Opcje amerykańskie i drzewa losowe

2022-12-31

Wstęp

Projekt jest ćwiczeniem z wyceny opcji metodą Monte Carlo. Przedstawiamy przykłady numeryczne dla algorytmów wyceny opcji amerykańskich, opisanych w [1], w rozdziale 8.5 pt. "Stochastic Mesh Methods".

Opcje amerykańskie - optymalne stopowanie

Znajdźmy wartość V_0 opcji w chwili $t_0 = 0$. Niech h_i oznacza zdyskontowaną wypłatę z opcji w chwili t_i, zwaną też wewnętrzną wartością (*intrinsic value*) opcji. Ponieważ opcję amerykańską możemy w każdej chwili zrealizować (otrzymując h_i) lub czekać, jej wartość jest nie mniejsza od wartości wewnętrznej.

Zdyskontowana wartość $V_i(X_i)$ opcji w chwili t_i na rynku znajdującym się w stanie X_i (w ogólności, X_i jest wektorem zawierającym ceny instrumentów, losowe stopy procentowe r, poziom zmienności rynku σ, itd.), jest dana równaniem rekurencyjnym (patrz [1], równania (8.6)-(8.7)):

$$V_m(x) = h_m(x), V_i(x) = \max\{h_i(x),\ C_i(x)\}, \quad 0 \le i \le m-1, \text{gdzie} \quad C_i(x) = E[V_{i+1}(X_{i+1}) \mid X_i = x].$$

Powyższe wzory definiują obwiednię Snella $V_i(X_i)$ ciągu $h_i(X_i)$, czyli najmniejszy nadmartyngał dominujący funkcję wypłaty. Z teorii optymalnego stopowania (p. [2], dodatek F.2, Twierdzenie 3) wiadomo, że

$$V_0(X_0) = Eh_{\tau^*}(X_{\tau^*}) = \sup_{\tau \in \Theta} Eh_\tau(X_\tau),$$

gdzie Θ jest zbiorem wszystkich momentów stopu o wartościach w zbiorze $\{0, 1, \ldots, m\}$.

Wyznaczymy dwa estymatory, "górny" $\hat{V}$ i "dolny" $\hat{v}$:

$$E\hat{V}_0 \ge V_0(X_0) \ge E\hat{v}_0.$$

Estymator górny

Oznaczmy przez X_{ij} węzeł naszej siatki, a dokładnie j-ty węzeł związany z i-tym momentem, t_i, w którym można zrealizować opcję, gdzie $i = 1, \ldots, m$, zaś $j = 1, \ldots, b$. Zakładamy oczywiście, że

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_m,$$

gdzie t_0 jest chwilą obecną, dla której mamy dodatkowy, pojedynczy węzeł siatki, X_0.

Będziemy używać symbolu $\hat{V}_{ij}$ dla przybliżonej wartości opcji w tym węźle, wyliczonej następująco metodą rekursji wstecznej. W węzłach końcowych ($i = m$), definiujemy $\hat{V}_{mj} = h_m(X_{mj})$. Następnie, definiujemy

$$\hat{V}_{ij} = \max\left\{h_i(X_{ij}), \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} W^i_{jk}\hat{V}_{i+1,k},\right\}, \qquad i = 1, \ldots, m-1.$$

dla pewnych wartości wagowych W^i_{jk}.

Na koniec, w węźle X_0 definiujemy

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} \hat{V}_{1,k},$$

bądź też maksimum z tego i z $h_0(X_0)$, gdy dopuszczamy możliwość realizacji opcji w chwili t_0.

Głównym zagadnieniem w tej metodzie jest odpowiedni wybór współczynników wagowych W^i_{jk}. Jest to ściśle związane z metodą otrzymywania kolejnych węzłów X_{ij}. Można np. losować niezależne trajektorie procesu Markowa X_i, ale nie jest to jedyny sposób generowania siatki.

Założenia o siatce losowej

Podamy teraz warunki dla siatki, których spełnianie wystarcza do konstrukcji estymatora „górnego”, tj. obciążonego dodatnio, i estymatora „dolnego”, tj. obciążonego ujemnie.

