

## Решение нелинейных уравнений

Нелинейные уравнения – это уравнения с общим видом:

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Значения  $\bar{x}$ , которые обращают функцию  $f(x)$  в нуль, называются корнями уравнения.

По виду функции  $f(x)$  нелинейные уравнения можно разделить на два класса:

- алгебраические;
- трансцендентные.

**Алгебраическими** называются уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией.

**Трансцендентными** называются уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.)

**Решить нелинейное уравнение** – значит найти его корни или корень. Нахождение корней уравнения в общем случае проводится в два этапа.

**1 этап.** Прежде, чем приступить к численному решению уравнения, следует провести предварительное исследование функции на предмет существования корней и их приблизительного расположения. При этом полезна известная теорема математического анализа: **если непрерывная функция  $f(x)$  принимает на концах интервала  $[a, b]$  значения разных знаков, т.е.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то внутри этого интервала содержится по крайней мере один корень уравнения.** Корень будет единственным, если производная  $f'(x)$  существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала  $[a, b]$ . Если корней несколько, то их нужно отделить. Отделение корней (по-другому, выделение интервалов локализации) – это нахождение более мелких интервалов  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , каждый из которых содержит одно единственное решение  $f(x) = 0$  и один единственный корень  $\bar{x}$ .

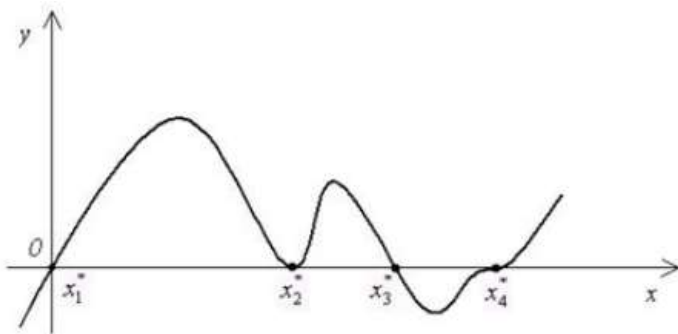


Рис.1

Корень уравнения называется **простым**, если первая производная функции  $f'(x)$  в точке  $\bar{x}$  не равна нулю, т. е.  $f'(\bar{x}) \neq 0$ . Если же  $f'(\bar{x}) = 0$ , то корень  $\bar{x}$  называется **кратным корнем**. Геометрически корень уравнения есть точка пересечения графика функции  $y = f(x)$  с осью абсцисс. Так, на рис. 1 изображен график функции, имеющей четыре корня: два простых  $x_1$  и  $x_3$  и два кратных  $x_2$  и  $x_4$ .

Следует отметить, что не существует универсального алгоритма локализации корня. Иногда удобно бывает локализовать корень также с помощью построения графика или таблицы значений функции.

**2 этап.** Далее в процессе приближенного отыскания корней идет **уточнение корня**. Приближенное нахождение корня уравнения на выделенном интервале локализации осуществляют численными методами. Большинство методов решения уравнения ориентировано на отыскание простых корней.

Для численного решения нелинейных уравнений применяются итерационные методы, основанные на переходе от уже известного приближения для корня  $x = x_n$  к новому приближению  $x = x_{n+1}$ . Эти методы позволяют при достаточно большом числе итераций найти корень с заданной точностью  $\varepsilon$ . Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  и выполняется (1)  $f(\bar{x}) = 0$ , то говорят, что итерационный процесс сходится, в противном случае – итерационный процесс расходится.

1. Одним из важнейших методов решения нелинейных уравнений является **метод простых итераций /метод последовательных приближений/**. В методе простой итерации уравнение  $f(x) = 0$  приводится к виду

$$x = \varphi(x). \quad (2)$$

Пусть  $x_0$  - некоторое начальное приближение для корня. Тогда в (2) последовательные итерации задаются формулой

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

Начальное приближение для корня находится или же из физических соображений или с помощью грубого исследования функции. Итерационный процесс (3) продолжается до тех пор, пока два последовательных приближения не станут отличаться друг от друга меньше, чем на  $\varepsilon$  :

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon. \quad (4)$$

Пусть функция  $\varphi(x)$  определена и дифференцируема на  $[a, b]$  и все значения  $\varphi(x) \in [a, b]$ . Тогда, если  $|\varphi'(x)| < 1$  на  $[a, b]$ , то последовательность

