Solución numérica de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Introducción. Solución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales: métodos predictivos-correctivos; métodos de Runge-Kutta y método de la serie de Taylor. Comparación entre méto dos. Conclusiones.

1. Introducción

Una ecuación diferencial es aquella que relaciona dos o más variables con sus derivadas o diferenciales. De acuerdo a la forma en que se da esta relación es que se clasifican de acuerdo a lo siguiente:

- Por el tipo de diferencial.
  - Una ecuación diferencial es *ordinaria* si existe sólo una variable independiente y sus derivadas son ordinarias o totales:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} + x$$

  - Una ecuación diferencial es *en derivadas parciales* si existen dos o más variables independientes y por tanto sus derivadas serán parciales.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} = 0$$

Es necesario comentar que aunque en un proceso existan dos o más variables pueden existir derivadas totales o derivadas parciales dependiendo de que la variación de un parámetro o función se realice respecto a una o más variables respectivamente.

*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

- Por su *orden*. El orden de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que pertenece a la ecuación diferencial.

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + 5\frac{dY}{dX} = -Y + X$$

  El orden de esta ecuación diferencial es 2 ya que corresponde al mayor orden de la derivada en ella incluida.

- Por su grado *grado*. El grado de una ecuación diferencial corresponde directamente al grado algebraico que posee la derivada de mayor orden que posee la ecuación diferencial.

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + 5\left[\frac{dY}{dX}\right]^3 = -Y + X$$

  El grado de esta ecuación es 3 (mayor exponente).

- Por su linealidad. Una ecuación diferencial es lineal si las potencias de la variable dependiente y sus derivadas son unitarias, además de no existir productos de la variable dependiente por sus derivadas o productos entre derivadas.

$$YY' - 2Y' = X$$

  Esta ecuación diferencial es no lineal porque el coeficiente de Y' depende de la propia Y.

$$Y'' - 2Y' + Y = 8$$

  Este es el ejemplo de una ecuación diferencial lineal.

La solución de una ecuación diferencial es cualquier relación funcional que no incluya derivadas o integrales de funciones desconocidas. La solución de una ecuación diferencial se presenta de dos formas:

- Solución general. La solución general de una ecuación diferencial es gráficamente una familia de curvas planas, como se observa en la figura 1.

- Solución particular. La solución particular de una ecuación diferencial es una de las curvas que conforman a la familia de curvas de la solución general, obtenida a partir de ciertas condiciones,como se observa en la figura 2.

La solución particular de una ecuación diferencial obedece a dos tipos de condiciones:

- Condiciones iniciales. Un problema de valores iniciales está regido por una ecuación diferencial de orden n y $n-1$ condiciones independientes todas ellas válidas en el mismo valor inicial de la variable independiente,como se observa en la figura 3.

- Valores en la frontera. Un problema de valores en la frontera se establece por condiciones que prevalecen en dos puntos de la variable independiente que normalmente establecen un intervalo de solución de la ecuación diferencial, como se observa en la figura 4.

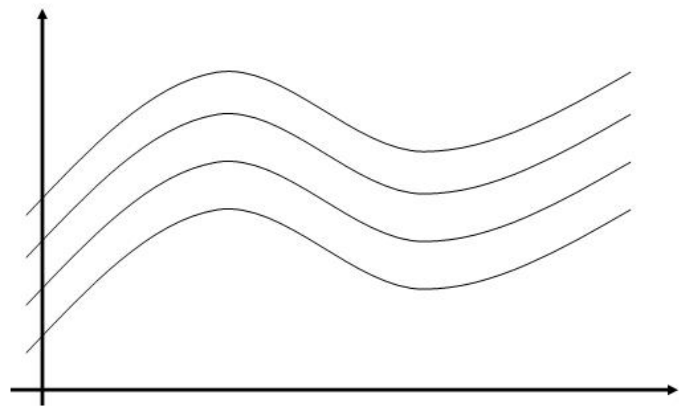

Figura 1: Solución general de una ecuación diferencial

2. Solución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

Son varios los métodos numéricos que ofrecen la solución de estas ecuaciones diferenciales. Los métodos paso a paso se fundamentan en los polinomios interpolantes que provienen de tablas de diferencias; en consecuencia será necesario disponer de un intervalo de solución de la variable independiente cuyo primer punto debe coincidir con la condición inicial. El número de puntos deseado deberá determinarse con base en los resultados esperados y en todo caso deberá conservarse un paso h constante.

