Solución de ecuaciones algebraicas y trascendentes: Conceptos generales

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Definición de Exactitud, precisión, convergencia y estabilidad. Concepto de raíz. Clasificación de los métodos numéricos para obtener las raíces de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Métodos para ubicar el valor aproximado de una raíz.

1. Exactitud y precisión

En Ingeniería, se denomina exactitud a la capacidad de un instrumento de medir un valor cercano al valor de la magnitud real [1]. Exactitud implica precisión, pero no al contrario. Exactitud y precisión no son equivalentes. Exactitud es capacidad para acercarse a la magnitud real, y precisión es la capacidad de generar resultados similares.

De acuerdo con la definición de aproximación numérica, la exactitud se aplica en los métodos numéricos en cuanto a la capacidad del método de generar un resultado muy cercano al valor real; se percibe la cercanía entre la exactitud y el concepto de error. Por otra parte, los métodos numéricos a través de iteraciones generan valores aproximados cada vez más exactos, es decir, estas iteraciones deberán ser precisas. Dado lo anterior, los métodos numéricos deberán tener como cualidades la exactitud y la precisión.

2. Convergencia y estabilidad

En el análisis matemático, la convergencia es la propiedad de algunas sucesiones y series de tender progresivamente a un límite, de tal forma, si este límite existe, se dice que la sucesión o la serie *converge*. En forma análoga, si un método numérico en su funcionamiento iterativo nos proporciona aproximaciones cada vez más cercanas al valor buscado, se dice que el método converge.

La estabilidad de un método numérico[2] tiene que ver con la manera en que los errores numéricos se propagan a lo largo del algoritmo. Cuando un método converge, lo más deseable es que en los

*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

resultados que se obtengan, los niveles de error se disminuyan en la forma más rápida posible. Sin embargo, ocurre que durante la operación del algoritmo, ya sea por el manejo de los datos numéricos o bien por la naturaleza propia del modelo matemático con el que se esté trabajando, los errores entre aproximaciones no disminuyan en forma progresiva, sino que incluso aumenten en alguna etapa del proceso para después reducirse mostrando un comportamiento aleatorio.

La robustez de un método numérico radica en su convergencia y su estabilidad. Pueden utilizarse métodos cuya prueba de convergencia indique la pertinencia de su uso, pero que durante su aplicación se obtengan resultados inestables que repercutan en el número de iteraciones y en consecuencia en el tiempo invertido en la solución. El ideal lo constituyen métodos que a la vez de ser convergentes resulten estables.

3. Concepto de raíz

Una raíz es el valor de la variable independiente que verifica la función, es decir, en forma matemática, a es raíz de $f(x)$ si siendo $x = a$ entonces $f(a) = 0$. Esta función puede ser algebraica (polinomio) o trascendente, así como sus respectivas raíces podrán ser números reales o complejos.

Geométricamente, una raíz es el punto en el cual la función cruza el eje de las abscisas o eje horizontal.

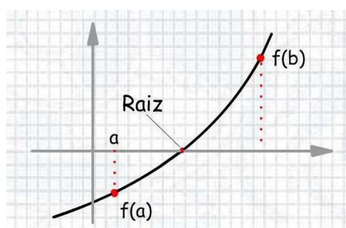

Figura 1: Interpretación geométrica de la raíz de una función

4. Clasificación de los métodos numéricos para obtener las raíces de ecuaciones algebraicas y trascendentes

A partir de la forma en que se proporciona un valor inicial de una raíz a cada método, se establecen dos clasificaciones generales:

- Métodos cerrados (o de intervalo). Son aquellos que requieren de un intervalo cerrado de valores de la variable independiente en el cual está incluida una o más raíces. Entre los métodos cerrados destacan Bisección e Interpolación lineal o Regla falsa.
- Métodos abiertos. Son aquellos que solamente requieren un valor inicial lo más cercano posible a la raíz. Entre los métodos abiertos destacan el método de las tangentes o Newton-Raphson, Aproximaciones sucesivas y Factores cuadráticos.

5. Métodos para ubicar el valor aproximado de una raíz

Uno de los temas incluidos en los cursos básicos de álgebra universitaria corresponde al cálculo de las raíces de polinomios a través del método de la división sintética. Para obtener una raíz *exacta* de un polinomio debe proporcionarse una aproximación a la raíz, realizar la división y, dependiendo del valor del residuo (si este es diferente de cero), realizar de nuevo la división con una nueva aproximación estimada. La división sintética comprende una serie de reglas que permite *suponer* la ubicación de una raíz, la naturaleza de cada una de ellas (reales positivas, negativas o complejas conjugadas) considerando que el orden del polinomio representa el número de raíces que posee.

Encontrar las raíces puede ser un problema complicado cuando el polinomio posee raíces reales, pero lo es más cuando las raíces son complejas, situación que no se percibe al inicio de la aplicación de la división sintética. El método de la división sintética es un método iterativo restringido a polinomios que entrega las raíces reales y, si la manipulación algebraica lo permite, también las raíces complejas, aunque no es muy eficiente en este último caso. Por otra parte, ¿cómo debe procederse en el caso de una ecuación trascendente? ¿cuántas raíces tienen este tipo de ecuaciones y cómo son? Las respuestas a estas preguntas son fácilmente proporcionadas por el Análisis Numérico.

Como se podrá constatar en la sección correspondiente, los métodos numéricos proporcionan las raíces reales y complejas de funciones algebraicas y trascendentes. En forma general (dependiendo del método a utilizar), debe proporcionarse un valor inicial lo más cercano posible a una raíz. Este valor inicial puede obtenerse básicamente de tres maneras diferentes:

1. Gráficamente. A partir de la gráfica de la función puede obtenerse un valor cercano al cruce de la función con el eje horizontal. La graficación por sí misma es un medio ineficiente para obtener una raíz. Sin embargo, es la mejor forma de conocer la naturaleza de la función bajo estudio, particularmente previendo la elección del mejor método así como los posibles factores de falla que pudieran presentarse. Es pertinente citar los siguientes casos:

    - Cuando se dispone de un intervalo $[a, b]$, donde $f(a) \cdot f(b) < 0$, que implica que $f(a)$ y $f(b)$ son de signos contrarios y que existe un cruce de la función por el eje horizontal, teniendo en consecuencia que en el intervalo $[a, b]$ existe un número impar de raíces, tal y como se aprecia en la figura 1.
    - Cuando en el intervalo $[a, b]$ no se cumple que $f(a) \cdot f(b) < 0$, lo que implica dos situaciones: no existe raíz en el intervalo $[a, b]$; o bien, hay un número par de raíces dentro de dicho intervalo, lo que se percibe en la figura 2.
    - La función no cruza el eje horizontal. En esta situación deben separarse dos casos: Si la función no cruza el eje horizontal, podría tener raíces complejas y deberán utilizarse las herramientas específicas. Por otra parte, si la función no cruza el eje, pero es tangente a él en un punto, entonces tiene raíces múltiples en un número par en el punto tangente. Adicionalmente, es posible también que exista una discontinuidad de la función en el intervalo de trabajo, como se muestra en la figura 3.

2. Tabular. Al tabular la función en un intervalo perteneciente al dominio de ella, la raíz se encontrará en los valores de la variable independiente que corresponden a un cambio de signo en la variable dependiente. Este cambio de signo (de + a - o de - a +) tiene como interpretación geométrica el cruce de la función con el eje horizontal.

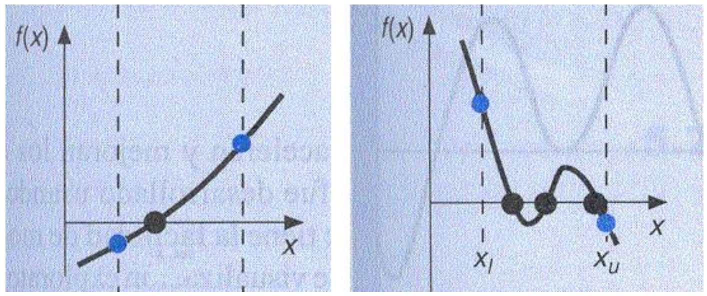

Figura 2: Intervalos que atrapan un número impar de raíces [2]

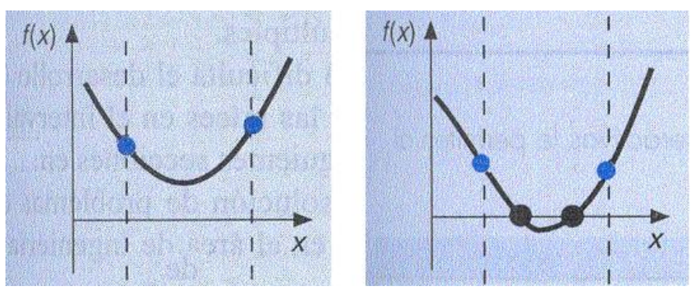

Figura 3: Intervalos que no atrapan, o bien, atrapan un número par de raíces [2]

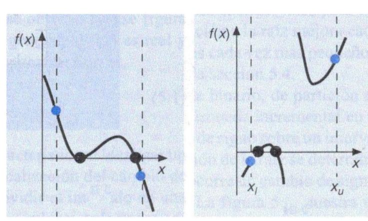

Figura 4: Singularidades en la búsqueda de raíces [2]

3. Manipulación algebraica. Algunas funciones permiten, a través de cierta manipulación algebraica, la ubicación de una raíz. Por ejemplo, sea la función: $\cos x - e^{-x} = 0$. Para localizar una posible ubicación de alguna de sus raíces, puede expresarse como $\cos x = e^{-x}$. Conociendo de antemano las propiedades de las funciones cos y e, es posible a partir de una gráfica a mano alzada ubicar alguna de las raíces, ya que éstas corresponden al valor de x en el cual se cumple que $\cos x = e^{-x}$.

Referencias

[1] http://es.wikipedia.org *Análisis numérico*. 2006.

[2] Raymond. Chapra, Steven. Canale. *Métodos numéricos para Ingenieros*. México 1999.