

队伍编号	202275
题号	B

## 养老服务床位需求的预测与运营模式研究

### 摘 要

随着我国老龄人口逐渐增多，老龄化的社会问题越来越突出，如何解决养老服务问题已经成为目前重要的社会问题。本文依据题目所给数据和条件研究养老服务问题，建立合理的多方博弈数学模型。

**针对问题（1）：**是对未来养老服务床位数量的预测问题，首先根据题目条件确定预测养老服务床位数量的影响因素和附件提供的数据整理出影响因素和养老服务床位数量的数据。为了提高模型精确度，通过**灰色关联法分析法**选取影响因素中的三个重要指标：老年人人口、老年人口占比、消费指数，并建立三个影响指标与养老床位数量的**多元回归模型**。由于预测养老床位数量还需要考虑预测影响指标的数据，于是分别建立了三个影响指标的一元线性模型。通过 MATLAB 对多元回归方程和三个一元线性方程求解得到预测 2020 年养老床位数量为 1439 万张，再采用各省老年人口比例以及失能与非失能人口比例，得到各省失能与非失能老人分配的床位数，其中可以观察到我国四川、云南、江西省份老年人需求养老服务床位数量较为突出，具体分配情况见正文。

**针对问题（2）：**从企业角度去考虑养老服务床位数量以及结构和分析存在的商机，将问题二转化为研究企业和养老服务需求者的博弈问题。由于在养老市场中企业策略为发展养老产业和退出养老产业，养老服务的策略为参与居家养老、社区养老、机构养老，然后通过排列组合得到六种策略组合并表示六种策略组合的收益函数，建立企业、养老服务需求者**双方博弈模型**。对六种策略组合的收益采用**纯策略均衡分析**，得到双方各自的收益都最大的策略Ⅲ、Ⅴ，再通过附件 3 中企业策略参数的大小关系和文献中养老服务需求者策略参数大小关系，选择出总收益最大化的策略：企业进入养老产业和老人选择机构养老。最后根据结果分析帮助企业发现养老服务业的商机并合理利用从而达到利益最大化的措施：1. 尽早进入市场，夺取市场份额。2. 合理采购硬件设备，利用空窗期减低运营成本

**针对问题（3）：**在问题二的基础上需要考虑政府的角度，并且需要满足提供的床位满足社会需求，能够有合理健康的盈利模式使养老行业持续发展，促进社会就业，和政府和企业双方的战略三个目标。由于需要满足促进社会就业的要求，养老服务市场中的博弈主体还需要考虑失业人群，于是建立政府、企业、养老服务需求者、失业人群**多方博弈模型**。同问题二求解，不同之处在于问题三的博弈主体较多，求解较为复杂，于是采用改进的纯策略均衡分析法进行求解得到最优策略：政府积极参与养老业，企业发展低端养老业，失业人员进入低端服务，老人选择居家养老。根据求解的最优策略分析了养老服务床位运营的商业模式，具体见正文。

**针对问题（4）：**根据本文建立的模型和求解出的结论作为基础，分析养老业的发展趋势，从促进就业、满足社会需求、企业利益最大化三个角度考虑，对政府管理部门提出合理的建议和可行的措施，帮助更好的对养老服务床位进行规划。

**关键词：**多元回归 一元线性回归 灰色关联分析法 博弈模型 纯策略均衡分析

# 目录

一、	问题重述 .....	1
1.1	问题背景 .....	1
1.2	问题的提出 .....	1
二、	问题分析 .....	1
2.1	问题一的分析 .....	1
2.2	问题二的分析 .....	2
2.3	问题三的分析 .....	2
2.4	问题四的分析 .....	2
三、	基本假设 .....	2
四、	符号说明 .....	3
五、	问题一的模型建立与求解 .....	3
5.1	问题的分析 .....	3
5.2	基于灰色系统理论改进的多元回归模型的建立与求解 .....	3
5.2.1	建模准备 .....	3
5.2.2	基于灰色系统改进的多元回归模型的建立与求解 .....	6
六、	问题二的模型建立与求解 .....	9
6.1	问题的分析 .....	9
6.2	企业-养老服务需求者“双方博弈模型建立 .....	9
6.2.1	参与者与战略 .....	9
6.2.2	收益函数 .....	10
6.3	博弈分析模型求解 .....	12
七、	问题三的模型建立与求解 .....	15
7.1	问题的分析 .....	15
7.2	“政府-企业-养老服务需求者-失业人群”多方博弈模型的建立 .....	15
7.2.1	参与者与策略 .....	15
7.2.2	收益函数 .....	16
八、	问题四的模型建立与求解 .....	23
8.1	问题的分析 .....	23
8.2	建议 .....	23
九、	模型的评价 .....	24
9.1	模型的优点 .....	24
9.2	模型的缺点 .....	24
	参考文献 .....	24
	附录 .....	25

## 一、 问题重述

### 1.1 问题背景

随着时间的推移，我国老龄人口逐渐增多，老龄化的社会问题越来越突出。由于我国人口基数大，养老需求的层次也不相同，通过政府和各方面的努力，尽可能的不断满足老年人的养老服务需求，来解决养老服务问题。我国目前的养老模式主要以家庭养老、社区养老、机构养老为主，其中机构养老的类型有公办养老院、民办养老院、公建民营养老院等，都对养老服务事业做出了不同的贡献。但是现有的养老服务床位供给还远远不能满足社会的需求，增加养老服务床位是一个急待解决的现实问题。从政府角度来说，合理估计养老服务中床位的需求，制定合理的养老服务床位发展规划，是构建和谐社会、幸福社会的重要组成部分。从企业角度出发，养老服务床位的增加也为企业提供了一个“商机”。

### 1.2 问题的提出

请你通过数学建模和数据分析，对上述问题背景进行量化建模，解答以下问题：

**问题 1：**根据我国的人口数量、结构和消费水平等多种因素，预测养老服务床位数量的市场需求规模及其分类。

**问题 2：**从企业角度出发，结合现有养老服务床位的数量和结构，分析、建立合适的模型，来发现并分析养老服务床位增加中的“商机”。

**问题 3：**建立一个合适的数学模型，从政府的角度出发，设计一个既能基本满足社会需求，又能持续发展养老服务事业，同时还能促进社会就业的养老服务床位运营的商业模式。

**问题 4：**试用精炼的数学语言归纳总结本题中最关键的数学建模问题及其算法。以你们的模型及其结论为科学依据，对政府管理部门针对养老床位规划问题提出合理的建议。

## 二、 问题分析

### 2.1 问题一的分析

问题一要求预测养老服务床位数量未来市场的规模，由于养老服务床位数量受我国的人口数量、结构和消费水平等多种因素影响，于是本文首先确定了影响因素的七个指标，并根据附件的数据整理出 2010 年 2017 年间的影响因素与养老服务床位数的数据表，接着对这七个影响因素指标采用灰色关联法分析法选择出了主要影响的指标。然后建立主要影响指标和养老服务床位数的多元回归模型。为了预测未来养老服务床位数，还需要预测影响指标的数值，于是建立每个影响指标与时间的一元线性模型。最后通过 MATLAB 求解多元回归方程和一元线性方程得到 2020 年的床位数。根据《中国老年人口失能地区分布》<sup>[1]</sup> 可知各省老年人口比例以及失能与非失能人数比例，从而得到 2020

年各个省份失能与非失能老人分配床位数量的情况。

## 2.2 问题二的分析

问题二是从企业角度出发研究现存养老服务的数量结构和存在的商机，则需要考虑企业和养老服务需求者双方的利益。由于在养老市场中企业对养老服务有两种策略：发展养老业和退出养老业，养老服务需求者也有三种策略：参与居家养老，社区养老，机构养老，双方都需要利用应对的策略达到获利。根据附件 3 中企业策略参数的大小关系和文献中养老服务需求者策略参数大小关系，通过排列组合所有策略组合并表示双方的收益函数，建立企业-养老服务需求者双方博弈模型。为了求解模型，首先需要根据收益=收入-成本关系得到策略组合企业和养老需求者的收益矩阵和双方总收益，然后选择纯策略均衡分析分析每种策略组合，得到满足企业和养老需求者各自利益化最大的策略组合，最后通过比较策略总收益最大选取最终的策略，从而根据最优策略进行商机分析。

## 2.3 问题三的分析

问题三在问题二的基础上，还需要考虑政府角度和达到三个目标：提供的床位满足社会需求，能够有合理健康的盈利模式使养老行业持续发展，促进社会就业，和政府和企业双方的战略。由于失业人群是政府积极发展养老产业和企业进入养老产业的直接响应者，于是博弈主体将变成政府、企业、失业人群、养老服务需求者四方，建立政府-企业-养老服务需求者-失业人群多方博弈模型。同问题二对博弈模型求解，分析得到博弈参与者的收益表达式和参数大小关系，以及排列各种策略组合的收益矩阵，但是因为问题博弈主体较多，策略的收益函数呈现出高度的周期性，采用一般的纯策略均衡分析法计算量较大，求解较为复杂，于是通过改进的纯策略均衡分析法进行求解得到最优策略，并分析商业模式。

## 2.4 问题四的分析

首先将对前面三个问题建立的数学模型和算法进行总结，并使用数学语言进行归纳，其次将针对现有的数据以及本文提出的模型和求解出的结论作为基础，分析养老业的发展趋势，并对政府管理部门提出合理的建议，帮助更好的对养老服务床位进行规划。

# 三、 基本假设

1. 假设老年人口不会发生大的人口流动，即老年人所在地区比例以及老年人失能与不失能比例基本不变。
2. 在模型有效的时限内，国家针对养老事业的相关政策不发生改变，养老机构不会因为不可抗力造成倒闭、破产等后果。
3. 由题目所给条件做出假设，社会急需养老机构床位，现阶段我国养老床位短期内无法达到饱和，短期内床位不会受市场饱和影响。
4. 假设问题二所有决策主体都是完全理性的，并且问题二中不考虑政府的决策。