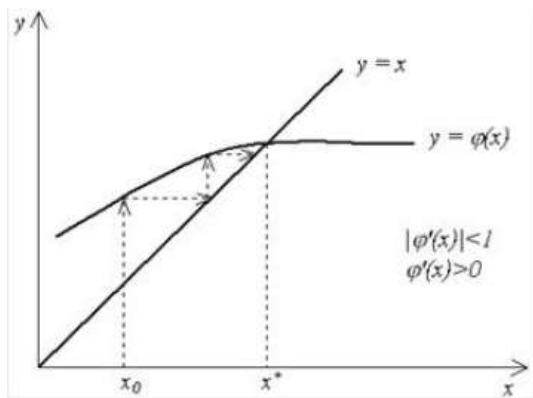
$x_{n+1}$  (3) сходится к единственному решению уравнения (2) при любом начальном приближении  $x_0 \in [a, b]$ . Если  $|\varphi'(x)| \geq 1$  на  $[a, b]$ , то итерационный процесс расходится на  $[a, b]$ . Если же в одних точках  $|\varphi'(x)| < 1$ , а в других точках  $|\varphi'(x)| \geq 1$ , то итерационный процесс на этом интервале может сходиться, а может расходиться.

Итак, достаточным условием сходимости итерационного процесса  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (2) является выполнение неравенства  $|\varphi'(x)| < 1$  при всех значениях  $x_n$ , вычисляемых в ходе решения задачи.

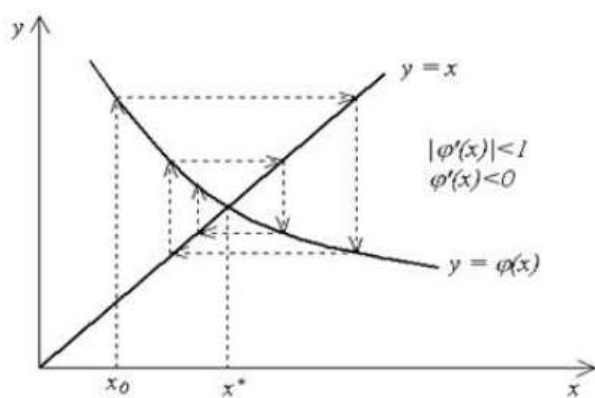
Представление уравнения  $f(x) = 0$  (1) в виде  $x = \varphi(x)$  (2) не является единственным. Следует выбирать такое представление  $\varphi(x)$ , чтобы  $|\varphi'(x)| < 1$ . При этом, чем меньше  $|\varphi'(x)|$ , тем выше скорость сходимости итераций. Если корней несколько, то для каждого из интервалов, содержащих единственный корень, может понадобиться свое представление функции  $\varphi(x)$ .

Например, уравнение  $e^x - 10x = 0$  имеет два корня, в чем легко убедиться, построив графики функций  $y = e^x$  и  $y = 10x$ . Первый из этих корней лежит в интервале  $[0, 1]$ , а второй – в интервале  $[2, 6]$ . Для определения первого корня записываем исходное уравнение в виде  $x = 0,1 \cdot e^x$ , т.е.  $\varphi(x) = 0,1 \cdot e^x$ , и производная функции -  $\varphi'(x) = 0,1 \cdot e^x$ . На интервале  $[0, 1]$   $0 < \varphi'(x) < 1$ . В качестве начального приближения можно выбрать  $x_0 = 0$ . Метод простой итерации дает  $\bar{x} = 0,11183\dots$  Точность корня определяется величиной  $\varepsilon$  (4). Для нахождения второго корня представляем исходное уравнение в виде  $x = \ln(10x)$ , т.е.  $\varphi(x) = \ln(10x)$ , производная -  $\varphi'(x) = 1/x$ . На интервале  $[2, 6]$  так же, как и в предыдущем случае  $0 < \varphi'(x) < 1$ . В качестве начального приближения можно взять  $x_0 = 2$ . Метод простой итерации дает  $\bar{x} = 3,5771\dots$

