

Taller Preparatorio Parcial #1

Samuel Ruíz Martínez

Hernan Supelano

Sergio Andrés Díaz Vera

Daniel Felipe Cendales

Estimación histograma

Antes, cargamos las librerías necesarias

```
library(sm)
```

1. Realizamos una simulación de tamaño 100 de $X \sim \mathcal{N}(\mu = 17, \sigma^2 = 4)$

```
## Ajustamos los parámetros iniciales
n <- 100                                # Tamaño de la muestra
mu <- 20                                # Media teórica
sigma <- 2                              # Desv. estándar teórica
set.seed(n)                             # Fijamos la semilla

# Tomamos la muestra
datos <- rnorm(n = n, mean = mu, sd = sigma) #  $X \sim N(20, 4)$ 

## Estimación histograma
histograma <- hist(datos, plot = FALSE)
```

a. Notemos que:

```
# Extraemos la estimación histograma de la densidad
densidad1 <- histograma$density

# Extraemos los conteos y los extremos de un intervalo
ni <- histograma$counts                # Conteos en cada intervalo
cortes <- histograma$breaks[1:2]       # Los dos primeros puntos
b <- diff(cortes)/2                    # Distancia sobre 2
densidad2 <- ni / (2*n*b)              # Calculamos la densidad

# Comparamos los vectores
all.equal(densidad1, densidad2)        # Hacemos la comparación

## [1] TRUE
```

b. Sea x el punto medio de un intervalo. Vamos a plantar dos casos:

- **Caso 1:** la distancia del punto medio de un intervalo a uno de los extremos es b , lo que implica que la

longitud de los intervalos es de $2b$. Entonces

$$\begin{aligned}
 n_j &= \#\{x_i : x - b \leq x_i \leq x + b\} \\
 &= \#\{x_i : -b \leq x_i - x \leq b\} \\
 &= \#\left\{x_i : -1 \leq \frac{x_i - x}{b} \leq 1\right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n I_{[-1,1]} \left(\frac{x_i - x}{b} \right)
 \end{aligned}$$

Y por ende la estimación histograma toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f_H}(x) &= \frac{n_j}{2bn} \\
 &= \frac{1}{2bn} \sum_{i=1}^n I_{[-1,1]} \left(\frac{x_i - x}{b} \right) \\
 &= \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} I_{[-1,1]} \left(\frac{x_i - x}{b} \right)
 \end{aligned}$$

- **Caso 2:** la longitud del intervalo es b . Es decir que la distancia del punto medio a uno de los extremos es $b/2$. Entonces

$$\begin{aligned}
 n_j &= \#\left\{x_i : x - \frac{b}{2} \leq x_i \leq x + \frac{b}{2}\right\} \\
 &= \#\left\{x_i : -\frac{b}{2} \leq x_i - x \leq \frac{b}{2}\right\} \\
 &= \#\left\{x_i : -\frac{1}{2} \leq \frac{x_i - x}{b} \leq \frac{1}{2}\right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n I_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left(\frac{x_i - x}{b} \right)
 \end{aligned}$$

Y por ende la estimación histograma toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f_H}(x) &= \frac{n_j}{bn} \\
 &= \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^n I_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left(\frac{x_i - x}{b} \right)
 \end{aligned}$$

c. Gráfico de curvas teóricas y sus estimaciones.

Primero debemos calcular el b óptimo. Para ello, recordemos la fórmula (asumimos normalidad sobre f)

$$b = 3.491 \cdot \hat{\sigma} \cdot n^{-1/3}$$

donde $\hat{\sigma} = \frac{\text{RIC}}{1.35}$

Pero el b óptimo necesita de σ y no de $\hat{\sigma}$. Entonces lo primero que hacemos será realizar varias simulaciones para encontrar el valor óptimo.

Calculemos entonces las cantidades necesarias:

```

# Inicio de las simulaciones
N <- 500 # Cantidad de simulaciones
muestras <- matrix(0, nrow = n, ncol = N) # Guardamos 500 muestras de tamaño 100
b0s <- NULL # Almacenamos los b's

for(i in 1:N)
{
  muestras[, i] <- rnorm(n, mean = mu, sd = sigma) # Toma de la muestra
  cuartiles <- quantile(muestras[, i], # Primer y tercer cuartil
                        probs = c(1, 3)/4, names = FALSE)
  RICs <- diff(cuartiles) # Rango intercuartílico
  sigmas_hat <- min(RICs / 1.35, sd(muestras[, i]))
  b0s[i] <- 3.491 * sigmas_hat * n^(-1/3) # b'óptimo de cada muestra
}

# Cálculo del b óptimo como promedio de todos los b's
( b_Optimo <- mean(b0s) )

```

```
## [1] 1.436161
```

```

# b óptimo obtenido de la muestra
RIC_datos <- diff(quantile(datos, probs = c(1, 3)/4, names = FALSE))
sigma_hat <- min(RIC_datos / 1.35, sd(datos))
3.491 * sigma_hat * n^(-1/3)

```

```
## [1] 1.409223
```

Ya calculado el b óptimo, podemos hacer la gráfica de la densidad teórica y la estimación que obtuvimos

```

# A 5 desviaciones estándar (de la media), en una normal, estará el 99%
lLmites <- mu + c(-1, 1) * 5 * sigma

# Extremos de los intervalos
puntos <- seq(from = lLmites[1], to = lLmites[2] + 1, by = b_Optimo)

# Histograma con el ancho de banda óptimo
Hist <- hist(datos, breaks = puntos, plot = FALSE)

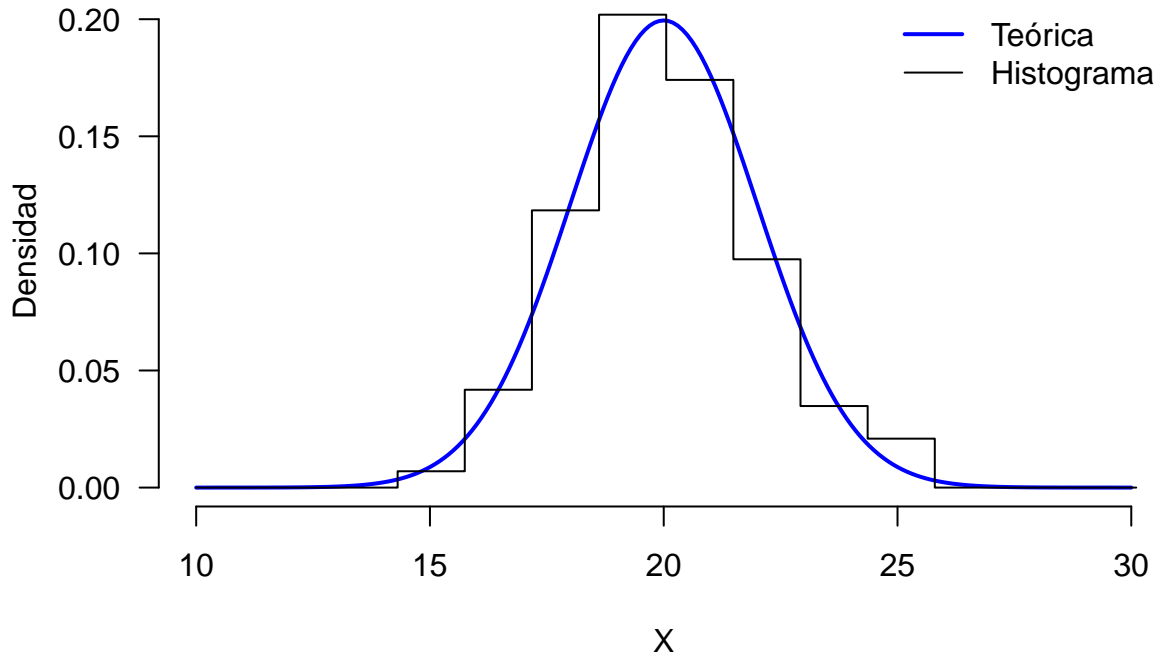
# Curva teórica
rango <- seq(from = lLmites[1], to = lLmites[2], by = 0.1)
plot(x = rango, y = dnorm(rango, mu, sigma), frame = FALSE,
     xlab = "X", ylab = "Densidad", type = "l", las = 1,
     lwd = 2, ylim = c(0, max(Hist$density)), col = "blue",
     main = bquote("Estimación histograma, b" == .(round(b_Optimo, 3))))

# Gráfico del histograma
lines(x = puntos, y = c(Hist$density, 0), type = "s")

# Leyenda
legend(x = "topright", lwd = 2:1, col = c("blue", "black"),
       legend = c("Teórica", "Histograma"), bty = "n")

