Problemas e transporte e transbordo

1. **01.** (2,5 pontos) Uma empresa de refrigeradores tem fábricas em três cidades (Porto Alegre, Caxias do Sul e Santa Maria). A produção é de 40 refrigeradores por fábrica. Essa empresa remete os refrigeradores para três locais de demanda (Lojas 1, 2 e 3) que solicitam, respectivamente, 20, 50 e 30 refrigeradores. Os custos com transporte são mostrados a seguir. Utilizando os métodos do "Canto Noroeste" e do "menor *looping*", determine o custo ótimo de transporte entre fábricas e locais de demanda., de acordo com a tabela de custos abaixo.

Resposta: Custo ótimo = $ 350,00

***Obs*:** Caso haja mais demanda do que capacidade produtiva, os custos incorridos são de $20 por local de demanda. Caso haja mais capacidade do que demanda, os custos incorridos são de $9, $5 e $8 por cidade (Porto Alegre, Caxias do Sul e Santa Maria, respectivamente).

Tabela de Custos

	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Porto Alegre	$2	$4	$9
Caxias do Sul	$3	$2	$6
Santas Maria	$4	$3	$2

2. **1.** A empresa XYZ necessita transportar seus produtos de três fábricas (A, B e C) existentes na Região Sul do Brasil para quatro lojas (D, E, F e G) existentes na região Sudeste ao menor custo possível. Cada fábrica pode fornecer, respectivamente, 25, 25 e 50 produtos. A demanda de cada loja é, respectivamente, de 5, 20, 30 e 35 produtos. Sabendo-se que o custo unitário de transporte nos percursos está assim mensurado: $A \rightarrow D = 10$, $A \rightarrow E = 5$, $A \rightarrow F = 9$, $A \rightarrow G = 12$, $B \rightarrow D = 8$, $B \rightarrow E = 2$, $B \rightarrow F = 7$, $B \rightarrow G = 9$, $C \rightarrow D = 9$, $C \rightarrow E = 3$, $C \rightarrow F = 4$ e $C \rightarrow G = 5$, pede-se:

a) Encontrar uma solução inicial viável pelo método do canto noroeste;

b) Encontrar a solução ótima (pelo método dos menores "*loops*") que representa o menor custo total de transporte;

c) Qual o custo mínimo encontrado?

Obs: Os possíveis custos por demanda ou oferta fictícias serão iguais a 10 cada uma.

3. **Um hospital necessita comprar 3 bombonas de insumos (medicamentos) para manipular soros quimioterápicos para serem consumidos durante o corrente mês e 4 bombonas para o mês subseqüente. O insumo é perecível e só pode ser utilizado no mês da compra. Dois laboratórios (Daisy e Lorach) fornecem os medicamentos. O hospital está limitado a comprar 5 bombonas de cada laboratório e os preços de venda de cada laboratório estão descritos na Tabela 01. Formule um problema de transporte balanceado para minimizar o custo de compra das quantidades requeridas dos medicamentos.**

Resposta: Custo mínimo= R$ 4300,00

	Mês 1	Mês 2	MES I	CAP
Daisy	R$ 800	R$ 720	O	5
Lorach	R$ 710	R$ 750	O	5
			7	

Tabela 01

4. (25 pts) Uma empresa de ônibus possui quatro carros em diferentes garagens: 2 carros estão na garagem A, 1 carro está na garagem B e 1 carro está na garagem C. Quatro clientes, α, β, γ e δ, solicitam carros da empresa de ônibus; cada cliente necessita de dois carros. As distâncias entre as garagens e os clientes vêm dadas na tabela abaixo. Existe uma multa pelo não atendimento dos clientes. Cada carro não atendido implica em uma multa de $50 no cliente α, $45 no cliente β, $42 no cliente γ e $48 no cliente δ. Defina de quais garagens devem sair os carros para atender aos clientes, tal que a distância total percorrida e a multa pelo não fornecimento seja a menor possível. Utilize o simplex dos transportes.