## 四、 符号说明

变量符号	变量符号说明
$x_{ij}$	第 $2010+i$ 年第 $j$ 个影响因素的数据值
$y_i$	第 $2010+i$ 年床位数（万张）
$X$	影响因素矩阵
$Y$	床位数矩阵
$K$	关联系数
$\rho$	分辨系数
$\zeta$	灰色关联度
$\Gamma$	博弈参与者
$S$	博弈参与者战略空间（策略集合）
$G$	标准式博弈模型符号

## 五、 问题一的模型建立与求解

### 5.1 问题的分析

问题一是对养老服务床位数量的市场需求规模以及分类的预测问题进行研究，由题目条件可知养老床位数量受我国的人口数量、结构和消费水平等多种因素影响。根据附件 1 中可知我国社会服务工作中有提供住宿养老服务的内容，即社会服务的发展带动着养老服务的发展，也影响着养老服务的市场规模。于是我们选择我国的人口数量及结构、社会服务、和消费水平三个主要影响因素进行分析。由于从这三个影响因素抽象化，难以量化分析，因此我们将进一步对这三个因素进行分析。

### 5.2 基于灰色系统理论改进的多元回归模型的建立与求解

#### 5.2.1 建模准备

##### （1）数据收集与处理

在建模模型之前，我们需要将这三个元素进行量化，并收集具体的数据。根据《国务院关于加快发展养老服务业的若干意见》<sup>[1]</sup>中指出老年人口增长以及随着居民的消费水平的提升扩大了养老服务的需求。因此本文选择老年人口总量、65 周岁及以上老年人口比重、居民消费水平指数、社会服务支出基本情况、社会服务机构床位以及设施七个量化指标进一步分析。具体影响因素分析指标见下图：

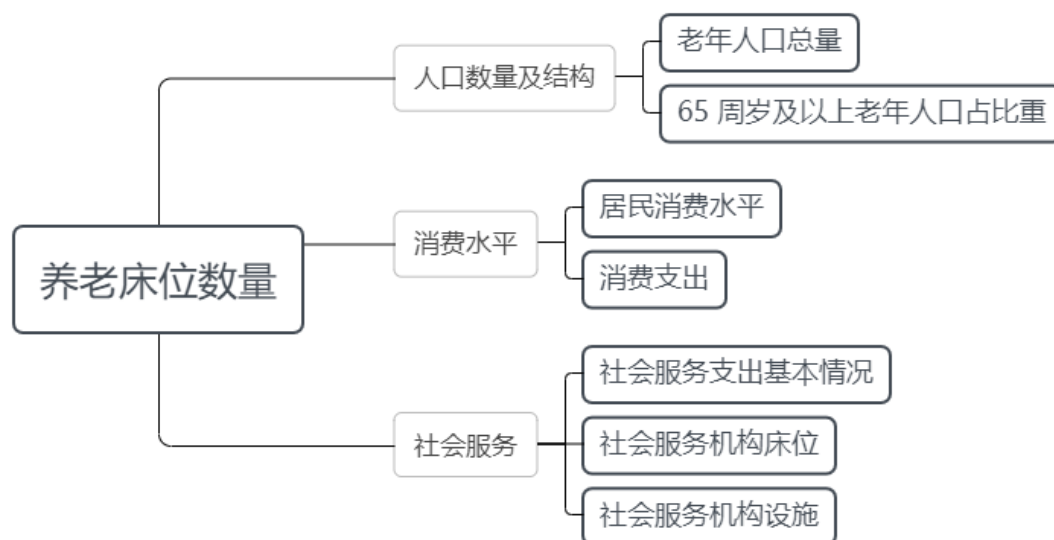


图 1 三个影响因素的七个指标分析图

为了得到影响养老服务床位的七个指标更精确的数据，我们选择收集我国 2010 到 2017 年的七个指标数据进行统计分析。根据附件一和附件三中可以得到各个指标的数据，其中老年人口总量，老年人口占比数据来源于附件一中的社会服务发展统计公报，居民消费水平指数，居民消费支出数据来源于附件三中的国家统计局年鉴。社会服务支出，社会服务机构，社会服务设施数据来源于附件一中的社会服务发展统计公报。于是我们将通过七个指标分析养老机构床位数量之间的关系，由前瞻产业研究院<sup>[3]</sup>整理得到 2010 年到 2017 年间的养老机构及床位数据。具体数据见下表：

表 1 2010 至 2017 年养老服务床位与七个影响指标数据表

年份/ 年	老年 人口 总量 /万人	老年人 口占全 国总人 口比重	居民消 费水平/ 指数	消费支 出/元	社会服务 基本情况 -支出/亿 元	社会服 务机构 床位/万 个	社会服 务机构 和设施/ 万个	养老机 构床位 数/万
2010	11894	8.9	1124.5	12264.55	2697.5	349.6	15.3	312.3
2011	12288	9.1	1248.6	13471.45	3229.1	396.4	16.0	367.2
2012	12714	9.4	1362.0	15160.89	3683.7	449.3	20.0	416.5
2013	13161	9.7	1462.0	13220.4	4276.5	526.7	25.2	493.7
2014	13755	10.1	1574.6	14491.4	4404.1	482.3	31.1	557.8
2015	14386	10.5	1692.6	15712.4	4926.4	393.2	36.1	672.7
2016	15003	10.8	1820.5	17110.7	5440.2	414.0	38.6	780
2017	15831	11.4	1930.0	18322.1	5932.7	419.6	40.7	744.8

## (2) 灰色关联分析法<sup>[4]</sup>选取重要影响指标

通过分析得出的老年人口总量、65 周岁及以上老年人口比重、居民消费水平指数、社会服务支出基本情况、社会服务机构床位以及设施七个量化指标，进行研究七个指标数据与养老服务床位数量之间的关系。为了提高模型的精确度，避免收集的样本数据中含有病态数据影响结果，针对该问题，本文采用灰色关联分析法剔除影响指标数据中的噪声污染，选取影响因素中的重要指标。

根据上述表 1 中数据设  $x_{ij}$  表示第 2010+ $i$  年第  $j$  个因素的数据值，第 2010+ $i$  年的养老服务机构的床位数量为  $y_i$ ，其中  $i=(1,2,3\cdots p)$ ， $j=(1,2,3\cdots n)$ 。其中养老服务机构的床位数量  $y_i$  受到  $p$  个因素的影响，有  $n$  组观测数据  $(x_{j1}, x_{j2} \cdots x_{jp}, y_i)$ ，为了确定影响因变量的主要因素，分别计算序列  $Y=(y_1, y_2 \cdots y_p)^T$  与序列  $X_j=(x_{j1}, x_{j2} \cdots x_{jp})^T$  的灰色关联度。具体步骤如下：

### Step1: 数据(0,1)标准化:

为了方便处理数据，对表中的数据进行预处理，即将数据的数值范围按一定关系“压缩”到 (0, 1) 的范围内。本文选择的“压缩”方法是将样本点的数值减去最小值，再除以样本点数值最大与最小的差，如下列公式所示：

$$x' = \frac{x - \min}{\max - \min} \quad (5-1)$$

其中  $\max$  为样本点最大数值， $\min$  样本点最小数值， $x'$  为(0,1)标准化后的数值。通过计算得到养老服务床位数量的影响因素矩阵为

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}, \hat{X}_1, \hat{X}_2, \cdots, \hat{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_{11} & \hat{x}_{11} & \hat{x}_{21} & \cdots & \hat{x}_{n1} \\ \hat{y}_{12} & \hat{x}_{12} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{y}_{1p} & \hat{x}_{1p} & \hat{x}_{2p} & \cdots & \hat{x}_{np} \end{pmatrix}$$

### Step2:求差序列:

得到经过(0,1)标准化的影响因素矩阵，再将影响因素矩阵中的  $\hat{Y}$  减去  $\hat{X}_i$ ，即  $\Delta_{ij} = \hat{Y}_{i1} - \hat{X}_{ij} \quad i=(1,2,3\cdots p) \quad j=(1,2,3\cdots n)$ 。得到影响因素的求差矩阵。

### Step3: 计算关联系数 $K_{ij}$ :

求出影响因素求差矩阵的最大值和最小值，根据计算关联公式

$$K_{ij} = \frac{\min |\Delta_{ij}| + \rho \cdot \max |\Delta_{ij}|}{|\Delta_{ij}| + \rho \cdot \max |\Delta_{ij}|} \text{ 求得关联系数。其中 } K_{ij} \text{ 表示第 } i \text{ 年的第 } j \text{ 个因素与第 } 2010+i \text{ 年}$$

床位数的关联系数， $\rho$  为分辨系数，取值范围在 0-1，在这里取 0.5 进行计算。

**Step4: 计算灰色关联度:**

$$\zeta_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p K_{ij} \tag{5-2}$$

根据上述计算灰色关联度的公式（5-2）得到各个因素的关联度，并将关联度从大到小排列，选取其中  $m$  个因素作为主要因素，其中  $m < n$ 。

根据本文选择的养老服务床位数量的影响因素指标  $n = 7$ ， $i = (1, 2, 3 \cdots p)$   $p = 7$ ，通过 MATLAB 求解得到养老服务床位数量的影响数量为  $m = 3$ ，且主要的影响因素指标为老年人人口，老年人口占比，消费指数，灰色关联度结果见下表：

表 2 灰色关联度计算结果

影响因 素	老年人 口总量	老年人 口占比	居民消 费水平	居民消 费支出	社会服 务支出	社会服 务机构	社会服 务床位
灰色关 联度	0.97	1	0.89	0.70	0.71	0.73	0

