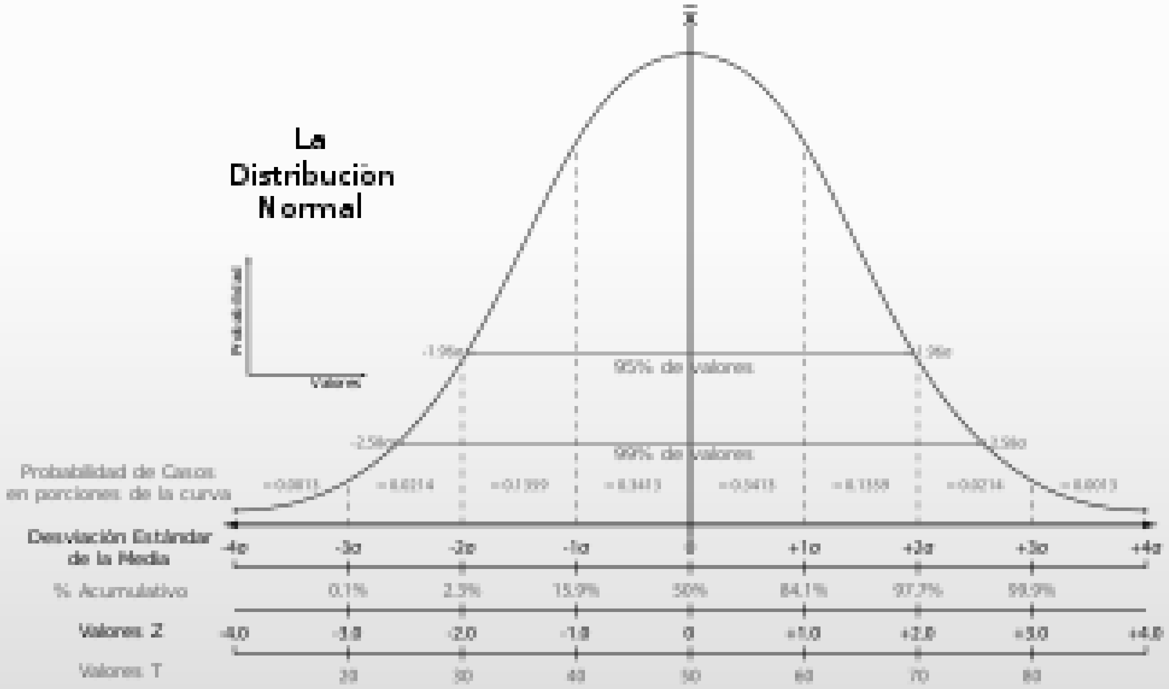
UNIVERSIDAD MARIANO GÁLVEZ DE GUATEMALA

"Y conoceréis la verdad y la verdad os hará libres" Juan 8:32

Estadística I



Ing. Neftalí Cristian García López

Espacio muestral

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estadístico se le llama espacio muestral y se representa con el símbolo S.

A cada resultado en un espacio muestral se le llama elemento o miembro del espacio muestral, o simplemente punto muestral. Si el espacio muestral tiene un número finito de elementos, podemos listar los miembros separados por comas y encerrarlos entre llaves. Por consiguiente, el espacio muestral S, de los resultados posibles cuando se lanza una moneda al aire, se puede escribir como:

S = {H, T}

en donde H y T corresponden a "caras" y "cruces", respectivamente.

EVENTOS

Eventos

Es posible concebir que un evento puede ser un subconjunto que incluye todo el espacio muestral S, o un subconjunto de S que se denomina conjunto vacío y se denota con el símbolo $\emptyset$, que no contiene ningún elemento.

$$\boldsymbol{B = \{x/x \text{ es un factor par de } 7\}}$$

$$\boldsymbol{B = \emptyset}$$

CONTEO DE PUNTOS MUESTRALES

Regla de multiplicación

Regla 1:

- Si una operación se puede llevar a cabo en n1 formas, y si para cada una de éstas se puede realizar una segunda operación en n2 formas, entonces las dos operaciones se pueden ejecutar juntas de n1*n2 formas.

¿Cuántos puntos muestrales hay en el espacio muestral cuando se lanza un par de dados una vez?

