, 4200-465 Porto, Portugal.

de Lara Andrade, P. R., de Araujo, S. A., Cherri, A. C., e Lemos, F. K. (2021). The integrated lot sizing and cutting stock problem in an automotive spring factory. *Applied Mathematical Modelling*, 91:1023–1036.

Figueira, G., Amorim, P., Guimarães, L., Amorim-Lopes, M., Neves-Moreira, F., e Almada-Lobo, B. (2015). A decision support system for the operational production planning and scheduling of an integrated pulp and paper mill. *Computers & Chemical Engineering*, 77:85–104.

Figueira, G., Santos, M. O. d., e Almada-Lobo, B. (2013). A hybrid vns approach for the short-term production planning and scheduling: A case study in the pulp and paper industry. *Computers & Operations Research*, 40(7):1804–1818. URL https://doi.org/10.1016/j.cor.2013.01.015.

Furlan, M., Almada-Lobo, B., Santos, M., e Morabito, R. (2015). Unequal individual genetic algorithm with intelligent diversification for the lot-scheduling problem in integrated mills using multiple-paper machines. *Computers & Operations Research*, 59:33–50.

Furlan, M., Almada-Lobo, B., Santos, M., e Morabito, R. (2024). Matheuristic for the lot-sizing and scheduling problem in integrated pulp and paper production. *Computers Industrial Engineering*, 192:110183. ISSN 0360-8352. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835224003048.

Furlan, M., Almada-Lobo, B., e Morabito, R. (2022). Production planning in the paper industry: A multistage optimization approach considering sequence-dependent setups. *International Journal of Production Economics*, 243:108320.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, San Francisco. ISBN 9780716710455.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1961). A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations research*, 9(6):849–859.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1963). A linear programming approach to the cutting stock problem—part ii. *Operations research*, 11(6):863–888.

Lemos, F. K., Cherri, A. C., e de Araujo, S. A. (2021). The cutting stock problem with multiple manufacturing modes applied to a construction industry. *International Journal of Production Research*, 59(4):1088–1106.

Melega, G. M., de Araujo, S. A., e Jans, R. (2018). Classification and literature review of integrated lot-sizing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, 271(1):1–19.

Pierini, L. M. e Poldi, K. C. (2021). An analysis of the integrated lot-sizing and cutting-stock problem formulation. *Applied Mathematical Modelling*, 99:155–165. URL `https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.06.009`. Corresponding affiliations: Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651, Campinas, SP, Brasil. Published in November 2021.

Pierini, L. M. e Poldi, K. C. (2023). Optimization of the cutting process integrated to the lot sizing in multi-plant paper production industries. *Computers & Operations Research*, 153:106157. URL `https://doi.org/10.1016/j.cor.2023.106157`. Afiliations: Livia Maria Pierini, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP); Kelly Cristina Poldi, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) - UNICAMP.

Poltroniere, S. C., Araujo, S. A., e Poldi, K. C. (2016). Optimization of an integrated lot sizing and cutting stock problem in the paper industry. *TEMA (São Carlos)*, 17(3):305–320.

Poltroniere, S. C., Poldi, K. C., Toledo, F. M. B., e Arenales, M. N. (2008). A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. *Annals of Operations Research*, 157(1): 91 – 104. URL `https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-35348864359&doi=10.1007%2fs10479-007-0200-6&partnerID=40&md5=b67878f9db0a62532988b31d8c73707a`. Cited by: 56.

Vanzela, M., Melega, G. M., Rangel, S., e de Araujo, S. A. (2017). The integrated lot sizing and cutting stock problem with saw cycle constraints applied to furniture production. *Computers & Operations Research*, 79:148–160. URL `https://repositorio.unesp.br/bitstreams/1d9ae471-8a46-4628-889a-340f6fad9a27/download`.

Wäscher, G., Haußner, H., e Schumann, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1109–1130.