Con el ánimo de hacer una comparación funcional entre los distintos métodos que se expondrán, se resolverá la misma ecuación diferencial y se contrastarán los resultados obtenidos.

2.1. Métodos predictivo-correctivos

Los métodos predictivos correctivos se basan en el polinomio interpolante de Newton-Gregory, mismo que representa a una función tabular con variable independiente equiespaciada. Se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, lineales o no y de cualquier grado. Estos métodos también son conocidos como *métodos de pasos o paso a paso* ya que resuelven a la ecuación en intervalos entre dos pares de puntos y repitiendo esta solución en todos los puntos que conforman a la función tabular.

El planteamiento inicial es resolver una ecuación es el siguiente [1]:

$$Y' = f(X, Y) \tag{1}$$

La solución se obtiene integrando ambos miembros de la ecuación entre dos puntos consecutivos:

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} Y' \, dx = \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(X, Y) \, dx \tag{2}$$

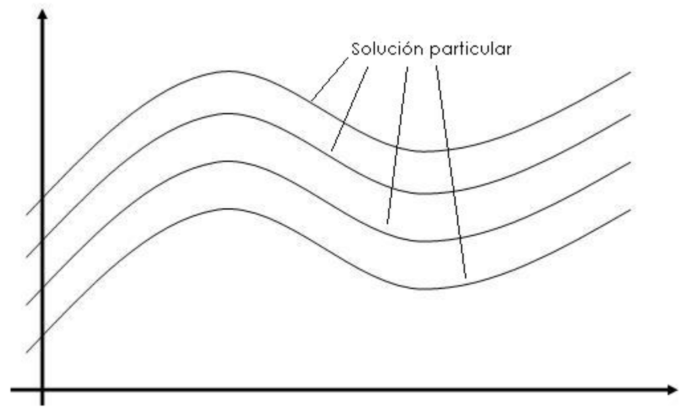

Figura 2: Solución particular de una ecuación diferencial

De la que se obtiene:

$$Y(X_{i+1)} - Y(X_i) \;=\; \int_{X_i}^{X_{i+1}} \; f(X,Y)\,dx$$

$$Y(X_{i+1}) \;= Y(X_i) \;+\; \int_{X_i}^{X_{i+1}} \; f(X,Y)\,dx \tag{3}$$

La integral incluida en el segundo miembro de la ecuación puede resolverse a partir del polinomio interpolante de Newton-Gregory que tiene la siguiente forma:

$$Y_k = Y_0 + k\Delta Y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 Y_0 + ... \tag{4}$$

A la ecuación (4) se le da el mismo tratamiento necesario para crear esquemas de integración numérica, en este caso se le integra a partir de un proceso de cambio de variable del cual resulta:

$$\int_{X_0}^{X_n} \; f(x)\,dx \;= h\;\left[nY_0 + \frac{n^2}{2}\Delta Y_0 + \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4}\right)\Delta^2 Y_0 + \left(\frac{n^4}{24} - \frac{3n^3}{18} - \frac{2n^2}{12}\right)\Delta^3 Y_0 + ...\right] \tag{5}$$

Es necesario hacer algunas precisiones en esta ecuación. Toda vez que se trata de integrar entre dos puntos consecutivos X_i y X_{i+1}, éstos deberán considerarse como límites de la integral y en consecuencia entre ambos sólo existe un paso h y en consecuencia $n = 1$. Por otra parte debe elegirse el orden de interpolación deseado; en este caso, se elige un primer orden de interpolación, es decir, truncar al polinomio 5 en la primera diferencia. Como se estudió en su momento, esto originará un orden de error de $O(h^2)$.

