1. Movimiento

2. Movimiento bi y tridimensional

El desplazamiento será un vector con más de una componente distinta de cero:

$$\Delta\vec{r} = \Delta r_x \hat{x} + \Delta r_y \hat{y} + \Delta r_z \hat{z}. \tag{1}$$

Si el movimiento se restringe a un *movimiento bidimensional* una de las componentes del vector desplazamiento se anula. Por simplicidad, asumiremos que $\Delta r_z = 0$. En esta situación la partícula se mueve a lo largo de una curva en el plano-xy.

Consideraremos que el desplazamiento del objeto en el intervalo Δt es $\Delta\vec{r}$. Si el intervalo de tiempo es finito, entonces es posible definir la **velocidad promedio** del movimiento en el plano-xy como:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}\hat{x} + \frac{\Delta r_y}{\Delta t}\hat{y} = \bar{v}_x \hat{x} + \bar{v}_y \hat{y}. \tag{2}$$

La magnitud del vector $\Delta\vec{r}$ es siempre la distancia entre los puntos P y Q, independiente de la trayectoria real efectuada por el móvil.

Si consideramos el límite en que el intervalo de tiempo tiende a cero podremos definir la **velocidad instantánea** como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta r_x}{\Delta t}\hat{x} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta r_y}{\Delta t}\hat{y} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}. \tag{3}$$

De esta forma la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria de la partícula en el plano$-xy$, en cada punto de la trayectoria.

2.1. Alcance horizontal y altura máxima en el lanzamiento de un proyectil con MUA en eje $\hat{y}$

En el lanzamiento de un proyectil la aceleración es constante e igual a la aceleración de gravedad, $\vec{g}$, que está dada por:

$$\vec{g} = -g\hat{y}, \tag{4}$$

con $g \approx 9{,}8 m/s^2$. Por lo tanto, tenemos que

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2. \tag{5}$$

En este caso particular las expresiones para las componentes de la velocidad y posición se reducen a:

$$v_x = v_0 \cos\theta, \tag{6}$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt, \tag{7}$$

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)t, \tag{8}$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)t - \frac{g}{2}t^2, \tag{9}$$

donde, por simplidad, hemos asumido que $t_0 = 0$.

La altura máxima se obtiene cuando la velocidad en el eje $\hat{y}$ se anula, es decir, en el tiempo

$$t_{\max} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}. \tag{10}$$

Evaluamos la ecuación para y en este tiempo, el resultado es:

$$y = y_0 + \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}. \tag{11}$$

El **alcance**, R, corresponde al tiempo en que la partícula alcanza el suelo, es decir, $y = 0$, lo que determina una *ecuación cuadrática* para el tiempo, cuyas soluciones son:

$$t = \frac{1}{g}\left[v_0 \sin\theta \pm \left(v_0^2 \sin^2\theta + 2gy_0\right)^{1/2}\right]. \tag{12}$$

Sólo la solución positiva nos da el alcance máximo. Reemplazando este tiempo en la ecuación para x se obtiene:

$$R = x - x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2 \sin^2\theta}}\right]. \tag{13}$$