

Opcje amerykańskie i drzewa losowe

2022-12-15

Wstęp

Projekt jest ćwiczeniem z wyceny opcji metodą Monte Carlo. Przedstawiamy przykłady numeryczne dla algorytmów wyceny opcji amerykańskich, opisanych w [1], w rozdziale 8.5 pt. “Stochastic Mesh Methods”.

Opcje amerykańskie - optymalne stopowanie

Znajdźmy wartość V_0 opcji w chwili $t_0 = 0$. Niech h_i oznacza zdyskontowaną wypłatę z opcji w chwili t_i , zwaną też wewnętrzną wartością (*intrinsic value*) opcji. Ponieważ opcję amerykańską możemy w każdej chwili zrealizować (otrzymując h_i) lub czekać, jej wartość jest nie mniejsza od wartości wewnętrznej.

Zdyskontowana wartość $V_i(X_i)$ opcji w chwili t_i na rynku znajdującym się w stanie X_i (w ogólności, X_i jest wektorem zawierającym ceny instrumentów, losowe stopy procentowe r , poziom zmienności rynku σ , itd.), jest dana równaniem rekurencyjnym (patrz [1], równania (8.6)-(8.7)):

$$V_m(x) = h_m(x), V_i(x) = \max\{h_i(x), C_i(x)\}, \quad 0 \leq i \leq m-1, \text{ gdzie } C_i(x) = E[V_{i+1}(X_{i+1}) \mid X_i = x].$$

Powyższe wzory definiują obwiednię Snella $V_i(X_i)$ ciągu $h_i(X_i)$, czyli najmniejszy nadmartynał dominujący funkcję wypłaty. Z teorii optymalnego stopowania (p. [2], dodatek F.2, Twierdzenie 3) wiadomo, że

$$V_0(X_0) = Eh_{\tau^*}(X_{\tau^*}) = \sup_{\tau \in \Theta} Eh_{\tau}(X_{\tau}),$$

gdzie Θ jest zbiorem wszystkich momentów stopu o wartościach w zbiorze $\{0, 1, \dots, m\}$.

Programowanie dynamiczne

Implementacje rozwiązań układu równań (1) zazwyczaj odnoszą się do jego równoważnej postaci, gdzie funkcje \tilde{h}_i oraz \tilde{V}_i nie są zdyskontowane (patrz [1], równania (8.4)-(8.5)):

$$\tilde{V}_m(x) = \tilde{h}_m(x), \tilde{V}_i(x) = \max\{\tilde{h}_i(x), E[D_{i,i+1}(X_{i+1})\tilde{V}_{i+1}(X_{i+1}) \mid X_i = x]\}, \quad 0 \leq i \leq m-1. \quad (2)$$

Szukamy wtedy $\tilde{V}_0(X_0) = V_0(X_0)$. Czynniki $D_{i,i+1}$ jest współczynnikiem dyskonta pomiędzy momentem t_{i+1} a t_i , czyli wartością, w momencie t_i , jednego dolara wypłacanego w przyszłej chwili t_{i+1} . Dla prostego modelu ze stałą stopą procentową r , jest to po prostu $\exp(-r(t_{i+1} - t_i))$.

Równoważność sformułowań (1) i (2) można zobaczyć, jeśli zauważymy, że

$$V_i = \exp(-rt_i)\tilde{V}_i, \quad h_i = \exp(-rt_i)\tilde{h}_i.$$

Zaletą sformułowania (2) jest to, że funkcja wypłaty \tilde{h}_i jest zazwyczaj niezależna od indeksu i .

Wyznamy dwa estymatory, “górny” \hat{V} i “dolny” \hat{v} :

$$E\hat{V}_0 \geq V_0(X_0) \geq E\hat{v}_0.$$

Estymator górny

Oznaczmy przez X_{ij} węzeł naszej siatki, a dokładnie j -ty węzeł związany z i -tym momentem, t_i , w którym można zrealizować opcję, gdzie $i = 1, \dots, m$, zaś $j = 1, \dots, b$. Zakładamy oczywiście, że

$$t_0 < t_1 < \dots < t_m,$$

gdzie t_0 jest chwilą obecną, dla której mamy dodatkowy, pojedynczy węzeł siatki, X_0 .

