

Valores y vectores característicos: Método de las potencias

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Introducción. Definición del método de las potencias. Mayor y menor valores característicos. Ejemplo de aplicación. Conclusiones.

1. Introducción

La manera ortodoxa de obtener los valores característicos de la una matriz [1] A es obtener las raíces de su polinomio característico. El método de las potencias ofrece una opción para obtener el mayor y el menor valor característico de la matriz A de orden $n \times n$ sin la necesidad de disponer de la ecuación característica [2].

El método de las potencias es un método iterativo de aproximaciones sucesivas, por lo cual, además de la matriz A deberá conocerse una tolerancia preestablecida.

2. Definición del método de las potencias

Sea el sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (a_{11} - \lambda)X_1 & + & a_{12}X_2 & + & a_{13}X_3 & + & \dots & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ a_{21}X_1 & + & (a_{22} - \lambda)X_2 & + & a_{23}X_3 & + & \dots & + & a_{2n}X_n & = & b_2 \\ a_{31}X_1 & + & a_{32}X_2 & + & (a_{33} - \lambda)X_3 & + & \dots & + & a_{3n}X_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}X_1 & + & a_{n2}X_2 & + & a_{n3}X_3 & + & \dots & + & (a_{nn} - \lambda)X_n & = & b_n \end{array} \quad (1)$$

Que puede representarse como:

$$|A - \lambda I|\vec{X} = 0 \quad (2)$$

*Facultad de Ingeniería, UNAM Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

A partir de la expresión (2) pueden obtenerse los valores característicos, ya que representa a la ecuación característica de la matriz A ; el tratamiento para obtener el valor mayor o el menor es ligeramente diferente, pero en ambos casos proporciona el vector característico respectivo.

3. Mayor valor característico

La expresión (2) puede acomodarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A\bar{X} - \lambda\bar{X} &= 0 \\ A\bar{X} &= \lambda\bar{X} \end{aligned} \quad (3)$$

Para la expresión (3) se percibe la forma característica de un método de aproximaciones sucesivas. El método propone utilizar un vector inicial $\bar{X}_{(0)} \neq 0$ compatible y multiplicarlo por la matriz A . El resultado será un nuevo vector $\bar{X}_{(1)}$ el cual será normalizado utilizando su elemento mayor; este elemento utilizado para la normalización será una aproximación al mayor valor característico λ_i y el vector normalizado será su vector asociado. El proceso se repetirá hasta que la diferencia entre dos aproximaciones cumpla con una tolerancia preestablecida.

Para completar el método, la ecuación (3) debe expresarse en forma iterativa:

$$A\bar{X}_{(k)} = \lambda_{(k+1)}\bar{X}_{(k+1)} \quad (4)$$

donde k es el número de la iteración y $k = 1, 2, 3, \dots$

4. Menor valor característico

Retomamos la ecuación (2), misma que se premultiplica por la matriz inversa de A , que es A^{-1} .

$$A^{-1}A\bar{X} = A^{-1}\lambda\bar{X}$$

La que resulta en:

$$\bar{X} = A^{-1}\lambda\bar{X}$$

Dividiendo entre λ :

$$\frac{1}{\lambda}\bar{X} = A^{-1}\bar{X} \quad (5)$$

Para completar el proceso, haciendo a (5) una ecuación iterativa:

$$A^{-1}\bar{X}_{(k)} = \frac{1}{\lambda_{(k+1)}}\bar{X}_{(k+1)} \quad (6)$$

donde k es el número de la iteración y $k = 1, 2, 3, \dots$

El tratamiento para obtener el menor valor característico es similar al utilizado para obtener el mayor valor, a diferencia del uso de la matriz inversa A^{-1} y que el factor de normalización representa al recíproco del menor valor característico de la matriz A . El proceso se repetirá hasta que la diferencia entre dos aproximaciones cumpla con una tolerancia preestablecida.

5. Ejemplo de aplicación

Sea la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Se calculará inicialmente el mayor valor característico y posteriormente el menor. La primera acción será definir un vector inicial $\bar{X}_{(0)} \neq 0$ compatible que debe diseñarse de forma práctica y que permita el menor número de operaciones. Se propone el vector:

$$\bar{X}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando la primera iteración:

$$A \cdot \bar{X}_{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El elemento de mayor valor en este vector resultante representa la primera aproximación al mayor valor característico, es decir, $\lambda_{(0)} = 2$; normalizando el vector resultado de la multiplicación se obtiene la siguiente aproximación:

$$\lambda_{(0)} = 2 \quad \bar{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Repitiendo el proceso:

$$A \cdot \bar{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \lambda_{(1)} = 3,5 \quad \bar{X}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8571 \\ 0,8571 \end{bmatrix}$$

El cálculo del error absoluto entre las dos aproximaciones a λ es:

$$|\lambda_1 - \lambda_0| = |3,5 - 2| = 1,5$$

En los siguientes cuadros se presenta el proceso iterativo completo:

Cuadro 1 Iteraciones 4 a 8

	X_0		X_1		X_2		X_3		X_4
	1,00000	2,00000	1,00000	3,50000	1,00000	4,57143	1,00000	4,90625	1,00000
	0,00000	1,00000	0,50000	3,00000	0,85714	4,42857	0,96875	4,87500	0,99363
	0,00000	1,00000	0,50000	3,00000	0,85714	4,42857	0,96875	4,87500	0,99363
$\lambda_{(k)}$		2,00000		3,50000		4,57143		4,90625	
Tol				1,50000		1,07143		0,33482	

Cuadro 2 Iteraciones 4 a 8

	X_4		X_5		X_6		X_7		X_8
	1,00000	4,98089	1,00000	4,99616	1,00000	4,99923	1,00000	4,99985	1,00000
	0,99363	4,97452	0,99872	4,99488	0,99974	4,99898	0,99995	4,99980	0,99999
	0,99363	4,97452	0,99872	4,99488	0,99974	4,99898	0,99995	4,99980	0,99999
$\lambda_{(k)}$		4,98089		4,99616		4,99923		4,99985	
Tol		0,07464		0,01527		0,00307		0,00061	

Cuadro 3 Iteraciones 4 a 8

	X_8	X_9
	1,00000	4,99997
	0,99999	4,99996
	0,99999	4,99996
$\lambda_{(k)}$		4,99997
Tol		0,00012

En el cuadro 3 se presenta en forma aislada la última iteración, de la cual se concluye que con una tolerancia de 0,00012, el mayor valor característico de la matriz A en $\lambda = 4,99997 \approx 5$ y su vector asociado es:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Calculando ahora el menor valor característico. Para la matriz A , su matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 & -0,2 \\ -0,2 & -0,4 & 0,8 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Se propone el vector inicial $\bar{X}_{(0)} \neq 0$ compatible:

$$\bar{X}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando la primera iteración:

$$A^{-1} \cdot \bar{X}_{(0)} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 & -0,2 \\ -0,2 & -0,4 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ -0,2 \\ -0,2 \end{bmatrix}$$

El elemento de mayor valor en este vector resultante representa al recíproco de la primera aproximación al menor valor característico, es decir, $\frac{1}{\lambda_{(0)}} = 0,8$; normalizando el vector resultado de la multiplicación se obtiene la siguiente aproximación:

$$\frac{1}{\lambda_{(0)}} = 0,8 \quad \bar{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,25 \\ -0,25 \end{bmatrix}$$

Repitiendo el proceso:

$$A^{-1} \cdot \bar{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 & -0,2 \\ -0,2 & -0,4 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,25 \\ -0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 \\ -0,3 \\ -0,3 \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{\lambda_{(1)}} = 0,95 \quad \bar{X}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,3298 \\ -0,3158 \end{bmatrix}$$

El cálculo del error absoluto entre las dos aproximaciones a $\frac{1}{\lambda}$ es:

$$\left| \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0} \right| = |0,95 - 0,8| = 0,15$$

En los siguientes cuadros se presenta el proceso iterativo completo:

Cuadro 4 Iteraciones 0 a 4

	X_0		X_1		X_2		X_3		X_4
	1,00000	0,80000	1,00000	0,95000	1,00000	0,98947	1,00000	0,99787	1,00000
	0,00000	-0,20000	-0,25000	-0,30000	-0,31579	-0,32632	-0,32979	-0,33191	-0,33262
	0,00000	-0,20000	-0,25000	-0,30000	-0,31579	-0,32632	-0,32979	-0,33191	0,33262
$\frac{1}{\lambda_{(k)}}$		0,80000		0,95000		0,98947		0,99787	
Tol				0,15000		0,03947		0,00840	

Cuadro 5 Iteraciones 4 a 7

	X_4		X_5		X_6		X_7
	1,00000	0,99957	1,00000	0,99991	1,00000	0,99998	1,00000
	-0,33262	-0,33305	-0,33319	-0,33328	-0,33330	-0,33332	-0,33333
	-0,33262	-0,33305	-0,33319	-0,33328	-0,33330	-0,33332	-0,33333
$\frac{1}{\lambda_{(k)}}$		0,99957		0,99991		0,99998	
Tol		0,00170		0,00034		0,00007	

Se concluye que con una tolerancia de 0,00007, el menor valor característico de la matriz A es:

$$\frac{1}{\lambda} = 0,99998 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{0,99998} = 1,00002 \approx 1 \quad (10)$$

Y su vector asociado es:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,33333 \\ -0,33333 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Como información adicional, la ecuación característica de la matriz A detallada en (7) es:

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0 \quad (12)$$

Al resolver este polinomio se verificara la coincidencia con los resultado expresados en (8) y (10).

6. Conclusiones

El método de las potencias, junto con el método de Krilov, permite obtener, a través de recursos de cómputo, los resultados característicos de matrices. Si bien no se especifican criterios de convergencia dado que se trata de métodos de aproximaciones sucesivas, es necesario aclarar que la característica fundamental para obtener resultados se limita a que la matriz cumpla con los requisitos específicos marcados por el álgebra matricial.

Referencias

- [1] Burden Richard. Faires Douglas. *Análisis Numérico*. Madrid 2002.
- [2] Gerald Curtis F. *Análisis numérico*. 2a ed. México 1991.

¹Editado por Juan Carlos Marín Helú. Junio 2011