Solución numérica de ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Introducción. Método de diferencias finitas. Método del artillero. Método del sistema de ecuaciones. Conclusiones.

1. Introducción

El diseño de ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera corresponde a fenómenos físicos en los cuales se puede verificar el estado de la variable bajo estudio al principio y al final del período de medición. De tal forma, el modelo matemático que se desarrolle debe satisfacer las condiciones en estos momentos.

Por lo general, estas ecuaciones diferenciales son de orden 2 o mayor, y aunque son susceptibles de convertirse en sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, se ha desarrollado un nuevo método tan versátil como los ya conocidos. El método se denomina *Diferencias finitas* y echa mano de las ecuaciones de derivación numérica, como se detallará más adelante.

2. Método de diferencias finitas

Toca el turno de la solución de ecuaciones diferenciales que deben cumplir con condiciones impuestas en ciertos puntos [1], no sólo en uno como ocurre con aquellas que tienen condiciones iniciales (figura1).

*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

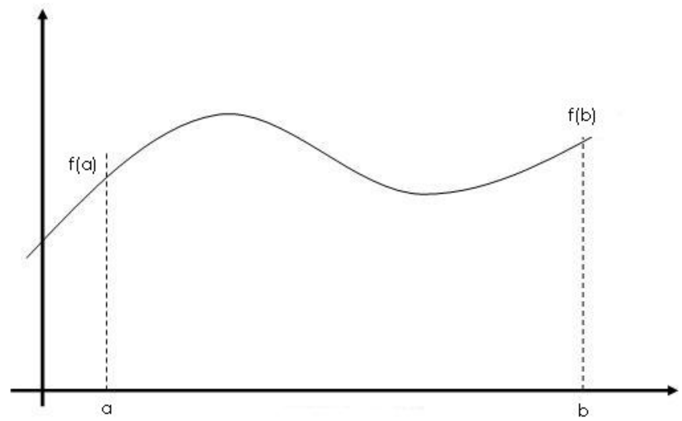

Figura 1: Ecuación diferencial con condiciones de frontera

Por lo general, estas ecuaciones diferenciales son de orden superior a uno. En lo particular se hará énfasis en la solución de una ecuación de orden dos de la forma:

$$Y'' = f(X, Y, Y') \qquad a \leq X \leq b \qquad Y(a) = \alpha \qquad Y(b) = \beta \tag{1}$$

Su solución se logra por la aplicación secuencial en dos pasos:

- Primer paso: Aplicar el método de las diferencias finitas.
- Segundo paso: Elegir entre aplicar el método del artillero [1] o establecer un sistema de ecuaciones lineales producto del pivoteo de la ecuación de recurrencia. Como se detallará más adelante, el método del artillero es un método de tanteos, por lo cual debe tomarse con reservas; no obstante, existe una alternativa de solución directa.

El método de diferencias finitas consiste en sustituir en la ecuación diferencial a resolver las fórmulas de derivación numéricas obtenidas a partir del polinomio interpolante de Newton-Gregory. Este método se sujeta a las mismas reglas del polinomio interpolante, particularmente en lo relativo al espaciamiento constante y al pivoteo.

El método consiste en, una vez sustituidas las ecuaciones de derivación numérica en la ecuación diferencial, construir una ecuación que sea pivoteada en cada uno de los n puntos equiespaciados dentro del intervalo $[a, b]$.

De este pivoteo resultará un sistema de ecuaciones lineales cuya conformación no será siempre la deseada, aunque de este asunto se encarga el método del artillero.

Como ejemplo de aplicación del método se propone resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$Y'' - 2Y + 5 = 0 \tag{2}$$

[1] Conocido también como del 'cañonazoó nombres similares

Con condiciones en la frontera $Y(0) = 0$ y $Y(1) = 2$.

Según lo solicita el método de diferencias finitas, deben utilizarse fórmulas de derivación numérica para sustituirlas en la ecuación diferencial a resolver. Se sugiere que sean fórmulas con el mismo esquema de error y con el mismo punto pivote. Se proponen las siguientes:

$$Y'_{X=X_1} = \frac{1}{2h}\,[\,-1\,,\,\underline{0}\,,\,1\,] + e_r \tag{3}$$

$$Y''_{X=X_1} = \frac{1}{h^2}\,[\,1\,,\,\underline{-2}\,,\,1\,] + e_r \tag{4}$$

Ambas pivotean en el punto central y tienen un esquema de error de $O(h^2)$. Al sustituir en la ecuación (2) resulta:

$$\frac{1}{h^2}\,[\,Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}\,] - (2)\cdot\left(\frac{1}{2h}\right)[\,Y_{i-1} + Y_{i+1}\,] + 5 = 0 \tag{5}$$

De acuerdo a las condiciones de solución planteadas, el intervalo de solución es $[0, 1]$. Se propone un paso, necesariamente constante, $h = 0{,}2$.

Simplificando la ecuación (5) y sustituyendo el valor del paso:

$$6Y_{i-1} - 10Y_i + 4Y_{i+1} + 1 = 0 \tag{6}$$

La ecuación (6) es la ecuación de recur rencia del problema. Procede pivotear a la ecuación de recurrencia en cada uno de los puntos que conformarán la solución, de acuerdo al cuadro 1.