Będziemy używać symbolu \hat{V}_{ij} dla przybliżonej wartości opcji w tym węźle, wyliczonej następująco metodą rekursji wstecznej. W węzłach końcowych ($i = m$), definiujemy $\hat{V}_{mj} = \tilde{h}_m(X_{mj})$. Następnie, definiujemy

$$\hat{V}_{ij} = \max \left\{ \tilde{h}_i(X_{ij}), \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b W_{jk}^i D_{i,i+1}(X_{i+1,k}) \hat{V}_{i+1,k}, \right\}$$

dla pewnych wartości wagowych W_{jk}^i .

Na koniec, w węźle X_0 definiujemy

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b D_{0,1}(X_{1,k}) \hat{V}_{1,k},$$

bądź też maksimum z tego i z $h_0(X_0)$, gdy dopuszczamy możliwość realizacji opcji w chwili t_0 .

Głównym zagadnieniem w tej metodzie jest odpowiedni wybór współczynników wagowych W_{jk}^i . Jest to ściśle związane z metodą otrzymywania kolejnych węzłów X_{ij} . Można np. losować niezależne trajektorie procesu Markowa X_i , ale nie jest to jedyny sposób generowania siatki.

Założenia o siatce losowej

Podamy teraz warunki dla siatki, których spełnianie wystarcza do konstrukcji estymatora „górnego”, tj. obciążonego dodatnio, i estymatora „dolnego”, tj. obciążonego ujemnie.

Niech wektor losowy

$$X_i = (X_{i1}, \dots, X_{ib})$$

będzie „stanem siatki” w i -tym kroku czasowym, składającym się ze wszystkich węzłów przypisanych do tego samego momentu czasu, dla $i = 1, \dots, m$, i niech X_0 będzie ustalone. Zakładamy, że konstrukcja siatki spełnia warunek Markowa w następującym sensie:

(M1) Dla każdego $i = 1, \dots, m-1$, i dla każdej funkcji mierzalnej f , zachodzi:

$$E[Y | X_0, \dots, X_{i-1}, X_i] = E[Y | X_i], \quad \text{gdy } Y = f(X_{i+1}, \dots, X_m).$$

Biorąc, po obu stronach powyższej równości, warunkową wartość oczekiwaną względem $\{X_{i-1}, X_i\}$, otrzymujemy w szczególności $E[Y | X_{i-1}, X_i] = E[Y | X_i]$, co zachodzi również dla $Y = f(X_i, X_{i+1}, \dots, X_m)$, przy każdej mierzalnej funkcji f (p. [3], wniosek 8.11 (i), str. 171).

Zakładamy też, że spełnione jest założenie:

(M2) Każda z wag W_{jk}^i jest funkcją mierzalną X_i i X_{i+1} .

W szczególności, W_{jk}^i może być mierzalną funkcją wartości X_{ij} oraz $X_{i+1,k}$.

Przypomnijmy, że $C_i(x)$ oznacza wartość oczekiwaną wypłaty z realizacji opcji w chwili późniejszej, tzw. wartość kontynuacji inwestycji. Następny warunek nakłada ograniczenia na wybór wag, tak by pozwalały poprawnie szacować tę wartość, przeciętnie:

(M3) Dla każdego $i = 1, \dots, m-1$ i dla każdego $j = 1, \dots, b$,

$$\frac{1}{b} \sum_{k=1}^b E \left[W_{jk}^i D_{i,i+1}(X_{i+1,k}) V_{i+1}(X_{i+1,k}) \mid X_i \right] = C_i(X_{ij}).$$

