

Proyecto Álgebra Lineal: Cálculo de sombras



Integrantes el Grupo:

Daniel Salanova Dmitriyev DNI: 49610682G

Jose Ontanilla Macías DNI: 41605052F

Asignatura: Álgebra Lineal.

Profesor: Marc Munar e Iván Nuñez.

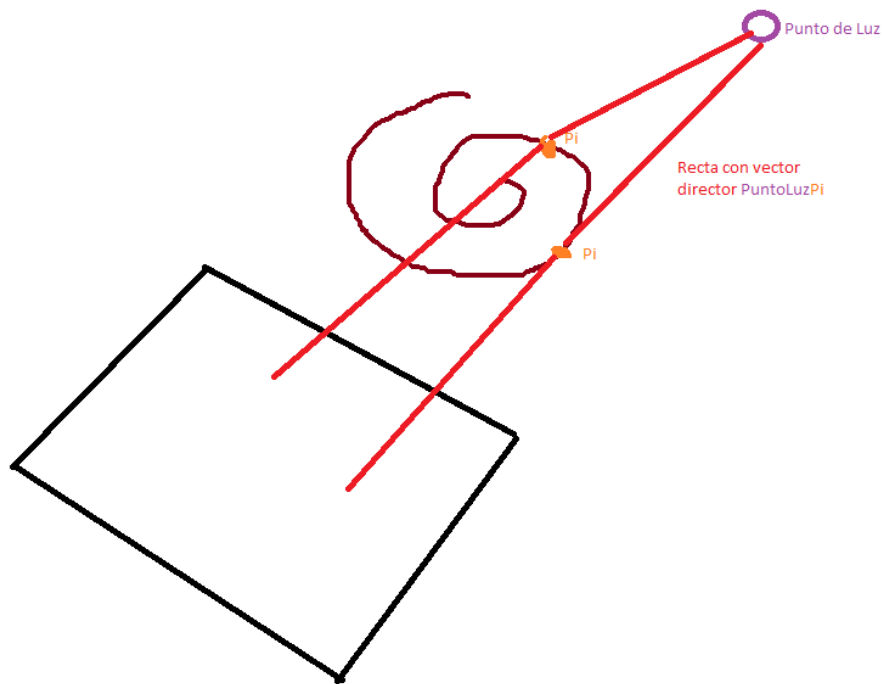
Índice

Índice	1
Introducción:	2
Problema matemático:	2
Desarrollo del problema:	2
Código implementado:	2
main_shadows:	2
generate_curve:	3
generate_shadows:	4
Resultados numéricos:	5
Representación gráfica:	20
Conclusiones de los datos obtenidos:	21

Introducción:

El objetivo de este trabajo consiste en la elaboración de un programa generador de sombras, con el que se pueda proyectar la sombra de una función cualquiera sobre un plano.

Un dibujo que ilustraría un poco lo que queremos conseguir con el proyecto es lo siguiente:



Para resolver el problema, se nos proporciona la siguiente información:

- La función de la cual sacaremos la sombra (una espiral de Fermat) y su dominio:

$$\circ \alpha(t) = (\sqrt{t} \cdot \cos(t), \sqrt{t} \cdot \sin(t), 10) \text{ en } t \in [0, 8\pi]$$

- La ecuación del plano donde se proyecta la sombra:

$$\circ 40x + 40y + 200z = -11$$

- Puntos de luz:

$$\circ L1 = (10, 0, 15)$$

$$\circ L2 = (10, 0, 3)$$

- Número de particiones del intervalo sobre el que trabajaremos:

$$\circ K = 200$$

Básicamente lo que haremos será que para cada uno de los puntos del objeto crearemos una recta que pase por el punto de luz y nuestro punto de objeto denominado como P_i . Esto lo conseguiremos hallando el vector director que une L (punto de luz) y P_i , y un punto, ya sea L o P_i . Una vez tengamos dicha recta deberemos encontrar el punto de intersección (que será la sombra) que hay entre el plano y la recta generada anteriormente.

Con todos los datos suficientes para la resolución del trabajo, empezamos a plantear el problema.

La actividad que se va a desarrollar es en concreto la 4-3.

Problema matemático:

El primer paso es generar todo el objeto. En nuestro caso, una curva de Fermat. Dicha curva está compuesta por un intervalo $I = [i_1, i_2]$. A su vez la curva vendrá determinada por una función vectorial de la siguiente manera: $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$, $t \in I$.

Como el objetivo es generar una nube de puntos, lo que deberemos hacer es, sobre el intervalo I , dividirlo en K particiones lo que nos permitirá, a su vez, generar una curva de K puntos. Ahora dicho intervalo estaría compuesto de K puntos. Cada punto del nuevo conjunto de puntos cumpliría lo siguiente: $T_j = i_1 + ((i_2 - i_1)/K) \cdot j$ con $j \in \{0, 1, \dots, K\}$

Por lo que nuestra nube de puntos será generada por: $\alpha(T_j) = (\alpha_1(T_j), \alpha_2(T_j), \alpha_3(T_j))$, $T_j \in T$.

Cuanto mayor sea el número de K , mayor será la cantidad de puntos que tendrá nuestra curva y más precisa será la sombra.

Una vez generada toda la curva, lo que haremos será crear una recta con el vector director que une L (punto de luz) y P_i (punto de la curva), y un punto, ya sea L o P_i .

Teniendo la recta en forma continua:

$$\frac{x - l_1}{l_1 - p_{i1}} = \frac{y - l_2}{l_2 - p_{i2}} = \frac{z - l_3}{l_3 - p_{i3}}$$

Dicha recta la expresaremos como la intersección de 2 planos:

$$\begin{cases} (x - l_1) \cdot (l_2 - p_{i2}) = (y - l_2)(l_1 - p_{i1}) \\ (y - l_2) \cdot (l_3 - p_{i3}) = (z - l_3)(l_2 - p_{i2}) \end{cases}.$$

Reordenando términos, los dos planos anteriores nos quedarían de la siguiente forma:

$$\begin{cases} (l_2 - p_{i2})x - (l_1 - p_{i1})y = l_1(l_2 - p_{i2}) - l_2(l_1 - p_{i1}) \\ (l_3 - p_{i3})y - (l_2 - p_{i2})z = l_2(l_3 - p_{i3}) - l_3(l_2 - p_{i2}) \end{cases}.$$

El punto de sombra será la solución de sistema de ecuaciones formado por los dos planos que representan la recta y el plano sobre el que queremos proyectar, dando como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} l_2 - p_{i2} & -l_1 + p_{i1} & 0 \\ 0 & l_3 - p_{i3} & -l_2 + p_{i2} \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1(l_2 - p_{i2}) - l_2(l_1 - p_{i1}) \\ l_2(l_3 - p_{i3}) - l_3(l_2 - p_{i2}) \\ d \end{pmatrix}$$

Siendo $S = (s_1, s_2, s_3)$ el punto de sombra generado por el P_i y L .

