Solución de ecuaciones algebraicas y trascendentes: Método de la Interpolación lineal *

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán **

2011

Resumen

Introducción. Definición del método e interpretación geométrica. Criterio de convergencia. Ejemplo de aplicación.

1. Introducción

Una cuerda, geométricamente hablando, se refiere a la distancia interna que existe entre una curva y una recta secante de la misma curva. Como se verá más adelante, la geometría que se forma en torno a esta cuerda asociada a la búsqueda de la raíz de función, en este caso, la curva, permite establecer un método numérico considerado más eficiente que Bisección y que, con las debidas precauciones, suele ser más rápido [1]. Se aplica a funciones algebraicas y trascendentes y proporciona sólo raíces reales.

Este método es de tipo cerrado, es decir, requiere de un intervalo $[a, b]$ que pertenece al dominio de la función y para el cual $f(a) \cdot f(b) < 0$, lo que implica que en el intervalo $[a, b]$ existe al menos una raíz.

2. Definición del método e interpretación geométrica

A partir [2] de una $f(X)$ algebraica o trascendente, se requiere determinar el intervalo $[a, b]$ que contiene al menos una raíz, como lo muestra la figura 1.

El método propone unir los puntos $f(a)$ y $f(b)$ con una línea recta de tal forma que se construya la cuerda de la función. Estra línea recta deberá cortar al eje de la abscisas en un punto al que llamaremos X_0 porque será la primera aproximación a la raíz buscada. El paso siguiente será determinar cuál de los extremos del intervalo $[a, b]$ es sustituido por X_0 de tal forma que se cumpla aún con el

* También llamado *De la regla falsa o de las cuerdas*

** Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

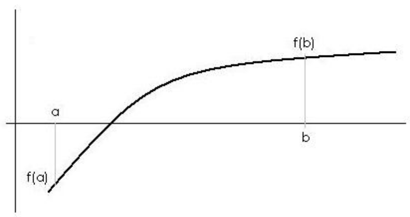

Figura 1: $f(X)$ y el intervalo $[a, b]$ que contiene la raíz

criterio de convergencia $f(a) \cdot f(b) < 0$. Para el caso de la geometría que se muestra en la figura 2, el extremo b es sustituido por X_0.

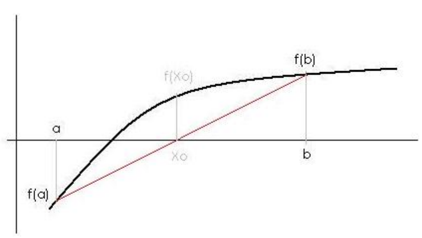

Figura 2: Trazo de la recta entre $f(a)$ y $f(X_0)$

Se traza de nuevo una nueva recta, ahora entre $f(a)$ y $f(X_0)$ la cual nuevamente deberá cortar al eje horizontal, más cerca de la raíz de la función. Vigilando el criterio de convergencia, este proceso se repetirá el número de veces que sea necesario hasta que la diferencia entre las aproximaciones $f(X_i)$ y $f(X_{i-1})$ sea menor que una tolerancia preestablecida (figura 3).

La fórmula de recurrencia [1] se obtiene de la geometría inicialmente planteada en la figura 2. Puede observarse en la figura 4 que con la recta de la primera iteración se forman dos triángulos semejantes

[1] Es la expresión mediante la cual se calculan las aproximaciones a la raíz

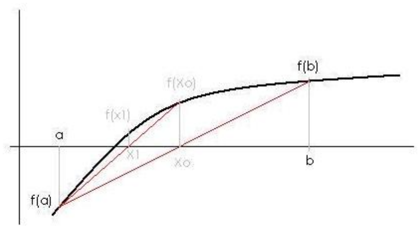

Figura 3: Repetición del trazo de rectas

que pueden modelarse con la siguiente expresión:

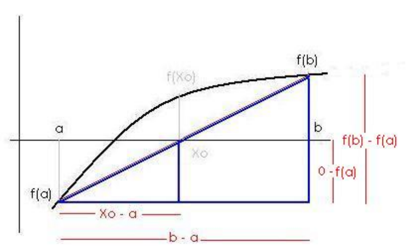

Figura 4: Determinación de la ecuación de recurrencia

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - f(a)}{X_0 - a}$$

A partir de esta expresión es de donde el método toma sus diversos nombres: Por una parte, se le denomina *Interpolación lineal* ya que por este medio se busca la raíz de la función; por otra parte, se observa claramente que el punto $f(X_0)$, que es el valor de la función en X_0 en su primera iteración no corresponde a la raíz de $f(X)$ sino al cruce de la recta por el eje horizontal. Al hacer el supuesto de que en cada iteración $f(X) = f(X_0) = 0$permite en forma iterativa aproximarse a la función.

Este supuesto se denomina comúnmente *Regla falsa*[2]. Si aceptamos el concepto de la regla falsa, la incógnita de la ecuación es X_0. Despejándola se obtiene:

$$X_0 = a + \frac{(a-b)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

Una vez obtenida la aproximación X_0 deberá evaluarse $f(X_0)$ y de acuerdo a la geometría utilizada en el desarrollo de la ecuación de recurrencia, sustituirse alguno de los extremos del intervalo $[a, b]$:

- Si $f(X_0) < 0$, entonces X_0 sustituye a a
- Si $f(X_0) > 0$, entonces X_0 sustituye a b

El proceso se detiene cuando entre la aproximación X_i y la aproximación anterior X_{i-1} se satisface un nivel de error (absoluto o relativo) preestablecido (tolerancia).

3. Criterio de convergencia

Como se ha mencionado, en cada de las iteraciones debe vigilarse el cumplimiento de la expresión $f(a) \cdot f(b) < 0$ lo que garantiza que en el intervalo $[a, b]$ siempre está contenida una raíz.

4. Ejercicio de aplicación

Retomemos la sencilla función $f(x) = X^2 - 0{,}5$ y su gráfica en la figura 5. Calculemos ahora la raíz positiva que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$, tal que $a = 0$ ya que $f(0) = -0{,}5$ y $b = 1$ ya que $f(1) = 0{,}5$, garantizando el cumplimiento del criterio de convergencia.

La primera aproximación es:

$$X_0 = 0 + \frac{(0-1)\cdot(-0{,}5)}{(0{,}5)-(-0{,}5)} = 0{,}5$$
$$f(X_0) = -0{,}25$$

Ya que $f(0{,}5)$ es negativo, se sustituye a a y el nuevo intervalo que atrapa a la raíz es $[0{,}5, 1]$, conservándose el criterio de equivalencia. La siguiente iteración sera:

$$X_1 = 0{,}5 + \frac{(0{,}5-1)\cdot(-0{,}25)}{(0{,}5)-(-0{,}25)} = 0{,}66667$$
$$f(X_1) = -0{,}05556$$

Por otra parte, el error absoluto E entre las dos aproximaciones es:

$$E = \mid X_1 - X_0 \mid = \mid (0{,}6667) - (0{,}5) \mid = 0{,}1167$$

Cuando este error E cumpla con una tolerancia prestablecida, el método se detiene y la última X_i obtenida será considerada como la raíz de $f(X)$. En el cuadro 1 se muestra la evolución del método.

[2]Algunos autores utilizan el término original *Regula falsi*

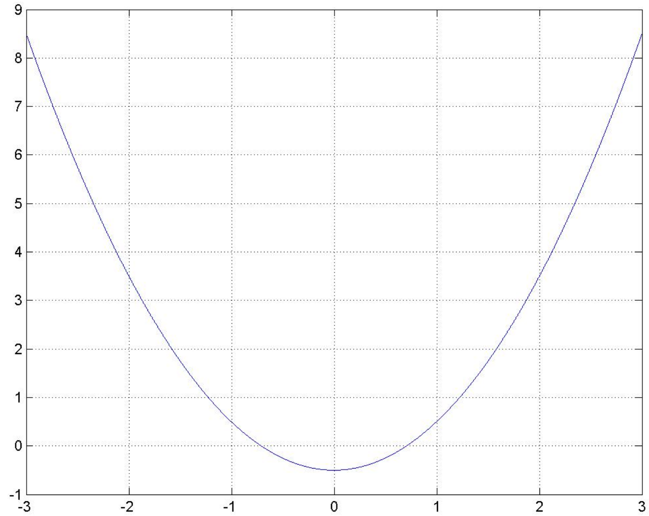

Figura 5: $f(x) = X^2 - 0{,}5$

Cuadro 1: Solución al ejemplo

Iteración	0	1	2	3	4	5	6
a	0	0.5	0.6667	0.70000	0.70588	0.70690	0.70707
b	1	1	1	1	1	1	1
$f(a)$	-0.5	-0.25	-0.05556	-0.01000	-0.00173	-0.00030	-0.00005
$f(b)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Criterio de convergencia	Cumple	Cumple	Cumple	Cumple	Cumple	Cumple	Cumple
Aproximación	0.5	0.66667	0.70000	0.70588	0.70690	0.70707	0.70710
$f(x_i)$	-0.25	-0.05556	-0.01000	-0.00173	-0.00030	-0.00005	-0.00001
Tolerancia	-	0.16667	0.03333	0.00588	0.00101	0.00017	0.00003

Como conclusión podemos afirmar que con una tolerancia absoluta de $E = 0{,}00003$ la raíz de $f(x) = X^2 - 0{,}5$ es $X = 0{,}70710$ obtenida en 7 iteraciones.

De este ejercicio pueden obtenerse varias conclusiones previas:

- El método de Interpolación lineal alcanzó una tolerancia predefinida de una milésima en la mitad de iteraciones que el método de bisección.
- En el desarrollo del método se pudo observar que un punto del intevalo $[a, b]$, en este caso $b = 1$ y en consecuencia $f(b) = 0{,}5$ se mantuvo fijo.

Esta última observación permite hacer una mejora al método con el fin de aumentar su velocidad. Cuando se detecta que uno de los extremos del intervalo permanece fijo (en forma empírica, después de almenos dos iteraciones en el cual permanece inalterable), su correspondiente valor $f(X)$ se sustituye por $\frac{f(X)}{2}$. Geométricamente ocurre que la recta que seforma entre los extremos del intervalo se acerca más a la raíz disminuyendo el número de iteraciones necesarias para satisfacer la tolerancia preestablecida.

5. Conclusiones

El método de la Interpolación lineal permite alcanzar una aproximación a la raíz de una forma más rápida que Bisección [3]. Sin embargo, presenta fallas cuando en el intervalo $[a, b]$ hay más de una raíz. Es quizá por este motivo por el cual se prefiere al lento método de Bisección (por robusto) que este método más rápido, pero potencialmente inestable.

Referencias

[1] Mc Cracken Daniel. *Métodos numéricos y programación en Fortran con aplicaciones en ingeniería y ciencias*. Madrid 1967.

[2] Burden Richard. Faires Douglas *Análisis Numérico*. Madrid 2002.

[3] Raymond. Chapra, Steven. Canale. *Métodos numéricos para Ingenieros*. México 1999.