Estymator dolny - stopowanie suboptymalne

Estymator dolny konstruujemy przy pomocy reguły stopowania, którą podpowiada nam siatka. W tym celu musimy rozszerzyć współczynniki wagowe W_{jk}^i ze zbioru $\{X_{i1}, \dots, X_{ib}\}$ na wszystkie punkty przestrzeni stanów w chwili i -tej. Przypuśćmy, że mamy takie rozszerzenie, nazwijmy je $W_k^i(x)$; jest to waga łącząca stan x w chwili i , z węzłem $X_{i+1,k}$. Dzięki tej funkcji możemy zdefiniować wartość kontynuacji dla $i = 1, \dots, m-1$ na całej przestrzeni stanów, a nie tylko w węzłach siatki:

$$\hat{C}_i(x) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b W_k^i(x) D_{i,i+1}(X_{i+1,k}) \hat{V}_{i+1,k}$$

Jeśli założymy dodatkowo, że $W_k^i(X_{ij}) = W_{jk}^i$, wówczas $\hat{C}_i(X_{ij})$ jest wartością funkcji kontynuacji w węźle siatki X_{ij} , tzn. mamy interpolację \hat{C}_i z węzłów siatki na całą przestrzeń stanów. Definiujemy $\hat{C}_m \equiv 0$.

Dla ustalonej siatki, możemy teraz wykonać symulację ścieżki X_0, X_1, \dots, X_m naszego procesu Markowa, reprezentującego ewolucję stanu rynku, niezależnie od ścieżek użytych ewentualnie do konstrukcji siatki. Zdefiniujmy następnie moment stopu:

$$\tau = \min\{i : \tilde{h}_i(X_i) \geq \hat{C}_i(X_i)\},$$

czyli jako pierwszy moment, w którym opłaca się bardziej zrealizować opcję, niż ją zachować (kontynuować).

Ów nieoptymalny moment stopu daje nam w wyniku estymator dolny, jako:

$$\hat{v} = D_{0,\tau}(X_\tau) \tilde{h}_\tau(X_\tau),$$

zdyskontowaną wypłatę w chwili τ , gdzie współczynnik dyskonta w prostym modelu ze stałą stopą procentową r , wynosi

$$D_{0,\tau}(X_\tau) = \exp(-r\tau).$$

Konstrukcja siatki i iloraz wiarygodności

Niech przestrzenia stanów dla łańcucha Markowa X_0, X_1, \dots, X_m będzie przestrzeń R^d . Załóżmy, że dla tego łańcucha, prawdopodobieństwa przejścia do kolejnego stanu mają rozkład z gęstościami f_1, \dots, f_m :

$$P(X_i \in A | X_{i-1} = x) = \int_A f_i(x, y) dy, \quad i = 1, \dots, m.$$

Wartością funkcji kontynuacji w stanie x , w chwili i -tej, jest wówczas

$$C_i(x) = E[V_{i+1}(X_{i+1}) | X_i = x] = \int V_{i+1}(x) f_{i+1}(x, y) dy,$$

całka względem gęstości prawdopodobieństwa przejścia. Głównym zadaniem wag w siatce jest umożliwienie oszacowania tych wartości.

Będziemy rozważać następującą metodę generowania $i + 1$ -ych węzłów siatki, mając dane węzły i -te (dla i -tej chwili czasu). Losujemy węzeł $X_{i\ell}$ spośród węzłów X_{i1}, \dots, X_{ib} , z jednakowym prawdopodobieństwem. Następnie generujemy próbkę z rozkładu o gęstości $f_{i+1}(X_{i\ell}, \cdot)$. Powtarzamy proces, aż uzyskamy b wartości węzłów dla chwili $i + 1$; za każdym razem losując („ze zwracaniem”) spośród X_{i1}, \dots, X_{ib} . Konstrukcja ta spełnia warunek (M1). Dla danego wektora $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{ib})$, węzły dla chwili $i + 1$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z gęstością

$$\frac{1}{b} \sum_{\ell=1}^b f_{i+1}(X_{i\ell}, \cdot),$$

średnią z gęstości prawdopodobieństw przejścia z węzłów dla chwili i . Zdefiniujmy teraz wagi następująco:

$$W_{jk}^i = \frac{f_{i+1}(X_{ij}, X_{i+1,k})}{\frac{1}{b} \sum_{\ell=1}^b f_{i+1}(X_{i\ell}, X_{i+1,k})}.$$