		1º DADO					
		1	2	3	4	5	6
2º DADO	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

$$P(\text{la suma de } 8) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{5}{36}$$

Solución: El primer dado puede caer en cualquiera de $n1 = 6$ maneras. Para cada una de esas 6 maneras el segundo dado también puede caer en $n2 = 6$ formas. Por lo tanto, el par de dados puede caer en:

$$n1*n2 = (6)(6) = 36 \text{ formas posibles.}$$

Regla de multiplicación

Regla 2:

- Si una operación se puede ejecutar en n1 formas, y si para cada una de éstas se puede llevar a cabo una segunda operación en n2 formas, y para cada una de las primeras dos se puede realizar una tercera operación en n3 formas, y así sucesivamente, entonces la serie de k operaciones se puede realizar en n1*n2...nk formas.

Sam va a armar una computadora y para comprar las partes tiene que elegir entre las siguientes opciones: dos marcas de circuitos integrados, cuatro marcas de discos duros, tres marcas de memorias y cinco tiendas locales en las que puede adquirir un conjunto de accesorios. ¿De cuántas formas diferentes puede Sam comprar las partes?

Solución: Como $n1 = 2$, $n2 = 4$, $n3 = 3$ y $n4 = 5$,

hay $n1 \times n2 \times n3 \times n4 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$ formas diferentes de comprar las partes.

Teorema 1:
El número de permutaciones de n objetos es n!

Ejemplo:

El número de permutaciones de las cuatro letras a, b, c y d será 4! = 24.

Teorema 2:

El número de permutaciones de n objetos distintos tomados de r a la vez es:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ejemplo: En un año se otorgará uno de tres premios (a la investigación, la enseñanza y el servicio) a algunos de los estudiantes, de un grupo de 25, de posgrado del departamento de estadística. Si cada estudiante puede recibir un premio como máximo, ¿cuántas selecciones posibles habría?

Solución: Como los premios son distinguibles, se trata de un problema de permutación. El número total de puntos muestrales es:

$$_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = (25)(24)(23) = 13{,}800.$$

Teorema 3:
El número de permutaciones de n objetos ordenados en un círculo es $(n – 1)!$.

Ejemplo: ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 amigos alrededor de una mesa circular?

Solución: Número de elementos: n = 5.

Ahora calculamos el número de permutaciones circulares:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_5 = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Los 5 amigos, se pueden sentar de 24 formas diferentes

Teorema 4: El número de permutaciones distintas de n objetos, en el que n1 son de una clase, n2 de una segunda clase,..., nk de una k-ésima clase es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Ejemplo: Durante un entrenamiento de fútbol americano colegial, el coordinador defensivo necesita tener a 10 jugadores parados en una fila. Entre estos 10 jugadores hay 1 de primer año, 2 de segundo año, 4 de tercer año y 3 de cuarto año, respectivamente. ¿De cuántas formas diferentes se pueden arreglar en una fila si lo único que los distingue es el grado en el cual están?

Solución: Usando directamente el teorema 4, el número total de arreglos es:

$$\frac{10!}{1!\,2!\,4!\,3!} = 12{,}600.$$

Teorema 5:

El número de formas de partir un conjunto de n objetos en r celdas con n1 elementos en la primera celda, n2 elementos en la segunda, y así sucesivamente, es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!},$$

donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

Ejemplo

Un hotel va a hospedar a siete estudiantes de posgrado que asisten a una conferencia, ¿en cuántas formas los puede asignar a una habitación triple y a dos dobles?

Solución: El número total de particiones posibles sería:

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$$

Teorema 6:
El número de combinaciones de n objetos distintos tomados de r a la vez es: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

Ejemplo: Un niño le pide a su madre que le lleve cinco cartuchos de Game-BoyTM de su colección de 10 juegos recreativos y 5 de deportes. ¿De cuántas maneras podría su madre llevarle 3 juegos recreativos y 2 de deportes?

Solución: El número de formas de seleccionar 3 cartuchos de 10 es :

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

- El número de formas de seleccionar 2 cartuchos de 5 es:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

PROBABILIDAD DE UN EVENTO

Probabilidad de un evento

- La probabilidad de un evento A es la suma de los pesos de todos los puntos muestrales en A. Por lo tanto,

$$0 \leq P(A) \leq 1,\ P(\varphi) = 0 \text{ y } P(S) = 1.$$

Además, si A1, A2, A3,⋯ es una serie de eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P\ (A1 \cup A2 \cup A3 \cup \cdots) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + \cdots.$$

Regla 3:

Si un experimento puede dar como resultado cualquiera de N diferentes resultados que tienen las mismas probabilidades de ocurrir, y si exactamente n de estos resultados corresponden al evento A, entonces la probabilidad del evento A es:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Ejemplo: A una clase de estadística para ingenieros asisten 25 estudiantes de ingeniería industrial, 10 de ingeniería mecánica, 10 de ingeniería eléctrica y 8 de ingeniería civil. Si el profesor elige al azar a un estudiante para que conteste una pregunta.