Niech wektor losowy

$$X_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ib})$$

będzie „stanem siatki” w i-tym kroku czasowym, składającym się ze wszystkich węzłów przypisanych do tego samego momentu czasu, dla $i = 1, \ldots, m$, i niech X_0 będzie ustalone. Zakładamy, że konstrukcja siatki spełnia warunek Markowa w następującym sensie:

(M1) Dla każdego $i = 1, \ldots, m-1$, i dla każdej funkcji mierzalnej f, zachodzi:

$$E\Big[Y \mid X_0, \ldots, X_{i-1}, X_i\Big] = E\Big[Y \mid X_i\Big], \quad \text{gdy } Y = f(X_{i+1}, \ldots, X_m).$$

Biorąc, po obu stronach powyższej równości, warunkową wartość oczekiwaną względem $\{X_{i-1}, X_i\}$, otrzymujemy w szczególności $E[Y|X_{i-1}, X_i] = E[Y|X_i]$, co zachodzi również dla $Y = f(X_i, X_{i+1}, \ldots, X_m)$, przy każdej mierzalnej funkcji f (p. [3], wniosek 8.11 (i), str. 171).

Zakładamy też, że spełnione jest założenie:

(M2) Każda z wag W^i_{jk} jest funkcją mierzalną X_i i X_{i+1}.

W szczególności, W^i_{jk} może być mierzalną funkcją wartości X_{ij} oraz $X_{i+1,k}$.

Przypomnijmy, że $C_i(x)$ oznacza wartość oczekiwaną wypłaty z realizacji opcji w chwili późniejszej, tzw. wartość kontynuacji inwestycji. Następny warunek nakłada ograniczenia na wybór wag, tak by pozwalały poprawnie szacować tę wartość, przeciętnie:

(M3) Dla każdego $i = 1, \ldots, m-1$ i dla każdego $j = 1, \ldots, b$,

$$\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} E\Big[W^i_{jk} V_{i+1}(X_{i+1,k}) \mid X_i\Big] = C_i(X_{ij}).$$

Estymator dolny - stopowanie suboptymalne

Estymator dolny konstruujemy przy pomocy reguły stopowania, którą podpowiada nam siatka. W tym celu musimy rozszerzyć współczynniki wagowe W^i_{jk} ze zbioru $\{X_{i1}, \ldots, X_{ib}\}$ na wszystkie punkty przestrzeni stanów w chwili i-tej. Przypuśćmy, że mamy takie rozszerzenie, nazwijmy je $W^i_k(x)$; jest to waga łącząca stan x w chwili i, z węzłem $X_{i+1,k}$. Dzięki tej funkcji możemy zdefiniować wartość kontynuacji dla $i = 1, \ldots, m-1$ na całej przestrzeni stanów, a nie tylko w węzłach siatki:

$$\hat{C}_i(x) = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} W^i_k(x)\hat{V}_{i+1,k}, \qquad i = 1, \ldots, m-1.$$

Dla $i = 0$ wystarczą wagi jednostkowe, zaś funkcja kontynuacji jest stała:

$$\hat{C}_0(x) \equiv \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} \hat{V}_{1,k}.$$

Jeśli założymy dodatkowo, że $W^i_k(X_{ij}) = W^i_{jk}$, wówczas $\hat{C}_i(X_{ij})$ jest wartością funkcji kontynuacji w węźle siatki X_{ij}, tzn. mamy interpolację $\hat{C}_i$ z węzłów siatki na całą przestrzeń stanów. Definiujemy $\hat{C}_m \equiv 0$.

Dla ustalonej siatki, możemy teraz wykonać symulację ścieżki X_0, X_1, ..., X_m naszego procesu Markowa, reprezentującego ewolucję stanu rynku, niezależnie od ścieżek użytych ewentualnie do konstrukcji siatki.