Wagi estymatora dolnego

Funkcje wagowe W_k^i otrzymujemy, zastępując powyżej wartość X_{ij} przez zmienną x :

$$W_k^i(x) = \frac{f_{i+1}(x, X_{i+1,k})}{\frac{1}{b} \sum_{\ell=1}^b f_{i+1}(X_{i\ell}, X_{i+1,k})}.$$

Przedziały ufności dla estymatora ceny opcji

Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, otrzymujemy oszacowanie przedziału ufności dla $V_0(X_0)$:

$$I_\delta(n, b) = \left(\bar{v}_0(n, b) - z_{\delta/2} \frac{s_v(n, b)}{\sqrt{n}}, \quad \bar{V}_0(n, b) + z_{\delta/2} \frac{s_V(n, b)}{\sqrt{n}} \right),$$

gdzie n jest ilością replikacji każdego z estymatorów, b jest parametrem symulacji, o którym mówiliśmy wyżej, natomiast \bar{v}_0 , \bar{V}_0 , są średnimi z prób estymatora, odpowiednio, dolnego i górnego. Symbole s_v , s_V oznaczają odpowiednie odchylenie standardowe z prób estymatora. Wielkość z_q to kwantyl standardowego rozkładu normalnego, czyli $\Phi^{-1}(q)$, gdzie Φ jest dystrybuantą $N(0, 1)$.

Przypomnijmy, że $E\hat{v}_0 \leq V_0(X_0) \leq E\hat{V}_0$; jeśli więc $V_0(X_0)$ nie należy do wyżej zdefiniowanego przedziału $I_\delta(n, b)$, to zachodzi albo

$$E\hat{v}_0 \leq \bar{v}_0(n, b) - z_{\delta/2} \frac{s_v(n, b)}{\sqrt{n}},$$

albo

$$E\hat{V}_0 \geq \bar{V}_0(n, b) - z_{\delta/2} \frac{s_V(n, b)}{\sqrt{n}},$$

a każde z tych zdarzeń ma prawdopodobieństwo nie przekraczające $\delta/2$ (dla dużych n); ich alternatywa ma prawdopodobieństwo nie większe, niż δ . Stąd $V_0(X_0)$ zawiera się w przedziale $I_\delta(n, b)$ z prawdopodobieństwem (dla dużych n) przynajmniej $1 - \delta$.

Przykład numeryczny - opcje amerykańskie dla średniej geometrycznej z siedmiu aktywów

