2 Introdução

Fique à vontade para escolher as ferramentas para as questões a seguir.

1. Calcule $\sqrt{10}$ usando o método babilônico.

2. ▷ Uma operação bastante comum em processamento de sinais é a convolução. Uma das aplicações mais utilizada é na suavização de sinais para, por exemplo, atenuar ruído.

   a. Crie uma função $f(x) = sen(x) + \eta(x)$, onde $\eta(x)$ é uma função de ruído branco gaussiano. Utilize a função np.random.normal (utilize média 0 e desvio padrão não muito alto como, por exemplo, 0.1).
   b. Calcule a convolução de $f(x)$ com um filtro de média. Utilize a função np.convolve. O primeiro argumento dessa função é o vetor no qual quer aplicar a convolução. O segundo argumento é o chamado kernel. Escolha np.ones(s)/s. Quanto maior o valor de s, maior será a suavização.
   c. Plote uma única figura com os seguintes plots:
      - A função $sen(x)$
      - A função $f(x)$ (a senóide com ruído branco gaussiano)
      - O resultado da convolução
      - O erro: a diferença absoluta entre o resultado da convolução e a função $sen(x)$

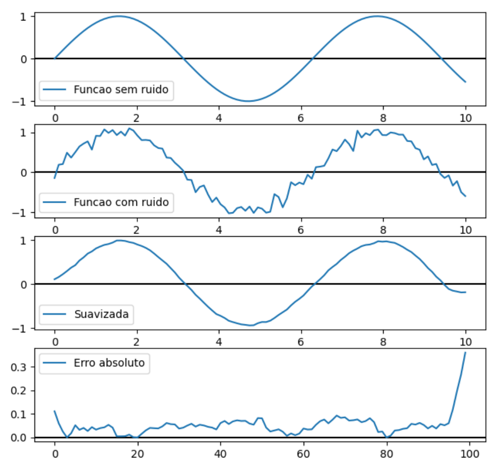

Figure 5: Exemplo de resultado

3. Dado um determinado ponto em uma função contínua, pode-se estimar pontos próximos a partir da derivada nesse ponto. A derivada pode ser calculada como o seguinte limite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

   Podemos utilizar um valor de h suficientemente pequeno para aproximar $f'(a)$. Utilize esse conceito para calcular dois pontos próximos a um ponto, um à esquerda, outro à direita, na função $f(x) = x^2$. Plote a função $f(x)$, a reta tangente ao ponto escolhido e os dois pontos próximos calculados. Vide Figura 6.

4. ▷ Em algumas aplicações, uma função não é conhecida, mas sua derivada e algum ponto da função são conhecidos. Uma forma de descobrir a função desconhecida, pelo menos em algumas amostras, é o método de Euler (a forma mais simples dos métodos Runge-Kutta). Funciona assim: parte-se do ponto conhecido e, utilizando a derivada (como na questão anterior), calcula-se um segundo ponto da função desconhecida. A partir do segundo ponto, calcula-se um terceiro ponto. Esse processo é repetido tantas vezes quanto se queira.

   Dados:

   - A função desconhecida $f(x) = xcos(x) + 1$ (veja que a função desconhecida está sendo escrita aqui para que você possa comparar o resultado com a função $f(x)$ – na prática essa função não seria conhecida)

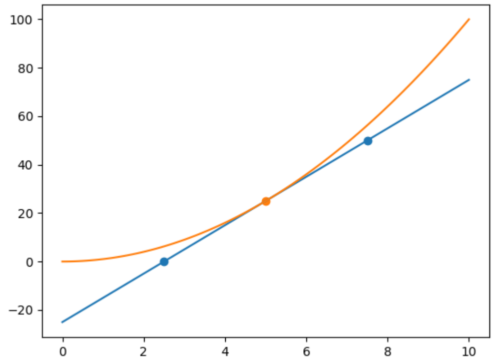

Figure 6: Exemplo de resultado

- $f(0) = 1$ (o ponto conhecido)
- $f'(x) = cos(x) - xsen(x)$ (a derivada conhecida)

Partindo do ponto conhecido desta função $f(0)$, estime outros pontos de $f(x)$ no intervalo $[0, 6]$. Plote em um único gráfico a função $f(x)$ e os pontos estimados, conectando-os com segmentos de reta.

