Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística

Lista 03

1. Gere uma amostra de tamanho 100 das seguintes distribuições:
   (a) Uniforme$\{0, \ldots, 10\}$.
   (b) Gama(2,3).
   (c) Normal(3,9).
   (d) Exponencial(7).

2. Faça um histograma para cada amostra obtida nos itens (b), (c) e (d) na questão anterior e plot sobre o histograma a função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias de onde as amsotras foram sorteadas. Apresente todos os gráficos numa mesma figura. Utilize margens adequadas para melhor visualização dos gráficos.

3. Para a variável $X \sim$ Poisson(5), faça o que se pede
   (a) Calcule $P(X > 0)$.
   (b) Calcule $P(3 \leq X < 12)$.
   (c) Encontre x_0 tal que, $P(X \leq x_0) = 0,76$.
   (d) Encontre x_0 tal que, $P(X > x_0) = 0,73$.

4. Para a variável $X \sim$ Beta(3,10), faça o que se pede::
   (a) Calcule $P(X \geq 0,7)$.
   (b) Calcule $P(0,2 \leq X < 0,25)$.
   (c) Encontre x_0 tal que, $P(X \leq x_0) = 0,20$.
   (d) Encontre x_0 tal que, $P(X > x_0) = 0,12$.

5. Gere uma amostra de tamanho 200 para cada uma das variáveis a seguir e verifique por meio de um qqplot se a amostra gerada é proveniente de uma distribuição $\chi^2(2)$.
   (a) $N(10,5)$.
   (b) $Gama(2,4)$.
   (c) $Poisson(2)$.
   (d) $\chi^2_{(2)}$.

6. Suponha que $X \sim$ Exponencial(5) e $Y \sim$ Binomial(15,0.3). Calcule:
   (a) $P(X > 5)$.
   (b) $P(2 < X \leq 9)$.
   (c) $P(X = 0)$.
   (d) $P(X < 2)$.
   (e) $P(Y = 2)$.
   (f) $P(Y < 5)$.
   (g) $P(-2 < Y < 6)$.

(h) $P(2 < Y \leq 9)$.
(i) $P(Y > 3)$.

7. Suponha que X tem função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \frac{x^3}{20}, \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Calcule as seguintes probabilidades:

(a) $P(X > 2)$.
(b) $P(2 < X \leq 2,6)$.
(c) $P(X > 2,8)$.
(d) $P(X < 2) + P(X > 2,5)$.

8. Plote a função de distribuição acumulada das seguintes variáveis aleatórias.

(a) Uniforme(0,10).
(b) Gama(2,3).
(c) Normal(3,9).
(d) Exponencial(7).
(e) X, com $f(x) = \frac{x^3}{20}, \quad 1 \leq x \leq 3$.
(f) Uniforme$\{0, 1, 2, 3\}$.

9. Plote o gráfico da função de probabilidade e da função de distribuição acumulada das seguintes variáveis aleatórias.

(a) Binomial(100,0.85), para os valores de -1 a 110.
(b) Poisson(5), para valores de -5 a 25.
(c)

x	$P(X = x)$
1	0,05
2	0,35
3	0,15
4	0,05
5	0,20
6	0,15
7	0,05

, para valores de 0 a 10.

10. Gere uma amostra de tamanho 1000 de uma Exponencial(5) e acrescente uma linha vertical vermelha no histograma no valor da média da distribuição e uma linha vertical azul no valor da média amostral.

11. Seja X uma v.a. com função de probabilidade dada por:

x	$P(X = x)$
1	0,05
2	0,35
3	0,15
4	0,05
5	0,20
6	0,15
7	0,00
8	0,00
9	0,05

(a) Faça o gráfico de sua função de probabilidade de X.

(b) Faça o gráfico de $F(x)$, $x = 0, \ldots, 12$..

12. Crie a seguinte função no R e faça o que se pede abaixo.

$$f(x,k) = \frac{\Gamma(k)e^{-kx-3}}{k}, x, k > 0.$$

(a) Plote a função $f(x,4), -2 < x < 6$.

(b) Plote a função $f(2,k), -2 < k < 10$.

(c) Maximize a função acima, considerando que $k = 2$.

(d) Plote a função que foi maximizada no item anterior e uma linha vertical no valor que maximiza a função.

13. Encontre uma estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro desconhecido das distribuições abaixo se foram observadas as amostras fornecidas em cada caso (Faça cada item maximizando a função de verossimilhança e a função de log-verossimilhança).

(a) $X \sim$ Gama(3,β), $x = (1, 2, 2.4, 2.8, 5, 1, 3, 4, 6.3, 2.9)$

(b) $X \sim$ Normal (μ,10), $x = (10, 12, 11, 12.8, 13, 14.9, 12, 16.2)$

(c) $X \sim$ Geom?trica(p), $x = c(2, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 7, 2, 2, 2)$

(d) $X \sim$ Normal(10,σ^2), $x = c(25, 23, 22, 21, 27, 39, 35, 33, 32)$

(e) $X \sim$ Exponencial(η), $x = (4, 5, 6.2, 4, 3, 5, 6.9, 7, 9.3)$

14. Para checar o resultado do teorema central do limite faça o seguinte: (1) gere 1.000 amostras de tamanho n, (2) Calcule a média de cada amostra (3) Faça um histograma com as médias das amostras e compare com a curva da respectiva distribuição apontada pelo teorema para $\bar{X}$. Siga os passos para todos os seguintes valores de $n = 2, 5, 10, 50, 100$. O que acontece com a distribuição de $\bar{X}$ a medida que n cresce em cada um dos casos abaixo?:

(a) $X \sim$ Gama(2,8).

(b) $X \sim$ Geom?trica(0.8).

(c) $X \sim$ Uniforme(2,20).

(d)

x	$P(X = x)$
1	0,05
2	0,35
3	0,15
4	0,05
5	0,20
6	0,15
7	0,05

(e) $X \sim$ Normal(2,8).

(f) $X \sim$ Binomial(20,0.8).

(g) $X \sim \chi^2_{(3)}$.

15. Seja $X \sim N(25, 70)$, $T \sim \chi^2_{(5)}$, $Y \sim Exp(10)$, $Z \sim Gama(3, 5)$e $W \sim Gama(10, 5)$. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras:

(a) $Z + W \sim Gama(13, 5)$.

(b) $2Y \sim Gama(2, 10)$.

(c) $\frac{\bar{X}-25}{\sqrt{70/5}} \sim N(0,1)$, se $\bar{X} = \sum_{i=1}^{5} \frac{X_i}{5}$, em que X_i é uma a.a.s. de X.

(d) $3T \sim Gama(\frac{15}{2}, \frac{1}{2})$.

(e) $\sum_{i=1}^{3} X_i + 20 \sim N(95, 210)$.