Stochastik 1

Blatt 1

Jackie Huynh (   ), Daniel Speck (632 13 17)

13.04.2015

Aufgabe 1

(a) $\quad (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
$\Leftrightarrow (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = A \setminus (B \cap C)$
$\Leftrightarrow A \cap (B^c \cup C^c) = A \setminus (B \cap C)$
$\Leftrightarrow A \cap (B^c \cup C^c) = A \cap (B^c \cup C^c)$

Da per Äquivalenzumformungen die Gleichheit beider Seiten gezeigt werden können, ist die Richtigkeit der Gleichung bestätigt.

(b) $\quad (A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

Diese Gleichung ist inkorrekt, Beweis:
Sei $M_1 = \{ \ x \mid x \in A \vee x \in B, x \notin C \ \}$ die linke Seite der Gleichung, so ist ein Element genau dann in der resultierenden Menge M_1 enthalten, wenn es in A oder B, nicht aber in C enthalten ist.
Sei $M_2 = \{ \ x \mid x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C) \ \}$ die rechte Seite der Gleichung, so ist ein Element genau dann in der resultierenden Menge M_2 enthalten, wenn es in A enthalten ist oder aber in B und zugleich nicht in C.
Das bedeutet, in der Menge M_1 kann kein Element aus $A \cap C$ enthalten sein, in der Menge M_2 sind aber alle Elemente aus $A \cap C$ enthalten.
Damit gilt $M_1 \neq M_2$, sodass die Gleichung also inkorrekt ist.

$\square$

Aufgabe 2

(a) $\quad L_1 = A \cap B \cap C$

(b) $\quad L_2 = (A \cap (B^c \cup C^c)) \cup (B \cap (A^c \cup C^c)) \cup (C \cap (A^c \cup B^c))$

(c) $\quad L_3 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(d) $\quad L_4 = L_1 \cup L_2$

$\square$

Aufgabe 3

(a) $\Omega = \{ \ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{1, 2\} \ \}$ P $\hat{=}$ Laplacemaß

$\omega_i = 1$ $\hat{=}$ Münze zeigt Zahl
$\omega_i = 2$ $\hat{=}$ Münze zeigt Kopf

(b) Bestimme Teilmengen A und B:

$A = \{ \ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 \ \}$
$B = \{ \ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_2 = \omega_3 \ \}$

(c) Ereignisse $A \cap B$ und $A \setminus B$ angeben:

$A \cap B = \{ \ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \ \}$
Die Menge $A \cap B$ enthält alle Elemente, in denen ω_1 mit ω_2 übereinstimmt und dann wiederum ω_2 mit ω_3 übereinstimmt. Das ist genau dann der Fall, wenn alle drei Würfe identisch sind, also alle drei Würfe Zahl oder alle drei Würfe Kopf zeigen.

$A \setminus B = \{ \ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_2 \neq \omega_3 \ \}$
Die Menge $A \setminus B$ enthält alle Elemente, in denen ω_1 identisch mit ω_2, ω_2 aber ungleich mit ω_3 ist. Jenes ist genau dann der Fall, wenn die ersten beiden Würfe identisch waren, der dritte Wurf aber von den ersten beiden abweicht.

(d) Wahrscheinlichkeiten von A und $A \cap B$:

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2*2}{2*2*2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$