Desarrollo del problema:

Código implementado:

Todo el código del ejercicio ha sido implementado con Octave. El problema consta de varios ficheros de suma importancia:

`main_shadows:`

Fichero donde escribiremos los parámetros del ejercicio.

```

1
2  %%%%%%%%% PARÁMETROS DEL PROBLEMA %%%%%%%%%
3
4  domain1 = linspace(0, 8*pi, 200);
5  sun_point1 = [10, 0, 12];
6  sun_point2 = [10, 0, 35];
7  plane_coefficients = [40,40,200,-11];
8
9  %%%%%%%%%
10 curve_points = generate_curve(domain1);
11 shadows = generate_shadows(curve_points, sun_point1, plane_coefficients);
12 plot_scene(curve_points, sun_point1, shadows, plane_coefficients);
13
14
15 shadows2 = generate_shadows(curve_points, sun_point2, plane_coefficients);
16 plot_scene(curve_points, sun_point2, shadows2, plane_coefficients);
17

```

Tendremos, en la línea 4 el rango con el que trabajaremos y cuantas particiones tendrá. Las líneas 5 y 6 serán dos puntos de luz para crear las 2 escenas que se nos piden y ver de esta manera la variación de la sombra cuando tenemos 2 puntos de luz diferentes.

En la línea 7 tendremos los valores del plano sobre el que se proyectará la sombra. De esta manera ya tendremos todos los datos numéricos para iniciar el ejercicio.

La línea 10 generará todos los puntos de la curva usando todos los valores que nos aporta el dominio.

generate_curve:

```

1 function H = generate_curve(domain)
2     x = [];
3     y = [];
4     z = [];
5
6     for t = domain
7         x = [x sqrt(t)*cos(t)]; #Añadimos a lo anterior de x el nuevo valor
8         y = [y sqrt(t)*sin(t)]; # Añadimos a lo anterior de y el nuevo valor
9         z = [z 10]; # z siempre es 10, es constante
10    endfor
11    H = [x; y; z]';
12 endfunction

```

Lo que haremos será recorrer todo el dominio y añadir a los resultados anteriores de cada una de las matrices (x, y, z) los valores de las coordenadas del eje correspondiente.

Luego las 3 matrices que se encargaban de almacenar esta información las unimos dentro de una matriz con 3 columnas y N filas, donde la primera columna es la 'x', la segunda la 'y' y por último la 'z'.

Una vez que generamos la curva, deberemos hallar la sombra que genera con el punto de luz correspondiente y el plano. Esto lo conseguimos con la función `generate_shadows()`.

generate_shadows:

```
function shadows = generate_shadows(curve_points, sun_point, plane_coefficients)
    [n_rows, n_columns] = size(curve_points);

    A = zeros(3,3);
    b = zeros(3,1);

    x = [];
    y = [];
    z = [];

    for i = 1:n_rows

        punto = curve_points(i, :);
        A(1,:) = [(sun_point(:, 2) - punto(:, 2)), (-sun_point(:, 1) + punto(:, 1)), 0];
        A(2,:) = [0, (sun_point(:,3) - punto(:,3)), (-sun_point(:,2) + punto(:,2))];
        A(3,:) = [plane_coefficients(:,1), plane_coefficients(:,2), plane_coefficients(:,3)];

        b(1,1) = sun_point(:,1) * (sun_point(:,2) - punto(:,2)) - sun_point(:,2) * (sun_point(:,1) - punto(:,1));
        b(2,1) = sun_point(:,2) * (sun_point(:,3) - punto(:,3)) - sun_point(:,3) * (sun_point(:,2) - punto(:,2));
        b(3,1) = plane_coefficients(:,4);

        ###Resolvemos PAQ = LU;
        [U3,L3,P3,Q3] = LUFacPM(A);
        Pb3 = P3*b;
        Y3 =lower_triangular_solver(L3,Pb3);
        Z3 =upper_triangular_solver(U3,Y3);
        X3 = Q3*Z3;

        x = [x X3(1,1)];
        y = [y X3(2,1)];
        z = [z X3(3,1)];
    endfor
    shadows = [x; y; z]';
endfunction
```

Lo que haremos en un inicio es recorrer cada fila de la matriz *curve points* para hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales que se genera de la proyección del punto sobre el plano respecto al punto de luz.

Los valores de cada fila de A y b vienen dadas por la fórmula para calcular la proyección de la sombra anteriormente explicada. Para cada sistema de ecuaciones lineales hallaremos el punto de sombra mediante la factorización PAQ=LU (factorización LU con pivotaje maximal).

Los resultados de cada sombra los añadiremos dentro de su respectivo array, 'x', 'y' y 'z' según la posición que representen.

Finalmente devolveremos la matriz *shadows* que tendrá la unión de cada una de las matrices anteriores.

Una vez que tenemos tanto la curva como las sombras, las pasamos como parámetro a la función *plot_scene()* aportada por el profesor, cuya función se encarga de representar todos los datos dentro de un escenario.

Resultados numéricos:

El dominio que obtenemos es el siguiente:

domain1 =

Columns 1 through 11:

0	0.1263	0.2526	0.3789	0.5052	0.6315
0.7578	0.8841	1.0104	1.1367	1.2630	

Columns 12 through 22:

1.3892	1.5155	1.6418	1.7681	1.8944	2.0207
2.1470	2.2733	2.3996	2.5259	2.6522	

Columns 23 through 33:

2.7785	2.9048	3.0311	3.1574	3.2837	3.4100
3.5363	3.6626	3.7889	3.9152	4.0414	

Columns 34 through 44:

4.1677	4.2940	4.4203	4.5466	4.6729	4.7992
4.9255	5.0518	5.1781	5.3044	5.4307	

Columns 45 through 55:

5.5570	5.6833	5.8096	5.9359	6.0622	6.1885
6.3148	6.4411	6.5673	6.6936	6.8199	

Columns 56 through 66:

6.9462	7.0725	7.1988	7.3251	7.4514	7.5777
7.7040	7.8303	7.9566	8.0829	8.2092	

Columns 67 through 77:

8.3355	8.4618	8.5881	8.7144	8.8407	8.9670
9.0933	9.2195	9.3458	9.4721	9.5984	

Columns 78 through 88:

9.7247 9.8510 9.9773 10.1036 10.2299 10.3562
10.4825 10.6088 10.7351 10.8614 10.9877

Columns 89 through 99:

11.1140 11.2403 11.3666 11.4929 11.6192 11.7455
11.8717 11.9980 12.1243 12.2506 12.3769

Columns 100 through 110:

12.5032 12.6295 12.7558 12.8821 13.0084 13.1347
13.2610 13.3873 13.5136 13.6399 13.7662

Columns 111 through 121:

13.8925 14.0188 14.1451 14.2714 14.3977 14.5239
14.6502 14.7765 14.9028 15.0291 15.1554

Columns 122 through 132:

15.2817 15.4080 15.5343 15.6606 15.7869 15.9132
16.0395 16.1658 16.2921 16.4184 16.5447

Columns 133 through 143:

16.6710 16.7973 16.9236 17.0498 17.1761 17.3024
17.4287 17.5550 17.6813 17.8076 17.9339

Columns 144 through 154:

18.0602 18.1865 18.3128 18.4391 18.5654 18.6917
18.8180 18.9443 19.0706 19.1969 19.3232

Columns 155 through 165:

19.4495 19.5758 19.7020 19.8283 19.9546 20.0809
20.2072 20.3335 20.4598 20.5861 20.7124

Columns 166 through 176:

20.8387 20.9650 21.0913 21.2176 21.3439 21.4702
21.5965 21.7228 21.8491 21.9754 22.1017

Columns 177 through 187:

22.2280 22.3542 22.4805 22.6068 22.7331 22.8594
22.9857 23.1120 23.2383 23.3646 23.4909

Columns 188 through 198:

23.6172	23.7435	23.8698	23.9961	24.1224	24.2487
24.3750	24.5013	24.6276	24.7539	24.8802	

Columns 199 and 200:

25.0064	25.1327
---------	---------

La curva que se genera es la siguiente:

curve_points =

0	0	10.0000
0.3525	0.0448	10.0000
0.4866	0.1256	10.0000
0.5719	0.2277	10.0000
0.6220	0.3440	10.0000
0.6414	0.4691	10.0000
0.6323	0.5983	10.0000
0.5961	0.7271	10.0000
0.5343	0.8514	10.0000
0.4485	0.9672	10.0000
0.3405	1.0710	10.0000
0.2128	1.1593	10.0000
0.0680	1.2292	10.0000
-0.0910	1.2781	10.0000
-0.2607	1.3039	10.0000
-0.4377	1.3049	10.0000
-0.6182	1.2801	10.0000
-0.7984	1.2287	10.0000
-0.9742	1.1507	10.0000
-1.1419	1.0468	10.0000
-1.2975	0.9179	10.0000
-1.4374	0.7656	10.0000
-1.5582	0.5920	10.0000
-1.6568	0.3998	10.0000
-1.7304	0.1920	10.0000
-1.7767	-0.0281	10.0000
-1.7938	-0.2566	10.0000
-1.7805	-0.4897	10.0000
-1.7359	-0.7231	10.0000
-1.6599	-0.9525	10.0000
-1.5528	-1.1737	10.0000
-1.4156	-1.3825	10.0000
-1.2499	-1.5746	10.0000
-1.0577	-1.7461	10.0000

-0.8418	-1.8935	10.0000
-0.6053	-2.0134	10.0000
-0.3518	-2.1031	10.0000
-0.0853	-2.1600	10.0000
0.1900	-2.1825	10.0000
0.4694	-2.1691	10.0000
0.7483	-2.1194	10.0000
1.0219	-2.0332	10.0000
1.2852	-1.9112	10.0000
1.5336	-1.7546	10.0000
1.7626	-1.5653	10.0000
1.9677	-1.3459	10.0000
2.1450	-1.0993	10.0000
2.2909	-0.8293	10.0000
2.4023	-0.5398	10.0000
2.4765	-0.2353	10.0000
2.5117	0.0793	10.0000
2.5064	0.3990	10.0000
2.4599	0.7185	10.0000
2.3723	1.0324	10.0000
2.2443	1.3354	10.0000
2.0771	1.6223	10.0000
1.8731	1.8879	10.0000
1.6347	2.1275	10.0000
1.3656	2.3367	10.0000
1.0695	2.5115	10.0000
0.7509	2.6484	10.0000
0.4147	2.7445	10.0000
0.0663	2.7975	10.0000
-0.2889	2.8059	10.0000
-0.6451	2.7689	10.0000
-0.9965	2.6863	10.0000
-1.3371	2.5589	10.0000
-1.6612	2.3880	10.0000
-1.9632	2.1758	10.0000
-2.2379	1.9251	10.0000
-2.4803	1.6397	10.0000
-2.6861	1.3235	10.0000
-2.8513	0.9815	10.0000
-2.9727	0.6188	10.0000
-3.0476	0.2411	10.0000
-3.0742	-0.1457	10.0000
-3.0515	-0.5353	10.0000
-2.9792	-0.9214	10.0000
-2.8578	-1.2977	10.0000
-2.6887	-1.6578	10.0000
-2.4739	-1.9958	10.0000
-2.2166	-2.3058	10.0000

-1.9202	-2.5824	10.0000
-1.5892	-2.8208	10.0000
-1.2286	-3.0165	10.0000
-0.8438	-3.1659	10.0000
-0.4409	-3.2660	10.0000
-0.0262	-3.3147	10.0000
0.3938	-3.3104	10.0000
0.8122	-3.2528	10.0000
1.2223	-3.1421	10.0000
1.6172	-2.9795	10.0000
1.9905	-2.7671	10.0000
2.3358	-2.5079	10.0000
2.6472	-2.2055	10.0000
2.9193	-1.8643	10.0000
3.1473	-1.4895	10.0000
3.3271	-1.0868	10.0000
3.4551	-0.6625	10.0000
3.5289	-0.2231	10.0000
3.5467	0.2243	10.0000
3.5076	0.6726	10.0000
3.4117	1.1145	10.0000
3.2601	1.5429	10.0000
3.0545	1.9506	10.0000
2.7978	2.3310	10.0000
2.4937	2.6775	10.0000
2.1466	2.9842	10.0000
1.7618	3.2459	10.0000
1.3451	3.4579	10.0000
0.9030	3.6162	10.0000
0.4423	3.7180	10.0000
-0.0297	3.7609	10.0000
-0.5054	3.7438	10.0000
-0.9772	3.6664	10.0000
-1.4375	3.5295	10.0000
-1.8788	3.3347	10.0000
-2.2937	3.0847	10.0000
-2.6753	2.7831	10.0000
-3.0173	2.4342	10.0000
-3.3137	2.0432	10.0000
-3.5594	1.6163	10.0000
-3.7500	1.1598	10.0000
-3.8821	0.6810	10.0000
-3.9529	0.1874	10.0000
-3.9609	-0.3133	10.0000
-3.9054	-0.8130	10.0000
-3.7869	-1.3035	10.0000
-3.6066	-1.7771	10.0000
-3.3671	-2.2259	10.0000