¿Qué probabilidades hay de que el elegido sea un estudiante de ingeniería industrial?

Solución: Las especialidades de los estudiantes de ingeniería industrial, mecánica, eléctrica y civil se denotan con I, M, E y C, respectivamente. El grupo está integrado por 53 estudiantes y todos tienen las mismas probabilidades de ser seleccionados.

a) Como 25 de los 53 individuos estudian ingeniería industrial, la probabilidad del evento I, es decir, la de elegir al azar a alguien que estudia ingeniería industrial, es

$$P = (I) = \frac{25}{53}$$

REGLAS ADITIVAS

Teorema 7

Si A y B son dos eventos, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ejemplo: Al final del semestre John se va a graduar en la facultad de ingeniería industrial de una universidad. Después de tener entrevistas en dos empresas en donde quiere trabajar, determina que la probabilidad que tiene de lograr una oferta de empleo en la empresa A es 0.8, y que la probabilidad de obtenerla en la empresa B es 0.6. Si, por otro lado, considera que la probabilidad de recibir ofertas de ambas empresas es 0.5,

¿Qué probabilidad tiene de obtener al menos una oferta de esas dos empresas?

Solución: Si usamos la regla aditiva tenemos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9.$$

Teorema 8

Para tres eventos A, B y C. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Ejemplo: Las probabilidades de que un individuo que compra un automóvil nuevo elija uno de color verde, uno blanco, uno rojo o uno azul son 0.09, 0.15, 0.21 y 0.23, respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que un comprador dado adquiera un automóvil nuevo que tenga uno de esos colores?

Solución:

Sean V, B, R y A los eventos de que un comprador seleccione, respectivamente, un automóvil verde, blanco, rojo o azul. Como estos cuatro eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad es :

$$P(V \cup B \cup R \cup A) = P(V) + P(B) + P(R) + P(A) = 0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23 = 0.68.$$

Teorema 9

Si A y A' son eventos complementarios, entonces P(A) + P(A') = 1

Ejemplo: Si las probabilidades de que un mecánico automotriz dé servicio a 3, 4, 5, 6, 7, 8 o más vehículos en un día de trabajo dado son 0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10 y 0.07, respectivamente, ¿Cuál es la probabilidad de que dé servicio al menos a 5 vehículos el siguiente día de trabajo?

Solución: Sea E el evento de que al menos 5 automóviles reciban servicio. Ahora bien, $P(E) = 1 – P(E')$, donde E' es el evento de que menos de 5 automóviles reciban servicio.

Como: $P(E') = 0.12 + 0.19 = 0.31$.

del teorema 9 se deduce que: $P(E) = 1 – 0.31 = \mathbf{0.69}$

PROBABILIDAD CONDICIONAL, INDEPENDENCIA Y REGLA DEL PRODUCTO

Teorema 10

Si en un experimento pueden ocurrir los eventos A y B, entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$, siempre que $P(A) > 0$.

Ejemplo: Suponga que tenemos una caja de fusibles que contiene 20 unidades, de las cuales 5 están defectuosas. Si se seleccionan 2 fusibles al azar y se retiran de la caja, uno después del otro, sin reemplazar el primero, ¿cuál es la probabilidad de que ambos fusibles estén defectuosos?

Solución: Sean A el evento de que el primer fusible esté defectuoso y B el evento de que el segundo esté defectuoso; entonces, interpretamos A ∩ B como el evento de que ocurra A, y entonces B ocurre después de que haya ocurrido A. La probabilidad de sacar primero un fusible defectuoso es 1/4; entonces, la probabilidad de separar un segundo fusible defectuoso de los restantes 4 es 4/19. Por lo tanto,

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19}$$

Teorema 11: Dos eventos A y B son independientes si y sólo si: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Por lo tanto, para obtener la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes simplemente calculamos el producto de sus probabilidades individuales.