**5.2.2 基于灰色系统改进的多元回归模型的建立与求解**

**（1）养老服务床位数量与影响指标的多元回归模型**

我们通过灰色相关性分析法确定了养老服务床位数量的重要影响指标为：老年人人口，老年人占全部的比例，消费指数。再结合表 1 中的影响指标与养老服务床位数量的数据，建立养老床位数量与三个影响指标老年人人口，老年人口占比，消费指数的多元回归模型。设  $x_1, x_2 \cdots x_n$  为影响因素变量， $a_1, a_2 \cdots a_n$  为回归系数， $b_1, b_2 \cdots b_n$  为阶数， $\xi$  随机误差项，建立多元回归模型，如下所示：

$$y = a_1 x_1^{b_1} + a_2 x_2^{b_2} + \cdots + a_n x_n^{b_n} + \xi \tag{5-3}$$

由于我们已经确定了影响指标：老年人人口，老年人口占比，消费指数，于是得到多元回归模型为：

$$y_{i1} = a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + a_3 x_{i3} + \xi \tag{5-4}$$

其中  $i = 1, 2, 3 \cdots p$ ；

于是我们整理三个影响指标与养老服务床位数量的数据，如下表所示：

表 3 2010 至 2017 年间三个影响指标与养老服务床位数量的数据表

年份/年	老年人口总 量 /万人	65 周岁及以上人 口占全国总人口 比重	居民消费水平/指 数	养老机构床位数/ (按季报第四季度统 计) 万
2010	11894	8.9	1124.5	312.3
2011	12288	9.1	1248.6	367.2
2012	12714	9.4	1362.0	416.5
2013	13161	9.7	1462.0	493.7



2014	13755	10.1	1574.6	557.8
2015	14386	10.5	1692.6	672.7
2016	15003	10.8	1820.5	780
2017	15831	11.4	1930.0	744.8

$$\text{将上述公式(5-4) 用矩阵形式表示为: } Y = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1(1) & x_2(1) & x_3(1) \\ 1 & x_1(2) & x_2(2) & x_3(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1(p) & x_2(p) & x_3(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(1) \\ \beta(2) \\ \vdots \\ \beta(p) \end{pmatrix}$$

再将矩阵化简为 $Y = X\beta$ 。再将表 3 中的数据代入矩阵中,通过 MATLAB 计算得到养老服务床位数量与影响指标的多元回归方程<sup>[5]</sup>为:

$$y_{i1} = -1557.5x_{i1} + 0.339x_{i2} + 209.6x_{i3} - 0.269$$

## (2) 影响指标的一元线性模型

由于本文是通过养老服务床位数量与影响指标之间的关系预测未来养老机构床位数量的情况,所以需要考虑影响指标随着时间推移的变化,于是本文接下来将建立影响指标的一元线性模型。设 $x$ 为距 2010 年的年数,即 2010+ $x$ 为第几年, $d_1, d_2 \cdots d_n$ 为系数, $c_1, c_2 \cdots c_n$ 为阶数, $\xi$ 随机误差项,建立影响指标的一元线性模型,如下所示:

$$r = d_1x^{c_1} + d_2x^{c_2} + \cdots + d_nx^{c_n} + \xi$$

分别将三组影响指标的数据代入上述一元线性模型中,通过 MATLAB 求解得到三个影响指标的一元线性方程,如下所示:

$$\begin{cases} \text{老年人口一元线性方程: } r_1 = 1.258x^3 + 15.68x^2 + 327.3x + 1.155 \times 10^4 \\ \text{老年人占比一元线性方程: } r_2 = 2.525 \times 10^{-4}x^3 + 1.623 \times 10^{-2}x^2 + 0.1898x + 8.676 \\ \text{消费指数一元线性方程: } r_3 = 114.3x + 1012 \end{cases}$$

在拟合过程中通常使用 R-square (确定系数) 来反映拟合效果,上述三个一元线性方程的 R-square 为: 0.9996、0.9994、0.9999,可以认为一元线性拟合效果较好。

## (3) 床位数量分配策略

根据《中国老年人口失能地区分布》可知我国各省市老年人口比例以及各省市非失能老年人和失能老年人人口比例,且由于床位分配和老年人口的比例是相关的,因此床位的分配以各省老年人口比例以及失能与非失能人数比例进行分配。由假设 1 可知老年人口不会发生大的人口流动,即老年人所在地区比例以及老年人失能与不失能比例基本不变。于是收集整理了我国各个省失能和非失能老年人口比数据,部分数据如下表 4 所示,具体数据见附录 1。

表 4 我国各个省失能和非失能老年人口比部分数据表

省份	老年人口数 (万人)	失能老人 (万人)	失能率 (%)
安徽	624.42	95.25	15.25

北京	126.78	9.11	7.18
福建	564.61	42.56	7.54
甘肃	375	97.59	26.02
广东	609.61	67.74	11.11
广西	506.95	75.29	14.85

通过对老年人口数、老年人占比和消费指数模型的求解，可以得到 2020 年三个因素地预测结果，如下表所示：

表 5 2020 年影响因素预测结果表

因素	老年人口/万	老年人占比/百分比	消费指数
结果	18721.9	13.1	2269

设各省份老年人比例  $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(28)})$ ，各省份老年人失能与非失能比例  $\alpha_2$ 、 $1 - \alpha_2$ ，各省老年人人口数  $e = e(e_1, e_2, \dots, e_{28})$ ，各省非失能老年人口数  $e_1 = e_1(e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, \dots, e_1^{(28)})$ ，各省失能老年人口数  $e_2 = e_2(e_2^{(1)}, e_2^{(2)}, \dots, e_2^{(28)})$ ，

$$\begin{cases} e(e_1, e_2, \dots, e_{28}) = r_1 \cdot \alpha_1(\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(28)}) \\ e_1(e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, \dots, e_1^{(28)}) = (1 - \alpha_2) \cdot e_1(e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, \dots, e_1^{(28)}) \\ e_2(e_2^{(1)}, e_2^{(2)}, \dots, e_2^{(28)}) = \alpha_2 \cdot e_1(e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, \dots, e_1^{(28)}) \end{cases}$$

#### 模型求解：

最后在假设 2 排除不可抗逆因素和假设 3 短期内床位不会受市场饱和影响的情况下，预测 2020 年养老机构床位数量，先将  $x = 11$ （即 2020 年）代入上述影响指标一元线性方程中得到 2020 影响指标数据。通过 MATLAB 计算得到老年人人口：**18721 万人**，老年人口占比：**13.1%**，消费指数：**2269**，再将 2020 年影响指标的数据代入养老服务床位数量与影响指标的多元回归方程，得到 2020 年养老床位数量为 **1439 万张**。

根据床位分配策略中各省老年人口比例以及失能与非失能人数比例，可以得到各个省份的不同老年人所能分配到的床位，部分数据见下表所示，具体数值见附录 2。

表 4 2020 年各个省份的失能与非失能老年人分配床位部分数据表

地区	非失能人口数/万	失能人口数/万	老年人总人口/万
安徽	51.23669284	9.222546616	60.45923945
北京	11.39335496	0.882072437	12.2754274
福建	50.54730143	4.120856525	54.66815795
甘肃	26.86012238	9.449116265	36.30923864
广东	52.46636572	6.558900869	59.02526659
广西	41.79532254	7.289926874	49.08524942

为了更清楚明白地看出各个省份不同老人分配床位数量的情况，将上表 6 绘制成柱状图。从如下图 2 所示。

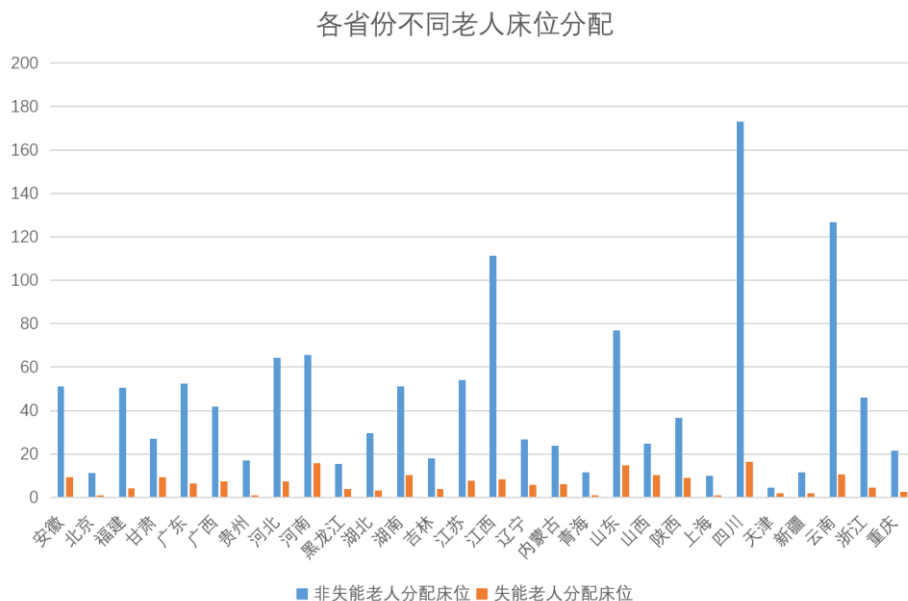


图 2 各个省份不同老人分配床位数量分配柱状图

从上图 2 可以看出我国四川、云南、江西省份老年人需求养老服务床位数量较为突出，而北京、天津、新疆省份老年人需求养老服务床位数量较少。总体来看我国失能老人所分配的床位数量较少，非失能老人分配的床位数量较多。

## 六、 问题二的模型建立与求解

### 6.1 问题的分析

问题二是从企业角度出发分析养老服务床位增加中的“商机”，本文的商机表现为养老服务床位数量需求的产生与供应床位数量的不平衡。根据假设 4 不考虑政府的决定带来市场供求的影响，只考虑企业和养老服务需求者两者之间。企业只有满足养老市场需求才能发展，在养老服务市场中，企业可以快速有效的发挥起作用。快速的老龄化社会到来，养老服务需求增大，现有的服务设施数量无法满足需要市场需求，则企业将会迎来商机。在养老服务市场中，企业将会评估预期收益和成本决定是否采取积极行动，养老服务需求者考虑企业提供的养老服务是否满足需求等决定是否参与其中。因此本文将企业与养老服务需求者作为博弈关系。