-3.0718	-2.6425	10.0000
-2.7249	-3.0199	10.0000
-2.3316	-3.3518	10.0000
-1.8980	-3.6325	10.0000
-1.4307	-3.8570	10.0000
-0.9370	-4.0214	10.0000
-0.4245	-4.1226	10.0000
0.0985	-4.1585	10.0000
0.6238	-4.1279	10.0000
1.1429	-4.0310	10.0000
1.6474	-3.8688	10.0000
2.1292	-3.6434	10.0000
2.5802	-3.3580	10.0000
2.9931	-3.0168	10.0000
3.3610	-2.6249	10.0000
3.6776	-2.1882	10.0000
3.9374	-1.7135	10.0000
4.1360	-1.2080	10.0000
4.2696	-0.6797	10.0000
4.3358	-0.1369	10.0000
4.3330	0.4117	10.0000
4.2608	0.9573	10.0000
4.1198	1.4913	10.0000
3.9120	2.0049	10.0000
3.6401	2.4898	10.0000
3.3082	2.9380	10.0000
2.9211	3.3420	10.0000
2.4848	3.6951	10.0000
2.0060	3.9913	10.0000
1.4920	4.2255	10.0000
0.9508	4.3935	10.0000
0.3910	4.4923	10.0000
-0.1785	4.5197	10.0000
-0.7487	4.4750	10.0000
-1.3104	4.3584	10.0000
-1.8545	4.1713	10.0000
-2.3723	3.9163	10.0000
-2.8553	3.5970	10.0000
-3.2955	3.2183	10.0000
-3.6855	2.7859	10.0000
-4.0189	2.3062	10.0000
-4.2899	1.7869	10.0000
-4.4939	1.2359	10.0000
-4.6272	0.6619	10.0000
-4.6872	0.0740	10.0000
-4.6726	-0.5185	10.0000
-4.5831	-1.1060	10.0000
-4.4198	-1.6793	10.0000

-4.1848	-2.2289	10.0000
-3.8816	-2.7459	10.0000
-3.5146	-3.2219	10.0000
-3.0893	-3.6491	10.0000
-2.6122	-4.0202	10.0000
-2.0908	-4.3290	10.0000
-1.5330	-4.5704	10.0000
-0.9477	-4.7399	10.0000
-0.3440	-4.8345	10.0000
0.2684	-4.8523	10.0000
0.8798	-4.7926	10.0000
1.4804	-4.6560	10.0000
2.0605	-4.4441	10.0000
2.6107	-4.1601	10.0000
3.1221	-3.8081	10.0000
3.5862	-3.3933	10.0000
3.9953	-2.9221	10.0000
4.3427	-2.4017	10.0000
4.6225	-1.8403	10.0000
4.8297	-1.2466	10.0000
4.9608	-0.6299	10.0000
5.0133	-0.0000	10.0000

Dado el punto de luz (10,0,15) generamos las siguientes sombras:

shadows =

NaN	NaN	NaN
-1.3775e+01	1.1032e-01	2.6780e+00
-1.3591e+01	3.1147e-01	2.6010e+00
-1.3508e+01	5.6769e-01	2.5331e+00
-1.3497e+01	8.6188e-01	2.4721e+00
-1.3549e+01	1.1804e+00	2.4187e+00
-1.3655e+01	1.5108e+00	2.3739e+00
-1.3812e+01	1.8412e+00	2.3392e+00
-1.4013e+01	2.1599e+00	2.3157e+00
-1.4253e+01	2.4559e+00	2.3043e+00
-1.4524e+01	2.7190e+00	2.3059e+00
-1.4819e+01	2.9398e+00	2.3208e+00
-1.5130e+01	3.1101e+00	2.3490e+00
-1.5449e+01	3.2234e+00	2.3901e+00
-1.5767e+01	3.2745e+00	2.4436e+00
-1.6077e+01	3.2601e+00	2.5083e+00
-1.6369e+01	3.1789e+00	2.5831e+00
-1.6637e+01	3.0308e+00	2.6662e+00
-1.6873e+01	2.8179e+00	2.7561e+00
-1.7073e+01	2.5435e+00	2.8509e+00
-1.7230e+01	2.2123e+00	2.9486e+00

-1.7342e+01	1.8301e+00	3.0473e+00
-1.7404e+01	1.4037e+00	3.1451e+00
-1.7416e+01	9.4039e-01	3.2402e+00
-1.7377e+01	4.4811e-01	3.3308e+00
-1.7286e+01	-6.4992e-02	3.4152e+00
-1.7145e+01	-5.9059e-01	3.4920e+00
-1.6954e+01	-1.1204e+00	3.5599e+00
-1.6717e+01	-1.6460e+00	3.6176e+00
-1.6435e+01	-2.1596e+00	3.6640e+00
-1.6113e+01	-2.6531e+00	3.6983e+00
-1.5754e+01	-3.1189e+00	3.7197e+00
-1.5363e+01	-3.5499e+00	3.7275e+00
-1.4943e+01	-3.9388e+00	3.7214e+00
-1.4501e+01	-4.2790e+00	3.7009e+00
-1.4040e+01	-4.5641e+00	3.6659e+00
-1.3568e+01	-4.7881e+00	3.6163e+00
-1.3091e+01	-4.9455e+00	3.5522e+00
-1.2614e+01	-5.0310e+00	3.4740e+00
-1.2145e+01	-5.0402e+00	3.3821e+00
-1.1691e+01	-4.9691e+00	3.2771e+00
-1.1260e+01	-4.8146e+00	3.1600e+00
-1.0860e+01	-4.5746e+00	3.0319e+00
-1.0498e+01	-4.2481e+00	2.8943e+00
-1.0184e+01	-3.8354e+00	2.7488e+00
-9.9241e+00	-3.3385e+00	2.5975e+00
-9.7275e+00	-2.7609e+00	2.4427e+00
-9.6013e+00	-2.1085e+00	2.2870e+00
-9.5518e+00	-1.3890e+00	2.1332e+00
-9.5845e+00	-6.1247e-01	1.9844e+00
-9.7034e+00	2.0873e-01	1.8439e+00
-9.9105e+00	1.0601e+00	1.7151e+00
-1.0206e+01	1.9253e+00	1.6011e+00
-1.0587e+01	2.7864e+00	1.5051e+00
-1.1049e+01	3.6243e+00	1.4300e+00
-1.1585e+01	4.4197e+00	1.3781e+00
-1.2185e+01	5.1535e+00	1.3512e+00
-1.2836e+01	5.8079e+00	1.3506e+00
-1.3526e+01	6.3668e+00	1.3768e+00
-1.4239e+01	6.8165e+00	1.4294e+00
-1.4959e+01	7.1467e+00	1.5074e+00
-1.5671e+01	7.3501e+00	1.6092e+00
-1.6360e+01	7.4232e+00	1.7323e+00
-1.7011e+01	7.3661e+00	1.8739e+00
-1.7612e+01	7.1820e+00	2.0309e+00
-1.8151e+01	6.8770e+00	2.1998e+00
-1.8621e+01	6.4600e+00	2.3772e+00
-1.9014e+01	5.9415e+00	2.5595e+00
-1.9326e+01	5.3335e+00	2.7434e+00

