实验三　z 变换及离散时间 LTI 系统的 z 域分析

3.1　实验目的

- 学会运用 MATLAB 求离散时间信号的有理函数 z 变换的部分分式展开；
- 学会运用 MATLAB 分析离散时间系统的系统函数的零极点；
- 学会运用 MATLAB 分析系统函数的零极点分布与其时域特性的关系；
- 学会运用 MATLAB 进行离散时间系统的频率特性分析。

3.2　实验原理及实例分析

3.2.1　有理函数 z 变换的部分分式展开

如果信号的 z 域表示式 $X(z)$ 是有理函数，设 $X(z)$ 的有理分式表示为

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}=\frac{B(z)}{A(z)} \qquad (3\text{-}1)$$

MATLAB 信号处理工具箱提供了一个对 $X(z)$ 进行部分分式展开的函数 residuez，其语句格式为

[R,P,K]=residuez(B,A)

其中，B，A 分别表示 X(z)的分子与分母多项式的系数向量；R 为部分分式的系数向量；P 为极点向量；K 为多项式的系数。若 X(z)为有理真分式，则 K 为零。

【实例 3-1】 试用 MATLAB 命令对函数 $X(z)=\dfrac{18}{18+3z^{-1}-4z^{-2}-z^{-3}}$ 进行部分分式展开，并求出其 z 反变换。

解：MATLAB 源程序为

```
>>B=[18];
```

```
>>A=[18,3,-4,-1];
>>[R,P,K]=residuez(B,A)
R=
      0.3600
      0.2400
      0.4000
P=
      0.5000
     -0.3333
     -0.3333
K=
      []
```

从运行结果可知，$p_2 = p_3$，表示系统有一个二重极点。所以，X(z)的部分分式展开为

$$X(z)=\frac{0.36}{1-0.5z^{-1}}+\frac{0.24}{1+0.3333z^{-1}}+\frac{0.4}{(1+0.3333z^{-1})^2}$$

3.2.2 系统函数的零极点分析

离散时间系统的系统函数定义为系统零状态响应的 z 变换与激励的 z 变换之比，即

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \tag{3-2}$$

如果系统函数 $H(z)$ 的有理函数表示式为

$$H(z)=\frac{b_1 z^m + b_2 z^{m-1} + \cdots + b_m z + b_{m+1}}{a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \cdots + a_n z + a_{n+1}} \tag{3-3}$$

那么，在 MATLAB 中系统函数的零极点就可通过函数 roots 得到，也可借助函数 tf2zp 得到，tf2zp 的语句格式为

[Z,P,K]=tf2zp(B,A)

其中，B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子与分母多项式的系数向量。它的作用是将 $H(z)$ 的有理分式表示式转换为零极点增益形式，即

$$H(z)=k\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)} \tag{3-4}$$

【实例 3-2】 已知一离散因果 LTI 系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{z+0.32}{z^2+z+0.16}$$

试用 MATLAB 命令求该系统的零极点。

解：用 tf2zp 函数求系统的零极点，MATLAB 源程序为

```
>>B=[1,0.32];
>>A=[1,1,0.16];
>>[R,P,K]=tf2zp(B,A)
R=
    -0.3200
P=
    -0.8000
    -0.2000
K=
      1
```

因此，零点为 $z=0.32$，极点为 $p_1=0.8$ 与 $p_2=0.2$。

若要获得系统函数 $H(z)$ 的零极点分布图，可直接应用 zplane 函数，其语句格式为

zplane(B,A)

其中，B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子和分母多项式的系数向量。它的作用是在 Z 平面上画出单位圆、零点与极点。

【实例 3-3】 已知一离散因果 LTI 系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{z^2-0.36}{z^2-1.52z+0.68}$$

试用 MATLAB 命令绘出该系统的零极点分布图。

解：用 zplane 函数求系统的零极点，MATLAB 源程序为

```
>>B=[1,0,-0.36];
>>A=[1,-1.52,0.68];
>>zplane(B,A),grid on
>>legend('零点','极点')
>>title('零极点分布图')
```

