Stochastik 1

Blatt 6

Jackie Huynh (638 88 88), Daniel Speck (632 13 17)

18.05.2015

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Die Aufgabe kann mit der hypergeometrischen Verteilung modelliert werden, allgemein gilt:

$$P^x\{m\} = P(X = m) = \frac{\binom{M}{m} * \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

Aus der Aufgabe ist zu entnehmen: $N = 200,\ n = 4,\ M = 200 * 0.05 = 10$

Für diese Aufgabe ist nun gesucht:

$$\begin{aligned}
P^x\{1 \leq m \leq 4\} &= P^x\{m = 1\} + P^x\{m = 2\} + P^x\{m = 3\} + P^x\{m = 4\} \\
&= \frac{\binom{10}{1} * \binom{200-10}{4-1}}{\binom{200}{4}} + \frac{\binom{10}{2} * \binom{200-10}{4-2}}{\binom{200}{4}} + \frac{\binom{10}{3} * \binom{200-10}{4-3}}{\binom{200}{4}} + \frac{\binom{10}{4} * \binom{200-10}{4-4}}{\binom{200}{4}} \\
&= \frac{\binom{10}{1} * \binom{190}{3}}{\binom{200}{4}} + \frac{\binom{10}{2} * \binom{190}{2}}{\binom{200}{4}} + \frac{\binom{10}{3} * \binom{190}{1}}{\binom{200}{4}} + \frac{\binom{10}{4} * \binom{190}{0}}{\binom{200}{4}} \\
&\approx 0.174 + 0.012 + 0.0004 + 0.000003 \approx 0.186
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von gerundet 19%, dass eine Lieferung reklamiert wird.

Aufgabe 3

(a) Da die Personen unabhängig voneinander ausgewählt wurden und alle dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, die Blutgruppe AB negativ zu haben, können wir als zugrundeliegende Verteilung folgendes annehmen:

X sei die Verteilung und X ist binomialverteilt mit $Bin_{(50,\ 0.01)}$

Gesucht ist nun $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{50}{0} * 0.01^0 * (1 - 0.01)^{50-0}$

$= 1 - 1 * 1 * (0.99)^{50} \approx 1 - 0.61 = 0.39$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person dieser 50 die Blutgruppe AB negativ hat, beträgt also ca. 39%.

Eine approximative Lösung ist mittels der Poissonverteilung möglich.

Allgemein gilt für eine derartige Verteilung:

$$P_\lambda(\{k\}) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!} \tag{1}$$

In dieser Aufgabe ist λ mit $\lambda = n * p = 50 * 0.01 = 0.5$ gegeben.
Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit wie folgt approximieren:

$$P_\lambda(\{k \geq 1\}) = \sum_{i=1}^{k} e^{-\lambda} * \frac{\lambda^i}{i!} = 1 - P_\lambda(\{k = 0\}) = 1 - e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!} \tag{2}$$

Denn die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt 1 und $P_\lambda(\{k = 0\})$ ist das Komplement von $P_\lambda(\{k \geq 1\})$, sodass sich gerade $P_\lambda(\{k \geq 1\}) = 1 - P_\lambda(\{k = 0\})$ ergibt.

Daraus ergibt sich:

$$P_\lambda(\{k \geq 1\}) = 1 - P_\lambda(\{k = 0\}) = 1 - e^{-\lambda} * \underbrace{\frac{\lambda^0}{0!}}_{=1} = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-0.5} \approx 0.39$$

Damit ergibt sich aus der Poissonverteilung gerundet ebenfalls eine Wahrscheinlichkeit von 39% (approximiert).

(b) Da eine geeignete Approximation reicht, kann hier die Poissonverteilung benutzt werden, da $n \geq 50$ aufgrund der 50 Personen erfüllt ist und $p \leq 0.05$ gilt, da die Wahrscheinlichkeit hier $p = 0.01$ ist.

Für mindestens eine Person gilt:

$$P_\lambda(\{k \geq 1\}) \overset{(2)}{=} 1 - e^{-\lambda} * \underbrace{\frac{\lambda^0}{0!}}_{=1} \overset{(\lambda = n*p)}{=} 1 - e^{-n*p} \tag{3}$$

Nun ist n gesucht für $p = 0.01$ und einer Gesamtwahrscheinlichkeit von mindestens 50%, dass das Ereignis zutrifft:

$$\begin{aligned} 0.5 &\overset{(3)}{\leq} 1 - e^{-n*p} \;\Leftrightarrow\; 0.5 + e^{-n*p} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; e^{-n*p} \leq 0.5 \\ &\Leftrightarrow\; ln(e^{-n*p}) \leq ln(0.5) \;\Leftrightarrow\; -n * p \leq ln(0.5) \\ &\Leftrightarrow\; n \geq -\frac{ln(0.5)}{p} = -\frac{ln(0.5)}{0.01} \approx 69.31 \end{aligned} \tag{4}$$

Rundet man das Ergebnis aus (4) ab, so kommt man zu dem Schluss, dass man mindestens eine Gruppe von 70 voneinander unabhängig ausgewählten Personen benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% davon ausgehen kann, dass mindestens einer aus dieser Gruppe die Blutgruppe AB negativ hat.

$\square$