Solución de ecuaciones algebraicas y trascendentes: Método de bisección

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Introducción. Definición del método. Interpretación geométrica. Criterio de convergencia. Ejemplo de aplicación.

1. Introducción

El método de bisección se aplica a funciones algebraicas o trascendentes y proporciona únicamente raíces reales. Tiene su origen en un popular algoritmo de búsqueda de datos en arreglos vectoriales denominado *búsqueda binaria*. Es un método cerrado, es decir, requiere de un intervalo en el cual esté atrapada una raíz. Básicamente, consiste en cortar el intervalo en dos justo por la mitad (bisectar) considerando a este punto como una aproximación de la raíz de la función. Posteriormente, debe determinarse si la raíz verdadera se encuentra a la derecha o a la izquierda de la aproximación y, según corresponda, cerrar el intervalo con la aproximación y el límite derecho o izquierdo, pero siempre manteniendo a la raíz verdadera en el intervalo. Esta operación se repite hasta que la diferencia entre las dos últimas aproximaciones sea menor que una tolerancia preestablecida.

Bisección es un método robusto, aunque resulta lento en su proceso por lo oneroso de los cálculos que deben realizarse; por otra parte, su convergencia puede en ocasiones ser inestable.

2. Definición del método

A partir [1] de una función algebraica o trascendente y de un intervalo $[a, b]$ que pertenece al dominio de la función y para el cual $f(a) \cdot f(b) < 0$, lo que implica que en el intervalo $[a, b]$ existe al menos una raíz. El método consiste en bisectar el intervalo $[a, b]$:

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

*Facultad de Ingeniería, UNAMProfesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

obteniendo una aproximación a la raíz x_0; la función se valúa en este nuevo valor y de acuerdo al signo de la función valuada en este punto, deberá sustituirse uno de los extremos del intervalo de búsqueda, de tal forma que se conserve que $f(a) \cdot f(b) < 0$. De acuerdo a la geometría de la figura, la sustitución de los intervalos deberá hacerse de la siguiente forma:

Sea a tal que $f(a) > 0$ y b tal que $f(b) < 0$:

- Si $f(x_0) > 0$, entonces x_0 sustituye a a
- Si $f(x_0) < 0$, entonces x_0 sustituye a b

En cada iteración deberá sustituirse alguno de los límites del intervalo que contiene a la raíz. Repitiendo este proceso, el intervalo se reduce paulatinamente hasta que alguna de las aproximaciones coincide razonablemente con la raíz de la función.

El proceso se detiene cuando entre la aproximación x_i y la aproximación anterior x_{i-1} se satisface un nivel de error (absoluto o relativo) preestablecido (tolerancia).

3. Interpretación geométrica

En la figura 1 puede observarse el intervalo $[a, b]$ en el cual está contenida una raíz de la función. Para este caso, se observa también que $f(a) > 0$ y que $f(b) < 0$ como consecuencia de la raíz contenida en el intervalo; este desarrollo es válido si se desea definir una función decreciente en lugar que la creciente que se propone, pero en todo caso debe conservarse que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

