

# Solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales

## Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas  
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas  
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán \*

2011

### Resumen

Introducción. La ecuación en derivadas parciales parabólicas. Ejemplo de aplicación.  
Conclusiones.

## 1. Introducción

Uno de los ejemplos más representativos de las ecuaciones en derivadas parciales parabólicas es la propagación del flujo de calor en una dirección en función del tiempo.

De nuevo resulta muy importante establecer que este tipo de solución está sujeta de forma muy importante a las características físicas de los elementos del experimento, sobre todo en adelante a la introducción del nuevo concepto de *estabilidad* cuya aplicación pudiera entenderse como la realización de artilugios matemáticos para manipular los resultados.

## 2. La ecuación en derivadas parciales parabólicas

Las ecuaciones en derivadas parciales parabólicas [?] se presentan en problemas de propagación. En este tipo de problemas la solución avanza indefinidamente a partir de valores iniciales conocidos, satisfaciendo las condiciones de frontera conocidas, conforme la solución progresa. Este tipo de dominio de solución, de extremo abierto, se muestra en la figura ??.

En estos modelos la variable dependiente de  $U$  y las variables independientes son  $X$  y  $t$ . La solución debe satisfacer la ecuación diferencial parcial en todo el dominio abierto, así como las condiciones iniciales y de frontera. Un ejemplo de ecuación diferencial de tipo parabólico se encuentra al considerar el problema unidimensional del flujo transitorio de calor que se define mediante la ecuación diferencial numero ??

$$\frac{\partial}{\partial t}U(X, t) = \frac{k}{C \cdot P} \frac{\partial^2}{\partial X^2}U(X; t) \quad (1)$$

---

\*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

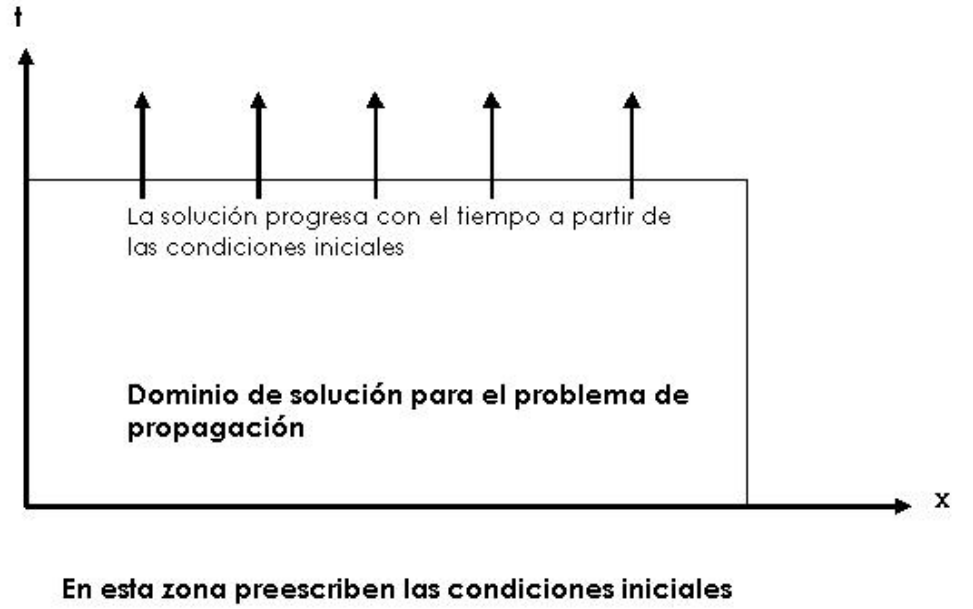


Figura 1: Esquema general

Donde  $C$  es la capacidad calorífica del material,  $P$  es la densidad del material y  $k$  es la conductividad térmica del material.

Como se mencionó, la solución  $U(X, t)$  se propaga en un plano espacio-tiempo como el mostrado en la figura ???. Si se considera una red espacio-tiempo como la que se muestra en la figura ??, la solución de la ecuación (??) consiste en determinar la temperatura  $U$  en cada punto de la red utilizada.