3 Representação Numérica

1. Um sistema numérico é constituído desses 4 algarismos: 0, $\triangle$ (equivalente a 1), $\times$ (equivalente a 2) e $\square$ (equivalente a 3).

   a. Conte até o trigésimo número, fazendo a correspondência com a contagem de inteiros na base decimal e na base hexadecimal
   b. Calcule $\triangle \times + \times \times$ e escreva o resultado no referido sistema e nas bases decimal e hexadecimal
   c. Multiplique $\square$ por $\triangle\triangle$ e escreva o resultado no referido sistema e nas bases decimal e hexadecimal
   d. Calcule $\triangle \triangle \triangle - \square\times$ e escreva o resultado no referido sistema e nas bases decimal e hexadecimal

2. Realize as seguintes conversões de base:

   1. Casos de uma base maior para uma base menor:
      a. $423_5 \rightarrow x_3$
      b. $521_6 \rightarrow x_2$
      c. $893_{10} \rightarrow x_2$
      d. $75254_8 \rightarrow x_2$
      e. $FFAACC_{16} \rightarrow x_2$
      f. $EA3BA_{16} \rightarrow x_4$
      g. $FA3B_{16} \rightarrow x_{10}$
   2. Casos de uma base menor para uma base maior:
      a. $21101_3 \rightarrow x_5$
      b. $1101_2 \rightarrow x_7$
      c. $110111_2 \rightarrow x_{10}$
      d. $101011101_2 \rightarrow x_8$
      e. $311032_4 \rightarrow x_{16}$
      f. $8391_{10} \rightarrow x_{16}$
      g. $11001111100110001_2 \rightarrow x_{16}$

3. Represente os seguintes números em inteiros de 8 bits utilizando (1) sinal-magnitude, (2) complemento de 1 e (3) complemento de 2.

   a. 74
   b. 119
   c. -15
   d. -119

4. Represente os seguintes números de acordo com o padrão IEEE 754 (precisão simples).

   a. 32.625
   b. -182.55

5. $\triangleright$ Realize as seguintes conversões de base:

   a. $6201_7 \rightarrow x_3$
   b. $EBA_{16} \rightarrow x_2$
   c. $111000001100010111101_2 \rightarrow x_{16}$

6. $\triangleright$ Represente o número -99 em inteiro de 8 bits utilizando (1) sinal-magnitude, (2) complemento de 1 e (3) complemento de 2.

7. $\triangleright$ Represente o número -382.775 de acordo com o padrão IEEE 754 (precisão simples)

8. $\triangleright$ Você está escrevendo um programa que registra em um arquivo os comandos de um controle de playstation. Esse controle possui um total de 14 botões, além do analógico. Mas para os registros, você considerará somente os seguintes 12 botões: $\triangle$, $\times$, $\square$, $\bigcirc$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\uparrow$, $\downarrow$, LT, LB, RT, RB.

   a. Como você poderia representar uma sequência de comandos como inteiros? Exemplifique.
   b. Como você poderia gravar/recuperar uma sequência de comandos de forma a economizar o máximo possível de espaço no arquivo?

4 Zeros de funções

1. Marque V para verdadeiro, F para falso
    a. Uma desvantagem de usar $|f(x_k)| < \epsilon$ como critério de parada é que a função pode apenas chegar próximo de 0, mas não cruzar o eixo x.
    b. Dado um intervalo [a, b], se f é contínua, f(a) > 0 e f(b) > 0, então não há raiz real no intervalo [a, b].
    c. Dado um intervalo [a, b], se f é contínua, f(a) > 0 e f(b) < 0, então há exatamente uma única raiz real no intervalo [a, b].
    d. O método de Newton terá uma melhor convergência se já estiver próximo da raiz.
    e. Uma desvantagem do método da secante é ter que calcular analiticamente a derivada da função.
    f. O método Regula Falsi (falsa posição) sempre mantém um intervalo cujos extremos possuem sinais opostos na função.
    g. Um ponto fixo p em uma função g(x) é tal que g(p) = 0.
    h. Se f(x) = x - g(x), então os pontos fixos de g(x) são raízes de f(x)

