

Solución de ecuaciones algebraicas y trascendentes: Método de Newton Raphson

Ing. Jesús Javier Cortés Rosas
M. en A. Miguel Eduardo González Cárdenas
M. en A. Víctor D. Pinilla Morán *

2011

Resumen

Introducción. Definición del método y su interpretación geométrica. Criterio de convergencia. Ejemplo de aplicación.

1. Introducción

El método Newton Raphson (N-R) es, junto con bisección, uno de los más populares. Su preferencia radica en su robustez y velocidad al encontrar la raíz. Por ser un método abierto o de punto fijo, debe verificarse su criterio de equivalencia. Quizá el único punto que pudiera tener en contra radica en la necesidad de contar con las primera y segunda derivadas de la ecuación a resolver.

Se aplica a ecuaciones algebraicas y trascendentes y proporciona raíces reales.

2. Definición del método y su interpretación geométrica

El nombre original del método N-R es *de las tangentes*. Una tangente es una recta que intersecta a una curva en un sólo punto; en consecuencia, es perpendicular a su radio [1]. A partir de la figura 1, se plantea que en un valor x_0 que represente una aproximación a la raíz de la ecuación, se trace una tangente en el punto $f(x_0)$. Esta recta tangente deberá cortar al eje horizontal. El punto donde lo corte será la nueva aproximación x_1 , de tal forma que en el punto $f(x_1)$ se trace una nueva tangente. Este proceso se repetirá hasta que el corte de la tangente en el eje horizontal coincida con la raíz de la ecuación, o bien, cuando la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas cumpla con una tolerancia preestablecida.

De nuevo a partir de la figura 1, con base en las dos primeras iteraciones, se define la siguiente relación entre el triángulo formado por la recta tangente y el ángulo

*Facultad de Ingeniería, UNAM. Profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la División de Ciencias Básicas

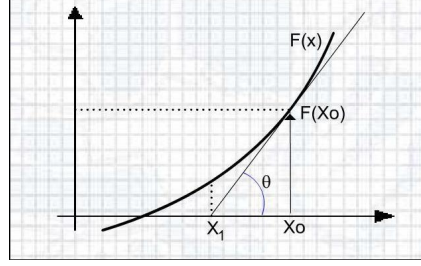


Figura 1: El método de las tangentes

theta:

$$\tan(\theta) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad (1)$$

Por otra parte, se conoce que:

$$f'(x_0) = \tan(\theta) \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad (3)$$

En esta ecuación la incógnita la representa la iteración siguiente x_1 . Despejándola y expresándola en forma iterativa para cualquier iteración:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (4)$$

La ecuación (4) representa la ecuación de recurrencia del método de N-R.

3. Criterio de convergencia

Por ser un método de punto fijo, el criterio de convergencia que deberá cumplirse es:

$$|G'(\tau)| < 1; \quad x_{i-1} \leq \tau \leq a \quad (5)$$

Para adaptar la ecuación (5) al método N-R, se sustituye la aproximación τ por la aproximación x_{i+1} , de acuerdo a lo siguiente:

$$|G(x_i)| = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (6)$$

De tal forma que debe obtenerse la derivada de la ecuación (6):

$$G'(x_i) = \frac{f(x_i) \cdot f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2} \quad (7)$$

Sustituyendo la ecuación (7) con el criterio de convergencia (5):

$$\left| \frac{f(x_i) \cdot f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2} \right| < 1 \quad (8)$$

4. Ejemplo de aplicación

Encontrar una raíz de la ecuación $f(x) = \text{sen}(x) \cdot e^{-x} + 1$. La gráfica de la ecuación es la siguiente:

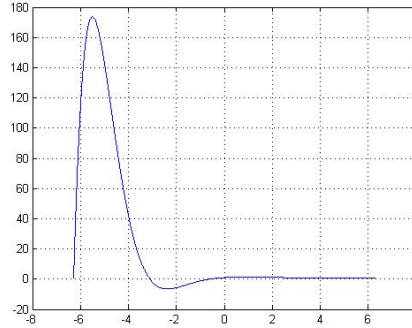


Figura 2: $f(x) = \text{sen}(x) \cdot e^{-x} + 1$

En la figura 2 se observa que la función tiene tres raíces reales en los intervalos $[-8, -6]$, $[-4, -2]$ y $[-2, 0]$. Calculemos cada una de ellas, considerando el criterio de equivalencia en cada una de ellas de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$f(x) = \text{sen}(x) \cdot e^{-x} + 1 \quad (9)$$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot [\cos(x) - \text{sen}(x)] \quad (10)$$

$$f''(x) = -2\cos(x) \cdot e^{-x} \quad (11)$$

Las ecuaciones (9), (10) y (11) deben sustituirse cada una en la ecuación (8) tomando como primera aproximación a la raíz el punto medio de cada uno de los intervalos ¹ y, si el resultado cumple con el criterio de convergencia, utilizar esta aproximación en la ecuación de recurrencia:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\text{sen}(x) \cdot e^{-x} + 1}{e^{-x} \cdot [\cos(x) - \text{sen}(x)]} \quad (12)$$

Los respectivos resultados se muestran en las siguientes tablas:

Intervalo 1 (tabla1): $[-8, -6]$

Primera aproximación: $x_0 = -7$

Criterio de convergencia (ec. (8)): $G(-7) = 0,49695$

Intervalo 2 (tabla2): $[-4, -2]$

Primera aproximación: $x_0 = -3$

Criterio de convergencia (ec. (8)): $G(-7) = 0,25096$

Intervalo 3 (Tabla3): $[-2, 0]$

Primera aproximación: $x_0 = -1$

Criterio de convergencia (ec. (8)): $G(-7) = 0,26804$

¹Este puede ser un criterio cómoda para localizar una primera aproximación, aunque no es necesario contar con el intervalo

Cuadro 1: Cálculo de la primera raíz

Iteraciones	i	i+1	Tol
x_0	-7,0000000000	-6,5349919199	0,4650080801
x_1	-6,5349919199	-6,3315600658	0,2034318542
x_2	-6,3315600658	-6,2870821650	0,0444779008
x_3	-6,2870821650	-6,2850533872	0,0020287777
x_4	-6,2850533872	-6,2850492734	0,0000041138
x_5	-6,2850492734	-6,2850492734	0,0000000000

Cuadro 2: Cálculo de la segunda raíz

Iteraciones	i	i+1	Tol
x_0	-3,0000000000	-3,1075932380	0,1075932380
x_1	-3,1075932380	-3,0964939645	0,0110992735
x_2	-3,0964939645	-3,0963639501	0,0001300144
x_3	-3,0963639501	-3,0963639324	0,0000000177
x_4	-3,0963639324	-3,0963639324	0,0000000000
x_5	-3,0963639324	-3,0963639324	0,0000000000

Cuadro 3: Cálculo de la tercer raíz

Iteraciones	i	i+1	Tol
x_0	-1,0000000000	-0,6572581430	0,3427418570
x_1	-0,6572581430	-0,5911831054	0,0660750376
x_2	-0,5911831054	-0,5885369458	0,0026461596
x_3	-0,5885369458	-0,5885327440	0,0000042018
x_4	-0,5885327440	-0,5885327440	0,0000000000
x_5	-0,5885327440	-0,5885327440	0,0000000000

Las respectivas raíces son:

1. $x = -6,2850492734$
2. $x = -3,0963639324$
3. $x = -0,5885327440$

Todas ellas fueron calculadas con una aproximación de diez cifras.

5. Conclusiones

Como lo muestran las soluciones anteriores, el método de Newton-Raphson resulta una herramienta ágil y robusta en el cálculo de raíces. Por este motivo es el algoritmo preferido de los fabricantes de calculadoras programables. Para los casos en que no resulta convergente, su complemento ideal resulta del método de Bisección.

De esta forma, se considera que se pueden obtener las raíces reales de prácticamente cualquier ecuación algebraica o trascendente.

Referencias

- [1] <http://es.wikipedia.org> *Análisis numérico*. 2006.