Para utilizar la red propuesta, en la ecuación (??) deberán sustituirse las ecuaciones de derivación parcial numérica de acuerdo a lo establecido por el método de las diferencias finitas [?]. Se propone el uso de las siguientes ecuaciones:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} [-U_{i,j} + U_{i,j+1}] + O(h) \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta X)^2} [U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] + O(h^2) \quad (3)$$

Realizando la sustitución:

$$\frac{1}{\Delta t} [-U_{i,j} + U_{i,j+1}] = \frac{1}{(\Delta X)^2} [U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] \quad (4)$$

Despejando el término incógnita  $U_{i,j+1}$  resulta:

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \frac{\Delta t}{(\Delta X)^2} \frac{k}{C \cdot P} [U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] \quad (5)$$

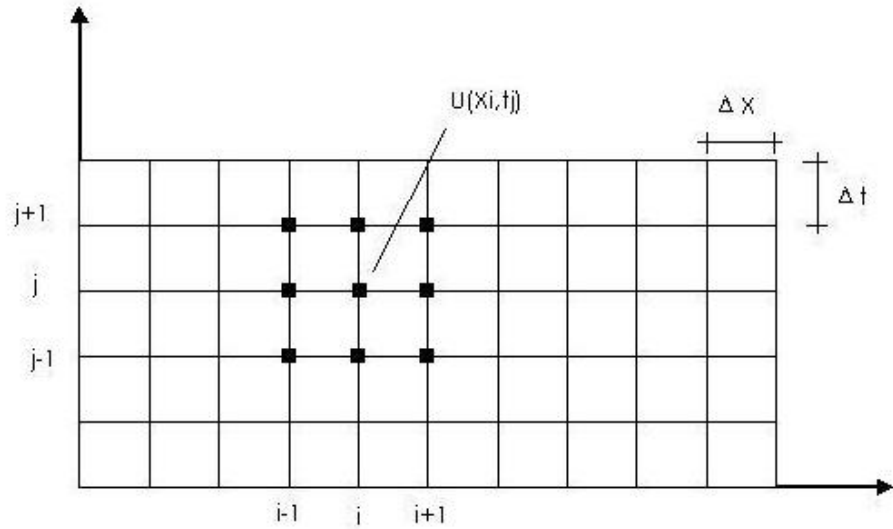


Figura 2: Red planteada

Con la ecuación (??) puede obtenerse la temperatura  $U$  en la coordenada  $X_i$  en el instante  $t_{j+1}$  en función de las temperaturas en los puntos adyacentes de la red. Las temperaturas iniciales conocidas y las temperaturas de la frontera suministran valores necesarios para iniciar los cálculos que proceden entonces renglón por renglón satisfaciendo los puntos extremos de cada renglón, las condiciones de frontera dadas, hasta que satisfaga en forma aproximada algún estado final de temperatura (en función del tiempo), conforme la solución se aproxima a un estado estacionario. Esta progresión de renglón por renglón en función del tiempo, que continúa indefinidamente, ilustra la naturaleza de extremo abierto del dominio de solución de una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico.

Por otra parte, la solución de la ecuación (??) será estable y no oscilatoria si:

$$\frac{k}{C \cdot P} \frac{\Delta t}{(\Delta X^2)} \leq 0,25 \quad (6)$$

O bien, la solución será estable si:

$$\frac{k}{C \cdot P} \frac{\Delta t}{(\Delta X^2)} \leq 0,5 \quad (7)$$

La referencia hacia la estabilidad del modelo matemático radica en que si los coeficientes antes citados no tienen los valores necesarios para cumplir con las condiciones ?? y ?? los términos de la ecuación (??) tendrán valores tales que no se logrará que la ecuación completa tienda a un determinado valor.

### 3. Ejemplo de aplicación

El problema consiste en determinar la distribución estacionaria de temperatura a lo largo de una barra delgada. La barra que se muestra en la figura ???. La barra está hecha de aluminio y tiene una longitud de un pie.