程序运行结果如图 3-1 所示。可见，该因果系统的极点全部在单位圆内，故系

统是稳定的。

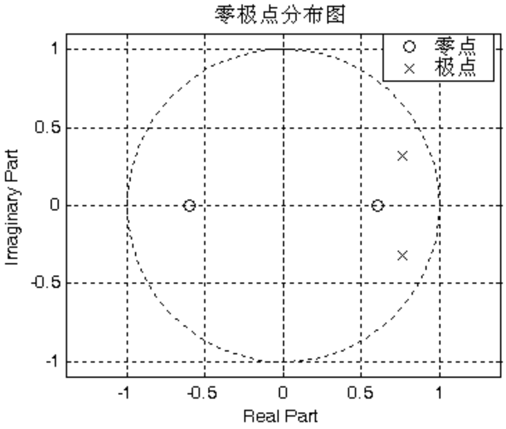


图 3-1　零极点分布图

3.2.3　系统函数的零极点分布与其时域特性的关系

与拉氏变换在连续系统中的作用类似，在离散系统中，z 变换建立了时域函数 $h(n)$ 与 z 域函数 $H(z)$ 之间的对应关系。因此，z 变换的函数 $H(z)$ 从形式可以反映 $h(n)$ 的部分内在性质。我们仍旧通过讨论 $H(z)$ 的一阶极点情况，来说明系统函数的零极点分布与系统时域特性的关系。

【实例 3-4】 试用 MATLAB 命令画出现下列系统函数的零极点分布图、以及对应的时域单位取样响应 $h(n)$ 的波形，并分析系统函数的极点对时域波形的影响。

（1） $H_1(z)=\dfrac{z}{z-0.8}$　　（2） $H_2(z)=\dfrac{z}{z+0.8}$

（3）$H_3(z)=\dfrac{z}{z^2-1.2z+0.72}$（4）$H_4(z)=\dfrac{z}{z-1}$　（5）$H_5(z)=\dfrac{z}{z^2-1.6z+1}$

（6） $H_6(s)=\dfrac{z}{z-1.2}$　　（7） $H_7(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+1.36}$

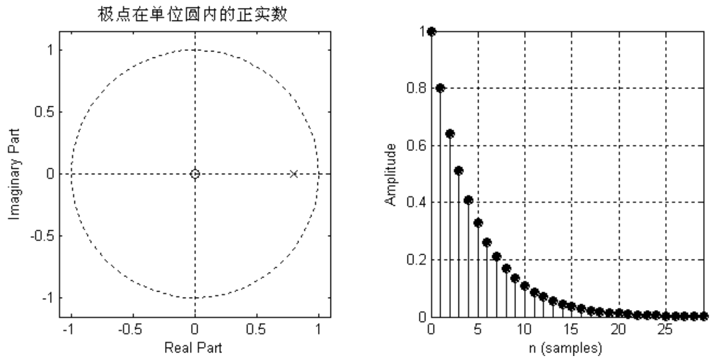
解：MATLAB 源程序为

```
>>b1=[1,0];
>>a1=[1,-0.8];
>>subplot(121)
>>zplane(b1,a1)
>>title('极点在单位圆内的正实数')
```

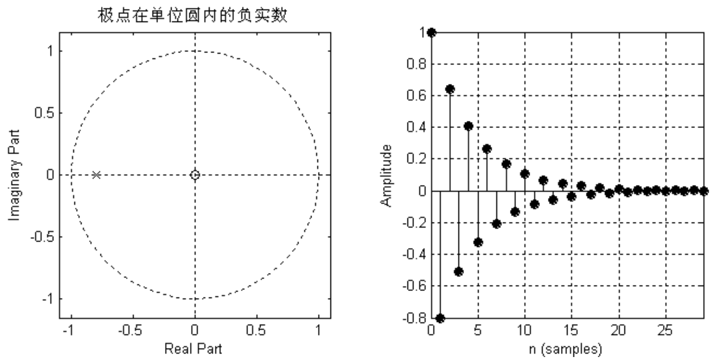
```
>>subplot(122)
>>impz(b1,a1,30);grid on;
>>figure
>>b2=[1,0];
>>a2=[1,0.8];
>>subplot(121)
>>zplane(b2,a2)
>>title('极点在单位圆内的负实数')
>>subplot(122)
>>impz(b2,a2,30);grid on;
>>figure
>>b3=[1,0];
>>a3=[1,-1.2,0.72];
>>subplot(121)
>>zplane(b3,a3)
>>title('极点在单位圆内的共轭复数')
>>subplot(122)
>>impz(b3,a3,30);grid on;
>>figure
>>b4=[1,0];
>>a4=[1,-1];
>>subplot(121)
>>zplane(b4,a4)
>>title('极点在单位圆上为实数 1')
>>subplot(122)
>>impz(b4,a4);grid on;
>>figure
>>b5=[1,0];
>>a5=[1,-1.6,1];
>>subplot(121)
>>zplane(b5,a5)
>>title('极点在单位圆上的共轭复数')
>>subplot(122)
>>impz(b5,a5,30);grid on;
>>figure
```

```
>>b6=[1,0];
>>a6=[1,-1.2];
>>subplot(121)
>>zplane(b6,a6)
>>title('极点在单位圆外的正实数')
>>subplot(122)
>>impz(b6,a6,30);grid on;
>>figure
>>b7=[1,0];
>>a7=[1,-2,1.36];
>>subplot(121)
>>zplane(b7,a7)
>>title('极点在单位圆外的共轭复数')
>>subplot(122)
>>impz(b7,a7,30);grid on;
```

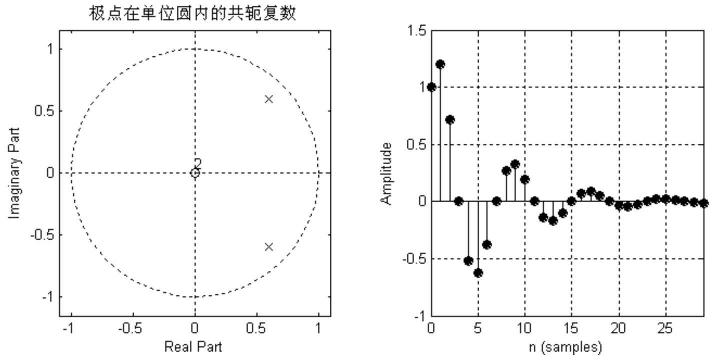
程序运行结果分别如图 3-2 的（a）、（b）、（c）、（d）、（e）、（f）、（g）所示。



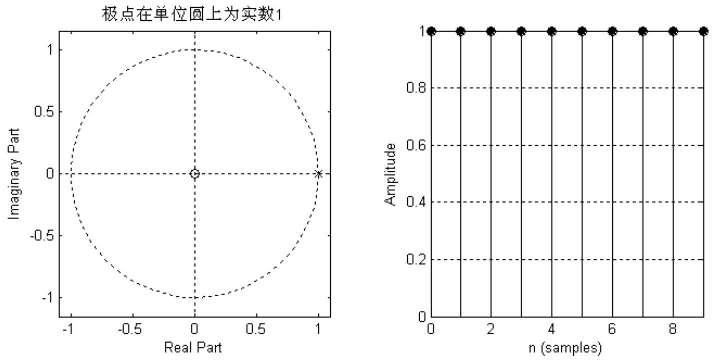
(a)



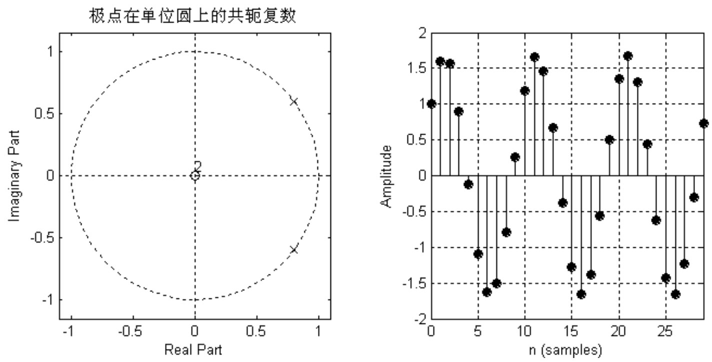
(b)


极点在单位圆内的共轭复数
Imaginary Part
Real Part
Amplitude
n (samples)

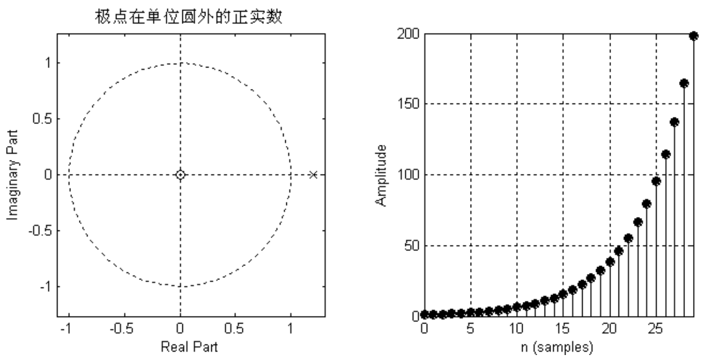
(c)


极点在单位圆上为实数1
Imaginary Part
Real Part
Amplitude
n (samples)

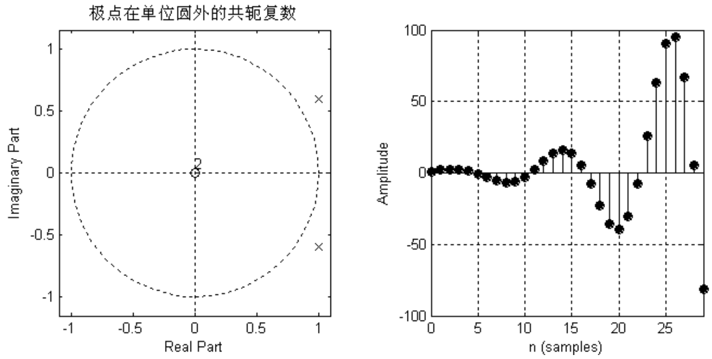
(d)


极点在单位圆上的共轭复数
Imaginary Part
Real Part
Amplitude
n (samples)

(e)


极点在单位圆外的正实数
Imaginary Part
Real Part
Amplitude
n (samples)

(f)



(g)

图 3-2　系统函数的零极点分布与其时域特性的关系

从图 3-2 可知，当极点位于单位圆内时，$h(n)$ 为衰减序列；当极点位于单位圆上时，$h(n)$ 为等幅序列；当极点位于单位圆外时，$h(n)$ 为增幅序列。若 $h(n)$ 有一阶实数极点，则 $h(n)$ 为指数序列；若 $h(n)$ 有一阶共轭极点，则 $h(n)$ 为指数振荡序列；若 $h(n)$ 的极点位于虚轴左边，则 $h(n)$ 序列按一正一负的规律交替变化。

3.2.4　离散时间 LTI 系统的频率特性分析

对于因果稳定的离散时间系统，如果激励序列为正弦序列 $x(n) = A\sin(n\omega)u(n)$，则系统的稳态响应为 $y_{ss}(n) = A|H(e^{j\omega})|\sin[n\omega + \varphi(\omega)]u(n)$。其中，$H(e^{j\omega})$ 通常是复数。离散时间系统的频率响应定义为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)} \qquad （3-5）$$

其中，$|H(e^{j\omega})|$ 称为离散时间系统的幅频特性；$\varphi(\omega)$ 称为离散时间系统的相频特性；$H(e^{j\omega})$ 是以 ω_s（$\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$，若零 $T = 1$，$\omega_s = 2\pi$）为周期的周期函数。因此，只要分析 $H(e^{j\omega})$ 在 $|\omega| \le \pi$ 范围内的情况，便可分析出系统的整个频率特性。

MATLAB 提供了求离散时间系统频响特性的函数 freqz，调用 freqz 的格式主要有两种。一种形式为

[H,w]=freqz(B,A,N)

其中，B 与 A 分别表示 $H(z)$ 的分子和分母多项式的系数向量；N 为正整数，默认值为 512；返回值 w 包含 $[0, \pi]$ 范围内的 N 个频率等分点；返回值 H 则是离散时间系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 在 $0 \sim \pi$ 范围内 N 个频率处的值。另一种形式为

[H,w]=freqz(B,A,N,'whole')

与第一种方式不同之处在于角频率的范围由 $[0, \pi]$ 扩展到 $[0, 2\pi]$。

【实例 3-5】用 MATLAB 命令绘制系统 $H(z) = \dfrac{z^2 - 0.96z + 0.9028}{z^2 - 1.56z + 0.8109}$ 的频率响应曲线。

解：利用函数 freqz 计算出 $H(e^{j\omega})$，然后利用函数 abs 和 angle 分别求出幅频特性与相频特性，最后利用 plot 命令绘出曲线。

MATLAB 源程序为：

```
>>b=[1 -0.96 0.9028];
>>a=[1 -1.56 0.8109];
>>[H,w]=freqz(b,a,400,'whole');
>>Hm=abs(H);
>>Hp=angle(H);
>>subplot(211)
>>plot(w,Hm),grid on
>>xlabel('\omega(rad/s)'),ylabel('Magnitude')
>>title('离散系统幅频特性曲线')
>>subplot(212)
>>plot(w,Hp),grid on
>>xlabel('\omega(rad/s)'),ylabel('Phase')
>>title('离散系统相频特性曲线')
```

程序运行结果如图 3-3 所示。

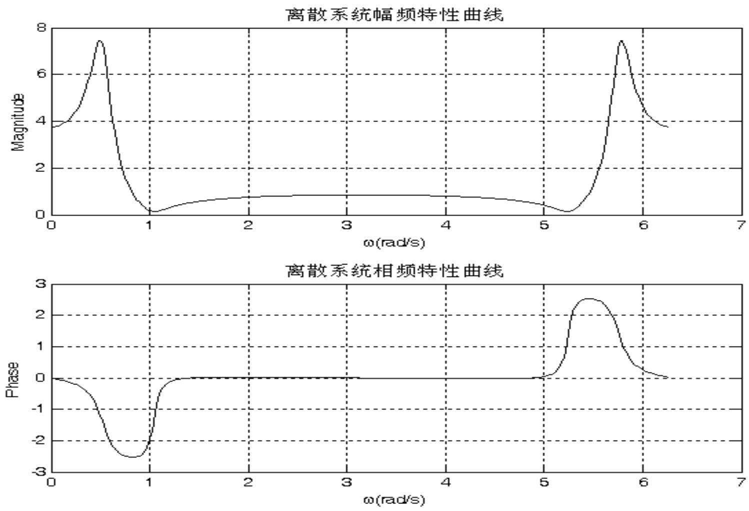


图 3-3　离散系统频响特性曲线

3.3　实验内容

1.　试用 MATLAB 的 residuez 函数，求出 $X(z)=\dfrac{2z^4+16z^3+44z^2+56z+32}{3z^4+3z^3-15z^2+18z-12}$ 的部分分式展开和。

结果：

R =

-0.0177
9.4914
-3.0702 + 2.3398i
-3.0702 - 2.3398i

P =

-3.2361
1.2361
0.5000 + 0.8660i
0.5000 - 0.8660i

K =

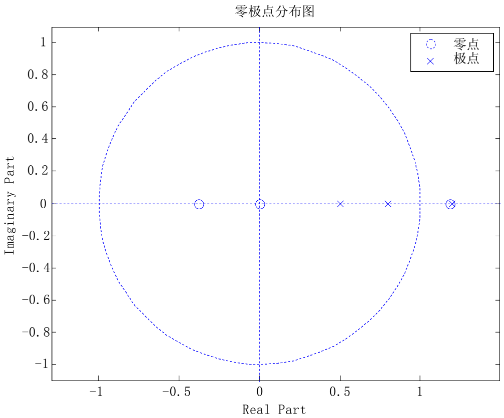
-2.6667

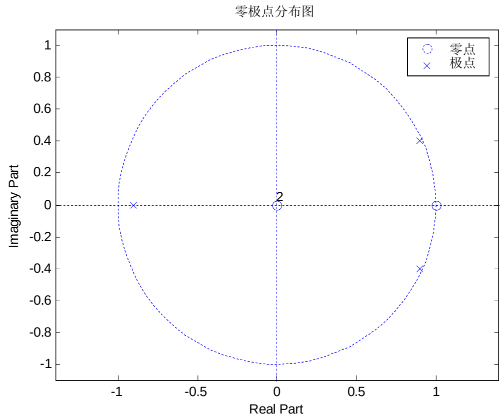
2. 试用 MATLAB 画出下列因果系统的系统函数零极点分布图，并判断系统的稳定性。

（1） $H(z)=\dfrac{2z^2-1.6z-0.9}{z^3-2.5z^2+1.96z-0.48}$

（2） $H(z)=\dfrac{z-1}{z^4-0.9z^3-0.65z^2+0.873z}$

结果：





3. 试用 MATLAB 绘制系统 $H(z)=\dfrac{z^2}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}$ 的频率响应曲线。