Cuadro 1: Solución de la ecuación diferencial

i	X	Y
0	0,0	0,0
1	0,2	
2	0,4	
3	0,6	
4	0,8	
5	1,0	2,0

Para $i = 1$:

$$6Y_0 - 10Y_1 + 4Y_2 + 1 = 0 \tag{7}$$

De acuerdo a las condiciones de frontera, $Y_0 = 0$. Sustituir este valor en la ecuación (7) no completa su solución, ya que posee dos incógnitas más.

Existen dos formas de lograr la solución:

- Por el método del artillero
- Definir un sistema de ecuaciones

3. Método del artillero

El método del artillero [2] propone suponer una solución inicial, por ejemplo, una línea recta. La figura 2 muestra los puntos originados por las condiciones de frontera. En la figura 3 se muestra la solución propuesta de una línea recta que una a los dos puntos de solución. La ecuación de la

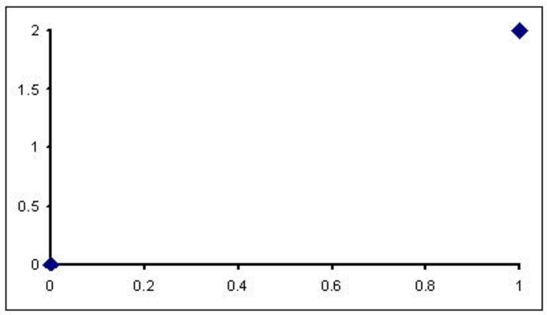

Figura 2: Ecuación diferencial con condiciones de frontera

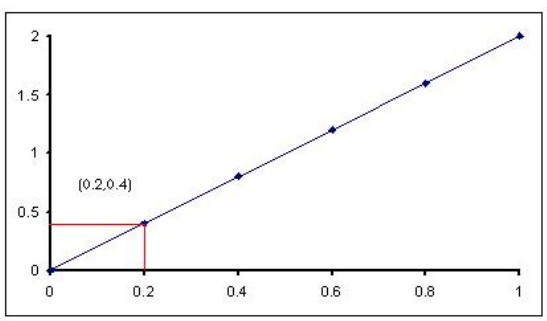

Figura 3: Solución propuesta

solución propuesta es $Y = 2X$, de donde para el punto $X_1 = 0{,}2$ se tiene $Y_1 = 0{,}4$. Sustituyendo en la ecuación de recurrencia 7 se obtiene:

$$6(0) - 10(0{,}4) + 4Y_2 + 1 = 0 \rightarrow Y_2 = 0{,}75 \tag{8}$$

Al obtener este valor se puede reiniciar el pivoteo y la obtención de los valores de Y en los siguientes puntos: Para $i = 2$

$$6Y_1 - 10Y_2 + 4Y_3 + 1 = 6(0{,}4) - 10(0{,}75) + 4Y_3 + 1 = 0 \rightarrow Y_3 = 1{,}025 \tag{9}$$

Para $i = 3$

$$6Y_2 - 10Y_3 + 4Y_4 + 1 = 6(0{,}75) - 10(1{,}025) + 4Y_4 + 1 = 0 \rightarrow Y_4 = 1{,}188 \tag{10}$$

Para $i = 4$

$$6Y_3 - 10Y_4 + 4Y_5 + 1 = 6(1{,}025) - 10(1{,}188) + 4Y_5 + 1 = 0 \rightarrow Y_5 = 1{,}183 \tag{11}$$

La gráfica de la solución se muestra en la figura 4. Es notorio que el suponer a una línea recta

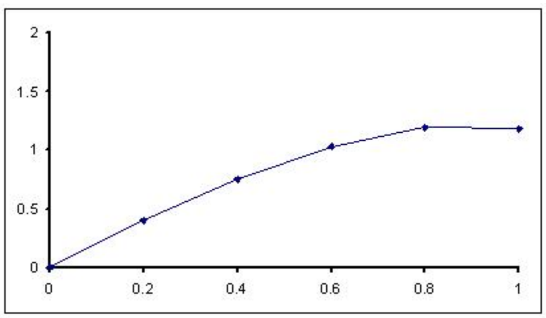

Figura 4: Solución propuesta

como solución inicial no permite cumplir con las condiciones de frontera. Si el problema se origina en la suposición del valor para el punto $X_1 = 0{,}2$ que fue $Y_1 = 0{,}4$ y que arrojó $Y_5 = 1{,}183$ que quedó por debajo de la condición de frontera $Y_5 = 2$, como la haría un *artillero con su cañón* resulta procedente elegir un valor de Y_1 mayor, por ejemplo $Y_1 = 0{,}5$ y repetir el cálculo de las ecuaciones (8) a (11). Esta nueva suposición arroja la siguiente solución mostrada en la tabla 2. En la figura 5 se muestran al mismo tiempo las soluciones propuestas originadas por suponer que $Y_1 = 0{,}4$ y $Y_1 = 0{,}5$; ambas arrojan valores de Y_5 que difieren de la condición de frontera real $Y_5 = 2{,}0$. Acomodando los resultados propuestos y real en una tabla, puede observarse que a través de una simple interpolación lineal puede obtenerse el valor de Y_1 que sí produzca $Y_5 = 2{,}0$.

$$\frac{0{,}5 - 0{,}5}{2{,}5 - 1{,}183} = \frac{Y_{1real} - 0{,}4}{2{,}000 - 1{,}183} \rightarrow Y_{1real} = 0{,}462$$

Con este resultado se repite de nuevo el pivoteo, resultando los valores que se muestran en la tabla 4. En la figura 6 se muestran las soluciones propuestas y la solución final que satisface las condiciones de frontera.