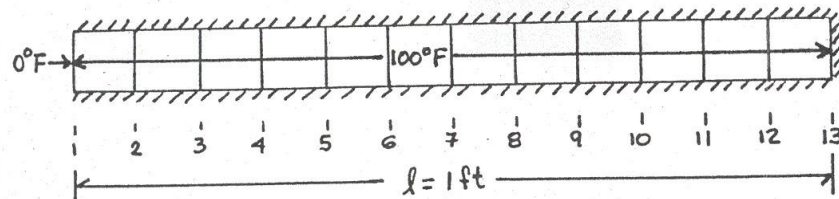


Figura 3: Barra del problema

Se supone que está perfectamente aislada en todas sus fronteras excepto en el extremo izquierdo. Las propiedades correspondientes del material son:

$$k = 0,0370 \frac{\text{Btu}}{\text{s} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}}$$

$$C = 0,212 \frac{\text{Btu}}{\text{Lb} \cdot ^\circ\text{F}}$$

$$P = 168 \frac{\text{Lb}}{\text{ft}^3}$$

La barra se divide en doce incrementos iguales mediante las trece estaciones mostradas, de acuerdo a la figura ??.

Inicialmente la barra se encuentra en estado de equilibrio térmico a la temperatura de  $100^\circ\text{F}$ . La temperatura en el extremo no aislado es reducida súbitamente a  $0^\circ\text{F}$ ; en ese instante la distribución de temperatura en la barra pasa a un estado transitorio. Este estado existe hasta el instante en que la temperatura en todos los puntos de la barra se aproxime al estado final de equilibrio a  $0^\circ\text{F}$ . Las

condiciones de frontera establecidas matemáticamente son:

$$\begin{aligned} U_{0,t} &= 0^\circ F \\ \frac{\partial U}{\partial X}(l, t) &= 0 \frac{^\circ F}{ft} \end{aligned} \quad (8)$$

La condición inicial es:

$$U(X, 0) = 100^\circ F \quad (9)$$

En este sentido, los valores dados de  $k$ ,  $C$  y  $P$  establecen una difusividad térmica  $\frac{k}{C \cdot P}$  de  $0,00104 \frac{ft^2}{s}$ . Con el número de estaciones mostrado en la figura ??, el valor de  $\Delta X$  es  $\frac{1}{12} ft$ . Con todos estos valores y haciendo referencia al criterio de estabilidad ya mencionado en la ecuación ?? para una solución estable y no oscilatoria, se observa que el uso de un valor conveniente es  $\Delta t = 1,0 s$  para satisfacer el requisito para dicha solución.

En la tabla ?? se muestran las temperaturas en las estaciones 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13 en intervalos de 400s.

Cuadro 1: Temperaturas

Tiempo	1	3	5	7	9	11	13
100	0,00	28,51	53,49	72,60	85,26	92,16	94,31
500	0,00	9,13	17,64	24,95	30,56	34,09	35,29
900	0,00	3,27	6,32	8,94	10,95	12,21	12,64
1300	0,00	1,17	2,26	3,20	3,92	4,37	4,53
1700	0,00	0,42	0,81	1,14	1,40	1,56	1,62
2100	0,00	0,15	0,29	0,41	0,50	0,56	0,58
2500	0,00	0,05	0,10	0,14	0,18	0,20	0,20
2900	0,00	0,01	0,03	0,05	0,06	0,07	0,07

## 4. Conclusiones

Si bien los resultados debieron ser resumidos para su presentación, durante su obtención es posible constatar la practicidad del método de las diferencias finitas, sobre todo para procesos en los cuales se desee una gran cantidad de puntos para lograr una buena aproximación.

1

## Referencias

- [1] Gerald Curtis F. *Análisis numérico*. 2a ed. México 1991.
- [2] Iriarte-Vivar Rafael. *Métodos numéricos*. México 1990.

---

<sup>1</sup>Editado por Juan Carlos Marín Helú. Junio 2011