Ejemplo: Una pequeña ciudad dispone de un carro de bomberos y una ambulancia para emergencias. La probabilidad de que el carro de bomberos esté disponible cuando se necesite es 0.98 y la probabilidad de que la ambulancia esté disponible cuando se le requiera es 0.92. En el evento de un herido en un incendio, calcule la probabilidad de que tanto la ambulancia como el carro de bomberos estén disponibles, suponiendo que operan de forma independiente.

Solución: Sean A y B los respectivos eventos de que estén disponibles el carro de bomberos y la ambulancia. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.98)(0.92) = 0.9016.$$

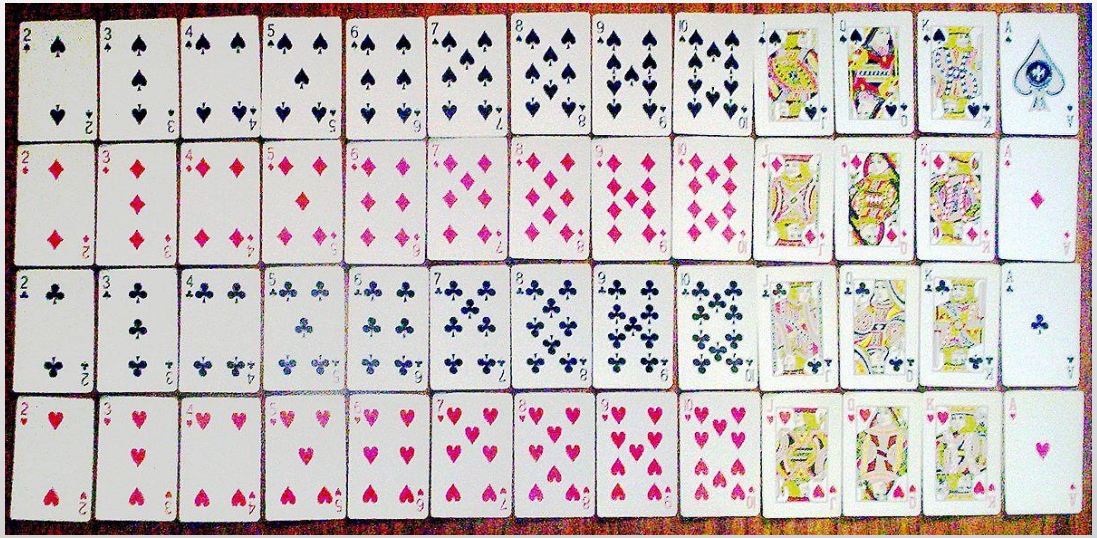
Teorema 12: Si, en un experimento, pueden ocurrir los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\cdots P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}).$$

Si los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son independientes, entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)$$

Ejemplo: Se sacan tres cartas seguidas, sin reemplazo, de una baraja ordinaria. Encuentre la probabilidad de que ocurra el evento $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, donde A_1 es el evento de que la primera carta sea un as rojo, A_2 el evento de que la segunda carta sea un 10 o una jota y A_3 el evento de que la tercera carta sea mayor que 3 pero menor que 7.



Solución: Primero definimos los eventos:

A1 : la primera carta es un as rojo,

A2 : la segunda carta es un 10 o una jota

A3 : la tercera carta es mayor que 3 pero menor que 7.

