Solución de ecuaciones algebraicas y trascendentes: Método de Factores cuadráticos

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Introducción. Definición del método. Ejemplo de aplicación.

1. Introducción

Los métodos de factores cuadráticos son una alternativa más eficiente que la popular división sintética para obtener raíces de polinimios. En cierta forma, la división sintética es un método basado en el tanteo, ya que la selección de la posible raíz del polinomio se hace buscando que el residuo de la división tienda, o en el mejor de los casos, sea cero. Asimismo, si las capacidades algebraicas lo permiten, es posible obtener raíces complejas.

En cambio, los métodos de factores cuadráticos no requieren de estimaciones empíricas; consisten en extraer de polinomios de grado mayor a dos pares de raíces en la forma de factores del tipo de $x^2 + Px + Q$; estos factores pueden resolverse por la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, lo que permite fácilmente obtener las raíces complejas.

Si el polinomio es de grado n, deberán extraérsele raíces de dos en dos hasta que se agote el procedimiento. Como se percibe, este método sólo se aplica a polinomios y proporciona raíces reales o complejas.

En este caso, se desarrolla el método de factores cuadráticos denominado *Método de Lin*.

2. Definición del método

Sea el polinomio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + ... + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

* Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

El método consiste en dividir el polinomio $P(x)$ entre el factor $x^2 + Px + Q$, a diferencia de la división sintética que lo hace entre el factor $x - a$. Al llevarse a cabo la división propuesta se obtiene un polinomio de la forma:

$$b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + b_3x^{n-4} + ... + b_{n-3}x + b_{n-2} \tag{2}$$

Asimismo, en consecuencia existirá un residuo de la forma $Rx + S$. En resumen, podemos afirmar que:

$$P(x) \doteq (x^2 + px + q)(b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + b_3x^{n-4} + ... + b_{n-3}x + b_{n-2}) + Rx + S \tag{3}$$

Realizando las operaciones planteadas en la ecuación (3):

$$P(x) \doteq b_0x^n + Pb_0x^{n-1} + Qb_ox^{n-2} + b_1x^{n-1} + Pb_1x^{n-2} + Qb_1x^{n-2} + ... + Pb_{n-2}x + Qb_{n-2} + Rx + S \tag{4}$$

Resulta que las ecuaciones y corresponden a polinomios de grado n, por lo que es pertinente utilizar la propiedad de igualdad de polinomios.

$$\begin{aligned}
&a_0 = b_0\\
&a_1 = Pb_0 + b1\\
&a_2 = Qb_0 + Pb_1 + b_2\\
&a_3 = Qb_1 + Pb_2 + b_3\\
&\vdots\\
&a_{n-1} = R + Pb_{n-2} + Qb_{n-3}\\
&a_n = S + Qb_{n-2}
\end{aligned} \tag{5}$$

En las ecuaciones (5) las incógnitas son los coeficientes b_i del polinomio reducido así como los factores R y S del residuo. Despejando dichas incógnitas:

$$\begin{aligned}
&b_0 = a_0\\
&b_1 = a_1 - Pb_0\\
&b_2 = a_2 - Pb_1 - Qb_0\\
&b_3 = a_3 - Pb_2 - Qb_1\\
&\vdots\\
&R = a_{n-1} - Pb_{n-2} - Qb_{n-3}\\
&S = a_n - Qb_{n-2}
\end{aligned} \tag{6}$$

Las ecuaciones (7) se expresan en forma general como:

$$\begin{aligned}
&b_k = a_k - Pb_{k-1} - Qb_{k-2}\\
&R = a_{n-1} - Pb_{n-2} - Qb_{n-1}\\
&S = a_n - Qb_{n-2}
\end{aligned} \tag{7}$$

donde: $k = 0, 1, 2, 3, ..., n-2$ y n es el grado del polinomio original. Finalmente, para que las ecuaciones (7) sean realmente generales, como condición de diseño debe considerarse:

$$b_{-1} = b_{-2} = 0 \tag{8}$$

Para que las raíces del factor cuadrático $x^2 + Px + Q$ sean también raíces del polinomio original se requiere que el residuo $Rx + S$ sea cero o muy cercano a cero, desde el punto de vista de una aproximación numérica. De tal forma, de la ecuación (5):

$$a_{n-1} - Pb_{n-2} - Qbn - 3 = 0 \tag{9}$$

$$a_n - Qb_{n-2} = 0 \tag{10}$$

Despejando las incógnitas P y Q de (9) y (10), respectivamente:

$$P = \frac{a_{n-1-Qb_{n-3}}}{b_{n-2}} \tag{11}$$

$$Q = \frac{a_n}{b_{n-2}} \tag{12}$$

Conocidos estos valores podrán determinarse los coeficientes b_i del polinomio reducido. Se percibe que resulta complicado disponer de los valores de P y Q que satisfagan los supuestos de este método. Sin embargo, si se utiliza un criterio iterativo es posible obtener la solución deseada.

A partir de valores iniciales para P y Q y aplicando un proceso iterativo se pueden llegar a determinar nuevos valores para dichas variables. De tal forma, se define a:

$$\Delta P = P^* - P \tag{13}$$

$$\Delta Q = Q^* - Q \tag{14}$$

Las expresiones (13) y (14) representan los incrementos entre dos valores consecutivos de P y Q.

Considérese a P^* y a Q^* como los valores corregidos de P y Q, mismos que se calculan con las expresiones (11) y (12) respectivamente.

$$\Delta P = \frac{a_{n-1} - Qb_{n-3}}{b_{n-2}} - P = \frac{a_{n-1} - Qb_{n-3} - Pb_{n-2}}{b_{n-2}} \tag{15}$$

Sustituyendo la ecuación particular (7) se obtiene:

$$\Delta P = \frac{R}{b_{n-2}} \tag{16}$$

Análogamente para la ecuación (14):

$$\Delta Q = \frac{a_n}{b_{n-2}} - Q = \frac{a_n - Qb_{n-2}}{b_{n-2}} \tag{17}$$

$$\Delta Q = \frac{S}{b_{n-2}} \tag{18}$$

En conjunto, las ecuaciones (7), (16) y (18) conforman el método completo. Como valores iniciales se propone que $P = Q = 0$ en la primera iteración, de tal forma que en la ecuación (13):

$$\Delta P = \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}} \tag{19}$$

Ahora bien, únicamente para la primera iteración en la ecuación (7), si $P = Q = 0$:

$$b_k = a_k - Pb_{k-1} - Qb_{k-2} \Rightarrow b_k = a_k \tag{20}$$

En consecuencia, $b_{n-2} = a_{n-2}$, por lo que en (19):

$$\Delta P = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \tag{21}$$

Análogamente en (17) , si $P = Q = 0$ y con el criterio de (20):

$$\Delta Q = \frac{a_n - Qb_{n-2}}{b_{n-2}} = \frac{a_n}{b_{n-2}} \tag{22}$$

$$\Delta Q = \frac{a_n}{a_{n-2}} \tag{23}$$

Resumen de fórmulas

Polinomio original:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Extracción de factores cuadráticos:

$$P(x) \doteq (x^2 + px + q)(b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + b_3x^{n-4} + ... + b_{n-3}x + b_{n-2}) + Rx + S$$

Ecuaciones de recurrencia:

$$b_k = a_k - Pb_{k-1} - Qb_{k-2}$$
$$R = a_{n-1} - Pb_{n-2} - Qb_{n-1}$$
$$S = a_n - Qb_{n-2}$$

donde: $k = 0, 1, 2, 3, ..., n - 2$ y n es el grado del polinomio original.

Incrementos en los coeficientes P y Q:

$$\Delta P = \frac{R}{b_{n-2}}$$

$$\Delta Q = \frac{S}{b_{n-2}}$$

Siguientes valores de los coeficientes P y Q:

$$\Delta P = P^* - P \Rightarrow P^* = \Delta P + P$$

$$\Delta Q = Q^* - Q \Rightarrow Q^* = \Delta Q + Q$$

Valores particulares de los coeficientes b_{-i}:

$$b_{-1} = b_{-2} = 0$$

Únicamente para la primera iteración: $P = Q = 0$

$$\Delta P = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

$$\Delta Q = \frac{a_n}{b_{n-2}}$$

Por otra parte, para un fácil desarrollo del método, se propone el uso de una tabla como la que se muestra en la figura 1.

			1ª iter	2ª iter	3ª iter		n iter
		P					
		q					
a_0		b_0					
a_1		b_1					
a_2		b_2					
a_3							
a_4		b_{n-1}					
		b_{n-2}					
a_{n-1}		R					
a_n		S					
		ΔP					
		Δq					

Figura 1: Tabla para organizar el desarrollo del Método de los factores cuadráticos

3. Ejemplo de aplicación

Obtener las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 4$. El grado del polinomio es $n = 4$; el grado del polinomio reducido será $k = 2$. El esquema de extracción de los factores cuadráticos quedará de la siguiente forma:

$$P(x) \doteq (x^2 + Px + Q)(b_0x^2 + b_1x + b_2) + Rx + S$$

Para la primera iteración [1]:

$$P = Q = 0$$

$$P^* = \Delta P + P = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-3}{6} = -0{,}5$$

$$Q^* = \Delta Q + Q = \frac{a_4}{a_2} = \frac{4}{6} = 0{,}66667$$

Sea $b_k = a_k - Pb_{k-1} - Qb_{k-2}$ para $k = 0, 1, 2$ y $b_{-1} = b_{-2} = 0$:

$$b_0 = a_0 = 1$$
$$b_1 = a_1 - Pb_0 = -1 - (-0{,}5)(1) = -0{,}5$$
$$b_2 = a_2 - Pb_1 - Qb_0 = 6 - (-0{,}5)(-0{,}5) - (0{,}66667)(1) = 5{,}0834$$
$$R = a_3 - Pb_2 - Qb_1 = -3 - (-0{,}5)(5{,}0834) - (0{,}66667)(-0{,}5) = -0{,}125$$
$$S = a_4 - Qb_2 = 4 - (0{,}66667)(5{,}0834) = 0{,}6109$$
$$\Delta P = \tfrac{R}{b_2} = \tfrac{-0{,}125}{5{,}0832} = -0{,}0246$$
$$\Delta Q = \tfrac{S}{b_2} = \tfrac{0{,}6109}{5{,}0832} = 0{,}1202$$
$$P^* = \Delta P + P = -0{,}0246 - 0{,}5 = -0{,}5246$$
$$Q^* = \Delta Q + Q = 0{,}1202 + 0{,}66667 = 0{,}7868$$

[1] Recuerde que las variables P^* y Q^* son los valores de las iteraciones siguientes de P y Q

En el cuadro 1 se muestran las siguientes iteraciones, repitiendo el proceso anterior.

Cuadro 1: Desarrollo del Método de Factores Cuadráticos

a_i		Iteraciones:	1	2	3	4	5	6
		P	$-0{,}50000$	$-0{,}52459$	$-0{,}52902$	$-0{,}52992$	$-0{,}53010$	$-0{,}53013$
		Q	0,66667	0,78689	0,80585	0,80890	0,80939	0,80947
a_o	1	b_0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
a_1	-1	b_1	$-0{,}50000$	$-0{,}47541$	$-0{,}47098$	$-0{,}47008$	$-0{,}46990$	$-0{,}46987$
a_2	6	b_2	5,08333	4,96372	4,94499	4,94200	4,94152	4,94144
a_3	-3	R	$-0{,}12500$	$-0{,}02199$	$-0{,}00446$	$-0{,}00088$	$-0{,}00017$	$-0{,}00003$
a_4	4	S	0,61111	0,09412	0,01509	0,00243	0,00039	0,00006
		ΔP	$-0{,}02459$	$-0{,}00443$	$-0{,}00090$	$-0{,}00018$	$-0{,}00003$	$-0{,}00001$
		ΔQ	0,12022	0,01896	0,00305	0,00049	0,00008	0,00001

Dos aspectos no han sido mencionados:

- Criterio de convergencia. No se tiene contemplado algún criterio de convergencia, toda vez que algebraicamente un polinomio se define como el producto de los binomios $(x - R_i)$, donde R_i son las raíces del polinomio. En este sentido, todo polinomio es susceptible de ser factorizado, en este caso, en factores cuadráticos.
- Medición del error. Son dos los criterios válidos para contemplar la medición de las tolerancias preestablecidas. El primero se aplica en el factor $Rx+S$ que representa el residuo. Lo deseable es que el residuo tienda a ser cero, para que cuando los coeficientes R y S cumplan con la tolerancia preestablecida, se pueda detener el método. El segundo se establece con los incrementos ΔP y ΔQ. Si se toma en cuenta que estos incrementos son la diferencia entre los valores P y Q consecutivos, puede considerarse como una medida de error; en este caso, cuando estos dos incrementos cumplan con la tolerancia preestablecida, se puede detener el método. En el mejor de los casos los cuatros factores cumplirán con la tolerancia y el método se detendrá. No obstante, de acuerdo al comportamiento del método, podrán seleccionarse los factores de control.

Para el ejemplo que nos ocupa, en la sexta iteración los factores R, S, ΔP y ΔQ cumplen con una tolerancia menor a 0,0001. Si se consideran adecuados estos valores, el esquema de extracción de factores cuadráticos queda de la siguiente forma:

$$P(x) = (x^2 + Px + Q)(b_0x^2 + b_1x + b_2) + Rx + S$$
$$P(x) = (x^2 - 0{,}53013x + 0{,}80947)(x^2 - 0{,}46987x + 4{,}94144) - 0{,}00003x + 0{,}00006$$

Finalmente, de las dos ecuaciones de segundo grado que se forman, por medio de la ecuación general se obtienen las cuatros raíces:

$$x_1 = 0{,}26495 + i0{,}8594$$
$$x_2 = 0{,}26495 - i0{,}8594$$
$$x_3 = 0{,}2355 + i2{,}2112$$
$$x_4 = 0{,}2355 + i2{,}2112$$

4. Conclusiones

Se ha mostrado cómo la facilidad de cálculo del método de los factores cuadráticos contrasta con el proceso matemático que se requiere para la obtención de sus fórmulas. Podemos considerar a los factores cuadráticos como un método robusto y estable, siendo su principal ventaja la capacidad de otorgar raíces complejas.

Finalmente, en el caso que el polinomio a resolver sea de grado superior a cuatro, el proceso de extracción se repetirá las veces que sea necesario, siempre obteniendo raíces de dos en dos.