-1.9553e+01	4.6489e+00	2.9258e+00
-1.9694e+01	3.9012e+00	3.1036e+00
-1.9751e+01	3.1039e+00	3.2743e+00
-1.9723e+01	2.2701e+00	3.4357e+00
-1.9615e+01	1.4126e+00	3.5855e+00
-1.9430e+01	5.4373e-01	3.7222e+00
-1.9171e+01	-3.2510e-01	3.8442e+00
-1.8843e+01	-1.1830e+00	3.9503e+00
-1.8452e+01	-2.0199e+00	4.0394e+00
-1.8002e+01	-2.8262e+00	4.1107e+00
-1.7500e+01	-3.5930e+00	4.1636e+00
-1.6950e+01	-4.3120e+00	4.1974e+00
-1.6359e+01	-4.9751e+00	4.2118e+00
-1.5732e+01	-5.5748e+00	4.2064e+00
-1.5077e+01	-6.1036e+00	4.1811e+00
-1.4398e+01	-6.5545e+00	4.1356e+00
-1.3705e+01	-6.9207e+00	4.0700e+00
-1.3002e+01	-7.1954e+00	3.9845e+00
-1.2299e+01	-7.3722e+00	3.8793e+00
-1.1604e+01	-7.4452e+00	3.7549e+00
-1.0926e+01	-7.4086e+00	3.6119e+00
-1.0274e+01	-7.2574e+00	3.4513e+00
-9.6589e+00	-6.9874e+00	3.2742e+00
-9.0910e+00	-6.5956e+00	3.0823e+00
-8.5819e+00	-6.0804e+00	2.8775e+00
-8.1436e+00	-5.4422e+00	2.6621e+00
-7.7878e+00	-4.6834e+00	2.4392e+00
-7.5262e+00	-3.8096e+00	2.2122e+00
-7.3699e+00	-2.8291e+00	1.9848e+00
-7.3287e+00	-1.7541e+00	1.7616e+00
-7.4107e+00	-6.0037e-01	1.5472e+00
-7.6215e+00	6.1239e-01	1.3468e+00
-7.9637e+00	1.8609e+00	1.1656e+00
-8.4360e+00	3.1187e+00	1.0085e+00
-9.0333e+00	4.3570e+00	8.8025e-01
-9.7460e+00	5.5456e+00	7.8509e-01
-1.0561e+01	6.6543e+00	7.2624e-01
-1.1459e+01	7.6543e+00	7.0595e-01
-1.2421e+01	8.5198e+00	7.2524e-01
-1.3423e+01	9.2288e+00	7.8384e-01
-1.4441e+01	9.7648e+00	8.8023e-01
-1.5450e+01	1.0117e+01	1.0117e+00
-1.6428e+01	1.0280e+01	1.1745e+00
-1.7353e+01	1.0257e+01	1.3642e+00
-1.8205e+01	1.0051e+01	1.5758e+00
-1.8971e+01	9.6764e+00	1.8040e+00
-1.9638e+01	9.1460e+00	2.0434e+00
-2.0198e+01	8.4775e+00	2.2891e+00

-2.0645e+01	7.6895e+00	2.5362e+00
-2.0978e+01	6.8017e+00	2.7802e+00
-2.1196e+01	5.8335e+00	3.0175e+00
-2.1302e+01	4.8039e+00	3.2446e+00
-2.1299e+01	3.7308e+00	3.4586e+00
-2.1193e+01	2.6311e+00	3.6573e+00
-2.0989e+01	1.5202e+00	3.8387e+00
-2.0693e+01	4.1213e-01	4.0012e+00
-2.0313e+01	-6.8027e-01	4.1436e+00
-1.9855e+01	-1.7454e+00	4.2650e+00
-1.9326e+01	-2.7727e+00	4.3647e+00
-1.8732e+01	-3.7526e+00	4.4419e+00
-1.8081e+01	-4.6760e+00	4.4963e+00
-1.7379e+01	-5.5346e+00	4.5276e+00
-1.6632e+01	-6.3203e+00	4.5355e+00
-1.5848e+01	-7.0255e+00	4.5197e+00
-1.5033e+01	-7.6426e+00	4.4801e+00
-1.4195e+01	-8.1640e+00	4.4168e+00
-1.3341e+01	-8.5821e+00	4.3295e+00
-1.2478e+01	-8.8895e+00	4.2186e+00
-1.1617e+01	-9.0787e+00	4.0841e+00
-1.0766e+01	-9.1421e+00	3.9265e+00
-9.9348e+00	-9.0726e+00	3.7465e+00
-9.1360e+00	-8.8634e+00	3.5449e+00
-8.3815e+00	-8.5087e+00	3.3230e+00
-7.6848e+00	-8.0037e+00	3.0827e+00
-7.0602e+00	-7.3454e+00	2.8261e+00
-6.5230e+00	-6.5329e+00	2.5562e+00
-6.0888e+00	-5.5684e+00	2.2764e+00
-5.7733e+00	-4.4580e+00	1.9913e+00
-5.5917e+00	-3.2119e+00	1.7057e+00
-5.5574e+00	-1.8453e+00	1.4255e+00
-5.6817e+00	-3.7914e-01	1.1572e+00
-5.9725e+00	1.1603e+00	9.0745e-01
-6.4333e+00	2.7412e+00	6.8342e-01
-7.0620e+00	4.3272e+00	4.9196e-01
-7.8508e+00	5.8787e+00	3.3943e-01
-8.7855e+00	7.3543e+00	2.3126e-01
-9.8459e+00	8.7131e+00	1.7155e-01
-1.1006e+01	9.9172e+00	1.6278e-01
-1.2236e+01	1.0933e+01	2.0561e-01
-1.3504e+01	1.1735e+01	2.9878e-01
-1.4777e+01	1.2305e+01	4.3927e-01
-1.6021e+01	1.2634e+01	6.2247e-01
-1.7208e+01	1.2720e+01	8.4256e-01
-1.8311e+01	1.2571e+01	1.0929e+00
-1.9309e+01	1.2202e+01	1.3663e+00
-2.0186e+01	1.1632e+01	1.6558e+00

-2.0930e+01	1.0883e+01	1.9543e+00
-2.1535e+01	9.9820e+00	2.2557e+00
-2.1999e+01	8.9537e+00	2.5541e+00
-2.2322e+01	7.8240e+00	2.8446e+00
-2.2508e+01	6.6174e+00	3.1231e+00
-2.2563e+01	5.3568e+00	3.3862e+00
-2.2493e+01	4.0630e+00	3.6309e+00
-2.2306e+01	2.7547e+00	3.8553e+00
-2.2011e+01	1.4486e+00	4.0576e+00
-2.1617e+01	1.5930e-01	4.2365e+00
-2.1131e+01	-1.1001e+00	4.3913e+00
-2.0563e+01	-2.3180e+00	4.5212e+00
-1.9919e+01	-3.4843e+00	4.6257e+00
-1.9208e+01	-4.5895e+00	4.7045e+00
-1.8437e+01	-5.6251e+00	4.7574e+00
-1.7613e+01	-6.5830e+00	4.7841e+00
-1.6743e+01	-7.4553e+00	4.7846e+00
-1.5833e+01	-8.2345e+00	4.7586e+00
-1.4892e+01	-8.9126e+00	4.7060e+00
-1.3927e+01	-9.4819e+00	4.6268e+00
-1.2945e+01	-9.9341e+00	4.5208e+00
-1.1954e+01	-1.0261e+01	4.3880e+00
-1.0965e+01	-1.0453e+01	4.2286e+00
-9.9863e+00	-1.0503e+01	4.0428e+00
-9.0307e+00	-1.0400e+01	3.8312e+00
-8.1106e+00	-1.0137e+01	3.5946e+00
-7.2403e+00	-9.7062e+00	3.3343e+00
-6.4355e+00	-9.0997e+00	3.0520e+00
-5.7135e+00	-8.3133e+00	2.7504e+00
-5.0928e+00	-7.3447e+00	2.4325e+00
-4.5928e+00	-6.1952e+00	2.1026e+00
-4.2334e+00	-4.8710e+00	1.7659e+00
-4.0337e+00	-3.3836e+00	1.4285e+00
-4.0114e+00	-1.7514e+00	1.0976e+00
-4.1811e+00	-1.3967e-14	7.8122e-01

