Współczynniki greckie i różniczkowanie wzdłuż ścieżek

2022-12-15

Wstęp

Projekt jest ćwiczeniem z wyceny opcji metodą Monte Carlo. Prezentujemy metodę różniczkowania wzdłuż ścieżek, dla wyznaczania pochodnych cząstkowych funkcji ceny opcji, opisaną w [1], w rozdziale 7.2 pt. "Pathwise Derivative Estimates".

Załóżmy, że mamy estymator Y ceny opcji. Oprócz zależności zmiennej losowej Y od $\omega \in \Omega$, mamy również zależność od parametrów występujących w modelu, np. od ceny startowej S_0 (która może być wektorem, jeśli opcja zależy od kilku aktywów), zmienności rynku σ, stopy procentowej r, terminu T.

Problem zabezpieczenia opcji, czyli wyboru strategii inwestycyjnej przez wystawcę opcji, tak by zabezpieczyć jej wypłatę, wymaga znalezienia pochodnej ceny opcji EY względem parametru S_0.

W ogólności, jesteśmy zainteresowani wyznaczeniem pochodnej funkcji $\theta \mapsto EY(\theta)$ względem pewnego parametru θ.

W tym projekcie zajmujemy się wyznaczaniem następujących pochodnych, zwanych współczynnikami greckimi: delty ($\theta = S_0$), vegi ($\theta = \sigma$), rho ($\theta = r$), thety ($\theta = T$).

Pochodne te będziemy wyliczać dla europejskich i azjatyckich opcji kupna, dla których wartości wzorcowe zebrane są w pracy [3].

Metoda różniczkowania wzdłuż ścieżek

Przypuśćmy, że wariancja przyrostów estymatora $Y(\theta)$ ma następującą własność:

$$\mathrm{Var}[Y(\theta+h) - Y(\theta)] = O(h^2).$$

Wówczas estymator $\hat{\Delta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h}(Y_i(\theta+h) - Y_i(\theta))$ pochodnej $\alpha'(\theta)$ ma błąd średniokwadratowy rzędu:

$$E(\hat{\Delta} - \alpha'(\theta))^2 = O(h^2) + O(\tfrac{1}{n}),$$

a więc malejący ze spadkiem wartości parametru h. Pozwala to sądzić, że dobrym estymatorem $\alpha'(\theta)$ jest

$$Y'(\theta) = \lim_{h\to 0} \frac{Y(\theta+h) - Y(\theta)}{h}.$$

Estymator ten ma wartość oczekiwaną $E[Y'(\theta)]$. Jest on nieobciążonym estymatorem $\alpha'(\theta)$, o ile tylko zachodzi równość (p. [1], równanie (7.16)):

$$E\left[\frac{d}{d\theta}Y(\theta)\right] = \frac{d}{d\theta}E[Y(\theta)]; \tag{*}$$

tj. jeśli zmiana kolejności różniczkowania i całkowania (brania wartości oczekiwanej) jest uzasadniona.

Gdy dla ustalonej wartości parametru θ, pochodna $Y'(\theta)$ istnieje prawie na pewno, mówimy wtedy, że $Y'(\theta)$ jest pochodną Y wzdłuż ścieżek, w punkcie θ.

Przykład 1: opcje europejskie

Pochodna, względem ceny startowej $S(0)$, ceny danej wzorem Blacka-Scholesa, ma wzór jawny i jest to $e^{-\delta T}\Phi(d)$, gdzie $d = (\log(S(0)/K) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)T)/(\sigma\sqrt{T})$, δ jest stopą dywidendy, zaś Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$. Wyznaczenie tego współczynnika delta (nie mylić ze stopą dywidendy) nie wymaga symulacji Monte Carlo, jednakże stanowi poręczny przykład dla prezentacji metody różniczkowania wzdłuż ścieżek.