	α	β	γ	δ	cap
A	13	35	42	9	2
B	6	61	18	30	1
C	15	10	5	9	1
	50	45	42	48	

Resposta: Garagem A = 1 carro de α e 1 carro de δ; Garagem B = 1 carro de α; Garagem C = 1 carro de δ

Ou Garagem A = 2 carro de δ; Garagem B = 1 carro de α; Garagem C = 1 carro de γ

5. A Petróleo Sunco extrai petróleo de dois poços. O Poço 1 tem capacidade de 150.000 barris por dia e o Poço 2 tem capacidade de 200.000 barris por dia. O petróleo pode ser transportado diretamente para seus clientes em Los Angeles e Nova York. Alternativamente, a empresa pode transportar o petróleo até os portos de Mobile e Galveston para então levá-lo ao destino final. Os clientes de Los Angeles necessitam de 160.000 barris por dia e os de Nova York de 140.000 barris por dia. Os custos de transporte de 1000 barris de um ponto a outro é mostrado na Tabela 03. Formular o problema de transbordo tal que Petróleo Sunco minimize os custos de transporte e atenda a demanda dos clientes.

	Poço 1	Poço 2	Mobile	Galveston	N.Y.	L.A.
Poço 1	0	-	10	13	25	28
Poço 2	-	0	15	12	26	25
Mobile	-	-	0	6	16	17
Galveston	-	-	6	0	14	16
N.Y.	-	-	-	-	0	15
L.A.	-	-	-	-	15	0

Tabela 03

6. **2.** A Ford americana fabrica seus carros em Los Angeles e Detroit e tem uma área para estocagem em Atlanta. A empresa fornece carros para o Texas e para a Flórida. O custo de transportar um carro entre dois pontos é dado na tabela abaixo, onde o sinal "-" significa que não pode haver transporte entre esses dois pontos.

A fábrica de Los Angeles tem uma capacidade de produção de 1100 carros e a de Detroit de 2900. Os revendedores no Texas têm que receber 2400 veículos enquanto os da Flórida 1500 unidades.

De	Para: LA	Detroit	Atlanta	Texas	Flórida
LA	$0	$140	$100	$90	$225
Detroit	$145	$0	$111	$110	$119
Atlanta	$105	$115	$0	$113	$78
Texas	$89	$109	$121	$0	-
Florida	$210	$117	$82	-	$0

A partir dessas informações, pede-se encontrar a solução ótima de tal forma que minimize os custos de transporte incorridos.

Problemas de alocação

1. (15 pts) A matriz abaixo representa seis nadadoras (linhas da matriz) e quatro estilos (colunas da matriz). Os melhores tempos obtidos por cada nadadora em cada estilo vêm dados no corpo da matriz. Defina a melhor alocação de nadadoras a estilos utilizando o algoritmo húngaro.

	Estilo A	Estilo B	Estilo C	Estilo D
Mary	50	40	60	20
Sally	40	30	40	25
Robin	60	20	30	30
Gina	30	30	30	20
Truddy	10	20	20	30
Jullie	20	35	45	30

Resposta: Estilo A: Jullie; Estilo B: Robin; Estilo C: Truddy; Estilo D: Mary

2. **3.** Em uma gincana realizada por uma escola de 2º Grau, o chefe de determinada equipe necessita escolher os respondentes mais rápidos nas disciplinas de Geografia, Matemática, História, Literatura e Biologia. Em uma simulação realizada poucos dias antes da gincana, o Chefe da equipe mensurou os seguintes tempos de respostas por aluno em segundos:

	Geografia	Matemática	História	Literatura	Biologia
Roger	38	51	42	39	39
Madona	39	54	36	38	36
Cassandra	36	55	40	39	42
Silmara	38	54	43	37	37
Norberto	40	50	40	36	38

A partir dessas informações, quais alunos devem ser escolhidos para responder questões de cada disciplina? Qual o tempo total gasto na tarefa de responder às questões apresentadas?

3. 5ª QUESTÃO (1,5 PONTOS). A turma U do curso de Engenharia de Produção participará do 1º Campeonato Universitário de Jogos de Baralho a ser realizado em dezembro próximo em Florianópolis. Considerando que nem todos os alunos da referida turma poderão participar das várias modalidades de jogos a serem realizadas durante o evento, o coordenador da equipe deverá escolher um representante por modalidade de jogo, de acordo a melhor performance de atuação apresentada durante treinos realizados nos intervalos da disciplina de Pesquisa Operacional I, no primeiro semestre de 2002. Os dados referentes às performances de cada jogador são apresentados a seguir:

	Truco	Pôquer	Canastra	Pife-pafe	Escopa
Aluno R	72	65	65	68	51
Aluno G	61	68	64	59	60
Aluno L	69	67	65	67	68
Aluno D	58	61	66	67	60
Aluno A	68	67	67	68	66

Quais alunos (e respectivas modalidades de jogos) devem ser escolhidos para representar a turma U?