```

Estimación histograma, $b = 1.436$



Para agregar la curva de $E\{\widehat{f}_H(x)\}$ vamos a usar la muestras generadas, calculamos el promedio y las varianzas

```
# Obtenemos los histogramas de cada muestra
histogramas <- apply(muestras, 2, function(k){
  c(hist(k, breaks = puntos, plot = FALSE)$density, 0)
})

E_fh <- apply(histogramas, 1, mean)          # Valor esperado
Sd_fh <- apply(histogramas, 1, sd)          # Desviación estándar

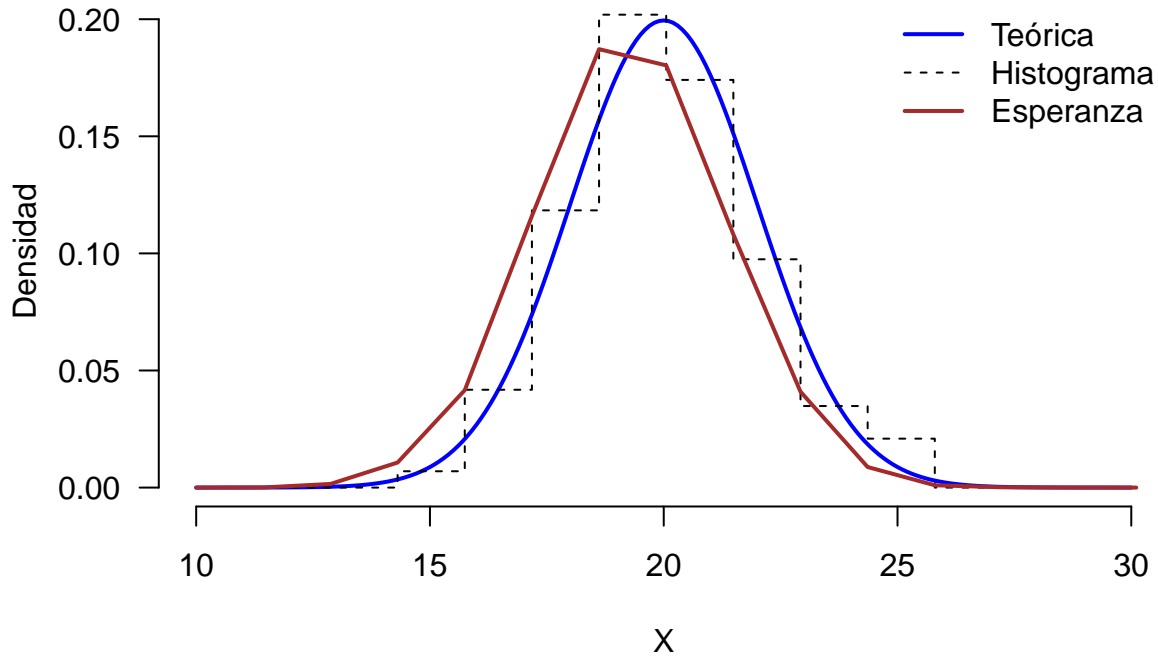
plot(x = rango, y = dnorm(rango, mu, sigma), frame = FALSE,
     xlab = "X", ylab = "Densidad", type = "l", las = 1,
     lwd = 2, ylim = c(0, max(Hist$density)), col = "blue",
     main = bquote("Estimación histograma, b" == .(round(b_Optimo, 3))))

# Gráfico del histograma
lines(x = puntos, y = c(Hist$density, 0), type = "s", lty = 2)

# Esperanza
lines(x = puntos, y = E_fh, col = "brown", lwd = 2, type = "l")

# Leyenda
legend(x = "topright", lwd = c(2, 1, 2), col = c("blue", "black", "brown"),
      legend = c("Teórica", "Histograma", "Esperanza"), bty = "n",
      lty = c(1, 2, 1))
```

Estimación histograma, $b = 1.436$



Para intentar ver el comportamiento de la varianza, podemos graficar todos los histogramas obtenidos y después agregamos unas “bandas de confianza”

```
# Todos los histogramas obtenidos
matplot(x = puntos, y = histogramas, type = "s", las = 1,
        col = "gray", lty = 1, frame = FALSE, lwd = 0.5,
        xlab = "Observados", ylab = "Densidades",
        main = bquote("Histogramas, b" == .(round(b_Optimo, 3))))

# El histograma de la muestra inicial
lines(x = puntos, y = c(Hist$density, 0), col = "black",
      lwd = 2, type = "s", lty = 5)

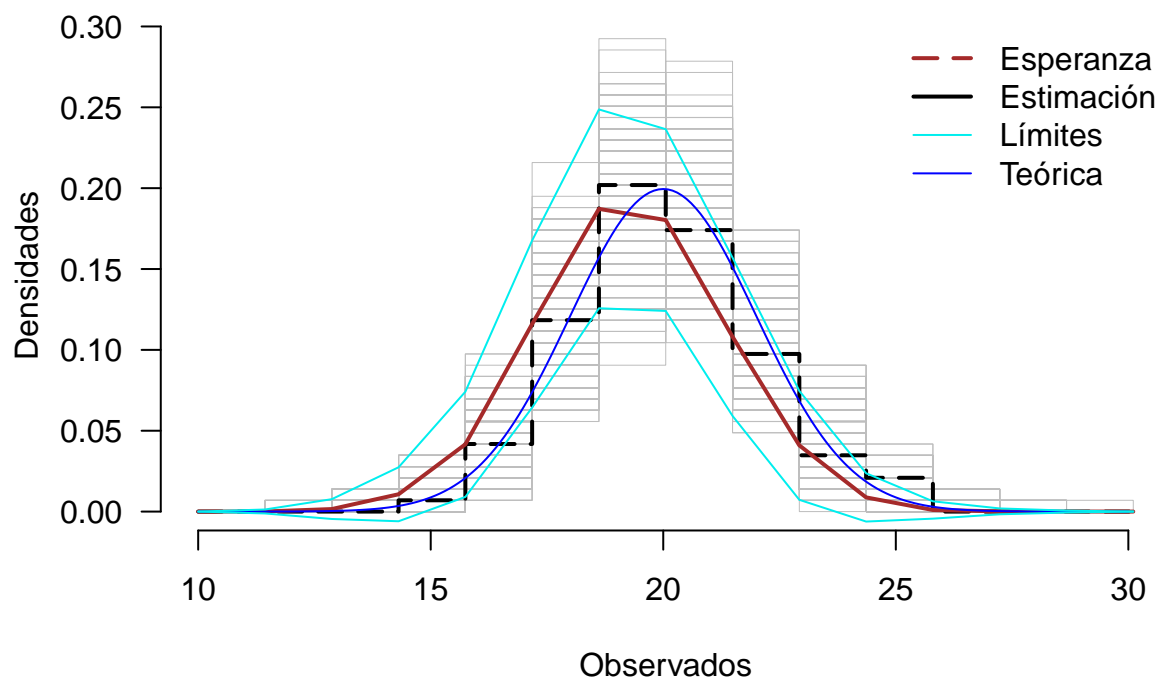
# Valor esperado
lines(x = puntos, y = E_fh, col = "brown", lwd = 2, type = "l")

# Estimación teórica
lines(rango, dnorm(rango, mean = mu, sd = sigma), col = "blue")

# "Bandas de confianza"
matlines(x = puntos, y = cbind(E_fh - 1.96 * Sd_fh,
                              E_fh + 1.96 * Sd_fh),
         type = "l", col = "cyan2", lty = 1, lwd = 1)

# Leyenda
legend(x = "topright", bty = "n", col = c("brown", "black", "cyan2", "blue"),
      lwd = rep(2:1, each = 2), lty = c(5, 1, 1, 1),
      legend = c("Esperanza", "Estimación", "Límites", "Teórica"))
```

Histogramas, b = 1.436

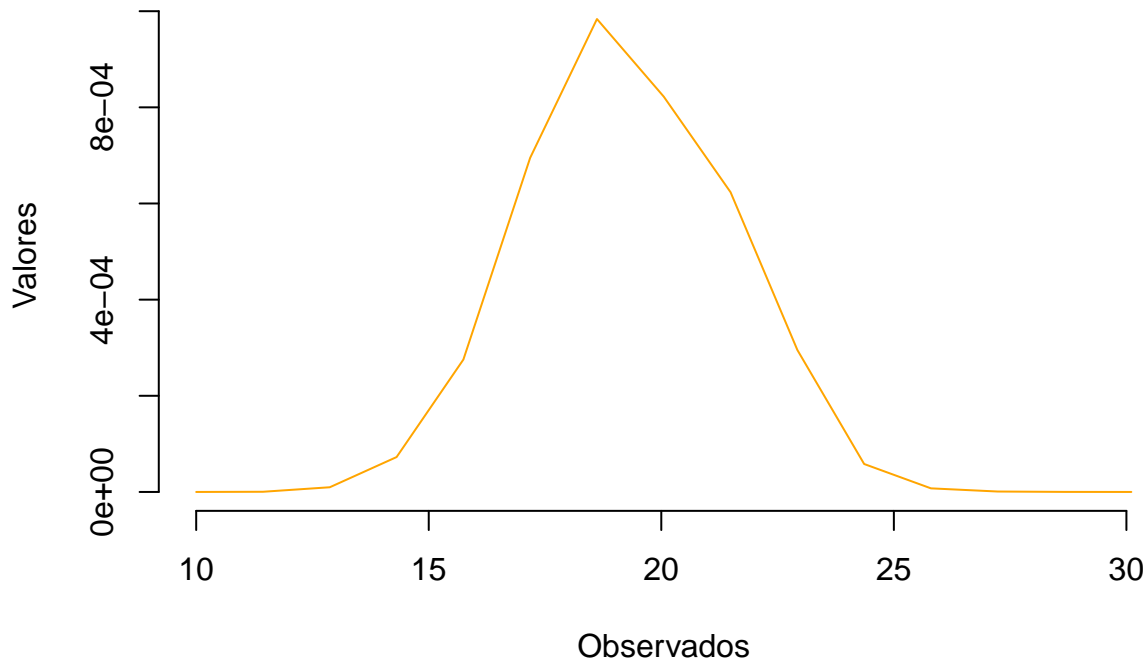


d. Gráfico de la curva $V \left\{ \widehat{f}_H(x) \right\}$

El gráfico anterior sugería que en los extremos la varianza disminuye y en la parte central es donde más alta es esta. Veamos gráficamente que esto es así:

```
# Gráfico de la varianza
plot(x = puntos, y = Sd_fh^2, main = "Gráfico de la varianza", frame = FALSE,
     xlab = "Observados", ylab = "Valores", type = "l", col = "orange")
```

Gráfico de la varianza



Estimación Kernel de la densidad

a. Tomando los datos del inicio, realizamos el cálculo del h de Silverman

```
h_Silverman <- 0.9 * sigma_hat * n^(-1/5)
```

El valor de este ancho de banda es aproximadamente 0.671

b. Si asumimos un Kernel Gaussiano, la fórmula del $MISE$ viene dada por:

$$MISE(\hat{f}_k) = \frac{R(K)}{nh} + \frac{\sigma_k^4 h^4}{4} R(f'') + O\left(\frac{1}{n}\right) + O(h^5)$$

Como estamos usando un kernel gaussiano con $\sigma^2 = 1$, entonces $R(K) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_k}$ y $R(f'') = \frac{3}{8\sigma^5\sqrt{\pi}}$ ya que muestreamos de una distribución normal.

$$MISE(\hat{f}_k) = \frac{1}{2nh\sigma_k\sqrt{\pi}} + \frac{3\sigma_k^4 h^4}{32\sigma^5\sqrt{\pi}} + O\left(\frac{1}{n}\right) + O(h^5)$$

Haciendo uso del h de Silverman obtenemos un valor para el $AMISE$ de

```
( MISE <- 1/(2*n*h_Silverman*sqrt(pi)) + 3*h_Silverman^4/(32*sd(datos)^5*sqrt(pi)) )
```

```
## [1] 0.004505032
```

c. Primero necesitamos estimar la densidad para los datos simulados

```
# Estimamos la densidad de los datos originales
densidad_hSilver <- density(datos, bw = h_Silverman, kernel = "gaussian",
                             n = 512, from = min(datos), to = max(datos))
```

```
f_x1 <- densidad_hSilver$y[1]
```

Entonces, la estimación en el mínimo de la muestra es $\hat{f}_k(x_{(1)}) = 0.0265689$.