Dado el punto de luz (10,0,35) generamos las siguientes sombras:

shadows =	NaN	NaN	NaN
	-3.2793e+00	6.1615e-02	5.8854e-01
	-3.1157e+00	1.7316e-01	5.3351e-01
	-3.0163e+00	3.1433e-01	4.8540e-01
	-2.9632e+00	4.7549e-01	4.4255e-01
	-2.9503e+00	6.4916e-01	4.0523e-01
	-2.9746e+00	8.2866e-01	3.7418e-01
	-3.0337e+00	1.0078e+00	3.5018e-01
	-3.1255e+00	1.1806e+00	3.3399e-01

-3.2475e+00	1.3415e+00	3.2621e-01
-3.3968e+00	1.4854e+00	3.2729e-01
-3.5699e+00	1.6074e+00	3.3751e-01
-3.7630e+00	1.7033e+00	3.5694e-01
-3.9718e+00	1.7696e+00	3.8542e-01
-4.1915e+00	1.8034e+00	4.2262e-01
-4.4174e+00	1.8025e+00	4.6799e-01
-4.6443e+00	1.7654e+00	5.2078e-01
-4.8671e+00	1.6916e+00	5.8010e-01
-5.0808e+00	1.5814e+00	6.4489e-01
-5.2804e+00	1.4356e+00	7.1396e-01
-5.4613e+00	1.2561e+00	7.8602e-01
-5.6190e+00	1.0455e+00	8.5971e-01
-5.7498e+00	8.0673e-01	9.3362e-01
-5.8503e+00	5.4367e-01	1.0063e+00
-5.9175e+00	2.6054e-01	1.0764e+00
-5.9492e+00	-3.7989e-02	1.1424e+00
-5.9438e+00	-3.4689e-01	1.2031e+00
-5.9003e+00	-6.6090e-01	1.2572e+00
-5.8183e+00	-9.7458e-01	1.3036e+00
-5.6983e+00	-1.2824e+00	1.3412e+00
-5.5413e+00	-1.5790e+00	1.3690e+00
-5.3487e+00	-1.8588e+00	1.3865e+00
-5.1230e+00	-2.1167e+00	1.3929e+00
-4.8669e+00	-2.3476e+00	1.3879e+00
-4.5839e+00	-2.5470e+00	1.3712e+00
-4.2779e+00	-2.7107e+00	1.3427e+00
-3.9532e+00	-2.8347e+00	1.3026e+00
-3.6147e+00	-2.9159e+00	1.2511e+00
-3.2675e+00	-2.9517e+00	1.1888e+00
-2.9172e+00	-2.9399e+00	1.1164e+00
-2.5694e+00	-2.8794e+00	1.0348e+00
-2.2300e+00	-2.7696e+00	9.4494e-01
-1.9050e+00	-2.6108e+00	8.4817e-01
-1.6003e+00	-2.4041e+00	7.4588e-01
-1.3216e+00	-2.1514e+00	6.3961e-01
-1.0746e+00	-1.8557e+00	5.3105e-01
-8.6441e-01	-1.5205e+00	4.2199e-01
-6.9584e-01	-1.1506e+00	3.1428e-01
-5.7307e-01	-7.5113e-01	2.0984e-01
-4.9960e-01	-3.2835e-01	1.1059e-01
-4.7815e-01	1.1100e-01	1.8429e-02
-5.1052e-01	5.5963e-01	-6.4822e-02
-5.9758e-01	1.0098e+00	-1.3744e-01
-7.3914e-01	1.4535e+00	-1.9787e-01
-9.3397e-01	1.8826e+00	-2.4473e-01
-1.1797e+00	2.2891e+00	-2.7688e-01
-1.4731e+00	2.6652e+00	-2.9342e-01

-1.8097e+00	3.0036e+00	-2.9378e-01
-2.1841e+00	3.2974e+00	-2.7766e-01
-2.5903e+00	3.5407e+00	-2.4508e-01
-3.0214e+00	3.7285e+00	-1.9642e-01
-3.4701e+00	3.8568e+00	-1.3233e-01
-3.9286e+00	3.9225e+00	-5.3777e-02
-4.3889e+00	3.9240e+00	3.7977e-02
-4.8430e+00	3.8608e+00	1.4144e-01
-5.2829e+00	3.7334e+00	2.5490e-01
-5.7012e+00	3.5439e+00	3.7646e-01
-6.0905e+00	3.2950e+00	5.0410e-01
-6.4443e+00	2.9907e+00	6.3571e-01
-6.7566e+00	2.6360e+00	7.6912e-01
-7.0221e+00	2.2364e+00	9.0215e-01
-7.2365e+00	1.7983e+00	1.0326e+00
-7.3963e+00	1.3286e+00	1.1585e+00
-7.4987e+00	8.3468e-01	1.2778e+00
-7.5419e+00	3.2409e-01	1.3886e+00
-7.5252e+00	-1.9531e-01	1.4891e+00
-7.4484e+00	-7.1565e-01	1.5778e+00
-7.3125e+00	-1.2291e+00	1.6533e+00
-7.1192e+00	-1.7278e+00	1.7144e+00
-6.8708e+00	-2.2043e+00	1.7600e+00
-6.5707e+00	-2.6513e+00	1.7894e+00
-6.2227e+00	-3.0619e+00	1.8019e+00
-5.8314e+00	-3.4298e+00	1.7972e+00
-5.4020e+00	-3.7488e+00	1.7752e+00
-4.9404e+00	-4.0137e+00	1.7358e+00
-4.4529e+00	-4.2196e+00	1.6795e+00
-3.9462e+00	-4.3625e+00	1.6068e+00
-3.4277e+00	-4.4392e+00	1.5184e+00
-2.9048e+00	-4.4472e+00	1.4154e+00
-2.3855e+00	-4.3849e+00	1.2991e+00
-1.8777e+00	-4.2517e+00	1.1709e+00
-1.3896e+00	-4.0482e+00	1.0326e+00
-9.2943e-01	-3.7759e+00	8.8607e-01
-5.0504e-01	-3.4375e+00	7.3350e-01
-1.2418e-01	-3.0367e+00	5.7719e-01
2.0587e-01	-2.5787e+00	4.1957e-01
4.7841e-01	-2.0696e+00	2.6325e-01
6.8749e-01	-1.5168e+00	1.1085e-01
8.2806e-01	-9.2842e-01	-3.4928e-02
8.9614e-01	-3.1393e-01	-1.7144e-01
8.8897e-01	3.1663e-01	-2.9612e-01
8.0511e-01	9.5252e-01	-4.0653e-01
6.4456e-01	1.5826e+00	-5.0043e-01
4.0882e-01	2.1956e+00	-5.7588e-01
1.0089e-01	2.7801e+00	-6.3120e-01