### 6.2 企业-养老服务需求者“双方博弈模型”<sup>[6]</sup> 建立

#### 6.2.1 参与者与战略

通过对问题二的分析可以得到博弈主体有企业，养老服务需求者两方，在不考虑政府决策上的对养老市场的影响，而企业对市场需求供给的养老服务有可以选择进入养老服务业，提供较多服务；也可以选择退出养老业，不发展养老服务。老年服务需求者可以选择缴纳养老费用，进入养老机构；也可以选择居家由子女赡养；还可以选择由社区负责养老。于是企业策略集合为： $\{\text{进入养老行业, 不进入养老行业}\}$ ；养老服务需求者

的策略集合为：{居家养老，社区养老，机构养老}

设博弈参与者为：

$$\Gamma = \{\text{企业，养老服务需求者}\}$$

设博弈参与者战略空间为：

$$S_1 = \{\text{进入养老行业，不进入养老行业}\}$$

$$S_2 = \{\text{社区养老，居家养老，机构养老}\}$$

### 6.2.2 收益函数

根据企业的两种应对策略：积极参与养老行业和消极退出养老行业。于是设定企业积极参与养老行业的策略概率为  $X_1$  ( $0 < X_1 < 1$ )，进入养老行业会付出额外人力物力等成本  $C_1$  和企业运营成本  $C_2$ ，进入养老行业后由于提供服务可以获得收益  $R_1$ ；当企业不进入养老行业，不需要付出额外成本，但会产生企业运营成本  $C_2$ ，也不会产生收益，此种策略的概率为  $1 - X_1$ 。

同时根据附件 3 可知企业策略参数之间的关系，目前的床位供给并不能满足老年人的养老需求，养老市场还并未饱和，因此进入养老行业获得的收入必定大于成本  $R_1 > C_1$ ，即企业进入养老行业会取得收入，同时由于养老行业供小于求，企业不进入养老行业会导致老人养老成本上升，在此以 2 倍计算。于是企业策略参数设置如下表 7 所示：

表 5 企业策略参数设置表			
	策略概率	运营成本	收入
进入养老行业	$X_1$	$C_1 + C_2$	$R_1$
不进入养老行业	$1 - X_1$	$C_2$	$R_2$
关系		$R_1 > C_1 + C_2$	

根据老年需求者三种策略：参加社区养老，居家养老和机构养老。于是设老人参加社区养老的策略概率为  $Y_1$  ( $0 < Y_1 < 1$ ) 由于老年需求者的收益可以体现在对养老服务的幸福指数，故设幸福指数为  $W_1$ ，成本为  $I_1$ ；参加家庭养老的策略概率为  $Y_2$  ( $0 < Y_2 < 1 - Y_1$ ) 幸福指数为  $W_2$ ，成本为  $I_2$ ；参加机构养老的策略概率为  $1 - Y_1 - Y_2$ ，幸福指数为  $W_3$ ，成本为  $I_3$ 。

通过查阅《南宁市老年人社区居家养老意愿及影响因素研究》<sup>[7]</sup>可知老年需求者策略参数之间的关系，老年人对待不同的养老方式有不同的态度。60.9%的老人希望家庭养老，20.0%的老人希望社区养老，只有剩余的 19.1%的老人希望进入机构养老。因此可以得出养老服务需求者策略概率的关系，即  $Y_2 > Y_1 > 1 - Y_2 - Y_1; W_1 > W_2 > W_3; I_3 > I_1 > I_2$ 。

通过三种养老模式的调研，社区养老由于只需要上门服务，不需要企业提供床位，但是老人社区养老的成本也归于企业的收益；家庭养老与企业几乎无关，以居家为主。机构养老则是由企业提供床位，集中到养老院等机构统一管理，只能在家人探望时与家人见面。因此可以得到三者的幸福指数的关系， $W_1 > W_2 > W_3$ ，三者的成本关系  $I_3 > I_1 > I_2$ 。

于是养老服务需求者策略参数设置如下表 8 所示：

表 6 养老服务需求者策略参数表

	概率	成本	收入
社区	$Y_1$	$I_1$	$W_1$
居家	$Y_2$	$I_2$	$W_2$
机构	$1 - Y_1 - Y_2$	$I_3$	$W_3$
关系	$Y_2 > Y_1 > 1 - Y_2 - Y_1; W_1 > W_2 > W_3; I_3 > I_1 > I_2$		

将企业策略和养老需求者策略进行排列组合得到六种策略组合：企业进入养老产业老人选择社区养老；企业进入养老产业老人选择家庭养老；企业进入养老产业老人选择机构养老；企业不进入养老产业老人选择社区养老；企业不进入养老产业老人选择家庭养老；企业不进入养老产业老人选择机构养老。如下图所示：

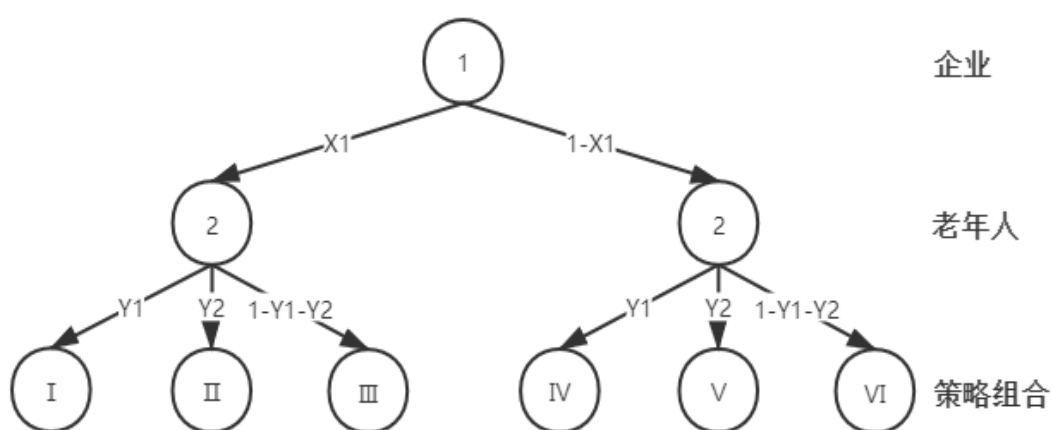


图 3 “企业-养老服务需求者”双方博弈树

六种策略组合分别为：I企业进入养老产业，老年人选择社区养老；II企业进入养老产业，老年人选择家庭养老；III企业进入养老产业，老年人选择机构养老；IV企业不进入养老产业，老年人选择社区养老；V企业不进入养老产业，老年人选择家庭养老；VI企业不进入养老产业，老年人选择机构养老。

业不进入养老产业，老年人选择机构养老。我们根据六种策略组合确定收益函数，设企业的收益函数，老人的收益函数分别为：

$$u_1 = u_1\{s_1, s_2, \dots, s_{d_1}\} \quad d_1 = 2$$

$$u_2 = u_2\{s_1, s_2, \dots, s_{d_2}\} \quad d_2 = 3$$

那么总收益函数为企业收益函数与老人收益函数之和：

$$u = u_1 + u_2 = u\{s_1, s_2, \dots, s_d\} \quad d = d_1 \cdot d_2$$

最终建立标准式博弈模型<sup>[8]</sup>：

$$G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$$

其中博弈模型的解纳什均衡为：在  $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$  中，当收益之和最大时，

$s^* \geq u\{s_1, s_2, \dots, s_d\}$ ， $s^*$  对应的策略组合即是博弈的纳什均衡。

### 6.3 博弈分析模型求解

由于企业的收益来源于养老机构老人床位设施和社区养老的上门服务两种情况，于是社区老人和机构老人的成本是归于企业收益的。根据收益=收入-成本关系得到六种策略组合企业和养老需求者的收益。由于老人在社区服务和养老机构的成本归于企业的成本，所以企业的收益有三部分。例如策略 1：企业进入养老产业，老人选择社区养老，企业的收益=企业收入-企业成本+老人成本，表示为  $R_1 - C_1 - C_2 + I_1$ ，老年需求者的收益=收入-成本，表示为  $W_1 - I_1$ 。那么六种策略的收益表示为收益矩阵，如下表 9 所示：

表 7 六种策略组合的收益矩阵数据表

	老人社区养老		老人居家养老		老人机构养老	
企业进入养老业	$R_1 - C_1 - C_2 + I_1$	I	$R_1 - C_1 - C_2 + I_2$	II	$R_1 - C_1 - C_2 + I_3$	III
	$W_1 - I_1$		$W_2 - I_2$		$W_3 - I_3$	
企业不进入养老业	$-C_2$	IV	$-C_2$	V	$-C_2$	VI
	$W_1 - 2I_1$		$W_1 - I_2$		$W_3 - 2I_3$	

由于需要达到博弈双方达到各自利益最大化，找到企业和养老需求者都满意的结果，即双方实现最大化收益。为了实现双方最大利益化，则考虑企业和养老需求者双方的总利益，于是将上表 7 中的六种策略组合的收益矩阵整理为企业-养老服务需求者双方总收益表。六种策略组合总收益如下表 10 所示。

表 8 六种策略组合总收益表

	总收益	策略组合	
I	$R_1 - C_1 - C_2 + W_1$	企业进入养老产业	老人选择社区养老
II	$R_1 - C_1 - C_2 + W_2$	企业进入养老产业	老人选择家庭养老
III	$R_1 - C_1 - C_2 + W_3$	企业进入养老产业	老人选择机构养老
IV	$W_1 - 2I_1 - C_2$	企业不进入养老产业	老人选择社区养老
V	$W_1 - I_2 - C_2$	企业不进入养老产业	老人选择家庭养老
VI	$W_3 - 2I_3 - C_2$	企业不进入养老产业	老人选择机构养老