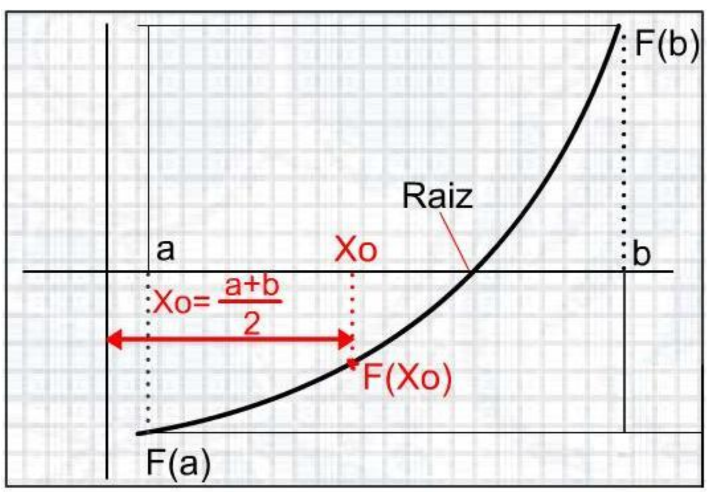

Figura 1: Bisectación del intervalo $[a, b]$

Para el caso mostrado, al bisectar el intervalo se observa que la primera aproximación x_0 se ubicó a la derecha de la raíz y por consecuencia $f(x_0) < 0$; en virtud de esto, x_0 deberá sustituir al extremo del intervalo b, de acuerdo a la figura 2. Una vez hecha esta sustitución, deberá bisectarse el nuevo intervalo hasta que dos aproximaciones sucesivas satisfagan la tolerancia preestablecida.

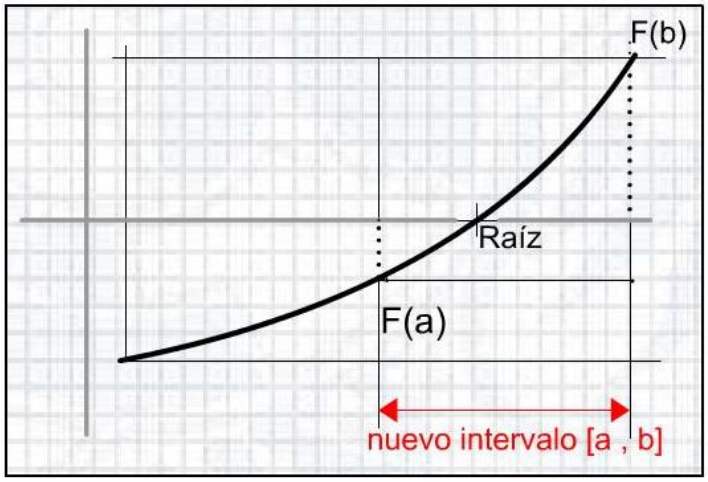

Figura 2: Actualización del intervalo $[a, b]$

4. Criterio de convergencia

En todo caso, el método convergerá siempre y cuando en toda iteración se conserve: $f(a) \cdot f(b) < 0$.

5. Ejemplo de aplicación

Consideremos como ejemplo una función sencilla que nos permita verificar resultados fácilmente. Se propone $f(x) = x^2 - 0{,}5$. Se percibe que este polinomio de segundo grado representa a una parábola que abre hacia arriba; naturalmente, posee dos raíces cuyos valores son $\pm\sqrt{0{,}5}$.

Ahora bien, suponiendo desconocida esta información, se realizará la exploración de 9 función para encontrar sus raíces. El paso más recomendado es graficar la función.

A partir de la figura 3 se perciben los intervalos que atrapan a cada una de las raíces: $[-1, 0]$ y $[0, 1]$. Se propone obtener la raíz negativa y al mismo tiempo la obtención de la raíz positiva queda como ejercicio para practicar el método.

Siendo nuestro intervalo de búsqueda $[-1, 0]$ y la función valuada en sus extremos como $f(-1) = 0{,}5$ y $f(0) = -0{,}5$, se observa que se comprueba el criterio de convergencia $(f(a) \cdot f(b) < 0)$ y que $a = -1$ y $b = 0$, por lo tanto la primera aproximación a la raíz es:

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+0}{2} = -0{,}5$$

Valuando la función en esta nueva aproximación se obtiene:

$$f(x_0) = -0{,}25$$

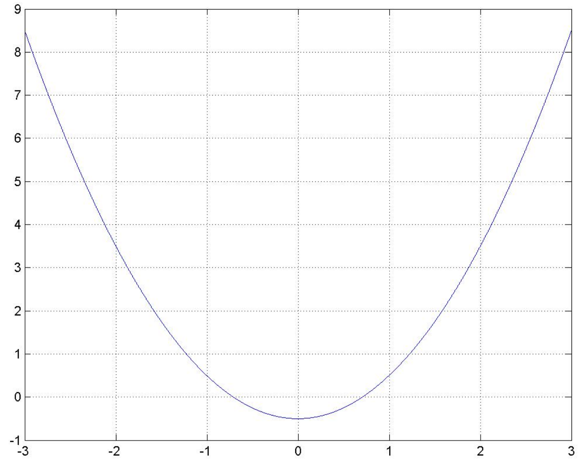

Figura 3: $f(x) = x^2 - 0{,}5$

Ya que la función valuada en la primera aproximación es de signo negativo, el intervalo se cerró por la derecha y corresponde sustituir el límite a por x_0, es decir: $b \leftarrow x_0$. El nuevo intervalo que atrapa la raíz y que cumple con el criterio de convergencia es $[-1, -0{,}5]$.