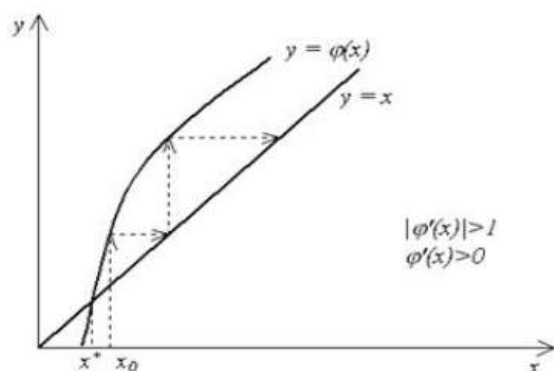
Метод простой итерации имеет простую геометрическую интерпретацию. Изобразим на графике кривую  $y = \varphi(x)$  и прямую  $y = x$ . Точки пересечения этих линий и соответствуют корням уравнения  $x = \varphi(x)$ . Пусть на чертеже имеется точка  $(x_n, \varphi(x_n))$ . Проведем из нее горизонтальную прямую  $y = \varphi(x_n)$  до ее пересечения с прямой  $y = x$ , а из точки пересечения – вертикальную линию  $x = \varphi(x_n)$  до пересечения с кривой  $y = \varphi(x)$ . В результате получим точку  $\varphi$ .



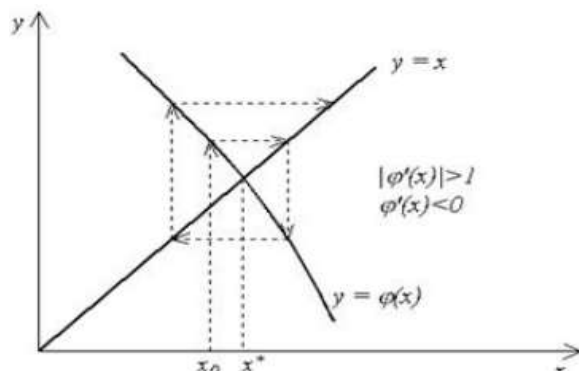
а)



б)



в)



г)

Рис.2

Рис.2 а) - г) иллюстрируют возможный различный характер поведения последовательных приближений в случаях: а) – монотонной сходимости к решению при  $0 < \varphi'(x) < 1$ , б) – колебательного характера сходимости при  $-1 < \varphi'(x) < 0$ , в) и г) – расхождении итерационного процессе при  $|\varphi'(x)| > 1$ .

2. Эффективным методом повышения точности результатов и ускорения сходимости является **метод Ньютона /метод касательных/**.

Итерационная последовательность в методе Ньютона строится по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Пусть функция  $f(x)$  определена и дважды дифференцируема на интервале  $[a, b]$ , причем  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , а производные  $f'(x)$  и  $f''(x)$  отличны от нуля и сохраняют знак в интервале  $[a, b]$ . Тогда интерполяционная последовательность сходится к единственному на интервале решению уравнения (1), если начальное приближение  $x_0 \in [a, b]$  удовлетворяет неравенству  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ .

Если какое-либо из перечисленных условий не выполняется, то итерационный процесс может сходиться, а может и расходиться. В частности, если нарушается условие  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ , то процесс может все равно сходиться, но это плохое начальное приближение. В этом можно убедиться графически. Процесс сходится тем быстрее, чем больше  $|f'(x)|$  (сравним с методом простой итерации!), т.е., чем круче функция  $f(x)$ . Если  $f'(x) \approx 0$  в окрестности корня, то процесс сходится медленно.

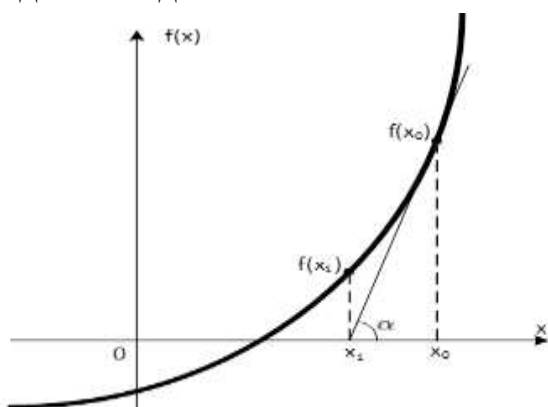


Рис.3

Метод Ньютона имеет простую геометрическую интерпретацию (Рис.3). Через точку  $(x_0, f(x_0))$  проведем касательную до ее пересечения с осью абсцисс. Проведенная в любой точке касательная линия к графику функции определяется производной данной функции в рассматриваемой точке, которая в свою очередь определяется тангенсом угла. Уравнения касательной —  $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ . Точка пересечения касательной с осью абсцисс —  $x_1$ ,  $y = 0$  и есть следующее приближение для корня  $x_1$ .

Метод Ньютона сходится гораздо быстрее, чем метод простой итерации. Однако на практике используется и тот и другой. Дело в том, что при использовании метода Ньютона требуется вычислять не только функцию, но и ее производную. Эти вычисления могут оказаться очень трудоемкими. Однако этот метод неработоспособен при S-образных кривых.