Ahora bien,

A1 : la primera carta es un as rojo,

$P(A_1) = \frac{2}{52}$,

A2 : la segunda carta es un 10 o una jota

$P(A_2 | A_1) = \frac{8}{51}$,

A3 : la tercera carta es mayor que 3 pero menor que 7

$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50}$,

Por lo tanto, por medio del teorema 12,

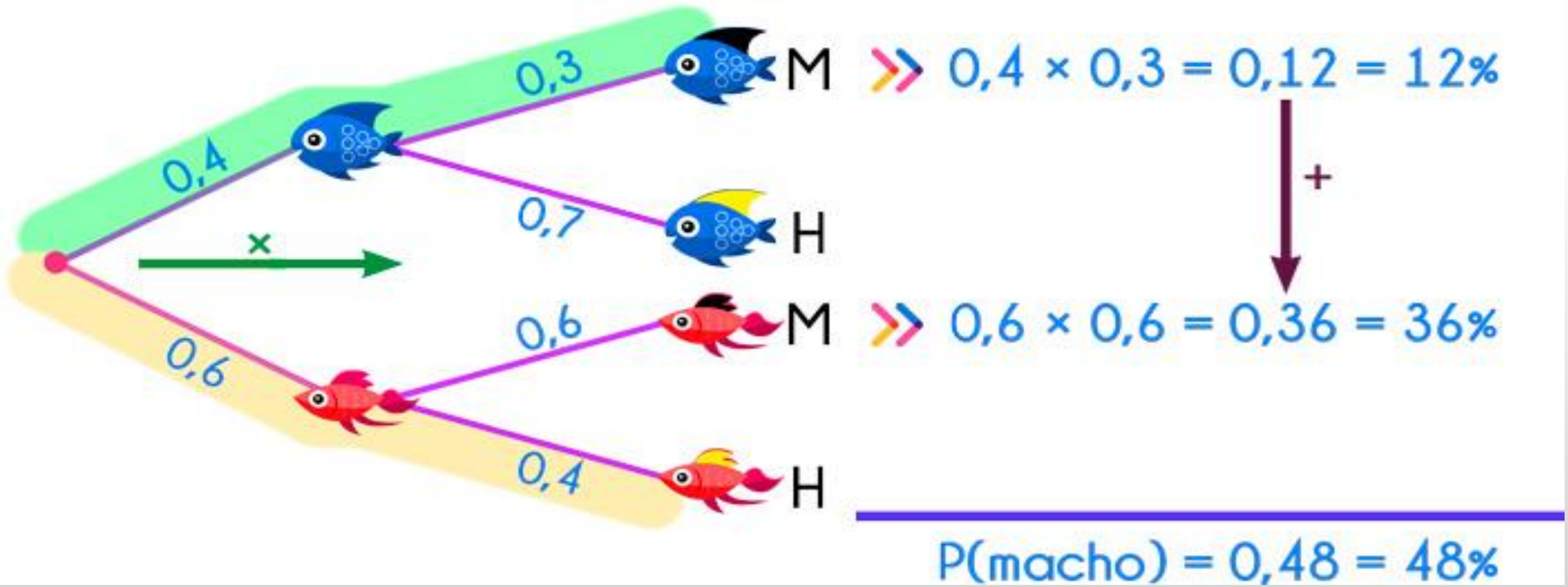
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$
$$= \left(\frac{2}{52}\right)\left(\frac{8}{51}\right)\left(\frac{12}{50}\right) = \frac{8}{5525},$$

REGLA DE BAYES

PROBABILIDAD TOTAL: $P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + \cdots + P(A_n).P(B|A_n) = \sum P(A_i).P(B|A_i)$

Ejemplo: En un acuario se tienen solo 2 especies de peces, el 40% son de la especie azul y el 60% son de la especie roja. De la especie azul, el 30% son machos; mientras que, de la especie roja, el 40% son hembras. ¿Cuál es la probabilidad de que un pez elegido aleatoriamente en el acuario sea macho?

Cuando avanzamos de izquierda a derecha, multiplicamos las probabilidades; cuando avanzamos de arriba hacia abajo, sumamos las probabilidades.



Regla de Bayes: Si los eventos B1 , B2 ,..., Bk constituyen una partición del espacio muestral S, donde $P(B_i) \neq 0$ para i = 1, 2,...,k, entonces, para cualquier evento A en S, tal que $P(A) \neq 0$,

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)} \quad \text{para} \quad r = 1, 2, \ldots, k.$$

Ejemplo: Tres máquinas de cierta planta de ensamble, B1 , B2 y B3 , montan 30%, 45% y 25% de los productos, respectivamente. Se sabe por experiencia que 2%, 3% y 2% de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente, tienen defectos.

Si se elige al azar un producto y se encuentra que está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido ensamblado con la máquina B3 ?

