Solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales Introducción

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Introducción. La ecuación en derivadas parciales. Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales. Ecuaciones numéricas para derivadas parciales. Conclusiones.

1. Introducción

La mayoría de los fenómenos estudiados o de los problemas a solucionar, tanto en las ciencias físicas como en las Ingenierías, se describen o involucran a ecuaciones diferenciales. Esto obedece a la necesidad que siempre se tiene de cuantificar la evolución temporal y espacial de los objetos físicos bajo observación.

Las relaciones más íntimas entre las matemáticas y el mundo material ocurren en forma de expresiones cuantitativas que representan leyes fenomenológicas. La enorme mayoría de las veces dicha expresiones traducen cambios de unos objetos con respecto a otros, lo cual origina relaciones diferenciales entre los parámetros involucrados.

Objetivamente, la Matemáticas o explica nada sobre el mundo matemático. Únicamente proporciona símbolos y relaciones abstractas que, al ser convenientemente manipuladas pueden proporcionar resultados numéricos, ciertos, falsos, aproximados o disparatados, que pueden compararse en ocasiones, con lo observado.

2. La ecuación en derivadas parciales

La solución de ecuaciones en derivadas parciales es uno de los clásicos dolores de cabeza a los que se enfrentan los profesionales de la Ingeniería; los modelos matemáticos que hacen uso de ellos son muy comunes y están presentes en todas las ramas de la física: Electromagnetismo, térmica, mecánica clásica y de fluidos, entre muchas otras.

*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

La manera de enfrentar su solución por parte del Análisis numérico es por el método de las diferencias finitas, lo cual hace sencilla su solución. En realidad la dificultad en la solución de modelos en derivadas parciales radica en establecer claramente las condiciones iniciales (en ocasiones de frontera) bajo las que se desarrolla el fenómeno; esto implica por necesidad incluir las características inherentes a los materiales de los objetos que participan en el fenómeno.

Es por lo anterior que la revisión de las técnicas numéricas de solución de ecuaciones en derivadas parciales pudiera dejar en el lector un sentimiento de insatisfacción por considerar que se recurre a artilugios matemáticos; en realidad, la plenitud del uso del Análisis numérico se obtiene en el laboratorio disponiendo de las condiciones de desarrollo del fenómeno y de las cualidades de los materiales.

Una *ecuación en derivadas parciales* (o ecuación diferencial parcial) es una ecuación que expresa una relación entre una función de varias variables y todas o algunas de sus derivadas parciales. Su representación general es:

$$f\left(X, Y, ..., \frac{\partial U}{\partial X}, \frac{\partial U}{\partial Y}, ..., \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}, ...\right) = 0$$

Donde $U = f(X, Y, ...)$ es la variable dependiente.

3. Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales

Las ecuaciones en derivadas parciales es común clasificarlas a partir de su *orden*. El orden de una ecuación diferencial parcial es el orden de la derivada mayor que aparece en ella.

En lo particular, una clasificación importante es la que se refiere a las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, que tienen la forma:

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + F = 0 \qquad (1)$$

Donde los coeficientes A, B y C son en general, funciones de las variables X y Y y F es función de X, Y, U, $\frac{\partial U}{\partial X}$ y $\frac{\partial U}{\partial Y}$.

De acuerdo con los valores de los coeficientes A, B y C la ecuación diferencial parcial (1) se clasifica en:

- Elíptica. Cuando $B^2 - 4AC < 0$. En esta clasificación destacan las ecuaciones de Laplace y de Poisson.
- Parabólica. Cuando $B^2 - 4AC = 0$. En esta clasificación destaca la ecuación de transferencia de calor.
- Hiperbólica. Cuando $B^2 - 4AC > 0$. En esta clasificación destaca la ecuación de onda.

4. Ecuaciones numéricas para derivadas parciales

El método utilizado en la solución de ecuaciones en derivadas parciales es *diferencias finitas*, mismo que consiste en sustituir en la ecuación a resolver las ecuaciones de derivación numérica necesarias. Resulta entonces necesario disponer de ecuaciones numéricas para derivadas parciales [1].

La obtención de las mismas puede hacerse por varios caminos; se logra a través del polinomio de Taylor para la función $f(X,Y)$ o bien, a partir de las ecuaciones de derivación numéricas para la función $Y = f(X)$ respetando todas sus condiciones. Sea cual sea el camino elegido, deben hacerse un par de consideraciones:

- Se requiere de una función $U(X,Y)$; esto implica que deberá hacer un paso constante para la variable X y otro también constante para Y que no necesariamente deben ser iguales entre sí.
- La solución de la ecuación en derivadas parciales es una matriz, es decir, un arreglo de dos dimensiones.

La característica de la derivada parcial de una función $U(X,Y)$ es que se aplica una derivada ordinaria a una de las variables considerándose constante a la otra. Bajo este principio es como se obtiene a partir de una ecuación numérica para una derivada ordinaria una para derivar parcialmente [2].

A partir de la ecuación ordinaria de primer orden de interpolación:

$$Y'_{X=X_0} = \frac{1}{h}\left[\, \underline{-Y_0}\,,\, Y_1 \,\right] + O(h) \tag{2}$$

Si consideramos en lugar de la función $f(X)$ a la función $f(X,Y)$ y si además observamos que la ecuación (2) utiliza un punto pivote y otro punto posterior, se puede plantear la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial U(X,Y)}{\partial X} = \frac{1}{\Delta X}\left[\underline{-U(X_0,Y_0)} + U(X_1,Y_0)\right] + O(h) \tag{3}$$

En la ecuación (3) se plantea derivar parcialmente con respecto a X, por lo que Y deberá permanecer constante. En consecuencia, se utiliza como pivote al punto $U(X_0,Y_0)$ y al punto siguiente $U(X_1,Y_0)$. El espaciamiento para la variable X es ΔX y deberá ser constante. La ecuación resultante conserva su orden de error [3] y se escribe en forma general y coloquialmente como:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial X}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta X}\left[\underline{-U_{i,j}} + U_{i+1,j}\right] + O(h) \tag{4}$$

Aplicando los mismos criterios de define:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial Y}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta Y}\left[\underline{-U_{i,j}} + U_{i,j+1}\right] + O(h) \tag{5}$$

Si se sigue este criterio respectando las reglas de derivación pueden obtenerse otras fórmulas adicionales:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial X}\right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta X}\left[\, -U_{i-1,j} + U_{i+1,j} \,\right] + O(h^2) \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial Y}\right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta Y}\left[\,-U_{i,j-1} + U_{i,j+1}\right] + O(h^2) \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta X)^2}\left[\,U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}\right] + O(h^2) \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta Y)^2}\left[\,U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}\right] + O(h^2) \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}\right|_{i,j} = \frac{1}{4\Delta X \Delta Y}\left[\,U_{i-1,j-1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j+1}\right] + O(h^2) \tag{10}$$

5. Conclusiones

La aplicación del método de diferencias finitas es idéntico cuando se aplica a funciones de una variable que cuando se hace con funciones de dos variables; el pivoteo se aplica en igual forma e incluso cuando los argumentos de la función $U(X, Y)$ representan dimensiones de longitud se admite algún proceso gráfico, situación que no es muy factible si alguno de los argumentos es el tiempo.

[1]

Referencias

[1] Burden Richard. Faires Douglas. *Análisis Numérico*. Madrid 2002.

[2] Iriarte-Vivar Rafael. *Métodos numéricos*. México 1990.

[3] Gerald Curtis F. *Análisis numérico*. 2a ed. México 1991.

[1] Editado por Juan Carlos Marín Helú. Junio 2011