Recordando el intervalo desarrollado con el método delta, tenemos que un intervalo de confianza para $f(x)$ (considerando el sesgo despreciable, i.e. $E(\hat{f}_K(x_{(1)})) = f(x_{(1)})$)

$$IC = \left[\sqrt{\hat{f}_k(x_{(1)})} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{R(K)}{4nh}} \right]^2$$

Entonces, el intervalo de confianza viene dado por:

```
# Construimos el intervalo con alpha = 0.05
alpha <- 0.05 # Nivel de significancia
z_c <- qnorm(1 - alpha/2) # Cuantil de la normal

R_k <- (2*sqrt(pi))^-1

(sqrt(f_x1) + c(-1, 1) * z_c * sqrt(R_k/(4*n*h_Silverman)))^2

## [1] 0.009895201 0.051313586
```

d. Primero calculemos las cantidades necesarias. Entonces

```
# La desviación estándar ya la habíamos calculado con anterioridad
mu_est <- mean(datos) # Media estimada
h_normal <- 1.059 * sigma_hat * n^-1/5 # h estimado
```

Por ende tenemos que:

- El valor de $h = 0.7899$
- El valor de $\hat{\mu} = 20.006$
- El valor de $\hat{\sigma} = 2.041$

Como cambiamos el h , debemos re calcular la estimación kernel

```
# Estimación kernel con el h de referencia Normal
densidad_hNormal <- density(datos, bw = h_normal, kernel = "gaussian",
                             n = 512, from = min(datos), to = max(datos))

f_xn <- densidad_hNormal$y[512] # Estimación de E[f(xn)]
V_fxn <- (dnorm(0, 0, sd = sqrt(2*h_normal^2)) *
          dnorm(max(datos), mu_est,
                sd = sqrt(sd(datos)^2 + h_normal^2/2)) -
          dnorm(max(datos), mu_est,
                sd = sqrt(sd(datos)^2 + h_normal^2))^2)/n
```

Por ende tenemos que:

- El valor de $\hat{E}[\hat{f}_K(x_{(n)})] = 0.0174$
- El valor de $V[\hat{f}_K(x_{(n)})] = 3.3 \times 10^{-5}$
- Las bandas de referencia a la normal son


```
f_xn + c(-1, 1) * 2.575 * sqrt(V_fxn)
```

```
## [1] 0.002509719 0.032207437
```

e. Bandas de variabilidad de $E \left[\hat{f}_k(x) \right]$

```
# Bandas de referencia
x_obs <- densidad_hNormal$x
y_dens <- densidad_hNormal$y

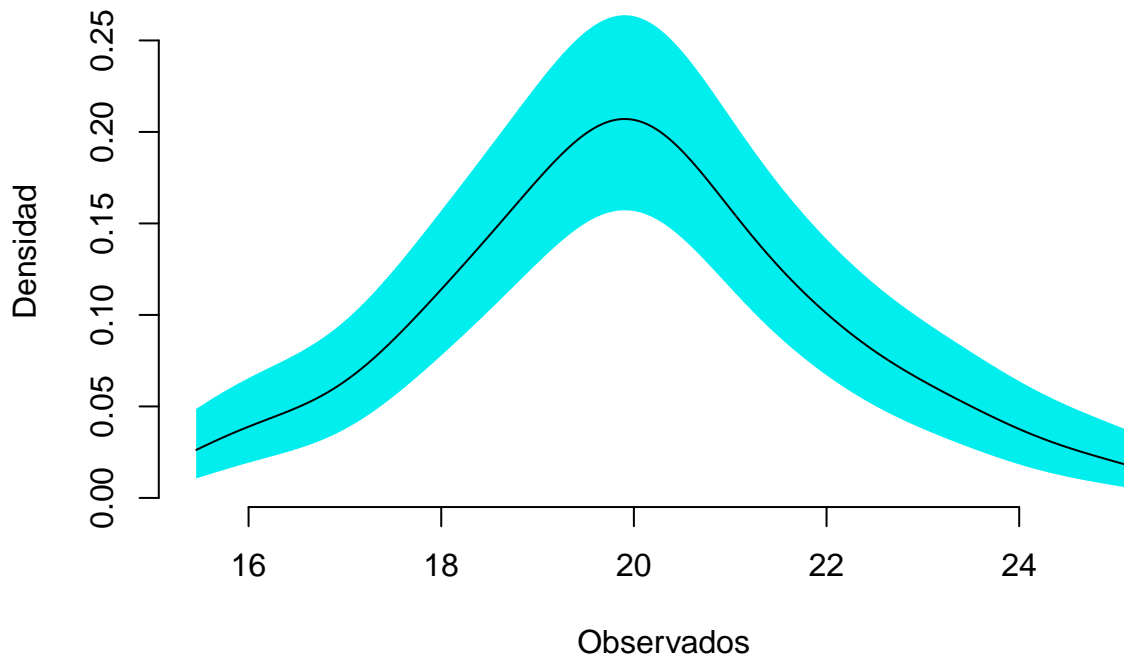
band_inf <- (sqrt(y_dens) - z_c * sqrt(R_k/(4*n*h_normal)))^2
band_sup <- (sqrt(y_dens) + z_c * sqrt(R_k/(4*n*h_normal)))^2

# Gráfico de la densidad
plot(x = x_obs, y = y_dens, type = "n", frame = FALSE,
     ylim = c(min(band_inf), max(band_sup)), lwd = 2,
     xlab = "Observados", ylab = "Densidad",
     main = "Estimación y bandas de confianza")

polygon(x = c(x_obs, x_obs[512:1]), border = NA,
       y = c(band_inf, band_sup[512:1]), col = "cyan2")

lines(x = x_obs, y = y_dens)
```

Estimación y bandas de confianza



```
# Agregamos las líneas de la densidad
# matlines(x = x_obs, y = cbind(band_inf, band_sup), col = "cyan2",
#         lwd = 2, lty = 1)
```

f. Bandas de referencia a la normal

```

# Bandas de referencia a la normal
E_fx <- dnorm(x_obs, mean = mu_est,
             sd = sqrt(var(datos) + h_normal^2))
V_fx <- (dnorm(0, 0, sd = sqrt(2*h_normal^2)) *
        dnorm(x_obs, mean = mu_est,
             sd = sqrt(var(datos) + h_normal^2/2)) -
        dnorm(x_obs, mean = mu_est,
             sd = sqrt(var(datos) + h_normal^2))^2)/n

band_infN <- E_fx - qnorm(0.975)*sqrt(V_fx)
band_supN <- E_fx + qnorm(0.975)*sqrt(V_fx)

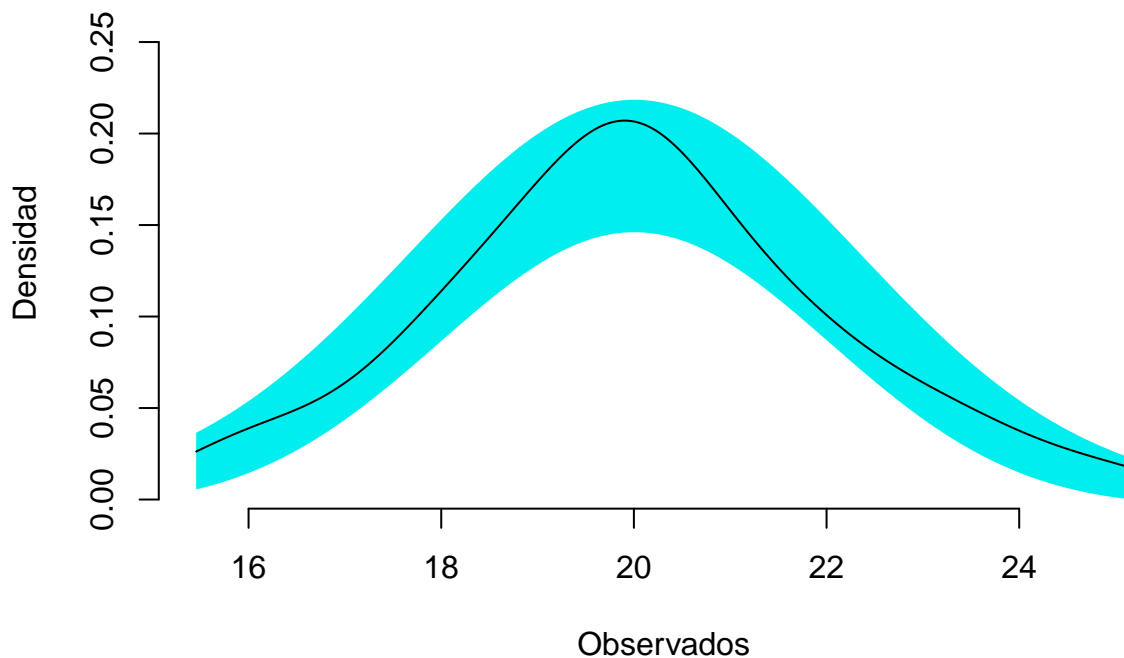
# Gráfico de la densidad
plot(x = x_obs, y = y_dens, type = "n", frame = FALSE,
     ylim = c(min(band_inf), max(band_sup)), lwd = 2,
     xlab = "Observados", ylab = "Densidad",
     main = "Bandas de confianza\nreferencia a la Normal")

polygon(x = c(x_obs, x_obs[512:1]), border = NA,
       y = c(band_infN, band_supN[512:1]), col = "cyan2")

lines(x = x_obs, y = y_dens)

```

Bandas de confianza referencia a la Normal



g. Test de normalidad usando *nise*

```

set.seed(7)           # Fijamos la semilla

T_obs <- nise(datos)   # T observado
num_sim <- 1000        # Número de simulaciones

