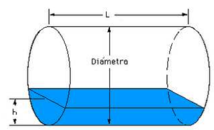
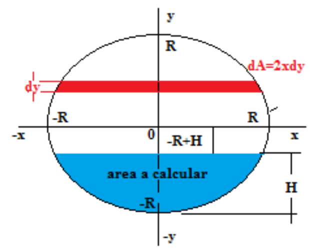
"Ayer cuando estaba sentado en la yeep de mi esposa observé concidencialmente varios camiones que transpaortaban varios tipos de cargas (agua, gas y combustible) en tanques cilíndricos pero con diferentes caras laterales: (círculo, elipse y semiesfera) pensé en calcular el volumen de c/u de ellos, como un ejercicio de curiosidad y este fué el resultado."

Ejemplo de la vida real: Analicemos cúal es el volumen almacenado en un **"tanque cilíndrico horizontal"**, en función del nivel "H" del líquido, del radio "R" del recipiente y de la longitud "L" del mismo. En este caso un tanque de gasolina conducido por un camión.

Tanque cilíndrico Gráfico en 3D Diagrama Transversal





Este tipo de problema puede abordarse de forma trigonométrica, pero lo haremos por integrales definidas ya que abarca toda las situaciones de la altura (H) del fluido de estudio. $(H \leq D, H \geq D)$.

Considremos la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.

Si: $x^2 + y^2 = R^2$ entonces depejando "x":

$$x^2 = R^2 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

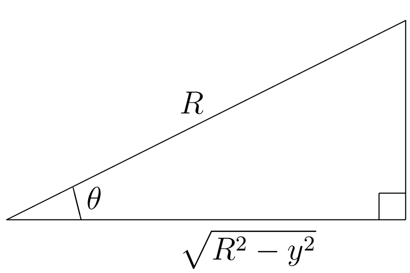
Pero el difrencial del área es: $dA = 2xdy$ por lo tanto; sustituyendo a "x":

$$dA = 2\sqrt{R^2 - y^2}dy$$

Aplicando integral en ambos lados:

$$A = \int dA = \int 2xdy = \int_{-R}^{-R+H} 2\sqrt{R^2 - y^2}dy$$

Entonces la primitiva por el cálculo integral por sustitución trigonométrica es:



$$sen\theta = \left(\frac{y}{R}\right), y = Rsen\theta, \theta = arcsen\left(\frac{y}{R}\right), dy = Rcos\Theta d\Theta$$

$$\int_{-R}^{-R+H} 2\sqrt{R^2 - y^2}dy = 2\int_{-R}^{-R+H} \sqrt{R^2 - (Rsen\Theta)^2}Rcos\Theta d\Theta$$

$$2\int_{-R}^{-R+H}\sqrt{R^2-R^2sen^2\Theta}Rcos\Theta d\Theta = 2\int_{-R}^{-R+H}\sqrt{R^2(1-sen^2\Theta)}Rcos\Theta d\Theta$$

$$2\int_{-R}^{-R+H}R^2\sqrt{cos\Theta^2}cos\Theta d\Theta = 2R^2\int_{-R}^{-R+H}cos^2\Theta d\Theta$$

$$2R^2\left[\frac{1}{2}\Theta+\frac{1}{4}sen(2\Theta)\right]_{-R}^{-R+H} = 2R^2\left[\frac{1}{2}\Theta+\frac{1}{\cancel{4}}(\cancel{2}sen\Theta cos\Theta)\right]_{-R}^{-R+H}$$

$$2R^2\left[\frac{1}{2}\Theta+\frac{1}{2}sen\Theta cos\Theta\right]_{-R}^{-R+H} = 2\left[\frac{R^2}{2}\Theta+\frac{R^2}{2}sen\Theta\sqrt{1-sen^2\Theta}\right]_{-R}^{-R+H}$$

Haciendo cambio de variables:

$$2\left[\frac{R^2}{2}arcsen\left(\frac{y}{R}\right)+\frac{\cancel{R^2}}{2}\left(\frac{y}{\cancel{R}}\right)\sqrt{1-y^2}\right]_{-R}^{-R+H} = 2\left[\frac{R^2}{2}arcsen\left(\frac{y}{R}\right)+\frac{Ry}{2}\sqrt{1-y^2}\right]_{-R}^{-R+H}$$

$$2\left[\frac{R^2}{2}arcsen\left(\frac{y}{R}\right)+\frac{y}{2}\sqrt{R^2-y^2}\right]_{-R}^{-R+H} \Leftrightarrow 2\left[\frac{y}{2}\sqrt{R^2-y^2}+\frac{R^2}{2}arcsen\left(\frac{y}{R}\right)\right]_{-R}^{-R+H}$$

Evaluando los límites:

$$A = 2\left[\frac{(-R+H)}{2}\sqrt{R^2-(-R+H)^2}+\frac{R^2}{2}arcsen\left(\frac{-R+H}{R}\right)-\left(\cancel{\frac{-R}{2}\sqrt{R^2-(-R)^2}}\right)+\frac{R^2}{2}arcsen\left(\frac{-R}{R}\right)\right]$$

$$A = \cancel{2}\left[\frac{(-R+H)}{\cancel{2}}\sqrt{R^2-(-R+H)^2}+\frac{R^2}{\cancel{2}}arcsen\left(\frac{-R+H}{R}\right)+\frac{R^2}{\cancel{2}}arcsen(-1)\right]$$

$$A = \left[(-R+H)\sqrt{\cancel{R^2}-\cancel{R^2}+2RH-H^2}+R^2arcsen\left(\frac{-R+H}{R}\right)-R^2\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

$$A = \frac{\pi R^2}{2}+(H-R)\sqrt{2RH-H^2}+R^2arcsen\left(\frac{-R+H}{R}\right)$$

Esta es el área de la base, para encontrar el volumen tenemos que multiplicar por la altura o longitud "L" del cilindro; por lo tanto la ecuación del volumen será:

$$\boxed{V = L\left[\frac{\pi R^2}{2}+(H-R)\sqrt{2RH-H^2}+R^2arcsen\left(\frac{-R+H}{R}\right)\right]} \quad (1)$$

Calcular el volumen de un tanque de de gasolina cilíndrico que transporta un camión. Si las dimensiones del mismo son: $2m$ de diámetro, $10m$ de longitud y la gasolina en el tanque llena un $30\,\%$ de su diámetro.

Sustituyendo las variables de la 1 ecuación anterior

$$V = 10m\left[\frac{\pi(1m)^2}{2} + (0.6m - 1m)\sqrt{2(1m \times 0.6m) - (0.6m)^2} + (1m)^2 arcsen\left(\frac{-1m + 0.6m}{1m}\right)\right]$$

$$V = 10m\left[1.570m^2 - (0.4m)\sqrt{0.84m^2} + (1m^2)arcsen(-0.4)\right]$$

El seno inverso debe ser aplicado en modo de radianes

$$V = 10m\left[1.570m^2 - 0.3666m^2 + 1m^2(-0.4115)\right]$$

$$v = 10m(0.7919m^2)$$

$$\boxed{v = 7.919m^3}$$

En términos de litros y galones, teniendo en cuenta que:

$$1m^3 = \begin{cases} 1000 \text{ Litros} \\ 264.172 \text{ Galones (US)} \end{cases}$$

$$7.919m^3 = \begin{cases} 7,919 \text{ Litros} \\ 2,092.97 \text{ Galones (US)} \end{cases}$$

También se puede expresar por cálculo múltivariable, pero como los límites de la integral interior son los mismos, solo cambian de signo, es decir son simétricos con respecto al eje "x" se puede expresar:

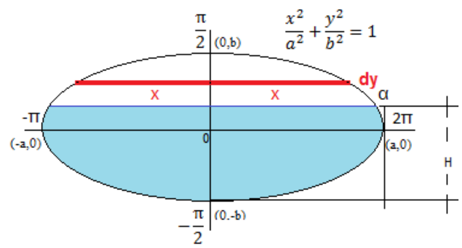
$$v = 2z\int_{-R}^{-R+H}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}} dxdy \quad \wedge \quad \int_{-R}^{-R+H}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\int_{0}^{z} dzdxdy$$

"Lo que sabemos es una gota de agua; lo que ignoramos es el océano."
(Sir.Isaac Newton)

Consideremos ahora un Tanque de agua **"cilíndrico elíptico horizontal"** con las siguientes dimensiones: largo $10m$, el eje mayor $a = 6m$, eje menor $b = 4m$ y la altura del agua $H = 2m$. Calcular la ecuación que define el volumen en función de de la altura y el volumen del mismo.

Tanque Elíptico

Diagrama Transversal



Si: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ entonces depejando "x":

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)} \Rightarrow x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

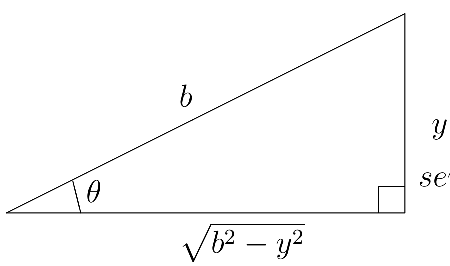
Pero el difrencial del área es: $dA = 2xdy$ por lo tanto; sustituyendo a "x":

$$dA = 2\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^{2-}y^2}\right)dy$$

Aplicando integral en ambos lados:

$$A = \int dA = \int 2xdy = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^{2-}y^2}\right)dy$$