Resposta: Aluno R: Escopa; Aluno G: Pife-pafe; Aluno L: Canastra; Aluno D: Truco; Aluno A: Pôquer

4. 4. Uma metalúrgica está com problemas para alocar colaboradores em tarefas seqüenciais do seu processo produtivo. A metalúrgica necessita realizar quatro tarefas e dispõe de cinco colaboradores. O tempo em minuto que cada colaborador gasta para realizar cada tarefa é apresentado na Tabela 02. Determine a alocação dos colaboradores em cada tarefa de modo a minimizar o tempo total requerido para realizar as quatro tarefas.

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
Colaborador 1	22	18	30	18
Colaborador 2	18	-	27	22
Colaborador 3	26	20	28	28
Colaborador 4	16	20	-	14
Colaborador 5	21	-	25	28

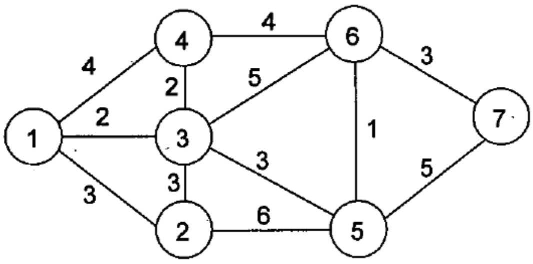
Tabela 02

Resposta: Colaborador 1: Tarefa 2; Colaborador 2: Tarefa 1; Colaborador 3: Tarefa 5; Colaborador 4: Tarefa 4; Colaborador 5: Tarefa 3;

Problema de caminho mais curto de redes

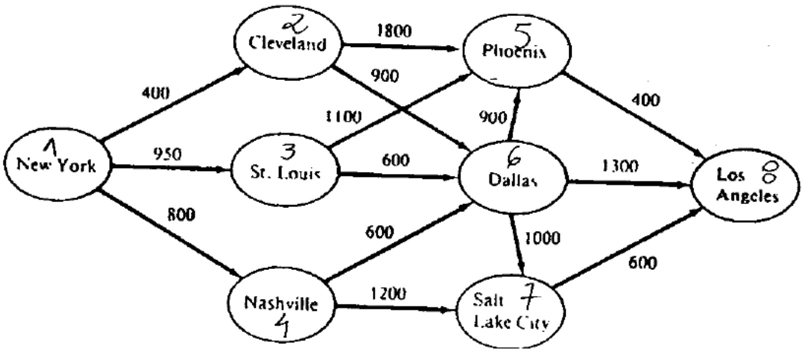
1. **03.** (2,5 pontos) A partir da rede abaixo, utilize o algoritmo de Dijkstra para encontrar a trilha mais curta entre os nós 1 e 7. Considere que todos os arcos, à exceção dos arcos que saem de 1 e chegam a 7, são do tipo: ↔.

Resposta: 7 -6 -5 – 3 - 1



2. 2. (20 pts) Utilize o algoritmo de Djikstra para encontrar o caminho mais curto entre as cidades de New York e Los Angeles. Apresente todos os passos do algoritmo na solução do problema. Numere os nodos em ordem crescente, da esquerda para a direita e de cima para baixo (por exemplo, 1= NY, 2=Clev, 3=St.Louis, 4=Nash, 5=Phoenix, etc.).

Resposta: New York - St. Lois – Phoenix – Los Angeles



3. 1. Determinar o menor caminho entre os pontos 1 e 12 no grafo apresentado na Figura 01:

Resposta: Caminhos:
12-10-8-5-3-1

12-10-8-5-3-2-1

12-11-10-8-5-3-1

12-11-10-8-5-3-2-1

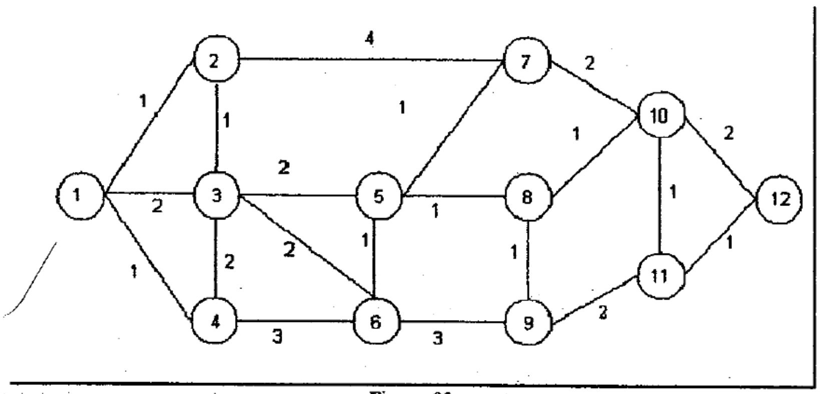
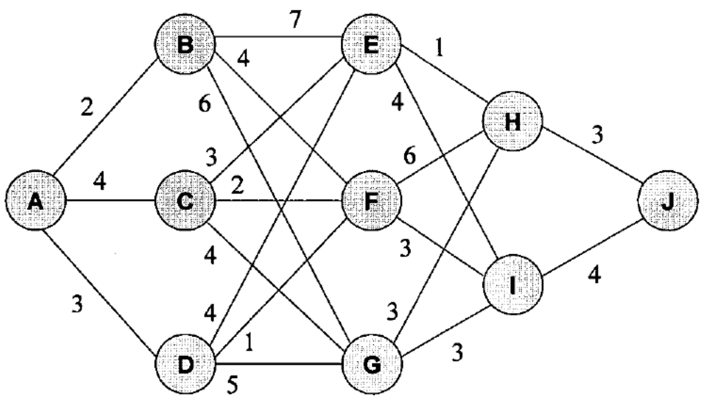


Figura 01

4. **4.** Considerando a rede abaixo, utilize o algoritmo de Dijkstra para encontrar a trilha mais curta entre os nós A e J. Existe mais de um trilha possível?



5. O banco Premiere está realizando cabeamento para conectar os computadores de cada um de seus escritórios, ao escritório central. As linhas não precisam estar conectadas diretamente ao escritório central. Elas podem ser conectadas indiretamente, sendo conectadas a outro escritório que está conectado (direto ou indiretamente). A exigência é de que cada escritório deverá estar conectado através de alguma rota ao escritório principal.
O custo é definido por km de cabo utilizado. As distâncias em km entre cada par de escritórios é apresentado na tabela.

	Distance between Pairs of Offices					
	Main	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5
Main office	—	190	70	115	270	160
Branch 1	190	—	100	110	215	50
Branch 2	70	100	—	140	120	220
Branch 3	115	110	140	—	175	80
Branch 4	270	215	120	175	—	310
Branch 5	160	50	220	80	310	—

Os gestores desejam determinar quais pares de escritórios devem ser diretamente conectados por estes cabos de modo a conectar todos os escritórios (direto ou indiretamente) ao escritório principal em um custo total mínimo.
(a) Represente na forma de rede
(b) Use o algoritmo para resolver o problema

Programação inteira e binária

Formulação

1. A empresa Peterson e Johnson, está considerando cinco projetos de desenvolvimento possíveis. A tabela seguinte mostra o retorno a longo prazo estimado (valor presente líquido) que cada produto pode gerar, tal como a quantidade de investimentos requeridos para executar cada projeto, em unidades de milhões de dólares.

	Development Project				
	1	2	3	4	5
Estimated profit	1	1.8	1.6	0.8	1.4
Capital required	6	12	10	4	8

Os proprietários da empresa possuem 20 milhões de capital para investir nestes projetos. Eles precisam selecionar a combinação de projetos que irá maximizar seu retorno estimado a longo prazo (valor presente líquido) sem investir mais do que 20 milhões. Formule a programação inteira binária para este problema.