```

```
T_simul <- replicate(num_sim, expr = nise(rnorm(n)))
( pval <- sum(T_simul > T_obs)/num_sim )
```

```
## [1] 0.409
```

```
# Graficamos la distribución asociada
```

```
densidad_t <- density(T_simul)
d_x <- densidad_t$x
d_y <- densidad_t$y
```

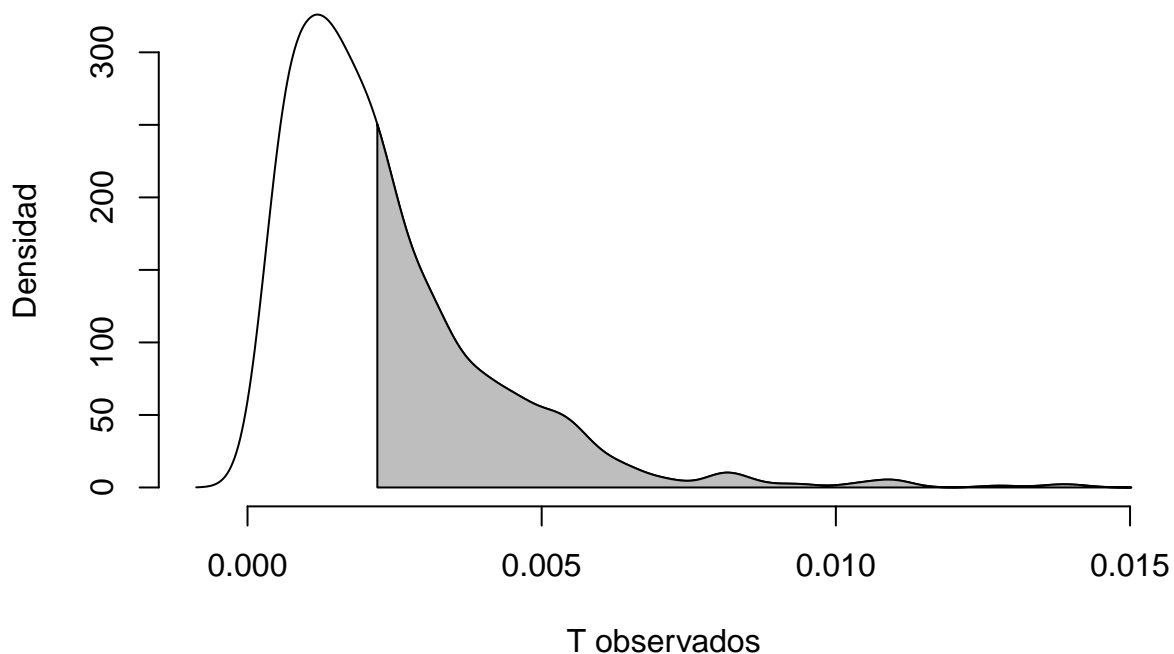
```
plot(d_x, d_y, frame = FALSE, type = "l",
     main = "Distribución aproximada de T",
     xlab = "T observados", ylab = "Densidad")
```

```
# Graficamos el valor-p
```

```
x_indice <- d_x[d_x > T_obs]
y_indice <- d_y[d_x > T_obs]
```

```
polygon(x = c(x_indice[1], x_indice), #border = "",
       y = c(0, y_indice), col = "gray")
```

Distribución aproximada de T



h. Comparación de distribuciones:

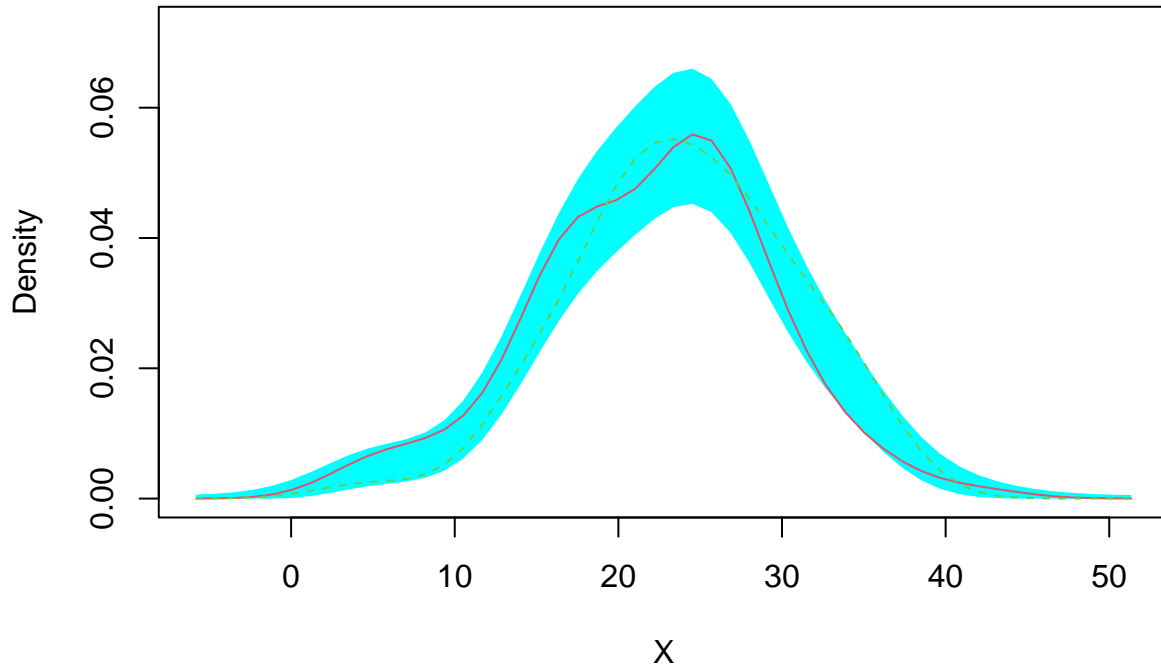
- **Bajo igualdad de distribuciones:** vamos a usar variables de una variable aleatoria normal

```
# Fijamos la semilla
set.seed(31416)
```

```
X <- rnorm(200, mean = 23, sd = 7) # Hacemos la toma de las muestras
```

```
grupo <- rep(paste0("g", 1:2),      # Creamos los respectivos grupos
             each = 100)
sm.density.compare(x = X, group = grupo, model = "equal")
```

```
## Test of equal densities:  p-value = 0.24
```



Vemos

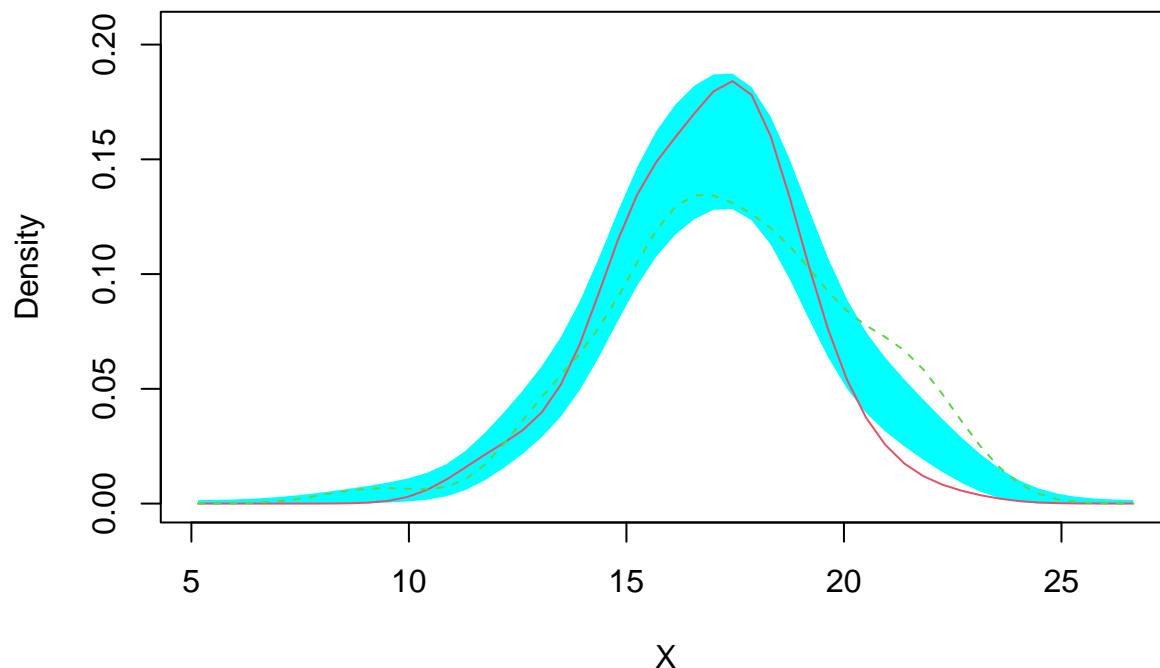
que no se rechaza la hipótesis nula de igualdad de distribuciones.

