UNIVERSIDAD
DE GRANADA

ETSIIT, Facultad de Ciencias

Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

trabajo de fin de grado

Visualización de superficies en 3D

Presentado por:
Daniel Zufrí quesada

Tutor:
Carlos Ureña Almagro
Lenguajes y Sistemas Informáticos

Pedro Abelardo García Sánchez
Álgebra

Curso académico 2022-2023

Visualización de superficies en 3D

Daniel Zufrí quesada

Daniel Zufrí quesada *Visualización de superficies en 3D*.
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2022-2023.

Responsable de tutorización

Carlos Ureña Almagro
Lenguajes y Sistemas Informáticos

Pedro Abelardo García Sánchez
Álgebra

Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

ETSIIT, Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D./Dña. Daniel Zufrí quesada

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2022-2023, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 2 de febrero de 2023

Fdo: Daniel Zufrí quesada

Dedicatoria (opcional)
Ver archivo `preliminares/dedicatoria.tex`

Índice general

Agradecimientos

Agradecimientos del libro (opcional, ver archivo `preliminares/agradecimiento.tex`).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: `preliminares/summary.tex`

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo `preliminares/introduccion.tex`

1 Función distancia con signo

1.1. Preliminares

Definición 1.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un espacio métrico. Una **función distancia** $d(x)$ es aquella que a cada punto de $\mathbb{R}^3$ le asigna la menor distancia a la frontera de Ω:

$$d(x) = \min(|x - x_i|), \ \forall x_i \in \delta\Omega$$

Definición 1.2 (SDF). Una **función distancia con signo** es una función implícita $\phi(x)$ de forma que:

$$\phi(x) = \begin{cases} d(x) & , x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathring{\Omega} \\ -d(x) & , x \in \mathring{\Omega} \end{cases}$$

De forma general nos referiremos a esta función por sus siglas en inglés SDF (*Signed Distance Field*).

1.2. Raymarching

1.3. Iluminación

Utilizaremos el modelo de reflexión de Phong, en el cual se trabaja con los siguientes elementos:

- Luz ambiente i_a.
- Materiales definidos por las constantes (k_s, k_d, k_a, α), que representan los factores de reflexión especular, difusa y ambiente y el coeficiente de brillo respectivamente.
- Lista de fuentes de luz $(l_1, \ldots, l_m, \ldots, l_n)$
- Los vectores normalizados definidos para cada punto de la superficie p:
  - L_m: vector director desde p a cada fuente de luz l_m.
  - N vector normal a la superficie en p.
  - R_m dirección del rayo de luz reflejado especularmente desde la fuente l_m en el punto p.
  - V: dirección de p a la posición del observador.

Con estas variables, el color en p vendrá dado por la fórmula:

$$I_p = k_a i_a + \sum_{m=0}^{n} \left(k_d \left(L_m \cdot N\right) + k_s \left(R_m \cdot V\right)^{\alpha}\right)$$

De los vectores anteriores, L_m y V se calculan trivialmente, y R_m se puede obtener como

$$R_m = 2(L_m \cdot N)N - L_m$$

Sin embargo, dado que la superficie viene dada por un SDF, no podemos calcular N de forma analítica.

Definición 1.3. El **gradiente** de una función implícita ϕ es $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

Proposición 1.1. *$\nabla\phi$ es perpendicular al isocontorno de ϕ.*

Demostración. TODO $\square$

- k_s: factor de reflexión especular.
- k_d: factor de reflexión difusa.
- k_a: factor de reflexi

1.4. Operadores

1.4.1. Transformaciones afines

1.4.2. Booleanos

1.4.3. Fusiones

1.4.4. Deformaciones

2 Implicitación de ecuaciones paramétricas

Durante todo el capítulo fijamos A anillo conmutativo y $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ conjunto de variables distintas.

2.1. Polinomios en varias variables

Definición 2.1. Llamamos **monomio** en X a cualquier producto de la forma:

$$X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad , \alpha_i \in \mathbb{N} \ \forall 0 \leq i \leq n$$

Lo denotaremos como X^α, con $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definición 2.2. Definimos un **polinomio multivariable** a cualquier combinación lineal finita de monomios $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha$. Puede comprobarse que el conjunto de polinomios forma un cuerpo, que denotaremos $A[X] = A[x_1, \ldots, x_n]$.

