Współczynniki greckie i ilorazy wiarygodności

2022-12-15

Wstęp

Projekt jest ćwiczeniem z wyceny opcji metodą Monte Carlo. Prezentujemy metodę mieszaną dla wyznaczania pochodnych cząstkowych funkcji ceny opcji, opisaną w [1] na przykładzie problemu znajdowania współczynnika delta dla opcji binarnych typu europejskiego.

Załóżmy, że mamy zmienną losową Y o tej własności, że EY jest ceną opcji. Oprócz zależności zmiennej losowej Y od $\omega \in \Omega$, mamy również zależność od parametrów występujących w modelu, np. od ceny startowej S_0 (która może być wektorem, jeśli opcja zależy od kilku aktywów), zmienności rynku σ, stopy procentowej r, terminu T.

Problem zabezpieczenia opcji, czyli wyboru strategii inwestycyjnej przez wystawcę opcji, tak by zabezpieczyć jej wypłatę, wymaga na przykład znalezienia pochodnej ceny opcji EY względem parametru S_0.

W ogólności, jesteśmy zainteresowani wyznaczeniem pochodnej funkcji

$$\theta \mapsto \alpha(\theta) = EY(\theta)$$

względem pewnego parametru θ.

Klasyczną metodą poszukiwania przybliżeń pochodnej jest konstrukcja ilorazów różnicowych. W tym projekcie zajmiemy się dwiema innymi metodami, tzw. bezpośrednimi, dającymi estymatory $\alpha'(\theta)$.

Metoda różniczkowania wzdłuż ścieżek

Przypuśćmy, że wariancja przyrostów estymatora $Y(\theta)$ ma następującą własność:

$$\mathrm{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta)] = O(h^2).$$

Wówczas estymator $\hat{\Delta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h}(Y_i(\theta + h) - Y_i(\theta))$ pochodnej $\alpha'(\theta)$ ma błąd średniokwadratowy rzędu:

$$E(\hat{\Delta} - \alpha'(\theta))^2 = O(h^2) + O(\tfrac{1}{n}),$$

a więc malejący ze spadkiem wartości parametru h. Pozwala to sądzić, że dobrym estymatorem $\alpha'(\theta)$ jest

$$Y'(\theta) = \lim_{h \to 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h}.$$

Estymator ten ma wartość oczekiwaną $E[Y'(\theta)]$. Jest on nieobciążonym estymatorem $\alpha'(\theta)$, o ile tylko

$$E\left[\frac{d}{d\theta} Y(\theta)\right] = \frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)]; \tag{*}$$

tj. jeśli zmiana kolejności różniczkowania i całkowania (brania wartości oczekiwanej) jest uzasadniona.

Gdy dla ustalonej wartości parametru θ, pochodna $Y'(\theta)$ istnieje prawie na pewno, mówimy wtedy, że $Y'(\theta)$ jest pochodną Y wzdłuż ścieżek, w punkcie θ.

Przykład 1: opcje europejskie

Pochodna, względem ceny startowej $S(0)$, ceny danej wzorem Blacka-Scholesa, ma wzór jawny i jest to $e^{-\delta T}\Phi(d)$, gdzie $d = (\log(S(0)/K) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)T)/(\sigma\sqrt{T})$, δ jest stopą dywidendy, zaś Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$. Wyznaczenie tego współczynnika delta (nie mylić ze stopą dywidendy) nie wymaga symulacji Monte Carlo, jednakże stanowi poręczny przykład dla prezentacji metody różniczkowania wzdłuż ścieżek.