- **Bajo diferencia de distribuciones:** vamos a usar variables de una variable aleatoria normal

```
# Fijamos la semilla
set.seed(31416)

X <- c(rnorm(102, 17, 2), rnorm(98, 17, 3))
grupo <- rep(paste0("g", 1:2), c(102, 98))
sm.density.compare(x = X, group = grupo, model = "equal")
```

```
## Test of equal densities:  p-value = 0
```



podemos ver que rechazamos la hipótesis nula de igualdad de distribuciones.

i. Réplica de la función

```
# Gráfico de la distribución teórica
mu1 <- -1
mu2 <- 1
sd <- 0.3

x <- seq(-3, 3, by = 0.05)           # Rango de valores
y <- dnorm(x, mu1, sd = sd) +         # Parecen suma de normales :v
  dnorm(x, mu2, sd = sd)

set.seed(6)
x1 <- rnorm(5, mu1, sd = sd)
x2 <- rnorm(5, mu2, sd = sd)

plot(x, y, type = "l", main = "Figura 1", frame = FALSE)

X <- c(x1, x2)
# Agregamos los puntos de las simulaciones
points(x = X, y = rep(0, length(X)), pch = 19, cex = 0.5)

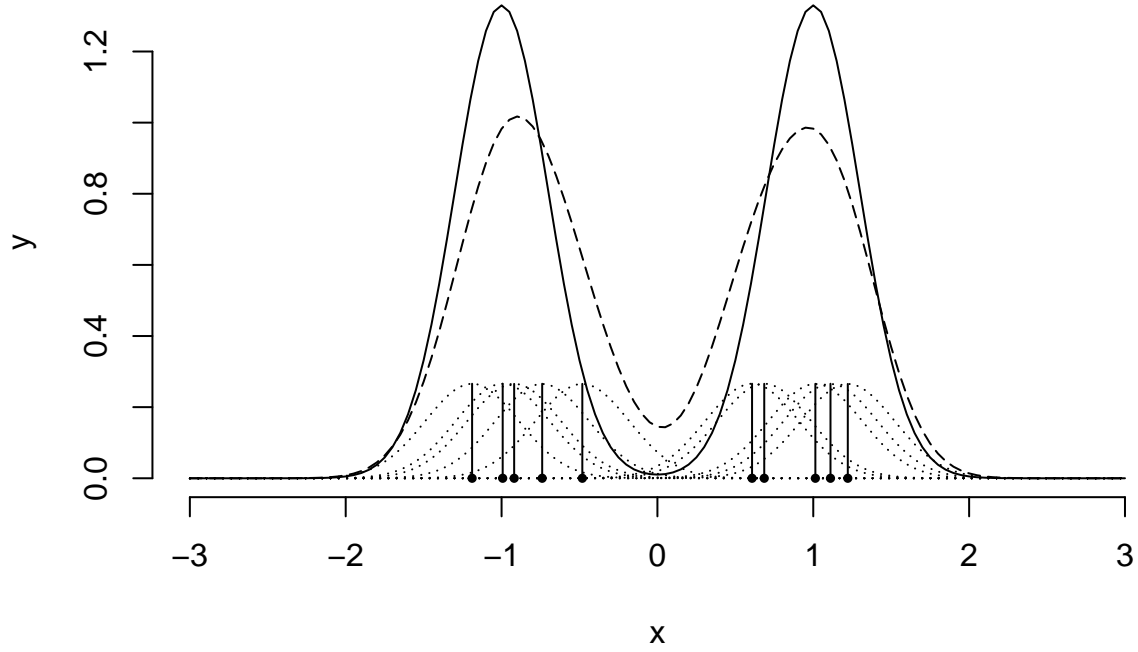
# Ancho de banda
bw <- 0.3
d_k <- sapply(X, function(k) dnorm(k-x, 0, sd = bw))

alturas <- apply(d_k, 2, max)
matlines(x = x, y = d_k/5, lty = 3, col = "gray0")

segments(x0 = X, y0 = rep(0, 10), x1 = X, y1 = alturas/5)
apply(d_k, 1, sum) / 5 -> estimaciOn

lines(x, estimaciOn, lty = 5, col = "gray0")
```

Figura 1



2. Demostración

$$\begin{aligned}
 E\{\widehat{f_H}(x)\} &= E\left\{\frac{1}{nb}\sum_{i=1}^n K_h\left(\frac{x-X_i}{b}\right)\right\} \\
 &= \frac{1}{nb}E\left\{\sum_{i=1}^n K_H\left(\frac{x-X_i}{b}\right)\right\} \\
 &\stackrel{\text{linealidad}}{=} \frac{1}{nb}\sum_{i=1}^n E\left\{K_H\left(\frac{x-X_i}{b}\right)\right\} \\
 &\stackrel{\text{iid}}{=} \frac{1}{b}E\left\{K_H\left(\frac{x-X}{b}\right)\right\} \stackrel{\text{simetría}}{=} \frac{1}{b}E\left\{K_H\left(\frac{X-x}{b}\right)\right\} \\
 &= \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} K_H\left(\frac{s-x}{b}\right)f_X(s)ds \\
 &\stackrel{t=\frac{s-x}{b}}{=} \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} K_H(t)f_X(x+tb)dt \\
 &\stackrel{\text{E. Taylor}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(t)[f_X(x)+O(b)]dt \\
 &= [f_X(x)+O(b)]\int_{-\infty}^{\infty} K_H(t)dt \\
 &= f_X(x)+O(b)
 \end{aligned}$$

3. Demostración:

$$\begin{aligned}
V \left\{ \widehat{f_H}(x) \right\} &= V \left\{ \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n K_H \left(\frac{X_i - x}{b} \right) \right\} \\
&\stackrel{\text{reescalado}}{=} \frac{1}{n^2} V \left\{ \sum_{i=1}^n K_{H_b}(X_i - x) \right\} \\
&\stackrel{iid}{=} \frac{1}{n^2} \mathcal{V} \{ K_{H_b}(X - x) \} \\
&= \frac{1}{n} E \{ K_{H_b}(X - x)^2 \} - \frac{1}{n} [E \{ K_{H_b}(X - x) \}]^2
\end{aligned}$$

Notemos que, como $E \{ K_{H_b}(X - x) \}$ existe, implica que existe un $c \in \mathbf{R}^+$ tal que $|E \{ K_{H_b}(X - x) \}| \leq c \implies |E \{ K_{H_b}(X - x) \}|^2 \leq c^2$.

Por ende podemos deducir que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} |E \{ K_{H_b}(X - x) \}|^2 &\leq \frac{c^2}{n} \\
&\implies \frac{1}{n} |E \{ K_{H_b}(X - x) \}|^2 = O \left(\frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

Nos falta analizar $\frac{1}{n} E \{ K_{H_b}(X - x)^2 \}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} E \{ K_{H_b}(X - x)^2 \} &= \frac{1}{n} E \left\{ \frac{1}{b^2} K_H \left(\frac{X - x}{b} \right)^2 \right\} = \frac{1}{nb^2} E \left\{ K_H \left(\frac{X - x}{b} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{nb^2} \int_{-\infty}^{\infty} K_H \left(\frac{s - x}{b} \right)^2 f_X(s) ds \\
&\stackrel{t = \frac{s-x}{b}}{=} \frac{1}{nb^2} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(t)^2 f_X(x + tb) b dt \\
&= \frac{1}{nb} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(t)^2 [f_X(x) + O(b)] dt \\
&= [f_X(x) + O(b)] \frac{1}{nb} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(t)^2 dt \\
&= \frac{1}{nb} [f_X(x) + O(b)] R(K) \\
&= \frac{f_X(x) R(K)}{nb} + \frac{R(K)}{nb} O(b) = \frac{f_X(x) R(K)}{nb} + \frac{1}{nb} O(b)
\end{aligned}$$

Sea $a(x) = O(b)$, entonces $|a(x)| \leq c|b|$, para algún $c \in \mathbf{R}^+$. Luego, $\left| \frac{a(x)}{nb} \right| \leq c \left| \frac{1}{n} \right|$. Por lo tanto

$$\frac{a(x)}{nb} = O \left(\frac{1}{n} \right)$$

Esto es

$$\frac{O(b)}{nb} = O \left(\frac{1}{n} \right)$$

Y así tenemos que

$$\frac{1}{n} E \{K_{H_b}(X - x)^2\} = \frac{f_X(x)R(K)}{nb} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Como $\frac{1}{n} \left| E \{K_{H_b}(X - x)\} \right|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$, entonces

$$V \left\{ \widehat{f_H}(x) \right\} = \frac{f_X(x)R(K)}{nb} + O\left(\frac{1}{n}\right) - O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ahora bien, sean

$$a_1(x) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad a_2(x) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Entonces, para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} |a_1(x)| &\leq c_1 \left| \frac{1}{n} \right| \\ |a_2(x)| &\leq c_1 \left| \frac{1}{n} \right| \end{aligned}$$

Luego, por desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |a_1(x) - a_2(x)| &\leq |a_1(x)| + |a_2(x)| \\ &\leq (c_1 + c_2) \left| \frac{1}{n} \right| \end{aligned}$$

Por lo que llegamos a que $a_1(x) - a_2(x) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, que es equivalente a que $O\left(\frac{1}{n}\right) - O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Lo anterior nos permite completar nuestra demostración, i.e.

$$V \left\{ \widehat{f_H}(x) \right\} = \frac{f_X(x)R(K)}{nb} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

4. **Demostración:** sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Tenemos que la función de densidad de X viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

La derivada de esta función viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \left(-\frac{2(x - \mu)}{2\sigma^2} \right) \\ &= -\frac{(x - \mu)}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sigma \cdot \sigma} f_X(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \frac{x - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} f_X(x) \end{aligned}$$

Y al elevar el cuadrado la expresión anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
\left[f_X'(x)\right]^2 &= \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\right)^2 f_X(x)^2 \\
&= \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{2(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2}}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\frac{\sigma^2}{2}}\right\} \\
&= \frac{1}{2\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2}\sqrt{2}} \left(\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\right)^2 f_{X^*}(x) \\
&= \frac{1}{4\sigma^2\sqrt{\pi\sigma^2}} \left(\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\right)^2 f_{X^*}(x)
\end{aligned}$$

La función $f_{X^*}(x)$ se puede entender como la función de densidad de una variable aleatoria normal con media $\mu^* = \mu$ y varianza $\sigma^{*2} = \frac{\sigma^2}{2}$. Integrando sobre x la expresión anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
R(f') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\sigma^3\sqrt{\pi}} \left(\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\right)^2 f_{X^*}(x) dx \\
&= \frac{1}{4\sigma^3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\right)^2 f_{X^*}(x) dx
\end{aligned}$$

La integral anterior vemos que expresa el cálculo de un valor esperado. Para ser más exactos, estamos calculando $E\left[\left(\frac{X^*-\mu^*}{\sigma^*}\right)^2\right]$. Pero esa transformación corresponde al valor esperado de una variable aleatoria *chi* cuadrado, con un grado de libertad. Como el valor esperado de esta corresponde a sus grados de libertad, se tiene que

$$R(f') = \frac{1}{4\sigma^3\sqrt{\pi}} E\left[\left(\frac{X^*-\mu^*}{\sigma^*}\right)^2\right] \overset{1}{=} \frac{1}{4\sigma^3\sqrt{\pi}}$$

5. Demostración

Tenemos que

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Así

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} (x-\mu) e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} (x-\mu) e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \\
f''(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left[e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} + (x-\mu)^2 \frac{-1}{\sigma^2} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \right] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left[1 - \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \\
(f''(x))^2 &= \frac{1}{2\pi\sigma^6} \left[1 - 2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^4 \right] e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}
\end{aligned}$$