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} \; f(x)\,dx \;= h\;\left[Y_0 + \frac{1}{2}\Delta Y_0\right] \tag{6}$$

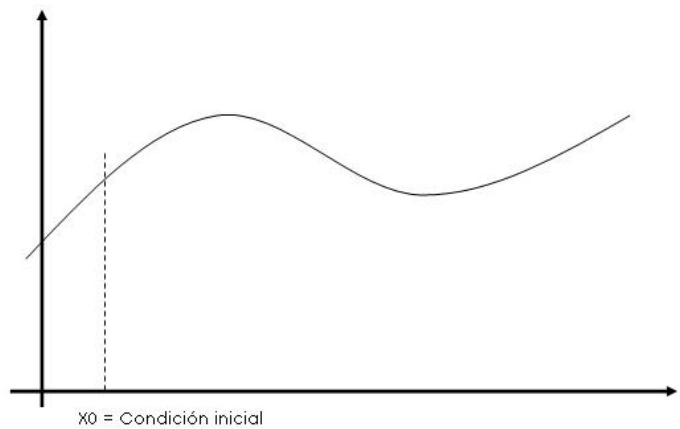

Figura 3: Valores iniciales

Sustituyendo los valores de las diferencias:

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x)\,dx \;= h\,\left[Y_0 + \frac{1}{2}(Y_1 - Y_0)\right] \tag{7}$$

Una última precisión: En la ecuación (7) se utiliza una notación que emana de las tablas de diferencias en donde al valor de $f(X_i)$ se le denota como Y_i. En todo caso, $Y_i = f(X_i)$. Dado lo anterior, es pertinente unificar la notación con la mostrada en la ecuación (3). Cambiando la notación y sustituyendo 7 en 3:

$$Y(X_{i+1}) \;= Y(X_i) \;+ h\,\left[f(X_i, Y_i) + \frac{1}{2}(f(X_{i+1}, Y_{i+1}) - f(X_i, Y_i)\right] \tag{8}$$

Esta ecuación es la que da origen a los métodos predictivos-correctivos.

Inicialmente, se propone que la ecuación (8) sea de nuevo truncada (por un motivo que más adelante será evidente) hasta el uso de $f(X_i)$. De esto resulta:

$$Y(X_{i+1}) \;= Y(X_i) \;+ h\,f(X_i)$$

O en una notación más práctica:

$$Y_{i+1} \;= Y_i \;+ h\,f(X_i) \tag{9}$$

A la ecuación (9) se le denomina *Método de Euler* para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales en un intervalo equiespaciado. Resulta obvia la percepción al gran orden de error que arroja el uso de este método. No obstante, esta ecuación tiene una razón de ser. Retomando la ecuación (8) sin truncar, haciendo las simplificaciones del caso:

$$Y(X_{i+1}) \;= Y(X_i) \;+ \frac{h}{2}\,\left[f(X_i, Y_i) + f(X_{i+1}, Y_{i+1})\right] \tag{10}$$

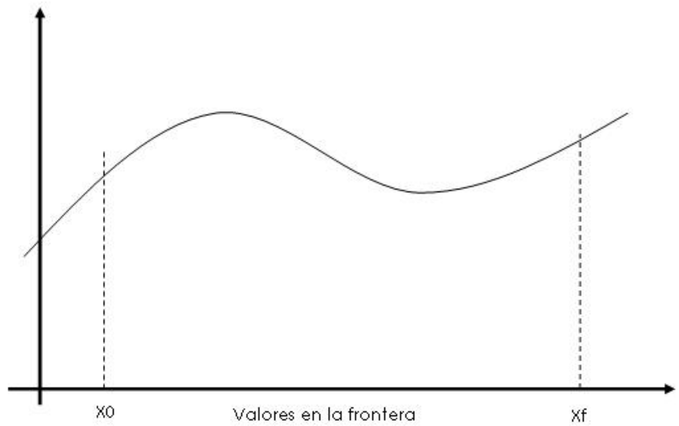

Figura 4: valores en la frontera

Esta última ecuación, de primera mano, resulta imposible de resolver, toda vez que el miembro izquierdo está presente en el miembro derecho. Dado esto, conforme a la filosofía de los métodos numéricos se propone un valor inicial de $Y(X_{i+1})$ obtenido a partir del método de Euler en la ecuación (9) que se denominará *valor predictor*; este valor se utilizará en la ecuación (10) con la cual el valor *predictor* será *corregido*. De aquí el nombre de método predictor-corrector. Denotando esta propuesta se obtienen dos ecuaciones que en conjunto constituyen el *Método de Euler-Gauss*[1] o bien, *Método predictor-corrector*.

$$Y(X_{i+1p}) = Y(X_i) + h\,f(X_i)$$
$$Y(X_{i+1c}) = Y(X_i) + \frac{h}{2}\,[f(X_i, Y_i) + f(X_{i+1}, Y_{i+1p})]$$

Para $i = 0, 1, 2, ...$

De nuevo, en una notación más práctica:

$$Y(X_{i+1p}) = Y(X_i) + h\,f(X_i) \tag{11}$$

$$Y(X_{i+1c}) = Y(X_i) + \frac{h}{2}\,[f(X_i, Y_i) + f(X_{i+1}, Y_{i+1p})] \tag{12}$$

Para $i = 0, 1, 2, ...$

Para mostrar la aplicación, se propone resolver la ecuación diferencial de primer orden $XY' + Y = 2X$ con condición inicial $Y(1) = 0$ en el intervalo $[1, 1{,}5]$ con un paso $h = 0{,}1$.

Como primer paso siempre debe despejarse a Y', resultando:

$$Y' = 2 - \frac{Y}{X}$$

[1]Algunos autores le llaman *Euler modificado*

Dado que los métodos numéricos ofrecen la solución particular, ésta se proporciona en forma de función tabular. Como se mencionó en alguna ocasión anterior, se recomienda numerar a las soluciones para minimizar la ocurrencia de errores.

Cuadro 1: Solución en forma tabular

i	X	Y
0	1	0
1	1,1	
2	1,2	
3	1,3	
4	1,4	
5	1,5	

En el cuadro 1 destaca que el punto Y_0 corresponde a la condición inicial $Y(X_0) = Y(1) = 0$.

La ecuación recursiva correspondiente al método de Euler, de acuerdo a la ecuación (9) es:

$$Y_{i+1} = Y_i + h\left[2 - \frac{Y_i}{X_i}\right]$$

Se detalla a continuación la primera iteración para $i = 0$. El resto se obtendrá por medio de la hoja electrónica de cálculo que acompaña a este trabajo.

Si $i = 0$, entonces:

$$Y_1 = Y_0 + h\left[2 - \frac{Y_0}{X_0}\right]$$

$$Y_1 = 0 + (0{,}1)\left[2 - \frac{0}{1}\right] = 0{,}2$$

La segunda iteración para $i = 1$ es:

$$Y_2 = Y_1 + h\left[2 - \frac{Y_1}{X_1}\right]$$

$$Y_2 = 0{,}2 + (0{,}1)\left[2 - \frac{0{,}2}{1{,}1}\right] = 0{,}38182$$

Estas iteraciones se repiten hasta que se complete la función tabular. Ubicando el resultado en el cuadro 1 se obtiene el cuadro 2:

Aplicando ahora el método Euler-Gauss, las ecuaciones iterativas de acuerdo a (11) y (12) son:

$$Y_{i+1p} = Y_i + h\left[2 - \frac{Y_i}{X_i}\right]$$

$$Y_{i+1c} = Y_i + \frac{h}{2}\left[2 - \frac{Y_i}{X_i} + 2 - \frac{Y_{i+1p}}{X_{i+1}}\right]$$

Cuadro 2: Resultados en el método de Euler

i	X	Y
0	1	0
1	1,1	0,20000
2	1,2	0,38182
3	1,3	0,55000
4	1,4	0,70769
5	1,5	0,85714

La primera iteración para $i = 0$ se compone ahora de dos ecuaciones:

$$Y_{1p} = Y_0 + h\left[2 - \frac{Y_0}{X_0}\right] = 0 + (0{,}1)\left[2 - \frac{0}{1}\right] = 0{,}2$$

$$Y_{1c} = Y_0 + \frac{h}{2}\left[2 - \frac{Y_0}{X_0} + 2 - \frac{Y_{1p}}{X_1}\right] = 0 + \frac{0{,}1}{2}\left[2 - \frac{0}{1} + 2 - \frac{0{,}2}{1{,}1}\right] = 0{,}19091$$

La segunda iteración para $i = 1$ resulta:

$$Y_{2p} = Y_1 + h\left[2 - \frac{Y_1}{X_1}\right] = 0{,}19091 + (0{,}1)\left[2 - \frac{0{,}19091}{1{,}1}\right] = 0{,}37355$$

$$Y_{2c} = Y_1 + \frac{h}{2}\left[2 - \frac{Y_1}{X_1} + 2 - \frac{Y_{2p}}{X_2}\right] = 0{,}19091 + \frac{0{,}1}{2}\left[2 - \frac{0{,}19091}{1{,}1} + 2 - \frac{0{,}37355}{1{,}2}\right] = 0{,}36667$$

La solución completa se muestra en el cuadro 3.

Cuadro 3: Solución por Euler-Gauss

i	X	Y_p	Y_c
0	1		0
1	1,1	0,20000	0,19091
2	1,2	0,37355	0,36667
3	1,3	0,53611	0,53077
4	1,4	0,68994	0,68571
5	1,5	0,83673	0,83333

3. Métodos de Runge-Kutta

Los métodos Runge-Kutta son producto de un algoritmo muy eficaz para resolver ecuaciones diferenciales. Lo interesante de ellos es que se pueden obtener varios métodos de diferente aproximación. Se clasifican de acuerdo su *orden*. En general, su obtención no es sencilla, pero se muestran sus generalidades más importantes [2].

La forma general de la solución de una ecuación diferencial tiene la forma:

$$Y_{i+1} = Y_n + h\Phi(X_i, Y_i) \tag{13}$$

Donde $i = 0, 1, 2, ...$

Si se observan las ecuaciones iterativas de los métodos de Euler (11) y de Euler-Gauss (12) responden a la forma mostrada en la ecuación (13); de hecho, el método de Euler coincide absolutamente con el método de Runge-Kutta de primer orden.

En general, la ecuación recursiva se escribe como [3]:

$$Y_{i+1} = y_i + (w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + ... + w_nk_n) \tag{14}$$

donde:

$$\begin{gathered}
k_1 = hf(X_i, Y_i) \\
k_2 = hf(X_i + \alpha_1 h, Y_i\beta_{1,1}k_1) \\
k_3 = hf(X_i + \alpha_2 h, Y_i\beta_{2,1}k_1 + \beta_{2,2}k_2) \\
k_4 = hf(X_i + \alpha_3 h, Y_i\beta_{3,1}k_1 + \beta_{3,2}k_2 + \beta_{3,3}k_3) \\
\vdots \\
k_n = hf(X_i + \alpha_{n-1} h, Y_i\beta_{n-1,1}k_1 + \beta_{n-1,2}k_2 + ... + \beta_{n-1,n-1}k_{n-1})
\end{gathered} \tag{15}$$

Donde los coeficientes w_i,α_i y $\beta_{i,i}$ son constantes que se obtienen a partir de una aproximación por el polinomio de Taylor.

El orden del método corresponde a la variable n.

Las ecuaciones del método de Runge-Kutta de segundo orden son:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \qquad i = 0, 1, 2, 3, ... \tag{16}$$

Donde:

$$\begin{gathered}
k_1 = hf(X_i, Y_i) \\
k_2 = hf(X_i + h, Y_i + k_1)
\end{gathered} \tag{17}$$

De la misma forma, las ecuaciones del método de Runge-Kutta de cuarto orden son:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad i = 0, 1, 2, 3, ... \tag{18}$$

Donde:

$$\begin{gathered}
k_1 = hf(X_i, Y_i) \\
k_2 = hf\left(X_i + \tfrac{h}{2}, Y_i + \tfrac{k_1}{2}\right) \\
k_3 = hf\left(X_i + \tfrac{h}{2}, Y_i + \tfrac{k_2}{2}\right) \\
k_4 = hf\left(X_i + h, Y_i + k_3\right)
\end{gathered} \tag{19}$$

Procediendo a la solución de $Y' = 2 - \frac{Y}{X}$ con condición inicial $Y(1) = 0$ en el intervalo $[1, 1{,}5]$ con un paso $h = 0{,}1$. por el método de Runge-Kutta de segundo orden. Conforme a (16) y (17) las ecuaciones iterativas son:

$$k_1 = h\left(2 - \frac{Y_i}{X_i}\right)$$

$$k_2 = h\left[2 - \frac{Y_i+k_1}{X_i+h}\right]$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Realizando la primera iteración para $i = 0$:

$$k_1 = h\left(2 - \frac{Y_0}{X_0}\right)$$

$$k_2 = h\left[2 - \frac{Y_0+k_1}{X_0+h}\right]$$

$$Y_1 = Y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Sustituyendo valores:

$$k_1 = (0{,}1)\left(2 - \frac{0}{1}\right) = 0{,}20000$$

$$k_2 = (0{,}1)\left[2 - \frac{0+0{,}200000}{1+0{,}1}\right] = 0{,}18182$$

$$Y_1 = 0 + \frac{1}{2}(0{,}20000 + 0{,}18182) = 0{,}19091$$

La segunda iteración para $i = 1$:

$$k_1 = h\left(2 - \frac{Y_1}{X_1}\right)$$

$$k_2 = h\left[2 - \frac{Y_1+k_1}{X_1+h}\right]$$

$$Y_1 = Y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Sustituyendo valores:

$$k_1 = (0{,}1)\left(2 - \frac{0{,}19091}{1{,}1}\right) = 0{,}18264$$

$$k_2 = (0{,}1)\left[2 - \frac{0{,}19091+0{,}18264}{1{,}1+0{,}1}\right] = 0{,}16887$$

$$Y_1 = 0{,}19091 + \frac{1}{2}(0{,}18264 + 0{,}16887) = 0{,}36667$$

La solución completa se muestra en el cuadro 4.

Utilizando ahora el método de Runge-Kutta de 4° orden. Las ecuaciones recursivas a partir de (18) y (19):

$$k_1 = h\left(2 - \frac{Y_i}{X_i}\right)$$

$$k_2 = h\left[2 - \frac{Y_i+\frac{k_1}{2}}{X_i+\frac{h}{2}}\right]$$

$$k_3 = h\left[2 - \frac{Y_i+\frac{k_2}{2}}{X_i+\frac{h}{2}}\right]$$

$$k_4 = h\left[2 - \frac{Y_i+k_3}{X_i+h}\right]$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Cuadro 4: Solución por Runge-Kutta 2°orden

i	X	K_1	k_2	Y
0	1			0
1	1,1	0,20000	0,18182	0,19091
2	1,2	0,18264	0,16887	0,36667
3	1,3	0,16944	0,15876	0,53077
4	1,4	0,15917	0,15072	0,68571
5	1,5	0,15102	0,14422	0,83333

La primera iteración para $i = 0$:

$$k_1 = h\left(2 - \frac{Y_0}{X_0}\right)$$
$$k_2 = h\left[2 - \frac{Y_0+\frac{k_1}{2}}{X_0+\frac{h}{2}}\right]$$
$$k_3 = h\left[2 - \frac{Y_0+\frac{k_2}{2}}{X_0+\frac{h}{2}}\right]$$
$$k_4 = h\left[2 - \frac{Y_0+k_3}{X_0+h}\right]$$
$$Y_1 = Y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Sustituyendo valores:

$$k_1 = (0{,}1)\left(2 - \frac{0}{1}\right) = 0{,}20000$$
$$k_2 = (0{,}1)\left[2 - \frac{0+\frac{0{,}20000}{2}}{1+\frac{0{,}1}{2}}\right] = 0{,}19048$$
$$k_3 = h\left[2 - \frac{0+\frac{0{,}19048}{2}}{1+\frac{0{,}1}{2}}\right] = 0{,}19093$$
$$k_4 = h\left[2 - \frac{0+0{,}19093}{1+0{,}1}\right] = 0{,}18264$$
$$Y_1 = 0 + \frac{1}{6}(0{,}20000 + 2(0{,}19048) + 2(0{,}19093) + 0{,}18264) = 0{,}19091$$

La primera iteración para $i = 1$:

$$k_1 = h\left(2 - \frac{Y_1}{X_1}\right)$$
$$k_2 = h\left[2 - \frac{Y_1+\frac{k_1}{2}}{X_1+\frac{h}{2}}\right]$$
$$k_3 = h\left[2 - \frac{Y_1+\frac{k_2}{2}}{X_1+\frac{h}{2}}\right]$$
$$k_4 = h\left[2 - \frac{Y_1+k_3}{X_1+h}\right]$$
$$Y_2 = Y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Sustituyendo valores

$$k_1 = (0{,}1)\left(2 - \frac{0{,}19091}{1{,}1}\right) = 0{,}18264$$
$$k_2 = (0{,}1)\left[2 - \frac{0{,}19091+\frac{0{,}18264}{2}}{1{,}1+\frac{0{,}1}{2}}\right] = 0{,}17546$$
$$k_3 = (0{,}1)\left[2 - \frac{0{,}19091+\frac{0{,}17546}{2}}{1{,}1+\frac{0{,}1}{2}}\right] = 0{,}17577$$
$$k_4 = (0{,}1)\left[2 - \frac{0{,}19091+0{,}17577}{1{,}1+0{,}1}\right] = 0{,}16944$$
$$Y_2 = 0{,}19091 + \frac{1}{6}(0{,}18264 + 2(0{,}17546) + 2(0{,}17577) + 0{,}16944) = 0{,}36667$$

La solución completa se muestra en el cuadro 5.

Cuadro 5: Solución por Runge-Kutta 4°orden

i	X	K_1	k_2	k_3	k_4	Y
0	1					0,00000
1	1,1	0,20000	0,19048	0,19093	0,18264	0,19091
2	1,2	0,18264	0,17546	0,17577	0,16944	0,36667
3	1,3	0,16944	0,16389	0,16411	0,15917	0,53077
4	1,4	0,15917	0,15479	0,15495	0,15102	0,68571
5	1,5	0,15102	0,14750	0,14762	0,14444	0,83333

4. Método de la serie de Taylor

El desarrollo por serie de Taylor corresponde a la siguiente expresión:

$$Y(X) = Y(X_0) + (X - X_0)Y'(X_0) + \frac{(X - X_0)^2}{2!}Y''(X_0) + \frac{(X - X_0)^3}{3!}Y'''(X_0) + ... \qquad (20)$$

Al utilizar esta expresión se comete un error debido a que se trata de una serie infinita; adicionalmente, para que se considere correcto su uso debe evaluarse en un entorno muy cercano a X_0; el resultado pierde validez si la evaluación se aleja de este punto.

Su uso consiste en *construir* a la solución de la ecuación diferencial $Y(X)$ a partir de la ecuación diferencial, en este caso, de primer orden $Y'(X) = f(X, Y)$ y su condición inicial $Y(X_0)$. De hecho, si se contrasta la ecuación (20) y estas últimas dos definiciones se observa que se conocen los dos primeros sumandos de la serie de Taylor. Sólo es necesario derivar a la ecuación diferencial tantas veces como términos se desee que conformen al polinomio solución. El valor X_0 en el que se evalúa a la serie corresponde a la condición inicial de la ecuación diferencial.

Este método estrictamente hablando no corresponde a un método numérico ya que no es necesario realizar iteraciones y proporciona un polinomio; no obstante se considera como tal por las precisiones que deben tomarse en cuenta por los aspectos de precisión debidos al truncamiento de una serie infinita.

Una vez más, procediendo a la solución de $Y' = 2 - \frac{Y}{X}$ con condición inicial $Y(1) = 0$ en el intervalo $[1, 1{,}5]$ con un paso $h = 0{,}1$ con la serie de términos hasta $n = 3$.

Conforme a (20):

$$Y(X) = Y(X_0) + (X - X_0)Y'(X_0) + \frac{(X - X_0)^2}{2!}Y''(X_0) + \frac{(X - X_0)^3}{3!}Y'''(X_0)$$

El punto X_0 corresponde a la condición inicial, es decir: $X_0 = 1$. Construyendo el polinomio de Taylor:

$$Y(X_0) = Y(1) = 0$$

$$(X - X_0) = X - 1$$

$$Y'(X_0) = 2 - \tfrac{Y}{X} \Rightarrow Y'(1) = 2$$

$$(X - X_0)^2 = (X - 1)^2$$

$$Y''(X_0) = -Y' \Rightarrow Y''(1) = -2$$

$$(X - X_0)^3 = (X - 1)^3$$

$$Y'''(X_0) = -Y'' \Rightarrow Y'''(1) = 2$$

Debe hacerse notar que para obtener Y'' se deriva con respecto a X a la ecuación diferencial $Y' = 2 - \frac{Y}{X}$, repitiéndose el concepto para encontrar derivadas sucesivas. Sustituyendo estos resultados en el polinomio de Taylor para $n = 3$ se obtiene la solución:

$$Y(X) = 0 + (X - 1)(2) + \frac{(X - 1)^2}{2!}(-2) + \frac{(X - 1)^3}{3!}(2)$$
$$Y(X) = \frac{1}{3}X^3 - 2X^2 + 5X - \frac{10}{3}$$

5. Comparación entre métodos

Para realizar una comparación objetiva entre todos los resultados obtenidos al momento, se resuelve la ecuación diferencial $XY' + Y = 2X$ [4]con condición inicial $Y(1) = 0$ por medios analíticos, resultando $Y = X - \frac{1}{X}$. Valuando esta ecuación en el intervalo solución $[1, 1{,}5]$ con $h = 0{,}1$ obtenemos una función tabular de la misma naturaleza que las que proporcionan los métodos ya citados. En el caso de la serie de Taylor, el polinomio resultado $Y(X) = \frac{1}{3}X^3 - 2X^2 + 5X - \frac{10}{3}$ también es tabulado:

En la figura 5 se grafican los diversos resultados con el objetivo de comparar visualmente las diferencias en los resultados. En ella se observan sólo tres líneas en lugar de las seis que fueron graficadas. Ocurre que cuatro soluciones son prácticamente idénticas lo que obliga a que se encimen sus líneas: la solución real, Euler-Gauss y Runge-Kutta de 2º y 4º orden. La línea verde corresponde a la solución por Euler y la amarilla a Taylor.

Resultaría muy práctico aumentar la precisión de las cifras utilizadas para buscar una mayor diferenciación en las gráficas, pero definitivamente los resultados serían los mismos. Euler presenta el mayor error de todos los métodos y Taylor puede mejorarse si se aumente el número de términos contemplados en su polinomio, considerando que no debe alejarse mucho de su punto X_0

Cuadro 6: Comparativo de soluciones

X	$\binom{solucion}{exacta}$	Euler	$\binom{Euler}{Gauss}$	$\binom{Runge-Kutta}{2\,orden}$	$\binom{Runge-Kutta}{4\,orden}$	Taylor
1,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1,1	0,19091	0,20000	0,19091	0,19091	0,19091	0,19033
1,2	0,36667	0,38182	0,36667	0,36667	0,36667	0,36267
1,3	0,53077	0,55000	0,53077	0,53077	0,53077	0,51900
1,4	0,68571	0,70769	0,68571	0,68571	0,68571	0,66133
1,5	0,83333	0,85714	0,83333	0,83333	0,83333	0,79167

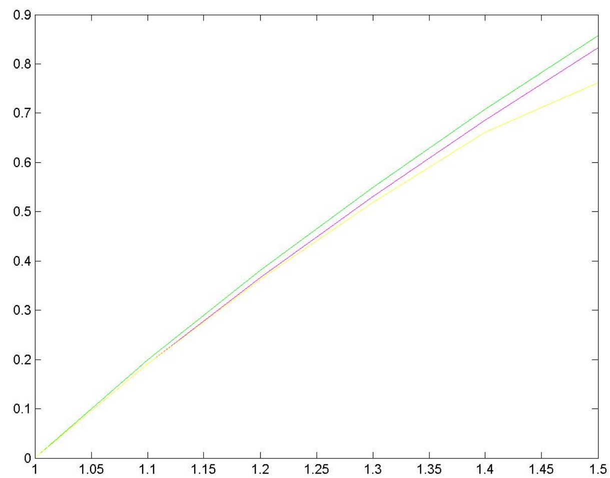

Figura 5: Resultados

6. Conclusiones

Las herramientas numéricas para la solución de ecuaciones diferenciales aportan sin duda alguna una aproximación muy buena en comparación con los resultados obtenidos en forma analítica. Por otra parte, su programación es muy sencilla. Ambas cualidades ha permitido el desarrollo de simulaciones y aplicaciones visuales en sistemas de cómputo que permite la mejor comprensión y solución de problemas físicos.

Referencias

[1] Gerald Curtis F. Wheatley Partick O. *Análisis numérico con aplicaciones*. 6a edición edition, México 2000.

[2] Burden Richard. Faires Douglas. *Análisis Numérico*. Madrid 2002.

[3] Iriarte-Vivar Rafael. *Métodos numéricos*. México 1990.

[4] Zill Dennis G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. México 1993.

[2]

[2] Editado por Juan Carlos Marín Helú. Junio 2011