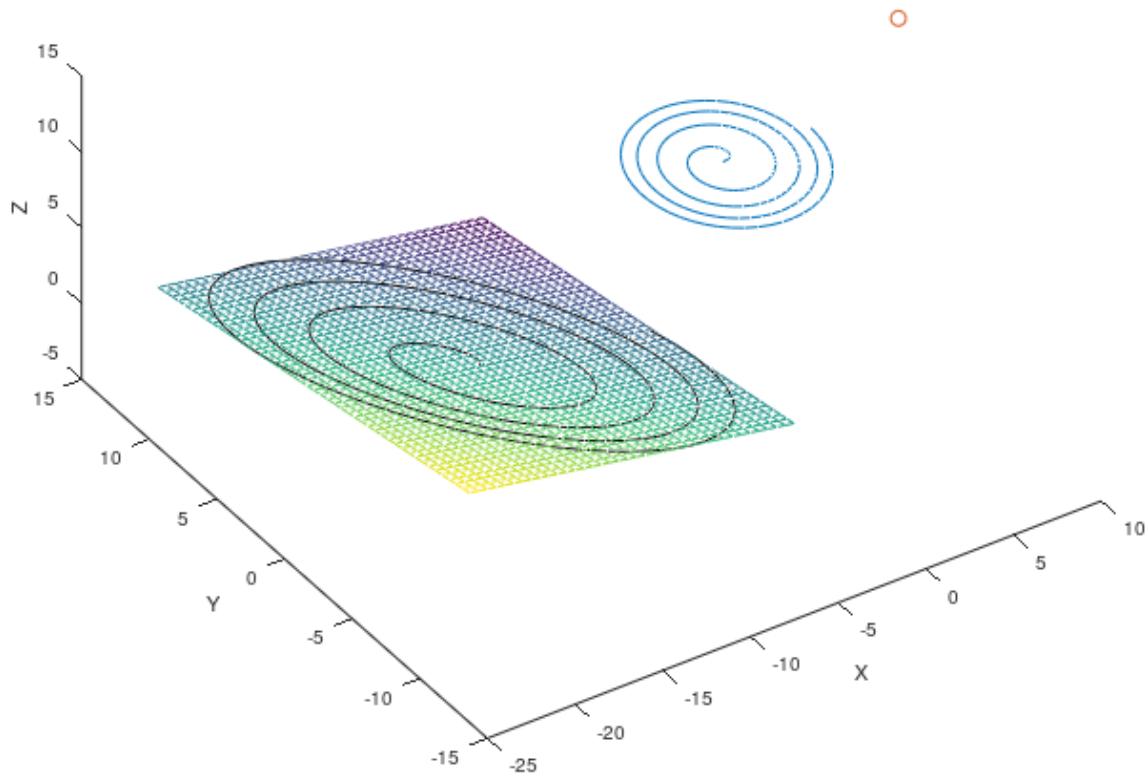
-2.7470e-01	3.3253e+00	-6.6513e-01
-7.1203e-01	3.8209e+00	-6.7678e-01
-1.2038e+00	4.2574e+00	-6.6571e-01
-1.7417e+00	4.6263e+00	-6.3192e-01
-2.3162e+00	4.9207e+00	-5.7589e-01
-2.9172e+00	5.1348e+00	-4.9852e-01
-3.5342e+00	5.2648e+00	-4.0112e-01
-4.1561e+00	5.3082e+00	-2.8542e-01
-4.7721e+00	5.2643e+00	-1.5344e-01
-5.3715e+00	5.1341e+00	-7.5284e-03
-5.9440e+00	4.9202e+00	1.4978e-01
-6.4803e+00	4.6265e+00	3.1576e-01
-6.9714e+00	4.2585e+00	4.8759e-01
-7.4096e+00	3.8225e+00	6.6241e-01
-7.7882e+00	3.3263e+00	8.3738e-01
-8.1015e+00	2.7780e+00	1.0097e+00
-8.3450e+00	2.1867e+00	1.1767e+00
-8.5154e+00	1.5618e+00	1.3357e+00
-8.6106e+00	9.1297e-01	1.4845e+00
-8.6294e+00	2.5015e-01	1.6209e+00
-8.5720e+00	-4.1678e-01	1.7428e+00
-8.4394e+00	-1.0780e+00	1.8485e+00
-8.2336e+00	-1.7240e+00	1.9365e+00
-7.9577e+00	-2.3454e+00	2.0056e+00
-7.6153e+00	-2.9333e+00	2.0547e+00
-7.2113e+00	-3.4793e+00	2.0831e+00
-6.7509e+00	-3.9753e+00	2.0902e+00
-6.2403e+00	-4.4142e+00	2.0759e+00
-5.6863e+00	-4.7890e+00	2.0401e+00
-5.0963e+00	-5.0939e+00	1.9830e+00
-4.4782e+00	-5.3235e+00	1.9053e+00
-3.8405e+00	-5.4735e+00	1.8078e+00
-3.1922e+00	-5.5405e+00	1.6915e+00
-2.5424e+00	-5.5218e+00	1.5579e+00
-1.9010e+00	-5.4163e+00	1.4085e+00
-1.2776e+00	-5.2236e+00	1.2452e+00
-6.8219e-01	-4.9448e+00	1.0704e+00
-1.2463e-01	-4.5822e+00	8.8636e-01
3.8541e-01	-4.1396e+00	6.9584e-01
8.3861e-01	-3.6222e+00	5.0172e-01
1.2262e+00	-3.0367e+00	3.0708e-01
1.5403e+00	-2.3910e+00	1.1514e-01
1.7737e+00	-1.6946e+00	-7.0827e-02
1.9207e+00	-9.5830e-01	-2.4749e-01
1.9769e+00	-1.9398e-01	-4.1158e-01
1.9393e+00	5.8554e-01	-5.5996e-01
1.8067e+00	1.3667e+00	-6.8968e-01
1.5800e+00	2.1354e+00	-7.9809e-01