Tras esta definición nos surge la pregunta de si hay alguna forma "natural"de ordenar los monomios de un polinomio. Vamos a ver que no hay una única forma, sino que hay muchas igual de válidas.

Definición 2.3. Un **orden admisible** es un orden total $\leq$ sobre $\mathbb{N}^n$ cumpliendo:

1. $(0, \ldots, 0) \leq \alpha, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.
2. $\alpha < \beta \implies \alpha + \gamma < \beta + \gamma, \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$.

Hay muchos órdenes admisibles, pero nosotros usaremos uno en particular:

Definición 2.4. Definimos el **orden lexicográfico** $\leq_{\text{lex}}$ como:

$$\alpha \leq_{\text{lex}} \beta \iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ \quad \text{ó} \\ \alpha_i < \beta_i, \text{ donde } i \text{ es el primer índice tal que } \alpha_i \neq \beta_i \end{cases}$$

Ahora ya estamos en disposición de definir varios conceptos que nos resultarán imprescindibles:

Definición 2.5. Sea $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha$ y $\leq$ admisible. Definimos:

- **Exponente:** $exp(f) = \max_{\leq}(\alpha)$.

- **Monomio líder:** $\mathrm{lm}(f) = X^{\exp(f)}$
- **Coeficiente líder:** $\mathrm{lc}(f) = a_{\exp(f)}$.
- **Término líder:** $\mathrm{lt}(f) = \mathrm{lc}(f) \cdot \mathrm{lm}(f)$.

A partir de ahora siempre que usemos un orden supondremos que es admisible, y si no se especifica, que es $\leq_{\text{lex}}$.

Estudiamos ahora las operaciones que podemos realizar sobre $A[X]$.

Proposición 2.1. *Sean $f, g \in A[X]$.*

- $(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + f(\alpha)$.
- $(fg)(\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} f(\beta)g(\gamma)$.

Teorema 2.1. *Sea $F = \{f_1, \ldots, f_s\} \subset A[X]$. Entonces todo polinomio $f \in A[X]$ se puede expresar como:*

$$f = q_1 f_1 + \cdots + q_s f_s + r$$

donde $q_i, r \in A[X]$ y r no se puede expresar como combinación lineal de ningún elemento de F o es 0. Notaremos rem$(f, [F]) = r$.

En otras palabras, podemos dividir f entre los polinomios $f_1, \ldots, f_s$. Para realizar la demostración primero presentamos un algoritmo que dados $f, f_1, \ldots, f_s \in A[X]$, expresa f de la forma vista en el teorema, para después comprobar que funciona correctamente siempre.

Demostración. TODO □

2.2. Bases de Groebner

Definición 2.6. Dado un anillo conmutativo R, decimos que $\emptyset \neq I \subseteq R$ es un **ideal** si:

1. $a + b \in I, \ \forall a, b \in I$.
2. $ab \in I, \ \forall a \in I, \ \forall b \in R$.

Lo denotaremos como $I \leq R$.

Definición 2.7. Dado $F \subseteq A$, el **ideal generado** por F es:

$$\langle F \rangle = \{a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s : a_1, \ldots, a_s \in A, \ f_1, \ldots, f_s \in F\}$$

Definición 2.8. Dado $I \leq A[X]$, diremos que $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq I$ es una **base de Groebner** para I si $\langle \mathrm{lt}(I) \rangle = \langle \mathrm{lt}(g_1), \ldots, \mathrm{lt}(g_t) \rangle$.

Algorithm 1: División polinomios varias variables

```
Data: f, F = [f_1, ..., f_S]
p ← f;
[q_1, ..., q_s] ← [0, ..., 0];
r ← 0;
while p ≠ 0 do
    divisorEncontrado ← false;
    for f_i ∈ F do
        if exp(p) = exp(f_i) + α then
            q_i ← q_i + (lc(p)/lc(f_i)) X^α;
            p ← p − f_i · (lc(p)/lc(f_i)) X^α;
            divisorEncontrado ← true;
        end
    end
    if !divisorEncontrado then
        r ← r + lt(p);
        p ← p − lt(p);
    end
end
return [r, q_1, ..., q_s]
```

Definición 2.9. Dada $f \in A[X]$, definimos su **soporte** como

$$\operatorname{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : f(\alpha) \neq 0\}$$

Definición 2.10. G se dirá una **base de Groebner reducida** para I si para todo $g \in G$ se cumple:

- $\operatorname{lc}(g) = 1$.
- $\operatorname{supp}(g) \cap (\exp(G \setminus \{g\}) + \mathbb{N}^n) = \emptyset$.