2. Encontre as 3 raízes reais (vide Figura 7) de:

$$f(x) = x^3 + 0.82x^2 - 12.4577x + 4.21686$$

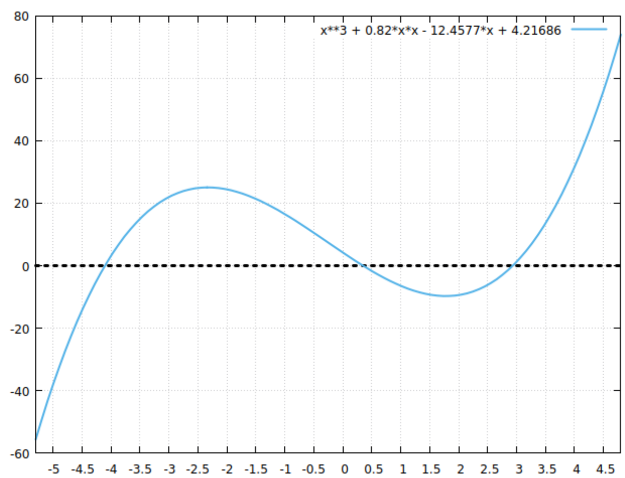

Figure 7: Função f(x)

- Métodos
    a. Bisseção (considere o intervalo inicial $[-4.3, 4.0]$)
    b. Newton-Raphson (considere $x_0 = 1.2$)
    c. Secante (considere $x_0 = 2.8$ e $x_1 = 3.4$)
    d. Regula Falsi (considere $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$)
- Metodologia:
    1. O critério de parada deve ser:
        a. $|f(x_i)| < 0.01$

3. ▷ Encontre computacionalmente as 4 raízes reais (vide Figura 8) de:

$$f(x) = x^4 - 2.36343x^3 - 18.1163x^2 + 20.7595x + 58.8273$$

- Métodos
    a. Bisseção
    b. Newton-Raphson

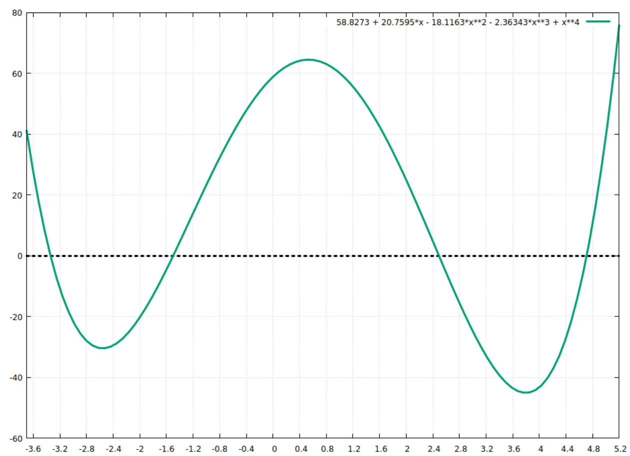

Figure 8: Função f(x)

c. Secante
d. Regula Falsi

- No resolução, compare os métodos em relação ao número de iterações
- Implementar utilizando os templates (em C/python/R) disponíveis no github
- Metodologia:
  1. Você pode utilizar o gráfico para ter uma boa noção do intervalo inicial no caso de (a), x_0 no caso de (b) e x_0, x_1 no caso de (c) e (d).
  2. O critério de parada deve ser:
     a. $|f(x_i)| < 0.001$ (note a mudança em relação à questão anterior)
  3. Basta que cada método encontre uma das raízes, desde que todas as 4 raízes sejam encontradas
  4. A função que implementa o método deve escrever todas as aproximações na tela (uma por linha)

4. ▷ (Burden, pag. 95) Duas escadas se cruzam em um beco de largura L. Cada escada tem uma extremidade apoiada na base de uma parede e a outra extremidade apoia em algum ponto na parede oposta. As escadas se cruzam a uma altura A acima do pavimento. **Calcule L**, sendo $x_1 = 20m$ e $x_2 = 30m$ os respectivos comprimentos das escadas e $A = 8m$. Use um dos métodos para encontrar raízes utilizando como critério de parada $|f(x_i)| < 0.001$.