Como $R(f'') = \int_{-\infty}^{\infty} [f''(x)]^2 dx$, entonces

$$\begin{aligned}
R(f'') &= \int_{-\infty}^{\infty} [f''(x)]^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^6} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx}_{I_1} - \frac{1}{\pi\sigma^8} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx}_{I_2} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi\sigma^6} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^4 e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx}_{I_3}
\end{aligned}$$

Ahora bien, consideremos

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

Si $u = \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)$, $\sigma du = dx$, y así

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sigma\sqrt{\pi}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \\
&= 2\pi\sigma^6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^6} (x-\mu)^2 e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \\
&= 2\pi\sigma^6 \int_{-\infty}^{\infty} R(f') dx \\
&= 2\pi\sigma^6 \frac{1}{4\sigma^3\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{\sigma^3\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

Veamos ahora I_3

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^4 e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

Tomando $u = \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)$, $\sigma du = dx$. Luego

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma u^4 e^{-u^2} du \\ &= -\frac{\sigma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u^3}_w \underbrace{-2ue^{-u^2} du}_{dv} \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} w &= u^3 & dv &= -2ue^{-u^2} du \\ dw &= 3u^2 & v &= e^{-u^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{\sigma}{2} \left[\left. u^3 e^{-u^2} \right|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 3u^2 e^{-u^2} du \right] \\ &= \frac{\sigma}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} 3u^2 e^{-u^2} du \right] \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} 3u^2 e^{-u^2} du &= \frac{3}{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u}_z \underbrace{-2ue^{-u^2} du}_{dy} = \frac{3}{-2} \left[\left. ue^{-u^2} \right|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \right] \\ &= \frac{3}{-2} [-\sqrt{\pi}] = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned} z &= u & dy &= -2ue^{-u^2} du \\ dz &= 1 & y &= e^{-u^2} \end{aligned}$$

Llegamos a la conclusión de que

$$I_3 = \frac{3\sigma\sqrt{\pi}}{4}$$

De manera que

$$\begin{aligned} R(f'') &= \frac{1}{2\pi\sigma^6} I_1 - \frac{1}{\pi\sigma^8} I_2 + \frac{1}{2\pi\sigma^6} I_3 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^6} (\sigma\sqrt{\pi}) - \frac{1}{\pi\sigma^8} \left(\frac{\sigma^3\sqrt{\pi}}{2} \right) + \frac{1}{2\pi\sigma^6} \left(\frac{3\sigma\sqrt{\pi}}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma^5} - \frac{3}{8\sqrt{\pi}\sigma^5} + \frac{3}{8\sqrt{\pi}\sigma^5} \\ &= \frac{3}{8\sigma^5\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

6. **Demostración:** Sea $\hat{f}_H(x)$ el estimador histograma de la densidad, por lo tanto

$$\text{AMISE}(\hat{f}_H) = \frac{1}{nb} + \frac{b^2}{12}R(f')$$

derivamos e igualamos a cero

$$\begin{aligned} \rightarrow 0 &= \frac{\delta \text{AMISE} \hat{f}_H}{\delta b} = \frac{-1}{nb^2} + \frac{b}{6}R(f') \\ \rightarrow b^3 &= \frac{6}{nR(f')} \\ \rightarrow b &= \left(\frac{6}{nR(f')} \right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{6}{n \frac{1}{4\sigma^3\sqrt{\pi}}} \right)^{1/3} = \left(\frac{24\sqrt{\pi}\sigma^3}{n} \right)^{1/3} \\ &= 3.491\hat{\sigma}n^{-1/3} \end{aligned}$$

7. **Demostración:** Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $K(u)$ un Kernel Gaussiano con varianza σ_K^2 , es decir $U \sim N(0, \sigma_H^2)$, y $\hat{f}_K(x)$ el estimador Kernel de la densidad con ancho de banda h . El error cuadrado medio integrado se define como $\text{AMISE}(\hat{f}) = R(K)/nh + \sigma_K^4 h^4 R(f'')/4$. Deduzca h_0 el ancho de referencia a la normal. Siga los siguientes pasos

a. Tenemos que $\text{AMISE}(\hat{F}_k(x)) = -\frac{R(K)}{nh} + \frac{h^4 R(f'')}{4}$. derivamos con respecto al ancho de banda, igualamos a 0 y despejamos.

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\delta \text{AMISE}(\hat{f}_k(x))}{\delta h} &= -\frac{R(K)}{n \cdot h^2} + \frac{h^3}{\sigma_K^4 \cdot R(f'')} \\ \rightarrow h^5 &= \frac{R(K)}{R(f'') \cdot n \cdot \sigma_K^4} \\ \rightarrow h &= \left(\frac{R(K)}{R(f'') \cdot n \cdot \sigma_K^4} \right)^{1/5} \end{aligned}$$

b. Dado a que por hipótesis usamos un Kernel Gaussiano tenemos que

$$K(u) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma_K^2}}}{\sigma_K \sqrt{2\pi}}$$

entonces:

$$\int K(u)^2 du = \frac{1}{\sigma_K^2 2\pi} \int e^{-\frac{u^2}{\sigma_K^2}} du$$

Usamos la regla de integración

$$\begin{aligned} \int e^{-\alpha u^2} du &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\ \rightarrow R(K) = \frac{1}{2\pi\sigma_K^2} \int e^{-\frac{u^2}{\sigma_K^2}} du &= \frac{1}{2\sigma_K^2 \cdot \sqrt{\pi}} \sqrt{\pi \cdot \sigma_K^2} = \frac{1}{2\sigma_K} \end{aligned}$$

c. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $f(x) = 1/2\pi\sigma \cdot \exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^2} \cdot \frac{x-\mu}{\sigma} \cdot \exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\} \\
f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[\left(\frac{1}{\sigma} \right) \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \right] \\
&\quad + \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \left(\frac{1}{\sigma} \right) \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left\{ \left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] \exp\left\{ -\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \right\} \\
[f''(x)]^2 &= \frac{1}{2\pi\sigma^6} \left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^4 \exp\left\{ \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} - 2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \exp\left\{ \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} + \exp\left\{ \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \right]
\end{aligned}$$

Utilizamos el reemplazo $w = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow dw = \frac{dx}{\sigma}$

$$R[f''(x)] = \frac{1}{2\pi\sigma^6} \left[\sigma \int_{-\infty}^{\infty} w^4 e^{-w^2} dw - 2\sigma \int_{-\infty}^{\infty} w^2 e^{-w^2} dw + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw \right]$$

$$u = w^3 \rightarrow du = 3w^2 dw$$

$$dv = we^{-w^2} \rightarrow v = -1/2e^{-w^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma}{2\pi\sigma^6} \left[\int_{-\infty}^{\infty} w^3 \cdot we^{-w^2} dw - \frac{2\sqrt{\pi}}{2} + \sqrt{\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^5} \left[\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right] = \frac{3}{8\sqrt{\pi}\sigma^5}
\end{aligned}$$

d. Del literal (a.) teniamos que

$$h = \left(\frac{R(K)}{R(f'') \cdot n \cdot \sigma_K^4} \right)^{1/5}$$

Reemplazando tenemos que

$$\begin{aligned}
h_0 &= \left(\frac{8\sqrt{\pi}\sigma^5}{6\sqrt{\pi}\sigma_K^5} \right)^{1/5} \\
&= \frac{\sigma}{\sigma_K} \cdot 1.059n^{-1/5}
\end{aligned}$$

Hacemos $\frac{\sigma}{\sigma_K} = \hat{\sigma} = \min\{RIC, s\}$. Este resultado será la regla de referencia a la normal

8. Demuestre que $E(\hat{f}_k(x)) \approx f(x) + \frac{f''(x)\sigma_k^2 h^2}{2}$ con $\sigma_k^2 = \int u^2 k(u) du$

Sea X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes con $X_i \sim f(x)$, entonces :

$$\begin{aligned}
E(\hat{f}_k(x)) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(K_h(x - X_i)) \quad (\text{Def. de kernel y propiedad de la esperanza}) \\
&= \frac{1}{n} (nE(K_h(x - X))) \quad (\text{Suma de V.A i.i.d.}) \\
&= E(K_h(x - X)) = E\left(\frac{1}{h} K\left(\frac{x - X}{h}\right)\right) \quad (\text{Def Kernel reescalado}) \\
&= \int \frac{1}{h} K\left(\frac{x - t}{h}\right) f(t) dt \quad (\text{Def. de esperanza para V.A continua})
\end{aligned}$$

Ahora si $K(u)$ es el kernel , se tiene que $K(u) = K(-u)$ así :

$$\begin{aligned}
E(\hat{f}_k(x)) &= \int \frac{1}{h} K\left(-\frac{x - t}{h}\right) f(t) dt \\
\text{sea } u &= -\left(\frac{x - t}{h}\right) \\
hu &= -x + t \\
t &= x + hu \\
dt &= hdu, du = \frac{1}{h} dt
\end{aligned}$$

Entonces la integral es

$$E(\hat{f}_k(x)) = \int K(u) f(x + hu) du$$

De la expansión de taylor sabemos que :

$$f(x + hu) = f(x) + f'(x)hu + \frac{1}{2}f''(x)h^2u^2 + O(h^3)$$

así

$$\begin{aligned}
E(\hat{f}_k(x)) &= \int K(u) [f(x) + f'(x)hu + \frac{1}{2}f''(x)h^2u^2 + O(h^3)] du \\
&= \int K(u) f(x) du + \int K(u) f'(x) h u du + \int \frac{1}{2} K(u) f''(x) h^2 u^2 du + \int K(u) O(h^3) du \\
&= f(x) \int K(u) du + f'(x) h \int u K(u) du + \frac{1}{2} f''(x) h^2 \int u^2 K(u) du + O(h^3) \int K(u) du \\
&= f(x) + \frac{f''(x) h^2 \sigma_k^2}{2} + O(h^3)
\end{aligned}$$

$$\text{con } \sigma_k^2 = \int u^2 K(u) du$$

9. Demuestre que $V(\hat{f}_k(x)) \approx \frac{f(x)R(x)}{nh}$ con $R(k) = \int K^2(u) du$

Sea X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes con $X_i \sim f(x)$, entonces :

$$\begin{aligned}
V(\hat{f}_k(x)) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(K_h(x - X_i)) \quad (\text{Def. de kernel y propiedad de la varianza}) \\
&= \frac{1}{n^2} (nV(K_h(x - X))) \quad (\text{Suma de V.A i.i.d.}) \\
&= \frac{1}{n} (V(K_h(x - X))) = \frac{1}{n} V\left(\frac{1}{h} K\left(\frac{x - X}{h}\right)\right) \quad (\text{Def Kernel reescalado})
\end{aligned}$$

11. Tenemos que $\text{AMISE}(\hat{f}_k(x)) = -\frac{R(k)}{nh} + \frac{h^4 R(f'')}{4}$. derivamos con respecto al ancho de banda, igualamos a 0 y despejamos.

