Solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales
Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Introducción. La ecuación en derivadas parciales elípticas. Ejemplo de aplicación. Conclusiones.

1. Introducción

El problema de la distribución de calor en las dimensiones de una placa delgada sujeta a una fuente calorífica. A partir de la ecuación de Laplace puede conocerse la temperatura en diversos puntos en esta placa delgada.

2. La ecuación en derivadas parciales elípticas

La ecuación en derivadas parciales a estudiar será la ecuación de Laplace, que es un caso particular de la ecuación de Poisson cuando $f(X,Y)=0$ que tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2}U(X,Y)+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}U(X,Y)=f(X,Y)=0 \tag{1}$$

Para $(X,Y)\in\mathbb{R}$. De acuerdo al método de diferencias finitas debe disponerse de los valores de los pasos para la variable X y Y. Si los intervalos de solución para X y Y respectivamente son $[a,b]$ y $[c,d]$, sean n y m el número de espacios, el tamaño de los pasos será $\Delta X=\frac{b-a}{n}$ y $\Delta X=\frac{d-c}{m}$. En consecuencia, los valores de las variables independientes serán: $X_i=a+i\Delta X$ y $Y_i=c+i\Delta Y$.

Las rectas $X=X_i$ y $Y=Y_i$ que se trazan dentro de la placa se denomina *líneas de red* y sus intersecciones se llaman *puntos de red*. Cada punto de red que forma la malla tendrá la forma (X_i,Y_j) para $i=1,2,3,...,n-1$ y $j=1,2,3,...,m-1$, como se aprecia en la figura 1.

*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

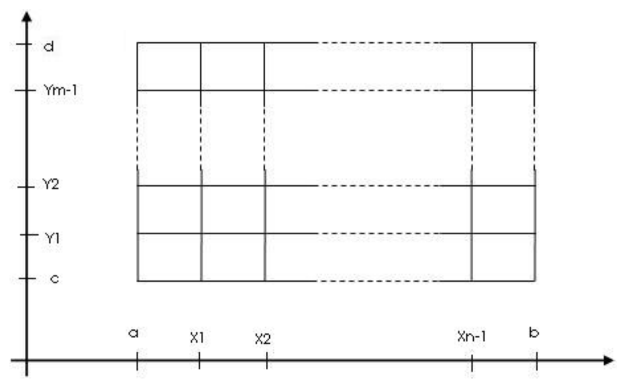

Figura 1: Líneas de red

Las ecuaciones numéricas de derivación parcial [1] propuestas y que serán sustituidas en la ecuación (1) son:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta X)^2}\left[U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}\right] + O(h^2) \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta Y)^2}\left[U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}\right] + O(h^2) \tag{3}$$

Lo cual resulta:

$$\frac{1}{(\Delta X)^2}\left[U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}\right] + \frac{1}{(\Delta Y)^2}\left[U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}\right] = 0 \tag{4}$$

Esta ecuación tiene como punto pivote a $U_{i,j}$ y en torno a él el resto de puntos, de acuerdo a la figura 2.

Si usamos la información de las condiciones de frontera [2] donde sea apropiado en el sistema que se producirá al pivotear la ecuación (4) en todos los puntos (X_i, Y_j) que están adyacentes a un punto de red en la frontera se tendrá un sistema de $(n-1)(m-1)$ ecuaciones lineales con $(n-1)(m-1)$ incógnitas, siendo éstas las aproximaciones de $U(n-1)(m-1)$ para los puntos interiores de la red.

3. Ejemplo de aplicación

Se tiene una delgada placa de acero que tiene la forma de rectángulo de $10\,cm\,x\,20\,cm$. Uno de los bordes de $10\,cm$ se mantiene a $100°c$ y los otros tres bordes a $0°c$ como se observa en la figura 3. Las condiciones de frontera son:

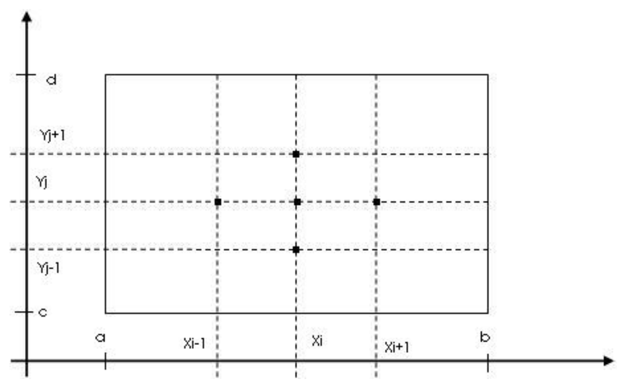

Figura 2: Puntos para pivotear de la ecuación de recurrencia

$$
\begin{aligned}
U(X,0) &= 0°c \\
U(X,10) &= 0°c \\
U(0,Y) &= 0°c \\
U(20,Y) &= 100°c
\end{aligned}
\tag{5}
$$

La pregunta es: ¿cómo se distribuye la temperatura al interior de la placa?. Por claridad se renombrará a los puntos i, j como P_i y a su temperatura $U_{i,j}$ como $W(P_1)$, tomados de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Si planteamos un ejercicio inicial en donde $n = 4$ y $m = 2$, los espaciamientos son, de acuerdo con la figura 4:

$$\Delta X = \frac{20-0}{4} = 5$$
$$\Delta Y = \frac{10-0}{4} = 5$$

Sustituyendo en la ecuación 4:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{25}\left[U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}\right] + \frac{1}{25}\left[U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}\right] = 0 \\
\frac{1}{25}\left[U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j}\right] = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Sea $W_i = U(P_i)$, las ecuaciones son:

$$\frac{1}{25}\left[-4W_1 + W_2\right] = 0$$
$$\frac{1}{25}\left[W_1 - 4W_2 + W_3\right] = 0$$
$$\frac{1}{25}\left[W_2 - 4W_3 + 100\right] = 0$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $W_1 = 1{,}786$,$W_2 = 7{,}142$ y $W_3 = 26{,}786$.

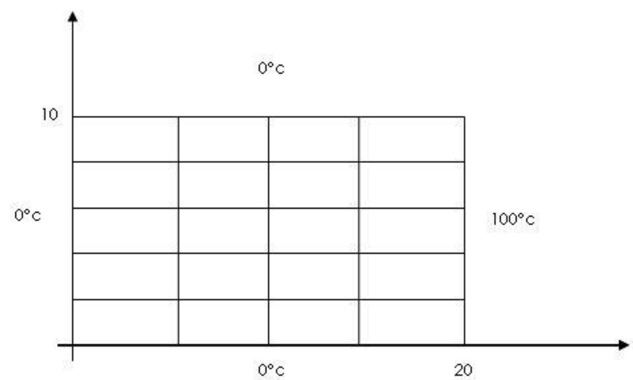

Figura 3: Condiciones de frontera

Estos resultados resultan muy poco aproximados al fenómeno real. Realizando un ejercicio más preciso, se propone a $n = 8$ y $m = 4$ que arroja una $\Delta X = \Delta Y = 2{,}5$ La malla resultante sera la mostrada en la figura 5.

El sistema de ecuaciones producto del pivoteo es:

$$-4W_1 + W_2 + W_8 = 0$$

$$W_1 - 4W_2 + W_3 + W_9 = 0$$

$$W_2 - 4W_3 + W_4 + W_{10} = 0$$

$$W_3 - 4W_4 + W_5 + W_{11} = 0$$

$$W_4 - 4W_5 + W_6 + W_{12} = 0$$

$$W_5 - 4W_6 + W_7 + W_{13} = 0$$

$$W_6 - 4W_7 + W_{14} = -100$$

$$W_1 - 4W_8 + W_9 + W_{15} = 0$$

$$W_2 + W_8 - 4W_9 + W_{10} + W_{16} = 0$$

$$W_3 + W_9 - 4W_{10} + W_{11} + W_{17} = 0$$

$$W_4 + W_{10} - 4W_{11} + W_{12} + W_{18} = 0$$

$$W_5 + W_{11} - 4W_{12} + W_{13} + W_{19} = 0$$

$$W_6 + W_{12} - 4W_{13} + W_{14} + W_{20} = 0$$

$$W_7 + W_{13} - 4W_{14} + W_{21} = -100$$

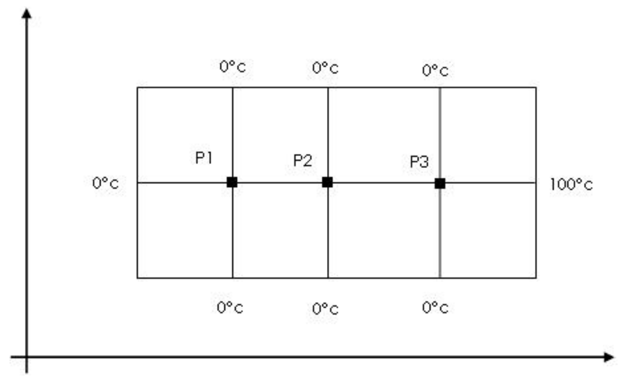

Figura 4: Pivoteo para $n = 4$ y $m = 2$

$$W_8 - 4W_{15} + W_{16} = 0$$

$$W_9 + W_{15} - 4W_{16} + W_{17} = 0$$

$$W_{10} + W_{16} - 4W_{17} + W_{18} = 0$$

$$W_{11} + W_{17} - 4W_{18} + W_{19} =$$

$$W_{12} + W_{18} - 4W_{19} + W_{20} = 0$$

$$W_{13} + W_{19} - 4W_{20} + W_{21} = 0$$

$$W_{14} + W_{20} - 4W_{21} = -100$$

Y su resultado:

$W_1 = 0{,}3530$	$W_8 = 0{,}4988$	$W_{15} = 0{,}3530$
$W_2 = 0{,}9132$	$W_9 = 1{,}2894$	$W_{16} = 0{,}9132$
$W_3 = 2{,}0103$	$W_{10} = 2{,}8323$	$W_{17} = 2{,}0103$
$W_4 = 4{,}2957$	$W_{11} = 6{,}0193$	$W_{18} = 4{,}2957$
$W_5 = 9{,}1531$	$W_{12} = 12{,}6537$	$W_{19} = 9{,}1531$
$W_6 = 19{,}6631$	$W_{13} = 26{,}2983$	$W_{20} = 19{,}6631$
$W_7 = 43{,}2101$	$W_{14} = 53{,}1774$	$W_{21} = 43{,}2101$

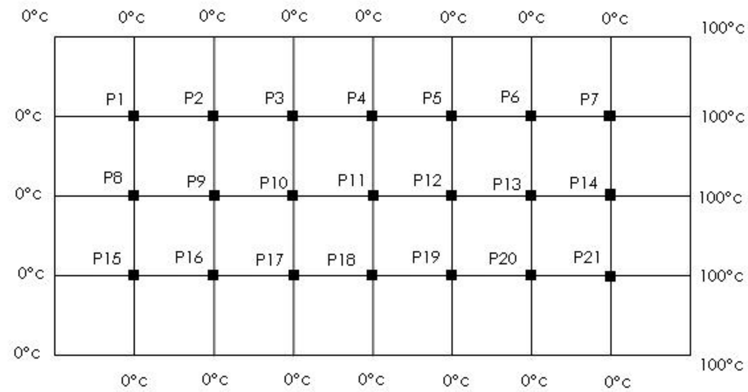

Figura 5: Malla para $n = 8$ y $m = 4$

4. Conclusiones

Como ha podido demostrarse, la ecuación de Laplace puede resolverse con la aproximación deseada a partir del método de las diferencias finitas; quienes hayan experimentado la solución de la ecuación por medios analíticos podrán constrastar la dificultad que existe entre ambos; sin embargo, cuando se requiere alguna simulación matemática el método numérico es el más apropiado.

[1]

Referencias

[1] Iriarte-Vivar Rafael. *Métodos numéricos*. México 1990.

[2] Gerald Curtis F. *Análisis numérico*. 2a ed. México 1991.

[1]Editado por Juan Carlos Marín Helú. Junio 2011