

Solución de ecuaciones algebraicas y trascendentes: Método de Aproximaciones sucesivas^{*}

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán^{**}

2011

Resumen

Introducción. Definición del método . Criterio de convergencia y su interpretación geométrica.

1. Introducción

El método de Aproximaciones sucesivas representa la esencia de los procesos iterativos ya que permite definir una ecuación de recurrencia que, en apariencia, no tiene sentido desde el punto de vista algebraico, pero que resulta muy atinada si se toma un valor inicial y se mejora a través de las iteraciones.

Sin embargo, el método como tal no es ciento por ciento aplicable para cualquier ecuación algebraica o trascendente; no obstante, se utiliza como base para completar otros métodos abiertos.

2. Definición del método

Aproximaciones sucesivas es un método abierto, es decir, no necesita de un intervalo que atrape una raíz, sino que requiere de un valor x_0 que representa un valor aproximado a la raíz y de cuya cercanía al valor real dependerá la velocidad en que se cumpla con una tolerancia preestablecida.

Una forma sencilla de definir un método de Aproximaciones sucesivas consiste en despejar de una ecuación a la variable independiente; esto se aplica particularmente en ecuaciones que por su forma no permiten despejar fácilmente a la incógnita. Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + 7x - e^x = 0$ no puede lograrse un "despeje" sencillo, algebraicamente hablando.

Desde un punto de vista iterativo, la ecuación puede expresarse como:

^{*}También llamado *De punto fijo*

^{**}Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

$$x^2 + 7x - e^x = 0 \implies x = \frac{e^x - x^2}{7}$$

En efecto, algebraicamente hablando, el despeje anterior no aporta mejora en la solución de la ecuación. Sin embargo, sí se define en forma iterativa:

$$x_{i+1} = \frac{e^{x_i} - x_i^2}{7}$$

donde x_i es un valor inicial y x_{i+1} es un valor corregido que, en un escenario favorable, tendrá una cantidad de error menor con respecto a la raíz de la ecuación. El proceso iterativo se detendrá cuando entre dos aproximaciones sucesivas (de aquí el nombre del método) se satisfaga la tolerancia preestablecida.

No obstante la aparente facilidad que se muestra, el método no es ciento por ciento eficaz en todas las ecuaciones, como se verá posteriormente.

Con el fin de dar formalidad matemática, se propone el siguiente desarrollo:

Sea $f(x)$ una función algebraica o trascendente:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Sin alterar la ecuación, se suma en ambos miembros la variable independiente:

$$f(x) + x = x \tag{2}$$

Definiendo al término:

$$G(x) = f(x) + x \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2) se tiene:

$$G(x) = x \tag{4}$$

La ecuación (4) representa el método de Aproximaciones sucesivas, por lo cual debe expresarse en forma iterativa:

$$x_{i+1} = G(x_i) \tag{5}$$

La aplicación del método consiste en proporcionar una aproximación inicial a la raíz de la ecuación (que puede obtenerse por medios gráficos o al detectar un cambio de signo en la función tabular) y sustituirla en la ecuación (5), obteniéndose una nueva aproximación. De nuevo deberá sustituirse la última aproximación hasta que la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas satisfaga determinada tolerancia preestablecida. Es importante aclarar que aún cuando se utilice la ecuación de recurrencia (5) las raíces corresponden a la función original $f(x)$.

3. Criterio de convergencia y su interpretación geométrica

La obtención del criterio de convergencia [1] del método de Aproximaciones sucesivas constituye su principal aportación. En la práctica es común encontrar funciones con varias raíces que cuando se desea aplicar el método para determinar cada una de ellas se encontrará que su implantación no siempre arroja los resultados deseados.

Geométicamente, la ecuación (5) representa a la curva $y = G(x)$ y a la recta con pendiente unitaria $y = x$. El punto donde la curva y la recta son iguales, es decir, en su intersección corresponde a la raíz en su proyección en el eje horizontal, de acuerdo a la figura 1.

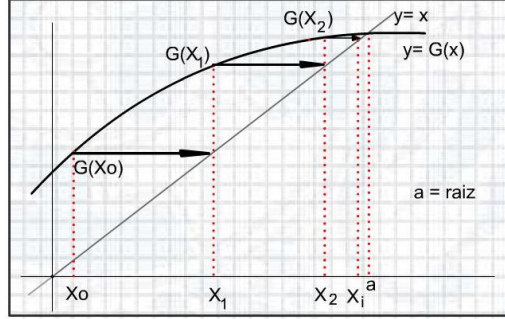


Figura 1: Interpretación geométrica del método de Aproximaciones sucesivas [2]

Sea $f(x)$ una ecuación algebraica o trascendente que tiene como raíz real al número a , sustituyendo en la ecuación (4):

$$a = G(a) \quad (6)$$

Restando a la ecuación (6) la ecuación (5):

$$a - x_i = G(a) - G(x_{i-1}) \quad (7)$$

Multiplicando el segundo miembro de (7) por el factor unitario:

$$\begin{aligned} & \frac{a - x_{i-1}}{a - x_{i-1}} \\ a - x_i &= \frac{G(a) - G(x_{i-1})}{a - x_i} \cdot (a - x_i) \end{aligned} \quad (8)$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial:

$$G'(\tau) = \frac{G(a) - G(x_{i-1})}{a - x_{i-1}}; \quad x_{i-1} \leq \tau \leq a \quad (9)$$