2. The board of directors of General Wheels Co. is considering seven large capital investments. Each investment can be made only once. These investments differ in the estimated long-run profit (net present value) that they will generate as well as in the amount of capital required, as shown by the following table (in units of millions of dollars):

	Investment Opportunity						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Estimated profit	17	10	15	19	7	13	9
Capital required	43	28	34	48	17	32	23

The total amount of capital available for these investments is $100 million. Investment opportunities 1 and 2 are mutually exclusive, and so are 3 and 4. Furthermore, neither 3 nor 4 can be undertaken unless one of the first two opportunities is undertaken. There are no such restrictions on investment opportunities 5, 6, and 7. The objective is to select the combination of capital investments that will maximize the total estimated long-run profit (net present value).
(a) Formulate a BIP model for this problem

3. Vincent Cardoza is the owner and manager of a machine shop that does custom order work. This Wednesday afternoon, He has received calls from two customers who would like to place rush orders. One is a trailer hitch company which would like some custom-made heavy-duty tow bars. The other is a mini-car-carrier company which needs some customized stabilizer bars. Both customers would like as many as possible by the end of the week (two working days). Since both products would require the use of the same two machines, Vincent needs to decide and inform the customers this afternoon about how many of each product he will agree to make over the next two days.
Each tow bar requires 3.2 hours on machine 1 and 2 hours on machine 2. Each stabilizer bar requires 2.4 hours on machine 1 and 3 hours on machine 2. Machine 1 will be available for 16 hours over the next two days and machine 2 will be available for 15 hours.
The profit for each tow bar produced would be $130 and the profit for each stabilizer bar produced would be $150. Vincent now wants to determine the mix of these production quantities that will maximize the total profit.
Formulate an IP model for this problem.

4. Pawtucket University is planning to buy new copier machines for its library. Three members of its Operations Research Department are analyzing what to buy. They are considering two different models: Model A, a high-speed copier, and Model B, a lower-speed but less expensive copier. Model A can handle 20,000 copies a day, and costs $6,000. Model B can handle 10,000 copies a day, but costs only $4,000. They would like to have at least six copiers so that they can spread them throughout the library. They also would like to have at least one high-speed copier. Finally, the copiers need to be able to handle a capacity of at least 75,000 copies per day. The objective is to determine the mix of these two copiers which will handle all these requirements at minimum cost.
Formulate an IP model for this problem.

Introdução a método branch-and-bound

1. Considere o seguinte problema de programação inteira

$$\text{Maximize} \quad Z = 5x_1 + x_2,$$

subject to

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\le 1 \\ 4x_1 + x_2 &\le 12 \end{aligned}$$

and

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$
$$x_1, x_2 \text{ are integers.}$$

a) Resolva este problema graficamente.
b) Resolva o problema linear correspondente (relaxado em suas restrições de não fracionaridade) graficamente. Arredonde este valor para a solução inteira mais próxima e observe se é viável. Então, enumere todas as soluções inteiras possíveis de se obter por arredondamento da solução do problema linear (arredondamento para número inteiro maior e menor). Para cada solução arredondada, avalie viabilidade, e, se viável, calcule Z. Uma destas soluções arredondadas é a solução ótima do problema de programação inteira?

2. Considere o seguinte problema de programação inteira

$$\text{Maximize} \quad Z = 220x_1 + 80x_2,$$

subject to

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\le 16 \\ 2x_1 - x_2 &\le 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\le 4 \end{aligned}$$

and

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$
$$x_1, x_2 \text{ are integers}$$

a) Resolva este problema graficamente.
b) Resolva o problema linear correspondente (relaxado em suas restrições de não fracionaridade) graficamente. Arredonde este valor para a solução inteira mais próxima e observe se é viável. Então, enumere todas as soluções inteiras possíveis de se obter por arredondamento da solução do problema linear (arredondamento para número inteiro maior e menor). Para cada solução arredondada, avalie viabilidade, e, se viável, calcule Z. Uma destas soluções arredondadas é a solução ótima do problema de programação inteira?

3. Considere o seguinte problema de programação binária

$$\text{Maximize} \quad Z = 2x_1 + 5x_2,$$

subject to

$$\begin{aligned} 10x_1 + 30x_2 &\le 30 \\ 95x_1 - 30x_2 &\le 75 \end{aligned}$$

and

$$x_1, x_2 \text{ are binary.}$$

a) Resolva este problema graficamente.
b) Resolva o problema linear correspondente (relaxado em suas restrições de não fracionaridade) graficamente. Arredonde este valor para a solução inteira mais próxima e observe se é viável. Então, enumere todas as soluções inteiras possíveis de se obter por arredondamento da solução do problema linear (arredondamento para número inteiro maior e menor). Para cada solução arredondada, avalie viabilidade, e, se viável, calcule Z. Uma destas soluções arredondadas é a solução ótima do problema de programação inteira?

4. Considere o seguinte problema de programação binária

Maximize $Z = -5x_1 + 25x_2$,

subject to

$$-3x_1 + 30x_2 \leq 27$$
$$3x_1 + x_2 \leq 4$$

and

x_1, x_2 are binary.

a) Resolva este problema graficamente.

b) Resolva o problema linear correspondente (relaxado em suas restrições de não fracionaridade) graficamente. Arredonde este valor para a solução inteira mais próxima e observe se é viável. Então, enumere todas as soluções inteiras possíveis de se obter por arredondamento da solução do problema linear (arredondamento para número inteiro maior e menor). Para cada solução arredondada, avalie viabilidade, e, se viável, calcule Z. Uma destas soluções arredondadas é a solução ótima do problema de programação inteira?

5. Considere seguintes afirmações sobre qualquer problema de programação inteira pura (na forma maximização) e o problema linear correspondente (relaxado em suas restrições de não fracionaridade). Marque se verdadeiro ou falso e justifique sua resposta.

( ) a solução viável do problema linear correspondente é um subgrupo da solução viável do problema de programação inteira.

( ) se uma solução ótima do problema linear correspondente é uma solução inteira, então o valor ótimo da função objetivo é o mesmo em ambos os problemas

( ) se uma solução não inteira é viável para o problema linear correspondente, então a solução inteira mais próxima (arredondando valor de cada variável para o valor inteiro mais próximo) é uma solução viável para o problema de programação inteira.

Método branch-and-bound

1. **04.** (2,5 pontos) Aponte a solução ótima inteira para o problema de programação inteira abaixo, de acordo com a técnica da ramificação (*branch-and-bound*).

Max $Z = 3x_1 + 4x_2$

s.a.

$x_1 - x_2 \leq 2$

$-x_1 + 3x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$ e x_1, x_2 inteiros

Dica: resolva os subproblemas (com relaxação) utilizando método gráfico

2. **(25 pts)** Resolva o seguinte problema de programação inteira mista, apresentando a árvore hierárquica de solução e os tableaus utilizados para resolver os subproblemas:

$$Max\ z = 4x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$s.a: 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11$$
$$x_2, x_3\ \text{inteiros}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dica: resolva os subproblemas (com relaxação) utilizando tableau do Simplex

Z = 10,33

3. Max $z = 5x_1 + x_2$

Sujeito a:

$-x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$4x_1 + x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2$ inteiras

Dica: resolva os subproblemas (com relaxação) utilizando método gráfico

4. Dica: resolva os subproblemas (com relaxação) utilizando método gráfico

$$\text{Max } z = 2x_1 + 5x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$8x_1 + 2x_2 \le 15$$
$$x_1, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \text{ inteiras}$$

5. Dica: resolva os subproblemas (com relaxação) utilizando solver

Maximize $Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5,$

subject to

$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \le 6$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \le 0$$

and

x_j is binary, for $j = 1, 2, \ldots, 5.$

6. Dica: resolva os subproblemas (com relaxação) utilizando solver

Minimize $Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5,$

subject to

$$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \ge 2$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \ge 0$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \ge 1$$

and

x_j is binary, for $j = 1, 2, \ldots, 5.$

7. Dica: resolva os subproblemas (com relaxação) utilizando solver

Maximize $Z = 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 2x_4 - 4x_5,$

subject to

$$-3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 9x_4 + 9x_5 \ge 10$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 - 3x_5 \le 0$$

and

x_j is binary, for $j = 1, 2, \ldots, 5.$

Exercícios retirados de:

HILLER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. Introduction to Operations Research. Mc Graw Hill. 7ª Edição. 2001

E outros