Niech

$$Y = e^{-rT}(S(T) - K)_+,$$

gdzie

$$S(T) = S(0)\exp\Big((r - \delta - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z\Big), \qquad Z \sim N(0,1),$$

weźmy też θ będące parametrem $S(0)$, przy stałych, dodatnich wartościach parametrów r, σ, T oraz K. Ze wzoru na pochodną funkcji złożonej,

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{dS(T)}\,\frac{dS(T)}{dS(0)}.$$

Dla wyliczenia pierwszego z tych czynników, zauważmy, że

$$\frac{d}{dx}(0, x - K)_+ = \begin{cases} 0, & x < K, \\ 1, & x > K. \end{cases}$$

W punkcie $x = K$ pochodna nie istnieje. Ale ponieważ zdarzenie $\{S(T) = K\}$ ma zerowe prawdopodobieństwo, Y jest prawie na pewno różniczkowalna względem $S(T)$ i ma pochodną

$$\frac{dY}{dS(T)} = e^{-rT}1\{S(T) > K\}.$$

Co do drugiego czynnika, zauważmy, że $S(T)$ zależy w sposób liniowy od $S(0)$, a zatem $\frac{dS(T)}{dS(0)} = \frac{S(T)}{S(0)}$. Podsumowując, mamy

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT}\frac{S(T)}{S(0)}1\{S(T) > K\},$$

wartość, którą łatwo wyznaczamy przy okazji symulacji wartości $S(T)$. Wartość oczekiwana powyższego wyrażenie to rzeczywiście delta dla wzoru Blacka-Scholesa, a zatem mamy estymator nieobciążony.

Przykład 2: opcje azjatyckie

Jak w poprzednim przykładzie, przyjmijmy, że cena instrumentu bazowego ewoluuje zgodnie z geometrycznym ruchem Browna. Rozważmy opcję azjatycką

$$Y = e^{-rT}(\bar{S} - K)_+, \quad \bar{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S(t_i),$$

dla pewnych ustalonych chwil czasu $0 < t_1 < \ldots < t_m \leq T$. Dość podobnie, jak w poprzednim przykładzie,

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{d\bar{S}}\,\frac{d\bar{S}}{dS(0)} = e^{-rT}1\{\bar{S} > K\}\frac{d\bar{S}}{dS(0)}.$$

Zarazem

$$\frac{d\bar{S}}{dS(0)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{dS(t_i)}{dS(0)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{S(t_i)}{S(0)} = \frac{\bar{S}}{S(0)}.$$

Estymator delty tej opcji, wyliczony metodą różniczkowania wzdłuż ścieżek, ma więc postać

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT}1\{\bar{S} > K\}\frac{\bar{S}}{S(0)}.$$

Przykład 3 (negatywny): opcje binarne

Rozważmy opcję binarną, ze zdyskontowaną wypłatą

$$Y = e^{-rT}1\{S(T) > K\},$$

zaś cena S niech będzie modelowana zgodnie z geometrycznym ruchem Browna. Jako funkcja zmiennej $S(T)$, owa zdyskontowana wypłata jest różniczkowalna wszędzie oprócz punktu $S(T) = K$, a co za tym idzie, różniczkowalna prawie na pewno. Ale ponieważ Y jest kawałkami stała względem $S(T)$, jej odpowiednia pochodna zeruje się w każdym punkcie, w którym istnieje, co przenosi się na pochodną względem $S(0)$. A zatem

$$0 = E\left[\frac{dY}{dS(0)}\right] \neq \frac{d}{dS(0)}E[Y].$$

W tym przykładzie, pochodna wzdłuż ścieżek istnieje prawie na pewno, jednakże nie daje żadnej informacji o pochodnej ceny opcji.

Estymatory nieobciążone - warunki dostateczne

Załóżmy, że pochodna $Y'(\theta)$ istnieje prawie na pewno. Podamy niżej warunki dostateczne na to, by zachodziła równość (*). Ograniczymy się do funkcji wypłaty zależnych jedynie od ceny instrumentu lub instrumentów bazowych w skończonej liczbie chwil czasu. Zamiast rozróżniać między jednym aktywem bazowym a kilkoma, przyjmijmy, że wypłata z opcji jest funkcją wektora losowego $X(\theta) = (X_1(\theta), \ldots, X_m(\theta))$, zależnego od parametru θ. A zatem

$$Y(\theta) = f(X_1(\theta), \ldots, X_m(\theta)),$$

dla pewnej funkcji $f : R^m \to R$, odpowiadającej konkretnej opcji.

Zakładamy, że zachodzą następujące warunki.

(A1) W każdym punkcie $\theta \in \Theta$, $X_i'(\theta)$ istnieje z prawdopodobieństwem 1, dla każdego $i = 1, \ldots, m$.

