Simulação de Eventos Discretos Atividade III

Daniel dos Santos

13 de novembro de 2018.

Funções auxiliares

`expr` gera uma exponencial de parâmetro λ:

$$X \sim Exp(\lambda)$$

```
expr <- function(lambda){
  u <- runif(1)
  return(-1*log(u)/lambda)
}
```

`exprn` gera uma sequência de v.a.'s com distribuição exponencial de parâmetro λ:

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim Exp(\lambda)$$

```
exprn <- function(n,lambda){
  exp <- NULL
  for(i in 1:n){
    exp[i] <- expr(lambda)
  }
  return(exp)
}
```

Questão 1

Sendo, $(X_1, X_2, \ldots, X_5) \sim Exp(1)$ i.i.d.'s.

$$\theta = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{5} iX_i \geq 21.6\right)$$

a) Não usaremos nenhum método de redução de variância.

Nesse primeiro caso não utilizaremos nenhum método de redução de variância para estimar o valor de θ. Logo, definimos a indicadora:

$$I = \begin{cases} 1, & \text{se } \displaystyle\sum_{i=1}^{5} iX_i \geqslant 21.6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Dessa forma temos o seguinte resultado:

$$\theta = \mathbb{E}[I] = 1 \cdot \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{5} iX_i \geqslant 21.6\right) + 0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{5} iX_i < 21.6\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{5} iX_i \geqslant 21.6\right)$$

```r
q1_a <- function(n){
  prob <- NULL ;  temp <- NULL
  for(j in 1:n){
    for(i in 1:n) temp[i] <- ifelse(sum(1:5*exprn(5, 1)) >= 21.6, 1, 0)
    prob[j] <- mean(temp)
  }
  return(mean(prob))
}
```

```
## [1] 0.1684
```

O valor estimado para θ nesse caso foi de 0.1684.

b) Variáveis antagônicas

Sejam:

$$X_1 = h(U_1, U_2, \dots, U_m)$$
$$X_2 = h(1-U_1, 1-U_2, \dots, 1-U_m)$$
$$\text{Onde,}$$
$$Ui \sim U(0,1) i = 1, 2, \dots, m$$

Perceba que, X_1 e X_2 são dependentes e são negativamente correlacionados, dessa forma:

$$Var\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{1}{4} Var(X_1) + [Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)]$$

É possível provar que a variância pelo método das variáveis antagônicas será menor do que se não utilizarmos nenhum método.

```r
q1_b <- function(n){
  media <- NULL ; prob <- NULL
  for(j in 1:n){
    for(i in 1:n){
      u <- runif(5)
      r1 <- ifelse(sum(1:5*(-log(u))) >= 21.6 , 1, 0)
      r2 <- ifelse(sum(1:5*(-log(1-u))) >= 21.6, 1, 0)
      media[i] <- mean(c(r1, r2))
   }
   prob[j] <- mean(media)
  }
  return(mean(prob))
}
```

```
## [1] 0.1692
```

O valor estimado para θ por esse método foi de 0.1692.

c) Variável controle

Definindo a variável controle: $Z = \sum_{i=1}^{5} iX_i \Rightarrow \mathbb{E}[Z] = 15$ e $Var[Z] = 55$. Simulando $Cov(Y, Z)$, onde $Y = I$

```
q1_c <- function(n){
  prob <- NULL ; y <- NULL ; z <- NULL
  for(j in 1:n){
    for(i in 1:n){
      y[i] <- ifelse(sum(1:5*(-log(runif(5)))) >= 21.6 , 1, 0)
      z[i] <- sum(1:5*(-log(runif(5))))
    }
    covariance <- cov(y, z)
    prob[j] <- mean(y)-(covariance/55)*(mean(z)-15)
  }
  return(mean(prob))
}
```