### 纯策略均衡分析法

对六种策略组合的收益从经济角度去考虑，在表 10 六种策略组合的收益矩阵中，结合博弈分析法中的纯策略均衡分析，选择出满足纳什均衡的策略组合。纯策略均衡分析法的步骤如下所示：

**step1:** 选取某一策略  $x$ 。

**step2:** 选取策略  $x$  的任意策略主体  $y$  的收益函数，判断其是否大于横向的其他所有策略。

**step3:** 选取策略  $x$  的除策略主体  $y$  的其他任意策略主体  $z$  的收益函数，判断其是否大于纵向的其他所有策略。

**step4:** 若步骤 2、3 都满足则策略  $x$  满足纳什均衡，将其加入到条件纯策略组合表，再进行下一步判断。

将六种策略组合采用纯策略均衡分析法的四个步骤，得到以下分析：

**策略I:** 通过策略均衡分析法可知，任选策略主体，无论企业的收益还是老人的收益都不能在横向的策略I，II，III中取得最大值，不满足纳什均衡，无法通过 step2，无法进行下一步计算。

**同理策略II,** 无论企业的收益还是老人的收益都不能在横向的策略II，V中取得最大值，不满足纳什平衡，无法通过 step2，无法进行下一步计算。

**策略III:** 企业的策略为进入养老产业，同时养老需求者选择机构进行养老。针对这种策略，确定老人使用机构养老的前提下，企业进入养老行业的收益大于企业不进入养老行业；确定企业进入养老业的前提下，老人选择机构养老给公司带来的收益大于老人选择其他养老方式的收益。即表示为： $R_1 - C_1 - C_2 + I_3 > R_1 - C_1 - C_2 + I_2 > R_1 - C_1 - C_2 + I_1$ 。

**同理策略IV和策略VI：**可以看出其在横向上的企业收益都相同，可以取得最大值，但在纵向上不满足纳什均衡，无法通过 step3，无法进行下一步计算。

**策略V：**养老服务需求者的策略为使用居家养老，同时企业选择不进入养老产业。针对这种策略，确定家庭养老的前提下，企业无论是否进入养老行业都不会对老人的收益产生影响；确定企业不进入养老行业的前提下，养老所需要的费用会上升，选择居家养老的收益大于选择其他养老方式的收益。即表示为： $W_1 - I_2 > W_1 - 2I_1 > W_3 - 2I_3$ 。

通过对六种策略组合进行纯策略均衡分析，策略III在横向上企业收益取得最大值，纵向上老年人收益取得最大值，满足纳什均衡。策略V在纵向上企业收益取得最大值，横向向上老年人收益取得最大值，满足纳什均衡。策略III和策略V均满足纳什均衡。

再根据表 5 得到企业收益参数的大小关系： $R_1 > C_1 + C_2$ ，表 6 得到养老需求者的参数大小关系： $Y_2 > Y_1 > 1 - Y_2 - Y_1; W_1 > W_2 > W_3; I_3 > I_1 > I_2$ ，得到以下条件纯策略组合表，如下表 11 所示。

表 9 策略III、V 条件纯策略组合表

策略组合	条件纯策略组合表	策略组合
III	$R_1 - C_1 - C_2 + I_3 > -C_2$	企业进入养老产业
	$R_1 - C_1 - C_2 + I_3 > R_1 - C_1 - C_2 + I_2$	
	$R_1 - C_1 - C_2 + I_3 > R_1 - C_1 - C_2 + I_1$	老人选择机构养老
	$W_1 - I_3 > W_3 - 2I_3$	
V	$R_1 - C_1 - C_2 + I_3 > R_1 - C_1 - C_2 + I_2$	企业不进入养老产业
	$W_1 - 2I_1 > W_1 - I_2$	老人选择家庭养老
	$W_3 - 2I_3 > W_1 - I_2$	

根据纯策略均衡分析法得到策略III、V的企业和养老需求者双方各自的收益都最大化，再考虑双方的总收益最大化。通过表 10-六种策略组合总收益表中得到策略III、V的总收益表达式为：

策略III： $R_1 - C_1 - C_2 + W_3$ ；策略V： $W_1 - I_2 - C_2$

再根据表 6 得到企业收益参数大小的关系和表 7 得到养老需求者的参数大小关系得到策略III的总收益大于策略V，所以采用策略III：企业进入养老产业和老人选择机构养老。

## 结果分析：

在我国老年人口数量不断增长的趋势以及独生子女工作压力日益增大的环境下，通过“企业-老人”双方博弈模型，我们可以得到使双方收益最大化的策略，即企业加快进入养老产业，积极发展养老服务事业。需要养老服务的老年人则需要选择合适的机构享受养老服务。针对现有的养老行业现状与策略中描述的双方和谐利益最大化的场景的差距，为了帮助企业发现养老服务业的商机并合理利用从而达到利益最大化，本文搜集整理了以下几点措施：



**措施一：**老年人口逐年增加，市场规模会逐年增大，未来的市场竞争必将更加激烈。想要在养老这个新兴行业中取得领先地位，需要尽早进入市场，夺取市场份额，把握商机。

**措施二：**从第一问的预测模型得到的结果来看，在未来机构养老将会成为养老模式的主流，机构养老相比较其他养老模式对企业的硬实力提出了更高的要求。企业需要在资金充足的情况下完善自身的硬件水平，合理采购硬件设备，利用空窗期减低运营成本。

## 七、 问题三的模型建立与求解

### 7.1 问题的分析

问题三与问题二都需要考虑多方之间的相互博弈，但问题三不同点之处是还需要达成政府和企业双方的战略，并且两者的战略将达成以下三个目标：提供的床位满足社会需求，能够有合理健康的盈利模式使养老行业持续发展，促进社会就业。为了达成三个条件，政府和企业需要进行相互的博弈，同时由于目标还涉及到老年人和急需就业的人员，因此问题不单单只存在政府和企业的双方博弈，而是政府、企业、老年人和失业人员的四方博弈。

### 7.2“政府-企业-养老服务需求者-失业人群”多方博弈模型的建立

政府的政策导向会影响企业的收入和失业人员的求职兴趣，企业的策略会影响失业人员的就业成本和老年人的养老成本，而老年人希望的养老方式又将影响企业的收入进而影响行业的就业率。因此，同问题二求解，优先选择博弈论进行分析，分析参与者、战略、收益函数，以政府、企业、失业人群和养老服务需求者四者作为博弈主体，建立“政府-企业-失业人群-养老服务需求者”四方博弈模型。

#### 7.2.1 参与者与策略

问题三从政府角度出发，需要达到三个目标：提供的床位满足社会需求，能够有合理健康的盈利模式使养老行业持续发展，促进社会就业，和政府和企业双方的战略。由于在养老市场中，政府和企业对养老服务的发展和投入，而养老需求者和失业人群的表现则是是政府和企业发展投入直接的效果，这四者之间存在着博弈关系，于是将以政府、企业、养老服务需求者和失业人群四者作为博弈主体。

面对政府采取积极或者消极的政策策略，企业根据政策选择低端市场还是高端市场发展，失业人群则根据企业提供养老服务的发展选择低端就业还是高端就业的选择，养老服务需求者有居家，社区，机构的选择，这四方主体的策略空间为：

- 1.政府的策略空间：{积极政策，消极政策}
- 2.企业的策略空间：{定位低端，定位高端}
- 3.养老服务需求者的策略空间：{社区养老，居家养老，机构养老}

4.失业人群的策略空间：{就业低端，就业高端}

设博弈参与者： $\Gamma = \{\text{政府，企业，养老服务需求者，失业人群}\}$

博弈参与者的策略空间空间：

$S_1 = \{\text{积极政策，消极政策}\}$   
 $S_2 = \{\text{定位低端，定位高端}\}$   
 $S_3 = \{\text{社区养老，居家养老，机构养老}\}$   
 $S_4 = \{\text{就业低端，就业高端}\}$

7.2.2 收益函数

(1) 政府策略参数

从政府的角度看，政府针对养老行业所做出的策略有以下两种：积极发展养老产业和消极对待养老产业。于是设政府积极支持养老行业的概率为 $Z_1$ ，在积极支持养老事业上政府将对企业和员工等发放补贴 $F_1$ ，并且将通过政府所拥有的宣传手段，投入 $B_1$ 的成本进行养老事业的宣传。则政府对养老事业消极处理的概率为 $1-Z_1$ ，并且政府也会缩减补贴至 $F_2$ ，同时宣传成本也会降低到 $B_2$ 。

通过政府对待养老行业的策略，可以推断出政府的资金投入积极支持养老行业，必然会投入大量的资金用于刺激市场，而消极对待时只需要少量资金维持市场，故 $F_1 > F_2$ 。同理，积极支持时的宣传力度必将大于消极对待时，投入的宣传成本也会增加，故 $B_1 > B_2$ 。因此政府策略参数表如下所示：

表 10 政府策略参数表			
	策略概率	发放补贴	宣传成本
积极	$Z_1$	$F_1$	$B_1$
消极	$1-Z_1$	$F_2$	$B_2$
关系		$F_1 > F_2, B_1 > B_2$	

(2) 企业策略参数

企业的商业模式有多种分类，本文选择以企业的主要目标市场进行分类，即企业选择进入高端市场还是低端市场。设企业进入低端市场并发展亲民化的养老服务的概率为 $X_1$ ，进入低端市场所需要投入的成本为 $C_1$ ，同时可获得 $R_1$ 的收入，并且将亲民度提升到 $D_1$ 。若企业选择进入高端市场，则策略的概率为 $1-X_1$ ，需要投入 $C_2$ 的成本并获取 $R_2$

的收入，同时将企业亲民度提升至  $D_2$ 。

通过对市场众多市场的分析，企业的定位不同，用户数量存在差异，成本和收入的关系不能一概而论。但结合实际市场环境，高端市场的企业纯收入通常大于低端市场的企业，龙头企业通常占据着较大的纯利润。