Niech

$$Y = e^{-rT}(S(T) - K)_+,$$

gdzie

$$S(T) = S(0)\exp\Big((r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z\Big), \qquad Z \sim N(0,1),$$

weźmy też θ będące parametrem $S(0)$, przy stałych, dodatnich wartościach parametrów r, σ, T oraz K. Ze wzoru na pochodną funkcji złożonej,

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{dS(T)}\,\frac{dS(T)}{dS(0)}.$$

Dla wyliczenia pierwszego z tych czynników, zauważmy, że

$$\frac{d}{dx}(0, x-K)_+ = \begin{cases} 0, & x < K, \\ 1, & x > K. \end{cases}$$

W punkcie $x = K$ pochodna nie istnieje. Ale ponieważ zdarzenie $\{S(T) = K\}$ ma zerowe prawdopodobieństwo, Y jest prawie na pewno różniczkowalna względem $S(T)$ i ma pochodną

$$\frac{dY}{dS(T)} = e^{-rT}1\{S(T) > K\}.$$

Co do drugiego czynnika, zauważmy, że $S(T)$ zależy w sposób liniowy od $S(0)$, a zatem $\frac{dS(T)}{dS(0)} = \frac{S(T)}{S(0)}$. Podsumowując, mamy

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT}\frac{S(T)}{S(0)}1\{S(T) > K\},$$

wartość, którą łatwo wyznaczamy przy okazji symulacji wartości $S(T)$. Wartość oczekiwana powyższego wyrażenie to rzeczywiście delta dla wzoru Blacka-Scholesa, a zatem mamy estymator nieobciążony.

Przykład 2 (negatywny): opcje binarne

Rozważmy opcję binarną, ze zdyskontowaną wypłatą

$$Y = e^{-rT} 1\{S(T) > K\},$$

zaś cena S niech będzie modelowana zgodnie z geometrycznym ruchem Browna. Jako funkcja zmiennej $S(T)$, owa zdyskontowana wypłata jest różniczkowalna wszędzie oprócz punktu $S(T) = K$, a co za tym idzie, różniczkowalna prawie na pewno. Ale ponieważ Y jest kawałkami stała względem $S(T)$, jej odpowiednia pochodna zeruje się w każdym punkcie, w którym istnieje, co przenosi się na pochodną względem $S(0)$. A zatem

$$0 = E\left[\frac{dY}{dS(0)}\right] \neq \frac{d}{dS(0)} E[Y].$$

W tym przykładzie, pochodna wzdłuż ścieżek istnieje prawie na pewno, jednakże nie dostarcza żadnej informacji o pochodnej ceny opcji.

Metoda ilorazu wiarygodności

Powodem, dla którego opcje binarne i ich współczynnik delta wymykają się metodzie różniczkowania wzdłuż ścieżek, jest nieciągłość (a więc i nieróżniczkowalność) Y jako funkcji S_T. Metoda ilorazów wiarygodności jest niewrażliwa na tę nieregularność, za to ma inną wadę: uzyskiwany tą metodą estymator ma wysoką wariancję.

Rozważmy wypłatę Y z opcji, jako funkcję f wektora stanów rynku $X = (X_1, \ldots, X_m)$. Współrzędne X mogą być na przykład cenami kilku różnych aktywów, albo też cenami jednego aktywa w różnych chwilach czasu. Przy metodzie różniczkowania wzdłuż ścieżek, zakładaliśmy, że istnieje zależność funkcyjna X (a stąd i Y) od parametru θ. W metodzie ilorazu wiarygodności, zamiast tego zakładamy, że rozkład X posiada gęstość g, i że θ jest parametrem tej gęstości. Oznaczamy więc tę gęstość przez g_θ, a gdy całkujemy względem rozkładu X, będziemy też oznaczać wartość oczekiwaną przez E_θ. W tej nomenklaturze, wartością oczekiwaną wypłaty jest

$$E_\theta[Y] = E_\theta[f(X_1, \ldots, X_m)] = \int_{R^m} f(x) g_\theta(x)\, dx.$$

Dla potrzeb naszej konstrukcji estymatora pochodnej, załóżmy że zmiana kolejności różniczkowania i całkowania (brania wartości oczekiwanej) jest uzasadniona, a więc, że mamy

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta[Y] = \int_{R^m} f(x) \frac{d}{d\theta} g_\theta(x)\, dx. \tag{**}$$

W takim razie, mnożąc i dzieląc pod całką przez g_θ, otrzymujemy:

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta[Y] = \int_{R^m} f(x) \frac{g'_\theta(x)}{g_\theta(x)} g_\theta(x)\, dx = E_\theta\left[f(X) \frac{g'_\theta(X)}{g_\theta(X)}\right].$$

Stąd wynika, że wyrażenie

$$f(X) \frac{g'_\theta(X)}{g_\theta(X)}$$

jest nieobciążonym estymatorem pochodnej funkcji $\theta \mapsto E_\theta[Y]$. Nazywamy go estymatorem LRM (*likelihood ratio method*), ilorazu wiarygodności.

Za [1], podajemy dwie uwagi dotyczące estymatora LRM.

- Podobnie, jak w metodzie różniczkowania wzdłuż ścieżek, nasze podejście jest uprawnione pod warunkiem przemienności całkowania i różniczkowania w równaniu (**). W praktyce, warunek ten jest dużo mniej restrykcyjny niż równanie (*), ponieważ gęstości są zazwyczaj gładkimi funkcjami swoich parametrów, w przeciwieństwie do funkcji wypłaty. Tak więc warunek (**) zazwyczaj jest spełniony.
- W literaturze statystycznej, wyrażenie postaci g'_θ/g_θ jest nazywane *score function.* Zmienną losową $g'_\theta(X)/g_\theta(X)$ będziemy nazywali po prostu *score*, zamiast: „wyrażenie, które jest mnożnikiem zdyskontowanej wypłaty w estymatorze metody ilorazów wiarygodności''.

Przykład: opcje europejskie

Aby oszacować wartość delty dla opcji europejskich, przy użyciu metody ilorazu wiarygodności, przyjmijmy, że $S(0)$ jest parametrem gęstości rozkładu $S(T)$. Jeśli założymy, że cena $S(t)$ ewoluuje zgodnie z ruchem Browna,

$$S(t) = S(0)\exp\Big((r-\delta-\tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\Big), \qquad t \in [0,T],$$

wówczas jej wartość $S(T)$ ma rozkład logarytmiczno-normalny (p. [3]) z gęstością g:

$$g(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x)), \quad \zeta(x) = \frac{\log(x/S(0)) - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

gdzie ϕ jest gęstością rozkładu $N(0,1)$. Po pewnych przekształceniach mamy

$$\frac{dg(x)/dS(0)}{g(x)} = -\zeta(x)\frac{d\zeta(x)}{dS(0)} = \frac{\log(x/S(0)) - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{S(0)\sigma^2 T}.$$

Wartość *score* otrzymamy, podstawiając $S(T)$ za x w powyższym wyrażeniu; by mieć nieobciążony estymator delty, pomnożymy wynik przez zyskontowaną wypłatę z opcji:

$$e^{-rT}(S(T)-K)_+\left(\frac{\log(x/S(0)) - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{S(0)\sigma^2 T}\right).$$

Jeśli do wygenerowania próbki $S(T)$ przy danym $S(0)$ używamy próbki Z z rozkładu standardowego normalnego $N(0,1)$, to wówczas $\zeta(S(T)) = Z$, zaś powyższy estymator upraszcza się do

$$e^{-rT}(S(T)-K)_+\left(\frac{Z}{S(0)\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Postać funkcji wypłaty nie jest tu istotna; każda funkcja $S(T)$ dałaby estymator o tej samej postaci. Współczynnik delta dla opcji binaarnej, na przykład, może być estymowany przez

$$e^{-rT}1\{S(T)>K\}\left(\frac{Z}{S(0)\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Ta ogólna własność metody ilorazów wiarygodności daje jej przewagę nad metodą różniczkowania wzdłuż ścieżek: gdy już wyznaczymy *score*, możemy go mnożyć przez różne zdyskontowane funkcje wypłaty, otrzymując delty różnych opcji.

Metoda mieszana

Przeprowadzimy eksperymenty numeryczne, weryfikujące wyniki metody mieszanej, zilustrowane na rysunku 7.4 w [1].