Podemos aplicar la regla de eliminación y escribir

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

Si nos remitimos al diagrama de árbol de la figura 2.15 encontramos que las tres ramas dan las probabilidades

$$P(B_1)P(A|B_1) = (0.3)(0.02) = 0.006,$$

$$P(B_2)P(A|B_2) = (0.45)(0.03) = 0.0135,$$

$$P(B_3)P(A|B_3) = (0.25)(0.02) = 0.005,$$

en consecuencia,

$$P(A) = 0.006 + 0.0135 + 0.005 = 0.0245.$$

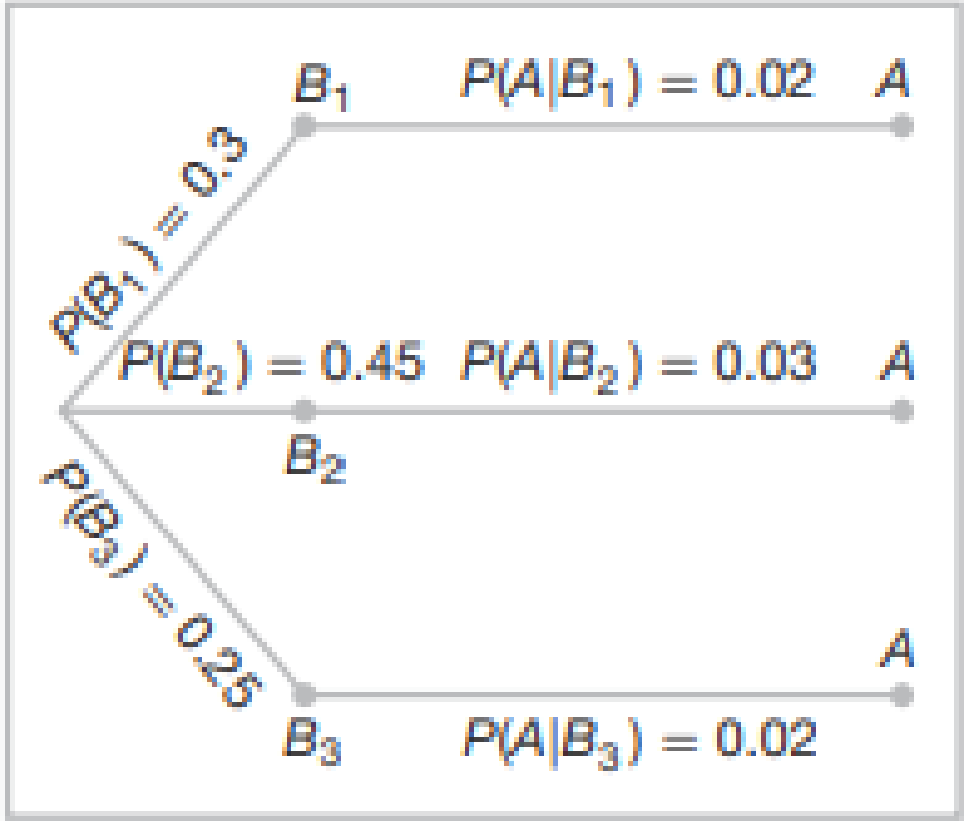


Figura 2.15: Diagrama de árbol para el ejemplo 2.41.

Solución: Podemos utilizar la regla de Bayes para escribir:

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)},$$

Y después al sustituir las probabilidades calculas en el ejemplo anterior, tenemos:

$$P(B_3|A) = \frac{0.005}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.005}{0.0245} = \frac{10}{49}.$$

Forma simple del teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$

Donde:

- A y B son eventos, y además: P(B) ≠ 0.
- P(A|B): es la probabilidad de que ocurra A, dado que ha ocurrido B.
- P(B|A): es la probabilidad de que ocurra B, dado que ha ocurrido A.
- P(A): es la probabilidad de que ocurra A.
- P(B): es la probabilidad de que ocurra B.

Ejemplo:

En una academia, la probabilidad de que a un alumno seleccionado al azar le guste el helado es del 60 %, mientras que la probabilidad de que a un alumno le guste la torta es del 36 %. Además, se sabe que la probabilidad de que a un alumno le guste la torta dado que le gusta el helado es del 40 %. Calcular la probabilidad de que a un alumno le guste el helado, dado que le gusta la torta.

Solución:

Primero definimos los 2 eventos con los que vamos a trabajar:

- h: que a un alumno le guste el helado.
- t: que a un alumno le guste la torta.

Tenemos los siguientes datos:

- $P(h) = 0,6$.
- $P(t) = 0,36$.
- $P(t|h) = 0,4$.

Nos piden calcular $P(h|t)$.

- Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(h|t) = \frac{P(h) \cdot P(t|h)}{P(t)}$$

$$P(h|t) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}36} = \frac{0{,}24}{0{,}36} = \frac{\cancel{24}}{\cancel{36}} = \frac{2}{3} = 0{,}6667 = 66{,}67\,\%$$