于是本文设高端市场的纯利润  $R_2 - C_2$  大于低端市场的纯利润  $R_1 - C_1$ 。同时由于低端市场更亲民，企业容易获得更高的亲民度，收到社会捐赠的金额也会更大，计算总收入时也应该考虑到整体的收入，总收入=运营总收入+政府补贴+社会捐赠。于是设进入低端市场的企业总收入大于进入高端市场的  $R_1 - C_1 + D_1 + F_1 > R_2 - C_2 + D_2 + F_2$ 。如下企业策略参数表所示：

表 11 企业策略参数表

	策略概率	运营成本	获得收入	企业亲民度
定位低端	$X_1$	$C_1$	$R_1$	$D_1$
定位高端	$1 - X_1$	$C_2$	$R_2$	$D_2$
关系	$R_2 - C_2 > R_1 - C_1, R_1 - C_1 + D_1 + F_1 > R_2 - C_2 + D_2 + F_2$			

### (3) 失业人群策略参数

在养老服务市场中，企业积极投入市场对于失业人群可以提供更多的就业机会，而失业人群根据养老服务行业企业定位进行选择，可以选择就业标准较低的养老院就业和选择需要进一步学习考察的高标准养老院就业，设选择定位低端就业概率为  $Q_1$ ，就业成功率为  $G_1$ ；选择定位高端就业为  $Q_2$ ，就业成功率为  $G_2$ 。

显然门槛较低的工作受众面更广，更多失业人群可以获得工作，而相对门槛较高的工作，对就业人群要求更高，需要就业者进行一定的学习考察，所以选择定位低端的就业概率大于选择定位高端概率，表示为  $Q_1 > Q_2$ ， $G_1 > G_2$ 。那么失业人群策略参数表如下所示。

表 12 失业人群策略参数表

	策略概率	就业成功率
就业低端	$Q_1$	$G_1$
就业高端	$Q_2$	$G_2$

### (4) 养老需求者策略参数

问题三与问题二中的养老服务需求者相同，于是采用问题二中养老服务需求者参数表

表 13 养老服务需求者参数表

	策略概率	成本	幸福指数
社区	$Y_1$	$I_1$	$W_1$
居家	$Y_2$	$I_2$	$W_2$
机构	$1-Y_1-Y_2$	$I_3$	$W_3$
关系	$Y_2 > Y_1 > 1-Y_2-Y_1; W_1 > W_2 > W_3; I_3 > I_1 > I_2$		

对政府、企业、养老服务需求者和失业人群这四方博弈参与者的策略空间进行排列组合，得到 24 种策略组合，通过博弈树来表示 24 种策略组合的排列，如下图所示：

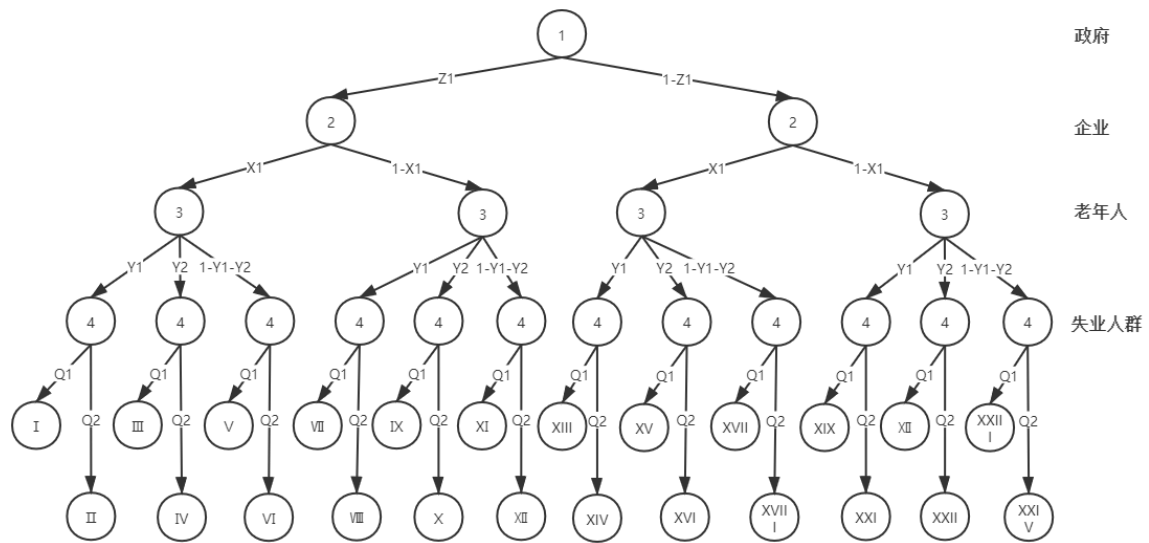


图 4 “政府-企业-养老服务需求者-失业人群”多方博弈树图

由于策略组合较多，在此列举部分策略组合：策略I：积极政策，定位低端，居家养老，就业低端；策略II：政府积极，定位低端，社区养老，就业低端；策略III：政府积极，定位低端，机构养老，就业低端；策略IV 政府积极，定位低端，居家养老，就业低端；策略V：政府积极，定位高端，居家养老，就业低端。

分别设四个主体的收益函数为：

$$1. \text{政府的收益函数 } u_1 = u_1\{s_1, s_2, \dots, s_{d_1}\} \quad d_1 = 2$$

$$2. \text{企业的收益函数 } u_2 = u_2\{s_1, s_2, \dots, s_{d_2}\} \quad d_2 = 2$$

$$3. \text{老人的收益函数 } u_3 = u_3\{s_1, s_2, \dots, s_{d_3}\} \quad d_3 = 3$$

$$4. \text{失业人群的收益函数 } u_4 = u_4\{s_1, s_2, \dots, s_{d_4}\} \quad d_4 = 2$$

为了得到多方最大利益化，还需要将策略的表示出，四个博弈参与者收益函数之和于是设四方博弈参与者策略组合的总收益函数：

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = u\{s_1, s_2, \dots, s_d\} \quad d = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4。$$

建立政府、企业、养老服务需求者和失业人群多方博弈的标准式博弈模型：

$$G = \{S_1, S_2, S_3, S_4; u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

其中博弈模型的解——纳什均衡，在  $G = \{S_1, S_2, S_3, S_4; u_1, u_2, u_3, u_4\}$  中，当收益之和最大时，即  $s^* \geq u\{s_1, s_2, \dots, s_d\}$ ， $s^*$  对应的策略组合是博弈的解。

### 7.3 博弈分析模型求解

问题三相比问题二博弈参与者的因素更多，对策略组合的各个博弈参与者收益求解，举例说明策略 1：政府积极参与养老业，企业选择发展低端养老业，失业人员选择进入低端养老业，老人选择居家养老。在策略 1 中，政府的收益=负的政府的补贴+负的政府的宣传成本，表示为  $-F1-B1$ ，企业的收益=政府的补贴-运营的成本+运营的收入+企业获得的亲民度，表示为  $F1-C1+R1+D1$ ，老人的收益=支出的成本+获得的幸福指数，表示为  $-I2+W2$ ，失业人口获得的收益为就业成功率，表示为  $G1$ ，如下表 14 策略 I 中表示所示，其他策略收益表示求解相同，具体收益表示见下表

表 14 问题三多方博弈者的收益矩阵

		政府积极				政府消极			
		低端		高端		低端		高端	
就 业 低 端	居 家	$-F1-B1$	I	$-F1-B1$	II	$-F2-B2$	III	$-F2-B2$	IV
		$F1-C1+R1+D1$		$F1-C2+R2+D2$		$F2-C1+R1+D1$		$F2-C2+R2+D2$	
		$-I2+W2$		$-I2+W2$		$-I2+W2$		$-I2+W2$	
		$G1$		$G1$		$G1$		$G1$	
	社 区	$-F1-B1$	V	$-F1-B1$	VI	$-F2-B2$	VII	$-F2-B2$	VIII
		$F1-C1+R1+D1$		$F1-C2+R2+D2$		$F2-C1+R1+D1$		$F2-C2+R2+D2$	
		$-I1+W1$		$-I1+W1$		$-I1+W1$		$-I1+W1$	
		$G1$		$G1$		$G1$		$G1$	
	机 构	$-F1-B1$	IX	$-F1-B1$	X	$-F2-B2$	XI	$-F2-B2$	XII
		$F1-C1+R1+D1$		$F1-C2+R2+D2$		$F2-C1+R1+D1$		$F2-C2+R2+D2$	
		$-I3+W3$		$-I3+W3$		$-I3+W3$		$-I3+W3$	
		$G1$		$G1$		$G1$		$G1$	
就 业 高 端	居 家	$-F1-B1$	XIII	$-F1-B1$	XIV	$-F2-B2$	XV	$-F2-B2$	XVI
		$F1-C1+R1+D1$		$F1-C2+R2+D2$		$F2-C1+R1+D1$		$F2-C2+R2+D2$	
		$-I2+W2$		$-I2+W2$		$-I2+W2$		$-I2+W2$	
		$G2$		$G2$		$G2$		$G2$	

社 区		$-F1-B1$	XVII	$-F1-B1$	XVIII	$-F2-B2$	XIX	$-F2-B2$	XX
		$F1-C1+R1+D1$		$F1-C2+R2+D2$		$F2-C1+R1+D1$		$F2-C2+R2+D2$	
		$-I1+W1$		$-I1+W1$		$-I1+W1$		$-I1+W1$	
		$G2$		$G2$		$G2$		$G2$	
	机 构	$-F1-B1$	XXI	$-F1-B1$	XXII	$-F2-B2$	XXIII	$-F2-B2$	XXIV
		$F1-C1+R1+D1$		$F1-C2+R2+D2$		$F2-C1+R1+D1$		$F2-C2+R2+D2$	
		$-I3+W3$		$-I3+W3$		$-I3+W3$		$-I3+W3$	
		$G2$		$G2$		$G2$		$G2$	