Entonces la primitiva por el cálculo integral por sustitución trigonométrica de:



$$sen\theta = \left(\frac{y}{b}\right), y = bsen\theta, \theta = arcsen\left(\frac{y}{b}\right), dy = bcos\Theta d\Theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - (bsen\Theta)^2}bcos\Theta d\Theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - b^2sen^2\Theta}bcos\Theta d\Theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{a}{b}\sqrt{b^2(1 - sen^2\Theta)}bcos\Theta d\Theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{a}{b}\sqrt{b^2(1 - sen^2\Theta)}bcos\Theta d\Theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{a\cancel{b^2}}{\cancel{b}}\sqrt{cos^2\Theta}d\Theta cos\Theta d\Theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}(ab)cos^2\Theta d\Theta = ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}cos^2\Theta d\Theta = 2ab\left[\frac{1}{2}\Theta + \frac{1}{4}sen(2\Theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}$$

$$2ab\left[\frac{1}{2}\Theta + \frac{1}{\cancel{4}}\cancel{2}sen\Theta cos\Theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = \cancel{2}ab\left[\frac{1}{\cancel{2}}\Theta + \frac{1}{\cancel{2}}sen\Theta cos\Theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = ab \mid \Theta + sen\Theta cos\Theta \mid_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}$$

$$ab\left[\alpha + sen(\alpha)cos(\alpha) - \left(-\frac{\pi}{2} + sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = \left[\alpha + sen(\alpha)cos(\alpha) + \frac{\pi}{2} + \cancel{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$ab\left[\alpha + \frac{\pi}{2} + sen(\alpha)cos(\alpha)\right] = \left[\alpha + \frac{\pi}{2} + sen(\alpha)\sqrt{1 - sen^2\alpha}\right]$$

Pero:

$$y = bsen(\alpha) \Rightarrow (H - b) = bsen(\alpha) \Rightarrow \frac{H - b}{b} = sen(\alpha) \Rightarrow \left(\frac{H}{b} - 1\right) = sen(\alpha)$$

Entonces: $\alpha = arcsen\left(\frac{H}{b} - 1\right)$ en radianes. Sustituyendo:

$$ab\left[arcsen\left(\frac{H}{b} - 1\right) + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{H}{b} - 1\right)\sqrt{1 - \left(\frac{H}{b} - 1\right)^2}\right]$$

$$ab\left[\frac{\pi}{2} + arcsen\left(\frac{H}{b} - 1\right) + \left(\frac{H}{b} - 1\right)\sqrt{\frac{H}{b}\left(2 - \frac{H}{b}\right)}\right]$$

Multiplicando el área por la longitud "L" obtenemos:

$$\boxed{v = L\left[\frac{\pi}{2}ab + (ab)arcsen\left(\frac{H}{b} - 1\right) + (ab)\left(\frac{H}{b} - 1\right)\sqrt{\frac{H}{b}\left(2 - \frac{H}{b}\right)}\right]} \tag{2}$$

Resolviendo el problema anterior sustituyendo las variables $("L, a, b, H")$ en 2 la ecuación de volumen:

$$v = 10m\left[\frac{\pi}{2}(6m \times 4m) + (6m \times 4m)arcsen\left(\frac{2m}{4m} - 1\right) + (6m \times 4m)\left(\frac{2m}{4m} - 1\right)\sqrt{\frac{2m}{4m}\left(2 - \frac{2m}{4m}\right)}\right]$$

$$v = 10m\left[\frac{\pi}{2}(24m^2) + (24m^2)arcsen(-0.5) + (24m^2)(-0.5)\sqrt{0.75}\right]$$

$$v = 10m\left[12m^2\pi - 12.5566m^2 - 10.3923m^2\right]$$

$$v = 10m(37.699m^2 - 22.9489m^2)$$

$$\boxed{v = 147.5m^3 \approx 147,500\ litros \approx 38,965.37\ Galones}$$

[1]

[1]Recordar: el seno es una función impar y el coseno es par ; $sen2x = 2senxcosx;\ cosx = \sqrt{1 - sen^2x}$

Nota: *Es sencillo verificar que con $H = 0$ (tanque vacío), $H = b$ (medio tanque lleno) ó $H = 2b$ (tanque lleno) la fórmula satisface los resultados esperados.*

También se puede expresar por cálculo múltivariable, pero como los límites de la integral interior son los mismos solo cambian de signo por simetría se expresa:

$$v = 2z \int_{-b}^{H} \int_{0}^{\frac{a}{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dxdy \quad \wedge \quad \int_{-b}^{H} \int_{0}^{\frac{a}{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \int_{0}^{z} dzdxdy$$

Sólo con introducir una sonda ” vara testigo” para saber la altura del fluido en estos recipientes, y medir las dimensiones de una de sus caras laterales junto a la longitud del prisma podemos obtener el volumen, para el cáculo en *”EXCEL”* pinchar el campo de Matemáticas, archivo (”volumenes”) en:

https://sites.google.com/site/franciscocabreramsc/

Para cultura general:

Para un cilíndro de longitud ”L”, radio ”R”, con **”casquetes semiesféricos"** en ambos extremos, el volumen para una altura ”H” de líquido es:

$$\boxed{V = L\left[R^2 arccos\left(\frac{R-H}{R}\right) - (R-H)(R)sen\left(arccos\left(\frac{R-H}{R}\right)\right)\right] + \frac{\pi h^2(3R-H)}{3}} \qquad (3)$$

Tanque semi-esférico I

Tanque semi-esférico II

”No puedes enseñarle nada a un hombre, solo puedes ayudarlo a descubrirlo por sí mismo.”
(Galileo Galilei)

[2]

[2]Recordar: el volumen de un casquete semi-esférico: $v = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - H)$