Cuadro 2: Segunda solución de la ecuación diferencial propuesta

i	X	Y
0	0,0	0,0
1	0,2	0,5
2	0,4	1,0
3	0,6	1,5
4	0,8	2,0
5	1,0	2,5

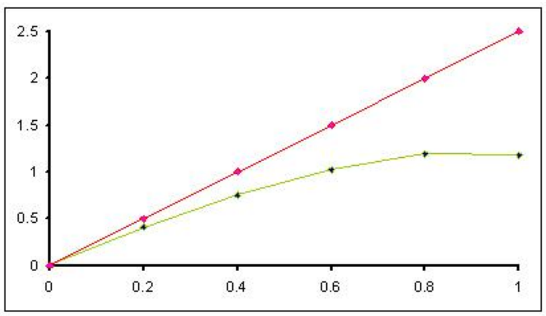

Figura 5: Soluciones propuestas

Cuadro 3: Soluciones

$Y_1 = 0{,}4$	$Y_5 = 1{,}183$
Y_{1real}	$Y_5 = 2{,}000$
$Y_1 = 0{,}5$	$Y_5 = 2{,}500$

4. Método del sistema de ecuaciones

Cuando no se desea utilizar un método de tanteos, la forma directa y más efectiva es pivotear la ecuación de recurrencia, en este caso 6, en los puntos definidos para la solución sin preocuparse por las incógnitas Y_i no disponibles. La ecuación de recurrencia es:

$$6Y_{i-1} - 10Y_i + 4Y_{i+1} + 1 = 0$$

Cuadro 4: Solución final

i	X	Y
0	0,0	0.
1	0,2	0,462
2	0,4	0,905
3	0,6	1,320
4	0,8	1,692
5	1,0	2,002

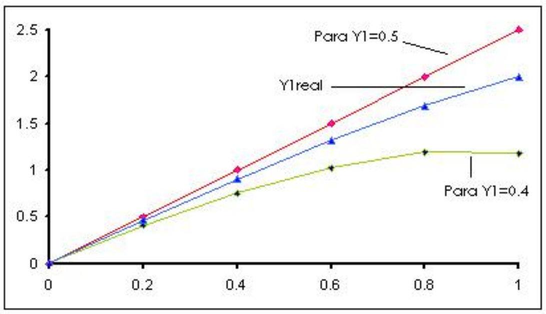

Figura 6: Soluciones propuestas

Pivoteando para los valores de i.

$$\begin{aligned} i=1 \quad & 6Y_0 - 10Y_1 + 4Y_2 + 1 = 0 \\ i=2 \quad & 6Y_1 - 10Y_2 + 4Y_3 + 1 = 0 \\ i=3 \quad & 6Y_2 - 10Y_3 + 4Y_4 + 1 = 0 \\ i=4 \quad & 6Y_3 - 10Y_4 + 4Y_5 + 1 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Se conocen los valores $Y_0 = 0$ y $Y_5 = 2$. Sustituyéndolos en el sistema 12:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -10Y_1 & + & 4Y_2 & & & & & = -1 \\ 6Y_1 & - & 10Y_2 & + & 4Y_3 & & & = -1 \\ & & 6Y_2 & - & 10Y_3 & + & 4Y_4 & = -1 \\ & & & & 6Y_3 & - & 10Y_4 & = -9 \end{array} \tag{13}$$

Este sistema se puede resolver por el método de preferencia. En todo caso, el resultado es:

$$\begin{aligned} Y_0 &= 0 \\ Y_1 &= 0{,}462 \\ Y_2 &= 0{,}905 \\ Y_3 &= 1{,}320 \\ Y_4 &= 1{,}692 \\ Y_5 &= 2{,}000 \end{aligned} \tag{14}$$

5. Conclusiones

La aportación más importante de este trabajo resulta del conocimiento del método de las diferencias finitas, mismo que logra un potencial mayor en la solución de ecuaciones en derivadas parciales. En cuanto a la elección que deberá hacerse entre el método del artillero y la conformación de un sistema de ecuaciones, el segundo resulta más efectivo, sobre todo por la aplicación de recursos de cómputo en su solución.

Referencias

[1] Iriarte-Vivar Rafael. *Métodos numéricos*. México 1990.

[2] Burden Richard. Faires Douglas. *Análisis Numérico*. Madrid 2002.

[2]

[2] Editado por Juan Carlos Marín Helú. Junio 2011