При решении нелинейных уравнений может использоваться также **метод половинных делений / метод дихотомии /**. Метод применяется для непрерывной функции  $f(x)$ , принимающей на концах интервала значения разных знаков. При этом дифференцируемости функции не требуется. Отрезок  $[a, b]$  делится пополам. В средней точке  $x_1 = (a + b)/2$ , которая может рассматриваться как первое приближение для корня, вычисляется значение

функции -  $f(x_1)$ . Если  $f(x_1) \neq 0$ , то выбирается тот из интервалов  $[a, x_1]$  или  $[x_1, b]$ , на концах которого значения функции различны по знаку. Процесс продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше  $2\varepsilon$ . Тогда координата середины последнего отрезка и есть корень с заданной точностью.

Следует иметь в виду, что  $n$  шагов деления уменьшают интервал в  $2^n$  раз, так 10 шагов уменьшают исходный интервал приблизительно в 1000 раз, т.е. скорость сходимости невелика. Однако в отличие от метода простой итерации и метода Ньютона здесь гарантируется нахождение корня для любых функций, в том числе и для не дифференцируемых. Если на интервале  $[a, b]$  находится несколько корней, то будет найден только один из них. При этом кратные четные корни определить нельзя.

Еще один из методов решения нелинейных уравнений - **метод пропорциональных частей /метод хорд/** основан на последовательном сужении интервала, содержащего единственный корень уравнения  $f(x)$ . Итерационный процесс выполняется до того момента, пока не будет достигнута заданная точность  $\varepsilon$ .

Он является усовершенствованием метода половинного деления и в отличие от метода половинного деления предлагает, что деление рассматриваемого интервала будет выполняться не в его середине, а в точке пересечения хорды с осью абсцисс (ось - X). Следует отметить, что под хордой понимается отрезок, который проведен через точки рассматриваемой функции по концам рассматриваемого интервала. Рассматриваемый метод обеспечивает более быстрое нахождение корня, чем метод половинного деления, при условии задания одинакового рассматриваемого интервала.

Геометрически метод хорд эквивалентен замене кривой  $y = f(x)$  хордой, проходящей через точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$  (см. рис.4.).

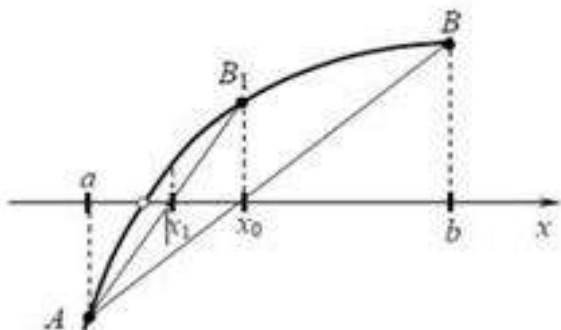


Рис.4

Уравнение прямой (хорды), которая проходит через точки A и B имеет следующий вид:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Откуда получаем начальную точку пересечения хорды с осью абсцисс

$$x_0 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a)$$

Это дает первое приближение для корня. Далее этот же прием применяется к отрезку  $[a, x_0]$  или  $[x_0, b]$ , на концах которого функция имеет противоположные знаки. Далее ищем приближение корня  $x_1$ , и т.д., пока два последовательных приближения для корня не станут отличаться меньше, чем на  $\varepsilon$ .

### **Задание**

1. Напишите программу для нахождения корней уравнения методом простой итерации, методом Ньютона и методом дихотомии. Исходными параметрами для процедур вычисления являются начальное приближение  $x_0$ , точность  $\varepsilon$ , максимальное число итераций, а также признак, позволяющий судить о том, найден корень или нет. Выходными данными являются значение корня и число итераций.

2. Протестировать программу на примере математической модели для решения квадратного уравнения с точными корнями на основании дискриминатора.

Используйте программы для решения двух уравнений (одно уравнение выбирается с параметрами, второе – без входных параметров) вида:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tg}(ax) - bx = 0; & \lg(ax) - bx + c = 0; & 3x + \cos(x) + 1 = 0 \\ a \cdot e^{-bx} - x = 0; & ax^3 + bx^2 + cx + d = 0; & x2^x = 1 \end{array}$$

Предварительно необходимо отделить корни, проверить все условия сходимости для данного метода, выбрать «хорошее» начальное приближение для корня. Значения точности следует задавать в разумных пределах не выше погрешности вычислений.