En una nueva iteración, el proceso se realiza de nuevo:

$$x_1 = \frac{(-1) + (-0{,}5)}{2} = -0{,}75$$

$$f(x_1) = 0{,}0625$$

La función valuada resulta ahora de signo positivo, lo que obliga a que $a \leftarrow x_1$ y el nuevo intervalo que atrapa la raíz y que cumple con el criterio de convergencia es $[-0{,}75, -0{,}5]$. Asimismo, en esta nueva iteración se observa que la función valuada en ella tiende a cero, señal inequívoca que x_1 es una aproximación a la raíz.

Por otra parte, el error absoluto E entre las dos aproximaciones es:

$$E = \mid x_1 - x_0 \mid = \mid (-0{,}75) - (-0{,}5) \mid = 0{,}25$$

Cuando este error E cumpla con una tolerancia preestablecida, el método se detiene y la última x_i obtenida será considerada como la raíz de $f(x)$. En el cuadro 1 se muestra la evolución del método.

Como conclusión podemos afirmar que con una tolerancia absoluta de $E = 0{,}00781$ la raíz de $f(x) = x^2 - 0{,}5$ es $x = -0{,}70703$ obtenida en ocho iteraciones.

Por motivos de espacio no se presenta una cantidad mayor de iteraciones; no obstante, repitiendo el método para una tolerancia absoluta de $E = 0{,}0001$ se obtiene que la raíz es $x = -0{,}70712$ en quince iteraciones.

Cuadro 1: Solución al ejemplo

Iteraciones	0	1	2	3	4	5	6	7
a	-1	-1	$-0{,}75$	$-0{,}75$	$-0{,}75$	$-0{,}71875$	$-0{,}71875$	$-0{,}71094$
b	0	$-0{,}5$	$-0{,}5$	$-0{,}625$	$-0{,}6875$	$-0{,}6875$	$-0{,}70313$	$-0{,}70313$
$f(a)$	$0{,}5$	$0{,}5$	$0{,}625$	$0{,}625$	$0{,}625$	$0{,}01660$	$0{,}01660$	$0{,}00543$
$f(b)$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$-0{,}25$	$-0{,}1938$	$-0{,}02734$	$-0{,}02734$	$-0{,}00562$	$-0{,}00562$
Convergencia	Cumple	Cumple	Cumple	Cumple	Cumple	Cumple	Cumple	Cumple
x_i	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}625$	$-0{,}6875$	$-0{,}71875$	$-0{,}70313$	$-0{,}71094$	$-0{,}70703$
$f(x_i)$	$-0{,}25$	$0{,}625$	$-0{,}10938$	$-0{,}02734$	$0{,}01660$	$-0{,}00562$	$0{,}00543$	$-0{,}00011$
Error	-	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$-0{,}125$	$0{,}0625$	$0{,}03125$	$0{,}01563$	$0{,}00781$

6. Conclusiones

Como se mencionó en su oportunidad, bisección es un método robusto y muy fácil de programar como podrá constatarse en el algoritmo que acompaña a este texto. Su debilidad radica en la necesidad de calcular continuamente los valores de la función para los diferentes valores de las aproximaciones.

Por otra parte, como puede verificarse en el cuadro 1, los valores de la función valuada en las diferentes $f(x_i)$ tiende a cero, pero no en forma directa, sino oscilando entre valores positivos y negativos. Este comportamiento indica que el método puede ser inestable pero convergente si se respeta el criterio que corresponde.

Referencias

[1] Chapra Steven. Canale Raymond. *Métodos numéricos para Ingenieros*. México 1999.