1.2617e+00	2.8777e+00	-8.8289e-01
8.5645e-01	3.5796e+00	-9.4220e-01
3.7057e-01	4.2277e+00	-9.7465e-01
-1.8772e-01	4.8097e+00	-9.7940e-01
-8.0864e-01	5.3145e+00	-9.5617e-01
-1.4811e+00	5.7324e+00	-9.0526e-01
-2.1929e+00	6.0556e+00	-8.2754e-01
-2.9311e+00	6.2783e+00	-7.2443e-01
-3.6823e+00	6.3966e+00	-5.9786e-01
-4.4331e+00	6.4090e+00	-4.5017e-01
-5.1703e+00	6.3159e+00	-2.8412e-01
-5.8810e+00	6.1196e+00	-1.0273e-01
-6.5533e+00	5.8246e+00	9.0740e-02
-7.1763e+00	5.4369e+00	2.9289e-01
-7.7402e+00	4.9639e+00	5.0026e-01
-8.2364e+00	4.4143e+00	7.0941e-01
-8.6577e+00	3.7980e+00	9.1695e-01
-8.9986e+00	3.1254e+00	1.1196e+00
-9.2546e+00	2.4077e+00	1.3144e+00
-9.4228e+00	1.6562e+00	1.4983e+00
-9.5017e+00	8.8248e-01	1.6688e+00
-9.4908e+00	9.8206e-02	1.8235e+00
-9.3911e+00	-6.8520e-01	1.9603e+00
-9.2046e+00	-1.4566e+00	2.0772e+00
-8.9344e+00	-2.2050e+00	2.1729e+00
-8.5844e+00	-2.9202e+00	2.2459e+00
-8.1597e+00	-3.5922e+00	2.2954e+00
-7.6660e+00	-4.2116e+00	2.3205e+00
-7.1098e+00	-4.7699e+00	2.3210e+00
-6.4986e+00	-5.2590e+00	2.2965e+00
-5.8402e+00	-5.6715e+00	2.2473e+00
-5.1434e+00	-6.0011e+00	2.1739e+00
-4.4173e+00	-6.2421e+00	2.0769e+00
-3.6718e+00	-6.3898e+00	1.9573e+00
-2.9171e+00	-6.4407e+00	1.8166e+00
-2.1641e+00	-6.3922e+00	1.6563e+00
-1.4237e+00	-6.2431e+00	1.4783e+00
-7.0719e-01	-5.9934e+00	1.2851e+00
-2.6052e-02	-5.6446e+00	1.0791e+00
6.0839e-01	-5.1998e+00	8.6328e-01
1.1850e+00	-4.6636e+00	6.4073e-01
1.6931e+00	-4.0424e+00	4.1487e-01
2.1227e+00	-3.3442e+00	1.8932e-01
2.4645e+00	-2.5788e+00	-3.2149e-02
2.7108e+00	-1.7574e+00	-2.4567e-01
2.8550e+00	-8.9310e-01	-4.4737e-01
2.8922e+00	-7.0004e-15	-6.3344e-01

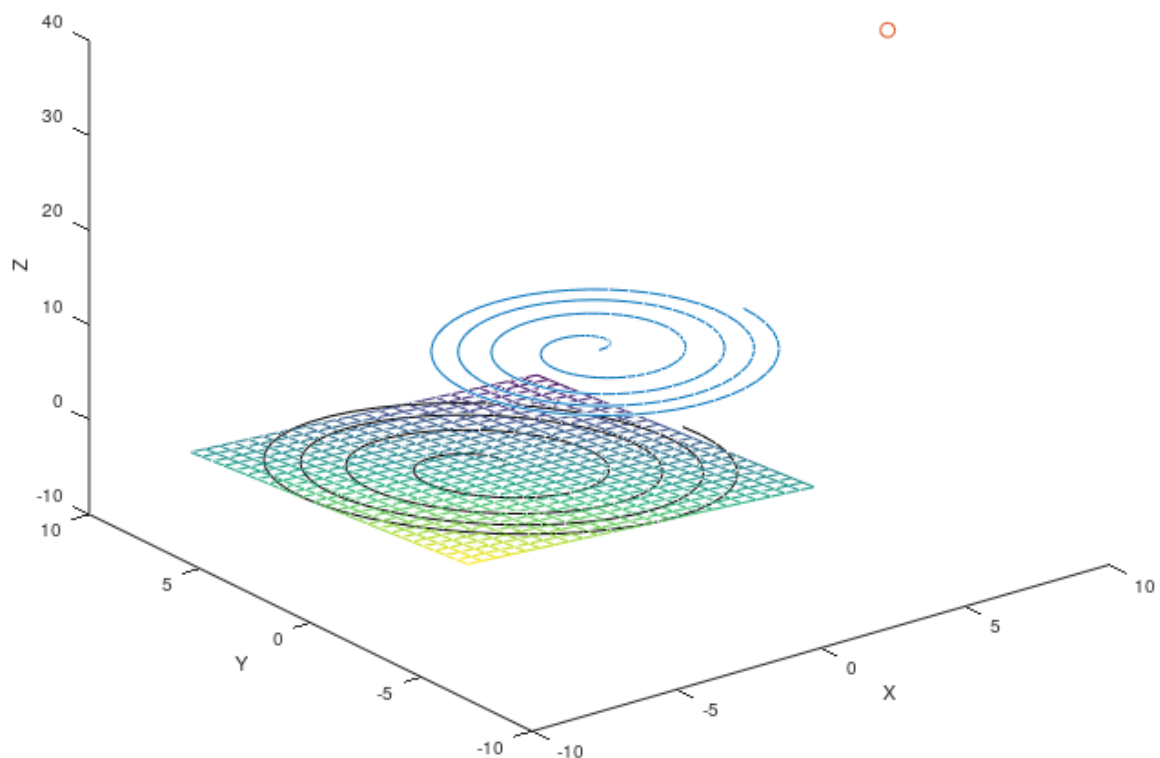
Representación gráfica:

Dado el primer escenario con el punto de luz en $L(10, 0, 15)$ la sombra que se proyectaría es la siguiente:

Gráfico de la escena



Si tenemos el punto de luz $L(10, 0, 35)$ el resultado es:



Conclusiones de los datos obtenidos:

Podemos darnos cuenta con simple observación que, a mayor z , menor es la deformación de la sombra proyectada de la curva. Esto se debe principalmente al ángulo que hay entre la recta que une el punto de luz y el punto de la curva con el plano sobre el que se proyecta.

Para ver esta relación, hemos estudiado qué ángulo genera para el punto 199 de nuestra curva, que sería el $P(4.9608, -0.6299, 10.0000)$.

Lo que hacemos es hallar el vector director de la recta y el vector normal del plano. Una vez adquiridos los vectores anteriores usaremos la siguiente fórmula:

$$\sin \varphi = |\cos \psi| = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{q}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{|s_x \cdot q_x + s_y \cdot q_y + s_z \cdot q_z|}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \cdot \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}} =$$

En el caso de que tengamos como punto de luz $L(10, 0, 15)$ habrá $55,91^\circ$ entre la recta y el plano.

En cambio si cogemos el punto de luz $L(10,0,35)$ habrán $72,79^\circ$ de ángulo entre el plano y la recta. Por lo que tomamos como conclusiones que a mayor Z , el ángulo entre la recta y el plano es mayor, y al mismo tiempo, la deformación de la sombra es menor.