Sustituyendo la ecuación (9) en la ecuación (8):

$$a - x_i = G'(\tau)(a - x_i); \quad x_{i-1} \leq \tau \leq a \quad (10)$$

Despejando $G'(\tau)$:

$$G'(\tau) = \frac{a - x_i}{a - x_{i-1}}; \quad x_{i-1} \leq \tau \leq a \quad (11)$$

En el segundo miembro de la ecuación (11) puede observarse que su denominador debe ser mayor que el numerador, toda vez que x_{i-1} posee un mayor error que x_i ya que es una aproximación previa. Esto implica que:

$$|G'(\tau)| = \frac{|a - x_i|}{|a - x_{i-1}|} < 1 \quad (12)$$

En consecuencia, el método convergerá si se cumple que:

$$|G'(\tau)| < 1; \quad x_{i-1} \leq \tau \leq a \quad (13)$$

Donde τ representa la primera aproximación a la raíz de la ecuación.

Resulta importante verificar este criterio antes de iniciar la búsqueda de la raíz a través de las iteraciones. Por otra parte, en la ecuación (11) cuando el denominador no es mayor que el numerador, es decir, el valor x_i posee un mayor error que x_{i-1} , ocurre que el método no es convergente. En conclusión, el método no converge en la aproximación τ si:

$$|G'(\tau)| > 1; \quad x_{i-1} \leq \tau \leq a \quad (14)$$

Los procesos de convergencia y divergencia pueden explicarse en las en las figuras de la 2 a la 5[2]; en todas ellas, el éxito o fracaso del método depende del valor de $G'(\tau)$.

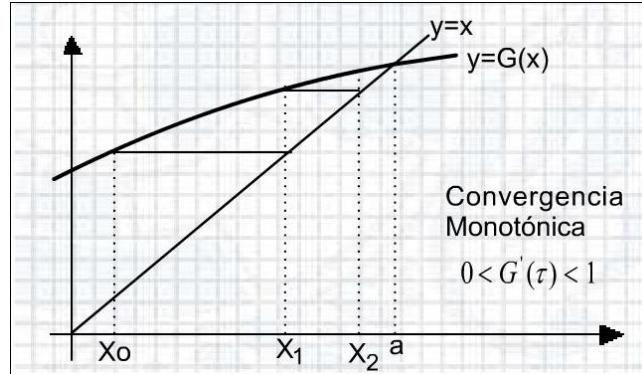


Figura 2: Convergencia monótona

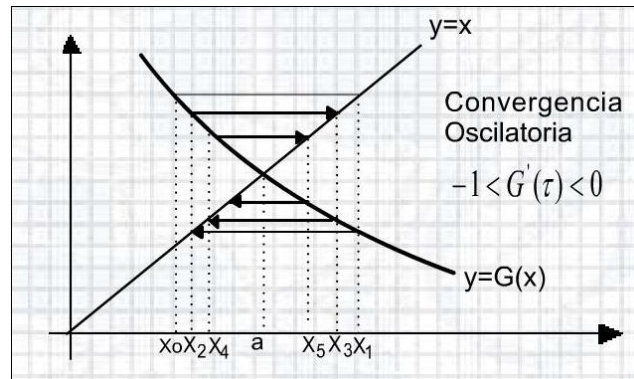


Figura 3: Convergencia oscilatoria

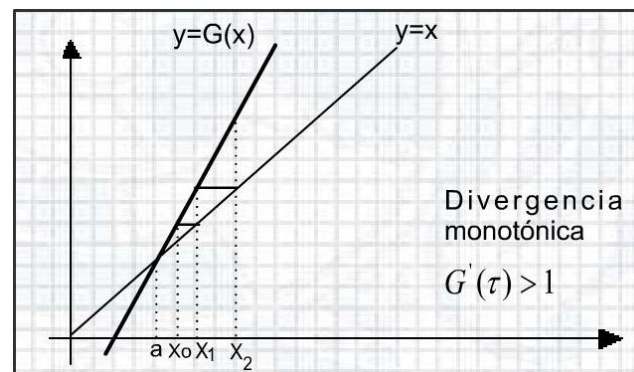


Figura 4: Divergencia monotónica

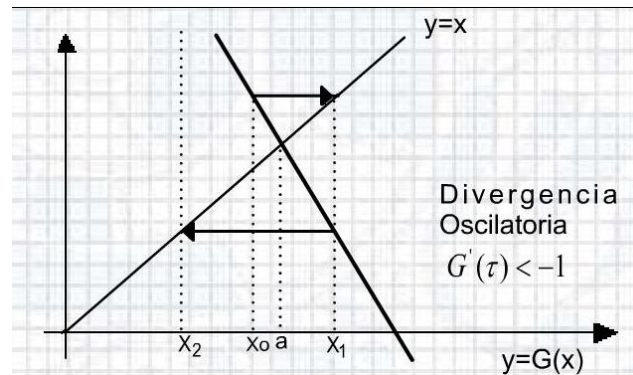


Figura 5: Divergencia oscilatoria

4. Conclusiones

Como ya se ha mencionado, la principal aportación del método de Aproximaciones sucesivas es la determinación del criterio de convergencia, ya que se debe aplicar a todos los métodos abiertos o de punto fijo.

El método como tal no suele ser muy popular, precisamente por el hecho de no funcionar en la gran mayoría de las ecuaciones a las que se les propone resolver. No obstante, es una opción válida para ser utilizado.

Referencias

- [1] Rafael. Iriarte Vivar. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. 1990.
- [2] Chapra Steven. Canale Raymond. *Métodos numéricos para Ingenieros*. México 1999.