Jeśli f jest różniczkowalna, wówczas Y dziedziczy własność różniczkowalności od zmiennej X, przy założeniu (A1). Funkcje wypłaty bywają nieróżniczkowalne, ale pojedyncze punkty nieróżniczkowalności f zazwyczaj można zignorować, ponieważ proces X „trafia'' w te punkty z prawdopodobieństwem zero. Dokładnie rzecz ujmując, jeśli przez $D_f \subset R^m$ oznaczymy zbiór punktów różniczkowalności f, to wymagamy, by

(A2) $P(X(\theta) \in D_f) = 1$ dla każdego $\theta \in \Theta$.

W takim wypadku, $Y'(\theta)$ istnieje z prawdopodobieństwem 1 i jest dane wzorem

$$Y'(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(\theta))X_i'(\theta).$$

(A3) Istnieje stała k_f, taka że dla każdego x, $y \in R^m$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k_f \|x - y\|;$$

to znaczy, f jest Lipschitzowska.

Standardowa opcja europejska, azjatycka, opcje typów: *lookback*, *spread*, maksimum - wszystkie one spełniają powyższy warunek (tak, jak każda opcja o wypłacie będącej złożeniem przekształceń liniowych i funkcji min i max); natomiast opcja binarna go nie spełnia.

O procesie $X(\theta)$ zakładamy podobnie:

(A4) Istnieją zmienne losowe κ_i, $i = 1, \ldots, m$, takie że dla każdego θ_1, $\theta_2 \in \Theta$,

$$|X_i(\theta_2) - X_i(\theta_1)| \leq \kappa_i |\theta_2 - \theta_1|,$$

oraz $E\kappa_i < \infty$, $i = 1, \ldots, m$.

Warunki (A3) i (A4) łącznie implikują Lipschitzowskość Y prawie na pewno, ponieważ własność Lipschitza zachowywana jest przy składaniu funkcji. Mamy więc

$$|Y(\theta_2) - Y(\theta_1)| \leq \kappa_Y |\theta_2 - \theta_1|,$$

gdzie $\kappa_Y = k_f \sum_i \kappa_i$ i zachodzi $E\kappa_Y < \infty$. Zauważmy, że

$$\left| \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \right| \leq \kappa_Y,$$

skąd wynika własność (*) na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

Podsumowując, warunki (A1)-(A4) wystarczają, by zapewnić nieobciążoność estymatora $Y'(\theta)$.

Współczynniki vega, rho, theta dla opcji europejskich

Podobnie jak dla delty, opisanej w przykładzie powyżej, wyznaczymy teraz wzory na estymatory trzech innych współczynników greckich. Sprawdzimy też, czy warunki (A1)-(A4) są spełnione dla każdego z nich.

. . .

Współczynniki vega, rho, theta dla opcji azjatyckich

Podobnie jak dla delty, opisanej wyżej w przykładzie dotyczącym opcji azjatyckich, wyznaczymy teraz wzory na estymatory trzech innych współczynników greckich dla tychże opcji. Sprawdzimy też, czy warunki (A1)-(A4) są spełnione dla każdego z nich.

...

Przykład numeryczny - opcje europejskie

Wyliczymy współczynniki: delta, vega, rho, theta, dla europejskich opcji kupna z uwzględnieniem dywidend.

```
# Parametry wspólne:
S_0 = 100
K = 100
r = .05
sigma = .30
T = 1
h = 0.01
n = 100 # ilość trajektorii/prób ceny opcji (nazewnictwo zgodne z [1])
```

Wyniki porównujemy z [3], str. 276.

Przykład numeryczny - opcje azjatyckie

Wyliczymy współczynniki: delta, vega, rho, theta, dla azjatyckich opcji kupna z uwzględnieniem dywidend.

Wyniki porównujemy z [3], str. 278.

Literatura:

[1] Paul Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer 2003

[2] Wzory jawne dla współczynników greckich w opcjach europejskich. https://en.wikipedia.org/wiki/Greeks_(finance)#Formulas_for_European_option_Greeks

[3] Wartości dokładne dla opcji europejskich i azjatyckich: Broadie, M., Glasserman, P. (1996) Estimating security price derivatives using simulation, *Management Science* 42, 269-255.