### 改进的纯策略均衡分析法

通过问题二的求解可知，策略需要达到纳什均衡，其中必有某一策略主体的收益函数在横向或纵向上达到最大值。由于问题三的策略主体较多，同时各策略的收益函数呈现出高度的周期性，采用传统的纯策略均衡分析法计算量较大，求解较为复杂，在此需要先进行数据预处理，则改进的纯策略均衡分析法步骤如下：

**step1:** 针对任意策略主体 X 的收益函数，在整个收益矩阵中横向寻找最大值，并将包含最大值的策略组筛选出来作为目标策略组 C1。

**step2:** 以同样的方式，针对任意策略主体 X 的收益函数，在整个收益矩阵中纵向寻找最大值，并将包含最大值的策略组筛选出来作为目标策略组 C2。

**step3:** 由于符合纳什均衡的策略必定在横向和纵向中都存在某一策略主体的收益函数得到最大值，因此将策略组 C1 和 C2 的交集作为预处理的结果。至此，预处理结束。

**step4:** 使用初始的纯策略均衡分析法，对预处理的结果进行逐步分析，最终得到满足纳什均衡的策略组。

对上述表 14 问题三多方博弈者的收益矩阵进行改进的纯策略均衡分析法分析，具体分析过程如下：

首先选择收益矩阵中的政府收益函数，其最大值为  $-F1-B1$ ，其对应的策略为 I, II, V, VI, IX, X。而针对企业收益函数，其最大值为  $F1-C1+R1+D1$ ，其对应的策略为 I, V, IX, XIII, XVII, XXI。

然后选择失业人群的收益函数，其最大值为  $G1$ ，其对应策略为 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII。而老年人的收益函数，因其比值关系无法判断，故不能找出最大值。

最后将上述策略进行合并取交集，得到最终的策略组为 I, V, IX。至此，预处理结束。

### 改进的纯策略均衡分析的结果：

针对策略 I，其在横向上政府收益达到最大，在纵向上失业人群收益达到最大，满足纳什均衡。

针对策略 V，其在横向上政府收益同样达到最大，在纵向上失业人群收益达到最大，满足纳什均衡。

针对策略 IX，其在横向上政府收益达到最大，在纵向上失业人群收益也达到最大，

满足纳什均衡。

综上所述，满足纳什均衡的策略组为I， V， IX。

根据政府、企业、养老服务需求者和失业人群四者的参数大小关系，得到满足纳什均衡的策略组为I， V， IX的条件纯策略组合，如下表所示。

表 15 条件纯策略组合表

策略组合	条件纯策略组合表	策略组合
I	$-F1-B1 > -F2-B2$	政府积极参与养老业
	$-I2+W2+P2 > -I1+W1+P1$	企业发展低端养老业
	$-I2+W2+P2 > -I3+W3+P3$	老年人选择居家养老
	$G1 > G2$	失业人群选择低端就业
V	$-F1-B1 > -F2-B2$	政府积极参与养老业
	$-I2+W2+P2 > -I1+W1+P1$	企业发展低端养老业
	$-I2+W2+P2 > -I3+W3+P3$	老年人选择社区养老
	$G1 > G2$	失业人群选择低端就业
IX	$-F1-B1 > -F2-B2$	政府积极参与养老业
	$-I2+W2+P2 > -I1+W1+P1$	企业发展低端养老业
	$-I2+W2+P2 > -I3+W3+P3$	老年人选择机构养老
	$G1 > G2$	失业人群选择低端就业

根据改进后的纯策略均衡分析法得到策略I， V， IX各自的收益都最大化，再考虑四方的总收益最大化。通过表 14-24 种策略组合总收益表中得到策略I， V， IX的总收益表达式，如下表 18 所示：

表 16 策略 I ， V ， IX总收益表

策略组合	总收益	策略组合
I	$-I1+W1+P1$	政府积极参与养老业
		企业发展低端养老业
		老人选择居家养老
		失业人群选择低端就业
V	$-I2+W2+P2$	政府积极参与养老业
		企业发展低端养老业
		老人选择社区养老
		失业人群选择低端就业
IX	$-I3+W3+P3$	政府积极参与养老业
		企业发展低端养老业
		老人选择机构养老
		失业人群选择低端就业

由表 17 条件纯策略组合表可以得到 $-I2+W2+P2 > -I1+W1+P1$ ，因此，策略I的 $-I2+W2+P2 > -I3+W3+P3$

总的收益大于策略V和策略IX，所以采用策略I：政府积极参与养老业，企业发展低端养老业，老人选择居家养老，失业人员选择低端就业。

## **商业模式分析**

### **(1) 用户模式**

在未来养老服务事业发展的过程中，需要基本满足社会需求，就应当需要满足不同用户的需求，针对养老服务需求者，需要考虑到适合不同类型的老年人的养老方式，针对失业人群，可以通过养老服务事业的发展增加就业机会。

### **(2) 产品模式**

目前我国养老模式主要分为居家养老、社区养老以及机构养老三种，传统的居家养老已经渐渐不足以满足当今社会发展的需要，机构养老将成为养老体系中的关键。

居家养老，居家养老仍是当今社会的主流养老形式，选择居家养老的老年人主要依靠老年人自身收益以及儿女的赡养。

社区养老介于居家养老以及机构养老之间，老人选择在家住宿，享受政府提供补贴以及其他上门服务等。

机构养老是未来养老体系中的关键，选择机构养老的老年人享受养老院等养老服务业提供的衣食住行以及其他的生活保障。

### **(3) 盈利模式**

为实现养老产业的可持续发展，行业必须建立和谐健康的盈利模式，使行业趋于稳定。针对现有的养老服务业，主要的盈利模式为以下三点。

#### **1.政府的支持**

根据《国务院关于加强发展养老服务业的若干意见》，国家目前正在大力推行养老服务业的建设，针对从事养老服务业的企业，政府会出台一系列政策用于见面税收，加大扶持力度等用于刺激市场。此时企业如果进入养老市场必定也能享受到政府红利。

#### **2.社会捐赠**

养老产业是一个发展社会福利，建设和谐社会的重要产业。企业大力发展养老产业将获得高度的社会关注度，同时会增加企业的亲民性，增大社会对企业的爱心捐赠，从而达到“社会向企业捐赠，企业通过服务回馈社会”的良好循环。

#### **3.市场需求大，增加营收**

通过对未来养老市场的预估，养老市场将会逐年增加。在当前的高速发展期，政府大力宣传将吸引更多资本进入市场，企业的进入也将增加自身竞争力，同时刺激消费，增加自己的营业收入。

### **(4) 运营模式**

#### **1. 加强对养老模式的宣传**

依靠政府积极发展养老产业的政策的情形，加强宣传养老机构模式，对养老需求者进行养老服务进行合理选择。进一步加强对传统养老模式的观念和消除对养老服务的偏见，引导分明进行合理选择养老服务，同时加强对社会资本和鼓励，推动养老机构的规模发展。

#### **2. 强化养老护理人员的建设**

政府加快养老护理的职业化和建设，加大力度促进老年护理专业教学和研究工作，对养老服务发展提供优秀的人才。企业加强正规的护理培训课程，完善养老服务体系，改善护理人员的工作条件和工作环境。

#### **3. 促进家庭养老与机构的配合**

对于机构养老来说是对家庭养老的一种延伸，老人对家庭概念深刻，更希望能在家中养老，机构需要连接破家庭养老和机构养老的脱离关系，促进家庭养老与机构的配合，提高老年人对机构养老的满意度。



## 八、 问题四的模型建立与求解

### 8.1 问题的分析

本篇论文针对养老服务业现有的实际问题提出了一系列解决方法，运用了多元线性回归和灰色系统理论，得到养老服务床位数量增长规律，预测了未来的养老业发展趋势，并结合各地区的老年人口分布对未来养老服务床位数量进行预测和分类；再利用博弈理论，分别从企业的角度和政府的角度提出两种博弈关系，分析归纳出市场中政府、企业、老人和护理人员的利益冲突和利益相关，进行纯策略博弈分析，选出作出合理的策略使市场各方收益均衡、可持续发展，老年人老有所依，就业率稳步提高。

### 8.2 建议

尊敬的政府机构：

你们好！

养老服务业的发展是当今社会每个现代国家都需要发展的福利事业，每年的老龄人口数量都在不断上升，我国也即将进入老龄化社会，养老服务床位是一个亟待解决的问题，发展养老业刻不容缓。政府在养老行业发展中充当着重要的角色，我们根据养老床位数量现状以及老年人口数量、消费等因素进行了量化分析以及数学模型的建立，较真实地分析了未来养老行业的发展，并对养老行业提出了合理的规划与建议。

我们通过查阅相关资料对老年人口数量、老年人口比例和消费水平等数据进行量化，并通过建立合适的模型预测了 2020 年对养老床位的需求数量。从结果来看，社会对养老床位的需求逐年增大，养老市场不能满足人民需求，政府和企业都应该加大对养老业的扶植和投资。

通过分析企业与老年人在养老市场的利益关系，企业更倾向与老年人选择机构养老，进而从中把握商机，获得收益，创造价值。但同时机构养老的费用也足以让大多数老年人望而却步，转而选择成本更低的居家养老。针对这种企业和老年人的利益冲突，政府应该对企业进行补贴，出台优惠政策帮助企业降低机构养老成本；企业也需要发展新模式，将机构养老和居家养老相结合，使老年人能够花费较少的费用享受到高质量的养老服务。

随着养老服务业的高速发展，就业机会也将不断增多。通过对市场的调研，现有的护理人员多是从从事于低端护理行业，自身能力的不足使得护理人员难以进入高端市场。同时当今社会已进入互联网时代，老年人也开始追求高效专业个性化的服务。老人在“老有所依”的基础上还提出了“老有所学”和“老有所乐”等要求。结合上述实际情况，护理人员素质亟待提高，政府应该呼吁开展公共的护理培训课程，鼓励普通护理人员学习成为高端护理人才；企业则应该在员工中增加培训机会，给低端护理人员提供更多的升职机会。