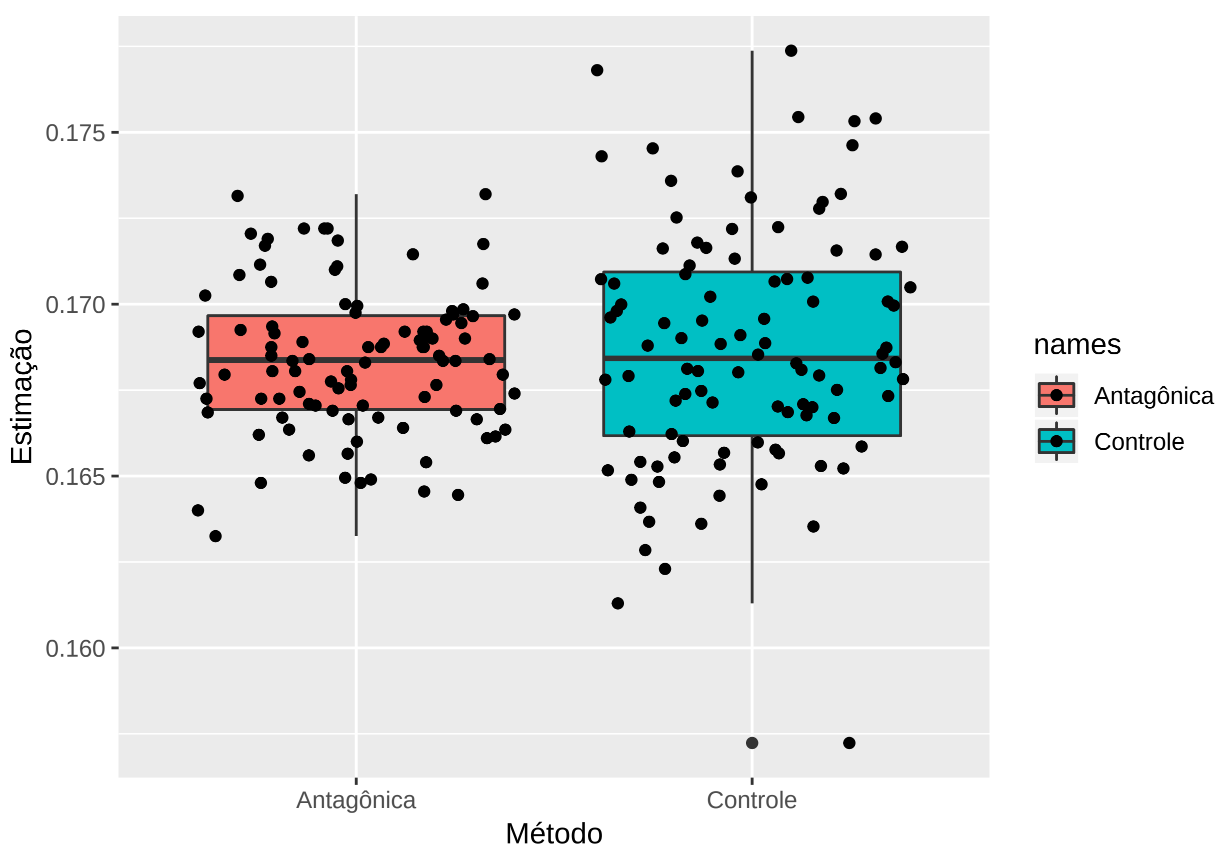
```
## [1] 0.1743488
```

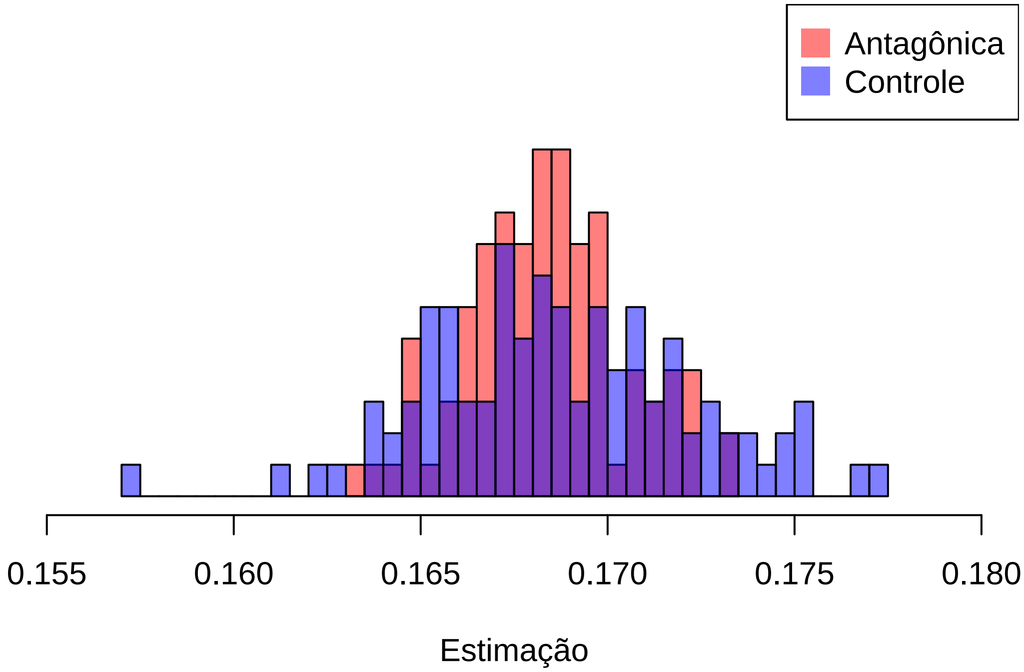
d) Qual método reduziu mais a variância?

Fiz uma análise descritiva para verificar qual método reduziu mais a variância. Através do gráfico abaixo podemos observar que o método das variáveis antagônicas obteve uma variância menor do que o método da variávei controle.

A variância encontrada para o método da antagônica foi 4.4992081×10^{-6}, e pelo método da variável controle 1.259856×10^{-5}. Logo, o método da antagônica diminuiu mais a variância.

Gráficos





Foi o usado o pacote `ggplot2` para gerar esses gráficos.