

Polinomios, valores y vectores característicos: Método de Krilov

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Introducción. Definición del método de Krilov. Ejemplo de aplicación. Conclusiones.

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar la aportación del Análisis numérico a la obtención del polinomio (o ecuación), valores y vectores característicos; se presentará un método que pueda desarrollarse como algoritmo y, en consecuencia, desarrollado por medio de un programa de cómputo.

En este sentido, para reconocer los contenidos es necesario disponer de los antecedentes necesarios del álgebra lineal en cuanto a los tópicos antes mencionados.

Las matrices de orden $n \times n$ no singulares poseen un *polinomio característico*; las raíces de este polinomio son llamados *valores característicos* y cada uno tiene asociado un *vector característico*.

Iniciando con la determinación del polinomio característico. El polinomio característico de la matriz A se obtiene por medio de la expresión:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (1)$$

El resultado de este determinante es un polinomio en función de λ de grado igual al orden de la matriz A , en este caso, de orden n . Este *polinomio característico* posee n raíces, o *valores característicos*; por lo cual, la matriz A de orden n posee n valores característicos.

El polinomio característico es de la forma:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2)$$

*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

2. Definición del Método de Krilov

Este método se fundamenta en la aplicación del *Teorema de Cayley-Hamilton* [1], mismo que establece que toda matriz A verifica su ecuación característica:

$$F(A) = 0 \quad (3)$$

Es decir, si sustituimos a la matriz A en el polinomio 2, el resultado deberá ser cero. Sin embargo, operativamente es necesario hacer algunos comentarios. De inicio, la matriz A es de orden n , por lo cual la sustitución arrojará un sistema de n ecuaciones lineales; en consecuencia, el coeficiente a_0 deberá ser diferente de cero. Resulta conveniente hacer que este coeficiente sea la unidad, por lo cual se divide el polinomio entero por a_0 , resultando:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0 \quad (4)$$

Donde los coeficientes b_i se obtienen como $b_i = \frac{a_i}{a_0}$. Aplicando el teorema de Cayley-Hamilton en el polinomio 4:

$$F(A) = A^n + b_1A^{n-1} + b_2A^{n-2} + \dots + b_{n-1}A + b_nI = 0 \quad (5)$$

El polinomio 5 representa un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes b_i . La solución de este sistema nos proporciona los coeficientes b_i que sustituidos en el polinomio 4 nos proporciona el polinomio característico de A .

Una forma sencilla de realizar este procedimiento es simplificar la elevación de la matriz A a las potencias necesarias. Esto se logra multiplicando la matriz A por un vector \bar{y} compatible diferente de cero. Debe recordarse que la multiplicación de una matriz por un vector compatibles arroja un vector.

Este vector \bar{y} puede ser libremente elegido, proponiéndose que su conformación permita realizar de mejor forma las operaciones. Una buena elección es elegir al vector con la forma:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ubicando al elemento 1 en una posición estratégica de acuerdo con los coeficientes de A de tal forma que se minimicen las operaciones.

Atendiendo a la anterior recomendación, el sistema que de la forma:

$$A^n\bar{y} + b_1A^{n-1}\bar{y} + b_2A^{n-2}\bar{y} + \dots + b_{n-1}A\bar{y} + b_n\bar{y}I = 0 \quad (6)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones puede ser resuelto por el método de preferencia [2].

3. Ejemplo de aplicación

Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

El polinomio característico tendrá la forma (de acuerdo a la ecuación 4):

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0 \quad (8)$$

El sistema de ecuaciones tendrá la forma (de acuerdo a la ecuación 6):

$$A^3\bar{y} + b_1A^2\bar{y} + b_2A\bar{y} + b_3\bar{y}I = 0 \quad (9)$$

Se propone al vector \bar{y} de acuerdo con la forma recomendada:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Realizando las multiplicaciones:

$$A\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Realizando las multiplicaciones:

$$A^2\bar{y} = A \cdot A\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$A^3\bar{y} = A \cdot A^2\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Sustituyendo los resultados 11, 12 y 13 en el esquema 9 se conforma el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot b_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot b_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Que se expresa en forma más coloquial como:

$$\begin{aligned} -b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\ 2b_2 &= -4 \\ 6b_1 + 2b_2 &= 4 \end{aligned} \quad (15)$$

Cuya solución es:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= -2 \\ b_3 &= 3 \end{aligned} \quad (16)$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación 8 se obtiene finalmente la ecuación característica de la matriz A :

$$\lambda^3 - 2\lambda + 3 = 0 \quad (17)$$

4. Conclusiones

El método de Krilov debe utilizarse en conjunto con un método de solución de sistemas de ecuaciones lineales. Esta unión arroja una alternativa muy apropiada cuando se trata de evitar resolver determinantes de orden mayor considerando que se debe hacer en forma analítica.

Referencias

- [1] Douglas Burden, Richard. Faires. *Análisis Numérico*. 2002.
- [2] Curtis F. Gerald. *Análisis numérico*. Segunda edición edition, 1991.