相信通过以上的措施和建议，并制定合理的养老服务发展规划，可以提供更多的养老服务床位，为企业创造“商机”，帮助企业在获取收益的同时，创造社会价值，并且让老年人享受到最优质的服务。

XXX 团队

2020 年 XX 月 XX 日

## 九、 模型的评价

### 9.1 模型的优点

**问题一：**根据统计公报、国家统计局的相关资料，提出了反映现有数据和养老床位关系的多元回归方程，且计算效果好。同时使用灰色系统理论，提取了多元函数的主要影响因素，增加自变量因变量关联性，简化了多元回归方程。并运用了一元拟合进行求解，使结果误差减小。

**问题二：**为寻找和分析商机，基于企业和养老服务需求者之间的利益冲突与影响，建立了“企业-老人”双方博弈模型，并对双方的影响因素进行合理划分，降低复杂度且不损失模型准确性。

**问题三：**问题三需要分析四个博弈主体的利益关系，于是将问题二的模型进行改进，建立“政府-企业-老人-失业人群”四方博弈模型，增加了博弈主体和影响因素，提高模型的完整性。在求解过程中为了避免增加的博弈主体和影响因素带来的计算量的增加，使用了改进的纯策略分析法，简化了计算流程，提高了求解效率。

### 9.2 模型的缺点

本文利用灰色系统理论提取了主要的影响参数，剔除了多元回归方程的相关性较小的参数，提高了结果准确性，同时也增加了求解的步骤，使模型复杂化。而且博弈模型中博弈主体选择较多，影响参数设置齐全，若不使用改进的纯策略分析法，模型计算量会极大，不利于计算求解。

## 参考文献

- [1]张娟,周建芳. 中国老年人口失能地区分布[J]. 中国老年学杂志,2019,39(06):1451-1454.
- [2].《国务院关于加快发展养老服务业的若干意见》正式对外公布[J].求贤,2013(9):49-49.
- [3]东方财富网,《2019 年中国养老产业市场分析: 养老机构两大难题待解, 统筹推进医养结合发展》<https://baijiahao.baidu.com/s?id=1628958360254121822&wfr=spider&for=pc>, 2020.5.25
- [4]司守奎,孙兆亮.数学建模算法与应用[M].北京:国防工业出版社,2015
- [5]赵静,但琦. 数学建模与数学实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [6]杨敏慧. 居家养老服务市场中的博弈分析[J]. 法制与社会,2019(21):143-145+154.
- [7]徐明江,赵云仙,尤剑鹏,王碧艳,黎赵. 南宁市老年人社区居家养老意愿及影响因素研究[J]. 中国全科医学,2020,23(18):2328-2334.
- [8]姜启源, 谢金星, 叶俊.数学模型[M].北京:高等教育出版社,2011

附录

- 附录 1：我国各个省失能和非失能老年人口比数据表
- 附录 2：各个省份的失能与非失能老年人分配床位数据表
- 附录 3：程序代码

我国各个省失能和非失能老年人口比数据表

省份	老年人口数 (万人)	失能老人 (万人)	失能率 (%)	不同失能等级占比 (%)		
				轻度失能	中度失能	重度失能
安徽	624.42	95.25	15.25	73.23	10.81	15.96
北京	126.78	9.11	7.18	100.00	0.00	0.00
福建	564.61	42.56	7.54	73.79	12.57	13.64
甘肃	375.00	97.59	26.02	83.13	8.23	8.64
广东	609.61	67.74	11.11	76.46	10.24	13.30
广西	506.95	75.29	14.85	68.63	12.23	19.14
贵州	186.69	10.62	5.69	78.23	21.77	0.00
河北	742.92	77.58	10.44	73.95	10.35	15.70
河南	839.45	161.33	19.22	68.13	17.71	14.16
黑龙江	198.69	40.66	20.46	47.85	34.20	17.95
湖北	338.43	33.47	9.89	86.58	7.47	5.95
湖南	636.26	107.32	16.87	80.67	5.36	13.97
吉林	226.61	40.08	17.69	71.75	0.00	28.25
江苏	637.56	80.43	12.62	67.97	18.25	13.78
江西	1237.50	87.02	7.03	71.96	12.18	15.86
辽宁	333.33	58.28	17.48	81.47	10.61	7.92
内蒙古	308.09	63.45	20.59	68.15	13.98	17.87
青海	121.73	1.88	1.54	100.00	0.00	0.00
山东	945.29	151.46	16.02	73.10	14.98	11.92
山西	362.18	106.71	29.46	77.54	10.63	11.83
陕西	473.51	93.47	19.74	75.67	12.31	12.02
上海	111.48	9.06	8.12	65.47	0.00	34.53
四川	1956.66	168.68	8.62	73.33	12.20	14.47
天津	68.02	21.37	31.42	85.45	14.55	0.00
新疆	141.22	20.35	14.41	63.48	20.57	15.95
云南	1419.10	110.85	7.81	69.06	23.86	7.08
浙江	521.47	45.25	8.68	79.86	8.20	11.94
重庆	248.36	27.53	11.08	71.19	12.73	16.08
总计	14861.92	1904.38	12.81	73.59	13.04	13.37

各个省份的失能与非失能老年人分配床位数据表

省份	非失能老人床位	失能老人床位
安徽	51.23669	9.222547
北京	11.39335	0.882072

福建	50.5473	4.120857
甘肃	26.86012	9.449116
广东	52.46637	6.558901
广西	41.79532	7.289927
贵州	17.04791	1.028278
河北	64.4213	7.511655
河南	65.65872	15.62072
黑龙江	15.3012	3.93689
湖北	29.52764	3.240721
湖南	51.21442	10.39122
吉林	18.0607	3.880731
江苏	53.94391	7.787606
江西	111.3948	8.42568
辽宁	26.63162	5.64294
内蒙古	23.68718	6.143523
青海	11.60443	0.18203
山东	76.8623	14.66506
山西	24.73579	10.33216
陕西	36.79723	9.050199
上海	9.916779	0.877231
四川	173.1205	16.33238
天津	4.516869	2.069142
新疆	11.70319	1.970381
云南	126.6708	10.73301
浙江	46.10983	4.381315
重庆	21.38178	2.665582

附录 3：程序代码
灰色处理得到最大关联度的因素
%灰度处理，找到相关性最大的 %在归一化之前要注意因素变化产生的是正影响还是负影响 clc clear close all%每一行为一项指标，每一列为一年的所有指标 y = xlsread('data.xlsx');%读取数据  yyy = [];  for i = 1:8 yy = (y(:,i)-min(y(:,i)))/(max(y(:,i))-min(y(:,i)));%归一化 yyy = [yyy,yy]; end  y = yyy;

```

y = [y(:,8),y(:,1:7)];
y = y';
[m,n]=size(y);
y1=mean(y');%对每一项指标求均值
y1=y1';%转置为一列
for i=1:m
for j=1:n
y2(i,j)=y(i,j)/y1(i);
end
end    %均值化变换
for i=2:m
for j=1:n
y3(i-1,j)=abs(y2(i,j)-y2((i-1) ,j));
end
end    %差序列,其中元素均大于 0 小于 1
a=1;b=0;
for i=1:m-1
for j=1:n
if(y3(i,j)<=a)
a=y3(i,j);%a 为最小值
elseif(y3(i,j)>=b)
b=y3(i,j);%b 为最大值
end
end
end
for i=1:m-1
for j=1:n
y4(i,j)=(a+0.5*b)/(y3(i,j)+0.5*b);
end
end
y5 = sum(y4')/(n-1);
%% 说明输入一个矩阵, 给出其第一行和下面每一行的关联性

y6 = (y5-min(y5))/(max(y5)-min(y5));

```

绘制预测和实际数值

```

clear;%绘制预测和实际数值
clc;

data = xlsread('data.xlsx');%读取数据
data = data(1:7,:);%取 10-16 年
dataa = [ones(7,1),data(:,1),data(:,2),data(:,3)];%取相关度高的数据
answer = data(:,8);

[b,bint,r,rint,stats]=regress(answer,dataa);%多元求解
Answer = data(:,1).*b(2)+data(:,2).*b(3)+data(:,3).*b(4)+b(1);

```

<pre> year = 2010:2016; title('2010 年-2016 年养老业床位数量'); plot(year,Answer); hold on; plot(year,answer'); legend('计算值','实际值'); xlabel('年份'); ylabel('万张'); </pre>
预测 2020 各因素的值
<pre> clear;%预测 2020 年人口和 clc; data = xlsread('data.xlsx');%读取数据  renkou = data(:,1); bizhong = data(:,2); xiaofei = data(:,3); aaa = data(:,8); year = 1:7;  p1 = 1.258; p2 = 15.68; p3 = 327.3; p4 = 1.155e+04; x = 11; ren2020 = p1*x^3 + p2*x^2 + p3*x + p4;  p1 = 0.0002525; p2 = 0.01623; p3 = 0.1898; p4 = 8.679; x = 11; bi2020 = p1*x^3 + p2*x^2 + p3*x + p4;  p1 = 114.3; p2 = 1012; x = 11; xiao2020 = p1*x+p2;  aa = [-1557.55;0.339;-209.612;-0.269];  Answer = ren2020*aa(2)+bi2020*aa(3)+xiao2020*aa(4)+aa(1); </pre>
计算各省份的分配数量
<pre> clear;%计算各省份的分配数量 clc;  data = xlsread('data.xlsx','Sheet2','C6:D34');%读取数据 </pre>

```
dataa = [data(1:28,1)-data(1:28,2),data(1:28,2)];  
chuang = 1439;  
all = data(29,1);  
  
sheng = data(1:28,1)./all*chuang;  
shi = [sum(dataa(:,1))/all,sum(dataa(:,2))/all]*chuang;  
zong = dataa./all*chuang;
```