Zdefiniujmy następnie moment stopu:

$$\tau = \min\{i \ : \ h_i(X_i) \geq \hat{C}_i(X_i)\},$$

czyli jako pierwszy moment, w którym opłaca się bardziej zrealizować opcję, niż ją zachować (kontynuować).

Ów nieoptymalny moment stopu daje nam w wyniku estymator dolny, mianowicie

$$\hat{v}_0 = h_\tau(X_\tau),$$

zdyskontowaną wypłatę w chwili τ.

Konstrukcja siatki

Niech przestrzenią stanów dla łańcucha Markowa X_0, X_1, ..., X_m będzie przestrzeń R^d. Załóżmy, że dla tego łańcucha, prawdopodobieństwa przejścia do kolejnego stanu mają rozkład z gęstościami f_1, ..., f_m:

$$P(X_i \in A | X_{i-1} = x) = \int_A f_i(x, y)\, dy, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Wartością funkcji kontynuacji w stanie x, w chwili i-tej, jest wówczas

$$C_i(x) = E[V_{i+1}(X_{i+1}) \,|\, X_i = x] = \int V_{i+1}(y) f_{i+1}(x, y)\, dy,$$

całka względem gęstości prawdopodobieństwa przejścia. Głównym zadaniem wag w siatce jest umożliwienie oszacowania tych wartości.

Będziemy rozważać następującą metodę generowania $i+1$-ych węzłów siatki, mając dane węzły i-te (dla i-tej chwili czasu). Losujemy węzeł $X_{i\ell}$ spośród węzłów X_{i1}, ..., X_{ib}, z jednakowym prawdopodobieństwem.

Następnie generujemy próbkę z rozkładu o gęstości $f_{i+1}(X_{i\ell},\cdot)$. Powtarzamy proces, aż uzyskamy b wartości węzłów dla chwili $i+1$; za każdym razem losując („ze zwracaniem") spośród X_{i1}, …, X_{ib}. Konstrukcja ta spełnia warunek (M1). Dla danego wektora $X_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ib})$, węzły dla chwili $i+1$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z gęstością

$$\frac{1}{b}\sum_{\ell=1}^{b} f_{i+1}(X_{i\ell},\cdot),$$

średnią z gęstości prawdopodobieństw przejścia z węzłów dla chwili i.

Wagi estymatora dolnego - iloraz wiarygodności

Do kompletnego opisu metody siatki stochastycznej pozostaje zdefiniować wagi używane w estymatorze górnym oraz w definicji funkcji kontynuacji $\hat{C}_i$. Siatka skonstruowana w sposób podany wyżej, spełnia warunki (M1)-(M3), przy następujących wagach:

$$W_{jk}^i = \frac{f_{i+1}(X_{ij}, X_{i+1,k})}{\frac{1}{b}\sum_{\ell=1}^{b} f_{i+1}(X_{i\ell}, X_{i+1,k})}.$$

Funkcje wagowe W_k^i otrzymujemy, zastępując powyżej wartość X_{ij} (tylko w liczniku) przez zmienną x:

$$W_k^i(x) = \frac{f_{i+1}(x, X_{i+1,k})}{\frac{1}{b}\sum_{\ell=1}^{b} f_{i+1}(X_{i\ell}, X_{i+1,k})}.$$

Przykład numeryczny nr 1 - opcje amerykańskie dla jednego instrumentu bazowego

Weźmy zwykłą opcję amerykańską dla jednego aktywa o cenie modelowanej geometrycznym ruchem Browna.

Jeśli aktywo bazowe ma cenę początkową 100, zaś cena wykonania K również wynosi 100; stopa procentowa $r = 0.05$, stopa dywidendy $\delta = 0$, zmienność $\sigma = 0.40$, to amerykańska opcja kupna, wygasająca po $T = 1$ roku, ma cenę 18.00.

Do implementacji metody, potrzebujemy gętości prawdopodobieństwa przejścia ceny S ze stanu $S(t) = x$ do stanu $S(t + dt) = y$ w interwale czasowym o długości dt:

$$f_i(x,y) = f(x,y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{dt}}\phi\left(\frac{\log(y/x) - (r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)dt}{\sigma\sqrt{dt}}\right).$$

gdzie ϕ jest gęstością rozkładu $N(0,1)$, patrz [4].