La base de Groebner es a un ideal lo que un sistema de generadores a un espacio vectorial: un subconjunto a partir del cual podemos obtener el total. Si ademças la base es reducida, esta será el equivalente a la base del espacio vectorial. Por tanto, resulta de gran interés saber si dado un ideal I siempre existirá una base de Groebner asociada, y de ser así, si podemos calcularla.

Definición 2.11. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, definimos su **mínimo común múltiplo** como

$$\operatorname{lcm}(\alpha, \beta) = \{\max(\alpha_1, \beta_1), \ldots, \max(\alpha_s, \beta_s)\}$$

Definición 2.12. Sean $f, g \in A[X]$ donde $\alpha = \exp(f)$, $\beta = \exp(g)$, $\gamma = \operatorname{lcm}(\alpha, \beta)$.

Definimos el **S-polinomio** de f y g como

$$S(f,g) = \mathrm{lc}(g)X^{\gamma-\alpha}f - \mathrm{lc}(f)X^{\gamma-\beta}g$$

Teorema 2.2 (Criterios de Buchberger). *Sean $I \leq A[X]$ y $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ conjunto de generadores de I. Entonces:*

1. *G es base de Groebner para $I \iff rem(S(g_i, g_j), G) = 0,\ \forall 1 \leq i < j \leq t.$*

2. *$lcm(\exp(g_i), \exp(g_j)) = \exp(g_i)\exp(g_j) \implies rem(S(g_i, g_j), G) = 0.$*

3. *$\exists g_t \neq g_i, g_j,\ \alpha \in \mathbb{N}^n : lcm(\exp(g_i), \exp(g_j)) = \alpha \exp(g_t) \implies rem(S(g_i, g_j), G)$ si $S(g_i, g_t)$ y $S(g_j, g_t)$ ya han sido considerados.*

El algoritmo del cálculo de la base de Groebner se basará en el primer criterio, mientras que los otros nos servirán para evitar cálculos innecesarios de S-polinomios.

Algorithm 2: Cálculo de base de Groebner reducida

```
Data: f, F = [f_1, ..., f_S]
G ← F;
repeat
    G' ← G;
    for each pair {f, g} ⊆ G' do
        if Criterio 2(f, g) AND !Criterio 3({f, g}, G, G') then
            r ← rem(S(f, g), G');
            if r ≠ 0 then
                G ← G ∪ {r};
            end
        end
    end
until G' = G;
return G
```

2.3. Implicitación Polinomial

Una vez definido un método para el cómputo de bases de Groebner estamos en disposición de realizar nuestro cometido.

Definición 2.13. Dado $F \subseteq A[X]$, llamamos **variedad afín** definida por F al conjunto:

$$\mathbb{V}(F) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0\ \forall 1 \leq i \leq s\}$$

Teorema 2.3 (Implicitación Polinomial). *Dados $f_1, \dots, f_n \in A[t_1, \dots, t_r]$ con A cuerpo infinito, sea*

$$\begin{aligned} \phi \colon A^r &\to A^n \\ (a_1, \dots, a_r) &\mapsto (f_1(a_1, \dots, a_r), \dots, f_n(a_1, \dots, a_r)) \end{aligned}$$

Tomamos los ideales:

- $I = \langle x_1 - f_1, \dots, x_1 - f_1 \rangle \subseteq A[t_1, \dots, t_r, x_1 \dots, x_n]$
- $J = I \cap A[x_1, \dots, x_n]$

Entonces, $\mathbb{V}(J)$ es la menor variedad que contiene a $\phi(A^r)$.

A Primer apéndice

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/apendice01.tex`

Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.
Archivo: `glosario.tex`

$\mathbb{R}$ Conjunto de números reales.

$\mathbb{C}$ Conjunto de números complejos.

$\mathbb{Z}$ Conjunto de números enteros.