



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

ETSIIT, Facultad de Ciencias

DOBLE GRADO EN ING. INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Visualización de Superficies 3D

Presentado por:

Daniel Zufrí Quesada

Tutor:

Carlos Ureña Almagro

*Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos*

Pedro A. García Sánchez

*Departamento de Álgebra*

Curso académico 2022-2023



# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>Estado del arte</b>	<b>IX</b>
<b>1. Fundamentos matemáticos: las SDFs</b>	<b>1</b>
1.1. Diferenciabilidad . . . . .	2
1.2. Funciones cota de distancia . . . . .	5
1.3. Operaciones sobre SDF . . . . .	6
1.3.1. Operaciones booleanas . . . . .	6
1.3.2. Operaciones afines . . . . .	11
1.3.3. Operaciones deformantes . . . . .	12
1.3.4. Operaciones de repetición . . . . .	13
1.4. Obtención de una SDF a partir de ecuaciones implícitas . . . . .	14
1.5. Implicitación de parametrizaciones racionales con bases de Gröbner . . . . .	15
1.5.1. Polinomios en varias variables . . . . .	16
1.5.2. Bases de Gröbner . . . . .	19
1.5.3. Teorema de implicitación . . . . .	24
1.6. Implicitación de parametrizaciones racionales con resultantes . . . . .	27
1.6.1. Conceptos básicos y caso de una variable . . . . .	27
1.6.2. Resultante auxiliar . . . . .	29
<b>2. Algoritmos de visualización de SDFs</b>	<b>33</b>
2.1. Renderizado por <i>spheretracing</i> . . . . .	33
2.1.1. Creación del lienzo . . . . .	33
2.1.2. Raymarching y <i>spheretracing</i> . . . . .	37
2.2. Modelos de iluminación y sombras . . . . .	40
2.2.1. Modelos de Blinn y Blinn-Phong . . . . .	40
2.2.2. Sombras . . . . .	48
2.2.3. Oclusión ambiental . . . . .	52
2.3. <i>Antialiasing</i> . . . . .	55
<b>3. Desarrollo e implementación</b>	<b>61</b>
3.1. Gestor de estado . . . . .	62
3.2. Editor de nodos . . . . .	64
3.3. Panel de primitivas . . . . .	66
3.4. Librería de polinomios multivariante . . . . .	66
3.4.1. Clase Monomial . . . . .	67
3.4.2. Clase Polynomial . . . . .	69
3.4.3. Clase Ideal . . . . .	71
<b>4. Pruebas y rendimiento</b>	<b>73</b>

*Índice general*

<b>5. Conclusiones y líneas futuras</b>	<b>75</b>
<b>A. Resultados de operaciones sobre SDF</b>	<b>77</b>
<b>B. Resultado de técnicas empleadas al enderezar SDFs</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

## **Abstract**



# Introducción

En el campo de los gráficos generados por computador los métodos más asentados para describir objetos tridimensionales han sido mediante polígonos o ecuaciones implícitas. Sin embargo, en los últimos años ha surgido un enfoque alternativo que muestra un gran potencial: la utilización de funciones distancia con signo (SDF). Estos permiten representar objetos geométricos mediante una única función escalar que asigna a cada punto del espacio su distancia con signo respecto a la superficie del objeto. Veremos que esta representación es especialmente útil para la generación de imágenes y el renderizado en tiempo real, ofreciendo ventajas significativas en términos de eficiencia y precisión respecto otros métodos tradicionales.

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado (TFG) es la creación de una aplicación web interactiva que facilite la creación e interacción con superficies generadas a través de SDF de forma intuitiva para el usuario sin que este necesite conocimientos al respecto. Para lograr este objetivo, llevaremos a cabo el desarrollo de la aplicación aprovechando las tecnologías web y *frameworks* modernos, evaluando la eficiencia y el rendimiento de la aplicación en términos de tiempos de respuesta y calidad visual.

Empezaremos este trabajo presentando los SDF explorando los fundamentos teóricos y matemáticos detrás de los SDF y comprendiendo su capacidad para describir superficies y volúmenes de manera precisa y compacta, así como las técnicas empleados para su manipulación, como las operaciones booleanas o las deformaciones. Posteriormente estudiaremos cómo pueden ser representados mediante *spheretracing* y aplicando técnicas avanzadas como *antialiasing* y oclusión ambiental .

Una vez comprendidos los detalles de los SDF nos centraremos en estudiar como aprovechar sus ventajas para superficies dadas de forma implícita o paramétrica obteniendo una representación suya como SDF usando bases de Groebner



## **Estado del arte**



# 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

Estamos acostumbrados a representar superficies en  $\mathbb{R}^3$  a través de ecuaciones paramétricas e implícitas. En el caso de las paramétricas se asigna a cada tupla de parámetros un punto, mientras que para las implícitas, dado un punto la ecuación indica si este se encuentra dentro o fuera de la superficie. El tipo de superficies implícitas más comúnmente estudiado es el de las superficies algebraicas, variedades algebraicas de dimensión dos. Existen varios métodos para la visualización de este tipo de superficies. Uno de ellos es tratar de generar una malla de polígonos previamente a partir de la ecuación para después ser visualizada en tiempo real usando los métodos clásicos. El problema de este método es que no siempre se puede aplicar y conlleva pérdida de precisión en la representación de la superficie. Otro método es el *raytracing*, pero este también puede llegar a perder precisión, además de que es muy lento, haciendo que la representación de una superficie tan simple como una esfera sea computacionalmente muy costoso.

Como solución a esto, T. Sederberg y A. Zundel [1] presentaron en 1989 un método para la representación superficies algebraicas sin pérdida de información y de manera eficiente, capaz además de trabajar con siluetas, intersección de curvas y operaciones booleanas. En 1989 John C. Hart [2] presenta una técnica de *raymarching* para la representación de fractales usando funciones distancia con signo. Posteriormente, en 1995 [3] generaliza esta técnica con el uso de *spheretracing* para la representación de cualquier superficie implícita (algebraica o no), punto de partida de este trabajo. Este método nos permitirá representar cualquier superficie en tiempo real con un coste computacionalmente muy bajo y a cualquier nivel de detalle. No obstante, para usarlo debemos comprender qué son las funciones distancia con signo, sus propiedades, y cómo trabajar con ellas.

**Definición 1.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . La **función distancia** asociada a  $\Omega$ , que llamamos  $d_\Omega$  es el campo escalar que a cada punto de  $\mathbb{R}^3$  le asigna su menor distancia a la frontera de  $\Omega$ :

$$d_\Omega: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \\ x \mapsto \inf\{\|x - y\| : y \in \partial\Omega\}.$$

Cuando  $\Omega$  sea cerrado, podremos usar el mínimo en lugar del ínfimo.

**Definición 1.2.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . La **función distancia con signo** asociada a  $\Omega$  es el campo escalar de la forma:

$$\phi_\Omega: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto \begin{cases} d_\Omega(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ -d_\Omega(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

En la literatura es común referirse a ellas por sus inglés SDF (*Signed Distance Function*), y la denominaremos simplemente  $\phi$  siempre que no haya confusión.

*Observación 1.1.* Un campo escalar  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  cualquiera será una función distancia si existe

## 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

al menos un  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $f = d_\Omega$ . De la misma forma,  $f$  será una SDF cuando para dicho  $\Omega$  se tenga  $f = \phi_\Omega$ .

**Definición 1.3.** Dada una función  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{R}$ , llamamos **isosuperficie de  $\phi$  con valor  $k$**  al conjunto:

$$S_{\phi,k} = \{(x,y,z) : \phi(x,y,z) = k\}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer  $k = 0$ , pues de no ser el caso, tomamos la función  $\phi'(x,y,z) = \phi(x,y,z) - k$  y tenemos que  $S_{\phi',0} = S_{\phi,k}$ . Por tanto, la denotaremos como  $S_\phi$ .

Nuestra intención es construir una escena definida como la isosuperficie generada por una SDF. A partir de ahora, tomaremos  $p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Ejemplo 1.1.** Ejemplos simples de SDFs  $\phi$  en  $p$  para diferentes conjuntos  $\Omega$  son:

- **Esfera de radio  $r$  centrada en el origen.**

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| = r\}, \quad \phi(p) = \|p\| - r.$$

- **Plano con vector normal unitario  $n = (a, b, c)$  y pasando por el origen.**

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}, \quad \phi(p) = p \cdot n.$$

- **Toro sobre el eje Y de radios  $R$  y  $r$ , con  $R > r$ :**

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left( R - \sqrt{x^2 + z^2} \right)^2 + y^2 = r^2 \right\},$$

$$\phi((x,y,z)) = \left\| (\|(x,0,z)\| - R, y) \right\| - r.$$

### 1.1. Diferenciabilidad

Antes de seguir avanzando vamos a realizar un estudio de la diferenciabilidad de las funciones distancia con signo, pues nos será de utilidad en las siguientes secciones. Empezamos recordando varios conceptos de análisis diferencial [4] fijadas las variables  $\{x_1, x_2, x_3\}$  y la base usual

$$B = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

Cuando sea conveniente identificaremos

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

**Definición 1.4.** Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^3$  y  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Para  $i \in \{1, 2, 3\}$ , definimos la  **$i$ -ésima derivada parcial** de  $\phi$  en  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  como

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(p_0 + he_i) - \phi(p_0)}{h}.$$

**Definición 1.5.** Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^3$  y  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $\phi$  es **diferenciable** en  $p_0 \in U$  si existen todas sus derivadas parciales en  $p_0$  y son continuas. Definimos la

**diferencial** de  $\phi$  en  $p_0$  como la suma de todas sus parciales en dicho punto, y la denotamos como  $d\phi(p_0)$ .

**Definición 1.6.** Dado un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ , diremos que la **clase de diferenciabilidad** de una función  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^n(U)$  si para  $i \in \{1, 2, 3\}$  y  $j \in \{0, \dots, n\}$  existen y son continuas todas las parciales

$$\frac{\partial^j \phi}{\partial x_i}(p), \text{ para todo } p \in U.$$

**Definición 1.7.** Llamamos **gradiente** de  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a la función

$$\begin{aligned} \nabla \phi &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ p &\mapsto \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(p), \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(p) \right). \end{aligned}$$

**Definición 1.8.** Dada  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, definimos la **derivada direccional** en  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  en la dirección  $v \in \mathbb{R}^3$  a:

$$\nabla_v \phi(p_0) = \nabla \phi(p_0) \cdot v = \frac{\partial \phi(p_0)}{\partial x} v_x + \frac{\partial \phi(p_0)}{\partial y} v_y + \frac{\partial \phi(p_0)}{\partial z} v_z.$$

Ahora mismo, dado una función distancia con signo arbitraria no tenemos información alguna sobre su diferenciabilidad, ya que su expresión puede ser de lo más variada y compleja. Veamos una propiedad que cumplen todas las funciones distancia con signo y que nos permitirá obtener algo de información al respecto [5, 6].

**Definición 1.9.** Una campo escalar  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **lipschitziano** si existe una constante  $L > 0$  tal que

$$|\phi(p) - \phi(q)| \leq L \|p - q\|, \text{ para todo } p, q \in \mathbb{R}^3.$$

La constante  $L$  recibe el nombre de **constante de Lipschitz**.

**Proposición 1.1.** Sea  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función lipschitziana cualquiera con constante de Lipschitz  $L$ . Entonces

$$|d\phi(p)| \leq L$$

en todo punto donde sea diferenciable.

**Lema 1.1.** Sea  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la función distancia con signo asociada a  $\Omega$ . Entonces  $\phi$  es lipschitziana con constante  $L = 1$ .

*Demostración.* Sean  $p$  y  $q \in \mathbb{R}^3$ . Usando la Def. 1.1, para todo  $s \in \delta\Omega$  se tiene

$$\phi(p) \leq \|p - s\| = \|p - q + q + s\| \leq \|p - q\| + \|q - s\|.$$

Por tanto,  $\phi_\Omega(p) - \|p - q\| \leq \|q - s\|$ , luego  $\phi_\Omega(p) - \|p - q\| \leq \inf_{s \in \delta\Omega} (\|q - s\|) = \phi_\Omega(q)$  y obtenemos

$$\phi_\Omega(p) - \phi_\Omega(q) \leq \|p - q\|.$$

De forma análoga podemos ver que  $\phi_\Omega(q) - \phi_\Omega(p) \leq \|q - p\|$ , concluyendo que

$$|\phi_\Omega(p) - \phi_\Omega(q)| \leq 1 \cdot \|p - q\|. \quad \square$$

## 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

**Lema 1.2** (Teorema de Rademacher). *Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^3$  y  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitziana. Entonces  $\phi$  es diferenciable en casi todo punto de  $U$ .*

Tenemos por tanto asegurado que  $\phi_\Omega$  será diferenciable en casi todo punto de  $\mathbb{R}^3$ . No obstante, podemos concretar aún más dónde están los puntos de conflicto cuando  $\Omega$  sea lo suficientemente regular [7, 8]. Para ello necesitaremos introducir el concepto de esqueleto de una superficie [6] y repasar algunas definiciones básicas asociadas a superficies en el espacio [9].

**Definición 1.10.** Sea  $\phi_\Omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función distancia con signo. Llamamos **esqueleto** de  $\Omega$  al conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^3$  cuya distancia a la superficie puede obtenerse como la distancia a dos o más puntos distintos de  $\delta\Omega$ :

$$\epsilon(\Omega) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \phi_\Omega(p) = \|p - q\| = \|p - r\|, q, r \in \delta\Omega, q \neq r\}.$$

**Definición 1.11.** Dado  $I \subseteq \mathbb{R}$ , llamamos **curva parametrizada** a una aplicación

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)),\end{aligned}$$

donde  $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables.

**Definición 1.12.** Decimos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  es una **superficie regular** si para cada  $p \in \Omega$  existen abiertos  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  y  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  junto a una aplicación  $\psi : U \rightarrow V \cap \Omega$  tal que:

1.  $\psi$  es un homeomorfismo, es decir, es continua, biyectiva y con inversa continua,
2.  $\psi$  es diferenciable y su diferencial es inyectiva.

**Definición 1.13.** Sea  $\Omega$  una superficie regular y  $p \in \Omega$ . Dados  $\varepsilon > 0$  y una curva parametrizada diferenciable

$$\alpha : ]\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \text{Img}(\alpha) \subset \Omega \text{ y } \alpha(0) = p,$$

diremos que  $\alpha'(0)$  es un **vector tangente** a  $\Omega$  en  $p$ .

**Definición 1.14.** Sea  $\Omega$  una superficie regular,  $p \in \Omega$  y  $T_p\Omega$  el plano vectorial contenido todos los vectores tangentes a  $\Omega$  en  $p$ . Llamamos **plano tangente** a  $\Omega$  en  $p$  al conjunto  $p + T_p\Omega$ .

**Definición 1.15.** Sea  $\Omega$  una superficie regular y  $p \in \Omega$ . El **vector normal** a  $\Omega$  en  $p$  es el vector  $N_p \in \mathbb{R}^3$  de norma uno perpendicular al plano tangente de  $\Omega$  en  $p$ .

El siguiente teorema, cuya demostración podemos consultar en [7], nos proporciona una caracterización geométrica de la diferenciabilidad de cualquier función distancia con signo  $\phi_\Omega$  bajo ciertas hipótesis de regularidad para  $\Omega$ .

**Teorema 1.1.** *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  cuya frontera es regular y  $\phi_\Omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la función distancia con signo asociada a  $\Omega$ . Entonces  $\phi_\Omega$  es diferenciable en un entorno tubular  $U$  de  $\delta\Omega$ . Es más, para cada  $p \in \mathbb{R}^3$  se cumple una de las siguientes propiedades:*

1.  $p \in \delta\Omega$  y  $\phi_\Omega$  es diferenciable en  $p$  con  $\nabla S_{\phi_\Omega}(p) = N_p$ ,

2.  $p \notin \delta\Omega$  y  $\phi_\Omega$  es diferenciable en  $p$  si y solo si  $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \epsilon(\Omega)$ , en cuyo caso

$$\nabla\phi_\Omega(p) = \frac{q-p}{\phi_\Omega(p)},$$

donde  $q$  es el único punto de  $\delta\Omega$  tal que  $\phi_\Omega(p) = \|q-p\|$ .

**Corolario 1.1.** Toda función distancia con signo  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación de la eikonal

$$\|\nabla\phi(p)\| = 1$$

en todo punto  $p$  donde sea diferenciable.

## 1.2. Funciones cota de distancia

Hemos visto que las funciones distancia con signo nos proporcionan la distancia signada exacta en cada punto al más cercano de un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , pero lo cierto es que para representar las isosuperficies que generan no se necesita tanta precisión, ya que mientras dos funciones tengan los mismos ceros generarán la misma isosuperficie. Sin embargo, para representar la superficie en las siguientes secciones usaremos el método de *spheretracing* ([Subsección 2.1.2](#)), que sí utiliza la información de la distancia en puntos diferentes a la frontera de  $\Omega$ . Introducimos un concepto que nos permitirá seguir usando este método pero no es tan restrictivo como el de función distancia con signo [\[3\]](#).

**Definición 1.16.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  y  $\phi$  su SDF. Una **cota de la distancia con signo** asociada a  $\Omega$  es un campo escalar  $\gamma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  cumpliendo

$$|\gamma(p)| \leq |\phi(p)|, \text{ para todo } p \in \mathbb{R}^3,$$

y que tiene el mismo signo que  $\phi$  en cada punto. En su artículo [\[2\]](#), C. Hart se refiere a ellas como SDB (*Signed Distance Bound*).

Observamos que una SDF es un caso especial de SDB en el que se cumple la igualdad de la definición anterior, y que si ambos tipos de funciones están asociadas a un mismo  $\Omega$  tendrán los mismos ceros, generando por tanto la misma isosuperficie. Aunque trabajar con una función cota de distancia en *spheretracing* hará que la convergencia sea más lenta al proporcionar una cota más conservativa, en muchos casos será también más rápida de evaluar que una función distancia con signo por tener una expresión más simple, haciendo que sea deseable trabajar con ellas. Habrá otras ocasiones en las que incluso será imposible obtener una función distancia signada para un cierto  $\Omega$ . Por estos motivos en la literatura no se suele distinguir entre función distancia con signo y función cota de distancia, y como mucho se utilizan los términos función distancia exacta y aproximada respectivamente cuando se quiere realizar una distinción.

Veamos algunos ejemplos de funciones distancia aproximadas.

**Ejemplo 1.2.** Para los siguientes conjuntos  $\Omega$  podemos definir las funciones distancia aproximadas:

## 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

- **Cono centrado en el origen a lo largo del eje Y con altura  $h$  y ángulo  $\theta$ .**

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + z^2)(\cos \theta)^2 - y^2(\sin \theta)^2\},$$

$$\phi((x, y, z)) = \max\left((\sin \theta, \cos \theta) \cdot (\|(x, 0, z)\|, y), -h - y\right).$$

- **Elipsoide fijados  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .**

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \right\},$$

$$\phi((x, y, z)) = \left\| \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right) \right\| \cdot \left( \left\| \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right) \right\| - 1 \right) / \left\| \left( \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right) \right\|.$$

## 1.3. Operaciones sobre SDF

Si bien estas primitivas son fáciles de generar, también son muy simples y nos serán insuficientes si queremos construir escenas más complejas. Como comentamos en la introducción, una de las principales ventajas del uso de ecuaciones implícitas para representar modelos geométricos es la facilidad de combinación de estas primitivas, por ejemplo mediante operaciones booleanas o deformaciones. Sin embargo los sistemas que hacían uso de esta técnica no estaban lo suficientemente estructurados como para permitir aplicar estas operaciones de manera general e intuitiva, haciendo que no se pudieran aplicar de forma local y por tanto no se pudieran generar escenas complejas.

Esto cambió en 1999 con el artículo de B. Wyvill y otros [10], en el que sugieren usar una estructura de árbol para definir modelos como combinación de otros a través de operaciones básicas. La gran ventaja de este método es que es muy extensible, y además permite ver de forma muy clara la estructura del modelo. En esta sección estudiaremos los principales tipos de estas operaciones. En el [Apéndice A](#) podemos verlas en acción sobre diferentes primitivas.

### 1.3.1. Operaciones booleanas

Una de las técnicas más útiles para generar nuevas formas a partir de primitivas es la geometría de sólidos constructiva. Por la naturaleza de las SDFs, estas operaciones se implementan fácilmente usando las funciones máximo y mínimo.

**Definición 1.17** (Operaciones Booleanas). Sean  $A$  y  $B$  isosuperficies generadas por  $\phi$  y  $\gamma$  respectivamente. La función  $\mu$  define la isosuperficie para las siguientes operaciones.

- **Unión:**  $\mu_{A \cup B}(p) = \min(\phi(p), \gamma(p)).$
- **Intersección:**  $\mu_{A \cap B}(p) = \max(\phi(p), \gamma(p)).$
- **Diferencia:**  $\mu_{A \setminus B}(p) = \max(\phi(p), -\gamma(p)).$

Solo en el caso de la unión se obtiene una SDF exacta, ya que al aplicar la función máximo en el interior de la superficie (donde  $\phi(p) < 0$ ) el resultado puede ser solo una cota inferior de la distancia. En nuestro caso solo estamos interesados en visualizar la frontera de las

superficies así que podemos obviar este problema, con la salvedad de que el algoritmo de *spheretracing* requiera de más iteraciones.

Un problema de usar estas transformaciones es que produce discontinuidades en la derivada de la función resultante. Trataremos de evitar esta situación, además de por motivos analíticos, por motivos visuales, ya que esto produce bordes muy acusados en la intersección de ambas superficies. Existen muchas formas de combinar funciones distancia de forma más natural. Usaremos una de las más extendidas, usada por programas de modelado 3D como Blender [11] o videojuegos como Dreams [12], y que ha sido estudiada por Íñigo Quílez en su web [13].

*Observación 1.2.* Para mayor claridad del razonamiento, en las figuras se representarán funciones de variable real, a pesar de que nosotros trabajamos en  $\mathbb{R}^3$ .

Explicaremos la técnica poniendo como ejemplo la unión, y al final veremos como la intersección y la diferencia se deducen fácilmente de esta. La idea es, dadas  $\phi$  y  $\gamma$ , añadir una corrección para cada punto a la función mínimo original para que cumpla ciertos requisitos. Por comodidad, definiremos

$$\begin{aligned}\text{mín}_{\phi,\gamma}: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ p &\mapsto \text{mín}(\phi(p), \gamma(p)).\end{aligned}$$

Llamaremos a la mencionada corrección  $\omega_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $k \in \mathbb{R}_0^+$  es un coeficiente que controlará la intensidad del suavizado. Por tanto, la versión suavizada de la función mínimo original será

$$\begin{aligned}\text{smín}_{\phi,\gamma}: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ p &\mapsto \text{mín}_{\phi,\gamma}(p) - \omega_k(p).\end{aligned}$$

Como no queremos que este cambio afecte al algoritmo de *spheretracing*, debemos asegurar que se cumpla  $\text{mín}_{\phi,\gamma}(p) \geq \text{smín}_{\phi,\gamma}(p)$ , esto es,

$$\omega_k(p) \geq 0, \text{ para todo } p \in \mathbb{R}^3, \text{ para todo } k \in \mathbb{R}_0^+.$$

Si estudiamos cómo se comporta la versión real de la función mínimo en la [Figura 1.1](#), vemos que los puntos de conflicto se encuentran cerca de las intersecciones de las gráficas de  $\phi$  y  $\gamma$ , es decir, cuando  $\phi$  y  $\gamma$  están arbitrariamente cerca. En el resto de puntos no queremos modificar la función original, luego estudiaremos el comportamiento de smín en el conjunto de entornos de las intersecciones. Usaremos el valor de  $k$  para decidir el tamaño de estos entornos, aplicando la corrección únicamente en los puntos del conjunto

$$B_k = \{p \in \mathbb{R}^3 : |\phi(p) - \gamma(p)| \leq k\},$$

de forma que  $\omega_k(p) = 0$  cuando  $p \notin B_k$ .

Para asegurar que smín sea continua en la frontera de  $B_k$ , imponemos la condición

$$\omega_k(p) = 0, \text{ para todo } p \in \delta B_k.$$

Por otro lado, es lógico que  $\omega_k$  tenga su mayor influencia justo en las intersecciones, luego

1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

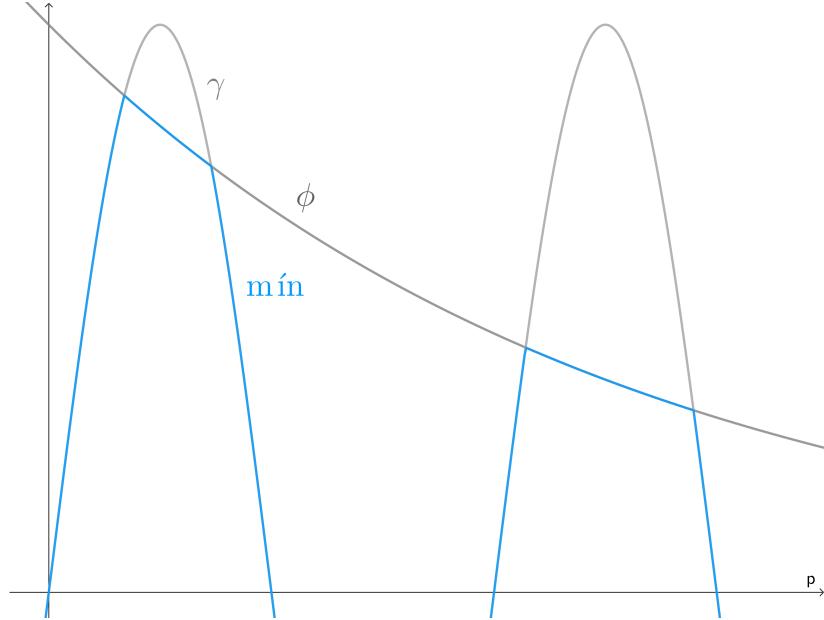


Figura 1.1.: Gráfica de  $\text{mÍn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

imponemos también

$$\omega_k(c) = s, \text{ donde } c \in I = \{p \in \mathbb{R}^3 : \phi(p) = \gamma(p)\}, s \in \mathbb{R}.$$

El valor  $s$  es el que deberemos ajustar para que  $\text{smín}$  cumpla nuestros requisitos. Fijado un  $p \in B_k$ , consideramos una primera aproximación para  $\omega_k$ :

$$\omega_k(p) = s \left(1 - \frac{|\phi(p) - \gamma(p)|}{k}\right)^n = \begin{cases} s \left(1 - \frac{\phi(p) - \gamma(p)}{k}\right)^n, & \phi(p) > \gamma(p), \\ s \left(1 + \frac{\phi(p) - \gamma(p)}{k}\right)^n, & \phi(p) \leq \gamma(p) \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

donde hemos añadido el parámetro  $n$  para añadir más control sobre el resultado final.

Nuestro objetivo es que  $\text{smín}$  tenga un aspecto natural y varíe de forma suave. Comprobemos las propiedades que debería cumplir  $\text{smín}$  para ser  $\mathcal{C}^1$  en cada entorno de  $B_k$ . Que es continua es evidente:

$$\phi(p) = \gamma(p), \text{ luego } \frac{\phi(p) - \gamma(p)}{k} = 0, \text{ y por tanto } \omega_k(p) = s.$$

Otra condición necesaria es que sus derivadas parciales sean continuas. Para todo  $i \in$

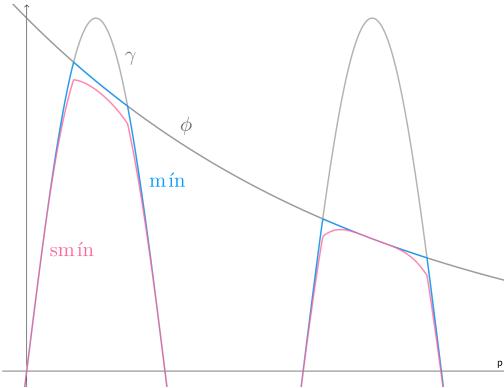
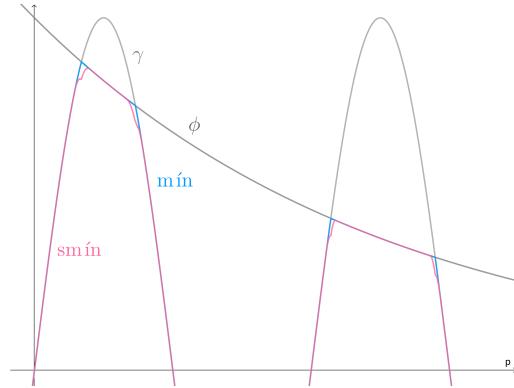

 Figura 1.2.:  $k = 0.6$ 

 Figura 1.3.:  $k = 0.1$ 

 Figura 1.4.: Primera aproximación de  $smin(p)$  con  $s = 0.05$  y  $n = 2$ 

$\{1, 2, 3\}$ , estas son de la forma

$$\frac{\partial smin}{\partial x_i}(p) = \begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(p) + sn \left( 1 - \frac{\phi(p) - \gamma(p)}{k} \right)^{n-1} \left( \frac{\frac{\partial \phi}{\partial p}(p) - \frac{\partial \gamma}{\partial p}(p)}{k} \right), & \phi(p) > \gamma(p), \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p) + sn \left( 1 - \frac{\phi(p) - \gamma(p)}{k} \right)^{n-1} \left( \frac{\frac{\partial \phi}{\partial p}(p) - \frac{\partial \gamma}{\partial p}(p)}{k} \right), & \phi(p) \leq \gamma(p). \end{cases}$$

Por tanto, para comprobar que las parciales son continuas cuando  $\phi(p) = \gamma(p)$ , para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$  imponemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - sn \left( 1 + \frac{\phi - \gamma}{k} \right)^{n-1} \left( \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}}{k} \right) &= \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + sn \left( 1 - \frac{\phi - \gamma}{k} \right)^{n-1} \left( \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}}{k} \right), \\ \cancel{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} - \cancel{\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}} &= 2sn \left( 1 - \frac{\phi - \gamma}{k} \right)^{n-1} \left( \frac{\cancel{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} - \cancel{\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}}}{k} \right), \\ s &= \frac{k}{2n} \left( 1 - \frac{\phi - \gamma}{k} \right). \end{aligned}$$

Evaluando en  $c \in I$ :

$$s = \frac{k}{2n} \left( 1 - \frac{\phi(c) - \gamma(c)}{k} \right)^0, \text{ luego } s = \frac{k}{2n}.$$

## 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

Hemos llegado a la expresión final

$$\begin{aligned}\omega_k(p) &= \begin{cases} \frac{k}{2n} \left(1 - \frac{|\phi(p) - \gamma(p)|}{k}\right)^n, & |\phi(p) - \gamma(p)| \leq k, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases} \\ &= \frac{\max(k - |\phi(p) - \gamma(p)|, 0)^n}{2n \cdot k^{n-1}}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Podemos observar los resultados en la [Figura 1.7](#). Finalmente, para obtener una versión suavizada del máximo, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}\text{smáx}_{\phi, \gamma}: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ p &\mapsto -\text{smín}_{-\phi, -\gamma}(p).\end{aligned}$$

Con estos resultados, para que la transición de una superficie a otra en la [Def. 1.17](#) sea gradual basta con sustituir las versiones clásicas de las funciones máximo y mínimo por las que acabamos de obtener.

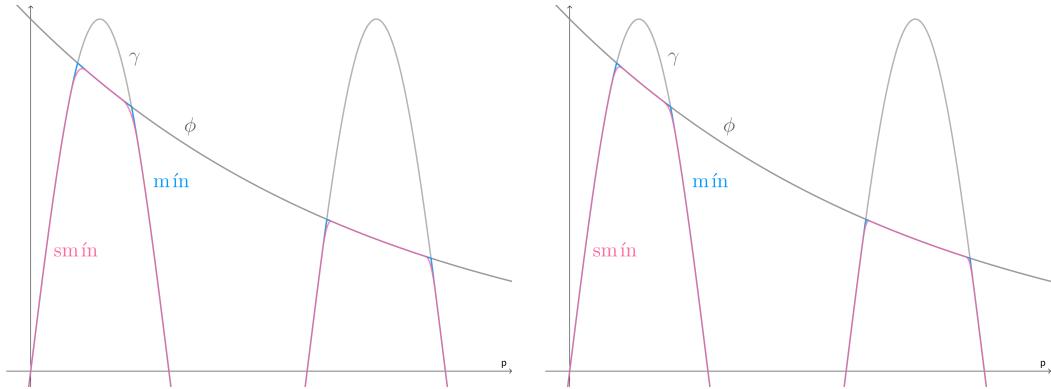


Figura 1.7.: Resultado final de  $\text{smín}(p)$

**Definición 1.18** (Operaciones Booleanas Suavizadas). Sean  $A$  y  $B$  isosuperficies generadas por  $\phi$  y  $\gamma$  respectivamente. La función  $\mu$  define la isosuperficie para las siguientes operaciones.

- **Unión suavizada:**  $\mu_{unionS}(p) = \min(\phi(p), \gamma(p)) - \frac{\max(k - |\phi(p) - \gamma(p)|, 0)^n}{2n \cdot k^{n-1}}$ .
- **Intersección suavizada:**  $\mu_{interS}(p) = -\min(-\phi(p), -\gamma(p)) + \frac{\max(k - |\phi(p) - \gamma(p)|, 0)^n}{2n \cdot k^{n-1}}$ .
- **Diferencia suavizada:**  $\mu_{diffS}(p) = -\min(-\phi(p), \gamma(p)) + \frac{\max(k - |\phi(p) + \gamma(p)|, 0)^n}{2n \cdot k^{n-1}}$ .

La constante  $k \in \mathbb{R}_0^+$  controla la influencia del suavizado.

Observamos que los operadores definidos en la [Def. 1.17](#) no son más que un caso particular de estos últimos cuando  $k$  tiende a cero. Este método para obtener una versión suavizada de

las funciones mínimo y máximo no es el único. Hemos elegido debido a que las funciones obtenidas tienen asociado un coste computacional. Además, su deducción es bastante natural y el efecto que tiene el valor  $k$  sobre el resultado final es intuitivo para el usuario. En el artículo que hemos mencionado al inicio de la sección, Íñigo Quílez [13] presenta otras tres alternativas a esta versión, a la cual él se refiere como “mínimo suavizado polinomial”, y que también son compatibles con *raymarching*.

- **Mínimo suavizado exponencial:**  $\text{smín}_{\phi,\gamma}(p) = \frac{-\log_2(2^{-k\phi(p)} + 2^{-k\gamma(p)})}{k}$ .
- **Mínimo suavizado potencial:**  $\text{smín}_{\phi,\gamma}(p) = \left(\frac{\phi(p)^k \cdot \gamma(p)^k}{\phi(p)^k + \gamma(p)^k}\right)^{1/k}$ .
- **Mínimo suavizado por raíz:**  $\text{smín}_{\phi,\gamma}(p) = \frac{\phi(p) + \gamma(p) - \sqrt{(\phi(p) - \gamma(p))^2 + k}}{2}$ .

La principal ventaja de la versión polinomial respecto a estas es que es la más rápida al ser sus cálculos computacionalmente más baratos. Por otro lado tanto la exponencial como la potencial permiten ser adaptadas fácilmente para calcular el mínimo de un conjunto arbitrario de puntos, útil cuando se trabaja con patrones de voronoi o nubes de puntos. Además, la versión exponencial produce siempre el mismo resultado independientemente del orden en el que se aplique. Es decir,

$$\text{smín}_{a,\text{smín}_{b,c}} = \text{smín}_{b,\text{smín}_{a,c}}.$$

En la [Figura 1.8](#) podemos ver un ejemplo de uso de estas versiones, en las que además se ha usado el valor de  $w_k$  de la ecuación [Figura 1.3.1](#) para interpolar la componente difusa de ambas primitivas usando el método `mix` de GLSL. Como vemos, no hay diferencias notables entre las distintas versiones, así que nos quedaremos con el método más eficiente: el polinómico.

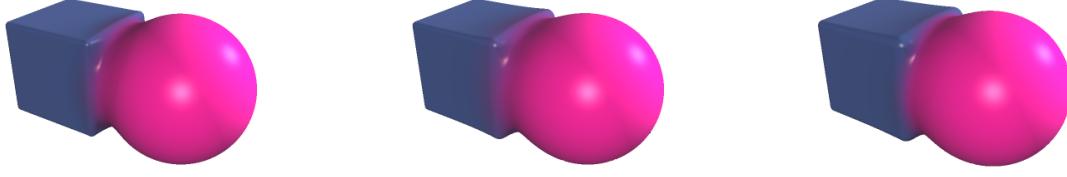
(a) Polinomial,  $k = 1.5$ (b) Exponencial,  $k = 2.5$ (c) Raíz,  $k = 1$ 

Figura 1.8.: Diferentes versiones de la unión suavizada

### 1.3.2. Operaciones afines

Pasamos ahora a estudiar otro tipo de operaciones que nos permitirán aplicar movimientos rígidos y cambios de escala a las primitivas en la escena. A diferencia de los operadores booleanos, que eran binarios, estas operaciones se aplican a una única primitiva. Su funcionamiento se basará en aplicar una transformación  $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a cada punto de la isosuperficie

## 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

$S_\phi$  para obtener la transformada  $S_\gamma$ . Si queremos saber si un punto  $q \in \mathbb{R}^3$  está en  $S_\gamma$ , tenemos que comprobar si su preimagen por la transformación pertenece a  $S_\phi$ . Por tanto, bastará evaluar la SDF original en  $t^{-1}(p)$ :

$$\gamma(p) = \phi(t^{-1}(p)).$$

Este razonamiento funciona bien para transformaciones como las traslaciones o rotaciones, que son movimientos rígidos y mantienen las distancias. Sin embargo, este no es el caso del escalado, ya que si tomamos  $l(p) = sp$  con  $s \in \mathbb{R}_0^+$

$$\|p - p'\| = d, \text{ luego } \|l(p) - l(p')\| = \|sp - sp'\| = s\|p - p'\| = s \cdot d, \text{ donde } p, p' \in S_\phi.$$

Como las distancias se escalan, deberemos hacer lo propio con la función que genere la nueva isosuperficie, aplicándole el mismo factor de escalado  $s$  como muestra la Def. 1.19.

**Definición 1.19** (Operaciones afines). Sea  $A$  una isosuperficie. Definimos las SDFs para las siguientes operaciones.

- **Traslación de vector  $v$ :**  $\text{sdf}_{\text{traslacion}}(p) = \text{sdf}_A(p - v)$ .
- **Escalado uniforme de dimensiones  $s$ :**  $\text{sdf}_{\text{escalado}}(p) = \text{sdf}_A(p/s) \cdot s$ .
- **Rotaciones de ángulo  $\alpha \in \mathbb{R}$  sobre los ejes  $x, y, z$ :**

$$\begin{aligned} \text{sdf}_{\text{rot}X}(p) &= \mu_A(R_x^{-1}(\alpha) \cdot p^t), \text{ donde } R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \\ \text{sdf}_{\text{rot}Y}(p) &= \mu_A(R_y^{-1}(\alpha) \cdot p^t), \text{ donde } R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \\ \text{sdf}_{\text{rot}Z}(p) &= \mu_A(R_z^{-1}(\alpha) \cdot p^t), \text{ donde } R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observamos que en este caso sí que obtenemos funciones distancia con signo como resultado, al contrario de lo que ocurría con las operaciones booleanas.

### 1.3.3. Operaciones deformantes

Siguiendo el mismo razonamiento, podemos definir operaciones que modifiquen la geometría de la superficie aplicando rotaciones o traslaciones al punto en el que se evalúa la función distancia con signo original. De esta forma podemos obtener operadores que de otra forma sería mucho más complicado implementar, como la torsión o el redondeo de los bordes de una primitiva.

**Definición 1.20** (Operaciones Deformantes). Sea  $A$  una isosuperficie. La función  $\mu$  define la isosuperficie para las siguientes operaciones.

- **Torsión:**  $\mu_{\text{torsion}}(p) = \text{sdf}_A(p')$ , con  $p' = R_z(ky) \cdot (x, z, y)^t$ .

- **Plegado:**  $\mu_{plegado} = \text{sdf}_A(p')$ , con  $p' = R_z(kx) \cdot p^t$ .
- **Redondeo:**  $\mu_{redondeo}(p) = \text{sdf}_A(p) - k$ .
- **Desplazamiento:**  $\mu_{desplazamiento}(p) = \text{sdf}_A(\delta(p))$ .
- **Elongación de tamaño  $h \in \mathbb{R}^3$ :**  $\text{sdf}_{elongacion}(p) = \mu_A(p')$ , con  $p' = p - c(p, -h, h)$ .

En estas definiciones,

- $k \in \mathbb{R}_0^+$  controla la intensidad de la deformación,
- $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un patrón de desplazamiento,
- $R_z(\alpha) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  es la matriz de rotación de ángulo  $\alpha$  sobre el eje  $z$  dada en la Def. 1.19,
- $c: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $c(x, a, b)$  acota cada componente de  $x$  entre las de  $a$  y  $b$ .

Las únicas operaciones que nos proporcionan una función distancia con signo como resultado son el redondeo y la elongación. El resto es recomendable usarlas lo menos posible, pues las isosuperficies que generan pueden presentar fallos al ser renderizadas.

#### 1.3.4. Operaciones de repetición

También podemos usar la técnica de cambiar el punto en el que evaluamos la función distancia para, en lugar de modificar la geometría original, añadir copias de la primitiva identificando varios puntos con uno que pertenezca a la isosuperficie. La manera más inmediata de conseguir esto es a través de la función valor absoluto, que nos permitirá identificar la componente de cada punto con su opuesta para generar simetrías, y el operador módulo, que identificará puntos a una distancia fija en cada eje.

**Definición 1.21** (Operadores de Posicionamiento). Sea  $A$  una isosuperficie. La función  $\mu$  define la isosuperficie para las siguientes operaciones.

- **Simetrías sobre los ejes  $x, y, z$ :**

$$\begin{aligned}\mu_{simX}(p) &= \text{sdf}_A(|x|, y, z), & \mu_{simY}(p) &= \text{sdf}_A(x, |y|, z), \\ \mu_{simZ}(p) &= \text{sdf}_A(x, y, |z|).\end{aligned}$$

- **Simetrías sobre los planos  $xy, xz, yz$ :**

$$\begin{aligned}\mu_{simXY}(p) &= \text{sdf}_A(|x|, |y|, z), & \mu_{simXZ}(p) &= \text{sdf}_A(|x|, y, |z|), \\ \mu_{simYZ}(p) &= \text{sdf}_A(x, |y|, |z|).\end{aligned}$$

- **Repetición  $l \in \mathbb{N}^3$  veces en los ejes  $x, y, z$  con separación  $s \in \mathbb{R}$ :**

$$\mu_{rep}(p) = \text{sdf}_A\left(p - s \cdot c\left(r\left(\frac{p}{s}\right), -l, l\right)\right).$$

- **Repetición infinita:**

$$\mu_{repInf}(p) = \text{sdf}_A\left((p + \frac{l}{2} \bmod l) - \frac{l}{2}\right).$$

## 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

En estas definiciones,

- $c: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c(x, a, b) = \min(\max(x, a), b)$  acota  $x$  en  $[a, b]$ ,
- $r: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  redondea las componentes de un vector a sus enteros más cercanos.

Las funciones obtenidas no son en general funciones distancia con signo. Esto ocurre en los siguientes casos.

- Al aplicar simetrías, cuando el objeto interseca el plano de simetría.
- En el caso de la repetición infinita, cuando las dimensiones del objeto sean mayores o iguales a  $l/2$ .
- Siempre para la repetición finita, como consecuencia de usar la función máximo.

No obstante, este tipo de operaciones evidencia el potencial que tienen las funciones distancia con signo en cuanto a eficiencia a la hora de generar nuevas superficies, ya que podemos visualizar miles de objetos al precio de uno. Por ejemplo, podríamos generar un campo de césped a partir de una única brizna de hierba, o modelar solo una fracción de un objeto y generar el resto usando simetrías.

## 1.4. Obtención de una SDF a partir de ecuaciones implícitas

Empezábamos el capítulo diciendo que una de las representaciones más comunes de una superficie es a través de ecuaciones implícitas, pero hasta ahora nos hemos centrado en estudiar un subconjunto de esta familia. Si intentásemos aplicar el algoritmo de *raymarching* a una función implícita cualquiera podríamos observar que el resultado presenta defectos, tales como deformaciones o grietas, o que incluso no se visualiza. Veamos qué podemos hacer para, dada una función  $\phi$  cualquiera, obtener información aproximada de  $S_\phi$  [14]. Esto nos será útil cuando no conocemos o no podemos calcular explícitamente la función distancia con signo de una superficie, pero sí su ecuación implícita.

**Proposición 1.2.** *Sea  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función infinitamente diferenciable. Entonces*

$$|\text{sdf}_{S_\phi}(p)| \geq \frac{|\phi(p)|}{\|\nabla\phi(p)\|}.$$

*Demostración.* Fijamos el punto  $p$  del cual queremos aproximar la distancia a  $S_\phi$ . Sea  $q$  el punto de  $S_\phi$  más cercano a  $p$  y  $v = \vec{pq}$ . Queremos calcular la distancia de  $p$  a  $S_\phi$ , que será justamente  $\|v\|$ . Como  $\phi$  es infinitamente diferenciable, podemos realizar el desarrollo de Taylor de  $\phi$  centrado en  $p$  y evaluado en  $q = p + v$ :

$$\phi(p + v) = \phi(p) + \nabla\phi(p) \cdot (p + v - p) + \mathcal{O}(|p + v - p|^2) = \phi(p) + \nabla\phi(p) \cdot v + \mathcal{O}(|v|^2).$$

Suponemos ahora que  $p$  está cerca de  $S_\phi$ , de forma que existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $\|v\| < \varepsilon$ , y podemos obviar el residuo. Como  $\phi(q) = 0$ , tenemos que

$$0 = |\phi(p + v)| \approx |\phi(p) + \nabla\phi(p) \cdot v| \geq |\phi(p)| - |\nabla\phi(p) \cdot v| \geq |\phi(p)| - \|\nabla\phi(p)\| \cdot \|v\|,$$

donde hemos usado la desigualdad triangular y la linealidad del producto escalar. De esta expresión, finalmente deducimos que

$$\|v\| \geq \frac{|\phi(p)|}{\|\nabla\phi(p)\|}.$$

□

Este resultado solo nos proporciona una cota inferior de la función distancia (sin signo). En nuestro caso esto es suficiente, pues esta nos sigue permitiendo representar la frontera de  $S_\phi$ , ya que proporciona una estimación conservadora de la distancia a ella. En su artículo [15], Pierre-Alain Fayolle describe un método para obtener una función distancia con signo asociada a una superficie implícita que representa de manera exacta su frontera. Para ello, la descompone

$$\text{sdf}_{S_\phi}(p; \theta) = \phi(p)g(p; \theta) \quad \text{o} \quad \text{sdf}_{S_\phi}(p; \theta) = \text{sign}(\phi(p))g(p; \theta),$$

donde  $g$  es una función paramétrica de parámetros  $\theta$  y  $\text{sign}$  es una versión suavizada de la función signo, por ejemplo  $\text{sign}(x) = \tanh(kx)$  con  $k \in \mathbb{R}$ . Para obtener la expresión de  $g$  introduce la función  $\phi$  en la capa final de una red neuronal entrenada para minimizar una función pérdida asociada a la función distancia con signo, y para ajustar  $\theta$  expresa  $\text{sdf}_{S_\phi}(p; \theta)$  como la solución de un problema variacional. No obstante, esta técnica está fuera del ámbito de este trabajo, de forma que nos limitaremos a usar la cota de la función distancia.

## 1.5. Implicitación de parametrizaciones racionales con bases de Gröbner

Ahora que sabemos representar las superficies generadas por una ecuación implícita cualquiera, nos proponemos ser capaces de representar también superficies definidas paramétricamente. Para ello fijaremos un cuerpo (anillo de división conmutativo)  $A$  y un conjunto de variables distintas  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Nuestro objetivo será, dado un conjunto  $V \subseteq A^n$  por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 &= g_1(t_1, \dots, t_r), \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(t_1, \dots, t_r), \end{cases}$$

donde  $g_i$  son polinomios de varias variables en  $A$ , obtener una ecuación implícita para  $V$ . En el caso que nos atañe  $A^n = \mathbb{R}^3$ , pero presentaremos todos los resultados de forma general.

El contenido de esta sección está fuertemente basado en el libro *Ideals, Varieties, and Algorithms* de Cox, Little y O'Shea [16], el cual introduce de forma bastante completa resultados y algoritmos de álgebra conmutativa. Empezaremos explicando a qué nos referimos con polinomios de varias variables y recordando el concepto de ideal y sus propiedades. Después veremos que este problema equivale a uno de pertenencia a un ideal y cómo resolverlo usando la teoría de bases de Gröbner.

### 1.5.1. Polinomios en varias variables

Estamos acostumbrados a trabajar con polinomios de una única variable como una suma o colección de monomios. Podemos mantener esta filosofía en el caso de varias variables adaptando el concepto que tenemos de estos.

**Definición 1.22.** Llamamos **monomio** en  $X$  a un producto de la forma

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \alpha_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

Lo denotaremos como  $X^\alpha$ , y diremos que  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  es el **exponente** del monomio.

**Definición 1.23.** Definimos el **polinomio** con coeficientes en  $A$  a toda combinación lineal finita de monomios

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha, \text{ con } a_\alpha \in A.$$

**Proposición 1.3.** El conjunto de polinomios es un anillo conmutativo. En concreto, para

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha \quad y \quad g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} b_\beta X^\beta,$$

las operaciones internas del anillo son las siguientes.

- Suma inducida por la de  $A$ :

$$f + g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (a_\alpha + b_\alpha) X^\alpha.$$

- Producto inducido por la propiedad distributiva, siendo  $X^\alpha X^\beta = X^{\alpha+\beta}$ :

$$fg = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} (a_\alpha b_\beta) X^{\alpha+\beta}.$$

Denotaremos como  $A[X] = A[x_1, \dots, x_n]$  a este anillo.

**Proposición 1.4.**  $A[x_1, \dots, x_n] \cong A[x_1] \cdots A[x_n]$ .

En las siguientes secciones veremos que el problema de pertenencia de polinomios a un ideal se puede resolver mediante el procedimiento de la división. Este es bien conocido en polinomios de una variable, y ahora queremos extenderlo a un número arbitrario de ellas y varios divisores. Para ello en primer lugar necesitaremos una forma de ordenar los monomios que forman un polinomio. En una variable, la forma “natural” de comparar dos monomios es a través de su exponente. En el caso de varias variables la elección no es tan clara, y hay varias opciones que parecen igual de válidas. Vamos a formalizar el concepto de orden para introducir algunas de las posibilidades de las que disponemos.

**Definición 1.24.** Un **orden total** sobre un conjunto  $\Delta$  es una relación binaria  $\leq$  que cumple las siguientes propiedades.

1. Reflexiva:  $a \leq a$ , para todo  $a \in \Delta$ .
2. Transitiva: si  $a \leq b$  y  $b \leq c$  entonces  $a \leq c$ , para todo  $a, b, c \in \Delta$ .

3. Antisimétrica: si  $a \leq b$  y  $b \leq a$  entonces  $a \leq b$ , para todo  $a, b \in \Delta$ .
4. Completitud:  $a \leq b$  o  $b \leq a$ , para todo  $a, b \in \Delta$ .

**Definición 1.25.** Un **orden admisible** es un orden total  $\leq$  sobre  $\mathbb{N}^n$  cumpliendo

1.  $(0, \dots, 0) \leq \alpha$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,
2. si  $\alpha \leq \beta$  entonces  $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ , para todo  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ .

**Proposición 1.5.** Todo orden admisible es un buen orden, esto es, todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo.

A partir de ahora siempre supondremos que todo orden que usemos es admisible en  $\mathbb{N}^n$ , luego podemos ordenar los monomios que conforman un polinomio ordenando sus exponentes según dicho orden. Veamos algunos de los órdenes más usados.

**Definición 1.26.** Definimos el **orden lexicográfico**  $\leq_{\text{lex}}$  como

$$\alpha \leq_{\text{lex}} \beta \text{ si } \begin{cases} \alpha = \beta \\ \text{o} \\ \alpha_i < \beta_i, \text{ donde } i \text{ es el primer índice tal que } \alpha_i \neq \beta_i. \end{cases}$$

**Definición 1.27.** Dado  $\omega \in \mathbb{N}^n$ , un orden admisible  $\leq$  se dice  **$\omega$ -graduado** cuando

$$\alpha \leq \beta \text{ implica que } \langle \alpha, \omega \rangle < \langle \beta, \omega \rangle,$$

donde  $\langle \alpha, \omega \rangle$  se llama el  **$\omega$ -grado** de  $\alpha$  y se define como

$$\langle \alpha, \omega \rangle = \alpha_1 \omega_1 + \cdots + \alpha_n \omega_n.$$

**Definición 1.28.** Dado un orden admisible  $\leq$ , definimos el **orden  $\omega$ -graduado asociado** como

$$\alpha \leq_{\omega} \beta \text{ si } \begin{cases} \langle \alpha, \omega \rangle < \langle \beta, \omega \rangle \\ \text{o} \\ \langle \alpha, \omega \rangle = \langle \beta, \omega \rangle \text{ y } \alpha \leq \beta. \end{cases}$$

Cuando  $\omega = (1, \dots, 1)$  simplemente diremos que el orden es graduado, y usaremos las notaciones

$$(\leq_{\text{lex}})_{\text{deg}} = \leq_{\text{deglex}}, \quad (\leq_{\text{lex}})_{\omega} = \leq_{\omega-\text{lex}}.$$

**Definición 1.29.** Dado un monomio  $X^\alpha$ , definimos su **grado** como  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ . En el caso de un polinomio  $f \in A[X]$  y un orden admisible, diremos que su grado es el grado de su monomio líder, y lo notaremos como  $\deg(f)$ .

**Definición 1.30.** Definimos el **orden lexicográfico graduado inverso**  $\leq_{\text{degrevlex}}$  como

$$\alpha \leq_{\text{degrevlex}} \beta \text{ si } \begin{cases} |\alpha| < |\beta| \\ \text{o} \\ |\alpha| = |\beta| \text{ y } \alpha_i > \beta_i, \text{ donde } i \text{ es el último índice tal que } \alpha_i \neq \beta_i. \end{cases}$$

**Proposición 1.6.** Sea  $\leq$  un orden admisible. Entonces  $\leq_{\omega}$  es admisible.

## 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

**Proposición 1.7.** Los órdenes  $\leq_{\text{lex}}$  y  $\leq_{\text{degrevlex}}$  son admisibles.

Una vez obtenida la noción de orden admisible, estamos en disposición de definir varios conceptos que nos resultarán imprescindibles para la manipulación de polinomios en varias variables.

**Definición 1.31.** Sea  $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}$  un polinomio y  $\leq$  un orden admisible. Definimos los siguientes conceptos asociados a  $f$ .

- **Exponente:**  $\exp(f) = \max_{\leq}(\alpha)$ .
- **Monomio líder:**  $\text{lm}(f) = X^{\exp(f)}$ .
- **Coeficiente líder:**  $\text{lc}(f) = a_{\exp(f)}$ .
- **Término líder:**  $\text{lt}(f) = \text{lc}(f) \cdot \text{lm}(f)$ .
- **Soporte:**  $\text{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : a_{\alpha} \neq 0\}$ .

**Definición 1.32.** Definimos el **exponente de un conjunto de polinomios**  $F = \{f_1, \dots, f_s\} \subseteq A[X]$  al conjunto

$$\exp(F) = \{\exp(f_1), \dots, \exp(f_s)\} \subseteq \mathbb{N}^n.$$

Antes de presentar el algoritmo de la división, nos cercioramos de que esta operación siempre tiene sentido con el siguiente teorema.

**Teorema 1.2** (Algoritmo de división). *Sea  $F = \{f_1, \dots, f_s\} \subseteq A[X]$ . Todo polinomio  $f \in A[X]$  se puede expresar como*

$$f = q_1 f_1 + \cdots + q_s f_s + r,$$

donde  $q_i, r \in A[X]$  y cumplen las siguientes condiciones.

- $\text{supp}(r) \cap (\exp(F) + \mathbb{N}^n) = \emptyset$ .
- $r = 0$  o  $\exp(r) \leq \exp(f)$ .
- Para cada  $1 \leq i \leq s$  se tiene que  $q_i f_i = 0$  o  $\exp(q_i f_i) \leq \exp(f)$

Llamaremos a  $r$  el **resto** de dividir  $f$  por  $F$ , y lo notaremos  $r = \text{rem}(f, F)$ . Además, cuando  $r = 0$  diremos que  $f$  reduce a 0, y escribiremos  $f \xrightarrow{F} 0$ .

En otras palabras, podemos dividir  $f$  entre cualquier conjunto de polinomios  $F = \{f_1, \dots, f_s\}$  para expresarlo como combinación de sus elementos multiplicados por ciertos coeficientes polinómicos. El método es similar al usado en una variable, consistente en intentar reducir el monomio líder de  $f$  restándole un múltiplo de cierto  $f_i$ . Para encontrar este polinomio simplemente se recorre el conjunto  $F$  hasta encontrar un  $f_i$  cumpliendo  $\exp(f_i) \leq \exp(f)$ , de forma que podremos multiplicarlo por cierto polinomio  $g \in A[X]$  para que  $\exp(f_i g) = \exp(f)$  y ajustar el coeficiente líder del polinomio resultado para que su resta con  $f$  reduzca a cero el coeficiente líder. En el caso de que no se encuentre ningún  $f_i$  en estas condiciones, se pasa el término líder al resto y se continua con el siguiente. Esto es justo lo que hace el **Algoritmo 1**. Cabe destacar que esta forma de buscar el  $f_i$  hace que la descomposición de  $f$  obtenida no sea única, pues la elección dependerá de la posición que ocupen los divisores en el conjunto  $F$ , y por tanto del orden elegido. La elección de un orden u otro también puede afectar al número de reducciones a cero necesarias para terminar el algoritmo. No obstante, en la siguiente sección veremos que la elección del orden no influye en el cálculo de bases de Gröbner.

**Algorithm 1:** División de polinomios en varias variables

---

**Data:** dividendo  $p$ , divisores  $F = [f_1, \dots, f_s]$   
**Result:** Tupla con el resto  $r$  y los coeficientes  $q_i$  para cada  $f_i \in F$

```

 $p \leftarrow f$ 
 $[q_1, \dots, q_s] \leftarrow [0, \dots, 0]$ 
 $r \leftarrow 0$ 
while  $p \neq 0$  do
    divisorEncontrado  $\leftarrow \text{false}$ 
    for  $f_i \in F$  do
        if  $\exp(p) = \exp(f_i) + \alpha$  then
             $q_i \leftarrow q_i + \frac{\text{lc}(p)}{\text{lc}(f_i)} X^\alpha$ 
             $p \leftarrow p - f_i \cdot \frac{\text{lc}(p)}{\text{lc}(f_i)} X^\alpha$ 
            divisorEncontrado  $\leftarrow \text{true}$ 
        end
    end
    if !divisorEncontrado then
         $r \leftarrow r + \text{lt}(p)$ 
         $p \leftarrow p - \text{lt}(p)$ 
    end
end
return  $[r, q_1, \dots, q_s]$ 
```

---

**1.5.2. Bases de Gröbner**

Ya tenemos claras las ideas sobre qué es un polinomio en varias variables, así que ahora pasamos a repasar el concepto de ideal y cómo podemos usar las bases de Gröbner para trabajar con ellos en el caso de ideales de polinomios.

**Definición 1.33.** Decimos que  $\emptyset = I \subseteq A[X]$  es un **ideal** de  $A[X]$  si

1.  $a + b \in I$ , para todo  $a, b \in I$ ,
2.  $af \in I$ , para todo  $a \in I$ , para todo  $f \in A[x]$ .

En ese caso escribiremos  $I \leq A$ .

**Proposición 1.8.** Dados los ideales  $I, J \leq A[X]$ , son también ideales de  $A[X]$ :

1.  $I + J = \{f + g : f \in I, g \in J\}$ ,
2.  $IJ = \{f_1g_1 + \dots + f_tg_t : f_i \in I, g_i \in J, 1 \leq i \leq t\}$ ,
3.  $I \cap J = \{h : h \in I \text{ y } h \in J\}$ .

Podemos calcular estos ideales usando sus conjuntos de generadores.

**Definición 1.34.** Dado  $F = \{f_1, \dots, f_s\} \subseteq A[X]$ , el **ideal generado** por  $F$  es

$$\langle F \rangle = \{a_1f_1 + \dots + a_sf_s : a_1, \dots, a_s \in A, f_1, \dots, f_s \in F\} \leq A[X].$$

Diremos que  $F$  es un **conjunto de generadores** de  $I$ .

1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

**Proposición 1.9.** Sean  $I = \langle F \rangle$  y  $J = \langle G \rangle$  ideales de  $A[X]$ . Entonces

1.  $I + J = \langle F \cup G \rangle$ ,
2.  $IJ = \langle fg : f \in F, g \in G \rangle$ ,
3.  $I \cap J = \langle tF, (1-t)G \rangle \cap A[x_1, \dots, x_n]$ , con  $t$  una variable auxiliar distinta a  $x_1, \dots, x_n$ .

Dado que, a priori, un ideal podría estar generado por un número infinito de polinomios, el hecho de conocer un conjunto de generadores nos permite trabajar y extraer propiedades de él de forma mucho más cómoda. Este hecho nos hace preguntarnos si podemos extraer un conjunto de generadores de cualquier ideal. Para responder a esta pregunta pasamos a presentar el concepto de base de Gröbner asociada a un ideal.

**Definición 1.35.** Sea  $I \leq A[X]$ . Denotamos el conjunto de los términos líder de  $I$  como

$$\text{lt}(I) = \{\text{lt}(f) : f \in I\}.$$

**Definición 1.36.** Dado  $I \leq A[X]$ , diremos que  $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subseteq I$  es una **base de Gröbner** para  $I$  si

$$\langle \text{lt}(I) \rangle = \langle \text{lt}(g_1), \dots, \text{lt}(g_t) \rangle.$$

**Proposición 1.10.** Sea  $I \leq A[X]$ . Para cualquier  $f \in A[X]$  existe un único  $r \in A[X]$  tal que

1.  $\text{supp}(r) \cap \text{exp}(I) = \emptyset$ ,
2.  $f - r \in I$ .

*Observación 1.3.* Dado que  $\text{exp}(I)$  depende del orden elegido, también lo hará el polinomio  $r$ .

**Corolario 1.2.** Sea  $I \leq A[X]$  y  $G$  una base de Gröbner suya. Entonces

$$f \in I \text{ si y solo si } \text{rem}(f, G) = 0.$$

El concepto de base de Gröbner es quizás el más importante tratado en este trabajo, pues permite abordar gran variedad de problemas sobre ideales de forma computacional, como el de pertenencia a un ideal o el de implicación, como veremos próximamente. Como es de esperar, a la hora de trabajar con bases de Gröbner será deseable que estas tengan el menor número de elementos posible.

**Definición 1.37.** Sea  $I \leq A[X]$ . Diremos que  $G$  es una **base de Gröbner reducida** para  $I$  si es una base de Gröbner suya y para todo  $g \in G$  se cumple

1.  $\text{lc}(g) = 1$ ,
2.  $\text{supp}(g) \cap (\text{exp}(G \setminus \{g\}) + \mathbb{N}^n) = \emptyset$ .

Es decir, una base de Gröbner  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  será reducida si ningún monomio de  $\text{supp}(g_i)$  es divisible por  $\text{lm}(g_j)$  para todo  $i \neq j$ . Esto equivale a que

$$\text{rem}(g, G \setminus \{g\}) = g, \text{ para todo } g \in G.$$

Dado que queríamos responder a la pregunta de si siempre existe un conjunto de generadores para un ideal cualquiera usando bases de Gröbner, veamos que no sólo siempre podemos encontrar alguna base de Gröbner asociada al ideal, sino que esta será reducida y única, sin depender del orden elegido.

**Definición 1.38.** Diremos que un subconjunto  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}^n$  es un **ideal de  $\mathbb{N}^n$**  si  $M = M + \mathbb{N}^n$ , y lo notaremos  $M \leq \mathbb{N}^n$ . Cuando para algún  $F \subseteq M$  se tenga que  $M = F + \mathbb{N}^n$  diremos que  $M$  está generado por  $F$ .

**Definición 1.39.** Sea  $M \leq \mathbb{N}^n$ . Decimos que  $A$  es un **conjunto generador minimal** de  $M$  si

$$M = A + \mathbb{N}^n \quad \text{y} \quad M \neq (A \setminus \{a\}) + \mathbb{N}^n, \text{ para todo } a \in A.$$

**Lema 1.3.** Todo ideal  $M \leq \mathbb{N}^n$  tiene un único conjunto generador minimal.

**Teorema 1.3.** Todo ideal  $I$  admite una única base de Gröbner reducida para un orden admisible dado.

**Demostración.** **Existencia** Sea  $G \subseteq I$  cumpliendo que  $\exp(G)$  es un conjunto generador minimal de  $\exp(I)$ , que sabemos que existe por el [Lema 1.3](#). Sea  $g \in G$  y  $r = \text{rem}(g, G \setminus \{g\})$ . Tenemos que

$$\exp(g) \notin \exp(G \setminus \{g\}) + \mathbb{N}^n, \text{ luego } \exp(g) = \exp(r),$$

de donde

$$\exp(G) = \exp((G \setminus \{g\}) \cup \{r\}).$$

Además  $g - r \in \langle G \setminus \{g\} \rangle \subseteq I$ , de forma que  $r \in I$  y  $G' = (G \setminus \{g\}) \cup \{r\}$  es una nueva base de Gröbner de  $I$  cumpliendo que  $\text{supp}(r) \cap (\exp(G' \setminus \{r\}) + \mathbb{N}^n) = \emptyset$ . Aplicando este procedimiento a cada elemento de  $G$  y dividiéndolo por su coeficiente líder obtenemos una base reducida de  $I$ .

**Unicidad** Sean  $G_1, G_2$  dos bases reducidas de  $I$ . Por el [Lema 1.3](#) sabemos que  $\exp(G_1) = \exp(G_2)$ , luego dado cualquier  $g_1 \in G_1$  existe un único  $g_2 \in G_2$  tal que  $\exp(g_1) = \exp(g_2)$ . Por otro lado, teniendo en cuenta que  $g_2 - g_1 \in I$  por ser ambos elementos del ideal, se cumple

1.  $\text{supp}(g_1 - g_2) \subseteq (\text{supp}(g_1) \cup \text{supp}(g_2)) \setminus \{\exp(g_1)\},$
2.  $\text{supp}(g_i) \setminus \{\exp(g_i)\} \cap (\exp(G_i) + \mathbb{N}^n) = \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2\},$

de donde

$$\text{supp}(g_1 - g_2) \cap (\exp(G_1) + \mathbb{N}^n) = \emptyset.$$

Concluimos entonces usando la [Proposición 1.10](#) que  $\text{rem}(g_1 - g_2, G_1) = g_1 - g_2$ . Además, este resto será igual a cero gracias al [Corolario 1.2](#), de forma que  $g_1 = g_2$ . Hemos demostrado que cada elemento de una base está en la otra, luego que  $G_1 = G_2$ .  $\square$

El siguiente resultado muestra la conexión de las bases de Gröbner con los sistemas de generadores de un ideal [17].

**Lema 1.4.** Sean dos polinomios no nulos  $f, g \in A[X]$ . Entonces  $\text{lm}(fg) = \text{lm}(f)\text{lm}(g)$ . En particular, si  $f$  es un monomio, se tiene que  $\text{lm}(fg) = f\text{lm}(g)$ .

**Lema 1.5.** Todo orden admisible es un buen orden. En particular satisface la condición de cadena descendente, y no existe ninguna secuencia infinita de monomios de  $A[X]$  de la forma

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots$$

1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

**Teorema 1.4.** Sea  $I \leq A[X]$  y  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  una base de Gröbner suya. Entonces

$$I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle.$$

*Demostración.* Sea  $0 \neq f \in I$ . Por definición de base de Gröbner sabemos que  $\text{lt}(f) \in \text{lt}(I)$  y que  $\text{lm}(g_i) = \text{lt}(g_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Así, existe un monomio  $h \in A[X]$  y un índice  $i \in \{1, \dots, t\}$  tal que

$$\text{lm}(f) = h \text{lm}(g_i).$$

El Lema 1.4 nos asegura que  $\text{lm}(f) = \text{lm}(hg_i)$ . Tomamos ahora el polinomio

$$f^{(1)} = \text{lc}(g_i)f - \text{lc}(f)hg_i \in I$$

y distinguimos los siguientes casos.

$f^{(1)} = 0$  En este caso tendríamos que  $f = \frac{\text{lc}(f)}{\text{lc}(g_i)}hg_i \in \langle g_1, \dots, g_t \rangle$  y habríamos terminado.

$f^{(1)} \neq 0$  Dado que  $\text{lm}(f^{(1)}) \leq \text{lm}(f)$ , aplicando el argumento anterior a  $f^{(1)}$  podemos obtener  $f^{(2)} \in I$  de forma que si  $f^{(2)} = 0$  entonces  $f, f^{(1)} \in \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ . En caso de que  $f^{(2)} \neq 0$  obtenemos un nuevo polinomio  $f^{(3)} \in I$  y repetimos el argumento. Aplicando este método reiteradamente obtendríamos que

$$f^{(k)} \in I \quad \text{y} \quad f, f^{(1)}, \dots, f^{(k-1)} \in \langle g_1, \dots, g_t \rangle$$

para todo  $k \geq 1$ , llegado a una secuencia infinita de la forma

$$\text{lm}(f) \geq \text{lm}(f^{(1)}) \geq \dots \geq \text{lm}(f^{(k-1)}) \geq \text{lm}(f^{(k)}) \geq \dots,$$

cuya existencia contradice el Lema 1.5. Por tanto, debe existir un  $q \geq 1$  para el cual  $f^{(r)} = 0$  para todo  $r \geq q$ , concluyendo la demostración.  $\square$

Terminamos la sección obteniendo un algoritmo para calcular la base de Gröbner reducida para un ideal dado un conjunto de generadores  $G$  suyo. Aplicar de forma directa la definición de base de Gröbner sería inviable, así que en su lugar introduciremos una caracterización de las bases de Gröbner más abordable desde el punto de vista computacional.

**Definición 1.40.** Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , definimos los siguientes términos.

- **Mínimo común múltiplo:**  $\text{lcm}(\alpha, \beta) = \{\max(\alpha_1, \beta_1), \dots, \max(\alpha_n, \beta_n)\}$ .
- **Máximo común divisor:**  $\text{gcd}(\alpha, \beta) = \{\min(\alpha_1, \beta_1), \dots, \min(\alpha_n, \beta_n)\}$ .

**Definición 1.41.** Sean  $f, g \in A[X]$ . Tomando  $\alpha = \exp(f)$ ,  $\beta = \exp(g)$  y  $\gamma = \text{lcm}(\alpha, \beta)$ , se define el **S-polinomio** de  $f$  y  $g$  como

$$S(f, g) = \text{lc}(g)X^{\gamma-\alpha}f - \text{lc}(f)X^{\gamma-\beta}g.$$

**Teorema 1.5** (Primer Criterio de Buchberger). Sean  $I \leq A[X]$  y  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  un conjunto de generadores de  $I$ . Entonces:

$$G \text{ es base de Gröbner para } I \iff \text{rem}(S(g_i, g_j), G) = 0, \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq t.$$

El algoritmo que usaremos para el cálculo de la base de Gröbner se basará en este criterio. Sin embargo, antes de presentarlo estudiamos dos criterios adicionales [18, 19] que lo harán más eficiente descartando S-polinomios antes de comprobar si reducen a cero, ahorrando el cómputo de numerosas divisiones.

**Definición 1.42.** Sea  $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}$  un polinomio cuyo monomio líder es  $X^{\alpha^{(k)}}$ . Definimos el **segundo monomio líder** de  $f$  como el monomio  $X^{\alpha^{(i)}}$  de  $f$  tal que

$$X^{\alpha^{(i)}} \geq X^{\alpha^{(j)}}, \text{ para todo } j \neq i.$$

Lo denotaremos como  $\text{sm}(f)$ .

**Teorema 1.6** (Criterios de Buchberger). *Sean  $I \leq A[X]$ ,  $G \subseteq A[X]$  un conjunto de generadores de  $I$ , y  $g_1, g_2 \in G$ . Si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones entonces  $S(g_1, g_2) \xrightarrow{G} 0$ .*

1.  $\text{lcm}(g_1, g_2) = \text{lm}(g_1) \text{ lm}(g_2)$ ,
2. Existe un  $f \in G$  tal que  $\text{lm}(f) \mid \text{lcm}(g_1, g_2)$  y además
  - a)  $\text{Algún } S(g_i, f) \xrightarrow{G} 0$  o
  - b)  $\text{lm}(f) \mid \frac{\text{lm}(g_i)}{\text{gcd}(\text{exp}(g_1), \text{exp}(g_2))}$  y  $\text{sm}(g_j) \text{ lm}(f) \neq \text{sm}(f) \text{ lm}(g_j)$ ,
 donde  $i, j \in \{1, 2\}$  e  $i \neq j$ .

Usando los criterios obtenidos obtenemos el [Algoritmo 2](#) para calcular la base de Gröbner de cualquier ideal. La salida de este no es una base minimal, pero la demostración del [Teorema 1.3](#) nos proporciona un método para reducir una base cualquiera a la minimal asociada. En el [Algoritmo 3](#) mostramos este procedimiento.

---

#### Algorithm 2: Algoritmo de Buchberger optimizado

---

**Data:** polinomio  $f$ , conjunto de generadores  $F = [f_1, \dots, f_S]$   
**Result:** base de Gröbner  $G$   
 $G \leftarrow F;$   
**repeat**  
      $G' \leftarrow G;$   
     **for** each pair  $\{f, g\} \subseteq G'$  **do**  
         **if** !Criterio 1( $f, g$ ) AND !Criterio 2( $f, g, G'$ ) **then**  
              $r \leftarrow \text{rem}(S(f, g), G');$   
             **if**  $r \neq 0$  **then**  
                  $G \leftarrow G \cup \{r\};$   
             **end**  
         **end**  
     **end**  
**until**  $G' = G$ ;  
**return**  $G$

---

Ya somos capaces de obtener una base de Gröbner minimal (y por tanto un conjunto de generadores) de cualquier ideal dado un conjunto de generadores suyo, pero en este proceso se toma una decisión que aún no hemos discutido: cómo se eligen las parejas  $\{f, g\}$ . Uno

---

**Algorithm 3:** Minimización de base de Gröbner

---

```

Data:  $G$  base a minimizar
 $G \leftarrow F;$ 
foreach  $g \in G$  do
|    $g \leftarrow g / \text{lc}(g);$ 
|    $r \leftarrow \text{rem}(g, [G \setminus \{g\}]);$ 
|   if  $r \neq 0$  then
|   |    $g \leftarrow r;$ 
|   end
end

```

---

de los métodos más usados es la conocida como **estrategia normal**, debido a su simpleza y haber probado ser de las que completan más rápido el algoritmo. Esta consiste en tomar el par  $f, g$  cuyo  $\text{lcm}(f, g)$  sea del menor grado posible según el orden admisible usado. Vemos que la elección de un orden u otro puede involucrar un cambio en el número de reducciones a cero, y en consecuencia el aumento de operaciones realizadas, pero en ningún caso afectará al resultado final.

### 1.5.3. Teorema de implicitación

Empezábamos la sección diciendo que el problema de implicitación equivalía al de pertenencia a un ideal. Antes de ver de qué ideal se trata tenemos que introducir unos últimos conceptos que nos ayuden a entender por qué.

**Definición 1.43.** Dado  $F \subseteq A[X]$ , llamamos **variedad afín** asociada a  $F$  al conjunto

$$\mathbb{V}(F) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } f \in F\}.$$

**Proposición 1.11.** Sean  $F, G \subseteq A[X]$  y  $\mathbb{V}(F), \mathbb{V}(G)$ . Entonces

- $\mathbb{V}(F) = \mathbb{V}(\langle F \rangle)$ ,
- $\mathbb{V}(F \cup G) = \mathbb{V}(F) \cap \mathbb{V}(G)$ ,
- $\mathbb{V}(FG) = \mathbb{V}(F) \cup \mathbb{V}(G)$ .

**Proposición 1.12.** Sean los ideales  $I, J \leq A[X]$ . Entonces  $\mathbb{V}(I \cap J) = \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J)$ .

**Definición 1.44.** Sea  $B \subseteq A^n$ . Definimos el **ideal asociado** a  $B$  como

$$\mathbb{I}(B) = \{f \in A[X] : f(b_1, \dots, b_n) = 0 \text{ para todo } (b_1, \dots, b_n) \in B\}.$$

Para resolver el problema de implicitación deberemos aprender antes a eliminar variables de un ideal.

**Definición 1.45.** Dado  $I \leq A[x_1, \dots, x_n]$ , definimos su **ideal de  $l$ -eliminación** como

$$I_l = I \cap A[x_{l+1}, \dots, x_n] \leq A[x_{l+1}, \dots, x_n].$$

**Definición 1.46.** Decimos que un orden admisible  $\leq$  en  $\mathbb{N}^n$  es un **orden de  $l$ -eliminación** si

$$\beta \leq \alpha \text{ implica } \beta \in \mathbb{N}_l^n \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_l^n \text{ y para todo } \beta \in \mathbb{N}^n,$$

donde  $\mathbb{N}_l^n = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : \alpha_i = 0, 1 \leq i \leq l\}$ .

**Teorema 1.7** (Eliminación). *Sea  $I \leq A[x_1, \dots, x_n]$  y  $G$  una base de Gröbner suya respecto a un orden  $\leq$  de  $l$ -eliminación. Entonces, una base de Gröbner para  $I_l$  viene dada por*

$$G_l = G \cap A[x_{l+1}, \dots, x_n].$$

Con estos resultados podemos decir que el problema de implicitación consiste en encontrar la variedad asociada a las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 &= g_1(t_1, \dots, t_r), \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(t_1, \dots, t_r). \end{cases}$$

Si escribimos  $g_i = f_i/q_i$  con  $f_i, q_i \in A[t_1, \dots, t_r]$  para  $i = 1, \dots, r$ , podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: A^r \setminus W &\rightarrow A^n, \\ (a_1, \dots, a_r) &\mapsto \left( \frac{f_1(a_1, \dots, a_r)}{q_1(a_1, \dots, a_r)}, \dots, \frac{f_n(a_1, \dots, a_r)}{q_n(a_1, \dots, a_r)} \right), \end{aligned}$$

donde  $W = \mathbb{V}(q_1 \cdots q_r)$ . Veamos cómo encontrar la menor variedad que contiene la imagen de  $\phi$  en el caso de que  $q_i = 1$  para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

**Teorema 1.8** (Implicitación Polinomial). *Dados  $f_1, \dots, f_n \in A[t_1, \dots, t_r]$  con  $A$  cuerpo infinito, sea*

$$\begin{aligned} \phi: A^r &\rightarrow A^n, \\ (a_1, \dots, a_r) &\mapsto (f_1(a_1, \dots, a_r), \dots, f_n(a_1, \dots, a_r)). \end{aligned}$$

Definimos los ideales:

- $I = \langle x_1 - f_1, \dots, x_n - f_n \rangle \leq A[t_1, \dots, t_r, x_1, \dots, x_n]$ ,
- $J = I \cap A[x_1, \dots, x_n]$  el ideal de  $r$ -eliminación de  $I$ .

Entonces,  $\mathbb{V}(J)$  es la menor variedad que contiene a  $\phi(A^r)$ .

La extensión al caso general es la siguiente.

**Teorema 1.9** (Implicitación Racional). *Sea  $f_1, \dots, f_n, q_1, \dots, q_n \in A[t_1, \dots, t_r]$  con  $A$  cuerpo infinito,  $W = \mathbb{V}(q_1, \dots, q_n)$  y*

$$\begin{aligned} \phi: A^r \setminus W &\rightarrow A^n, \\ (a_1, \dots, a_r) &\mapsto \left( \frac{f_1(a_1, \dots, a_r)}{q_1(a_1, \dots, a_r)}, \dots, \frac{f_n(a_1, \dots, a_r)}{q_n(a_1, \dots, a_r)} \right). \end{aligned}$$

Definimos los ideales:

## 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

- $I = \langle q_1x_1 - f_1, \dots, q_nx_n - f_n, 1 - q_1 \cdots q_n y \rangle \leq A[y, t_1, \dots, t_r, x_1, \dots, x_n]$ ,
- $J = I \cap A[x_1, \dots, x_n]$  el ideal de 1 + r-eliminación de  $I$ .

Entonces,  $\mathbb{V}(J)$  es la menor variedad que contiene a  $\phi(A^r \setminus W)$ .

*Observación 1.4.* En el caso  $r = 1$  y cuando  $f_i$  y  $q_i$  sean primos relativos para cada  $1 \leq i \leq n$ , basta tomar

$$I = \langle q_1x_1 - f_1, \dots, q_nx_n - f_n \rangle.$$

Con este resultado, una vez obtenida la variedad, si resulta que esta tiene un único generador este será una potencia de la ecuación implícita buscada, luego el ideal al que llevamos haciendo referencia desde el principio de la sección y del que queríamos comprobar la pertenencia es el ideal  $J$  de los teoremas anteriores. El hecho de que no obtengamos la potencia exacta de la ecuación implícita no es problema, pues nos basta conocer donde se anula para poder representar la frontera de la superficie que genera. Sin embargo, no tenemos asegurado que vaya a haber un único generador del ideal, en cuyo caso contrario la superficie satisfaría varias ecuaciones implícitas y no podría ser representada por una sola. A continuación presentaremos un resultado que aporta información al respecto.

**Definición 1.47.** Dado un ideal  $I \leq A[X]$ , definimos su **radical** como

$$\sqrt{I} = \{f \in A[X] : f^m \in I \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}.$$

**Proposición 1.13.** Sea  $I \leq A[X]$ . Entonces  $\sqrt{I}$  es un ideal y contiene a  $I$ .

**Definición 1.48.** Decimos que un ideal  $I \leq A[X]$  es **radical** si  $\sqrt{I} = I$ .

**Proposición 1.14.** Sea  $B \subseteq A^n$ . Entonces  $\mathbb{I}(B)$  es un ideal radical.

**Teorema 1.10** (Nullstellensatz fuerte). Si  $A$  es algebraicamente cerrado, dado un ideal  $I \leq A[X]$  se cumple

$$\sqrt{I} = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)).$$

**Proposición 1.15.** Sea  $I \leq A[X]$  y  $f \in A[X]$ . Entonces

$$f \in \sqrt{I} \text{ si y solo si } \langle I \rangle + \langle 1 - fy \rangle = A[X].$$

Así, si pudiéramos calcular el radical del ideal  $J$  de los teoremas de implicitación y este tuviera un solo elemento, tendríamos asegurado que la variedad está generada por esa única ecuación implícita. Además, calculando el radical obtendríamos directamente la potencia exacta de la ecuación implícita que nos da el [Teorema 1.9](#). Sin embargo, el cálculo del radical o su número de elementos es en general muy complicado, luego lo que haremos en la práctica será simplemente aplicar el método mostrado en el [Teorema 1.9](#) y comprobar si efectivamente se obtiene un único generador, en cuyo caso bastará obtener la función distancia con signo aproximada de dicho generador como se estudió en la [Sección 1.4](#) para así poder representar la superficie mediante *raymarching*. En caso de que se obtenga más de un generador concluiremos que no podemos realizar la implicitación.

Hay otros métodos que permiten abordar el problema de eliminación de variables, y en consecuencia el de implicitación. Uno especialmente interesante es el uso de resultantes, pues en casos específicos puede simplificar mucho la obtención de la ecuación implícita. En la siguiente sección estudiaremos como solucionar el problema de implicitación usando resultantes.

## 1.6. Implicitación de parametrizaciones racionales con resultantes

### 1.6.1. Conceptos básicos y caso de una variable

En la sección anterior, para resolver el problema de implicitación hemos tratado de resolver el sistema de ecuaciones (1.5.3) buscando los puntos que satisfacen cada una de las ecuaciones, pero existen vías alternativas. En esta sección veremos cómo usar resultantes para la implicitación de superficies paramétricas racionales. Para ello, empezaremos introduciendo el concepto de resultante y estudiando sus versiones más sencillas [16], para posteriormente abordar el problema de implicitación en un ambiente mucho más general basándonos en el trabajo de Eng-Wee Chionh y Ronald N. Oldman [20].

Una de las primeras ideas que se pueden ocurrir para resolver el sistema (1.5.3) de forma alternativa es que si todos sus polinomios tienen algún factor común  $h \in A[X]$  no trivial, esto es, cumpliendo  $\deg(h) > 1$ , entonces

$$h(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ implica } g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}.$$

En concreto, las raíces que coinciden y se anulan simultáneamente con las de los polinomios del sistema son las del polinomio  $h$ , luego si  $h = \gcd(g_1, \dots, g_n)$  la implicación anterior se convierte en una equivalencia. Esta idea motiva la siguiente definición [21].

**Definición 1.49.** Sean  $f_1, \dots, f_r \in A[x_1, \dots, x_n]$ . Definimos el **resultante** de  $f_1, \dots, f_r$  como el polinomio  $\text{Res}_{f_1, \dots, f_r} \in A[x_1, \dots, x_n]$  tal que

$$\text{Res}_{f_1, \dots, f_r}(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ si y solo si } f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Cuando no haya lugar a confusión omitiremos el subíndice.

Hemos visto que la forma más directa de obtener el resultado de un sistema de ecuaciones es a través del máximo común divisor, pero para más de dos polinomios eso conllevaría realizar un gran número divisiones, que ya hemos visto que son caras computacionalmente. El cálculo del resultado en varias variables no es en general nada simple, pero bajo ciertas condiciones puede llegar a serlo, como muestra el siguiente resultado en el caso de que se tenga el mismo número de variables que de polinomios y estos tengan una determinada forma.

**Teorema 1.11** (Teorema fundamental de eliminación). *Dados  $f_1, \dots, f_n \in A[x_1, \dots, x_n]$  lineales, esto es, de la forma*

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = a_1^{(i)}x_1 + \dots + a_n^{(i)}x_n + b, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\},$$

entonces su resultado es

$$\text{Res}(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

A continuación estudiamos en detalle un método para obtener el resultado en el caso más sencillo posible, el de una única variable y dos polinomios [16]. En este entorno el método

1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

más común es el de la matriz de Sylvester, la cual deduciremos a partir de la búsqueda de un divisor común de estos polinomios.

**Lema 1.6.** Sean  $f, g \in A[x]$  polinomios tal que  $\deg(f) = l$  y  $\deg(g) = m$ , con  $l, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Entonces  $f$  y  $g$  tienen un factor común no trivial si y solo si existen otros polinomios  $A, B \in A[x]$  tal que

1.  $A$  y  $B$  son no nulos,
2.  $\deg(A) \leq m - 1$  y  $\deg(B) \leq l - 1$ ,
3.  $Af + Bg = 0$ .

La cuestión a resolver ahora es la de la existencia de los polinomios  $A$  y  $B$ . Para ello escribimos

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^{m-1} u_{m-i-1}x^i, & B &= \sum_{j=0}^{l-1} v_{l-j-1}x^j, \\ f &= \sum_{k=0}^l c_{l-k}x^k, & g &= \sum_{h=0}^m d_{m-h}x^h, \text{ con } c_l, d_h \neq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde trataremos a los coeficientes  $u_i$  y  $v_j$  en  $A$  como incógnitas para  $i \in \{0, \dots, m-1\}$  y  $j \in \{0, \dots, l-1\}$ . Para encontrarlos impondremos que se cumpla la tercera condición del **Lema 1.6**:

$$Af + Bg = 0. \quad (1.2)$$

Sustituyendo las expresiones de (1.1) en la igualdad (1.2) y comparando los coeficientes de cada potencia de  $x$ , obtenemos el siguiente sistema de incógnitas  $u_i, v_j$  y coeficientes  $c_k, d_h$ :

$$\begin{array}{lll} c_0u_0 & +d_0v_0 & = 0, \\ c_1u_0 + c_0u_1 & +d_1v_0 + d_0v_1 & = 0, \\ \ddots & \ddots & \vdots, \\ c_lu_{m-1} + d_mv_{l-1} & & = 0. \end{array}$$

Como tenemos  $l + m$  incógnitas y ecuaciones, sabemos por álgebra lineal que el sistema tendrá alguna solución no nula si y solo si la matriz de coeficientes asociada tiene determinante igual a cero.

**Definición 1.50.** Dados dos polinomios  $f, g \in A[x]$  no nulos de la forma

$$f = \sum_{k=0}^l c_{l-k}x^k, \quad g = \sum_{h=0}^m d_{m-h}x^h, \quad \text{con } c_l, d_h \neq 0 \text{ y } l, m > 0,$$

definimos la **matriz de Sylvester** de  $f$  y  $g$  respecto a  $x$  como

$$\text{Syl}(f, g, x) = \begin{pmatrix} c_0 & & d_0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ c_l & & c_0 & d_m & d_0 \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & c_l & & d_m \end{pmatrix},$$

donde el resto de posiciones son cero.

**Proposición 1.16.** *En el contexto de la definición anterior, se tiene que*

$$\text{Res}_{f,g}(x) = \det(\text{Syl}(f, g, x)).$$

Podemos concluir por tanto que siempre podemos encontrar los polinomios  $A$  y  $B$  en las condiciones del [Lema 1.6](#). Además se cumple el siguiente hecho.

**Proposición 1.17.** *Dados  $f, g \in A[x]$  no nulos, existen polinomios  $A, B \in A[x]$  tal que*

$$Af + Bg = \text{Res}_{f,g}(x).$$

*De hecho, si  $\deg(f) > 0$  o  $\deg(g) > 0$ , entonces  $A, B$  son polinomios con coeficientes enteros en los coeficientes de  $f$  y  $g$ .*

La demostración de este resultado se puede consultar en [16], y de ella se puede obtener también la siguiente propiedad interesante.

**Proposición 1.18.** *Dados  $f, g \in A[x]$  no nulos, existen polinomios  $\tilde{A}, \tilde{B} \in A[x]$  de la forma*

$$\tilde{A} = \frac{A}{\text{Res}(f, g, x)} \quad y \quad \tilde{B} = \frac{B}{\text{Res}_{f,g}(x)}$$

*que cumplen*

$$\tilde{A}f + \tilde{B}g = 1.$$

### 1.6.2. Resultante auxiliar

Ahora que tenemos una idea básica de como trabajar con resultantes, veamos como podemos usarlos para realizar la implicitación de una superficie parametrizada racionalmente [20]. Sabemos ya por el [Teorema 1.8](#) que todo parametrización racional satisface un conjunto de ecuaciones implícitas. Sin embargo, a diferencia de los resultados enunciados en este teorema, en el que trabajábamos con un número arbitrario de variables, en esta ocasión vamos a ceñirnos al caso de tres variables. Hacemos esto debido a que este será el ambiente en el que trabajaremos en la práctica y, como ya hemos mencionado, a medida que se incrementa el número de variables y ecuaciones, trabajar con resultantes es cada vez más complicado. Así, supondremos que tenemos una parametrización de la forma

$$x = \frac{\xi(r, s, t)}{\omega(r, s, t)}, \quad y = \frac{\eta(r, s, t)}{\omega(r, s, t)}, \quad z = \frac{\zeta(r, s, t)}{\omega(r, s, t)}, \tag{1.3}$$

## 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

donde  $\omega(r, s, t) \neq 0$ , y supondremos además que el máximo común divisor de estos polinomios es constante, de forma que trabajamos con una **parametrización propia**. Normalmente las superficies en  $\mathbb{R}^3$  vienen parametrizadas por los parámetros  $s$  y  $t$ , pero vamos a realizar un paso previo en el que homogeneizamos cada polinomio, es decir, hacemos que todos los monomios de cada polinomio tengan el mismo grado. Esto es sencillo, ya que para todo polinomio  $f \in A[x_1, \dots, x_n]$  siempre puede obtenerse su homogeneizado  ${}^h f$  añadiendo una variable adicional  $x_0$  [22] de la forma

$${}^h f(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^{\deg(f)} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Este es el motivo de que aparezca la variable adicional  $r$ . Una vez homogeneizados los polinomios de la parametrización, podemos obtener el **sistema de ecuaciones auxiliar**

$$\begin{cases} \xi(r, s, t) - x\omega(r, s, t) = 0, \\ \eta(r, s, t) - y\omega(r, s, t) = 0, \\ \zeta(r, s, t) - z\omega(r, s, t) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

cuya existencia del resultante asociado tenemos asegurada por el [Teorema 1.11](#).

**Definición 1.51.** Llamamos **resultante auxiliar** al resultante asociado a los polinomios de la ecuación (1.4), y lo denotaremos  $\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z)$ .

**Proposición 1.19.** *El resultante auxiliar es o bien un polinomio no nulo o bien idénticamente cero. Es decir,  $\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z) \neq k$  para  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .*

Los siguientes resultados muestran la relación que tiene el resultante auxiliar con el problema de implicitación.

**Proposición 1.20.** *Toda parametrización racional está contenida en una única superficie dada por un único polinomio irreducible.*

**Proposición 1.21.** *Si el resultante auxiliar no es idénticamente nulo, entonces la superficie generada por la ecuación  $\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z) = 0$  y la dada por la parametrización (1.3) representan el mismo conjunto de puntos.*

**Teorema 1.12.** *Si  $\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z)$  no es idénticamente nulo, entonces*

$$\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z) = f^l(x, y, z), \text{ para algún } f \in A[x, y, z] \text{ y } l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

*Demostración.* Tomamos  $A = \mathbb{C}$ . Dado que  $\mathbb{C}[x, y, z]$  es un dominio de factorización única, debe darse

$$\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z) = f_1^{l_1}(x, y, z) \cdots f_r^{l_r}(x, y, z),$$

donde todo  $f_i$  es irreducible y distinto al resto para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Sea  $f$  el polinomio dado por la [Proposición 1.20](#) que genera la superficie racional que contiene a la dada por la parametrización. Por la [Proposición 1.21](#), sabemos entonces que

$$\{(a, b, c) : f_1^{l_1}(a, b, c) \cdots f_r^{l_r}(a, b, c) = 0\} \subseteq \{(a, b, c) : f(a, b, c) = 0\}.$$

Dado que  $f$  es irreducible, debe darse que  $r = 1$  y  $f = f_1$ , concluyendo la demostración.  $\square$

Al igual que ocurría al usar bases de Gröbner solo hemos obtenido una potencia de la ecuación implícita, lo cual nos es suficiente. Sin embargo, en este caso es mucho más fácil obtener de forma precisa la ecuación implícita de la superficie dada por la parametrización racional.

**Teorema 1.13.** Si  $\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z)$  no es idénticamente nulo, entonces la ecuación implícita asociada a la parametrización racional es

$$f(x, y, z) = \frac{\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z)}{\gcd\left(\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z) \cdot \frac{\partial \text{Res}_{\text{aux}}}{\partial u}(x, y, z)\right)},$$

donde  $u$  es cualquiera de las variables  $x, y, z$  que aparezcan en  $\text{Res}_{\text{aux}}$ .

*Demostración.* Usando el Teorema 1.12 sabemos que  $\text{Res}_{\text{aux}} = f^l$ , de donde

$$\frac{\partial \text{Res}_{\text{aux}}}{\partial u}(x, y, z) = l f^{l-1} \frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z).$$

Dado que  $f$  es irreducible y de grado mayor que  $\frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z)$ , estos no tienen ningún factor común, y por consiguiente

$$\gcd\left(\text{Res}_{\text{aux}}, \frac{\partial \text{Res}_{\text{aux}}}{\partial u}\right) = f^{l-1},$$

de donde se obtiene el resultado.  $\square$

Observamos que aunque tengamos que calcular un máximo común divisor, solo hay dos polinomios involucrados, lo cual simplifica los cálculos notablemente en comparación al caso de tres o más polinomios. Terminamos la sección viendo bajo qué circunstancias podemos asegurar que  $\text{Res}_{\text{aux}} \neq 0$ , de forma que tendremos asegurado que la parametrización es representada por una única ecuación implícita. Para ello necesitamos presentar el concepto de punto base.

**Definición 1.52.** Llamamos **puntos base** de una parametrización racional de la forma (1.3) a la intersección de las curvas planas

$$\xi(r, s, t) = 0, \quad \eta(r, s, t) = 0, \quad \zeta(r, s, t) = 0, \quad \omega(r, s, t) = 0.$$

**Teorema 1.14.** El resultante auxiliar es idénticamente nulo si y solo si la parametrización tiene puntos base.

Todos los resultados que hemos presentado tenían como hipótesis la no nulidad del resultante auxiliar, de forma que solo hemos aprendido a trabajar en la ausencia de puntos base. Para el estudio del cálculo de resultantes cuando existan puntos base se pueden consultar [23, 24]. No obstante, los resultados vistos siguen siendo potentes, pudiendo llegar a agilizar de forma muy notable los cálculos en función del problema concreto con el que estemos trabajando. En particular, el algoritmo de cálculo y reducción de una base de Gröbner va añadiendo sobre la marcha nuevos polinomios con los que realizar operaciones, sin saber exactamente cuándo acabará. Es decir, ese algoritmo se basa en buscar y comprobar, lo que requiere un mayor número de operaciones que el algoritmo propuesto por Eng-Wee Chionh y Ronald N. Goldman [20], que conoce de antemano el número de polinomios con los que va a

## 1. Fundamentos matemáticos: las SDFs

trabajar y produce en general un número de operaciones mucho menor. Además, en caso de que necesitemos obtener la ecuación implícita exacta, el tener que calcular un radical traerá muchas complicaciones, en caso de que sea posible. Es por estos motivos por los cuales el uso de resultantes es el método más común para el problema de implicitación. Acabamos el capítulo con un ejemplo práctico de uso de bases de Gröbner y resultantes para un problema de implicitación sencillo.

**Ejemplo 1.3.** El plano  $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0\}$  tiene la siguiente parametrización racional:

$$\begin{cases} x = s + t, \\ y = s, \\ z = t. \end{cases}$$

Usando bases de Gröbner y aplicando el [Teorema 1.8](#), tenemos que calcular una base del ideal

$$I = \langle x - (s + t), y - (s), z - (t) \rangle.$$

La versión más básica del algoritmo de Buchberger de SageMath implementada en el paquete `sage.rings.polynomial.toy_buchberger` realiza ocho reducciones a cero, mientras que la versión presentada en el [Algoritmo 2](#) realiza seis, reduciendo este número a tan solo una si además se usan los criterios del [Teorema 1.6](#). En cualquier caso, obtenemos la base

$$B = \{-x + y + z, -s + y, -s - t + x, -t + z\},$$

de donde el ideal de 1-eliminación sería

$$J = I \cap \mathbb{Q}[x, y, z] = \langle -x + y + z \rangle,$$

que en este caso es radical, obteniendo la ecuación implícita exacta del plano.

Si por el contrario hacemos uso de resultantes, tras homogeneizar, el sistema auxiliar de la parametrización sería

$$\begin{cases} s + t - rx = 0, \\ s - ry = 0, \\ t - rz = 0. \end{cases}$$

Aplicando el [Teorema 1.11](#) podemos obtener el resultado auxiliar como el determinante de la matriz formada por los coeficientes en cada variable de las ecuaciones del sistema auxiliar:

$$\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ -y & 1 & 0 \\ -z & 0 & 1 \end{pmatrix} = -x + y + z.$$

Obtenemos de nuevo la que ya sabemos que es la ecuación exacta. Podemos comprobarlo usando el [Teorema 1.13](#) como sigue:

$$f(x, y, z) = \frac{\text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z)}{\gcd \left( \text{Res}_{\text{aux}}(x, y, z) \cdot \frac{\partial \text{Res}_{\text{aux}}}{\partial x}(x, y, z) \right)} = \frac{-x + y + z}{\gcd(-x + y + z, -1)} = \frac{-x + y + z}{1}.$$

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

### 2.1. Renderizado por *spheretracing*

Una vez definida la escena a partir de una SDF necesitamos una forma para visualizarla, para lo que utilizaremos la API de OpenGL [25] y aplicaremos la técnica de *raymarching*.

#### 2.1.1. Creación del lienzo

Si bien se puede hacer *raymarching* directamente sobre una escena 3D, nuestra escena constará únicamente de un plano formado por cuatro vértices y dos triángulos, que usaremos como lienzo (o *canvas*) para dibujar sobre él. Para ello, necesitaremos trabajar sobre diferentes espacios de coordenadas que nos proporciona OpenGL, los cuales pasamos a enumerar.

- **Coordenadas locales o de objeto:** distancias relativas al origen del objeto.
- **Coordenadas globales o de mundo:** distancias relativas a un origen común para todos los objetos.
- **Coordenadas de cámara:** distancias relativas a un sistema de referencia posicionado y alineado con la cámara.
- **Coordenadas de recortado:** distancias normalizadas en el rango  $[-1, 1]^2$  relativas a un sistema asociado al rectángulo que forma la imagen en pantalla.

Para crear el lienzo, debemos declarar sus vértices y cómo estos se unen formando triángulos. Si hacemos uso de GL\_TRIANGLES bastará con definir los vértices en sentido antihorario, pero hay que tener en cuenta que tendremos que repetir dos vértices, ya que se irán formando los triángulos en grupos de tres vértices. Una alternativa para no repetir vértices sería utilizar tablas de vértices e índices, pero en nuestro caso no merece la pena al tener únicamente seis vértices. Un ejemplo de definición de vértices formando un lienzo rectangular podría ser el que se muestra en la [Figura 2.1](#).

Este lienzo, como toda geometría, tendrá asignado dos *shaders* o procesadores, programas escritos en GLSL (lenguaje parecido a C) y que se ejecutan en la GPU. Estos programas son independientes entre sí, y la única forma en la que pueden comunicarse entre ellos es mediante el paso de atributos de entrada y salida con las palabras clave `in` y `out` respectivamente. Hay dos tipos de *shaders*: de vértices (*vertex shader*) y de fragmento o píxel (*fragment shader*), cada uno con atributos específicos de entrada y salida.

En el *vertex shader* utilizaremos los siguientes atributos.

- **in vec4 gl\_Vertex:** contiene las coordenadas locales del vértice actual y es pasado automáticamente por la aplicación.

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

---

```

glBegin(GL_TRIANGLES);
    glColor3f(1.0f, 1.0f, 1.0f);

    // Triangulo inferior
    glVertex3f(-2.0f, -1.0f, 0.0f);
    glVertex3f(-2.0f, 1.0f, 0.0f);
    glVertex3f(2.0f, 1.0f, 0.0f);

    // Triangulo superior
    glVertex3f(-2.0f, -1.0f, 0.0f);
    glVertex3f(2.0f, 1.0f, 0.0f);
    glVertex3f(2.0f, -1.0f, 0.0f);

glEnd();

```

---

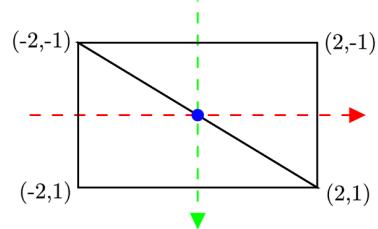


Figura 2.1.: Construcción del lienzo

- **out vec4 gl\_Position:** posición transformada del vértice actual. La cuarta componente es la componente homogénea, que es necesaria para realizar el cambio a coordenadas recortadas.

Por otro lado, en el *fragment shader* usaremos los que siguen.

- **in vec4 gl\_FragCoord:** coordenadas de dispositivo para el centro del píxel actual en el *fragment shader*. Al ser un atributo de entrada del *fragment shader*, está interpolada en cada vértice. La cuarta componente es la inversa de la componente homogénea de `gl_Position`, y se utiliza en el cálculo de la profundidad de los píxeles y en las operaciones de corrección de perspectiva.
- **out vec4 gl\_FragColor:** terna RGBA para asignar el color del píxel actual en el *fragment shader*.

Por último, en caso de que queramos pasar nuestros propios atributos desde otro programa, deberemos hacerlo a través de un `uniform`.

En primer lugar se ejecuta el **procesador de vértices o vertex shader** para cada vértice de la geometría. Su objetivo principal es el de realizar transformaciones de coordenadas, y adicionalmente pasar atributos al *fragment shader*. Dada la posición del vértice actual, que se nos proporciona a través del atributo `gl_Vertex`, para cambiar de un sistema de coordenadas a otro se utilizan matrices de transformación [26] [27]. En particular, haremos uso de las siguientes.

- **Matriz de modelo M:** define la posición, orientación y escala del objeto en la escena. Se utiliza para pasar de coordenadas locales a coordenadas de mundo. En nuestro caso, si creamos el plano centrado en el origen, podemos simplemente tomar

$$M = Id_4.$$

- **Matriz de vista V:** define la posición y orientación de cada punto respecto a la cámara de la escena. Se utiliza para pasar de coordenadas de mundo a coordenadas de vista. Lo que ocurre en realidad es que la cámara está fija en el origen, y es el resto de la

## 2.1. Renderizado por spheretracing

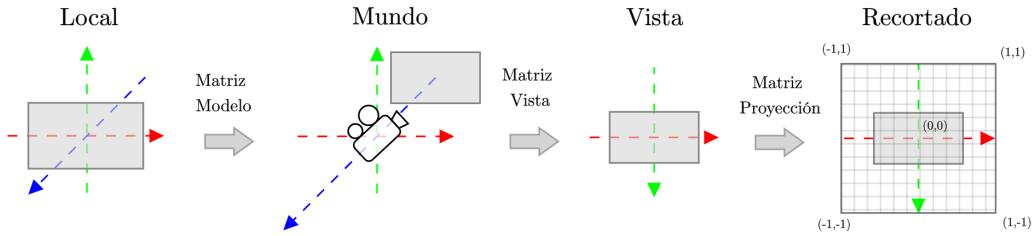


Figura 2.2.: Coordenadas locales a recortadas

escena es la que se mueve respecto a ella. Por tanto, esta matriz contiene la posición y orientación inversa de la cámara. En nuestro caso, si queremos desplazar la cámara una unidad en el eje Z, la matriz de vista tendrá la forma

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Matriz de proyección:** define cómo la escena se proyecta en la pantalla, incluyendo el campo de visión, aspecto y planos cercano y lejano. Se utiliza para pasar de coordenadas de vista a coordenadas recortadas. OpenGL nos proporciona una función para calcularla como

---

```
glm::mat4 projectionMatrix = glm::perspective(
    glm::radians(FoV), // campo vertical de vision
    4.0f / 3.0f,       // aspecto
    0.1f,              // plano de corte cercano
    100.0f             // plano de corte lejano
);
```

---

Con esto, ya podemos escribir nuestro *vertex shader*:

---

#### Algorithm 4: Fragment Shader

---

**Data:** matriz de proyección  $M_P$ , matriz de vista  $M_V$ , matriz de modelo  $M_M$

**Result:** Posición transformada del vértice actual

$gl\_Position \leftarrow M_P \cdot M_V \cdot M_M \cdot gl\_Vertex$

---

Figura 2.3.: Cuerpo del método main del *vertex shader*

Tras realizar estas transformaciones, las coordenadas de recortado se transforman a coordenadas de dispositivo, que están centradas en la esquina inferior izquierda de la pantalla y toman valor en el rango  $[0, r_x] \times [0, r_y]$ , donde  $r = (r_x, r_y)$  es la resolución de la pantalla.

Ahora le toca el turno al **procesador de fragmentos o fragment shader**. Este se ejecuta para cada píxel de la pantalla, y su objetivo es asignar a la variable  $gl\_FragColor$  el color que el píxel tendrá como una terna RGBA. Será aquí donde hagamos todos los cálculos

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

necesarios para renderizar la superficie con *raymarching*. Para ello, necesitaremos un sistema de coordenadas dentro del propio lienzo, que generaremos haciendo uso de `gl_FragCoord` y la resolución del lienzo, atributo que pasaremos nosotros al *shader* a través de un `uniform`, que llamaremos `u_resolution`.

Para obtener estas coordenadas, primero desplazamos el origen que nos proporciona `gl_FragCoord` al centro de la pantalla, y posteriormente normalizamos respecto a alguno de los ejes. Hacemos esto porque si intentamos normalizar sobre ambos ejes, obtendremos coordenadas en el rango  $[-0.5, 0.5]^2$ , lo que hará que en un lienzo que no sea cuadrado, la imagen se vea estirada en la dirección del eje más largo. Nosotros normalizaremos respecto al eje vertical, ya que en nuestro caso será siempre el menor. Esto nos dará como resultado unas coordenadas con valores en  $[-0.5 \cdot aspect, 0.5 \cdot aspect] \times [-0.5, 0.5]$ , donde `aspect` es el ratio de aspecto del lienzo. Finalmente, para que el eje vertical tome valores en  $[-1, 1]$  multiplicamos por 2, obteniendo

$$uv = \frac{2 \cdot (gl_FragCoord.xy - 0.5 \cdot u_resolution.xy)}{u_resolution.y}.$$

Hemos denotado a las coordenadas obtenidas como `uv`, haciendo referencia a la similitud que tienen con el uso que se le da a las coordenadas de textura habituales. Podemos ver la diferencia entre ambos sistemas de coordenadas si usamos `uv` como los canales rojo y verde de `gl_FragColor`, tal y como se muestra en la [Figura 2.7](#) (los valores que se salen del rango  $[-1, 1]$  son visualizados como si hubieran sido acotados en dicho intervalo).

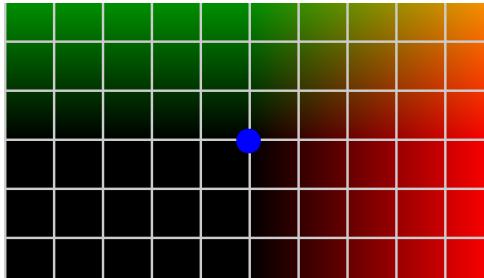


Figura 2.4.: Eje X

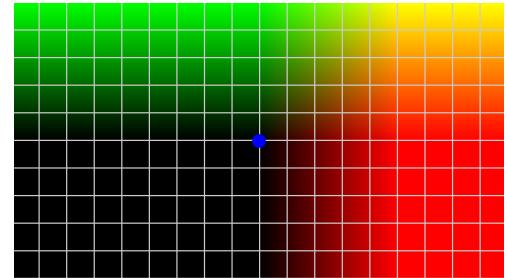


Figura 2.5.: Eje Y

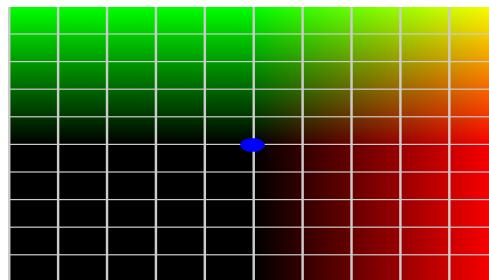


Figura 2.6.: Ejes X e Y

Figura 2.7.: Normalización de coordenadas sobre distintos ejes

Veamos cómo usar estas coordenadas para dibujar nuestra superficie sobre el lienzo.

### 2.1.2. Raymarching y spheretracing

A partir de ahora, pensamos en que nuestra escena no es la de OpenGL, sino aquella que queremos dibujar usando *raymarching* dado una SDF  $\phi$ . Podemos pensar en esta escena como  $\mathbb{R}^3$  con su base usual  $B_u = \{e_x, e_y, e_z\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ , donde colocamos los siguientes elementos.

- La **isosuperficie**  $S_\phi$ .
- **Plano de visión:** rejilla perpendicular al eje óptico de la cámara, donde cada uno de sus cuadrados corresponde a un píxel del lienzo.
- **Punto de la cámara**  $c_o$ : punto del espacio desde donde se observa la escena.
- **Punto de atención o lookat point**  $l$ : hacia que punto del espacio debe mirar la cámara. En general tomaremos  $l = (0, 0, 0)$ .

El método del *raymarching* consiste en trazar rayos a partir de  $c_o$  hacia el centro de cada uno de los cuadrados del plano de visión, de forma que si el rayo interseca con  $S_\phi$  significa que ese píxel corresponde a un punto de la superficie, y será coloreado como tal.

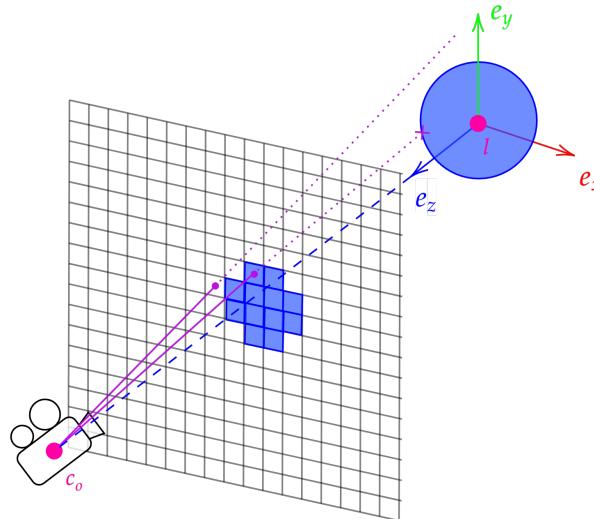


Figura 2.8.: Trazado de rayos a través del plano de visión

Cada uno de estos rayos estará definido por un origen  $r_o$  y una dirección  $r_d$ . El origen será siempre la posición de la cámara  $c_o$ , pero la dirección requiere más trabajo. En el escenario descrito en la Figura 2.8 en el que  $S_\phi$  es una esfera centrada en el origen y el observador se

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

encuentra sobre el eje Z, dado que en todo momento conocemos las coordenadas de cada punto de la rejilla a través de  $uv = (u, v)$ , es claro que podemos tomar

$$r_d = (u, v, 0) - c_0.$$

Tomando  $c_0 = (0, 0, c)$ , el valor  $c$  actuaría como un control del campo de visión, de forma que cuanto menor sea su valor, menor se verán los objetos dibujados. Lo fijaremos a un valor de 1. Sin embargo este escenario es el más sencillo posible, y si queremos poder mover la cámara manteniendo la orientación hacia  $l$  tendremos que poder trabajar con orientación arbitraria suya. Para ello deberemos construir un marco cartesiano relativo a la cámara, esto es, una base  $B = \{f_1, f_2, f_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  alineada con ella. Esta base deberá ser ortonormal y tener la misma orientación que la base usual.

Obtenemos primero vectores que nos resultarán útiles para generar esta base.

- **Vector director  $c_d$ :** indica la dirección hacia la que mirará la cámara. luego vendrá dado por  $c_d = l - c_o$ .
- **Right vector  $c_r$ :** es el análogo a  $e_x$  en la base usual, luego lo podemos obtener como  $c_r = (0, 1, 0) \times c_d$ .
- **Up vector  $c_u$ :** dirección en la que el observador ve proyectada en vertical la escena. Podemos obtenerlo como  $c_u = c_d \times c_r$ .

A partir de estos vectores podemos obtener  $\{f_1, f_2, f_3\}$  normalizándolos y teniendo en cuenta que el plano de visión y la cámara estarán orientados de forma opuesta:

$$f_1 = -\frac{c_r}{\|c_r\|} = -\frac{(0, 1, 0) \times c_d}{\|l - c_o\|}, \quad f_2 = \frac{c_u}{\|c_u\|} = f_3 \times f_1, \quad f_3 = -\frac{c_d}{\|c_d\|} = -\frac{l - c_o}{\|l - c_o\|}.$$

Solo queda transformar el vector  $r_d = (u, v, -1)$  a la base que acabamos de obtener. La matriz de cambio de base serán las coordenadas por columnas de  $\{f_1, f_2, f_3\}$  escritas en función de  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , que al ser la base usual, coincidirá con escribir por columnas  $\{f_1, f_2, f_3\}$ , de forma que

$$\text{rayo} = (u, v, -1)_B^t = (f_1 \mid f_2 \mid f_3) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora que ya tenemos toda la información del rayo, falta comprobar si este interseca con  $S_\phi$ . Para esto se utiliza un método iterativo: a partir de  $c_o$ , en cada iteración avanzamos en la dirección del rayo una distancia fija  $\delta$ . Evaluamos entonces nuestra SDF en la posición actual, de forma que si obtenemos un valor muy cercano a 0 significará que hemos llegado a la isosuperficie. De lo contrario, repetimos el proceso hasta encontrar una intersección o superar un número máximo de iteraciones, en cuyo caso concluiremos que no hay intersección. La [Figura 2.11](#) ilustra este procedimiento, donde `DibujarSuperficie()` y `DibujarFondo()` devuelven ternas RGBA que serán asignadas al píxel actual dependiendo de si hay intersección o no.

Una desventaja de esta técnica es que puede ser bastante lenta, ya que cuanto más alejados estén los puntos de  $S_\phi$  del observador, mayor es el número de iteraciones necesarias para encontrar la intersección en caso de que la haya. En el peor de los casos en el que tal intersección no exista, se habrá realizado el número máximo de iteraciones, que deberá ser bastante

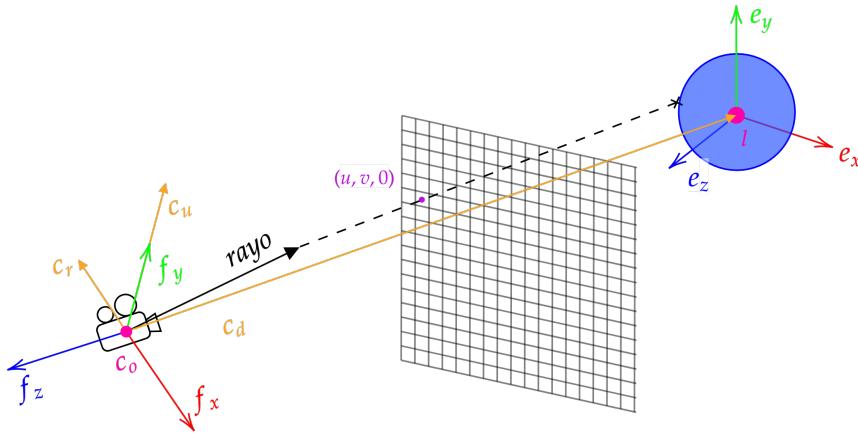
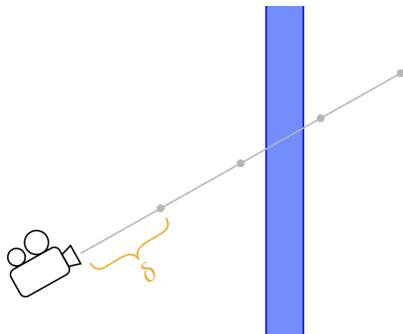


Figura 2.9.: Obtención de la dirección del rayo


 Figura 2.10.: Pérdida de intersección en raymarching para valores elevados de  $\delta$ 

alto, pues si no queremos perder ninguna intersección como ocurre en la [Figura 2.29](#), el valor de incremento  $\delta$  tendrá que ser pequeño.

La solución a este problema es el uso de *spheretracing*, que reduce drásticamente el número de iteraciones y por tanto evaluaciones de  $\phi$ , necesarias para detectar la intersección. Su funcionamiento es similar al *raymarching*, con la diferencia de que el incremento en la posición del rayo no es fija, sino que es la máxima que podemos tomar en cada momento asegurándonos de no perder información. Esta distancia será la mínima del punto actual del rayo a  $S_\phi$ , que no es más que evaluar  $\phi$  en dicho punto.

Este será por tanto el algoritmo que utilizaremos para detectar qué píxeles de la pantalla corresponden a la superficie  $S_\phi$ , y se encuentra descrito con detalle en la [Figura 2.12](#). Con esto al fin podemos describir la forma que tendrá nuestro *fragment shader* en la [Figura 2.13](#). Claro está que esta versión todavía no es funcional, pues no sabemos qué forma tiene `DibujarSuperficie`, y como mucho podremos obtener una imagen que separe la isosuperficie del fondo usando colores planos como muestra la [Figura 2.14](#) para una esfera centrada en el origen. Veremos como mejorar esto en la próxima sección.

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

---

### Algorithm 5: Raymarching

---

**Data:** origen  $c_o$ , dirección  $v$   
**Result:** Terna RGB con el color asignado al píxel actual  
 $d \leftarrow 0 //$  distancia total  
**for**  $i \in \text{MAX\_ITERACIONES}$  **do**  
     $p \leftarrow c_o + d \cdot v$   
     $\text{sdf} \leftarrow \phi(p)$   
    **if**  $\text{sdf} < \epsilon$  **then**  
        | **return** *DibujarSuperficie*( $p, v, \text{sdf}$ )  
    **end**  
     $d \leftarrow d + \delta;$   
    **if**  $d > \text{MAX\_DISTANCIA}$  **then**  
        | **return** *DibujarFondo()*  
    **end**  
**end**

---

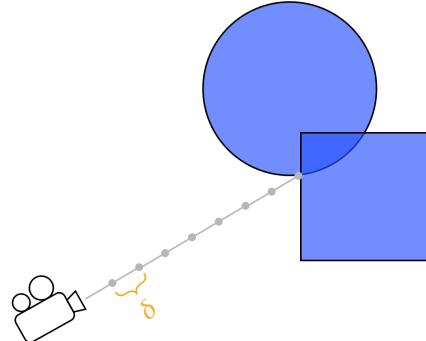


Figura 2.11.: Algoritmo de *raymarching*

---

### Algorithm 6: Spheretracing

---

**Data:** origen  $c_o$ , dirección  $v$   
**Result:** Terna RGB con el color asignado al píxel actual  
 $d \leftarrow 0 //$  distancia actual  
**for**  $i \in \text{MAX\_ITERACIONES}$  **do**  
     $p \leftarrow c_o + d \cdot v$   
     $\text{sdf} \leftarrow \phi(p)$   
    **if**  $\text{sdf} < \epsilon$  **then**  
        | **return** *DibujarSuperficie*( $p, v, \text{sdf}$ );  
    **end**  
     $d \leftarrow d + \text{sdf}$   
    **if**  $d > \text{MAX\_DISTANCIA}$  **then**  
        | **return** *DibujarFondo()*;  
    **end**  
**end**

---

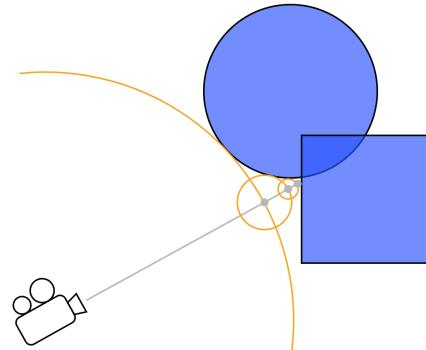


Figura 2.12.: Algoritmo de *spheretracing*

## 2.2. Modelos de iluminación y sombras

Ya sabemos qué píxeles pertenecen a la superficie, pero no de qué color deben dibujarse. En esta sección estudiaremos diversas técnicas que en conjunto nos permitirán simular de forma plausible qué ocurre cuando se añaden a la escena una o varias fuentes de luz.

### 2.2.1. Modelos de Blinn y Blinn-Phong

Empezamos viendo cómo las fuentes de luz presentes en la escena iluminan directamente la superficie. Hay multitud de modelos que simulan este comportamiento de forma más o

---

**Algorithm 7:** Fragment Shader

---

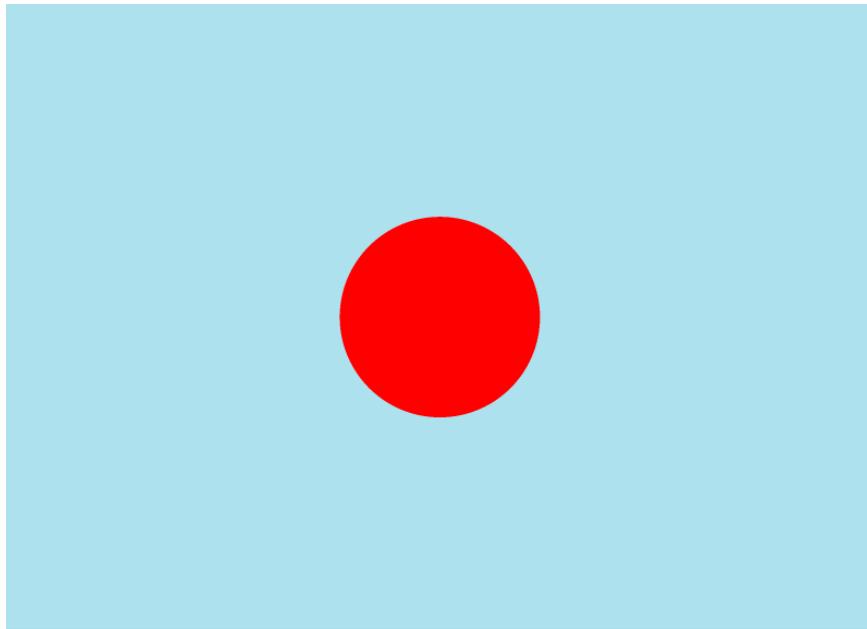
**Data:** posición del observador  $c_0$ , punto de atención  $l$   
**Result:** Terna RGBA con el color asignado al píxel actual  
 $uv \leftarrow 2 \cdot \frac{gl\_FragCoord.xy - 0.5 \cdot u\_resolution.xy}{u\_resolution.y}$

```

 $r_d \leftarrow (f_1 | f_2 | f_3) \cdot \text{normalizar}((uv.xy, -1))$ 
color  $\leftarrow \text{spheretracing}(c_0, r_d)$ 
gl_FragColor = (color, 1)

```

---

Figura 2.13.: Cuerpo del método `main` del *fragment shader*Figura 2.14.: Resultado de *spheretracing* asignando colores planos

menos realista, siendo uno de los más extendidos el renderizado basado en física (*physically based rendering* o PBR). Sin embargo, este y otros acercamientos similares son utilizados cuando se requiere de un alto grado de fidelidad y adaptabilidad. Nosotros usaremos el modelo de reflexión de Blinn-Phong [28], también popular pero mucho más simple y computacionalmente menos costoso. A su vez este modelo se basa en el de Blinn, el cual pasamos a estudiar a continuación.

Vamos a considerar que nuestra escena consta de los siguientes elementos.

- La **isosuperficie**  $S_\phi$  como único objeto a ser dibujado (aunque el modelo es válido para cualquier número de objetos en escena).
- Un **observador** que se encuentra en la posición  $c_o \in \mathbb{R}^3$  mirando a un punto  $p \in \mathbb{R}^3$ .
- Un número finito  $n$  de **fuentes de luz**. Llamaremos  $l_i$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$  a los vectores

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

normalizados que apuntan desde  $p$  a la posición de cada fuente.

Empecemos comprendiendo el fenómeno físico que tratamos de simular. La luz que generan las fuentes no es más que radiación electromagnética. De forma ideal, esta radiación se puede ver como un flujo en el espacio de partículas llamadas **fotones** que siguen trayectorias rectilíneas a la par que interaccionan con el entorno. Cada una de estas partículas tendrá una energía radiante única en función de su longitud de onda, que irá transfiriendo a aquellos objetos con los que interaccione.

**Definición 2.1** (Radiancia). Dado un punto  $p \in \mathbb{R}^3$ , llamamos **radiancia** a la densidad de energía radiante por unidad de tiempo de los fotones que pasan por un entorno de  $p$  en una determinada dirección  $v \in \mathbb{R}^3$  con  $\|v\| = 1$ . La denotaremos  $L(p, v)$ , y será representada mediante una terna RGB no acotada. Podemos distinguir a su vez varios tipos de radiancia.

- **Radiancia emitida**  $L_E(p, v)$ : radiancia que emite el propio objeto, también llamada emisividad. Normalmente es de intensidad baja y la consideraremos constante.
- **Radiancia incidente**  $L_I(p, v)$ : radiancia que recibe el punto  $p$  desde la dirección  $v$ .
- **Radiancia reflejada**  $L_R(p, v)$ : cantidad de la radiancia incidente en  $p$  que se refleja en la dirección  $v$ .

El objetivo del modelo será por tanto describir la radiancia que percibe el observador desde su posición en el punto  $p$ . Para ello, se llevan a cabo una serie de simplificaciones:

- En un modelo físicamente correcto la luz reflejada en cada punto se dispersaría por el entorno, contribuyendo a la radiancia incidente en otros puntos de la escena. Sin embargo, nosotros no consideraremos la radiancia incidente que no provenga directamente de fuentes de luz. Incluso teniendo un solo objeto en escena como es nuestro caso este modelo es mejorable, pues el objeto puede reflejar radiancia sobre sí mismo. Por tanto, usaremos una radiancia ambiente constante  $L_A$  para suplir esta iluminación indirecta.
- La radiancia se conserva en el espacio entre objetos.
- Las fuentes de luz son direccionales, de forma que no serán visibles en la escena. Además supondremos que emiten una radiancia constante  $S_i$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
- No se consideran objetos con transparencia.

Es natural pensar que la radiancia percibida en un punto  $p \in \mathbb{R}^3$  será la suma de la radiancia que emita y la que sea capaz de reflejar. Así, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores tenemos que

$$L(p, v) = L_A + L_E + \sum_{i=1}^n L_R(p, l_i).$$

Como  $L_A$  y  $L_E$  son constantes solo nos falta estudiar cómo obtener la **radiancia reflejada** para cada fuente de luz. Para ello fijamos un índice  $m \in \{1, \dots, n\}$  y suponemos a partir de ahora que  $p \in S_\phi$ , pues de lo contrario

$$L(p, v) = L_A, \quad p \in \mathbb{R}^3 \setminus S_\phi,$$

ya que la única luz que se puede reflejar es la del ambiente y ya está siendo considerada con  $L_A$ , y al trabajar únicamente con fuentes de luz direccionales  $L_E = 0$ .

Sabemos que cada objeto refleja la luz de manera distinta en función de su material y las propiedades de la fuente. Para representar este comportamiento definimos una función que indique la fracción de radiancia proveniente de  $l_m$  que se refleja en un punto  $p$  en la dirección  $v$  para cada fuente de luz

$$f_r: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Así, la radiancia reflejada es

$$L_R(p, v, l_m) = S_m \cdot f_r(p, v, l_m).$$

Podemos distinguir diferentes tipos de reflexión, cada uno contribuyendo de forma diferente a la radiancia reflejada final.

- **Reflexión ambiental:** cantidad de iluminación indirecta proveniente de la fuente de luz que refleja el objeto. Al igual que hicimos con  $L_A$ , tomaremos un valor constante  $R_A$  para ella, de forma que la fracción de radiancia ambiental reflejada será

$$f_{ra} = R_A \in \mathbb{R}^3.$$

- **Reflexión especular:** define cómo se refleja la luz en objetos brillantes teniendo en cuenta la posición de la fuente de luz y la del observador. Según la ley de refracción, el ángulo de incidencia de la luz será igual al de reflexión, luego podemos obtener la dirección de reflexión  $r_m$  reflejando  $l_m$  sobre el vector normal unitario en  $p$  de la superficie, que llamaremos  $N_p$ . Así,

$$r_m = 2(l_m \cdot N_p)N_p - l_m \in \mathbb{R}^3.$$

Sin embargo, solo queremos que haya reflejos en los puntos orientados hacia la fuente de luz y cuando  $r_m$  haya sido reflejado en una dirección que el observador pueda apreciar, siendo la intensidad del reflejo mayor cuanto más alineado esté el observador con el vector reflejado. Esto equivale a que se cumpla

$$N_p \cdot l_m > 0 \quad \text{y} \quad R_m \cdot v > 0.$$

Para controlar el color y la intensidad de los reflejos usaremos una radiancia  $R_E$ , de forma que podemos expresar la fracción de radiancia especular reflejada como

$$\begin{aligned} f_{re}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (p, v, l_m) &\mapsto R_E \cdot \max(0, l_m \cdot N_p) \cdot \max(0, r_m \cdot v). \end{aligned}$$

- **Reflexión difusa:** modela cómo se refleja la luz en objetos mates en función de la posición de la fuente de luz. Al contrario de lo que ocurre con la reflexión especular, debido a la irregularidad de la superficie del objeto la luz no se refleja en una sola dirección, haciendo que se disperse en direcciones impredecibles. Este comportamiento se simula a través de una radiancia  $R_D$  que represente el valor promedio resultado de estos reflejos, y que consideraremos constante. Al igual que antes, solo queremos que

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

el punto esté iluminado cuando esté de cara a la fuente de luz, obteniendo la mayor cantidad de luz cuando está alineado con la fuente. Así, la fracción de radiancia difusa será

$$f_{rd}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(p, v, l_m) \mapsto R_D \cdot \max(0, l_m \cdot N_p).$$

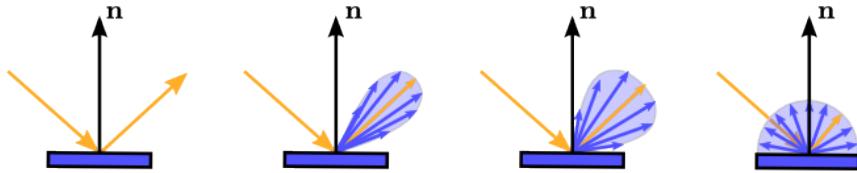


Figura 2.15.: Reflexión de un rayo en una superficie progresivamente más mate [29]

*Observación 2.1.* Es necesario que los vectores  $l_i$ ,  $v$  y  $N_p$  sean unitarios, pues de lo contrario su producto escalar no coincidiría con el coseno del ángulo que forman.

En vista de las definiciones anteriores, podríamos simplemente definir

$$f_r(p, v, l_m) = f_{ra} + f_{re}(p, v, l_m) + f_{rd}(p, v, l_m).$$

De esta forma, para diferenciar entre un material totalmente mate como el yeso y uno espejular como el metal bastaría tomar valores de  $R_D$  y  $R_E$  tal que  $\|R_D\| \gg \|R_E\|$ . Sin embargo, a la hora de comparar materiales especulares podríamos observar que aunque ambos generen zonas brillantes no lo hagan de la misma forma. Por ejemplo, tanto el mármol como el metal generan brillos sobre su superficie, pero en el caso del metal estos son más pequeños y brillantes debido a que se trata de un material más pulido. Por tanto, para añadir control sobre el tamaño e intensidad de estas zonas brillantes introducimos el **coeficiente de brillo**  $\alpha \in \mathbb{R}$  en la expresión de  $f_{re}$ , de forma que cuanto mayor sea su valor más pequeños e intensos serán los brillos generados. En la Figura 2.20 podemos ver el efecto que tienen  $R_E$ ,  $R_D$  sobre la radiancia reflejada [29].

**Definición 2.2.** Dado un objeto, definimos su **material** como la tupla  $\{R_A, R_E, R_D, \alpha\}$ .

Una vez asociado un material a  $S_\phi$  podemos escribir la expresión final para  $f_r$ :

$$\begin{aligned} f_r(p, v, l_i) &= f_{ra} + f_{re}(p, v, l_i) + f_{rd}(p, v, l_i) \\ &= R_A + R_E \cdot \max(0, l_i \cdot N_p) \cdot \max(0, r_i \cdot v)^\alpha + R_D \cdot \max(0, l_i \cdot N_p). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Recogemos los resultados obtenidos en la siguiente definición.

**Definición 2.3** (Modelo de Blinn). La radiancia percibida en el punto  $p \in \mathbb{R}^3$  desde la

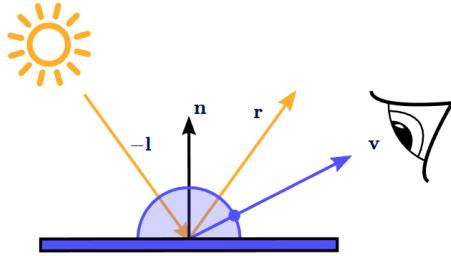
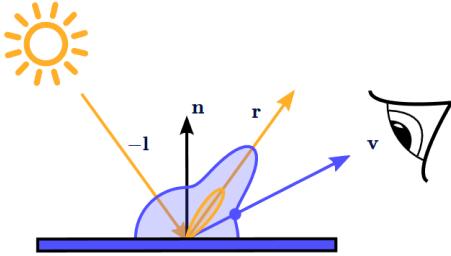
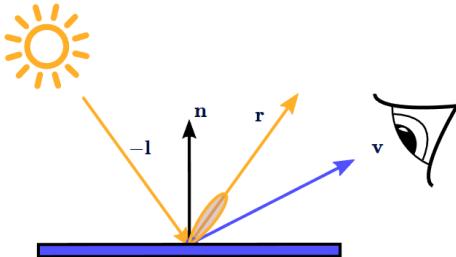
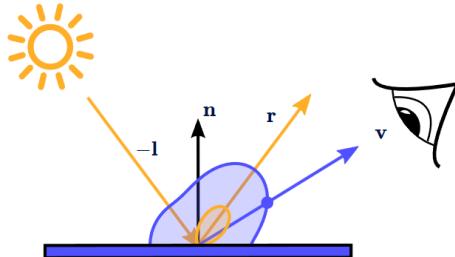

 Figura 2.16.:  $\|R_E\| = 0$ 

 Figura 2.17.:  $\|R_E\| = \|R_D\|$  y  $\alpha$  grande

 Figura 2.18.:  $\|R_D\| = 0$ 

 Figura 2.19.:  $\|R_E\| = \|R_D\|$  y  $\alpha$  pequeño

 Figura 2.20.: Ejemplo de distintos valores para  $R_E$ ,  $R_D$  y  $\alpha$ 

dirección  $v \in \mathbb{R}^3$  con  $\|v\| = 1$  según el modelo de Blinn viene dada por

$$L(p, v) = L_A + L_E + \sum_{i=0}^n S_i \left[ k_a R_A + \max(0, l_i \cdot N_p) \left( k_d R_D + k_e R_E \cdot \max(0, r_i \cdot v) \right) \right],$$

donde:

- $n \in \mathbb{N}$  es el número de fuentes de luz y  $l_i \in \mathbb{R}^3$  es el vector normalizado que apunta a  $p$  desde cada una de ellas,
- $L_A, L_E \in \mathbb{R}^3$  son ternas RGB no acotadas representando la radiancia ambiente y emitida respectivamente,
- $S_i \in \mathbb{R}^3$  es una terna RGB no acotada representando la radiancia emitida por la fuente de luz  $i$ -ésima,
- $\alpha \in \mathbb{R}$  es el coeficiente de brillo,
- $R_A, R_D, R_E \in \mathbb{R}^3$  son ternas RGB (no acotadas) representando la radiancia reflejada de forma ambiental, difusa y especular respectivamente,
- $N_p$  es el vector normal de la superficie en  $p$  y  $r_i$  es el vector  $l_i$  reflejado sobre  $N_p$ .

En 1975 Phong [30] introdujo una variante a este modelo que hoy conocemos como **modelo de Blinn-Phong**. Su única diferencia con el de Blinn consiste en el uso del llamado *halfway vector*

$$h_m = \frac{l_m + v}{\|l_m + v\|}.$$

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

Ahora, en lugar de usar el valor  $r_m \cdot v$  hacemos que el brillo sea proporcional al coseno del ángulo entre  $h_m$  y  $N_p$ , de forma que no depende del punto  $p$  y solo necesita ser calculado una vez. En la [Figura 2.21](#) podemos ver el comportamiento de  $h_m$  para distintas configuraciones de  $l_m$  y  $v$ .

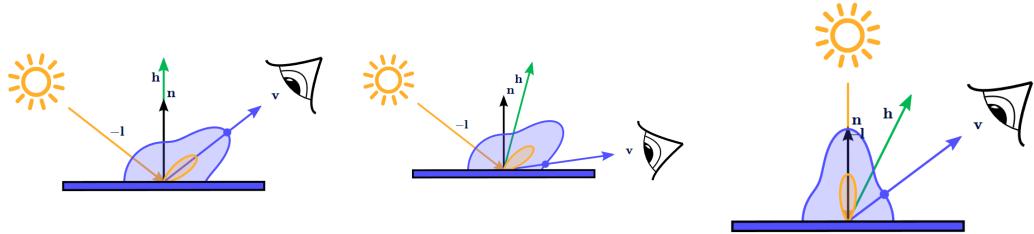


Figura 2.21.: Comportamiento de  $h_m$  con  $\|R_S\| = \|R_D\|$

Aunque pueda parecer una simplificación del modelo de Blinn, lo cierto es que produce resultados más convincentes que este. En particular, mientras que el modelo de Blinn siempre produce brillos redondos en superficies planas, el de Blinn-Phong los genera con una forma más elíptica cuando se observa la superficie desde un ángulo acusado, como se observa en la [Figura 2.24](#).

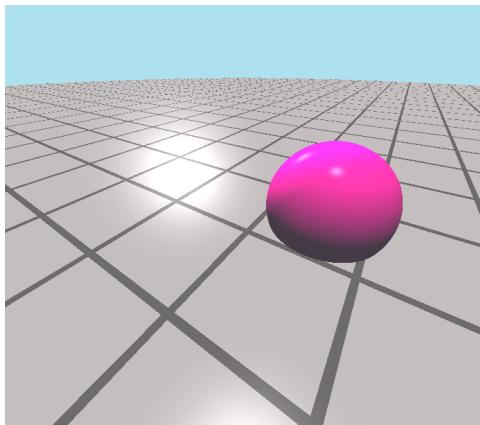


Figura 2.22.: Blinn

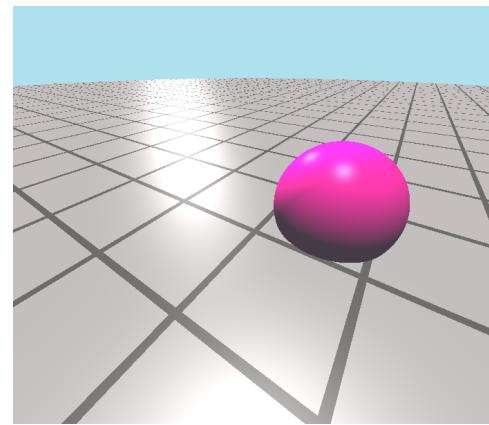


Figura 2.23.: Blinn-Phong

Figura 2.24.: Zonas brillantes en modelos de Blinn y Blinn-Phong

**Definición 2.4** (Modelo de Blinn-Phong). En el contexto de la [Def. 2.3](#), la radiancia percibida en el punto  $p \in \mathbb{R}^3$  desde la dirección  $v \in \mathbb{R}^3$  con  $\|v\| = 1$  según el modelo de Blinn-Phong viene dada por

$$L(p, v) = L_A + L_E + \sum_{i=0}^n S_i \left[ k_a R_A + \max(0, l_i \cdot N_p) \left( k_d R_D + k_e R_E \cdot \left( N_p \cdot \frac{l_i + v}{\|l_i + v\|} \right)^\alpha \right) \right].$$

Ya podemos darle forma a las funciones `DibujarSuperficie` y `DibujarFondo` usadas en la [Figura 2.12](#), suponiendo que pasamos como `uniforms` los parámetros del material y los valores  $l_i$  y  $S_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

---

**Algorithm 8:** DibujarSuperficie

---

```

Data: punto  $p$ , dirección del rayo  $v$ , distancia  $\phi(p)$ 
 $L \leftarrow L_A$  // Radiancia final
for  $i \in \{1, \dots, n\}$  do
     $h \leftarrow \text{normalizar}(L_i - v)$  // Observador en dirección opuesta a la del rayo
     $N_p \leftarrow \text{CalcularNormal}(p)$ 
     $NLi \leftarrow \max(0, N_p \cdot l_i)$ 
     $NH \leftarrow \max(0, N_p \cdot h)$ 

     $f_{ra} = R_A$ 
     $f_{rd} = NLi \cdot R_D$ 
     $f_{re} = NLi \cdot R_E \cdot NH^\alpha$ 

     $L \leftarrow L + S_i \cdot (f_{ra} + f_{rd} + f_{re})$ 
end
return  $L$ 

```

---

**Algorithm 9:** DibujarFondo

---

```
return  $L_A$ 
```

---

Figura 2.25.: Implementación de las funciones DibujarSuperficie y DibujarFondo

Solo queda un asunto por tratar. A la vista de la expresión de  $f_r$  (2.1) y del código anterior, somos capaces de calcular todos los valores a excepción de uno, el del vector normal. En la siguiente sección veremos presentamos una técnica para calcularlo de forma aproximada.

**2.2.1.1. Cálculo del vector normal**

En cualquier modelo de iluminación el acceso al vector normal es indispensable. Cuando se trabaja con mallas de polígonos el vector normal viene dado para cada vértice, pero este no es nuestro caso. En su lugar nosotros usaremos el gradiente de la función distancia con signo para obtenerlo [31].

**Proposición 2.1.** Sea  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Entonces  $\nabla\phi$  es perpendicular a  $S_\phi$ .

*Demostración.* Sea  $s \in S_\phi$  arbitrario. Tomamos una curva parametrizada:

$$\begin{aligned}\alpha: [0, 1] &\rightarrow S_\phi, \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)),\end{aligned}$$

cumpliendo  $\alpha(t_0) = s$  para algún  $t_0 \in [0, 1]$ . Veamos que  $\nabla\phi(s) \perp \alpha$ . Como  $\alpha(t) \subset S_\phi$  la evaluación de  $\phi$  en cualquier punto de la curva será cero, y por tanto

$$\frac{d}{dt}\phi(\alpha(t)) = 0.$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d\phi \circ \alpha}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_s \frac{dx}{dt} \Big|_{t_0} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s \frac{dy}{dt} \Big|_{t_0} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_s \frac{dz}{dt} \Big|_{t_0} = \nabla\phi(s) \cdot \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t_0} = 0.$$

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

Por tanto  $\nabla\phi(s)$  es perpendicular al vector tangente de  $\alpha$  en  $s$ , que a su vez está contenido en el plano tangente de  $S_\phi$  en  $s$ , luego  $\nabla\phi(s) \perp S_\phi$ .  $\square$

Hemos visto que calcular el vector normal en cualquier punto equivale a calcular  $\nabla\phi$  y que este existe en casi todo punto de  $S_\phi$  por el [Teorema 1.1](#), pero esto no significa que podamos o debamos obtenerlo de forma analítica. Si bien en muchos casos sería posible hacerlo de forma analítica, esto podría tener asociado un coste computacional que no podemos asumir. Existen varios métodos numéricos para aproximar el gradiente de una función. Uno de los más triviales es el de las diferencias centrales, basado en aproximar el límite de la [Def. 1.4](#) tomando un valor pequeño para  $h$ . Necesitaríamos entonces realizar seis evaluaciones de  $\phi$  para obtener el gradiente, dos por cada parcial. Nosotros usaremos el [método del tetraedro](#) [32], que sin ser el más preciso, produce buenos resultados y es rápido, haciendo uso únicamente de cuatro evaluaciones de  $\phi$  en la dirección de los vértices de un tetraedro:

$$k_0 = (1, -1, -1), \quad k_1 = (-1, -1, 1), \quad k_2 = (-1, 1, -1), \quad k_3 = (1, 1, 1).$$

**Proposición 2.2** (Método del tetraedro). *Dado  $p \in S_\phi$ , una aproximación de su vector normal  $N_p$  se obtiene normalizando el vector*

$$\hat{N}_p = \sum_{i=0}^3 k_i \cdot f(p + hk_i) \quad , \text{ donde } h \approx 0.$$

*Demostración.* Por la proposición [Proposición 2.1](#), basta comprobar que  $\hat{N}$  es colineal a  $\nabla\phi(p)$ .

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \sum_{i=0}^3 k_i \cdot f(p + hk_i) = \sum_{i=0}^3 k_i \cdot f(p + hk_i) - k_i \cdot f(p) = \sum_{i=0}^3 k_i \cdot [f(p + hk_i) - f(p)] \\ &= h \sum_{i=0}^3 k_i \nabla_{k_i} f(x) = h \sum_{i=0}^3 k_i \cdot (k_i \cdot \nabla f(p)) = h \sum_{i=0}^3 (k_i \cdot k_i) \nabla f(p) = h \sum_{i=0}^3 \nabla f(p) = 4h \nabla f(p). \end{aligned}$$

Hemos usado que  $\sum_{i=0}^3 k_i = (0, 0, 0)$ ,  $\sum_{i=0}^3 k_i \cdot k_i = (1, 1, 1)$  y que el producto escalar es un operador lineal.  $\square$

### 2.2.2. Sombras

Los resultados obtenidos en la [Figura 2.24](#) presentan ciertas carencias, siendo la más flagrante la ausencia de sombras arrojadas, que no son consideradas en el modelo de Blinn-Phong. Afortunadamente el uso de las SDFs nos hará la obtención de la información necesaria para añadir sombras a nuestra escena muy sencilla. Para saber si un punto  $p \in \mathbb{R}^3$  recibe luz de una  $i$ -ésima fuente de luz bastará comprobar si hay algún obstáculo entre dicha fuente y el punto. Para hacer esta comprobación usaremos de nuevo *spheretracing*, pero en esta ocasión desde el punto hacia la fuente de luz. Si se detecta alguna intersección significará que el punto  $p$  no recibe luz de la fuente y por tanto  $L_R(p, v, l_i) = 0$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^3$ . Podemos modificar `DibujarSuperficie` como se muestra en la [Figura 2.26](#) para añadir este comprobación.

---

**Algorithm 10:** DibujarSupercicie

---

```

Data: punto  $p$ , dirección del rayo  $v$ , distancia  $\phi(p)$ 
 $L \leftarrow L_A + L_E$  // Radiancia final
for  $i \in \{1, \dots, n\}$  do
    // ...
     $sombras \leftarrow CalcularSombras(p, l_i)$ 
     $L \leftarrow L + S_i \cdot (f_{ra} + f_{rd} + f_{re}) \cdot sombras$ 
end
return  $L$ 

```

---



---

**Algorithm 11:** CalcularSombras

---

```

Data: punto  $p_0$ , dirección de luz  $l_i$ 
Result:  $sombra \in [0, 1]$ 
 $d \leftarrow \delta$  // distancia actual
for  $i \in MAX\_ITERACIONES$  do
     $p \leftarrow p_0 + d \cdot v$ 
     $sdf \leftarrow \phi(p)$ 
    if  $sdf < \varepsilon$  then
        return  $0$ ;
    end
     $d \leftarrow d + sdf$ 
    if  $d > MAX\_DISTANCIA$  then
        return  $1$ 
    end
end
return  $1$ 

```

---

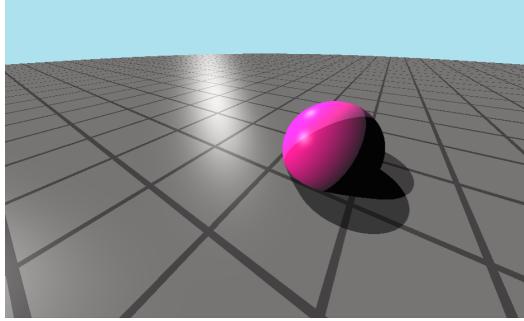


Figura 2.26.: Cálculo básico de sombras

Realizamos las siguientes apreciaciones respecto al método `CalcularSombras` propuesto:

- Dado que estamos trabajando con luces direccionales situadas a distancia infinita solo podemos hacer *spheretracing* desde  $p$  en dirección a la fuente, a pesar de que lo intuitivo sería hacerlo desde el foco de luz hacia el punto.
- A diferencia del algoritmo propuesto en [Figura 2.12](#) no podemos inicializar  $d = 0$ , ya que entonces se detectaría una intersección en el mismo punto  $p$ .

Estudiando los resultados obtenidos vemos que al añadir sombras obtenemos una imagen mucho más cohesiva y otorgamos a la esfera mayor presencia en la escena. Sin embargo también podremos apreciar que las sombras que genera este método son muy planas y duras. Realmente ahora mismo no tenemos control alguno sobre esto, ya que según nuestra implementación un punto o está totalmente en sombra o totalmente iluminado. Esto no siempre es así en el mundo real, donde podemos encontrar que no toda la región sombreada sea igual de oscura o el borde esté más o menos difuminado en función de las propiedades de la fuente. Podemos simular estos fenómenos de forma muy sencilla usando información de la que ya que disponemos en el algoritmo de *spheretracing*. En particular:

- Haremos que cuanto más cerca se encuentre el punto del obstáculo que le hace sombra menos luz reciba. Por tanto la intensidad de la sombra será proporcional a la evaluación

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

de la SDF en el punto actual del rayo:

$$sombra \propto sdf.$$

- Cuando un punto sea alcanzado por la luz pero haya estado muy cerca de ser obstruido dejaremos que refleje solo una fracción de la luz total. Esta cantidad deberá ser mayor cuanto menos haya faltado para perder la intersección, creando un difuminado en el borde:

$$sombra \propto \frac{1}{d}.$$

Esta nueva versión de CalcularSombras se encuentra descrita en la [Figura 2.27](#). En ella se ha añadido un parámetro  $k \in \mathbb{R}_0^+$  para controlar la intensidad del efecto de suavizado. En realidad este parámetro hace referencia al **tamaño de la fuente de luz**, en concreto a su inversa. Así, cuanto más pequeño sea este valor más grande será la fuente de luz, produciendo sombras más difusas. Por ejemplo, el Sol tendrá un valor pequeño para  $k$ , mientras que una bombilla lo tendría grande. A partir de ahora en nuestra escena de ejemplo fijamos  $k = 1.5$  para la fuente de luz que apunta más hacia la cámara, que actuará como el Sol, y  $k = 10$  para la otra, que actuará como una linterna.

---

### Algorithm 12: CalcularSombras

---

```

Data: punto  $p_0$ , dirección de luz  $l_i$ ,
       tamaño de luz  $k$ 
Result:  $sombra \in [0, 1]$ 
 $sombra \leftarrow 1$ 
 $d \leftarrow \delta //$  distancia actual
for  $i \in \text{MAX\_ITERACIONES}$  do
     $p \leftarrow p_0 + d \cdot v$ 
     $sdf \leftarrow \phi(p)$ 
    if  $sdf < \varepsilon$  then
         $| \quad \text{return } o;$ 
    end
     $sombra \leftarrow \min(sombra, k \cdot \frac{sdf}{d})$ 
     $d \leftarrow d + sdf$ 
    if  $d > \text{MAX\_DISTANCIA}$  then
         $| \quad \text{return } 1$ 
    end
end
return  $1$ 

```

---

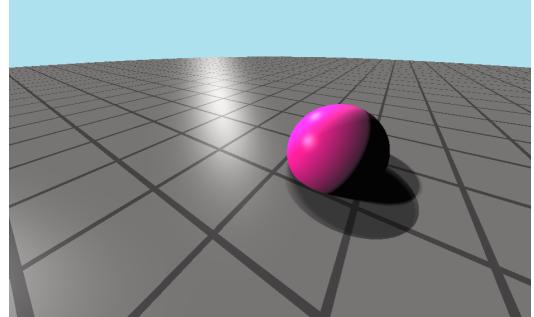


Figura 2.27.: Cálculo de sombras suavizadas

Si bien este método genera resultados más realistas en general, también puede generar ciertas imperfecciones en el borde de la sombra, como se puede apreciar en la [Figura 2.28](#). Esto es debido a que en el proceso de *spheretracing* podemos saltarnos una intersección que habría aportado más oscuridad que la que finalmente se ha encontrado, generando fugas de luz que siguen el patrón de los puntos en los que se evalúa la SDF. Hay varias formas de solventar esto, como la propuesta por Sebastian Aaltonen [33] en la GDC de 2018. Su idea se basa en comprobar intersecciones también en los puntos que se estiman como los más

cercanos a la superficie en cada iteración. Nosotros usaremos una técnica introducida por el usuario nurof3n [34] en Shadertoy y estudiada posteriormente por Íñigo Quílez.

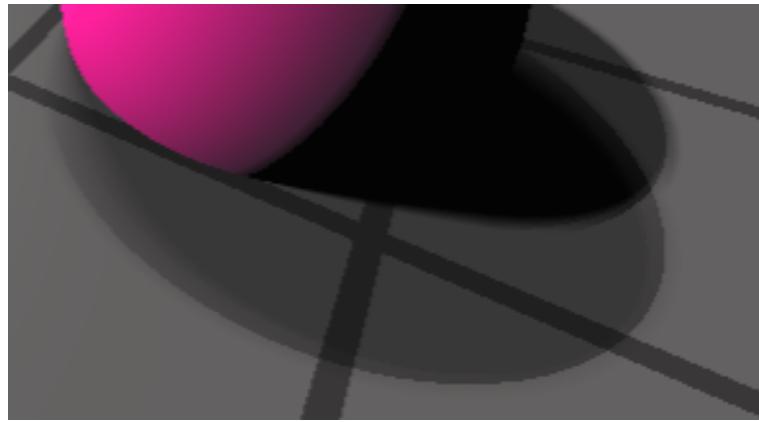


Figura 2.28.: Detalle de las fugas de luz al calcular sombras

La diferencia con nuestro método actual radica en que se permite que el rayo penetre un poco la superficie para detectar los puntos que casi no son alcanzados por un rayo de luz. Por tanto, ahora para cada punto se tiene en cuenta si casi ha sido alcanzado y si casi no ha sido alcanzado por un rayo de luz. Para permitir que el rayo entre en la geometría basta con modificar la condición de ruptura sobre  $sdf$  a un número negativo, con la precaución de siempre sumar una cantidad positiva a  $d$ , pues de lo contrario el trazado del rayo retrocedería. Fijando este valor a  $-1$  la variable *sombra* tendrá un valor en el rango  $[-1, 1]$  al salir del bucle, pero aún queremos obtener un valor entre  $[0, 1]$  para representar la cantidad de luz que recibe el punto. Para remapear *sombra* a este rango podemos usar la función `smoothstep(a, b, x)` de GLSL, que interpola  $x$  suavemente entre 0 y 1 en relación con los límites  $a$  y  $b$ . En particular la interpolación que se lleva a cabo es la de Hermite, haciendo que la transición entre distintos puntos de sombra no sea lineal y parezca más natural. Podemos ver el algoritmo final en la Figura 2.30 y los resultados que consigue en la Figura 2.38.

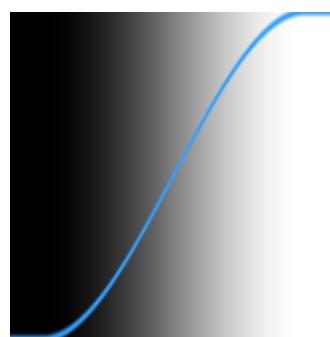


Figura 2.29.: Visualización de `smoothstep` [35]

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

---

### Algorithm 13: CalcularSombras

---

**Data:** punto  $p_0$ , dirección de luz  $l_i$ , tamaño de luz  $k$   
**Result:** Valor entre 0 y 1 representando la cantidad de sombra recibida en  $p$

```

sombra ← 1
d ← δ // distancia actual
for  $i \in \text{MAX\_ITERACIONES}$  do
    |  $p \leftarrow p_0 + d \cdot v$ 
    | sombra ←  $\min(res, k \cdot \frac{sdf}{d})$ 
    |  $sdf \leftarrow \phi(p)$ 
    |  $d \leftarrow d + |sdf|$ 
    | if  $sombra < -1 \text{ || } d > \text{MAX\_DISTANCIA}$  then
    |   | break
    | end
end
return  $\text{smoothstep}(-1, 1, sombra)$ 

```

---

Figura 2.30.: Cálculo de sombras suavizadas mejorado

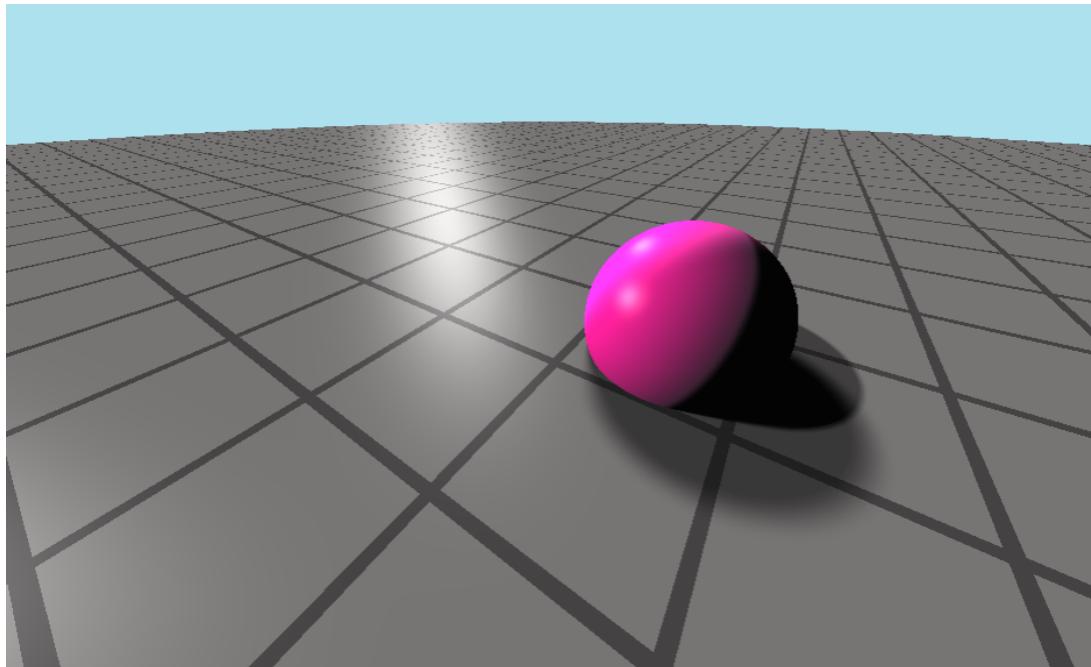


Figura 2.31.: Resultado final del cálculo de sombras

### 2.2.3. Oclusión ambiental

Al añadir sombras los objetos están mucho más integrados en la escena, pero todavía podemos conseguir un mayor grado de cohesión. En el estado actual de la escena aún hay puntos que no es convincente que reciban luz pero se encuentran totalmente iluminados. Un ejemplo son los puntos de intersección entre la esfera y el suelo. Uno esperaría que poca luz fuera capaz de alcanzar un espacio tan cóncavo, pues la propia geometría de la esfera y el suelo

ocluirían la luz. Este fenómeno recibe el nombre de **occlusión ambiental**, y de nuevo gracias a que estamos usando SDFs nos resultará muy fácil y computacionalmente barato simularlo.

Cuando se trabaja con geometría de polígonos, una de las técnicas más comunes es la occlusión ambiental del espacio de pantalla, o SSAO por sus siglas en inglés. En su versión más básica esta solución usa la información del fotograma actual para consultar por cada píxel el buffer de profundidad o *depth buffer* de los píxeles cercanos. Con esta información realiza una aproximación de las características de la geometría en ese entorno y deduce la cantidad de luz que debería poder pasar. El principal problema de esta y otras técnicas basadas en el espacio de pantalla es que al no usar la información real de la geometría, los resultados obtenidos varían según la orientación de la cámara, posición relativa de los objetos en pantalla, etc. Otro método basado en espacio de pantalla que pone de manifiesto este problema es el de los reflejos de espacio de pantalla o SSR, que suele ser usado para simular reflejos como los del agua o espejos en videojuegos. Al usar el mismo principio que SSAO, solo podrá reflejar correctamente los píxeles que estén dibujados en pantalla. Esta limitación hace que cuando un objeto oculta a otro este no se pueda reflejar correctamente y se generen reflejos erróneos como se muestra en la [Figura 2.34](#), o que si un objeto no aparece en pantalla directamente no sea reflejado, como se representa en la [Figura 2.37](#).



Figura 2.32.: SSR



Figura 2.33.: Raytracing

Figura 2.34.: Videojuego Ratchet & Clank: Una dimensión aparte usando SSR y raytracing  
[[36](#)]

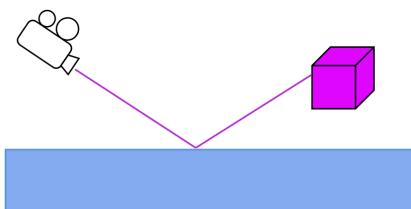


Figura 2.35.: Reflejo detectado

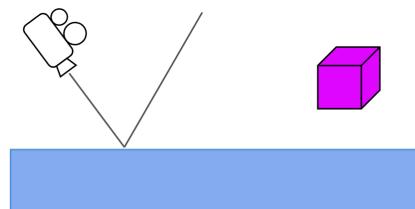


Figura 2.36.: Reflejo no detectado

Figura 2.37.: Reflejos en agua con SSR

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

La solución a estos problemas cuando se trabaja con vértices es el uso de técnicas más avanzadas y computacionalmente costosas como el *raytracing*. La buena noticia es que al estar usando SDFs nosotros podremos usar la información real de la geometría de nuestra escena. Obtendremos por tanto información más precisa, y además de forma muy barata, ya que requeriremos de muchas menos evaluaciones de la SDF que el algoritmo de *spheretracing*. La técnica que vamos a usar fue ideada por Alex Evans en 2006 [37], y se conoce como **oclusión ambiental muestreada por la normal**.

El método se basa en dado un punto  $p \in S_\phi$  evaluar la SDF en varios puntos del vector normal  $N_p$  a distancias  $d_i$  de  $p$  para obtener la información de la geometría cercana. Si en el entorno de  $p$  hay geometría que le esté obstruyendo la llegada de luz, en alguna de estas evaluaciones se obtendrá un valor menor que  $d_i$ , mientras que de lo contrario uno esperaría que

$$\phi(p + d_i N_p) = d_i,$$

ya que eso significaría que el punto más cercano a  $p$  de  $S_\phi$  es el propio  $p$ . Así, si hacemos  $M$  evaluaciones igualmente espaciadas a lo largo de  $N_p$ , consideraremos que el punto  $p$  no está ocluido si

$$\sum_{i=1}^M \phi\left(p + \frac{i}{M} N_p\right) - \sum_{i=1}^M \frac{i}{M} = 0.$$

Cuanto mayor sea este valor (no puede ser menor que 0 por definición de SDF) menos luz

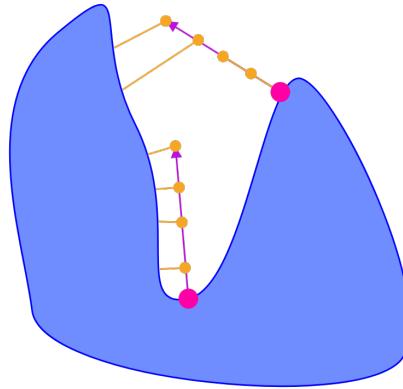


Figura 2.38.: Cálculo de oclusión ambiental muestreada por la normal

será capaz de alcanzar  $p$ . Así, podemos representar la cantidad de luz ocluida como

$$\sum_{i=1}^M \frac{1}{2^i} \cdot \left( \frac{i}{M} - \phi\left(p + \frac{i}{M} N_p\right) \right) \in [0, 1].$$

El hecho de que este valor esté acotado en  $[0, 1]$  viene de que suponemos que  $\|N_p\| = 1$ , de forma que

$$\phi\left(p + \frac{i}{M} N_p\right) \leq 1,$$

ya que siempre habrá algún punto a lo largo de  $N_p$  que esté a una unidad o menos de

---

**Algorithm 14:** DibujarSupercicie

---

**Data:** punto  $p$ , dirección del rayo  $v$ , distancia  $\phi(p)$   
 $L \leftarrow L_A + L_E$  // Radiancia final  
**for**  $i \in \{1, \dots, n\}$  **do**  
  // ...  
   $N_p \leftarrow CalcularNormal(p)$   
   $sombras \leftarrow CalcularSombras(p, l_i)$   
   $ao \leftarrow CalcularAO(p, N_p)$   
   $L \leftarrow L + S_i \cdot (f_{ra} + f_{rd} + f_{re}) \cdot sombras \cdot ao$   
**end**  
**return**  $L$

---



---

**Algorithm 15:** CalcularAO

---

**Data:** punto  $p$ , vector normal  $N_p$   
**Result:**  $ao \in [0, 1]$   
 $ao \leftarrow 1$   
 $increment \leftarrow 1/M$   
 $i \leftarrow increment$   
**while**  $i < 1$  **do**  
   $sdf \leftarrow \phi(p + iN_p)$   
   $ao \leftarrow ao - 2^{-iM} \cdot (i - sdf)$   
   $i \leftarrow i + increment$   
**end**  
**return**  $ao$

---

Figura 2.39.: Cálculo de oclusión ambiental

distancia de  $p$ : él mismo. Por otro lado, hemos usado la exponencial para dar más peso sobre el resultado final a aquellos puntos más cercanos a  $p$ .

Con esto ya podemos obtener la nueva versión del método DibujarSuperficie que tiene en cuenta la oclusión ambiental descrita en la Figura 2.39. En ella hemos introducido una pequeña optimización [38] cambiando el índice del bucle para no tener que calcular una división en cada iteración. Otra posible optimización sería sustituir la potencia por un flotante que fuéramos multiplicando por un factor menor que 1 en cada iteración. Finalmente, podemos apreciar los resultados obtenidos en la Figura 2.42, donde para valores tan pequeños de  $M$  como 2 o 4 ya conseguimos resultados más que convincentes.

## 2.3. Antialiasing

Vamos a introducir una última mejora en la forma en la que generamos la imagen. Un defecto típico en computación gráfica es el conocido como *aliasing*. Este se caracteriza por la presencia de dientes de sierra en líneas curvas o diagonales, y en nuestro caso se puede apreciar muy fácilmente en los bordes del cubo y en la cuadrícula del suelo en la distancia (Figura 2.46a). En el mercado actual existen multitud de alternativas como solución a este problema. Algunos ejemplos son FXAA, basado en espacio de pantalla, o SSAA y MSAA, que usan la técnica del *supermuestreo* o *supersampling* junto con filtros de suavizado. Nosotros

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

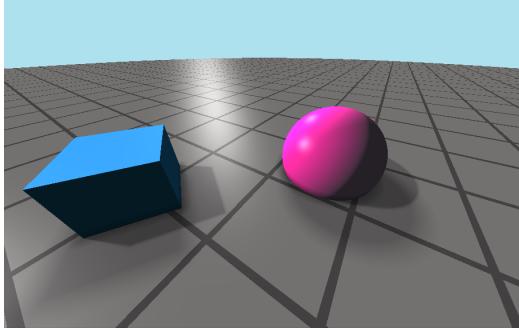


Figura 2.40.:  $M = 2$

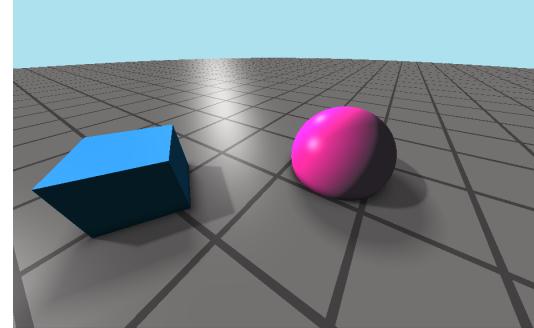


Figura 2.41.:  $M = 4$

Figura 2.42.: Resultado del cálculo de oclusión ambiental

implementaremos una versión de SSAA (*Supersampling Anti-Aliasing*), pero antes debemos entender por qué aparece el problema del *aliasing* en primer lugar.

Toda pantalla tiene resolución finita, y por tanto la definición con la que puede mostrar la información es limitada. Al realizar la proyección sobre la pantalla puede ocurrir que una primitiva no ocupe un píxel completo, y como cada píxel solo puede mostrar un único color hay que elegir algún criterio para determinar qué hacer en esos casos. El más común es considerar que el píxel pertenece a la primitiva si su proyección cubre el centro del píxel. En nuestro caso esto se traducía en trazar el rayo a través del centro del píxel en el algoritmo de *spheretracing*. Al hacer esta aproximación es cuando aparecen los dientes de sierra, pues a no ser que se trate de una línea totalmente vertical u horizontal, es como si intentásemos construir una rampa con escalones.

Lo cierto es que no podemos hacer desaparecer este problema, pues es algo intrínseco de la naturaleza discreta de las pantallas y los sistemas de muestreo. En nuestro caso esto último se traduce en que no podemos trazar infinitos rayos. No obstante, lo que sí podemos hacer es tratar de disimularlo. En lugar de tomar una decisión binaria de si un píxel debe ser de un color u otro podemos intentar tener en cuenta la aportación de otras primitivas que estén cercanas dentro del píxel aunque no ocupen su centro. Una primera idea podría ser que una vez asignado un color a un píxel se hiciera la media con sus píxeles vecinos para así generar una transición suave entre ellos. Sin embargo este acercamiento presenta dos grandes inconvenientes:

- Estaríamos perdiendo parte de la información original, y por ende, haciendo la imagen más borrosa.
- El responsable de asignar el color de cada píxel es una instancia del *fragment shader*, y como ya comentamos, los *shaders* son programas independientes y no tienen información sobre el resto de instancias. Por tanto este método sería de postprocesado, es decir, sería ejecutado una vez hubiera sido generada la imagen.

De esto podemos sacar la conclusión de que la solución debe ser local a cada píxel, y de ser posible que no conlleve la pérdida de información. La opción de hacer una media entre varias muestras de píxeles sigue pareciendo razonable, lo que nos lleva a la idea detrás de

SSAA: tomar más muestras dentro de cada píxel. Para ello, tendremos que trazar rayos por más puntos dentro del píxel, esto es, dibujar la imagen con mayor resolución, de donde viene el nombre de supermuestreo. El patrón en el que tomamos las nuevas muestras es de nuestra elección. En la Figura 2.43 se muestran algunos patrones comunes, de los cuales optaremos por el uniforme por su sencillez y porque proporciona resultados bastante buenos en general. El número de evaluaciones también está a nuestra elección, pero no hay que olvidar el factor del rendimiento, ya que usando este patrón el número de rayos crece exponencialmente por cada nuevo nivel adicional de precisión.

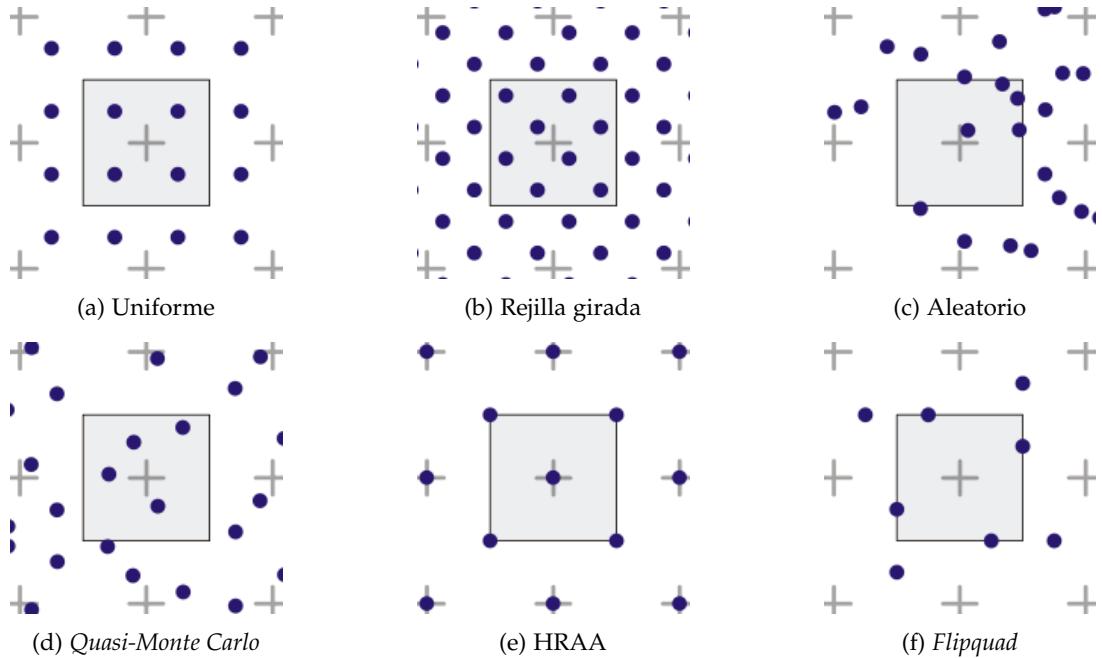


Figura 2.43.: Patrones de supermuestreo [39]

Modificar por dónde pasan los rayos dentro de cada píxel equivale a cambiar cómo calculamos los uv. Llamaremos a partir de ahora  $AA$  al factor de escalado de la imagen, de forma que por cada píxel haremos pasar  $4^{AA}$  rayos. Para hallar los nuevos puntos de muestra bastará con subdividir el píxel en  $AA^2$  cuadrantes y quedarnos con el centro de cada uno. Si recordamos que `gl_FragCoord` devuelve las coordenadas del centro del píxel, que el ancho y alto del píxel es una unidad, y que tenemos que hacer  $AA$  subdivisiones en cada eje, es evidente que podemos obtener los nuevos puntos de muestra desplazando el origen usual del píxel la cantidad

$$\text{offset}_{m,n} = (m + 1/2, n + 1/2) \cdot \text{subdivision} - \left( \frac{\text{lado}}{2}, \frac{\text{lado}}{2} \right) = \frac{(m + 1/2, n + 1/2)}{AA} - \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

donde  $m, n \in \{0, \dots, AA - 1\}$ .

Para trasladar esto a nuestro *fragment shader* tan solo habrá que realizar un doble bucle e ir sumando el color obtenido por *spheretracing* en una variable que luego ponderaremos

## 2. Algoritmos de visualización de SDFs

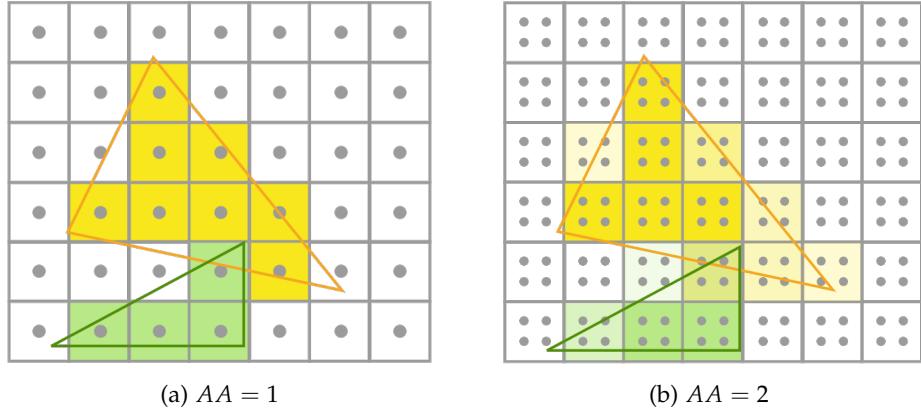


Figura 2.44.: Antialiasing para diferentes valores de  $AA$

por el número total de muestras,  $AA^2$ . La nueva versión del *fragment shader* se describe en la Figura 2.45.

---

### Algorithm 16: Fragment Shader

---

**Data:** posición del observador  $c_0$ , punto de atención  $l$   
**Result:** Terna RGBA con el color asignado al píxel actual  
 $color \leftarrow (0, 0, 0)$   
**for**  $m \in \{0, \dots, AA - 1\}$  **do**  
  **for**  $n \in \{0, \dots, AA - 1\}$  **do**  
     $offset \leftarrow \frac{(m, n)}{AA} - (0.25, 0.25)$   
     $uv \leftarrow 2 \cdot \frac{(gl\_FragCoord.xy + offset) - 0.5 \cdot u\_resolution.xy}{u\_resolution.y}$   
     $r_d \leftarrow (f_1 | f_2 | f_3) \cdot \text{normalizar}((uv.xy, -1))$   
     $color \leftarrow color + \text{spheretracing}(c_0, r_d)$   
  **end**  
**end**  
 $color \leftarrow color / AA^2$   
 $gl\_FragColor \leftarrow (color, 1)$

---

$n \setminus m$	0	1	2
2	•	•	•
1	•	•	•
0	•	•	•

Figura 2.45.: Cuerpo del método `main` del *fragment shader*

Es evidente que  $AA = 1$  equivale a no aplicar *antialiasing*, pero tendrá el efecto de desplazar la imagen medio píxel hacia abajo y a la izquierda, pues el único de cada píxel pasará por su esquina inferior. Por tanto, aunque no sea totalmente necesario, se puede añadir una comprobación para calcular los  $uv$  como hacíamos originalmente en este caso. En la Figura 2.46 podemos ver que la pérdida de rendimiento no es en vano y obtenemos una imagen mucho más suave que la original. Sin embargo, no conviene tomar un valor de  $AA$  mayor que 3, pues generará mucha sobrecarga y la mejora no es muy apreciable. Finalmente y para concluir la sección, en el Apéndice B podemos ver la construcción que hemos hecho de la escena paso a paso, viendo el efecto que ha tenido en el aspecto final cada técnica que hemos ido añadiendo.

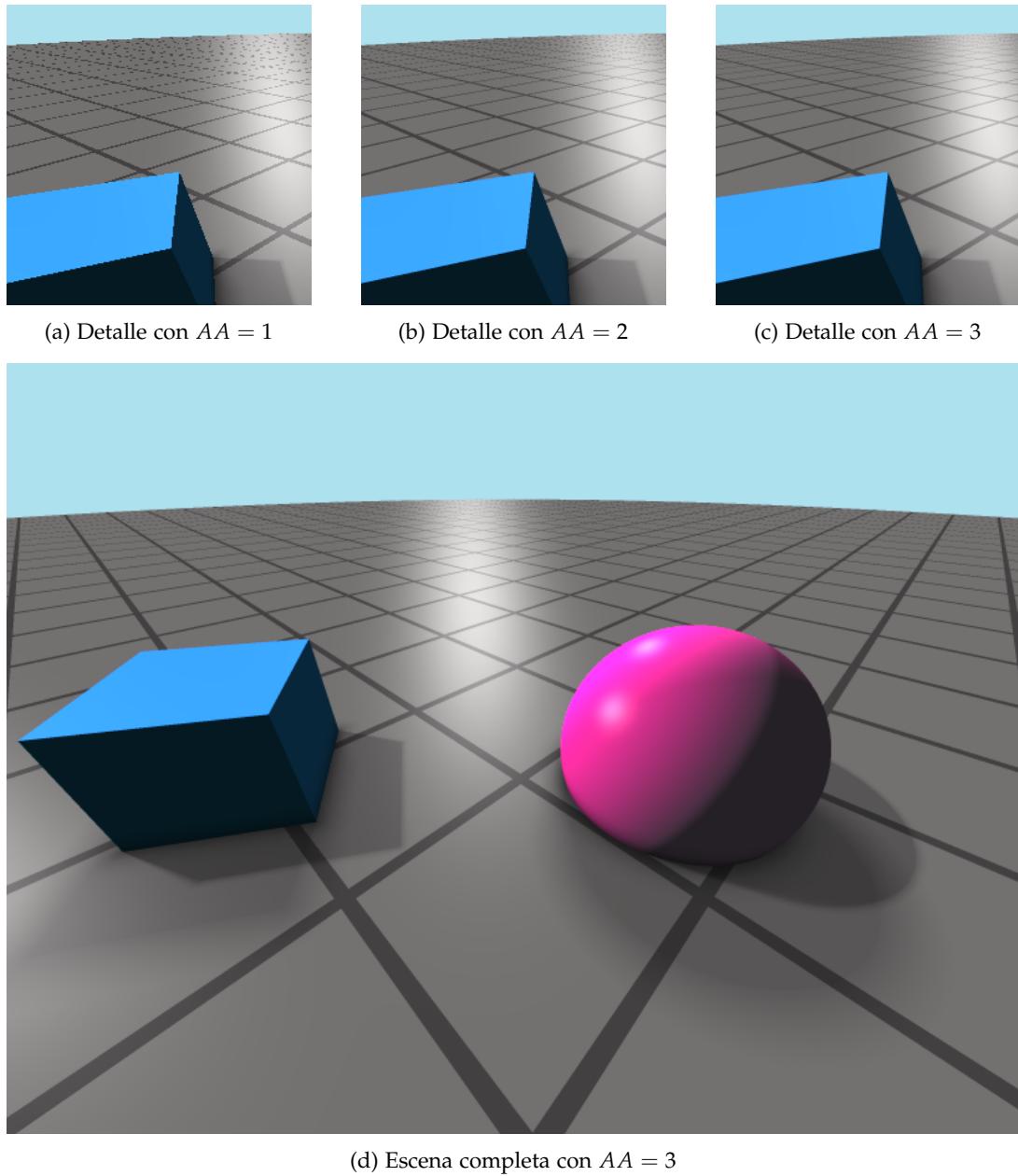


Figura 2.46.: Resultados de añadir *antialiasing*



### 3. Desarrollo e implementación

En esta sección veremos cómo se han usado las técnicas y conceptos presentados para la realización de una aplicación web que permita al usuario crear e interactuar superficies a través de SDFs, ecuaciones implícitas y paramétricas. El motivo de desarrollar una aplicación web es que sea accesible al mayor número de usuarios y de la forma más cómoda posible. Se ha decidido usar **React** para esta tarea, una biblioteca de JavaScript (y TypeScript) para interfaces de usuario. Es una librería muy popular, y por tanto muy bien documentada y con muchos paquetes de la comunidad disponibles. Las principales características de React son:

- Utiliza la **extensión de sintaxis JSX**, la cual permite escribir código JavaScript como si se tratase de HTML o XML. Se pueden usar expresiones JSX dentro de bucles `for` o entornos condicionales `if`, y dentro de ellas se pueden agregar expresiones JS entre corchetes.
- Se basa en **componentes autocontenidos y reutilizables**. La forma más común actualmente de declarar componentes es a través de funciones que reciben argumentos, o `props`, y devuelven una expresión JSX. Todos los componentes reciben el parámetro `children` por defecto, contenido la expresión JSX de los componentes que se encuentren entre las etiquetas de apertura y cierre del componente. El flujo de datos es unidireccional del componente padre a sus hijos.
- Utiliza un **DOM virtual** para solo actualizar los componentes cuyo estado o `props` han cambiado. En componentes funcionales, la manera de indicar variables que desencadenen un re-renderizado al ser modificadas es a través de `hooks`. En general, estos son funciones de JS que permiten crear y acceder al estado y ciclos de vida de React. Los principales son `useState`, usado para declarar una variable junto con su `setter`, y `useEffect`, que permite ejecutar código cuando se actualice el componente. Si solo se quiere reaccionar a cambios de ciertos `hooks` se puede indicar en las dependencias.

Un ejemplo de uso básico de JSX, componentes funcionales y manejo de estado sería el siguiente:

---

```
function Tarjeta(props) {
  return (
    <div>
      {props.children}
      {props.nombre}
    </div>
  );
}

function Main() {
  const [miNombre, setMiNombre] = React.useState("Daniel");

  useEffect(()=>{
```

### 3. Desarrollo e implementación

```
        console.log("Solo me ejecuto una vez al inicio");
    }, []);

useEffect(()=>{
    console.log("Has cambiado el nombre");
}, [miNombre]);

return (
<TarjetaNombre nombre={miNombre}>
    <h1>Hola, mi nombre es</h1>
</TarjetaNombre>
);
}
```

---

Las principales ventajas que nos aportará el uso de React son las siguientes.

- La aplicación puede ser ejecutada en cualquier navegador, haciendo que sea mucho más accesible.
- Está basada en componentes modulares, lo que la hace escalable. Además, debido a su popularidad, hay una infinidad de librerías de terceros a nuestra disposición, ya sea específicas de React o de JavaScript.

La aplicación consta de tres componentes principales. Dos de ellos son con los que interacciona el usuario, uno en la que se le permite crear primitivas introduciendo directamente una SDF, ecuaciones implícitas o paramétricas, y otro que contiene un editor de nodos en forma de árbol para aplicar operaciones sobre las primitivas creadas y guardar los resultados obtenidos. El último componente actúa como gestor de almacenamiento y estado de la aplicación. A continuación estudiamos cada componente por separado describiendo los subcomponentes que la conforman y cómo estos interaccionan entre sí.

## 3.1. Gestor de estado

Empezamos hablando sobre el gestor de estado, ya que el resto de componentes dependen y se comunican entre sí a través de este. Para esta tarea se ha hecho uso de [Zustand](#), un paquete de gestión de estado para JavaScript. Con él se pueden crear contenedores formados por atributos y métodos para gestionarlos. Cuando un componente quiere acceder a un contenedor, basta con que se suscriba a sus cambios a través del *hook* que proporciona Zustand: `useStore`. Nosotrosaremos uso de dos contenedores, uno para las primitivas definidas y otro para gestionar el estado del editor de nodos. De este último hablaremos en la siguiente sección, pues solo es usado por el componente del editor de nodos. Sin embargo el contenedor de primitivas es usado tanto por el editor de nodos como por el creador de primitivas, ya que ambos deben leer de él para saber cuáles son las primitivas existentes y pueden escribir para crear una nueva primitiva. Este contenedor tiene la estructura mostrada en la [Figura 3.1](#). En particular, la información se almacena a través del tipo `Primitive`, el cual tiene los siguientes atributos.

- `id`: identificador único obtenido aplicando normalización NFD al nombre de la primitiva que introduce el usuario.

- name: nombre que otorga el usuario a la primitiva y será mostrado por pantalla.
- inputMode: indica el método que usó el usuario para definir la primitiva, ya sea introduciendo directamente la SDF con sintaxis GLSL, la ecuación implícita o la parametrización racional.
- input: cadena de texto con la ecuación introducida por el usuario. En el caso de las parametrizaciones se guarda por separado cada ecuación.
- sdf: función distancia con signo obtenida tras procesar la entrada del usuario.
- parameters: parámetros asociados a la primitiva definidos por el usuario, que podrán ser usados en el editor de nodos. A su vez, el tipo Parameter contiene el símbolo del parámetro presente en la expresión, una etiqueta para ser mostrado en el editor de nodos, y si su valor debe estar acotado en cierto rango.
- fHeader: cabecera de la función GLSL asociada a la primitiva. La función recibe como nombre el id, y recibe como argumentos el punto donde se quiera evaluar la SDF y los definidos por el usuario.
- material: contiene las componentes especular, difusa y ambiental y el coeficiente de brillo del material asociado a la primitiva.

**Ejemplo 3.1.** Para definir una esfera centrada en el origen mediante su ecuación implícita y poder controlar su radio en el editor de nodos, se crearía la siguiente primitiva.

---

```
{
  id: "sphere",
  name: "Sphere",
  inputMode: InputMode.Implicit,
  input: ["x^2 + y^2 + z^2 - r", "", ""],
  parsedInput: "length(p)-r",
  parameters: [
    { symbol: "r", label: "Radius", defaultVal: 1.0, type: "range", range:[0,100] }
  ],
  fHeader: "sphere(vec3 p, float r)",
  material: {
    specular: [1.0, 1.0, 1.0],
    diffuse: [0.0, 1.0, 0.0],
    ambient: [0.2, 0.2, 0.2],
    smoothness: 10.0
  }
}
```

---

Las principales ventajas de la elección de Zustand es que se trata de una biblioteca de tamaño muy pequeño, y al estar basada en *hooks* solo actualizará los componentes que dependan de los cambios relevantes en el estado, haciendo la aplicación más eficiente. Además, al ser la única forma de acceder a los datos a través de los métodos del contenedor, es más fácil debugear y evitar que haya modificaciones inesperadas desde algún componente externo. Por último, es muy sencillo almacenar el estado del contenedor en el almacenamiento local, de forma que el usuario pueda disponer de los datos guardados en sesiones anteriores.

### 3. Desarrollo e implementación

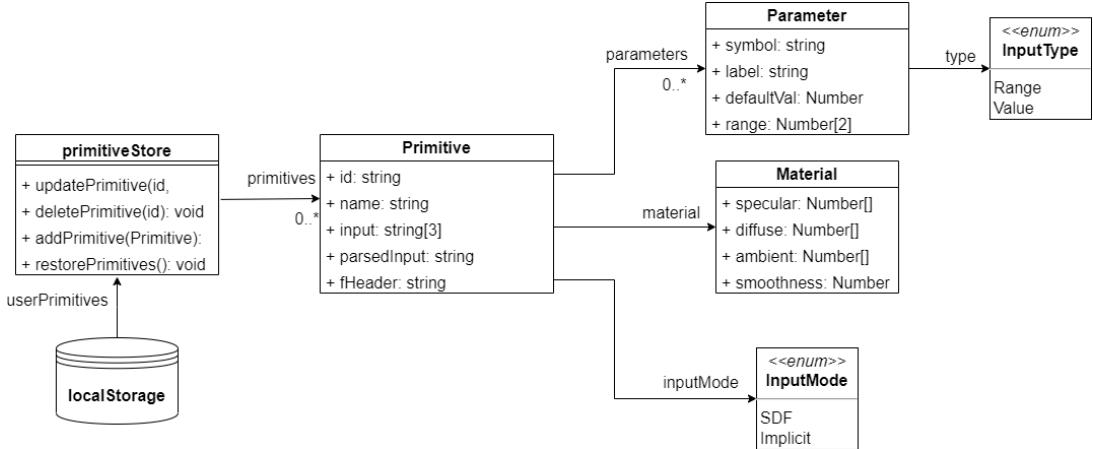


Figura 3.1.: Diagrama de clases del contenedor de primitivas

## 3.2. Editor de nodos

Este componente se basa en [React Flow](#), un paquete muy completo que permite la implementación de diagramas interactivos basados en nodos. Cada nodo tendrá cierto número de puertos de entrada (solo permite la conexión con un nodo) y uno de salida (permite conectarse a varios nodos). Se nos permite declarar tipos de nodos según nuestras necesidades. Nosotros usaremos dos categorías principales de nodos.

El primer tipo es el **nodo de primitiva**. Es el más sencillo y permite seleccionar una primitiva entre las guardadas para ser conectada a uno o varios nodos de operaciones.

Los **nodos de operaciones** implementan las operaciones explicadas en la [Sección 1.3](#) y las aplican a las primitivas que reciben por sus puertos de entrada. A su vez hay cuatro tipos diferentes de estos nodos, uno por cada tipo de operación. Los nodos de operaciones de transformación, deformación y repetición tienen un único puerto de entrada, pues son operadores unarios. El nodo booleano sin embargo es capaz de recibir un número arbitrario de primitivas, ya que aunque los operadores booleanos son binarios, si se quiere realizar una misma operación de forma reiterada sobre varias primitivas puede ser muy tedioso. Así, si un nodo booleano recibe las primitivas  $A_i$  con  $i = 1, \dots, n$ , irá aplicando la operación de forma sucesiva sobre el resultado anterior según el orden de conexión. Por ejemplo, para la unión tendríamos

$$\bigcup_{i=0}^n A_i = A_n \bigcup (A_{n-1} \bigcup (\dots A_2 \bigcup A_1)).$$

La estructura de todos los nodos es similar. Todos cuentan con un encabezado que muestra de qué tipo son, un desplegable para elegir la primitiva u operación a usar seguido de un área con controles para los parámetros que puedan tener, un lienzo para mostrar el resultado de las operaciones aplicadas hasta el momento, y un botón para contraer el nodo ocultando toda la información excepto el encabezado. Debido a esto tiene sentido tener un componente nodo general que se pueda adaptar a diferentes tipos de uso. El encabezado y elementos del desplegable se pasan fácilmente a través de props. Sin embargo para los parámetros sí que

dependen fuertemente del tipo de nodo en particular, y serán implementados por cada tipo de nodo por separado y pasado al general a través del parámetro `children`.

De manera interna React Flow usa Zustand para almacenar la información relativa a los identificadores de los nodos, sus posiciones, conexiones, etc. Nosotros extenderemos esta funcionalidad para poder usar el modelo de generación de superficies en forma de árbol presentado en la [Sección 1.3](#). Para ello bastará con almacenar para cada nodo la información relativa a su SDF actual, sus entradas y sus nodos hijo (padres), así como funciones para gestionar los nodos (añadir, eliminar, actualizar, conectar, etc.). Mediante estas operaciones, cuando un nodo detecta una nueva conexión en algún puerto de entrada se leen las SDFs de los nodos conectados, y junto con los propios parámetros del nodo se actualiza la SDF del nodo. Cuando se elimina alguna conexión en el caso de los nodos diferentes al booleano simplemente la SDF pasa a ser indefinida, ya que solo tienen una entrada. En el caso del booleano habrá que tener en cuenta si todavía queda alguna entrada, reorganizar las restantes para que no haya puertos vacíos distintos al último, y reducir el número de puertos a uno menos. Para esto, se detecta la posición del puerto que se ha eliminado y se modifican las conexiones siguientes para cambiar su puerto al inmediatamente anterior.

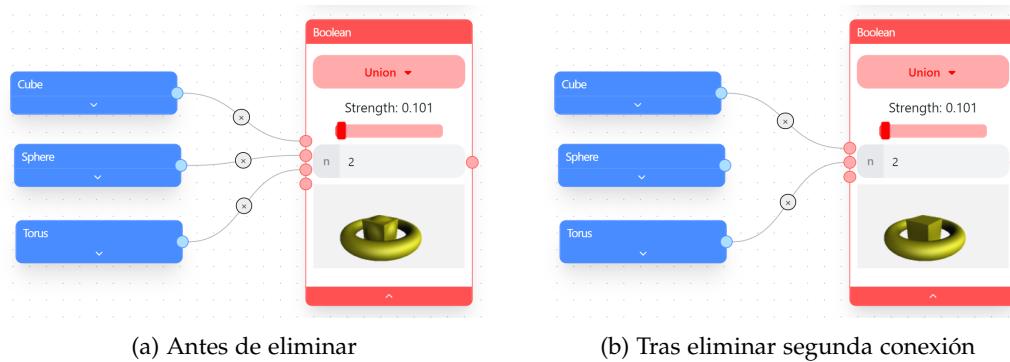


Figura 3.2.: Ejemplo de eliminación de conexión en nodo booleano

Para poder visualizar los efectos que tienen las acciones del usuario cada nodo tiene una instancia de un componente `Shader`. Este componente consta de un lienzo creado con `gl-react` y que recibe como parámetro una SDF para renderizarla usando `spheretracing` como se explicó en la [Sección 2.1](#), aplicando los algoritmos de iluminación y sombras de la [Sección 2.2](#). Se pasan los siguientes uniforms al `fragment shader` del lienzo:

- Material de la primitiva con la estructura mostrada en la [Figura 3.1](#) a través de varios `vec3` y `float`.
- Resolución del lienzo en píxeles como un `vec2`.
- La dirección, color y tamaño de las luces como `float[]` agrupados de tres en tres en el caso de la dirección y el color. Dado que GLSL solo admite arrays de longitud fija, se ha fijado el número de luces en cuatro, aunque por defecto solo se utilizan dos al igual que en el ejemplo de la [Sección 2.2](#),
- Dos ángulos como un `vec2` y una distancia como `float` actuando como coordenadas esféricas del observador respecto al origen. Ambos parámetros se controlan por el usuario a través del ratón.

### 3.3. Panel de primitivas

En esta sección el usuario será capaz de visualizar y modificar las primitivas existentes, así como crear nuevas. Para ello se presenta una tabla que muestra la información más relevante de las primitivas presentes en el contenedor de Zustand, incluyendo en cada fila botones para editar o eliminar cada primitiva. En el caso de que se desee eliminar alguna, bastará con llamar a la función correspondiente del contenedor. Si en cambio se desea realizar una modificación, se abrirá un cuadro de diálogo con toda la información de la primitiva, incluyendo los parámetros y ecuaciones que introdujo el usuario en el momento de la creación (razón por la cual guardábamos esta información en el contenedor) y el método de definición de la superficie (a través de una ecuación implícita, parametrización o SDF). En la [Figura 3.3](#) se puede observar un ejemplo de uso del panel de primitivas. En todo momento se comprueba que el usuario esté introduciendo información válida, y en caso contrario se le notifica del error en el campo correspondiente. Algunas comprobaciones de vital importancia son las siguientes.

- Dado que el identificador se calcula a partir del nombre que introduzca el usuario, no se podrá elegir ningún nombre cuyo identificador asociado ya esté asignado a otra primitiva diferente.
- No se pueden utilizar parámetros que no estén correctamente definidos en la tabla correspondiente. De darse el caso, se le indicará al usuario la ecuación que contiene el error y el símbolo en cuestión.
- Cuando se introduce directamente la SDF mediante sintaxis GLSL, la expresión debe ser sintácticamente correcta. En caso de error, para ser capaces de identificar su motivo deberemos instalar un centinela o Visitor en el componente Shader, de forma que cuando este detecte un error de compilación sea capaz de capturarlo y procesarlo para transmitirlo de forma natural al usuario.
- Al introducir una ecuación implícita, dado que para calcular la SDF se utiliza la [Proposición 1.2](#), deberemos comprobar que la norma del gradiente no es cero.
- Se usan las variables adecuadas en cada caso:  $x, y, z$  en el caso de ecuaciones implícitas y  $s, t$  para las parametrizaciones.

En la siguiente sección se verá con más detalle como se realizan las comprobaciones relativas a la validez de las ecuaciones.

Una vez toda la información introducida es válida, se le permite al usuario pulsar el botón de guardar. Esta acción hará que se llame a la función del contenedor de primitivas correspondiente, haciendo que se sobreesciba la primitiva original y se reflejen los cambios tanto en el editor de nodos como en la tabla de primitivas. Por último, en caso de que el usuario quiera crear una primitiva, el funcionamiento interno es el mismo, con la única excepción de que el cuadro de dialogo aparecerá completamente vacío.

### 3.4. Librería de polinomios multivariable

Si bien tenemos a nuestra disposición un gran número de librerías externas, en el momento de realización de la aplicación no se encontró ninguna opción viable para trabajar con

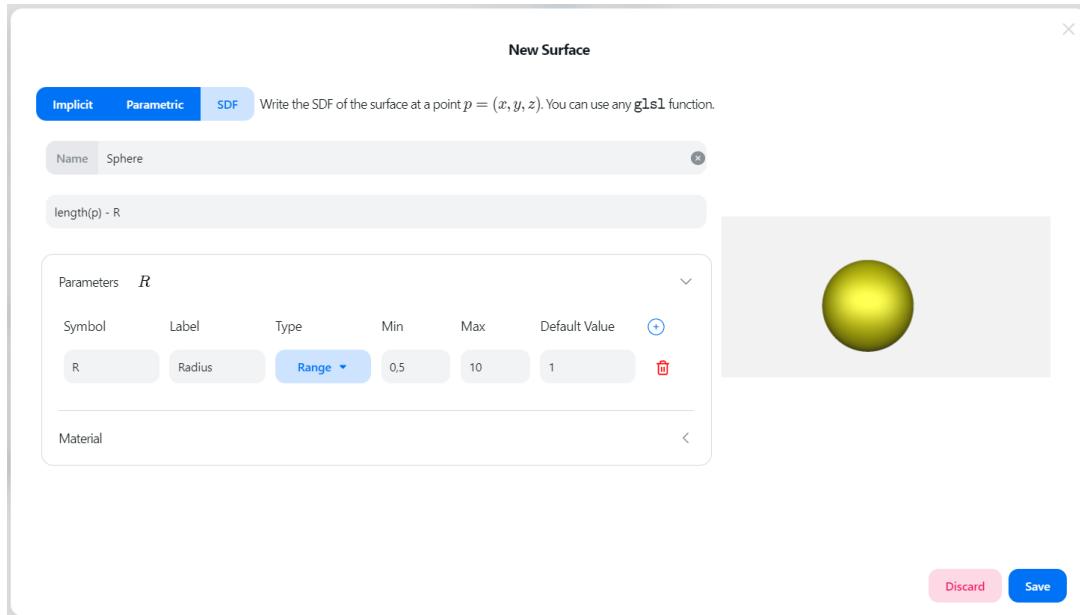


Figura 3.3.: Creación de una esfera usando el panel de primitivas

polinomios multivariable en JavaScript de forma nativa. Como alternativas se barajó el uso de la API de [Geogebra](#) o realizar llamadas a código Python que usara [SageMath](#). Sin embargo, por motivos de rendimiento y completitud de este trabajo, se decidió desarrollar una librería nativa en TypeScript para el manejo de polinomios en varias variables, cálculo de bases de Gröbner e implicitación bajo el nombre de `multivariate-polynomial`. El código completo se encuentra disponible en [GitHub](#), junto a su documentación, ejemplos de uso y tests usados. La librería consta de tres clases principales, cuya estructura se muestra en la [Figura 3.4](#) y pasamos a estudiar a continuación en detalle.

### 3.4.1. Clase Monomial

Representa un monomio en varias variables a través de los siguientes tres atributos.

- `coef`: el coeficiente del monomio. En la primera versión implementada, este atributo estaba representado mediante el tipo primitivo de JavaScript `number`, el cual permite representar flotantes con una precisión similar al tipo `double` de Java o C#. Esta elección hacía que en ocasiones hubiera errores en los cálculos debido a la falta de precisión que este tipo de representaciones acarrean, haciendo que por ejemplo al calcular una base de Gröbner no se pudieran reducir los términos líder correctamente. Por este motivo se decidió usar la librería `ExactNumber` [40], la cual representa valores racionales como números decimales periódicos puros, permitiendo realizar operaciones elementales sin pérdida de precisión.
- `exp`: el exponente del monomio representado como un `Float64Array`, es decir, un array de flotantes de 64 bits. Se utilizó esta representación en lugar de un array convencional del tipo `number[]` debido a que al conocer de antemano el tipo de los elementos del

### 3. Desarrollo e implementación

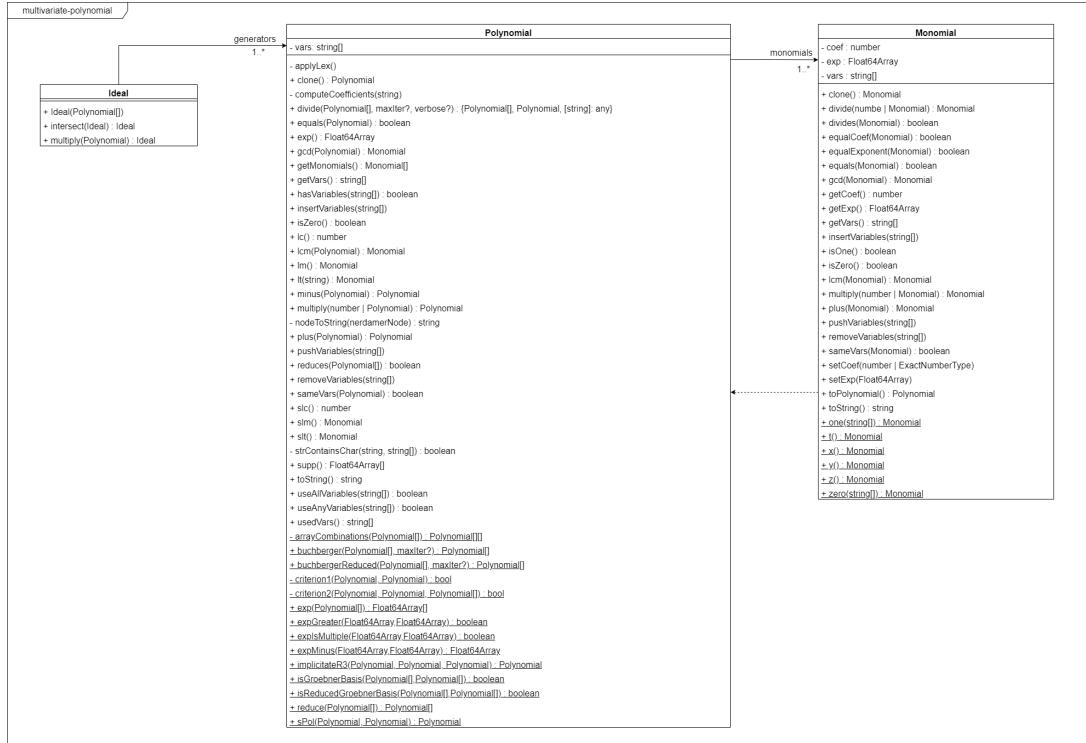


Figura 3.4.: Diagrama de clases de la librería `multivariate-polynomial`

array (flotantes de 64 bits), tanto la escritura como la lectura son mucho más rápidas. Esto no ocurre con `number[]`, ya que `number` representa cualquier tipo de número.

- `vars`: variables del ideal al que pertenece el monomio representadas como `string[]`. El orden utilizado es *lex* en función del orden que ocupan las variables en el array.

A continuación se presentan los métodos que presenta la clase, así como ejemplos de su uso.

El **constructor** de la clase tiene valores por defecto para cada atributo pudiendo el usuario indicar los que considere necesarios. El valor por defecto de los atributos son los del monomio nulo con variables usando las variables  $t \leq x \leq y \leq z$ . Para comodidad del usuario, tanto en el constructor como en otros métodos se permite usar el tipo `number`, el cual será convertido internamente al tipo `ExactNumberType`. Además, se incluye un constructor de copia profunda y métodos estáticos para crear de forma rápida los monomios nulo, unidad,  $t$ ,  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Todos los atributos cuentan además con sus respectivos *getters* y *setters*.

---

```

var m = new Monomial(2, [2,0,1,1], ["t", "x", "y", "z"]) // $2t^2yz en Q[t,x,y,z]
var one = Monomial.one()
var x = Monomial.x()

x.getCoef() // 1
m.getExp() // [2,0,1,1]

```

---

Las operaciones entre monomios son sencillas de implementar, pues requieren una manipulación básica de los atributos `coef` y `exp` junto a una comprobación de la igualdad de los

atributos `vars` para comprobar que trabajamos con monomios del mismo anillo. Dado que JavaScript no permite la sobrecarga de operadores, la única forma de usar las operaciones es a través de métodos de instancia que devuelvan un nuevo monomio. Se implementan las siguientes operaciones:

- Suma: tras comprobar que el exponente es el mismo, basta con sumar los coeficientes.
- Multiplicación: se permite multiplicar tanto por un monomio como por un número. Si se pasa un número, bastará con multiplicarlo con el coeficiente del monomio. Si en su lugar se pasa un monomio se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes componente a componente.
- Resta: se implementa como una suma junto a una multiplicación por  $-1$ .
- División: similar a la multiplicación, pero en su lugar los coeficientes se dividen y las componentes de los exponentes se restan. Antes de llevarla a cabo se debe comprobar si el monomio por el que se va a dividir no es nulo y cada componente de su exponente es menor a la del numerador.
- Mínimo común múltiplo: dado que estamos en  $\mathbb{Q}$ , el coeficiente del mínimo común múltiplo siempre será uno. En cuanto al exponente, basta con tomar el máximo de los exponentes de cada monomio en cada componente.
- Máximo común divisor: igual que el mínimo común múltiplo pero tomando el mínimo de las componentes de los exponentes.

---

```
var resta = m.minus(one)           // 2t^2yz - 1
var mult = m.multiply(x)          // 2t^2xyz
var div  = m.divide(Monomial.t()) // 2tyz
var lcm  = m.lcm(x)              // t^2xyz
```

---

Por último, otros métodos de interés son los que permiten modificar las variables del anillo del monomio, así como obtener una instancia de un polinomio formado por el monomio en cuestión. También existen funciones para realizar diferentes comprobaciones sobre uno o varios monomios. Estas son usadas internamente para realizar comprobaciones previas antes de realizar determinadas operaciones, pero también están a disposición del usuario. Ejemplos de estas comprobaciones son si un monomio es nulo, si uno divide a otro, dos tienen el mismo exponente, mismas variables, etc.

---

```
m.divides(x)                  // false
x.pushVariables(["w"])         // x.getVars() -> ["t", "x", "y", "z", "w"]
x.insertVariables(["s"])        // x.getVars() -> ["s", "t", "x", "y", "z", "w"]
```

---

### 3.4.2. Clase Polynomial

Siguiendo la Def. 1.23, podemos representar un polinomio como una colección de monomios, que representaremos mediante el atributo `monomials` del tipo `Monomial[]`. La posición de los monomios en el array será en todo momento siguiente el orden *lex* para así simplificar la implementación de los métodos de instancia. Al igual que con los monomios, tendremos un atributo `vars` indicando las variables del anillo al que pertenece el polinomio, que será el

### 3. Desarrollo e implementación

mismo que el de los monomios que lo conforman. Así, el constructor de la clase `Polynomial` recibirá una lista con las variables del anillo y otra con los monomios. Se comprobará que todos los monomios pertenecen al mismo anillo, en cuyo caso serán ordenados usando `lex` y el atributo `vars` toma el valor del atributo homónimo de cualquier monomio pasado como argumento. De no pasarse ningún monomio, el polinomio será inicializado con el monomio nulo y las variables  $t \leq x \leq y \leq z$ .

Además de inicializar un polinomio mediante una colección de monomios creados individualmente, se permite al usuario pasar una cadena de texto del polinomio que quiere crear. Dado que internamente necesitamos trabajar con una lista de monomios, tendremos que extraer los monomios de la expresión. Para ello empezaremos parseando el `string` a un formato estructurado usando la librería de cálculo simbólico Nerdamer [41]. Esta librería nos permite trabajar con los polinomios de manera básica, pero operaciones más avanzadas como el algoritmo de división no pueden ser implementadas, entre otros motivos porque Nerdamer no es compatible con el uso de órdenes monomiales. Por tanto solo usaremos esta librería para parsear, simplificar y convertir a nuestra representación la expresión que introduce el usuario. Nerdamer simplifica por defecto la expresión del polinomio que le pasemos como producto de sus raíces. Nosotros no queremos esto, sino que nos lo muestre como una suma de monomios, lo cual podemos conseguir con el método `expand()`. Tras esto podemos obtener la representación en árbol con notación polaca inversa (RPN) de la expresión parseada usando `tree()`.

Una vez obtenida la estructura de árbol es sencillo localizar los monomios, pues estos solo pueden estar separados por un símbolo de adición o sustracción. Así, recorriendo el árbol en preorden, cuando encontramos un nodo que no tenga ninguno de estos símbolos como descendiente se tratará de un monomio. Una vez aislado el nodo que representa al monomio podemos obtener la expresión aislada del monomio recorriendo el subárbol en preorden.

Dado que las variables del anillo siempre son pasadas al constructor del polinomio, solo necesitamos extraer el coeficiente y exponente de cada monomio encontrado en el árbol. Como la expresión resultado de expandir cada nodo de un monomio siempre tendrá la forma `[coeficiente][variables]`, podemos simplemente recorrer la expresión hasta detectar un carácter no numérico, el cual marcará la división entre el coeficiente y las variables. Con esta información ya podemos crear la instancia de cada monomio que conforma al polinomio, pudiendo obtener su exponente usando el método `deg` de Nerdamer para cada variable en la expresión obtenida en el orden indicado por las variables pasadas por el usuario. A lo largo de este proceso tendremos que haber tenido cuidado de realizar varias comprobaciones de errores, como que se detecte alguna variable que no pertenece al anillo del polinomio, o casos especiales, como que el coeficiente sea uno o menos uno y no aparezca en la expresión. Como último paso deberemos aplicar el orden `lex` a los monomios encontrados. La manera más sencilla es a través del método `sort` de JavaScript, el cual recibe un comparador binario como argumento. En nuestro caso este comparador recorrerá simultáneamente los exponentes de cada monomio hasta encontrar una mayor que otra, devolviendo el monomio al que pertenece. Observamos que no puede ocurrir que dos monomios tengan el mismo exponente, ya que si no Nerdamer los habría simplificado en un único monomio.

La implementación de la mayoría de las operaciones básicas es sencilla una vez se ha conseguido la representación como lista de monomios, pues la gran mayoría se basan en las operaciones ya implementadas para monomios.

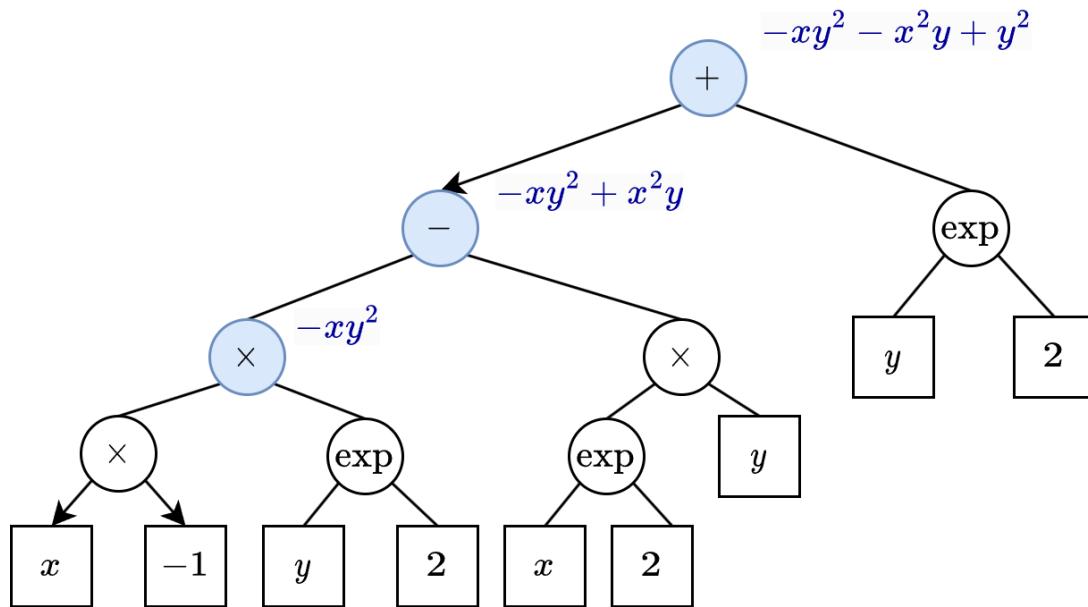


Figura 3.5.: Ejemplo de búsqueda de monomios en el árbol

- Suma: para cada monomio se comprueban los siguientes de la lista cuyo exponente es el mismo mientras estos se van sumando y añadiendo a una lista auxiliar para asegurarnos de que no vuelvan a ser tenidos en cuenta. Si el monomio suma no es cero, se añade al polinomio resultado.
- Multiplicación: al igual que con los monomios, este operador admite como parámetro tanto un number como una instancia de `Polynomial`. En el caso de que el argumento sea un escalar, solo hay que multiplicar cada monomio por él, teniendo en cuenta que si es cero podemos devolver directamente el polinomio nulo. En cuanto a la multiplicación por otro polinomio, hay que realizar un doble bucle multiplicando cada monomio de un polinomio por todos los del otro. En este proceso pueden generarse varios monomios con el mismo exponente aunque ningún polinomio de la multiplicación los tuviese, como sería el caso de la multiplicación

$$(xy - ty) \cdot (t + x) = txy + x^2y - t^2y - txy = x^2y - t^2y.$$

Los momomios con mismo exponente serán por tanto sumados y añadidos al resultado si son distintos de cero.

### 3.4.3. Clase Ideal



## **4. Pruebas y rendimiento**



## **5. Conclusiones y líneas futuras**



## **A. Resultados de operaciones sobre SDF**

TODO



## B. Resultado de técnicas empleadas al enderezar SDFs

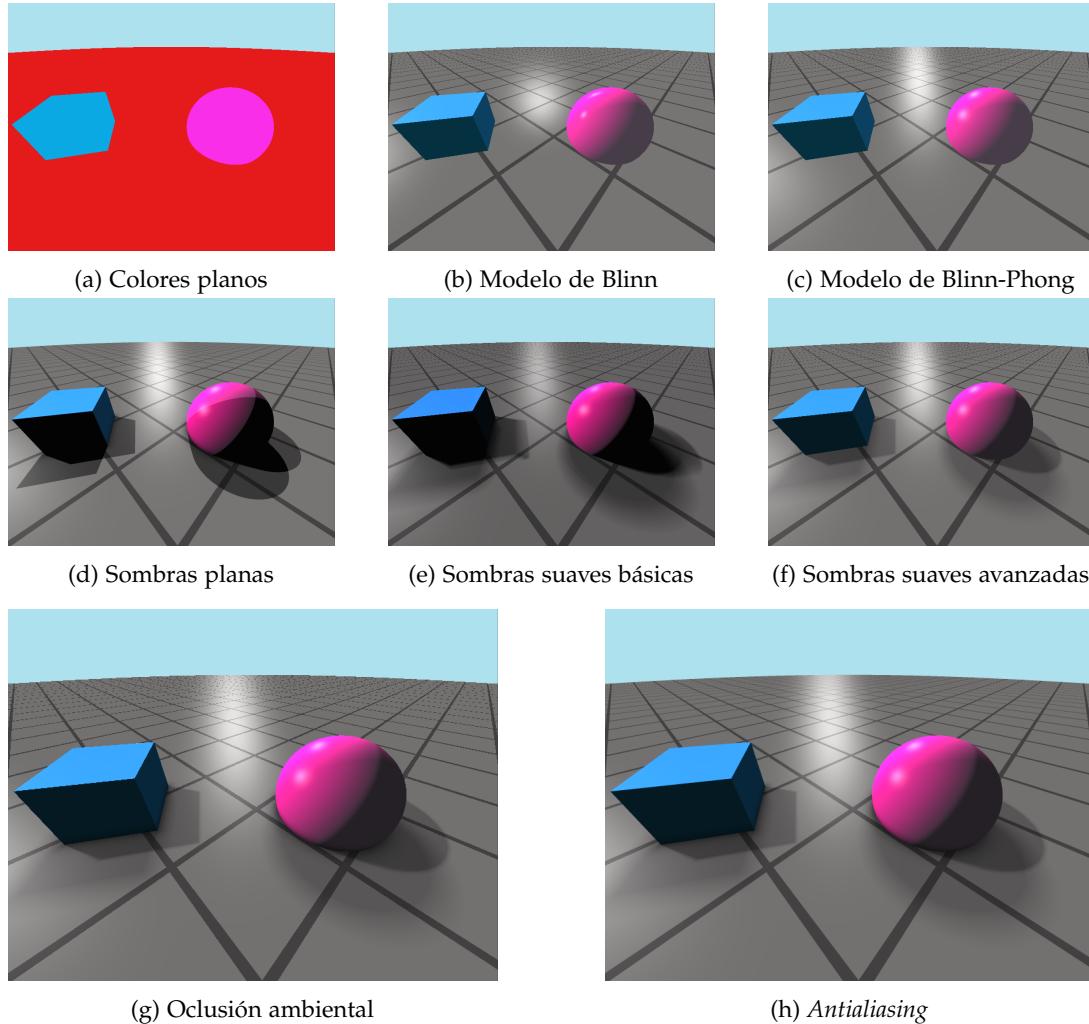


Figura B.1.: Renderizado de SDF aplicando técnicas de iluminación y renderizado avanzadas



## Bibliografía

- [1] T. W. Sederberg and A. K. Zundel, "Scan line display of algebraic surfaces," in *International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 1989.
- [2] J. C. Hart, D. J. Sandin, and L. H. Kauffman, "Ray tracing deterministic 3-d fractals," in *Proceedings of the 16th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 289–296, 1989.
- [3] J. C. Hart, "Sphere tracing: A geometric method for the antialiased ray tracing of implicit surfaces," *The Visual Computer*, vol. 12, no. 10, pp. 527–545, 1996.
- [4] <https://math.okstate.edu/people/binegar/4013-U98/4013-106.pdf>. Accessed: 2023-5-30.
- [5] C. Bálint, G. Valasek, and L. Gergó, "Operations on signed distance functions," *Acta Cybern.*, vol. 24, no. 1, pp. 17–28, 2019.
- [6] Wikipedia contributors, "Función distancia con signo." [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci%C3%B3n\\_distancia\\_con\\_signo&oldid=149321457](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci%C3%B3n_distancia_con_signo&oldid=149321457). Accessed: 23-05-21.
- [7] C. Dapogny and P. Frey, "Computation of the signed distance function to a discrete contour on adapted triangulation," *Calcolo*, vol. 49, pp. 193–219, Sep 2012.
- [8] M. Delfour and J.-P. Zolésio, *Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus and Optimization*, vol. 4. 01 2001.
- [9] A. R. Sarabia, "Apuntes de la asignatura curvas y superficies de la universidad de granada," curso 21-22.
- [10] B. Wyvill, A. Guy, and E. Galin, "Extending the csg tree. warping, blending and boolean operations in an implicit surface modeling system," in *Computer Graphics Forum*, vol. 18, pp. 149–158, Wiley Online Library, 1999.
- [11] B. Foundation, "Blender - 3d creation software - git repository," Último acceso: 6 mayo 2023.
- [12] M. Molecule, "Dreams," 2020.
- [13] I. Quílez, "Smooth minimun." <https://iquilezles.org/articles/smin/>, [En línea]. Último acceso: 6 mayo 2023.
- [14] I. Quílez, "Distance stimation." <https://iquilezles.org/articles/distance/>, [En línea]. Último acceso: 6 junio 2023.
- [15] P.-A. Fayolle, "Signed distance function computation from an implicit surface," *arXiv preprint arXiv:2104.08057*, 2021.
- [16] D. A. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2008.
- [17] T. Hibi, *Gröbner Bases: Statistics and Software Systems*. Springer Tokyo.
- [18] D. Y. Melesse, "Groebner bases and an improvement on buchberger's algorithm," 2007.
- [19] A. S. Semyonov, *Buchberger's Criteria and Trivial Syzygies*.
- [20] E.-W. Chionh and R. N. Goldman, "Using multivariate resultants to find the implicit equation of a rational surface," *The Visual Computer*, vol. 8, pp. 171–180, 1992.
- [21] B. Grenet, P. Koiran, and N. Portier, "On the complexity of the multivariate resultant," *Journal of Complexity*, vol. 29, no. 2, pp. 142–157, 2013.

## Bibliografía

- [22] Wikipedia contributors, "Homogeneous polynomial." [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Homogeneous\\_polynomial&oldid=1160440258](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Homogeneous_polynomial&oldid=1160440258), June 2023. Accessed: NA-NA-NA.
- [23] E.-W. Chionh and R. N. Goldman, "Implicitizing rational surfaces with base points by applying perturbations and the factors of zero theorem," in *Mathematical methods in computer aided geometric design II*, pp. 101–110, Elsevier, 1992.
- [24] D. Manocha and J. F. Canny, "Implicit representation of rational parametric surfaces," *Journal of Symbolic Computation*, vol. 13, no. 5, pp. 485–510, 1992.
- [25] O. Foundation, "Opengl - api for rendering 2d and 3d graphics."
- [26] OpenGL, "Coordinate systems." <https://learnopengl.com/Getting-started/Coordinate-Systems>. Accessed: 2023-5-9.
- [27] OpenGL, "Matrices." <http://www.opengl-tutorial.org/es/beginners-tutorials/tutorial-3-matrices/#matrices-modelo-vista-y-proyecci%C3%B3n>. Accessed: 2023-5-10.
- [28] C. Ureña, "Apuntes de la asignatura informática gráfica de la universidad de granada," curso 21-22.
- [29] T. Thormählen, "Light and materials - graphics programming - part 10 - chapter 1." [https://www.mathematik.uni-marburg.de/~thormae/lectures/graphics1/graphics\\_10\\_1\\_eng\\_web.html](https://www.mathematik.uni-marburg.de/~thormae/lectures/graphics1/graphics_10_1_eng_web.html), Dec. 2022. Accessed: 2023-5-20.
- [30] B. T. Phong, "Illumination for computer generated pictures," *Commun. ACM*, vol. 18, p. 311–317, jun 1975.
- [31] O. Knill, "Math s21a: Multivariable calculus." <https://people.math.harvard.edu/~knill/teaching/summer2011/handouts/34-gradient.pdf>. Accessed: 2022-9-18.
- [32] I. Quílez, "Normals for an sdf." <https://iquilezles.org/articles/normalsSDF/>, [En línea]. Último acceso: 6 mayo 2023.
- [33] S. Aaltonen, "GPU-based clay simulation and ray-tracing tech in claybook," 2018.
- [34] nurof3n, "Ray marched improved shadows."
- [35] "The book of shaders." <https://thebookofshaders.com/glossary/?search=smoothstep>. Accessed: 2023-6-1.
- [36] Digital Foundry, "Ratchet and clank: Rift apart PS5 - performance + graphics - all modes tested!," June 2021.
- [37] A. Evans, "Fast approximations for global illumination on dynamic scenes," in *ACM SIGGRAPH 2006 Courses*, pp. 153–171, 2006.
- [38] G. Geer, "Normally sampled ambient occlusion." <https://www.csh.rit.edu/~gman/PersonalWebpage/ao.html>. Accessed: 2023-6-4.
- [39] Wikipedia contributors, "Supersampling." <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Supersampling&oldid=1143405382>, Mar. 2023. Accessed: 2023-6-4.
- [40] @Daninet, "Exactnumber: A library for arbitrary-precision decimals." <https://github.com/Daninet/exactnumber>, 2023. [Online; Último acceso 10-Julio-2023].
- [41] @jiggzson, "Nerdamer: Computer algebra system in javascript." <https://github.com/jiggzson/nerdamer>, "2023". [Online; Último acceso 10-Julio-2023].