

Solución de sistemas de ecuaciones lineales: Descomposición LU

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Introducción. Definición de la descomposición LU. Solución de un sistema de ecuaciones lineales por medio de la descomposición LU. Ejemplo de aplicación.

1. Introducción

La descomposición LU ¹ [1] es una forma de expresar las transformaciones del método Gauss-Jordan por medio de ecuaciones matriciales, lo que implica una reducción notable en las operaciones propias y, naturalmente, en el diseño del algoritmo. Asimismo, se reduce notablemente el impacto de la producción de errores debidos al pivoteo; adicionalmente, la descomposición LU puede utilizarse para otros procesos como la obtención de la matriz inversa.

2. Definición de la descomposición LU

La descomposición LU consiste en encontrar dos matrices, L y U construidas de tal forma que se cumpla que:

$$A = L \cdot U \quad (1)$$

Las características de las matrices L y U dependen de cada una de las versiones definidas para la descomposición:

- Versión Crout. En la versión Crout, la matriz L es una matriz triangular inferior de la forma 2 y la matriz U una matriz triangular superior con elementos unitarios en la diagonal principal, según la forma 3.

*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

¹También conocido como reducción Cholesky

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \dots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & \dots & U_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & U_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & U_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

- Versión Doolittle. La versión Doolittle define a las matrices L y U a la manera inversa que Crout; la matriz U es una matriz triangular superior de la forma 4 y la matriz L una matriz triangular superior con elementos unitarios en la diagonal principal, según la forma 5.

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 & 0 & \dots & 0_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & 0 & \dots & 0_{2n} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & \dots & 0_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & U_{n3} & \dots & U_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1n} \\ 0 & 1 & L_{23} & \dots & L_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & L_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

En este trabajo se desarrollarán las expresiones para obtener los coeficientes de las matrices L y U de acuerdo con la versión Crout para un esquema inicial de una matriz A de orden 4 y después para cualquier orden; el mecanismo es idéntico si se desea obtener los correspondientes a Doolittle.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & L_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (6)$$

El esquema indicado en la ecuación 6 implica que la multiplicación de las matrices L y U tiene como resultado la matriz A . De tal forma, lo procedente es realizar la multiplicación término a término con las reglas específicas del álgebra matricial. No obstante, se propone que la obtención de los términos de las matrices L y U se hagan en determinado orden con el fin de obtener valores directos y no aparezcan incógnitas durante el proceso. El orden propuesto es alternar el cálculo de columnas de L con los propios de la matriz U .

Siguiendo la recomendación anterior, se calcula la primera columna de la matriz L multiplicando los renglones de L por la primera columna de U :

$$\begin{aligned} L_{11} &= a_{11} \\ L_{21} &= a_{21} \\ L_{31} &= a_{3,1} \end{aligned} \quad (7)$$

Posteriormente, se hace el cálculo del primer renglón de la matriz U multiplicando el primer renglón de L por las columnas de U :

$$\begin{aligned} L_{11} \cdot U_{12} &= a_{12} \Rightarrow U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}} \\ L_{11} \cdot U_{13} &= a_{13} \Rightarrow U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}} \\ L_{11} \cdot U_{14} &= a_{14} \Rightarrow U_{14} = \frac{a_{14}}{L_{11}} \end{aligned} \quad (8)$$

Para la segunda columna de L multiplicando los renglones de L por la segunda columna de U :

$$\begin{aligned} L_{21} \cdot U_{12} + L_{22} &= a_{22} \Rightarrow L_{22} = a_{22} - L_{21} \cdot U_{12} \\ L_{31} \cdot U_{12} + L_{32} &= a_{32} \Rightarrow L_{32} = a_{32} - L_{31} \cdot U_{12} \\ L_{41} \cdot U_{12} + L_{42} &= a_{42} \Rightarrow L_{42} = a_{42} - L_{41} \cdot U_{12} \end{aligned} \quad (9)$$

Para el segundo renglón de U se multiplica el segundo renglón de L por las columnas de U :

$$\begin{aligned} L_{21} \cdot U_{13} + L_{22} \cdot U_{23} &= a_{23} \Rightarrow U_{23} = \frac{a_{23} - L_{21}U_{13}}{L_{22}} \\ L_{21} \cdot U_{14} + L_{22} \cdot U_{24} &= a_{24} \Rightarrow U_{24} = \frac{a_{24} - L_{21}U_{14}}{L_{22}} \end{aligned} \quad (10)$$

Para el tercer renglón de L se multiplican los renglones de L por la tercera columna de U :

$$\begin{aligned} L_{31} \cdot U_{13} + L_{32} \cdot U_{23} + L_{33} &= a_{33} \Rightarrow L_{33} = a_{33} - (L_{31} \cdot U_{13} + L_{32} \cdot U_{23}) \\ L_{41} \cdot U_{13} + L_{42} \cdot U_{23} + L_{43} &= a_{43} \Rightarrow L_{43} = a_{43} - (L_{41} \cdot U_{13} + L_{42} \cdot U_{23}) \end{aligned} \quad (11)$$

Para el único elemento del tercer renglón de U se multiplica el tercer renglón de L por la cuarta columna de U :

$$\begin{aligned} L_{31} \cdot U_{14} + L_{32} \cdot U_{24} + L_{33} \cdot U_{34} &= a_{34} \\ U_{34} &= \frac{a_{34} - (L_{31} \cdot U_{14} + L_{32} \cdot U_{24})}{L_{33}} \end{aligned} \quad (12)$$

Finalmente, la última columna de L compuesta por un único elemento, se multiplica el cuarto renglón de L por la cuarta columna de U :

$$\begin{aligned} L_{41} \cdot U_{14} + L_{42} \cdot U_{24} + L_{43} \cdot U_{34} + L_{44} &= a_{44} \\ L_{44} &= a_{44} - (L_{41} \cdot U_{14} + L_{42} \cdot U_{24} + L_{43} \cdot U_{34}) \end{aligned} \quad (13)$$

Puede observarse que el hecho de haber calculado alternadamente columnas de L con renglones de U permite obtener los coeficientes respectivos de inmediato.

A partir de los resultados obtenidos para este esquema de orden $n = 4$ se concluyen las expresiones generales:

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj} \quad (14)$$

donde

$$j \leq i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$U_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}}{L_{ii}} \quad (15)$$

donde

$$i \leq j \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Con los casos particulares para la primera columna de L , es decir, cuando $j = 1$:

$$L_{i1} = a_{i1} \quad (16)$$

Y para el primer renglón de U , cuando $i = 1$:

$$U_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (17)$$

Realicemos un ejemplo. Sea la matriz A , obtener las matrices L y U :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

De acuerdo con 16:

$$L_{11} = a_{11} = 3 \quad L_{21} = a_{21} = -1 \quad L_{31} = a_{31} = 2 \quad L_{41} = a_{41} = 7$$

Realizando la alternancia propuesta, utilizando 17

$$U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}} = -0,33333 \quad U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}} = 1,33333 \quad U_{14} = \frac{a_{14}}{L_{11}} = -0,33333$$

Corresponde el cálculo de la segunda columna de L con la ecuación 14:

$$\begin{aligned} L_{22} &= a_{22} - \sum_{k=1}^1 L_{2k} U_{k2} = a_{22} - [L_{21} \cdot U_{12}] = -1 - [(-1) \cdot (-0,33333)] = -1,33333 \\ L_{32} &= a_{32} - \sum_{k=1}^1 L_{3k} U_{k2} = a_{32} - [L_{31} \cdot U_{12}] = 3 - [(2) \cdot (-0,33333)] = 3,66666 \\ L_{42} &= a_{42} - \sum_{k=1}^1 L_{4k} U_{k2} = a_{42} - [L_{41} \cdot U_{12}] = 1 - [(7) \cdot (-0,33333)] = 3,33333 \end{aligned}$$

Haciendo lo propio con el segundo renglón de U con la ecuación 15:

$$\begin{aligned} U_{23} &= \frac{a_{23} - \sum_{k=1}^1 L_{2k} U_{k3}}{L_{22}} = \frac{a_{23} - [L_{21} U_{13}]}{L_{22}} = \frac{-1 - [(-1) \cdot (1,33333)]}{-1,33333} = -3,25 \\ U_{24} &= \frac{a_{24} - \sum_{k=1}^1 L_{2k} U_{k4}}{L_{22}} = \frac{a_{24} - [L_{21} U_{14}]}{L_{22}} = \frac{1 - [(-1) \cdot (-0,33333)]}{-1,33333} = -0,5 \end{aligned}$$

Tercera columna de L :

$$\begin{aligned}
 L_{33} &= a_{33} - \sum_{k=1}^2 L_{3k}U_{k3} \\
 &= a_{33} - [L_{31} \cdot U_{13} + L_{32} \cdot U_{23}] \\
 &= -1 - [2 \cdot 1,33333 + 3,66666 \cdot (-3,25)] \\
 &= 8,25 \\
 L_{43} &= a_{43} - \sum_{k=1}^2 L_{4k}U_{k3} \\
 &= a_{43} - [L_{41} \cdot U_{13} + L_{42} \cdot U_{23}] \\
 &= 1 - [7 \cdot 1,33333 + 3,33333 \cdot (-3,25)] \\
 &= 2,5
 \end{aligned}$$

Tercer renglón de U :

$$\begin{aligned}
 U_{34} &= \frac{a_{34} - \sum_{k=1}^2 L_{3k}U_{k4}}{L_{33}} \\
 &= \frac{a_{34} - [L_{31} \cdot U_{14} + L_{32} \cdot U_{24}]}{L_{33}} \\
 &= \frac{-1 - [2 \cdot (-0,33333) + 3,66666 \cdot (-0,5)]}{8,25} \\
 &= 0,18182
 \end{aligned}$$

Finalmente, la última columna de L :

$$\begin{aligned}
 L_{44} &= a_{44} - \sum_{k=1}^3 L_{4k}U_{k4} \\
 &= a_{44} - [L_{41} \cdot U_{14} + L_{42} \cdot U_{24} + L_{43} \cdot U_{34}] \\
 &= 2 - [7 \cdot (-0,33333) + 3,33333 \cdot (-0,5) + 2,5 \cdot 0,18182] \\
 &= 5,54545
 \end{aligned}$$

Acomodando todos los resultado, se obtiene:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1,33333 & 0 & 0 \\ 2 & 3,66666 & 8,25 & 0 \\ 7 & 3,33333 & 2,5 & 5,54545 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -0,33333 & 1,33333 & -0,33333 \\ 0 & 1 & -3,25 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0,18182 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

3. Solución de un sistema de ecuaciones lineales por medio de la descomposición LU

Una vez que la matriz de coeficientes A ha sido transformada en sus matrices L y U es fácil obtener el solución de un sistema de ecuaciones. Seguramente se percibe que la matriz U tiene la forma análoga que se busca con el uso del método de Gauss, es decir, es una matriz triangular superior con los elementos de su diagonal principal iguales a uno.

En efecto, esta afirmación es correcta. Para tener un método de solución completo, si el sistema de ecuaciones ha sido modificado en su miembro izquierdo, para no alterarlo, debe ser también modificado en su miembro derecho. De hecho, la matriz L es un registro de las operaciones que se realizan en la transformación, de tal forma, si se aplican las mismas operaciones en el vector de términos independientes \bar{b} y posteriormente se hace una sustitución hacia atrás [2], el sistema queda resuelto.

Queda entonces la necesidad de aplicar las mismas operaciones a \bar{b} que fueron realizadas para obtener a U . Por lo tanto, se define al vector modificado de términos independientes \bar{b}' como:

$$\bar{b}' = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \cdot b'_k}{L_{ii}} \quad (21)$$

Donde $i = 2, 3, 4, \dots, n$. En el caso especial del primer elemento del vector modificado de términos independientes:

$$\bar{b}'_1 = \frac{b_1}{L_{11}} \quad (22)$$

Para completar el proceso, las ecuaciones que permiten la sustitución hacia atrás son:

$$X_j = b'_j - \sum_{k=j+1}^n U_{jk} \cdot b'_k \quad (23)$$

Donde $j = n-1, n-2, \dots, 1$ y para el elemento n del vector de incógnitas X : $X_n = b'_n$.

4. Ejemplo de aplicación

Retomando el ejemplo iniciado en la sección anterior. A es la matriz de coeficientes que define al sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x} = \bar{b}$, donde el vector \bar{b} es:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \\ -20 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Las matrices L y U se indican en las matrices 19 y 20, respectivamente. De tal forma, se aplica la ecuación 21:

$$\begin{aligned} b'_1 &= \frac{b_1}{L_{11}} = \frac{10}{3} = 3,33333 \\ b'_2 &= \frac{b_2 - \sum_{k=1}^1 L_{2k} \cdot b'_k}{L_{22}} \\ &= \frac{b_2 - L_{21} \cdot b'_1}{L_{22}} \\ &= \frac{5 - (-1) \cdot 3,33333}{-1,33333} \\ &= -6,25 \\ b'_3 &= \frac{b_3 - \sum_{k=1}^2 L_{3k} \cdot b'_k}{L_{33}} \\ &= \frac{b_3 - [L_{31} \cdot b'_1 + L_{32} \cdot b'_2]}{L_{33}} \\ &= \frac{1 - [2 \cdot 3,33333 + 3,66666 \cdot (-6,25)]}{8,25} \\ &= 2,09091 \end{aligned}$$

$$b'_4 = \frac{b_4 - \sum_{k=1}^3 L_{4k} \cdot b'_k}{L_{44}} = \frac{b_4 - [L_{41} \cdot b'_1 + L_{42} \cdot b'_2 + L_{43} \cdot b'_3]}{L_{44}} = \frac{-20 - [7 \cdot 3,33333 + 3,33333 \cdot (-6,25) + 2,5 \cdot 2,09091]}{5,54545} = -5$$

El vector modificado de términos independientes resulta:

$$\bar{b}' = \begin{bmatrix} 3,33333 \\ -6,25 \\ 2,09091 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Para concluir, se realiza la sustitución hacia atrás:

$$\begin{aligned} X_4 &= b'_4 = -5 \\ X_3 &= \frac{b'_3 - \sum_{k=4}^4 U_{3k} \cdot b'_k}{L_{33}} = \frac{b'_3 - U_{34} \cdot b'_4}{L_{33}} = \frac{2,09091 - 0,18182 \cdot (-5)}{3} \\ X_2 &= \frac{b'_2 - \sum_{k=4}^3 U_{2k} \cdot b'_k}{L_{22}} = \frac{b'_2 - [U_{24} \cdot b'_4 + U_{23} \cdot b'_3]}{L_{22}} = \frac{-6,25 - [0,5 \cdot (-5) + 3,25 \cdot 3]}{1} \\ X_1 &= \frac{b'_1 - \sum_{k=4}^1 U_{1k} \cdot b'_k}{L_{11}} = \frac{b'_1 - [U_{14} \cdot b'_4 + U_{13} \cdot b'_3 + U_{12} \cdot b'_2]}{L_{11}} = \frac{3,33333 - [0,33333 \cdot (-5) + 3,33333 \cdot 3 + 0,33333 \cdot 1]}{-2} \end{aligned}$$

La solución del sistema es:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (26)$$

5. Conclusiones

La solución de un sistema de ecuaciones por medio de la descomposición LU es un método muy popular entre los programadores, particularmente por la diferencia algorítmica que resulta entre verificar las operaciones fundamentales en las matrices que exigen los métodos de Gauss y Gauss-Jordan, incluyen la problemática inherente al pivoteo, contra el hecho de que el único limitante es que cualquier valor L_{ii} resulte cero.

Por otra parte, las matrices LU representan un ahorro muy importante en cuanto al almacenamiento de memoria en una computadora, ya que cuando el almacenamiento es limitado, ambas pueden almacenarse en un sólo arreglo de la forma:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & U_{23} & \dots & U_{2n} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & U_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Finalmente, a partir de la triangularidad de la matriz U , es totalmente factible aprovecharla en diversos cálculos matriciales, como la obtención de la matriz inversa de su propia matriz A .

2

Referencias

- [1] Curtis F. Gerald. *Análisis numérico*. segunda edición edition, 1991.
- [2] Douglas Burden, Richard. Faires. *Análisis Numérico*. 2002.

²Editado por Juan Carlos Marín Helú. Junio 2011