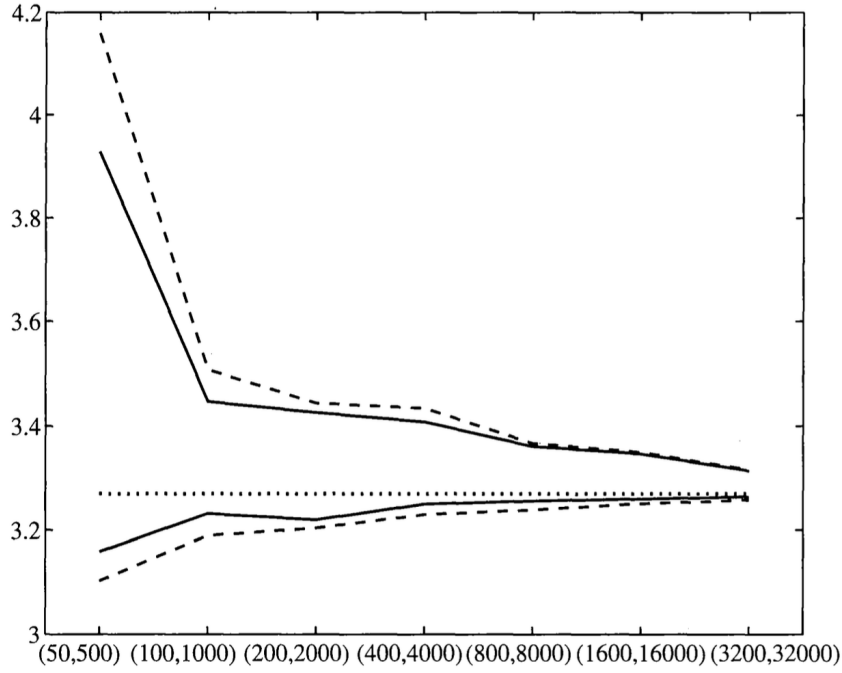


Fig. 8.8. Convergence of high and low mesh estimators for an American geometric average option on seven underlying assets.

W niniejszym przykładzie zakładamy, że ceny siedmiu aktywów, $X = (S^1, S^2, \dots, S^7)$ ewoluują niezależnie, zgodnie z geometrycznym ruchem Browna, to znaczy każda z cen ma rozkład logarytmiczno-normalny (patrz [4]):

$$S^k(t) = S^k(0) \exp\left((r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t^k\right), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2, \dots, 7,$$

gdzie procesy Wienera W^1, \dots, W^7 są niezależne; co modelujemy wg schematu Eulera:

$$S_{i+1}^k = S_i^k \exp((r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma\sqrt{dt}Z^k), \quad k = 1, \dots, 7, \quad Z^k \sim N(0, 1), \quad dt = t_{i+1} - t_i.$$

Przyjmijmy, że wartości parametrów są następujące. Każde z siedmiu aktywów ma cenę początkową 100, zaś cena wykonania K również wynosi 100; stopa procentowa $r = 0.03$, stopa dywidendy $\delta = 0.05$, zmienność $\sigma = 0.40$. Rozważmy amerykańską opcję kupna dla średniej geometrycznej z cen owych siedmiu aktywów. Opcja wygasa po $T = 1$ roku i może być zrealizowana wcześniej, w momentach będących wielokrotnościami wartości 0.1, leżącymi w przedziale $[0, 1]$. Wartość wzorcowa ceny tej opcji wynosi 3.27.

Ponieważ ceny aktywów ewoluują niezależnie, gęstość prawdopodobieństwa przejścia będzie iloczynem gęstości jednowymiarowych. Dokładniej, przejście ze stanu $x = (x_1, \dots, x_7)$ do stanu $y = (y_1, \dots, y_7)$ w interwale czasowym o długości Δt ma rozkład

$$f(x, y) = \prod_{k=1}^7 \frac{1}{y_k \sigma \sqrt{\Delta t}} \phi \left(\frac{\log(y_k/x_k) - (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right),$$

gdzie ϕ jest gęstością rozkładu $N(0, 1)$, patrz [4].

Porównamy wyniki naszej implementacji metody z wynikami z [1], zebranymi na rysunku 8.8, zamieszczonym powyżej. Etykieta (50, 500) na osi poziomej, na tym rysunku, oznacza, że siatka została skonstruowana z parametrem $b = 50$, a następnie estymator dolny został wyznaczony na podstawie dodatkowych 500 trajektorii procesu Markowa X_i . Łamane ciągłe, na wykresie, oznaczają wartości estymatora górnego (\hat{V}) i dolnego; liniami przerywanymi zaznaczono dolne i górne granice przedziału ufności na poziomie 90%, oszacowanego na podstawie 25 replikacji dla każdego rozmiaru siatki. Kropkowana linia pozioma wskazuje cenę dokładną.

Implementacja metody

```
b = 50
m = 500
n = 10
T = 1
K = 100
S_0 = 100
r = .03
delta = .05
sigma = .40
```

Literatura:

- [1] Paul Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003
- [2] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Wyd. 4. SCRIPT, Warszawa, 2010
- [3] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, 2021
- [4] Rozkład logarytmiczno-normalny. https://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution