TP 5 : Bassins d'attraction de Newton

La méthode de Newton est un algorithme permettant de calculer des approximations des racines d'une fonction à variables réelles. À chaque étape de la méthode, l'approximation calculée est meilleure que celle obtenue à l'étape précédente. Le calcul des approximations se fait grâce à la suite suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

Avec f la fonction définie pour la variable réelle x et f' sa dérivée. Pour que l'algorithme fonctionne, f doit être dérivable et f' ne doit pas être nulle pour chaque point x_i testé. Pour initialiser la suite, une première estimation x_0 de la valeur de la racine doit être faite. Quand la fonction f étudiée ne possède pas une mais plusieurs racines, la racine approximée par la méthode de Newton dépend de la valeur de la première estimation x_0.

Par exemple, voici le calcul avec la méthode de Newton d'une approximation à 4 chiffres après la virgule d'une des racines du polynôme $f(x) = x^2 - 2$ (qui peut valoir $\sqrt{2} \approx 1.4142$ ou $-\sqrt{2} \approx -1.4142$) avec $x_0 = 0.1$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{x_0^2-2}{2x_0} &= 0.1000 - \frac{0.1000^2-2}{2\times 0.1000} &= 10.050\\
x_2 &= x_1 - \frac{x_1^2-2}{2x_1} &= 10.050 - \frac{10.050^2-2}{2\times 10.050} &\approx 5.1245\\
x_3 &= x_2 - \frac{x_2^2-2}{2x_2} &= 5.1245 - \frac{5.1245^2-2}{2\times 5.1245} &\approx 2.7573\\
x_4 &= x_3 - \frac{x_3^2-2}{2x_3} &= 2.7573 - \frac{2.7573^2-2}{2\times 2.7573} &\approx 1.7413\\
x_5 &= x_4 - \frac{x_4^2-2}{2x_4} &= 1.7413 - \frac{1.7413^2-2}{2\times 1.7413} &\approx 1.4449\\
x_6 &= x_5 - \frac{x_5^2-2}{2x_5} &= 1.4449 - \frac{1.4449^2-2}{2\times 1.4449} &\approx 1.4145\\
x_7 &= x_6 - \frac{x_6^2-2}{2x_6} &= 1.4145 - \frac{1.4145^2-2}{2\times 1.4145} &\approx 1.4142
\end{aligned} \tag{2}$$

Si on refait les calculs précédents avec une autre valeur de x_0, par exemple $x_0 = -0.1$, on obtient successivement les valeurs suivantes : -10.05, -5.1245, -2.7573, -1.7413, -1.449, -1.4145 et enfin -1.4142. Dans le premier cas, puisque x_0 était plus proche de la racine positive de f, les approximations de la méthode de Newton ont été "attirées" par cette dernière. Dans le second cas, les approximations à partir de $x_0 = -0.1$ ont été "attirées" par la racine négative. L'intervalle des valeurs de x "attirées" par la racine r_i d'une fonction f est appelé **bassin d'attraction** de r_i.

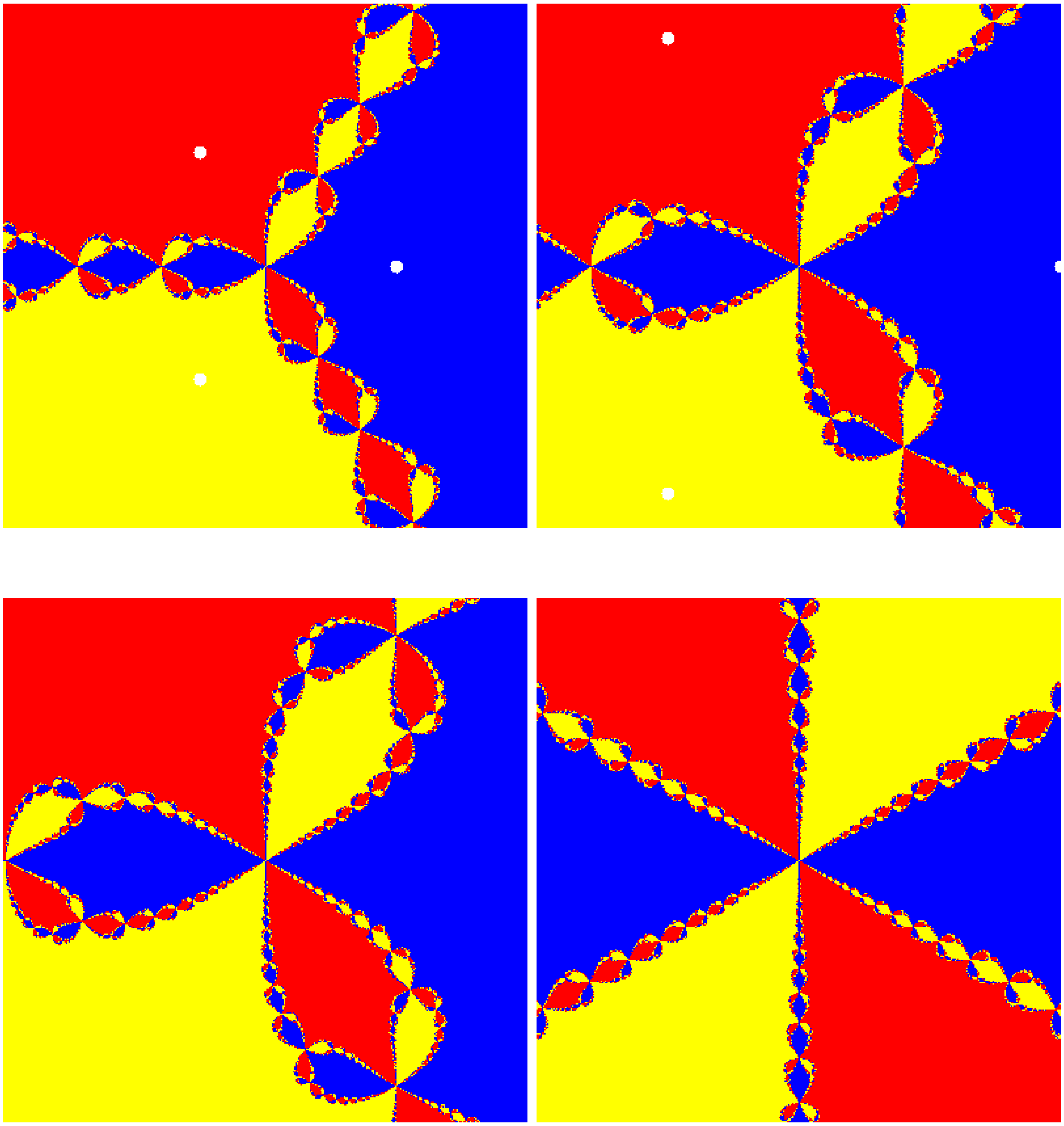
Il est possible d'appliquer la méthode de Newton à des fonctions à variables complexes en utilisant la notation $x + iy$, où x et y sont des nombres réels et où $i^2 = -1$. Le polynôme $f(z) = z^3 - 1$ peut ainsi être manipulé au travers de la fonction $f(x, y) = (x + yi)^3 - 1$.

La formule de la suite de la méthode de Newton varie un peu dans un contexte à plusieurs variables et passe notamment par le calcul puis l'inversion d'une matrice jacobienne, mais le détail n'est pas important pour nous dans ce TP. La fonction qui permet de calculer x_{n+1} et y_{n+1} à partir de x et de y pour le polynôme $f(x, y) = (x + yi)^3 - 1$ vous est donnée ci-dessous :

```
(* Polynome p: z^3 - 1 = (x+iy)^3 - 1 = (x^3 - 3xy^2 - 1) - (iy^3 - 3iyx^2) *)

let p_reel x y = x *. x *. x -. 3. *. x *. y *. y -. 1. ;;
let p_img x y = y *. y *. y -. 3. *. x *. x *. y ;;

(* Derivee en x de p = (3x^2 - 3y^2) - (-6ixy) *)

let dx_reel x y = 3. *. x *. x -. 3. *. y *. y;;
let dx_img x y = -. 6. *. x *. y ;;

(* Derivee en y de p = (-6xy) - (3iy^2 - 3ix^2) *)

let dy_reel x y = -. 6. *. x *. y ;;
let dy_img x y = 3. *. y *. y -. 3. *. x *. x ;;

let etape_newton (xn,yn) =
  let a = dx_reel xn yn in let b = dy_reel xn yn in
    let c = dx_img xn yn in let d = dy_img xn yn in
  let det = a *. d -. b *. c in

  let a' = d /. det in let b' = -. b /. det in
  let c' = -. c /. det in let d' = a /. det in
    ( xn -. (p_reel xn yn) *. a' -. (p_img xn yn) *. c', yn -. (p_reel xn yn)
   *. b' -. (p_img xn yn) *. d' ) ;;
```

Le but de ce TP est d'afficher les bassins d'attraction des racines du polynôme $f(z) = z^3 - 1$ sur une interface graphique. Pour cela, l'idée est de parcourir chaque pixel d'une fenêtre de taille donnée (ici on utilisera une fenêtre de 400x400) et d'utiliser ses coordonnées comme valeurs en entrée pour la version à deux variables du polynôme. Pour pouvoir afficher les bassins à différents niveaux de zoom, on peut utiliser la paire de coordonnées retournée par la fonction *zoom_coo* du fichier *tp5_code.ml* plutôt que x et y directement. Avec la méthode de Newton, on calcule ensuite la racine vers laquelle est attirée le point aux coordonnées x et y, en répétant le processus jusqu'à convergence ($(x_n - x_{n+1})^2 + (y_n - y_{n+1})^2 \leq \epsilon^2$) ou jusqu'à ce que le nombre d'étapes dépasse un seuil n_{max} fixé. On utilisera $\epsilon = 0.000001$ et $n_{max} = 100$. Une fois l'approximation calculée, on détermine la racine exacte r_i la plus proche entre $r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $r_3 = 1 + 0i$ et on affiche le pixel en jaune si c'est r_1, en rouge si c'est r_2 et en bleu sinon. On peut également dessiner un cercle blanc à l'emplacement des racines sur l'interface graphique.

L'objectif est d'arriver aux résultats suivants, avec des niveaux de zoom à 2 (haut-gauche), 1 (haut-droite), 0.8 (bas-gauche) et 0.1 (bas-droite) :



Question 1. Affichez les bassins d'attraction du polynôme $f(z) = z^3 - 1$ avec des niveaux de zoom à 2, 1, 0.8 et 0.1. Plutôt que de passer par une session interactive pour exécuter votre code, compilez-le avec le makefile disponible sur la Dropbox.

Question 2. (Pour aller plus loin). Modifiez votre code pour implémenter la version généralisée de la méthode de Newton (aussi appelée *damped Newton*).