Używać będziemy metody ilorazów wiarygodności w punktach różniczkowalności, zaś w punktach pozostałych użyjemy metody różniczkowania wzdłuż ścieżek.

Wypłatę z opcji binarnej możemy przedstawić w postaci

$$1\{x > K\} = f_\epsilon(x) + (1\{x > K\} - f_\epsilon(x)) \equiv f_\epsilon(x) + h_\epsilon(x),$$

gdzie

$$f_\epsilon(x) = \min\left\{1, \frac{(x - K + \epsilon)_+}{2\epsilon}\right\}.$$

Funkcja $f_\epsilon(x)$ jest kawałkami liniowym przybliżeniem schodkowej funkcji wypłaty $1\{x > K\}$, zaś h_ϵ jest poprawką tego przybliżenia. Możemy teraz zastosować metodę ilorazów wiarygodności do $f_\epsilon(S(T))$, zaś metodę różniczkowania wzdłuż ścieżek do $h_\epsilon(S(T))$, otrzymując złożony estymator delty:

$$\frac{1}{2\epsilon} 1\{|S(T) - K| < \epsilon\} \frac{S(T)}{S(0)} + h_\epsilon(S(T)) \frac{\zeta(S(T))}{S(0)\sigma\sqrt{T}},$$

o ile założymy, że $S(t)$ ewoluuje zgodnie z geometrycznym ruchem Browna,

$$S(t) = S(0)\exp((r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t).$$

Rysunek 7.4 z [1], zamieszczony poniżej, pokazuje wartości wariancji tego estymatora w funkcji parametru ϵ, przy $S(0) = K = 100$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $\delta = 0$, $T = 0.25$. Przypadek $\epsilon = 0$ odpowiada użyciu wyłącznie metody ilorazu wiarygodności. Wartości ϵ bliskie zera, dają w wyniku dużą wariancję, z winy ϵ w mianowniku estymatora, ale przy dużych ϵ wariancja jest mała. Minimum występuje dla zaskakująco dużej wartości $\epsilon \approx 35$.

Wyniki te porównamy z naszą implementacją metody mieszanej.

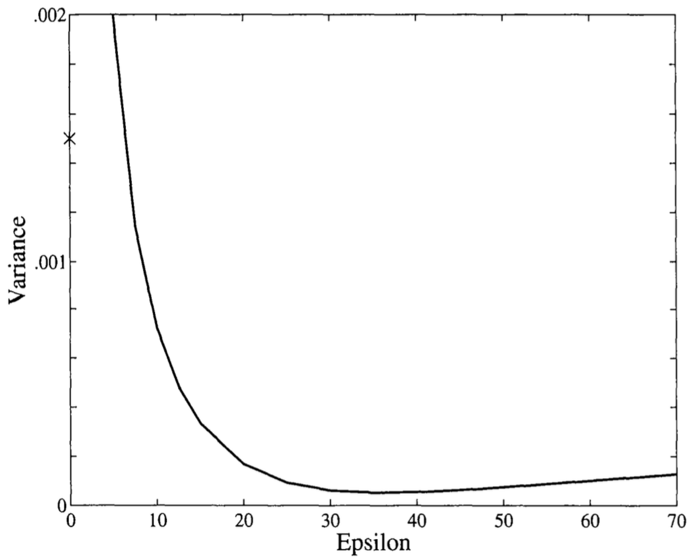

Fig. 7.4. Variance of mixed estimator as a function of linearization parameter ϵ.

```
# Parametry wspólne:
S_0 = 100
K = 100
r = .05
sigma = .30
T = 0.25
h = 0.01
n = 100 # ilość trajektorii/prób ceny opcji (nazewnictwo zgodne z [1])
```

Literatura:

[1] Paul Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer 2003

[2] Wzory jawne dla współczynników greckich w opcjach europejskich. https://en.wikipedia.org/wiki/Greeks_(finance)#Formulas_for_European_option_Greeks

[3] Rozkład logarytmiczno-normalny. https://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution