

# Integración numérica

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas  
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas  
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán \*

2011

## Resumen

Introducción. Integración numérica. Análisis del error. Ejemplo de aplicación. Conclusiones.

## 1. Introducción

En la exploración de las técnicas de derivación numérica quedó de manifiesto la enorme ventaja que resulta de la aplicación de los principios de la interpolación cuando el profesional de la Ingeniería se enfrenta a problema reales donde el fenómeno físico se manifiesta a través de una función en forma tabular.

En este sentido, de la misma forma en que es posible operar con una función tabular sin la necesidad de obtener primeramente su forma analítica, en este caso se presentarán las herramientas para integrar dicha función; tales herramientas requieren de los considerandos básicos del cálculo integral y por tratarse de técnicas numéricas su resultado es el valor del área bajo la curva de la función; en consecuencia, es indispensable contar con el intervalo de integración respectivo.

Adicionalmente a las ventajas intrínsecas que ofrecen las aplicaciones numéricas a través de herramientas de cómputo, la integración numérica permite obtener resultados muy precisos para aquellas integrales denominadas *impropias* o para aquellas que por su complejidad rebasan a las técnicas analíticas.

Es necesario resaltar que para la buena aplicación de las herramientas de integración numérica deben aplicarse conceptos básicos de interpolación numérica, tales como el orden de interpolación y el orden de error en función del paso  $h$ , que debe ser constante.

## 2. Integración numérica

El punto de partida para el desarrollo de las herramientas de integración numérica [1], en este caso, es el polinomio interpolante de Newton-Gregory expresado en la ecuación (1) y que se aplica a una

---

\*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

función tabular equiespaciada.

$$f(X) = Y_0 + k\Delta Y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 Y_0 + \dots \quad (1)$$

Donde  $h = cte$  y  $k = \frac{X_k - X_0}{h}$ . Se plantea entonces obtener:

$$\int_{X_0}^{X_n} f(x) dx \quad (2)$$

Dado que el polinomio interpolante de la ecuación (1) representa de buena manera a la función analítica  $f(X)$  es válida la siguiente igualdad:

$$\int_{X_0}^{X_n} f(x) dx = \int_{X_0}^{X_n} (Y_0 + k\Delta Y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 Y_0 + \dots) dx \quad (3)$$

Para proceder a su solución es necesario realizar un cambio de variable de  $X$  a  $k$  de la siguiente forma:

Si  $k = \frac{X_k - X_0}{h}$ , entonces:

- Si  $X = X_0 \implies K = 0$
- Si  $X = X_n \implies K = n$ .  $n$  representa el número de pares de puntos que conforman la función tabular.
- $\frac{dk}{dX} = \frac{1}{h} \implies dX = h dk$

Incluyendo estas consideraciones en la ecuación (3):

$$\int_{X_0}^{X_n} f(x) dx = \int_0^n (Y_0 + k\Delta Y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 Y_0 + \dots) h dk \quad (4)$$

Realizando la integral:

$$\int_{X_0}^{X_n} f(x) dx = h \left[ kY_0 + \frac{k^2}{2}\Delta Y_0 + \left(\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4}\right)\Delta^2 Y_0 + \left(\frac{k^4}{24} - \frac{3k^3}{18} - \frac{2k^2}{12}\right)\Delta^3 Y_0 + \dots \right]_0^n$$

Valuando sus límites:

$$\int_{X_0}^{X_n} f(x) dx = h \left[ nY_0 + \frac{n^2}{2}\Delta Y_0 + \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4}\right)\Delta^2 Y_0 + \left(\frac{n^4}{24} - \frac{3n^3}{18} - \frac{2n^2}{12}\right)\Delta^3 Y_0 + \dots \right] \quad (5)$$

La ecuación (5) representa la integral de la función tabular  $f(X)$  con  $n$  puntos equiespaciada. A partir de ella es posible obtener diferentes órdenes de integración de acuerdo al orden de interpolación deseado.

## Primer orden de interpolación

Si la ecuación (5) se limita la fórmula a la primera diferencia, es decir, a un primer orden de interpolación.

$$\int_{X_0}^{X_n} f(x) dx = h \left[ nY_0 + \frac{n^2}{2} \Delta Y_0 \right] \quad (6)$$

Este truncamiento implica un problema de coherencia con el planteamiento de la integral mostrado en el miembro izquierdo de esta última ecuación. La integral de la función  $f(X)$  está planteada en el intervalo  $[X_0, X_n]$  y en el miembro derecho el resultado está forzado a incluir los puntos  $(X_0, Y_0)$  y  $(X_1, Y_1)$  por efectos del truncamiento a la primera diferencia. Dado lo anterior, deben ajustarse los límites de la integral del miembro izquierdo. Si se integra del punto  $(X_0, Y_0)$  al  $(X_1, Y_1)$  implica que  $n = 1$ . Ajustando la ecuación y sustituyendo el valor de la diferencia:

$$\begin{aligned} \int_{X_0}^{X_1} f(x) dx &= h \left[ Y_0 + \frac{1}{2} \Delta Y_0 \right] \\ \int_{X_0}^{X_1} f(x) dx &= h \left[ Y_0 + \frac{1}{2} \Delta(Y_1 - Y_0) \right] \\ \int_{X_0}^{X_1} f(x) dx &= \frac{h}{2} [Y_0 + Y_1] \end{aligned}$$

Debe percibirse que para obtener la integral en todo el intervalo  $[X_0, X_n]$  debe aplicarse la última fórmula entre todos los pares de puntos y después hacer la suma de todos los resultados:

$$\begin{aligned} \int_{X_1}^{X_2} f(x) dx &= \frac{h}{2} [Y_1 + Y_2] \\ \int_{X_2}^{X_3} f(x) dx &= \frac{h}{2} [Y_2 + Y_3] \\ &\vdots \\ \int_{X_{n-1}}^{X_n} f(x) dx &= \frac{h}{2} [Y_{n-1} + Y_n] \end{aligned}$$

Sumando las integrales parciales:

$$\begin{aligned} \int_{X_0}^{X_n} f(x) dx &= \frac{h}{2} [Y_0 + Y_1 + Y_1 + Y_2 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_{n-1} + Y_n] \\ \int_{X_0}^{X_n} f(x) dx &= \frac{h}{2} \left[ Y_0 + Y_n + \sum (\text{resto de ordenadas}) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

La ecuación (7) se le conoce como *Fórmula trapezoidal* y representa un primer orden de interpolación y tiene un esquema de error de  $O(h^2)$  [2].

## Segundo orden de interpolación

Si la ecuación (5) se limita la fórmula a la segunda diferencia, es decir, a un segundo orden de interpolación.

$$\int_{X_0}^{X_n} f(x) dx = h \left[ nY_0 + \frac{n^2}{2} \Delta Y_0 + \left( \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} \right) \Delta^2 Y_0 \right] \quad (8)$$

En este caso, al incluir en el planteamiento de la solución de la integral a la segunda diferencia se consideran a los puntos  $(X_0, Y_0)$ ,  $(X_1, Y_1)$  y  $(X_2, Y_2)$ , que de nuevo no es coherente con la integral de la función  $f(X)$  que está planteada en el intervalo  $[X_0, X_n]$ . De nuevo deberá hacerse el ajuste respectivo lo que implica que se integrará parcialmente entre tres puntos que representan dos segmentos de área. En consecuencia, al hacer la suma de las áreas parciales será condición necesaria que el número  $n$  de puntos que conforman la función tabular sea *múltiplo de dos*.

En el ajuste de la ecuación (8), si se integra del punto  $(X_0, Y_0)$  al  $(X_2, Y_2)$  implica que  $n = 2$ . Ajustando la ecuación y sustituyendo el valor de la diferencia:

$$\begin{aligned} \int_{X_0}^{X_2} f(x) dx &= h \left[ 2Y_0 + 2\Delta Y_0 + \left( \frac{1}{3} \right) \Delta^2 Y_0 \right] \\ \int_{X_0}^{X_2} f(x) dx &= h \left[ 2Y_0 + 2(Y_1 - Y_0) + \left( \frac{1}{3} \right) (Y_2 - 2Y_1 + Y_0) \right] \\ \int_{X_0}^{X_2} f(x) dx &= \frac{h}{3} [Y_0 + 4Y_1 + Y_2] \end{aligned}$$

Recorriendo los intervalos de integración:

$$\begin{aligned} \int_{X_2}^{X_4} f(x) dx &= \frac{h}{3} [Y_2 + 4Y_3 + Y_4] \\ \int_{X_4}^{X_6} f(x) dx &= \frac{h}{3} [Y_4 + 4Y_5 + Y_6] \\ &\vdots \\ \int_{X_{n-2}}^{X_n} f(x) dx &= \frac{h}{3} [Y_{n-2} + 4Y_{n-1} + Y_n] \end{aligned}$$

Sumando las integrales parciales:

$$\begin{aligned} \int_{X_0}^{X_n} f(x) dx &= \frac{h}{3} [Y_0 + 4Y_1 + Y_2 + Y_2 + 4Y_3 + Y_4 + \dots + Y_{n-2} + 4Y_{n-1} + Y_n] \\ \int_{X_0}^{X_n} f(x) dx &= \frac{h}{3} \left[ Y_0 + Y_n + 2 \sum \left( \begin{smallmatrix} ordenadas de \\ orden par \end{smallmatrix} \right) + 4 \sum \left( \begin{smallmatrix} ordenadas de \\ orden impar \end{smallmatrix} \right) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

La ecuación (9) se conoce como *Fórmula de integración de Simpson  $\frac{1}{3}$*  que tiene condición que el número  $n$  de puntos que conforman la función tabular sea *par*; presenta un segundo orden de interpolación y un esquema de error de  $O(h^4)$  [1].

### Tercer orden de interpolación

Si la ecuación (5) se limita la fórmula a la tercer diferencia, es decir, a un tercer orden de interpolación.

$$\int_{X_0}^{X_n} f(x) dx = h \left[ nY_0 + \frac{n^2}{2} \Delta Y_0 + \left( \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} \right) \Delta^2 Y_0 + \left( \frac{n^4}{24} - \frac{3n^3}{18} - \frac{2n^2}{12} \right) \Delta^3 Y_0 \right] \quad (10)$$

De nuevo se presenta la situación en que al considerar a la tercer diferencia se utiliza a los puntos  $(X_0, Y_0)$ ,  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  y  $(X_3, Y_3)$ . De nuevo deberán ajustarse los límites de la integral parcial y de nuevo hacer la suma de ellas para abarcar todo el intervalo  $[X_0, X_n]$ . Al integrar parcialmente en tres puntos se tiene como condición que  $n$  sea *múltiplo de tres*.

En el ajuste de la ecuación (10), si se integra del punto  $(X_0, Y_0)$  al  $(X_3, Y_3)$  implica que  $n = 3$ . Ajustando la ecuación y sustituyendo el valor de la diferencia:

$$\begin{aligned} \int_{X_0}^{X_3} f(x) dx &= h \left[ 3Y_0 + \frac{9}{2} \Delta Y_0 + \left( \frac{27}{6} - \frac{9}{4} \right) \Delta^2 Y_0 + \left( \frac{81}{24} - \frac{27}{18} + \frac{9}{6} \right) \Delta^3 Y_0 \right] \\ \int_{X_0}^{X_3} f(x) dx &= \frac{3h}{8} [Y_0 + 3Y_1 + 3Y_2 + Y_3] \end{aligned}$$

Recorriendo los intervalos de integración:

$$\begin{aligned} \int_{X_3}^{X_6} f(x) dx &= \frac{3h}{8} [Y_3 + 3Y_4 + 3Y_5 + Y_6] \\ \int_{X_6}^{X_9} f(x) dx &= \frac{3h}{8} [Y_6 + 3Y_7 + 3Y_8 + Y_9] \\ &\vdots \\ \int_{X_{n-3}}^{X_n} f(x) dx &= \frac{3h}{8} [Y_{n-3} + 3Y_{n-2} + 3Y_{n-1} + Y_n] \end{aligned}$$

Sumando las integrales parciales:

$$\begin{aligned} \int_{X_0}^{X_n} f(x) dx &= \frac{3h}{8} [Y_0 + 3Y_1 + 3Y_2 + Y_3 + Y_3 + 3Y_4 + 3Y_5 + Y_6 + \dots + Y_{n-3} + 3Y_{n-2} + 3Y_{n-1} + Y_n] \\ \int_{X_0}^{X_n} f(x) dx &= \frac{3h}{8} \left[ Y_0 + Y_n + 2 \sum \left( \begin{matrix} \text{ordenadas de orden} \\ \text{múltiplo de tres} \end{matrix} \right) + 3 \sum \left( \begin{matrix} \text{resto de} \\ \text{ordenadas} \end{matrix} \right) \right] \quad (11) \end{aligned}$$

La ecuación (11) se conoce como *Fórmula de integración de Simpson<sub>3/8</sub>* que tiene condición que el número  $n$  de puntos que conforman la función tabular sea *múltiplo de tres*; presenta un tercer orden de interpolación y un esquema de error de  $O(h^5)$  [1].

## Consideraciones generales

- Resulta muy importante determinar claramente el valor de  $n$  que representa el número de pares de puntos que forman la función tabular. Si se observan las consideraciones iniciales de estos desarrollos, el primer punto de la función tabular es  $(X_0, Y_0)$  y el último es  $(X_n, Y_n)$ . Este valor de  $n$  deberá ser *par* para aplicar  $Simpson_{\frac{1}{3}}$  o *múltiplo de tres* para  $Simpson_{\frac{3}{8}}$  o de cualquier valor para la fórmula trapezoidal.
- Cuando se hace referencia a *ordenadas de orden par* o términos similares no se refiere al valor en sí mismo de la ordenada, sino de su posición en la función tabular. Por lo anterior, es muy pertinente numerar las ordenadas.
- En el uso de las ordenadas en cualquiera de las fórmulas es necesario recalcar que ninguna ordenada podrá utilizarse más de una vez en la misma fórmula.
- La notación convencional para la regla trapesoidal es:  $A_T$ .
- La notación convencional para la fórmula de  $Simpson_{\frac{1}{3}}$  es:  $A_{\frac{1}{3}}$ .
- La notación convencional para la fórmula de  $Simpson_{\frac{3}{8}}$  es:  $A_{\frac{3}{8}}$ .
- Atendiendo el orden del error de cada fórmula, en el ánimo de reducirlo, deberá priorizarse su uso en este orden:  $A_{\frac{3}{8}}$ ,  $A_{\frac{1}{3}}$  y al último  $A_T$ .
- En el supuesto de que una función tabular posea un número  $n$  que no sea ni par ni múltiplo de tres pueden utilizarse las fórmulas en combinación siguiendo un orden que contemple las prioridades citada, haciendo incapié en que los intervalos de integración de las fórmulas deben ser continuos, es decir, no se debe interrumpir el intervalo de integración. Se propone evitar el uso de  $A_T$  a menos que sea indispensable.

## 3. Ejemplo de aplicación

- El cuadro 1 muestra el desplazamiento de un móvil que parte del reposo; sus observaciones son la velocidad del móvil en distintos instantes. Calcule el desplazamiento del móvil en cada uno de los instantes citados en la tabla.

Cuadro 1: Desplazamiento de un móvil

$t [s]$	$\vec{V} [\frac{m}{s}]$
0	0
60	0,0824
120	0,2474
180	0,6502
240	1,3851
300	3,2229

En forma general, el desplazamiento  $S$  de un móvil se obtiene por la ecuación:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{V} dt \quad (12)$$

Por otra parte, en la selección de los puntos de la función tabular se sugiere numerarlos para evitar cualquier error involuntario en su uso, iniciando en 0 y concluyendo en  $n$ .

Cuadro 2: Numeración de los puntos

$i$	$t [s]$	$\vec{V} [\frac{m}{s}]$
0	0	0
1	60	0,0824
2	120	0,2474
3	180	0,6502
4	240	1,3851
5	300	3,2229

- Desplazamiento a los 60 s: Por tratarse de el área entre dos puntos sólo puede utilizarse  $A_T$ :

$$\vec{S}_{t=60s} = \int_0^{60} \vec{V} dt = \frac{h}{2} [Y_0 + Y_1]$$

$$\vec{S}_{t=60s} = \int_0^{60} \vec{V} dt = \frac{60}{2} [0 + 0,0824] = 2,472 m$$

- Desplazamiento a los 120 s: Dado que la integración se hace desde  $X_0$  a  $X_2$  entonces  $n = 2$  y puede utilizarse  $A_{\frac{1}{3}}$ :

$$\vec{S}_{t=120s} = \int_0^{120} f(x) dx = \frac{60}{3} [Y_0 + Y_2 + 2(0) + 4Y_1]$$

$$\vec{S}_{t=120s} = \int_0^{120} f(x) dx = \frac{60}{3} [0 + 0,2747 + 2(0) + 4(0,0824)] = 12,086 m$$

- Desplazamiento a los 180 s: dado que la integración se hace desde  $X_0$  a  $X_3$  entonces  $n = 3$  y puede utilizarse  $A_{\frac{3}{8}}$ :

$$\vec{S}_{t=180s} = \int_0^{180} f(x) dx = \frac{3h}{8} [Y_0 + Y_3 + 2(0) + 3(Y_1 + Y_2)]$$

$$\vec{S}_{t=180s} = \int_0^{180} f(x) dx = \frac{3 \cdot 60}{8} [0 + 0,6502 + 2(0) + 3(0,0824 + 0,2747)] = 38,7338 m$$

- Desplazamiento a los 240 s: Dado que la integración se hace desde  $X_0$  a  $X_4$  entonces  $n = 4$  y puede utilizarse  $A_{\frac{1}{3}}$ :

$$\vec{S}_{t=240s} = \int_0^{240} f(x) dx = \frac{60}{3} [Y_0 + Y_4 + 2Y_2 + 4(Y_1 + Y_3)]$$

$$\vec{S}_{t=240s} = \int_0^{240} f(x) dx = \frac{60}{3} [0 + 1,3851 + 2(0,2747) + 4(0,0824 + 0,6502)] = 97,298 m$$

- Desplazamiento a los 300 s: Dado que la integración se hace desde  $X_0$  a  $X_5$  entonces  $n = 5$ . Se propone hacer dos integrales parciales y después la suma de ambas: de  $X_0$  a  $X_3$  utilizando  $A_{\frac{3}{8}}$  y de  $X_3$  a  $X_5$  utilizando  $A_{\frac{1}{3}}$ .

$$\vec{S}_{t=300s} = \int_0^{180} f(x) dx + \int_{180}^{300} f(x) dx$$

La primera integral ya fue calculada y su valor fue  $\vec{S}_{t=180s} = 38,7338 m$ . La segunda integral se calcula como:

$$\int_{180}^{300} f(x) dx = \frac{60}{3} [Y_3 + Y_4 + 2(0) + 4Y_5]$$

Es pertinente comentar que en este intervalo la ordenada  $Y_0$  de la fórmula equivale a la ordenada  $Y_3$  de la tabla,  $Y_1$  a  $Y_5$  y  $Y_n$  a  $Y_4$

$$\int_{180}^{300} f(x) dx = \frac{60}{3} [0,6502 + 3,2229 + 2(0) + 4(1,3851)] = 188,2700$$

Sumando los resultados parciales

$$\vec{S}_{t=300s} = \int_0^{180} f(x) dx + \int_{180}^{300} f(x) dx = 38,7338 + 188,27 = 217,0038 m$$

El resultado total se expresa también como función tabular:

Cuadro 3: Resultado

$t [s]$	$\vec{S} [m]$
0	0
60	12,0860
120	38,7338
180	97,2980
240	188,2700
300	217,0038

- Calcular numéricamente el valor de la integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 (X^2 + Y^2) dy dx \quad (13)$$

Para resolver esta integral se procede de manera similar que cuando se utiliza la integración analítica: primero se deberá integrar con respecto a una variable dejando a la otra constante y después integrar a esta última. La solución numérica consiste en convertir a la función por integrar en una función tabular equiespaciada con un  $n$  equiespaciado; para motivos de simplicidad en la solución se propone un  $h = 0,1$  lo que origina  $n = 10$ .

Integrando con respecto a  $Y$  de acuerdo al cuadro 4:



Cuadro 4: Integración con respecto a  $Y$ 

$Y$	$f(X, Y)$
0,0	$0,00 + X^2$
0,1	$0,01 + X^2$
0,2	$0,04 + X^2$
0,3	$0,09 + X^2$
0,4	$0,16 + X^2$
0,5	$0,25 + X^2$
0,6	$0,36 + X^2$
0,7	$0,49 + X^2$
0,8	$0,64 + X^2$
0,9	$0,81 + X^2$
1,0	$1,00 + X^2$

Cuadro 5: Integración con respecto a  $X$ 

$X$	$f(X, Y)$
0,0	0,00000
0,1	0,34333
0,2	0,37333
0,3	0,42333
0,4	0,49333
0,5	0,58333
0,6	0,69333
0,7	0,82333
0,8	0,97333
0,9	1,14333
1,0	1,33333

$$A_{\frac{1}{3}} = \frac{0,1}{3} [X^2 + (1,00 + X^2) + 4[(0,01 + X^2) + (0,09 + X^2) + (0,25 + X^2) + (0,49 + X^2) + (0,81 + X^2)] + 2[(0,04 + X^2) + 0,16 + X^2 + (0,36 + X^2) + (0,64 + X^2)] = 0,33333 + Y^2$$

Integrando con respecto a  $X$  de acuerdo al cuadro 5:

$$A_{\frac{1}{3}} = \frac{0,1}{3} [0,33333 + 1,33333 + 4[0,34333 + 0,42333 + 0,58333 + 0,82333 + 1,14333] + 2[0,37333 + 0,49333 + 0,69333 + 0,97333]] = 0,66666$$

## 4. Conclusiones

A la luz de los resultados obtenidos particularmente en el segundo ejercicio es posible afirmar que cualquier integral puede resolverse por estos métodos, ya sea propia o impropia, con la única

condición de que el resultado deseado sea el área bajo la curva.

Esto abre expectativas muy alentadoras para evitar el obstáculo que pueda llegar a representar una integral muy complicada de resolver de forma analítica.

## Referencias

- [1] Gerald Curtis F. *Análisis numérico*. 2a ed. México 1991.
- [2] Iriarte-Vivar Rafael. *Métodos numéricos*. México 1990.

---

<sup>1</sup>Editado por Juan Carlos Marín Helú. Junio 2011