Mini-curso Aventuras Matemáticas com a linguagem Julia

XXXVI SELMAT

Estrutura de decisão:

- Avaliação condicional: if

```
if x < y
    ...
elseif x > y
    ...
else
    ...
end
```

Exercício 1:

Construa uma função computacional que decida se um dado número é positivo, negativo ou zero.

In [ ]:
```
x = -3
```

Estrutura de repetição:

- While

```
while critério
    ...
    i += 1
end
```

Exercício 2:

Construa uma figura fechada utlizando a estrutura de repetição *while* . Características: comprimento 10px e ângulo de 15^o

In [ ]:
```
using Luxor

i = 1

@draw begin
    t = Turtle()
    Forward(t,10)
    Turn(t,15)
end
```

Estrutura de repetição:

- For

```
for i = 1:n
    ...
end

for i in []
    ...
end
```

Exercício 2:

Construa um pentágono, utlizando a estrutura de repetição *for* . Características: comprimento 100px.

In [ ]:

Determinando zero (raiz) de função

Método da bissecção

O **método da bisseção** explora o fato de que uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com $f(a) \cdot f(b) < 0$ possui um zero no intervalo (a, b) (Teorema de Bolzano).

Assim, a ideia para aproximar o zero de uma tal função $f(x)$ é tomar, como aproximação inicial, o ponto médio do intervalo $[a, b]$, isto é:

$$x^{(0)} = \frac{(a + b)}{2}. \tag{1}$$

Pode ocorrer de $f(x^{(0)}) = 0$ e, neste caso, o zero de $f(x)$ é $x^* = x^{(0)}$.

Caso contrário, se $f(a) \cdot f(x^{(0)}) < 0$, então $x^* \in (a, x^{(0)})$.

Neste caso, tomamos como nova aproximação do zero de $f(x)$ o ponto médio do intervalo $[a, x^{(0)}]$, isto é, $x^{(1)} = (a + x^{(0)})/2$.

No outro caso, temos $f(x^{(0)}) \cdot f(b) < 0$ e, então, tomamos $x^{(1)} = (x^{(0)} + b)/2$.

De forma geral, cada iteração i gera uma aproximação $x^{(i)}$ da seguinte forma:

$$a^{(n)} = a, \quad b^{(n)} = b \quad \text{e} \quad x^{(n)} = \frac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2}. \tag{2}$$

Repete-se este procedimento até obtermos a aproximação desejada, de acordo com o critério de parada estabelecido.

Método da bisseção.

Exercício 3: Determinando zero (raiz) de função

Dada a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$, determine suas raízes utilizando-se o método da bisseção e a estrutura de repetição *for*.

Dicas:

- Utilize os intervalos $[-1, 0]$, $[0, 2]$ e $[2, 3]$;
- Desenvolva 10 iterações.

In [ ]:

Exercício 4: Trabalhando com Sistemas Lineares e Matrizes

Resolvendo um sistema linear

Método iterativo de Jacobi:

Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 14 \\ \ \ x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = \ 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{14 - 2x_2 - x_3}{10} \\ x_2 = \dfrac{11 - x_1 - x_3}{5} \\ x_3 = \dfrac{8 - 2x_1 - 3x_2}{10} \end{cases} \tag{3}$$

Portanto, considerando uma solução inicial $x^1 = (x_1, x_2, x_3)^T$, podemos obter uma aproximação para a solução do sistema linear, pelo processo iterativo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{7}{5} - \dfrac{x_2}{5}^{(K)} - \dfrac{x_3}{10}^{(K)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{x_1}{5}^{(K)} - \dfrac{x_3}{5}^{(K)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{5}{5} - \dfrac{x_1}{5}^{(K)} - \dfrac{3x_2}{10}^{(K)} \end{cases} \tag{4}$$

In [ ]:

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} \tag{5}$$

In [ ]:

Problema de otimização linear com duas variáveis

Exercício 4:

Para uma boa alimentação o corpo necessita de vitaminas e proteínas.

A necessidade mínima de vitaminas é de 100 unidades por dia, a de proteínas é de 100 unidades por dia e a de gorduuras é de 30 unidades por dia.

Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar.

A quantidade de vitaminas, proteínas e gorduras em cada tipo de alimento estão dispostas na tabela a seguir:

	x_o **unidades**	x_c **unidades**
Vitaminas	5	4
Proteínas	4	5
Gorduras	1	2
Custos	R$ 4,00	R$ 6,20

Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas, proteínas e gorduras com o menor custo possível?

Variáveis de Decisão:

x_c: unidades de carne;

x_o: unidades de ovo;

Função objetivo

$$\text{Min } f(x_c, x_o) = 3x_c + 1,5x_o \tag{6}$$

Restrições:

$$\text{s.a.} \begin{cases} 5x_o + 4x_c \geq 100 \text{ ------> Vitaminas} \\ 4x_o + 5x_c \geq 100 \text{ ------> Proteínas} \\ x_o + 2x_c \geq 30 \text{ ------> Gorduras} \\ x_c \geq 0,\ x_o \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

Região de Viabilidade

```
In [ ]:
```

Exercício 4: Problema de otimização com quatro variáveis

Problema da Mochila

Dada uma mochila de capacidade 14 litros e um conjunto de 4 itens únicos com tamanhos w_i (em litros) e valores v_i (em reais) associados a cada item i, de acordo com a tabela a seguir, queremos determinar quais e quantos itens devem ser colocados na mochila de modo a maximizar o valor total transportado, respeitando sua capacidade.

	x_1	x_2	x_3	x_4
v_i	R$ 10,00	R$ 20,00	R$ 30,00	R$ 40,00
w_i	4	3	5	5

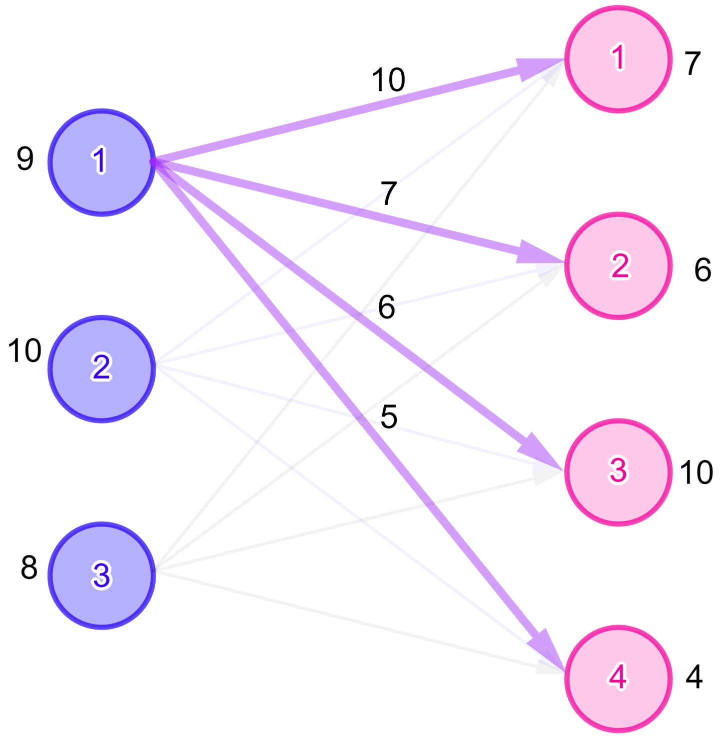
In [ ]:

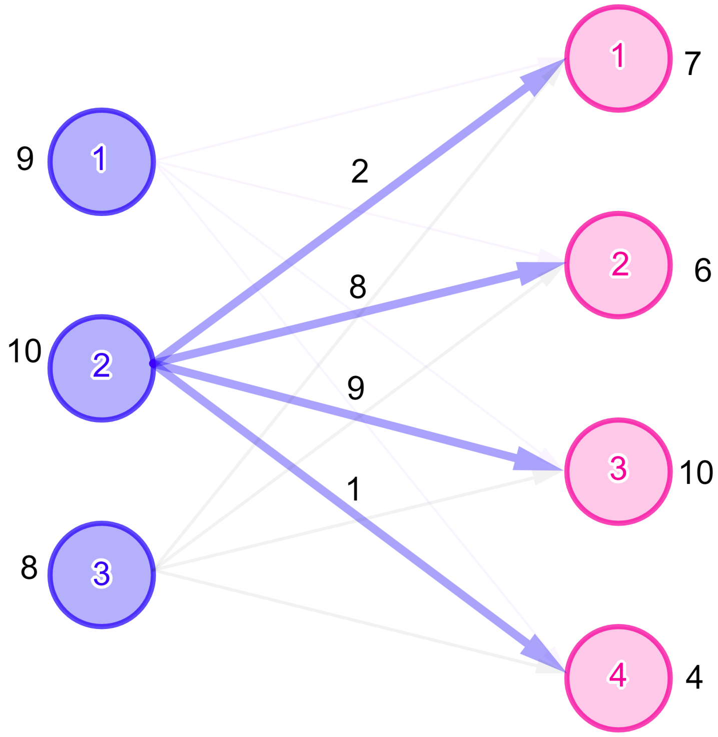
Exercício 5: Problema de transporte

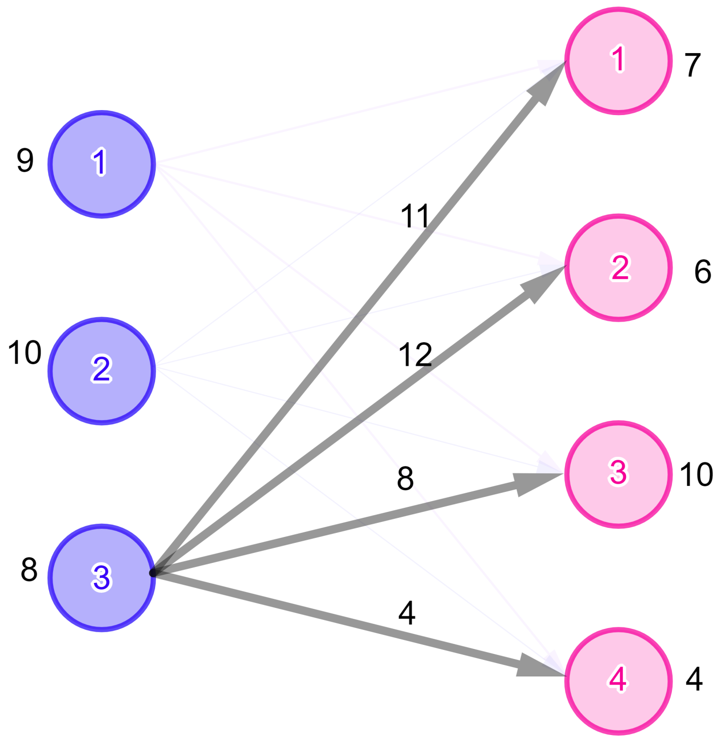
Uma empresa fabrica um determinado produto em três cidades, Araraquara, Bauru e Caconde; o produto destina-se a quatro centros de consumo Adamantina, Barbacena, Caieiras e Dracena. O custo estimado de transportar o produto das fábricas para os centros consumidores, assim como a demanda de cada centro e a oferta de cada fábrica é dado na tabela a seguir:

Origem	Adamantina	Barbacena	Caieiras	Dracena	Oferta
Araraquara	10	7	6	5	9
Bauru	2	8	9	1	10
Caconde	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Qual o menor custo total de transporte entre os cenhtros produtores e os centros consumidores?


9
10
8
1
2
3
10
7
6
5
1
2
3
4
7
6
10
4


9
1
10
2
8
3
1
7
2
6
3
10
4
4
2
8
9
1


9
1
10
2
8
3
1
7
2
6
3
10
4
4
11
12
8
4

Função objetivo:

$$\begin{array}{rrrrrr} \text{Minimizar } z = & 10x_{11} & +7x_{12} & +6x_{13} & +5x_{14} & + \\ & 2x_{21} & +8x_{22} & +9x_{23} & +x_{24} & + \\ & 11x_{31} & +12x_{32} & +8x_{33} & +4x_{34} & \end{array} \tag{8}$$

Restrições:

$$\text{s.a.} \begin{cases} \text{Limitação da oferta:} & & \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & \leq & 9 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & \leq & 10 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & \leq & 8 \\ \text{As demandas devem ser satisfeitas:} & & \\ x_{11}+x_{21}+x_{31} & = & 7 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} & = & 6 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} & = & 10 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} & = & 4 \\ \text{Condição de não negatividade:} & & \\ x_{ij} \geq 0,\ i=1,2,3;\ j=1,2,3,4 & & \end{cases} \tag{9}$$

In [ ]:

Exercício 6: Problema de dimensionamento de lotes:

Certa indústria de móveis, que fabrica um determinado tipo de guarda-roupa, deseja fazer um planejamento da produção para um horizonte de quatro dias. Sabe-se que a demanda para os próximos quatro dias são de 46, 174, 104 e 112 unidades, respectivamente. A fábrica possui um armazém onde é possível estocar a produção excedente a um custo de 2 unidades monetárias, por unidade por dia. O custo de produção de cada guarda roupa é 1 u.m. Considere que a capacidade de produção seja de 150 unidades por dia. O gerente de produção deseja definir quantos guarda-roupas produzir a cada dia de forma a atender a demanda com o menor custo possível.

$Minimizar\ \ x_1+x_2+x_3+x_4+2I_1+2I_2+2I_3+2I_4$

$sujeito\ a:$

$$\begin{cases} x_1 + I_0 = d_1 + I_1 \\ x_2 + I_1 = d_2 + I_2 \\ x_3 + I_2 = d_3 + I_3 \\ x_4 + I_3 = d_4 + I_4 \\ 0 \leq x_1 \leq 150 \\ 0 \leq x_2 \leq 150 \\ 0 \leq x_3 \leq 150 \\ 0 \leq x_4 \leq 150 \end{cases}$$

In [ ]: