Cosmological Background

1) Robertson Walker Metric.

1.1) Consider a sphere of radius a, with parameters on the spherical coordinates, show that

$$dl^2 = a^2\left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2\right]$$

with $r = \operatorname{sen}\chi$

El Anstaz para la métrica por lo tanto se puede escribir sin perdida de generalidad como

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - S^2(t)\,\tilde{g}_{ij}(x)\,dx^i dx^j} \quad (1)$$

$\tilde{g}_{ij}$ es la métrica de las secciones especiales tridimensional con curvatura constante.

$$\hookrightarrow \tilde{R}_{ijkl} = k\,(\tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl})$$

La función $S^2(t)$ es el factor de escala. Una función del tiempo cosmológico que mide la expansión o contracción del universo.

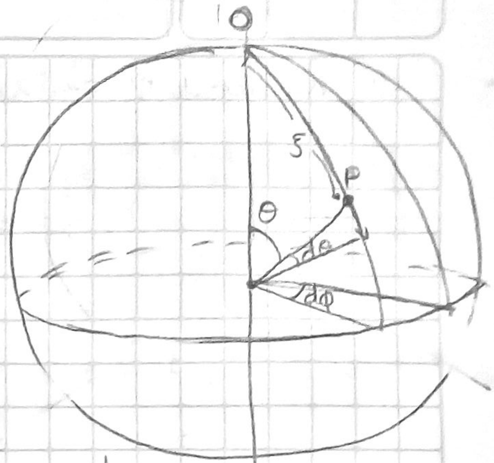
El principio cosmológico y el postulado de Weyl determina casi por completo la forma de la métrica del espacio tiempo.

El factor de escala $S(t)$ se determina a través de las ec. de Einstein.

La isotropía del espacio implica una simetría esférica, por lo tanto se puede escribir la métrica de la forma.

$$dl^2 = e^{2B(\bar{a})}\,d\bar{a}^2 + \bar{a}^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi) \quad (\alpha)$$

considerando $dr = 0$ ya que $r = cte$



$$dl^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2$$

$$\xi = \theta a \qquad d\xi = a\, d\theta \qquad d\theta^2 = \frac{d\xi^2}{a^2}$$

$$\boxed{dl^2 = a^2 \frac{d\xi^2}{a^2} + a^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\xi}{a}\right) d\varphi^2} \quad ②$$

donde ξ es la longitud de arco
que es la menor distancia entre O y P en la superficie de una esfera, que asu vez es la parte de un circulo, por ende se puede considerar como la geodésica

haciendo un cambio para introducir una distancia medible

$$\boxed{x = a \operatorname{sen}\left(\frac{\xi}{a}\right)} \quad ③$$

$$dx = a \cos\left(\frac{\xi}{a}\right) \frac{1}{a} d\xi \; ; \qquad dx^2 = \cos^2\left(\frac{\xi}{a}\right) d\xi^2 = \left[1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\xi}{a}\right)\right] d\xi^2$$

$$dx^2 = \left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] d\xi^2$$

$$\boxed{\frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{a^2}} = d\xi^2} \quad ④$$

tomando $K = 1/a^2$ que es la curvatura en dos dimensiones

y llevando ③, ④ → ② se llega ha

$$\boxed{dl^2 = \frac{dx^2}{1 - Kx^2} + x^2 d\varphi^2}$$

2) basandonos en el principio cosmológico, el postulado de Weyl's y de la relatividad general.

Considerando el elemento de linea como:

$$\boxed{ds^2 = h_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu}} \quad (1) \quad \text{con } \mu, \nu = (0,1,2,3)$$

para un universo homogéneo e isótropo se considera la constante $a(t)$ que da información sobre la expansión o contracción del universo.

$$\Rightarrow \quad \boxed{h_{\mu\nu} = a^2(t)\, g_{\mu\nu}} \quad (2)$$

↳ cte que varia con el tiempo y mide la contracción o expansión del universo.

Considerando un espacio de curvatura cte, que es caracterizado por la ecuación

$$\boxed{R_{ijkl} = k\,(g_{ik}\, g_{jl} - g_{il}\, g_{jk})} \quad (3)$$

donde k es la cte de curvatura cte

contrayendo con g^{ik} se tiene.

$$g^{ik} R_{ijkl} = k\, g^{ik}(g_{ik}\, g_{jl} - g_{il}\, g_{jk}) \qquad i,j,k,l = (1,2,3)$$

$$R_{jl} = k\,(3\, g_{jl} - \delta^{k}_{l}\, g_{jk})$$

$$R_{jl} = k\,(3\, g_{jl} - g_{jl}) = 2k\, g_{jl}$$

$$\Rightarrow \therefore \boxed{R_{jl} = 2k\, g_{jl}} \quad (4)$$

Como se tiene una isotropía en todos los puntos en el espacio de 3 dimensiones, entonces cumplir una simetría esférica sobre todos los puntos.

Entonces el elemento de línea debe de ser.

$$\boxed{dl^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)} \quad (5)$$

Donde los componentes no nulos del tensor de Ricci son

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r} \quad , \quad R_{22} = 1 - e^{-\lambda} + \frac{r}{2} e^{-\lambda} \lambda' \qquad R_{33} = \operatorname{sen}^2\theta \, R_{22}$$

Comparando con (4)

$$\frac{\lambda'}{r} = 2\kappa e^{\lambda} \quad , \quad 1 - e^{-\lambda} + \frac{1}{2} e^{-\lambda} \lambda' = 2\kappa r^2 d\theta^2 , \quad \operatorname{sen}^2\theta \, R_{22} = 2\kappa r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2$$

donde λ' equivale $\frac{d\lambda(r)}{dr}$

de aca se llega ha

$$\frac{\lambda'}{r} = 2\kappa e^{\lambda} \quad , \quad 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda} = 2\kappa r^2$$

la solución a esta ecuación es

$$\boxed{e^{-\lambda} = 1 - \kappa r^2} \quad (6)$$

remplazando en (5)

$$\boxed{dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2)} \quad (7)$$

Volviendo ha (1) con la condición (2)

$$ds^2 = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(t) \, g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu =$$

$$= g_{00} dx^0 dx^0 + g_{i0} dx^i dx^0 + g_{0i} dx^0 dx^i + g_{ij} dx^i dx^j ,$$

con $i, j = 1, 2, 3$

- $\boxed{g_{00} = 1}$
- Imponiendo simetría bajo inversión temporal $\Rightarrow$ g_{0i} y g_{i0} son cero

$$\Rightarrow \therefore \; ds^2 = a^2(t) * \Big[\underbrace{(dx^0)^2}_{dt^2} + \underbrace{g_{ij} dx^i dx^j}_{dl^2} \Big]$$

donde en principio es posible incluir una función del tiempo $a^2(t)$ multiplicada por el término dt^2, pero se tiene que $a^2(t)$ puede ser absorvida con una redefinición de la coordenada temporal

$\Rightarrow \therefore \; ds^2 = dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2\right]$

que a su vez es igual a $g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$.

- Con $K=1$

Al considerar una curvatura cte positiva, que en este caso es $K=1$ entonces el rango de la coordenada r es $[-1,1]$, ya que g_{rr} se vuelve singular cuando $r \rightarrow \pm 1$, entonces se hace el siguiente cambio de coordenadas.

$$r = sen\,\chi \qquad dr = \cos\chi\, d\chi = \sqrt{1-sen^2\chi}\, d\chi$$

$$\rightsquigarrow \boxed{d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}}$$

llevando a la ecuacion (7)

$$dl^2 = a^2(t)\left[d\chi^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2)\right] \overset{con}{\rightsquigarrow} a(t_0) = R_0$$

que equivale a la métrica de una esfera tridimensional con radio R_0.

$$dl^2 = R_0^2\left[d\chi^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2)\right]$$

3.)
(a) $K=0$
es el caso mas sencillo.

se llega a $dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2)$

que es la métrica para $\mathbb{R}^3$ en coordenadas esféricas. Esto era de esperarse, ya que para $K=0$ la ecuación se reduce a la ecuación del espacio plano.

Se sabe que $\mathbb{R}^3$ es un espacio de curvatura cte, puesto que tiene curvatura cero en todos los puntos.

$\therefore$ $K=0$ el plano con curvatura cero.

4) Mostrar que la métrica puede reescribirse como.

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[d\tau^2 - d\chi^2 - f_k^2(\chi)\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2)\right]$$

con $\tau = \int_0^t \frac{c\,dt'}{a(t)'}$, de la expresión para $f_k(\chi)$

$$d\tau = d\int^t \frac{c\,dt'}{a(t')} = c\frac{dt}{a(t)} \quad ; \quad \frac{a(t)}{c}d\tau = dt$$

$$\frac{a^2(t)}{c^2}d\tau^2$$

$$ds^2 = c^2\frac{a^2(t)}{c^2}d\tau^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 d\phi^2)\right]$$

$$ds^2 = a^2(\tau)\left\{d\tau^2 - \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d^2\phi)\right]\right\} \quad (\alpha)$$

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \rightsquigarrow d\chi^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} \quad ①$$

$$\chi = \int\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{k}\,r)}{\sqrt{k}} \rightsquigarrow \frac{\operatorname{sen}}{\sqrt{k}}(\sqrt{k}\,\chi) = r \quad ②$$

remplazando ① y ② en (α)

$$\Rightarrow ds^2 = a^2(\tau)\left\{d\tau^2 - d\chi^2 - \left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{k}\,\chi)}{\sqrt{k}}\right]^2\left[d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d^2\phi\right]\right\}$$

$$\therefore \boxed{ds^2 = a^2(\tau)\left\{d\tau^2 - d\chi^2 - f^2(\chi)\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d^2\phi)\right\}}$$

donde $\boxed{f(\chi) = \frac{\operatorname{sen}}{\sqrt{k}}(\sqrt{k}\,\chi)}$ ✓✓

Partiendo de la métrica

5)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2)\right\}$$

Considerando dos observadores t_e y t_o, de los cuales t_e lanza un rayo de luz que llega a t_o. Suponiendo sin perdida de generalidad que el rayo de luz viaja en una linea recta solo radial; con lo cual se tiene θ y φ ctes, entonces $d\theta = d\varphi = 0$.

Puesto que la señal que viaja entre los dos observadores es luminosa, entonces $ds = 0$.

De lo anterior se llega ha

$$0 = c^2 dt^2 - a^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2}\right\} \Rightarrow \boxed{c\int_{t_e}^{t_o}\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_o}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \hat{\sigma}} \quad ①$$

La luz emitida desde un instante $t_e + \Delta t_e$ y recibida en $t_o + \Delta t_o$ recorre la misma distancia

$$\boxed{\hat{\sigma} = c\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_o+\Delta t_o}\frac{dt}{a(t)}} \quad ② \rightsquigarrow \text{ restando ② y ① se tiene}$$

$$\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_o+\Delta t_o}(\;) = \int_{t_e}^{t_o}(\;) + \int_{t_o}^{t_o+\Delta t_o}(\;) - \int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e}(\;)$$

$$\Rightarrow \int_{t_e+\Delta t_e}^{t_o+\Delta t_o}\frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_o}\frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o+\Delta t_o}\frac{dt}{a(t)} - \int_{t_o}^{t_e+\Delta t_e}\frac{dt}{a(t)}$$

Como las integrales se realizan sobre un intervalo diferencial Δt es cierto que:

$$\boxed{\frac{\Delta t_o}{a(t_o)} = \frac{\Delta t_e}{a(t_e)}} \quad 4$$

Si el intervalo temporal es el que separa dos máximos de una onda monocromática, entonces la frecuencia es $\nu = 1/\Delta t$, de modo que

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{1/\Delta t_e}{1/\Delta t_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \boxed{\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e}} \quad (5)$$

donde $z = \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \dfrac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1} \quad (6)$$

$\Rightarrow$ llevando $(5) \to (6) \Rightarrow z = \dfrac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1$

$$\Rightarrow \therefore \; z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{a_0}{a}$$

6) para encontrar la dependencia del factor de escala $a(t)$ con los parámetros P, ρ y T; partamos desde la conservación de la energía:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \quad (1)$$

Solo la parte temporal brinda información entre ρ, P con $a(t)$

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p) U^\mu U_\nu + p\,\delta^\mu_\nu$$

$$U^\mu = (1,0,0,0) \; ; \; U^\mu = \frac{dX^\mu}{ds}$$

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & -p & & \\ 0 & & -p & \\ & & & -p \end{pmatrix} \Rightarrow T_{00} = \rho(t), \; T_{i0} = 0, \; T_{ij} = -P(t) g_{ij}(t, x)$$

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = \partial_\mu T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu{}_\lambda$$

La evolución de la densidad de energía es determinado por $\nu = 0$

$$\nabla_\mu T^\mu{}_0 = \partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda{}_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda = 0$$

$$\partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda{}_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda = 0.$$

Como $T_{i0} = 0$

$$\frac{d}{dt}\rho_{(t)} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}\rho - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda = 0$$

Usando los simbolos de christoffel se llega

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad ②$$

La ley de conservación de la energía (1) es imposible de resolver, si no especificamos con que tipo de energía estamos tratando. El tipo de energía o materia viene especificado por la dependencia de la P_α de la densidad ρ_α, expresado por la ecuación de estado

$\boxed{P_\alpha = w_{(\alpha)}\rho_\alpha}$ (3), al remplazar (3) en ②

$$\boxed{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_\alpha + w_{(\alpha)}\rho_\alpha) = 0.} \quad (4)$$

donde para:

- $w_{(\alpha)} = 0$ corresponde a un fluido perfecto con solamente densidad de materia, sin presión y describe por lo tanto materia fria, sin interacciones, o polvo

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_\alpha) = 0.} \quad (5)$$

- $w_{(\alpha)} = \frac{1}{3}$, corresponde a materia muy caliente, materia relativista o radiacion

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(1 + \frac{1}{3}\right)\rho_\alpha} \quad (6)$$

En general se tiene que la densidad varia con el tiempo como

$$\rho_\alpha(t) = \rho_0\, a^{-3(w_{(\alpha)}+1)}(t)$$

$$\dot{\rho}_\alpha(t) = -3(w_\alpha$$

$\cdot\, w(\alpha) = -1$ corresponde a la energía del vacío.

$$\dot{\rho}_\alpha + 3(-1+1)\frac{\dot{a}}{a}\rho_\alpha = 0,$$

$$\boxed{\dot{\rho}_\alpha = 0.}$$

$$\rho_\alpha \begin{cases} a^{-3} & \text{materia} \\ a^{-4} & \text{radiación} \\ a^{0} & \text{vacío.} \end{cases}$$

[2] Ecuaciones de Einstein de Campo.

1.) $g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta} = \delta_\alpha^{\ \beta}$, partiendo de la forma matricial de $g_{\mu\nu}$ para FRW métrica.

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -a^2(t)/(1-kr^2) & & \\ & & -a^2(t)r^2 & \\ & & & -a^2(t)r^2 sen^2\theta \end{bmatrix}$$

; Ahora queda hallar la inversa de $g_{\mu\nu}$, para ello se usara. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$

$$\Rightarrow \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{\det(g_{\mu\nu})} adj(g_{\mu\nu})$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -\left(\frac{a^2(r)}{1-kr^2}\right)^{-1} & & \\ & & -(a(t)r^2)^{-1} & \\ & & & -(a^2(t)r^2 sen^2\theta) \end{bmatrix}$$

al multiplicar $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \text{diagonal}(1, 1, 1, 1) = \delta_\alpha^{\ \beta}$

4) $R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}$

para calcular R_{00}

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}$$

$R_{00} \Rightarrow \mu = 0$ y $\nu = 0$

$$R_{00} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{00} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{0\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{00} - \Gamma^\rho_{0\lambda}\Gamma^\lambda_{0\rho}$$

$$\Gamma^\lambda_{00} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\left(\partial_0 \cancel{g_{\sigma 0}} + \cancel{\partial_0 g_{0\sigma}} - \cancel{\partial_\sigma g_{00}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\left(\partial_0 \cancel{g_{00}}^{\,0} + \partial_0 \cancel{g_{00}}^{\,0} - \partial_\sigma \cancel{g_{00}}^{\,0}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{00} = \Gamma^\rho_{00} = 0$$

$$\Rightarrow \therefore R_{00} = -\partial_0 \Gamma^i_{0i} - \Gamma^j_{0i}\Gamma^i_{0j}$$

usando $\Gamma^i_{tj} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j$

$$R_{00} = -\partial_0\left(\frac{\dot{a}}{a}\cancel{\delta^i_i}^{\,3}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\delta^j_i \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j\right)$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 3$$

$$= -3\left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}\dot{a}}{a^2}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) \cancel{-3\frac{\dot{a}^2}{a^2}} \cancel{-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2}$$

$$\boxed{R_{00} = -3\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)}$$

$$R_{\underset{\mu\nu}{ij}} = \underbrace{\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_j \Gamma^\lambda_{i\lambda}}_{(A)} + \underbrace{\Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{ij} - \Gamma^\rho_{i\lambda}\Gamma^\lambda_{j\rho}}_{(B)}$$

$$(A) = \partial_0 \Gamma^0_{ij} + \partial_k \Gamma^k_{ij} - \cancel{\partial_j \Gamma^0_{i0}} - \partial_j \Gamma^l_{il}$$

Considerando $\boxed{\partial_l \Gamma^i_{jk} = k\,\delta^i_l \delta_{jk}}$, $\boxed{\Gamma^i_{jk} = 0.}$

$$(A) = \partial_0 (a\dot{a}\,\delta_{ij}) + k\,\delta^k_k\,\delta_{ij} - k\,\delta^l_j\,\delta_{il} \qquad l = j$$

$$= (\dot{a}\dot{a} + \ddot{a}a)\delta_{ij} + 3k\,\delta_{ij} - k\,\delta^j_j\,\delta_{ij}$$

$$= \left[(\dot{a}^2 + \ddot{a}a) + 2k \right]\delta_{ij}$$

$$(B) = \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{ij} - \Gamma^\rho_{i\lambda}\Gamma^\lambda_{j\rho}$$

$$= \Gamma^0_{0\rho}\Gamma^\rho_{ij} - \Gamma^\rho_{i0}\Gamma^0_{j\rho} + \Gamma^l_{l\rho}\Gamma^\rho_{ij} - \Gamma^\rho_{il}\Gamma^l_{j\rho}$$

$$= \cancel{\Gamma^0_{00}}\Gamma^0_{ij} - \Gamma^0_{ij}\cancel{\Gamma^0_{j0}} + \Gamma^0_{0k}\Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^l_{l0}\Gamma^0_{ij} - \Gamma^0_{il}\Gamma^l_{j0}$$

$$+ \Gamma^l_{lk}\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}$$

$$= \Gamma^l_{l0}\Gamma^0_{ij} - \Gamma^0_{il}\Gamma^l_{j0} - \Gamma^l_{i0}\Gamma^0_{jl}$$

$$- 3\frac{\dot{a}}{a}a\dot{a}\,\delta_{ij} - a\dot{a}\,\delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a}\delta^l_j - \frac{\dot{a}}{a}\delta^l_j\,a\dot{a}\,\delta_{jl}$$

$$= \dot{a}^2\delta_{ij}$$

$$R_{ij} = (A) + (B) = \left[(\dot{a}^2 + \ddot{a}a) + 2k\right]\delta_{ij} + \dot{a}^2\delta_{ij}$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}$$

5) $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$

de lo anterior se ha llegado ha

$$R_{\mu\nu} = \left[R_{00} - R_{ij} \right]$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \left[R_{00} - R_{ii} \right] = R_{00} + \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2K}{a^2} \right] g_{ii}$$

(-3)

$$R = -3\frac{\ddot{a}}{a} + \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2K}{a^2} \right] [-3]$$

$$= -3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\ddot{a}}{a} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{6K}{a^2}$$

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} \right]$$

6) Mostrar que.

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}} \quad (1)$$

aplicando $\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right] g^{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \quad R - \frac{1}{2} R \cancel{\delta^{\mu}_{\mu}}^{\,4} + \Lambda \cancel{\delta^{\mu}_{\mu}}^{\,4} = -\frac{8\pi}{c^4} T \quad , \text{ donde } T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = T$$

$$R - 2R + 4\Lambda = -\frac{8\pi}{c^4} T = -R + 4\Lambda$$

$$\boxed{R = 4\Lambda + \frac{8\pi}{c^4} T} \quad (2)$$

remplazando en (2) → (1)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[4\Lambda + \frac{8\pi}{c^4} T \right] + g_{\mu\nu}\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c^4} T g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)$$

7) mostrar que $T^{\mu}{}_{\nu} = diag(\rho c^2, -P, -P, -P)$, para un universo homogeneo e isotrópico.

Hint: $T^{\mu\nu} = (\rho + P/c^2) U^{\mu} U^{\nu} - g^{\mu\nu} P$

$$T_{\mu\nu} = T_{00} + T_{0j} + T_{i0} + T_{ij}$$

$T^{\mu\nu}$: Tensor momento energía.

Una definición para $T^{\mu\nu}$ es el flujo de cuadrimomento p^{μ} a través de una superficie x^{ν} cte.

$$T^{\mu}{}_{\nu} = g_{\nu\beta} T^{\mu\beta} = g_{\nu\beta} \left[(\rho + P/c^2) U^{\mu} U^{\beta} - g^{\mu\beta} P \right]$$

$$T^{\mu}{}_{\nu} = (\rho + P/c^2) U^{\mu} U_{\nu} - \delta^{\mu}{}_{\nu} P$$

$$(\rho + P/c^2) \frac{c\, dx^{\mu}}{ds} c \frac{ds}{dx^{\nu}} - \delta^{\mu}{}_{\nu} P$$

$$(\rho + P/c^2) c^2 \delta^{\mu}{}_{\nu} - \delta^{\mu}{}_{\nu} P$$

para $\mu = \nu$ equivale a la diagonal

$$\{c^2 \rho^2, -P, -P, -P\}$$

8) $G^{i}{}_{j} = 8\pi G T^{i}{}_{j} + \Lambda \delta^{i}{}_{j}$; $T^{i}{}_{j} = -\sum P_i$ ⇝ por el tensor momento energía

, donde $\boxed{G^{i}{}_{j} = \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \delta^{i}{}_{j} + \Lambda \delta^{i}{}_{j}}$ (1); esto viene de

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$G^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\alpha} G_{\nu\alpha} = g^{\mu\alpha} \left[8 G T_{\mu\alpha} + \Lambda g_{\mu\alpha} \right] = \dots$$

$$G^{\mu}{}_{\nu} = 8\pi G T^{\mu}{}_{\nu} + \Lambda \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

$$\boxed{G^{i}{}_{j} = 8\pi G T^{i}{}_{j} + \Lambda \delta^{i}{}_{j}}$$

Volviendo a (1) y considerando la diagonal.

$$\left[2\frac{\ddot{a}}{a}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{K}{a^2}\right]+\Lambda=-8\pi G\sum_i P_i$$

y Tomando $G^0{}_0=3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{K}{a^2}\right]+\Lambda=8\pi G\sum\rho_i$

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\sum\rho_i-\frac{\Lambda}{3}-\frac{K}{a^2}}$$

$$\left[2\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{8\pi G}{3}\sum\rho_i-\frac{\Lambda}{3}-\frac{K}{a^2}+\frac{K}{a^2}\right]+\Lambda=-8\pi G\sum_i P_i$$

$$\left[2\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{8\pi G}{3}\sum\rho_i+\frac{2}{3}\Lambda=-8\pi G\sum_i P_i\right.$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a}=-8\pi G\underbrace{\sum P_i}_{P}-\frac{8\pi G}{3}\underbrace{\sum\rho_i}_{\rho}-\frac{2}{3}\Lambda$$

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}\left(3P+\rho_i\right)-\frac{\Lambda}{3}}$$

9) mostrar

$$\frac{\ddot{a}}{a}+2\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{2Kc^2}{a^2}=4\pi G\left(\rho-\frac{P}{c^2}\right)+\Lambda c^2$$

partiendo de la ecuación de campo de Einstein.

$$G_{\mu\nu}=8\pi G T_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}$$

$\nu=\beta,\ \mu=\nu$

$$G^\mu{}_\nu=g^{\mu\beta}G_{\nu\beta}\ ;\rightsquigarrow g^{\mu\beta}G_{\nu\beta}=8\pi G g^{\mu\beta}T_{\nu\beta}+\Lambda g^{\mu\beta}g_{\nu\beta}$$

$$G^\mu{}_\nu=8\pi G T^\mu{}_\nu+\Lambda\delta^\mu{}_\nu$$

Tomando las suma de las componentes $G^0{}_0$ y $G^i{}_j$

$$G^0_0+G^i{}_j=8\pi G\left(T^0{}_0+T^i{}_j\right)+\Lambda\delta^i{}_j+\Lambda$$

$$\Rightarrow 3\left[\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}\right] + -\left[2\frac{\ddot a}{a}+\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}\right]\delta^i_j = 8\pi G[\rho - p] + \Lambda\delta^i_j + \Lambda$$

$$4\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + 4\frac{k}{a^2} + 2\frac{\ddot a}{a} = 8\pi G[\rho - p] + 2\Lambda$$

$$\boxed{\frac{\ddot a}{a} + 2\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G[\rho - p] + \Lambda}$$

3 Friedmann Equations

1) Partiendo de la ecuación de campo de Einstein.

$$G^0{}_0 = 8\pi G T^0{}_0 \rightsquigarrow G^0{}_0 = 3\left[\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}\right] + \Lambda$$

$$\rightsquigarrow T^0{}_0 = \Sigma\rho_i \sim \rho$$

$\Rightarrow$ remplazando

$$3\left[\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}\right] + \Lambda = 8\pi G\rho$$

$$\boxed{\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}}$$

por definicion $\left(\frac{\dot a}{a}\right) = H(t)$

2) Usando la ecuación anterior y tomando $\Lambda = 0$

$$H^2(t) = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{k}{a^2} \qquad \text{si } k = 0.$$

$$\boxed{\rho_{cri,0} = \frac{3H_0^2(t)}{8\pi G}}$$

3) Definiendo $\Omega = \frac{\rho(t)}{\rho_{crit,0}(t)}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\Omega\,\rho_{crit,0} = \rho(t)}$

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho = \frac{8}{3}\pi G\,\Omega\,\rho_{crit,0} = \frac{8}{3}\pi G\,\Omega\,\frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\Rightarrow \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega = \left[\Omega_{r,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{k,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\Lambda,0}\right]$$

$\boxed{a = \frac{1}{1+z}}$ y se considera que $a_0 = a(t_0) = 1 \rightarrow$ hoy.

densidad radiacion · densida materia total · curvatura · cte cosmologica densidad de vacio.

$$\frac{H^2(a)}{H_0^2} = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}$$

pero $\boxed{\Omega_{k,0} = 1-\Omega_0}$

$$\Rightarrow \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^2 + (1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}$$

$$\boxed{\frac{H^2}{H_0^2} = E}$$

4) graficar $\rho_i = \rho_m(z)$ $\quad i = \{m, r, \Lambda\}$

$$\rho_m = \Omega_m \rho_{crit} = \Omega_m \frac{3H_0}{8\pi G} = \frac{3H_0}{8\pi G}\Omega_{m,0}(1+z)^4 \quad \text{tomando } a_0 = 1$$

$\Omega_m = 0.32$

5) para WMAP 7, z_Λ es el redshift del momento en el que el universo pasa de ser dominado por materia a ser dominado por energía de vacio. (cambio de signo de $\ddot{a}$)

$z_\Lambda = 0.76$

Ref. don Shipo.