Poniższy kod jest implementacją metody siatki stochastycznej, dla tego przykładu, z użyciem redukcji wariancji estymatora górnego (*inner controls*), jak w [5].

```
# source("AmericanOptionsStochasticMesh_Vanilla.R")
```

Przykład numeryczny nr 2 - opcje amerykańskie dla średniej geometrycznej z siedmiu aktywów

W tym przykładzie zakładamy, że ceny siedmiu aktywów, $X = (S_1, S_2, \ldots, S_7)$ ewoluują niezależnie, zgodnie z geometrycznym ruchem Browna, to znaczy każda z cen ma rozkład logarytmiczno-normalny (patrz [4]):

$$S_n(t) = S_n(0)\exp\left((r-\delta-\tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_n(t)\right), \qquad t \in [0,T],\ n = 1,2,\ldots,7,$$

gdzie procesy Wienera $W_1,\ldots,W_7$ są niezależne; co modelujemy wg schematu Eulera:

$$S_n(t_{i+1}) = S_n(t_i)\exp((r-\delta-\tfrac{1}{2}\sigma^2)dt+\sigma\sqrt{dt}Z_n), \quad i=0,\ldots,m-1, \qquad n=1,\ldots,7, \quad Z_n \sim N(0,1), \quad dt = t_{i+1}-t_i.$$

Przyjmijmy, że wartości parametrów są następujące. Każde z siedmiu aktywów ma cenę początkową 100, zaś cena wykonania K również wynosi 100; stopa procentowa $r = 0.03$, stopa dywidendy $\delta = 0.05$, zmienność $\sigma = 0.40$. Rozważmy amerykańską opcję kupna dla średniej geometrycznej z cen owych siedmiu aktywów. Opcja wygasa po $T = 1$ roku i może być zrealizowana wcześniej, w momentach będących wielokrotnościami wartości 0.1, leżącymi w przedziale $[0,1]$. Wartość wzorcowa ceny tej opcji wynosi 3.27.

Ponieważ ceny aktywów ewoluują niezależnie, gęstość prawdopodobieństwa przejścia będzie iloczynem gęstości jednowymiarowych. Dokładniej, przejście ze stanu $x = (x_1,\ldots,x_d)$ (tu $d = 7$) do stanu $y = (y_1,\ldots,y_d)$ w interwale czasowym o długości dt ma rozkład z gęstością

$$f_i(x,y) = f(x,y) = \prod_{n=1}^{d} \frac{1}{y_n\sigma\sqrt{dt}}\phi\left(\frac{\log(y_n/x_n)-(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)dt}{\sigma\sqrt{dt}}\right), \qquad i=1,\ldots,m.$$

gdzie ϕ jest gęstością rozkładu $N(0,1)$, patrz [4].

Fakt, że S_n ewoluują niezależnie, zgodnie z geometrycznym ruchem Browna, ułatwia modelowanie powyższej opcji w następującym sensie. Otóż proces średniej geometrycznej $Y(t) = (S_1(t)\cdots S_7(t))^{1/7}$, również jest geometrycznym ruchem Browna, z parametrami:

...

W szczególności, pozwala to na wypisanie wzoru na cenę europejskiej opcji kupna (“*call*”) dla Y:

...

Wzór powyższy jest o tyle ważny, że umożliwia redukcję wariancji naszych estymatorów, przy użyciu tzw. “inner control variates”, dla każdego węzła siatki, jak w zamieszczonym kodzie.

```
# source("AmericanOptionsStochasticMesh_GeomMean.R")
```

Literatura:

[1] Paul Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003

[2] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Wyd. 4. SCRIPT, Warszawa, 2010

[3] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, 2021

[4] Rozkład logarytmiczno-normalny. https://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution

[5] Mark Broadie, Paul Glasserman, *A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options*, PaineWebber Working Papers in Money, Economics and Finance #PW9804, Columbia Business School, New York