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\delta \text{AMISE}(\hat{f}_k(x))}{\delta h} &= -\frac{R(K)}{n \cdot h^2} + \frac{h^3}{\sigma_K^4 \cdot R(f'')} \\ \rightarrow h^5 &= \frac{R(K)}{R(f'') \cdot n \cdot \sigma_K^4} \\ \rightarrow h &= \left(\frac{R(K)}{R(f'') \cdot n \cdot \sigma_K^4} \right)^{1/5} \end{aligned}$$

12. Usando resultados anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} h &= \left(\frac{R(K)}{R(f'') \cdot n \cdot \sigma_K^4} \right)^{1/5} \\ R(K) &= \frac{1}{2\sigma_K} \\ R(f'') &= \frac{3}{8\sqrt{\pi}\sigma^5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando tenemos que

$$\begin{aligned} h_0 &= \left(\frac{8\sqrt{\pi}\sigma^5}{6\sqrt{\pi}\sigma_K^5} \right)^{1/5} \\ &= \frac{\sigma}{\sigma_K} \cdot 1.059n^{-1/5} \end{aligned}$$

Hacemos $\sigma/\sigma_K = \min\{\text{RIC}, s\}$

13. Demostración:

Consideremos lo siguiente:

a)

$$\begin{aligned} V(\hat{f}_k(x)) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X)\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(K_h(x - X)) \\ &= \frac{n}{n^2} V(K_h(x - X)) \\ &= \frac{1}{n} V(K_h(x - X)) \\ &= \frac{1}{n} [E(K_h^2(x - X)) - (E(K_h(x - X)))^2] \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 E(\hat{f}_k(x)) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i)\right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(K_h(x - X_i)) \\
 &= \frac{n}{n} E(K_h(x - X)) \\
 &= E(K_h(x - X))
 \end{aligned}$$

c) Por lo visto en b)

$$\begin{aligned}
 E(\hat{f}_k(x)) &= E(K_h(x - X)) \\
 &= E\left(\frac{1}{h} K\left(\frac{x - X}{h}\right)\right) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x - t}{h}\right) f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{t - x}{h}\right) f(t) dt, \quad K(s) = K(-s)
 \end{aligned}$$

Tomando $u = \frac{t-x}{h}$, $h du = dt$, $x + hu = t$. Luego

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{t-x}{h}\right) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x + hu) du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) [f(x) + \cancel{O(h)}] du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x) du
 \end{aligned}$$

En resumen $E(\hat{f}_k(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x) du$

d) Tenemos que $U \sim N(0, h^2)$ con función de densidad $K(u)$. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con función de densidad $f(x)$. Luego $Z \sim N(\mu, \sigma^2 + h^2)$ con función de densidad $f_Z(z)$.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - u) K(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(u) du$$

Por lo visto en c) $E(\hat{f}_k(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x) du$. Por lo tanto $f_Z(z) = E(\hat{f}_k(x))$, y como $Z \sim N(\mu, \sigma^2 + h^2)$, entonces

$$E(\hat{f}_k(x)) = \phi(x; \mu, \sigma^2 + h^2)$$

e) Por lo visto en c) y en d), respectivamente:

$$E(\hat{f}_k(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u)f(x) du$$

$$E(\hat{f}_k(x)) = \phi(x; \mu, \sigma^2 + h^2)$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)f(x) du = \phi(x; \mu, \sigma^2 + h^2)$$

donde h^2 hace referencia a la varianza del kernel Gaussiano $K(u)$.

f)

$$\begin{aligned} E(K_h^2(x - X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_h^2(x - t)f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{h} K\left(\frac{x - t}{h}\right) \right]^2 f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{h} K\left(\frac{t - x}{h}\right) \right]^2 f(t) dt, \quad K(s) = K(-s) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h^2} \left[K\left(\frac{t - x}{h}\right) \right]^2 f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}h} e^{\frac{-1}{2h^2} \left(\frac{t-x}{h}\right)^2} \right]^2 f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2\pi h^2} e^{\frac{-1}{h^2} \left(\frac{t-x}{h}\right)^2} \right] f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h^2 \sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} e^{\frac{-1}{2h^2} \left(\frac{t-x}{h}\right)^2} \right] f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h^2 \sqrt{2\pi} \sqrt{2}} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)} e^{\frac{-1}{2\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2} \left(\frac{t-x}{h}\right)^2} \right] f(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2} h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)} e^{\frac{-1}{2\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2} \left(\frac{t-x}{h}\right)^2} \right] f(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2} h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} \check{K}\left(\frac{t-x}{h}\right) f(t) dt \end{aligned}$$

donde la varianza de $\check{K}(\cdot)$ es $\frac{h^2}{2}$. Ahora bien, tomando

$$u = \frac{t-x}{h}, \quad du = \frac{dt}{h}, \quad x + hu = t$$

entonces la continuación de la anterior integral queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2} h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} \check{K}\left(\frac{t-x}{h}\right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2} h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{K}(u) f(x + hu) du \end{aligned}$$

Usando la expansión de Taylor $f(x + hu) = f(x) + \cancel{O(h)} \overset{0}{\rightarrow}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2h^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{K}(u) f(x + hu) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2h^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{K}(u) f(x) du \\ &= \phi(0; 0, 2h^4) \int_{-\infty}^{+\infty} \check{K}(u) f(x) du \end{aligned}$$

Por lo visto en e), $\int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x) du = \phi(x; \mu, \sigma^2 + h^2)$ donde h^2 hace referencia a la varianza del kernel Gaussiano $K(u)$. Luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \check{K}(u) f(x) du = \phi\left(x; \mu, \sigma^2 + \frac{h^2}{2}\right)$$

pues a varianza de $\check{K}(\cdot)$ es $\frac{h^2}{2}$. Según lo dicho:

$$\phi(0; 0, 2h^4) \int_{-\infty}^{+\infty} \check{K}(u) f(x) du = \phi(0; 0, 2h^4) \phi\left(x; \mu, \sigma^2 + \frac{h^2}{2}\right)$$

En conclusión

$$E(K_h^2(x - X)) = \phi(0; 0, 2h^4) \phi\left(x; \mu, \sigma^2 + \frac{h^2}{2}\right)$$

g) Según lo visto en f)

$$E(K_h^2(x - X)) = \phi(0; 0, 2h^4) \phi\left(x; \mu, \sigma^2 + \frac{h^2}{2}\right)$$

Según lo visto en b) y d)

$$E(\hat{f}_k(x)) = E(K_h(x - X)) \quad (\text{por}(b))$$

$$E(\hat{f}_k(x)) = \phi(x; \mu, \sigma^2 + h^2) \quad (\text{por}(d))$$

Luego

$$E(K_h(x - X)) = \phi(x; \mu, \sigma^2 + h^2)$$

En resumen

$$E(K_h^2(x - X)) = \phi(0; 0, 2h^4) \phi\left(x; \mu, \sigma^2 + \frac{h^2}{2}\right)$$

$$E(K_h(x - X)) = \phi(x; \mu, \sigma^2 + h^2)$$

h) Por lo visto en a)

$$V(\hat{f}_k(x)) = \frac{1}{n} [E(K_h^2(x - X)) - (E(K_h(x - X)))^2]$$

A partir de lo visto en g)

$$V(\hat{f}_k(x)) = \frac{1}{n} \left[\phi(0; 0, 2h^4) \phi\left(x; \mu, \sigma^2 + \frac{h^2}{2}\right) - (\phi(x; \mu, \sigma^2 + h^2))^2 \right]$$

Por lo que se llega a que

$$\hat{V}(\hat{f}_k(x)) = \frac{1}{n} \left[\phi(0; 0, 2h^4) \phi \left(x; \hat{\mu}, \hat{\sigma}^2 + \frac{h^2}{2} \right) - (\phi(x; \hat{\mu}, \hat{\sigma}^2 + h^2))^2 \right]$$

14. Supongamos que tenemos dos muestras aleatorias de tamaño n y m de dos variables aleatorias X y Y respectivamente.

Lo primero a tener en cuenta es que, como vamos a aproximar la integral por métodos numéricos, debemos crear un rango de valores amplio sobre los que hacer las correspondientes estimaciones de la densidad.

Para tomar un intervalo bastante amplio, lo que proponemos es tomar el mínimo y máximo de los intervalos $\mu_x \pm 6 \cdot \sigma_x$ y $\mu_y \pm 6 \cdot \sigma_y$

```
comparar_densidades <- function(x1, x2, nsim = 500, plot = FALSE)
{
  # Combinamos las muestras
  X <- c(x1, x2)

  # Tamaños de las muestras, medias y varianzas
  n1 <- length(x1); n2 <- length(x2)
  mu1 <- mean(x1); mu2 <- mean(x2)
  sigma1 <- sd(x1); sigma2 <- sd(x2)
  n <- n1 + n2
  # Límites sobre los que vamos a hacer las estimaciones
  extremos <- c(mu1 + c(-6, 6)*sigma1, mu2 + c(-6, 6)*sigma2)
  lim_inf <- min(extremos)
  lim_sup <- max(extremos)

  # Calculamos las densidades
  dens_x1 <- density(x1, from = lim_inf, to = lim_sup)
  dens_x2 <- density(x2, from = lim_inf, to = lim_sup)

  x_obs <- dens_x1$x          # Rango sobre los que "integramos"
  dx <- x_obs[2] - x_obs[1]  # delta x

  y1 <- dens_x1$y            # Densidades estimadas de cada muestra
  y2 <- dens_x2$y

  # Usamos la regla del trapecio, que es una especie de suma con pesos
  pesos <- rep(c(1, 2, 1), c(1, length(y1)-2, 1))

  # Variable de interés
  T <- NULL

  Tc <- dx/2 * sum((y1 - y2)^2 * pesos)  # Estadística observada
  for(i in 1:nsim){
    # Tomamos una muestra de tamaño n1 pero de las posiciones
    Indice <- sample(1:n, size = n1)

    # Escogemos los correspondientes elementos
    x_1 <- X[Indice]
    x_2 <- X[-Indice]

    denx_1 <- density(x_1, from = lim_inf, to = lim_sup)
    denx_2 <- density(x_2, from = lim_inf, to = lim_sup)
```

```

y_1 <- denx_1$y          # Densidades estimadas de cada muestra
y_2 <- denx_2$y

T[i] <- dx/2 * sum((y_1 - y_2)^2 * pesos)    # Estadística observada
}
if(plot){
  dens_t <- density(T)
  d_tx <- dens_t$x
  d_ty <- dens_t$y
  t_pval <- d_tx[d_tx >= Tc]
  plot(x = d_tx, y = d_ty, frame = FALSE,
       type = "l", main = "Densidad T",
       xlab = "T obs", ylab = "Densidad")
  polygon(x = c(t_pval[1], t_pval),
         y = c(0, d_ty[d_tx >= Tc]),
         col = "cyan2")
}
c("valor-p" = mean(T >= Tc), "T_c" = Tc)
}

```

Hagamos pruebas sobre casos:

- **Hipótesis nula verdadera:** sean $X, Y \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 11)$

Tenemos que $f_X(t) = f_Y(t)$.

```

set.seed(217)

# Toma de las muestras
x <- rnorm(n = 50, mean = 3, sd = sqrt(11))
y <- rnorm(n = 39, mean = 3, sd = sqrt(11))

# Unamos las muestras
unidas <- c(x, y)

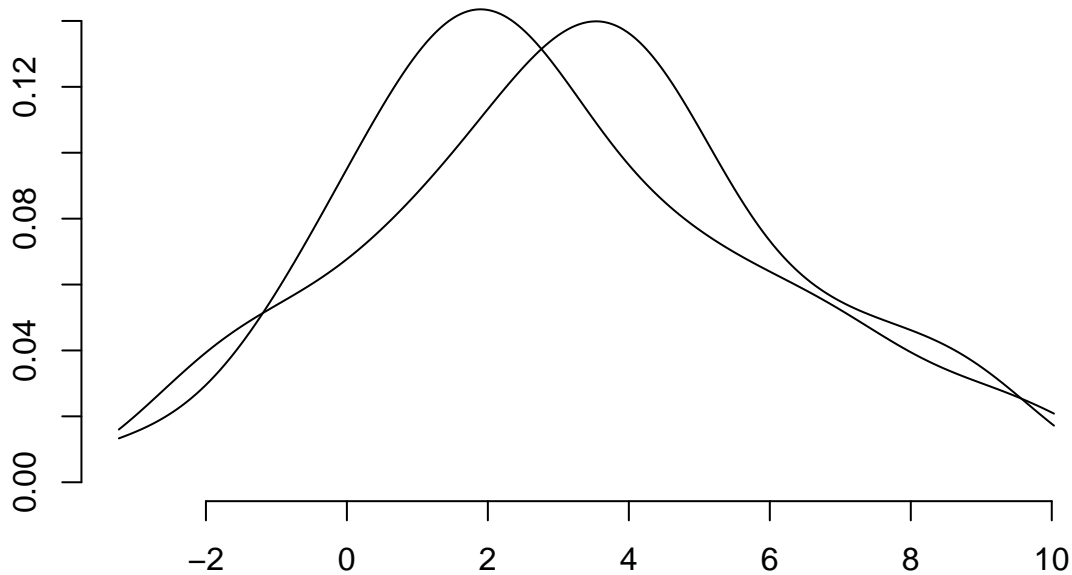
# Graficamos las densidades
d1 <- density(x, from = min(unidas), to = max(unidas))
d2 <- density(y, from = min(unidas), to = max(unidas))

lim_sup <- max(d1$y, d2$y)

plot(d1$x, d1$y, frame = FALSE, main = "Muestras", xlab = "",
     ylab = "", type = "l", ylim = c(0, lim_sup))
lines(d1$x, d2$y)

```

Muestras



```
# Realizamos el test, sin gráfico  
( resultados <- comparar_densidades(x, y) )
```

```
##      valor-p      T_c  
## 0.512000000 0.006443636
```

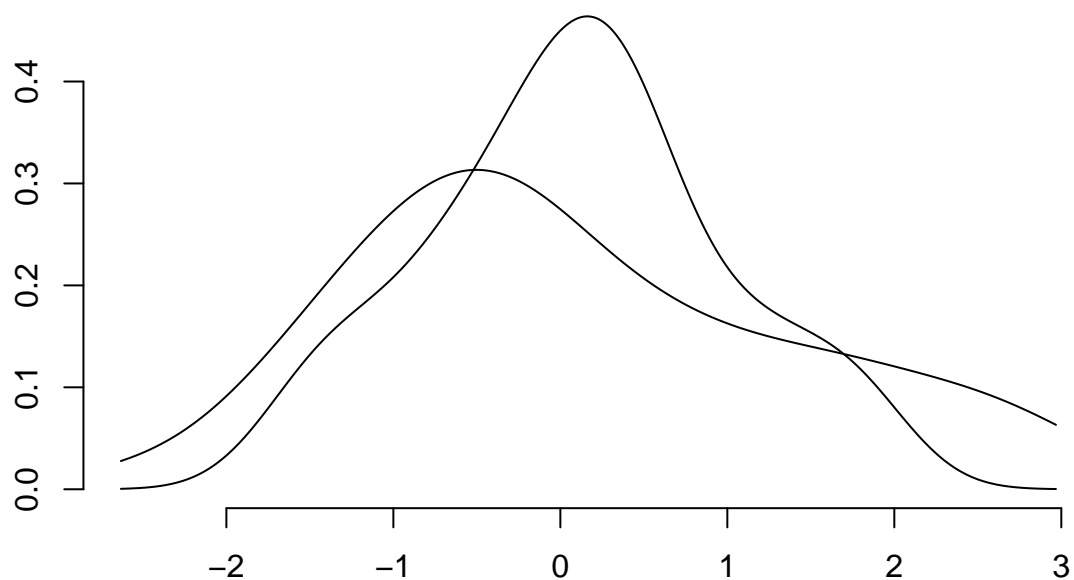
Vemos entonces que el *valor p* es de 0.512 con lo que no rechazamos la hipótesis nula de igualdad de densidades.

- **Hipótesis nula falsa:** sean $X \sim N(0, 1)$ y $Y \sim N(0, 1.4)$

Tenemos que $f_X(t) \neq f_Y(t)$.

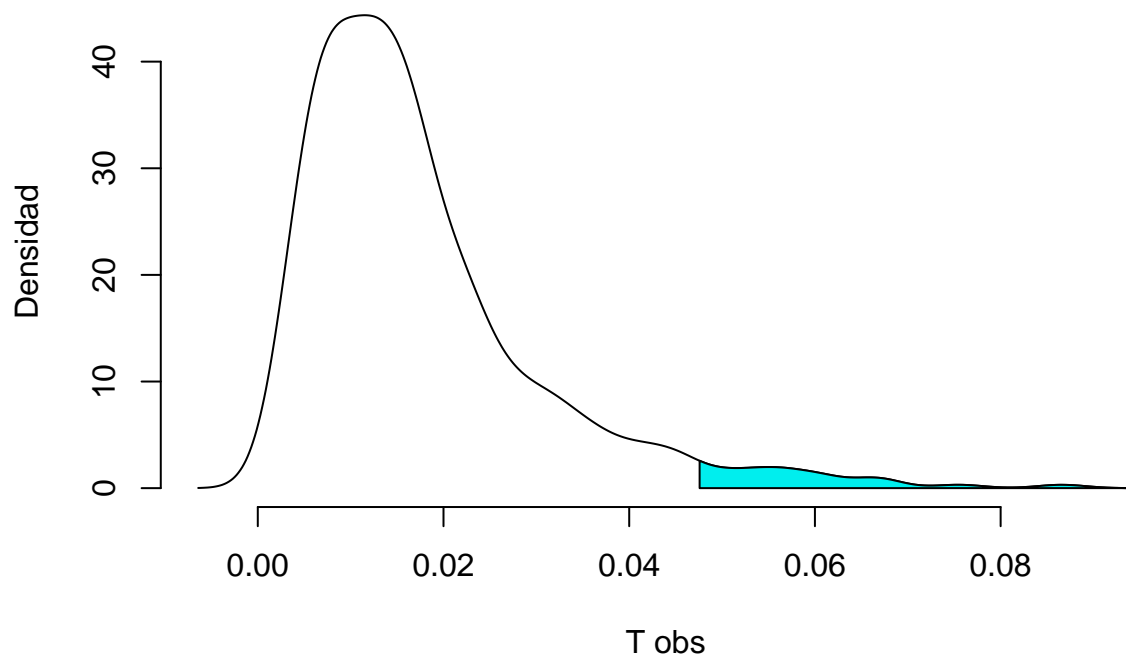
```
set.seed(217)  
  
# Toma de las muestras  
x <- rnorm(n = 50)  
y <- rnorm(n = 60, sd = 1.4)  
  
# Usamos las muestras  
unidas <- c(x, y)  
  
# Graficamos las densidades  
d1 <- density(x, from = min(unidas), to = max(unidas))  
d2 <- density(y, from = min(unidas), to = max(unidas))  
  
lim_sup <- max(d1$y, d2$y)  
  
plot(d1$x, d1$y, frame = FALSE, main = "Muestras", xlab = "",  
      ylab = "", type = "l", ylim = c(0, lim_sup))  
lines(d1$x, d2$y)
```

Muestras



```
# Realizamos el test, queremos el gráfico
( resul <- comparar_densidades(x, y, plot = TRUE) )
```

Densidad T



```
##      valor-p      T_c
## 0.03600000 0.04740796
```

Vemos entonces que el *valor p* es de 0.036 con lo que rechazamos la hipótesis nula de igualdad de densidades. Es decir, que las densidades **son diferentes**.