6) $\boxed{\rho = \Omega \rho_{crit}}$; $\rho_m = \Omega_m \rho_{crit} = a_0(1+z_{eq})^3 \rho_{crit}$

$$\rho_r = \Omega_r \rho_{crit} = a_0(1+z_{eq})^4 \rho_{crit}$$

$$\rho_m(z_{crit}) = \rho_r(z_{eq})$$

$$\rho_m = \rho_r \rightsquigarrow a_0(1+z_{eq})^3 \rho_{crit} = a_0(1+z_{eq})^4 \rho_{crit}$$

$$1 = (1+z_{eq})$$

$$\boxed{z_{eq} = 0}$$

$\frac{10}{10}$

7) $\Omega = \Omega_{0,r}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{0,m}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{0,k}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{0,\Lambda}$

$\Omega = \frac{H^2}{H_0^2}$

a) $q(z) = -\frac{\ddot{a}\,a}{\dot{a}^2}$; $\ddot{a} = -\frac{\Omega_0 H_0^2}{2a^2} + \Omega_\Lambda H_0^2 a$ ~> Ec. dinámica

$$q(z) = -\frac{a}{\dot{a}^2}\left[-\frac{\Omega_0 H_0^2}{2a^2} + \Omega_\Lambda H_0^2 a\right] = -\frac{a^2}{\dot{a}^2} H_0^2 \left[-\frac{\Omega_0}{2a^3} + \Omega_\Lambda\right]$$

usando $\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 E^2$ ~> $q(z) = \frac{-1}{\cancel{H_0^2} E^2} \cancel{H_0^2}\left[-\frac{\Omega_0}{2a^3} + \Omega_\Lambda\right]$; $a_0 = 1$

$$q(z) = \frac{1}{\Omega_{\Lambda,0} + (1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4}\left[\frac{\Omega_0}{2}(1+z)^3 - \Omega_\Lambda\right]$$

$$q(z) = \frac{\Omega_0(1+z)^3 - 2\Omega_\Lambda}{2\left[\Omega_{\Lambda,0} + (1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4\right]}$$

10) Dinámica en el modelo de Friedmann con $\Lambda = 0$.

tomando el ejercicio anterior.

$$q(z) = \frac{\Omega_0(1+z)^3 - 2\cancel{\Omega_\Lambda}^{\,0}}{2\left[\cancel{\Omega_{\Lambda,0}}^{\,0} + (1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4\right]}$$

$$q(z) = \frac{\Omega_0(1+z)^3}{2\left[(1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4\right]}$$

tenemos que $z \geq 0$ siempre.

$\Omega_{m,0}$ y $\Omega_{r,0}$ son positivas.

pero Ω_0 esta entre $0 \leq \Omega_0 \leq 1$

teniendo en cuenta esto se llega a que $q(z)$ es positivo siempre y por ende se desacelera.

11) Cuando se toman los postulados que dan cabido a la Cosmología, se toma que el universo es homogeneo e isotrópi estas dos posturas me obligan a tomar el parámetro k como una constante.

tomar $k(t)$ nos implicaría que la geometría del espacio tiempo cambiara sin la necesidad de la existencia de materia, lo cual contradice la cosmologia moderna. El parámetro k

12) ecuaciones de Friedmann para $\Lambda \neq 0$

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}$$

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{C}{a^3} \rightsquigarrow cte.$

$$a^2\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = a^2\frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\Lambda a^2}{3} - K$$

$\ell = \frac{8\pi G C}{3}$

$$\frac{1}{2}(\dot a)^2 = \frac{1}{2}\left(a^2\frac{8\pi G}{3}\frac{C}{a^3} - \frac{\Lambda a^2}{3} - K\right)$$

$$\frac{1}{2}(\dot a)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{a} - \frac{\Lambda a^2}{3} - K\right)$$

$$= \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{\Lambda}{3\ell}a^2 - \underbrace{\frac{K}{\ell}}_{\bar K}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\frac{2}{\ell} = \frac{1}{a} - \underbrace{\frac{\Lambda}{3\ell}}_{\lambda}a^2 - \bar K$$

$\eta = \sqrt{\frac{\ell}{2}}\,t \Rightarrow d\eta = \sqrt{\frac{\ell}{2}}\,dt$; con $\lambda = \frac{\Lambda}{3\ell}$, $\bar K = \frac{K}{\ell}$

$$\sqrt{\frac{2}{\ell}}\,d\eta = dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{da}{d\eta}\sqrt{\frac{\ell}{2}}\right)^2\frac{2}{\ell} = \frac{1}{a} - \lambda a^2 - \bar K$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 - \frac{1}{a} + \lambda a^2 = -\bar K$$ con $a = x$ y $\phi(x) = -\frac{1}{x} + \lambda x^2$

$$\Rightarrow \therefore \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \phi(x) = \bar K}$$

13) $\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dn}\right)^2 - \frac{1}{x} + \lambda x^2 = -\bar{u}$

considerando $\lambda > 0$ y $\bar{u} = 1$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dn}\right)^2 - \frac{1}{x} + \lambda x^2 = -1$$

derivando el potencial $\phi(x)$, para mirar si hay maximos ó minimos y con ello determinar si es estable.

• $\phi(x) = -\frac{1}{x} + \lambda x^2$

•• $\phi'(x) = +\frac{1}{x^2} + 2\lambda x = 0$; • $\frac{1}{x^2} = 2\lambda x$; $x^3 = \frac{1}{2\lambda}$; $\boxed{x = \frac{1}{(2\lambda)^{1/3}}}$

• $x = 0$.

punto crítico.

$$\phi''(x) = -\frac{2}{x^3} + 2\lambda$$

con $x = \frac{1}{(2\lambda)^{1/3}}$ $\phi'' > 0 \Rightarrow$ estable

con $x = 0$ no se concluye nada, entonces se usa el criterio de la tercera derivada.

$$\phi''(x) = \frac{2}{x^3} + 2\lambda = 0 \quad ; \quad x = -\frac{1}{\lambda^{1/3}} = \lambda^{-1/3}$$

$$\phi'''(x) = -\frac{6}{x^4} = \frac{6}{(\lambda^{-1/3})^4} = 6(\lambda^{4/3})$$

por el criterio de la tercera derivada se tiene que es es un punto de inflexión lo cual genera una inestabilidad.

14) El tiempo t medido para el Big Bang sigue lo siguiente:

$$\dot{a} = H_0\left[\Omega_0\left(\frac{1}{a}-1\right) + \Omega_\Lambda(a^2-1)+1\right]^{1/2}$$

con $a = (1+z)^{-1}$

$$\frac{dz}{dt} = -H_0(1+z)\left[(1+z)^2(\Omega_0 z+1) - \Omega_\Lambda z(z+2)\right]^{1/2}$$

Se toma z desde ∞ a z.

$$t = \int_0^t dt = -\frac{1}{H_0}\int_\infty^z \frac{dz}{(1+z)\left[(1+z)^2(\Omega_0 z+1) - \Omega_\Lambda z(z+2)\right]^{1/2}}$$

sin presencia de energía del vacío $\Omega_\Lambda = 0$.

$$t = -\frac{1}{H_0}\int_\infty^z \frac{dz}{(1+z)\left[(1+z)^2(\Omega_0 z+1)\right]} \simeq$$

considerando $\Omega_0 > 0 \rightsquigarrow$ contiene radiación y materia.

se puede escribir $X = (\Omega_0 - 1)\frac{a}{\Omega_0} = \frac{(\Omega_0-1)}{\Omega_0(1+z)}$

que al remplazar da como resultado.

$$t = \frac{\Omega_0}{H_0(\Omega_0-1)^{3/2}}\left[\operatorname{sen}^{-1}(X^{1/2}) - X^{1/2}(1-X)^{1/2}\right]$$

para $z \gg 1$ la ecuacion se reduce ha

$$t(z) = \frac{2}{2H_0\Omega_0^{1/2}} z^{-3/2}$$

el cual es para un Universo temprano.

Con $\Omega_0 = 0$ y $\Omega_\Lambda > 0$.

con estos valores se tiene que $t(z)$ es indeterminado ya que en la integral quedaría

$$t = -\frac{1}{H_0}\int_{\infty}^{z} \frac{dz}{(z+1)\left[-\Omega_\Lambda z(z+1)\right]^{1/2}}$$

donde $z > 0$ al igual que Ω_Λ. Entonces la integral no existe y con ello el tiempo; por ende si no existe el tiempo no existe un universo donde domine Ω_Λ (energías) del vacío.